

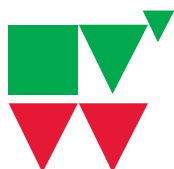
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEERAAR

HET BOEK WEET ALLES
RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL
SPIEKBOEKJE REKENEN
IMPRESSIES VERENIGINGSDAG
UITDAGENDE PROBLEMEN
EEN OPMERKELIJKE SERIE BOEKEN

NR.4



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 90 | FEBRUARI 2015

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 90 NR 4

IN DIT NUMMER

HET BOEK WEET ALLES

FRANS BALLERING

4

GETUIGEN

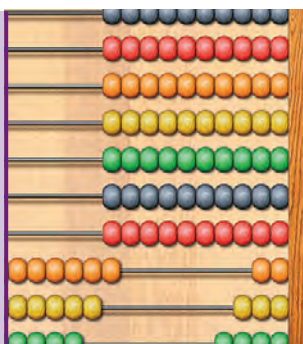
DANNY BECKERS

6

RUBRIEK
WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

8



KLEINTJE DIDACTIEK

LONNEKE BOELS

10

SPIEKBOEKJE REKENEN

NELLEKE DEN BRABER

11

HET FIZIER GERICHT OP...

MICHIEL VELDHIJS

14

UITDAGENDE
PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

17



EEN OPMERKELIJKE SERIE BOEKEN

WIM KLEIJNE

19

VANUIT DE OUDE DOOS

TON LECLUSE

23

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

24

De coverafbeelding is van Rinus Roelofs:
Twaalf identieke delen schuif je in elkaar
tot dit kunstwerk. Het uit elkaar schuiven
is vervolgens onmogelijk!
Website www.rinusroelofs.nl

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

VERNIEUWDE PROGRAMMA'S LEIDEN TOT AANPASSINGEN ADVISERING

HIELKE PEEREBOOM

25

WIS EN WAARACHTIG

36

VERENIGINGSNIEUWS

IMPRESSIES VERENIGINGSDAG



[5, 15, 28] 20

RECREATIE

40

SERVICEPAGINA

42

Kort vooraf

U heeft nu het eerste nummer van dit jaar in handen en dat staat traditiegetrouw voor een deel in het teken van de Verenigingsdag. Dat was deze keer een bijzondere. Niet alleen omdat er een recordopkomst was en er een geweldig programma klaar lag met het oog op de komende vernieuwingen in het curriculum. Maar ook vanwege het afscheid van Marian Kollenveld, onze voorzitter sinds 1999. In ons vorige nummer heeft u haar afscheidsrede kunnen lezen. En in dit nummer vindt u de tekst die Henk Rozenhart uitsprak aan het einde van de vergadering, waarna Marian een staande ovatie in ontvangst mocht nemen. Ze is benoemd tot erelid van de NVvW. We namen ook afscheid van Kees Lagerwaard. En dat betekent dat we een aantal nieuwe bestuursleden mochten verwelkomen. In het volgende nummer zullen ze zich aan u voorstellen. Na de vergadering was het tijd voor de workshops. En zelf word ik altijd weer vrolijk van onze enthousiaste leden die dan van alles met elkaar delen, informatie over de nieuwe programma's, maar ook inspirerende ideeën voor in de les; tijdens de workshops, bij de kraampjes, of onder de lunch. Omdat het onmogelijk is om alles te bezoeken, vindt u in dit nummer een groot aantal impressies van de diverse workshops; ook weer dankzij onze enthousiaste leden die voor u een stukje wilde schrijven. Dat is dan toch nog even nagenieten en wellicht informatie vergaren die onder de radar is gebleven. We kijken in dit nummer dus terug, maar ook vooruit. Komend schooljaar krijgen havo- en vwo-leerlingen een ander programma voorgeschoteld. Hielke Peereboom beschrijft in dit nummer wat de consequenties zijn voor de advisering in klas 3. Dat is erg actueel in deze tijd van het jaar.

De redactie wenst u veel leesplezier!
Marjanne de Nijs

In de *WiskundE-brief* werd in november gediscussieerd over de stelling: 'Leraar moet lesmateriaal zelf maken'. Naar aanleiding van een opmerking in een van de reacties op deze stelling klom Frans Ballering in de pen.

Uit de *WiskundE-brief* van 16 november 2014: 'Elke docent weet dat het erg veel weerstand uitlokt als je stukken uit "het boek" overslaat of oefeningen toevoegt'.^[1] Het kan nog erger, dacht ik meteen. Een van mijn studenten van de lerarenopleiding kreeg ooit de wind van voren van zijn stagebegeleider omdat hij niet begon met de eerste opgave van het nieuwe hoofdstuk. Vmbo-leerlingen kunnen dat niet aan, was zijn motivering. Een ervaren leraar die zoiets zegt: ik begrijp er niets van. Ik maar denken dat het leren van de leerling centraal staat in ons onderwijs.

Proces

Leren is een proces dat vaak onvoorspelbaar verloopt, hoeveel ervaring de leraar ook heeft of hoeveel ervaring de boekenschrijvers ook in de methode hebben gestopt. Ik denk niet dat dat verder iets zegt over de kwaliteit van het boek of van de leraar. Pas uit het vervolg spreekt die laatste kwaliteit. Merk ik dat het voor sommige leerlingen niet duidelijk is? Bedenk ik hoe dat zou kunnen komen en zo nee, ga ik daar dan toch met de leerlingen over in gesprek? Het kan best zijn dat ik een bepaald aspect onvoldoende heb benadrukt, of dat ik een reactie van een leerling wel heb gehoord, maar er niet op ben ingegaan.

Als ik voor een hoofdstuk of een paragraaf een goede inleiding heb verzonnen, kan het best zijn dat ik daarbij een van de laatste opgaven gebruik. Of juist de eerste paar opgaven of de eerste paragraaf daarin verwerk, zodat het daarna niet meer zinvol is om die door te werken. Verder is het voor zwakke leerlingen soms veel beter om de moeilijkste opgaven uit een hoofdstuk niet te doen en (eventueel in plaats daarvan) enkele eenvoudigere oefeningen te maken.

Huiswerk

Ik vermoed dat die weerstand van leerlingen ook te maken heeft met het feit dat in sommige lessen alleen wordt gewerkt aan het huiswerk. In het begin nakijken met het antwoordenboek en daarna het nieuwe huiswerk maken. Mocht je iets niet hebben begrepen, dan opletten. De

leerling kan dan in de verleiding komen om bij een kleine onduidelijkheid maar snel verder te gaan werken, want anders is er voor de volgende les meer (t)huiswerk. Kun je dat een leerling kwalijk nemen? Ik neem het de leraar kwalijk. Volgens mij is huiswerk voor thuis en is er ander werk voor in de les. Ik bepaal aan het eind van de les, mede gekeken naar het verloop ervan, welke opgaven de leerlingen nu thuis, min of meer zelfstandig kunnen maken; als ik daar niet even bij stilsta, loop ik het risico dat ik ze naar huis stuur met opdrachten die ze niet kunnen uitvoeren, met alle negatieve gevolgen van dien. En als er toch een opgave bij is die (te) veel van ze vraagt kan ik erbij zeggen: 'Niet langer dan tien minuten aan deze opgave werken'. Zo hou ik ze gemotiveerd en weten ze waar ze aan toe zijn, hoewel ik me natuurlijk ook regelmatig vergis.

Opvoeden

Daarnaast vind ik dat we leerlingen niet moeten opvoeden als slaafse volgers en dus zelf het goede voorbeeld moeten geven. Ik vermoed dat angst voor meer werk

ook hier hun gedrag bepaalt. En die angst is ongegrond als ik rekening probeer te houden met wat ze kunnen en niet koste wat het kost alle opgaven wil

laten maken. Ook daarom is het jammer als proefwerken al te strak van tevoren zijn ingeroosterd. Dan kan ik me niet permitteren om over het ene hoofdstuk wat langer te doen dan een collega en over een ander hoofdstuk wat korter.

Thuiswerk

Na het bespreken van huiswerk en nieuwe leerstof meteen nieuw huiswerk opgeven, heb ik nooit begrepen. Nog afgezien van de betekenis van het woord huiswerk kan het meer effecten hebben die lijken op: ik stel maar geen vraag. Bijvoorbeeld de leraar merkt dat er hier en daar wat fout gaat en wil iedereen daar op wijzen. Maar ja, een onderbreking van het huiswerk maken, dat betekent thuis meer werk! Ik heb zelfs wel gemerkt dat leerlingen om dezelfde reden niet opletten bij de uitleg van de nieuwe leerstof.

'OOK VOLGENS MIJ IS HUISWERK VOOR THUIS EN
IS ER ANDER WERK VOOR IN DE LES.'

Leerproces

U begrijpt dat ik er voorstander van ben om te proberen het leerproces van mijn klas, eigenlijk van iedere individuele leerling (helaas kan dat niet) te volgen en daarop invloed uit te oefenen, zodat ik aan het eind van de les kan bepalen of het doel van de les inderdaad is bereikt en de opgaven die ik van tevoren heb aangewezen, geschikt zijn om thuis te maken. Dat betekent voor mij ook dat er minstens drie tot vier klassikale momenten moeten zijn waarop leerlingen aan het woord komen, zodat ik daaruit de informatie krijg die ik nodig heb om de les te kunnen beoordelen. Ik denk dat 20 minuten alleen maar werken aan 'huiswerk' niet zo effectief is. Als ik dat onderbreek om leerlingen te laten verwoorden waar het om gaat of hoe ze dit doen, kan ik misschien wel besluiten dat ze minder hoeven te doen omdat het zo goed is gegaan. Hoe belangrijk is het niet om dat ook af en toe te (kunnen) zeggen... Ik zeg het zo nodig ook een keer als het niet (helemaal) waar is, maar hun ijver een beloning verdient. Is dat niet de smeerolie van het leren (en een plezier van het onderwijzen)?

Noot

[1] Voor de volledigheid het hele citaat: 'Als goede leerkracht neem je je klas waar en bepaal je aan de hand van de vorige les hoe het verder moet gaan. Dit uiterst belangrijke, pedagogische proces wordt bemoeilijkt door het hebben van een methode. De methode weet immers niet hoe het er op dit moment in jouw klas aan toegaat. En elke docent weet dat het erg veel weerstand uitlokt als je stukken uit "het boek" overslaat of oefeningen toevoegt. Door zonder methodeboek te werken, is dit ineens geen probleem meer.'

Over de auteur

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen. E-mailadres: fransballering@hetnet.nl

IMPRESSIE VERENIGINGSDAG

[Ed de Moor]



Een halve eeuw geleden bezocht ik de jaarvergadering van *Liwenagel*, de vereniging waaruit met *Wimecos* de NVvW is ontstaan. Buiten het bestuur waren er zo'n tiental leden. Ook was er een lezing van Arie van Tooren, die met een krijtje en een bord liet zien hoe je het algebruik van axioma's kon opzetten. Ik vond het mooi en inspirerend.

Nu waren er zo'n 500 leden, twee lezingen en 29 workshops. Ik heb genoten van de hele dag; twee fantastische lezingen, die lieten zien hoe zeer inhoud en doelen van het wiskundeonderwijs veranderd zijn. Ook van de workshops die ik bezocht, heb ik genoten en weer veel geleerd. Ik had me voor *Wiskundige denkactiviteiten* ingeschreven vanwege de uitdagende titel. Ik had me niet gere-

liseerd dat dit een onderdeel van het nieuwe examenprogramma zal worden. Henk Reuling legde ons een aantal vraagstukken uit het pilot-examen voor. De discussie maakte duidelijk dat het heel lastig is om origineel denken te toetsen en te beoordelen. Eigenlijk vond ik de voorbeelden die hij uit de *Wageningse Methode* liet zien veel meer echte denkactiviteiten.

Logisch redeneren zal ook officieel in het eindexamen komen. Dat hoorde ik bij de workshop van Piet Versnel, die daarover heldere informatie gaf aan de hand van proefopgaven en een duidelijke syllabus van Theo van den Bogaart; mooie puzzels en interessante vraagstellingen over argumenteren. Een praktische en nuttige workshop voor de leraar, die aldoor maar weer wat anders moet doen. Ik vraag mij overigens af of het verstandig is dit onderdeel zo expliciet –inclusief enige formele logica– te examineren. Zou dat niet tot stereotiepe opgaven kunnen leiden? In de jaren '60 van de vorige eeuw hebben we tijdens de *New Math*-golf dezelfde trend gekend. Ook heb ik wel gezien dat het logische redeneren bij het vak filosofie wordt gedaan. Is dat dan niet dubbelop?

Ik heb weer veel geleerd door de directe koppeling naar de praktijk van het onderwijs. Ik sta versteld van de inzet en creativiteit van veel wiskundedocenten. Heel inspirerend! Van de bevlogen leraar moeten we het hebben. Daar draagt zo'n dag aan bij. En Marian Kollenveld vind ik geweldig!

GETUIGEN

REKENSTAAFJES

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



figuur 1 Zeventiende-eeuwse rekenstaafjes uit been. Getoond is de tafel van 2589. Museum Boerhaave, Leiden

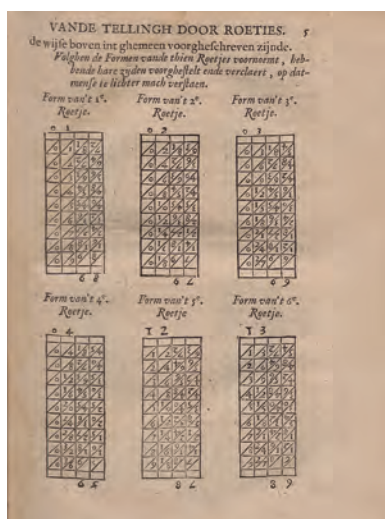
Natuurlijk kent iedere wiskundedocent de Schotse baron John Napier (1550–1617) van zijn uitvinding van de logaritme. De logaritme en de daarop gebaseerde rekenliniaal betekenden voor ingenieurs en astronomen een forse tijdsparing op hun rekenwerk. Toch viel de bekendheid van de logaritme indertijd in het niet bij het succes van een andere vinding van deze zelfde edelman. Naast de tamelijk kostbare tabellen met logaritmen had Napier namelijk nog een aantal andere rekenhulpmiddelen ontwikkeld, die voor eenvoudigere rekenbehoeften een geschikt alternatief boden. Onder deze hulpmiddelen waren met name de rekenstaafjes gedurende de zeventiende en achttiende eeuw waanzinnig populair.

Onder de naam *Napier's rods* stonden ze in de Engelstalige gebieden bekend. Door Adriaan Vlacq (1600–1667) werden ze onder de naam van Napiers roetjes of Napiers botten bekend gemaakt in Nederland. Het was deze Goudse uitgever en liefhebber van wiskunde die het rekenmiddel introduceerde in zijn *Nieuwe Telkonst* uit 1626; hij schreef dit boek samen met zijn stadsgenoot, de landmeter en rekenmeester Ezechiël de Decker (1603–1646). In het tweede deel van de *Nieuwe Telkonst* uit

1627 werden overigens ook de logaritmetafels geïntroduceerd. In het eerste deel behandelden de heren vooral de eenvoudiger rekentechnieken en de manier hoe daarmee te werken. In het bijzonder kwamen de rekenstaafjes en het rekenbord aan bod.

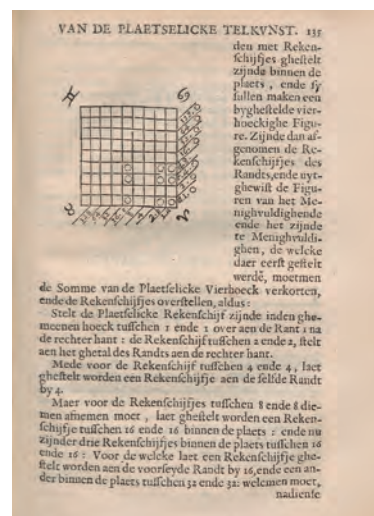
Door op een handige manier de tafels van vermenigvuldiging op een aantal staafjes te plaatsen, konden grote vermenigvuldigingen snel worden uitgeschreven zonder dat het veel werk vergde. De constructie van de staafjes werd uitvoerig toegelicht in het boek van Vlacq. De uitkomsten van de tafeltjes van 0 tot en met 9 werden onder elkaar in vierkantjes genoteerd. Door de tientallen steeds boven de diagonaal en de eenheden onder de diagonaal te plaatsen konden de staafjes, naast elkaar gelegd, de overdracht van de tientallen op visuele wijze aan de goede verstaander duidelijk maken. Op de benen set van de afbeelding kan men bijvoorbeeld de tafel van 2589 aflezen. Het enige dat daarvoor nodig is, is het optellen van de cijfers die in hetzelfde parallellogram staan. In de tweede rij staan de getallen $0 / 4 \ 1 / 0 \ 1 / 6 \ 1 / 8$. Door de bij elkaar staande getallen bij elkaar op te tellen is direct inzichtelijk dat tweemaal 2589 gelijk is aan 5178. Natuurlijk moet je er wel iets van begrijpen, anders gaat het mis. Zie bijvoorbeeld de zesde rij. Daar staat $1 / 2 \ 3 / 0 \ 4 / 8 \ 5 / 4$; door de bij elkaar staande getallen op te tellen krijg je de uitkomst van zes maal 2589: 15534. Maar dan moet je wel begrijpen dat de 13 uit het voorlaatste vak bestaat uit drie eenheden uit dat vak plus een eenheid uit het links naastgelegen vak. Door geschikte sets met staafjes te maken kon een rekenaar alle vermenigvuldigingen exact uitvoeren zonder kennis van logaritmen. Geen wonder dat de rekenstaafjes binnen de kortste keren een groot succes werden. Op dat succes werd meegelift door menig wiskunstenaar die een epistel over de vervaardiging van rekenstaafje en het gebruik ervan aan de pers toevertrouwde. In vrijwel elke Europese taal verschenen er traktaten over de roetjes van Napier. Vele sets rekenstaafjes werden door rekenmeesters vervaardigd uit stukjes hout; daarnaast zijn de meest schitterende exemplaren bekend, al dan niet vervaardigd

door bekende instrumentenmakers. De doosjes waarin de staafjes konden worden vervoerd, werden prachtig versierd alsof het geen rekenhulpmiddel, maar sieraden betrof. Ondanks de eenvoud in het gebruik en de relatief gemakkelijke manier waarop men ze zelf kon vervaardigen, werden de rekenstaafjes niet in het zeventiende-eeuwse onderwijs gebruikt. Daarvoor zijn verschillende redenen aan te wijzen. Op de eerste plaats bestond er geen vast curriculum. Het onderwijs was veelal vraaggestuurd. Veel mensen leerden niet rekenen, of alleen met kleine getallen. Voor hen waren de rekenstaafjes geen nuttig hulpmiddel. Daarnaast waren de rekenstaafjes ook te eenvoudig. Ze sloten direct aan op de manier waarop mensen vermenigvuldigden, dus uitleg was nauwelijks nodig. Mensen die de staafjes niet begrepen, kochten ze ook niet. Tot slot waren de rekenstaafjes alleen voor vermenigvuldigingen in het tientallig stelsel bruikbaar. Voor mensen die met geld moesten rekenen, was dat bijvoorbeeld minder relevant, want die hadden te maken met een gulden die in twintig stuivers van elk twaalf penningen was onderverdeeld.



figuur 2 Constructie van de rekenstaafjes van Napier, in Adriaan Vlacq, *Eerste deel van de nieuwe telkonst* (1626) pagina 5 uit exemplaar 2314 C 4 Universiteitsbibliotheek Leiden

Het rekenbord, dat Vlacq eveneens in zijn boek introduceerde, was voor de meesten te ingewikkeld. Dit rekenhulpmiddel was gebaseerd op de tweetallige representatie van getallen. In het voorbeeld uit het boek ziet men bijvoorbeeld de vermenigvuldiging van 13 met 19. Daarbij is 19 op de horizontale as neergelegd als $16 + 2 + 1$; 13 op de verticale as als $8 + 4 + 1$. De vermenigvuldiging werd uitgevoerd door in eerste instantie muntjes te leggen op het bord op alle vlakjes waarvan een term in beide factoren voorkwam. Vervolgens telde men op elke lijn 'zoals de loper op het schaakbord loopt' van 128 naar 128, van 64 naar 64, enzovoort, het aantal muntjes dat daar lag. Zo ligt er bijvoorbeeld op de lijn van 128 naar 128 een muntje. Dat muntje kwam dan bij 128 te liggen.



figuur 3 Vermenigvuldiging op een rekenbord, uit Adriaan Vlacq, *Eerste deel van de nieuwe Telkonst* (1626) pagina 135 uit exemplaar 2314 C 4 Universiteitsbibliotheek Leiden

Op de lijn van 64 naar 64 ligt ook een muntje. Dat komt bij 64 te liggen. Op de lijn van 32 naar 32 liggen er geen, maar op de lijn van 16 naar 16 liggen er twee. Die komen beide bij 16 en twee muntjes op 16 worden ingewisseld tegen één op 32. Op de lijn van 8 naar 8 liggen ook twee muntjes. Die worden op dezelfde manier ingewisseld tegen één op 16. Op die manier voortgaand zie je dat de uitkomst gelijk is aan $128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1$.

Voor ons is het aardig om te zien dat er in eerste instantie muntjes werden gelegd op elk vlakje waarop je de vermenigvuldiging van $(1 + 2 + 16) \times (1 + 4 + 8)$ – naar smaak eventueel als machten van twee uitgeschreven – met haakjes wegwerken uitvoert: 1×1 , 1×4 , 1×8 , 2×1 , enzovoort. Het diagonaalsgewijs tellen van muntjes komt neer op het optellen van de exponenten wanneer je twee machten van hetzelfde grondtal met elkaar vermenigvuldigt.

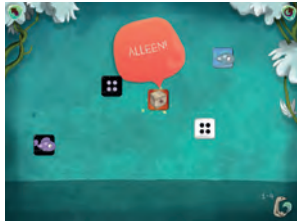
Het rekenbord was in het gebruik eenvoudig, maar vergde wel wat extra begrip (of vertrouwen) van de gebruiker. Zoals in dit soort boeken vaker gebeurde, zullen veel lezers van Vlacq gestopt zijn na het eerste deel over de rekenstaafjes. Die werden populair, terwijl de rest van het boek meer voor de fijnproevers bleef. Die fijnproevers waren er vooral in die beroepsgroepen waar veel gerekend moest worden, en veel minder in de gewone zeventiende-eeuwse scholen.

Over de auteur

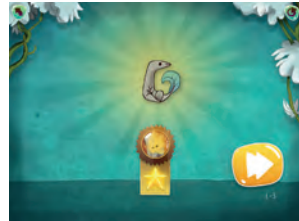
Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskunde-onderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

DRAGON BOX 2

Lonneke Boels bespreekt deze keer een spel dat tot doel heeft om algebraïsche vaardigheden te oefenen.

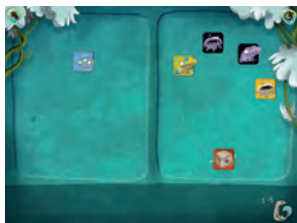


figuur 1



figuur 2

Eindelijk een echt wiskundespel. *Dragon Box 2* is razend populair in Noorwegen waar het gemaakt is door Jean-Baptiste Huynh, wiskundeleraar en Dr. Patrick Marchal, cognitief wetenschapper. Het spel begint met oefeningen die de werking van het spel uitleggen, zie figuur 1. Zwarte en witte getallen heffen elkaar op. Die verdwijnen waardoor de doos overblijft. De doos wordt ooit een x . Doe je dat goed, dan verdient je een ster (figuur 2). De volgende stap is dat het veld in tweeën wordt gedeeld,



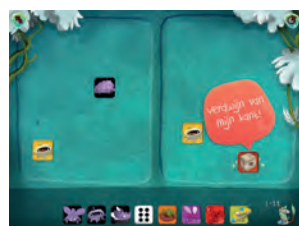
figuur 3



figuur 4



figuur 5



figuur 6

zie figuur 3. Je kunt nu de dino bij de niet-dino doen en ze zo laten verdwijnen. Uiteindelijk blijft aan één kant een doos en aan de andere kant een vis over die door de draak in de doos wordt opgegeten. Naarmate je verder komt, zijn er meer sterren te verdienen, zie figuur 4. De eerste ster is voor het correct oplossen, de tweede ster is voor het 'zo eenvoudig mogelijk' schrijven en de derde voor de kortste strategie. Je kunt een oefening opnieuw doen om zo in plaats van één ster nu alle sterren te halen. Na een flink aantal oefeningen is een *level* afgesloten en ga je naar een hoger *level* (hoofdstuk). De uitleg is tot een minimum beperkt en vrijwel taal-onafhankelijk, zie figuur 5 en figuur 6.

Na de voorwerpen of dieren, komen er ook letters in het spel, zie figuur 7. Zo bouwt het spel stap voor stap het algebraïsch oplossen van vergelijkingen op. Dat is soms ook een nadeel; oplossingen die 'te vroeg' worden bedacht door leerlingen, worden fout gerekend omdat ze tot een hoger *level* behoren. Dat kan het spel frustrerend maken voor wie het sneller begrijpt dat het spel toelaat of voor wie slimme oplossingen bedenkt. Na 30 oefeningen is *level 1* uit, zie figuur 8. Dan wordt zichtbaar wat er nog allemaal te oefenen en ontdekken valt, zie figuur 9. Het tweede *level* werkt met breuken, letters, plaatjes en dobbelsteengetallen door elkaar en is dus direct al pittiger. Bij breuken is het nadeel dat het spel een vaste volgorde in berekeningen kent, die in werkelijkheid niet nodig is. Zo moet je altijd eerst alles bij elkaar doen, voordat je er breuken van maakt. Dat is inderdaad handiger, maar het is niet fout om het omgekeerd te doen. Dat blijkt onmogelijk en het wordt niet duidelijk waarom; jammer voor wie anders denkt. Gelukkig kun je bij hogere *levels* soms kortere oplossingen vinden dan het spel aangeeft. Voor wie echt vastloopt, is na zelf proberen de oplossing op verzoek zichtbaar, zie figuur 10. Daarna moet je het nog wel een keer zelf doen, zonder hulp. Ook dat is didactisch slim. Is jouw oplossing niet de eenvoudigste of met de minste stappen, dan zie je dat, zie figuur 11 en figuur 12. Een enkele keer zit er ook een wiskundige fout in het spel. Als je een breuk in een vergelijking 'naar de andere kant haalt', worden teller en noemer zwart dus negatief, wat wiskundig niet klopt, zie figuur 12. Een breuk moet bovendien altijd eerst worden vereenvoudigd voordat je hem naar de andere kant mag halen. Je mag dus niet eerst vermenigvuldigen met $-\frac{2}{2}$ en dan vereenvoudigen, zie figuur 13. Er is geen wiskundige reden om dit niet toe te staan (wel een didactische) en het leidt ook niet tot meer stappen in je oplossing. Zo zijn er meer foutjes die slimme leerlingen kunnen frustreren. De hamvraag is natuurlijk: leren kinderen door het spel beter of sneller algebra? Volgens de makers wel. Maar er is twijfel. Uit allerlei onderzoek blijkt dat digitaal leren op zichzelf weinig effectief is. Het resultaat is 'niet meetbaar'.^[1] Of wat in een half jaar kan worden geleerd, duurt nu een jaar.^[2] Ten tweede worden creatieve oplossingen van slimme leerlingen afgekeurd. Ten derde is het spel gericht op de procedure. Dat is belangrijk, maar zoals u ook weet: zonder begrip beklijft het niet. In het spel is geen aandacht voor wat in de didactiek ook wel relationele of conceptuele kennis

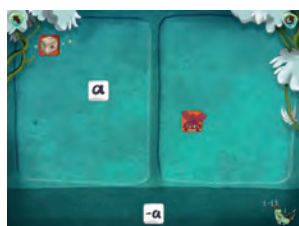
wordt genoemd (zie bijvoorbeeld [3] of [4]). Er is één wetenschappelijk afstudeeronderzoek^[5] naar de effecten van het spel. In dat onderzoek werkten leerlingen in tweetallen (samenwerkend leren) op de iPad onder leiding van een enthousiaste docent. Leerlingen bleken flink vooruit te gaan. Maar laat nu uit heel veel onderzoeken blijken dat samenwerkend leren en een inspirerende docent een van de effectiefste manieren is om leerlingen iets te leren.^[2] In hoeverre het spel daar ook een bijdrage aan heeft geleverd, is dus nog steeds niet duidelijk. Desondanks blijf ik enthousiast. Want in handen van een goede docent zijn de resultaten veelbelovend.

Pluspunten

- het is een echt spel én het is echte wiskunde;
- de vormgeving is mooi, rustig en sluit aan bij de belevingswereld van leerlingen;
- er zijn heel veel oefeningen en *levels* waardoor leerlingen niet snel klaar zijn;
- het is geschikt voor onderhoud van procedurele kennis;
- het bevat weinig taal, dus ook geschikt voor taalzwakke leerlingen;
- er is een aparte oefenmodus;
- er zijn hints beschikbaar nadat de leerling het eerst zelf heeft geprobeerd;
- het is een welkome afwisseling voor een 'saai' algebra-oefenles.

Minpunten

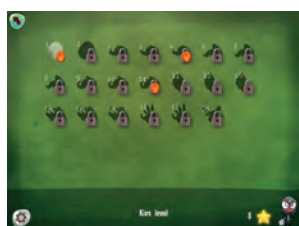
- er is een docent nodig voor het aanbrengen van de conceptuele of relationele kennis;
- de link met 'echte' algebra en het oplossen van vergelijkingen moet door een docent worden besproken;
- het spel bevat enkele wiskundige fouten of onlogische keuzen;
- slimme leerlingen kunnen gefrustreerd raken omdat correcte creatieve oplossingen niet worden geaccepteerd;
- er is geen enkele mogelijkheid om te versnellen voor slimme leerlingen;



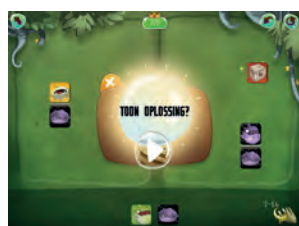
figuur 7



figuur 8



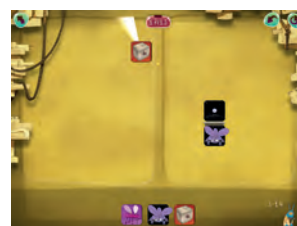
figuur 9



figuur 10



figuur 11



figuur 12



figuur 13

- de oefenmodus is pas te gebruiken als de speciale technieken (bubbel voor haakjes bijvoorbeeld) in het spel aan bod zijn gekomen. Hiervoor moeten eerst alle *levels* worden doorlopen. Algebra perfect beheersen is hiervoor niet voldoende.

Geschikt voor: basisschool groep 7, 8, en vmbo, en onderbouw havo en vwo.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: € 4,99 – € 10,99

Getest op: iPad met iOS7. Ook verkrijgbaar voor Mac, Google, Android, Windows.

Meer informatie: www.dragonboxapp.com

Noten

- [1] Doorman, M., Drijvers, P., Kischner, P., Boon, P., & Hoogveld, B. (2013). Uit de ivoren toren: oefenen met de computer is niet automatisch effectief, *Nieuwe Wiskrant*, 32(3), 4-7.
- [2] Hattie, J. (2014). *Leren zichtbaar maken*. Rotterdam: Bazalt Educatieve Uitgaven. Vertaling van *Visible Learning for Teachers. Maximizing impact on learning*.
- [3] Skemp, R. (1979). *Relational – instrumental*. Beschikbaar online via: www.grahamtall.co.uk/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf
- [4] Drijvers, P., Van Streun, A., & Zwaneveld, B. (2012). *Handboek wiskundendidactiek*, Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- [5] Saetre, B. (2013). *Mathematics on tablet. Using mobile technology and gamification to support student learning in junior high*. Oslo.

Met dank aan Pauline Vos uit Noorwegen die mij op dit spel en het Noorse onderzoek wees.

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundeleraar op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

KLEINTJE DIDACTIEK

ZELFS BEWIJZEN KUN JE LEREN

Veel leerlingen bij wiskunde B op het vwo hebben moeite met bewijzen in de meetkunde. Bij leerlingen – en bij veel docenten – heerst het idee dat bewijzen iets is waar je aanleg voor hebt, wat je direct moet zien, en wat je niet kunt leren. Ik ben het daar niet mee eens. Hoe leer ik leerlingen dan bewijzen te ‘zien’ of te ‘ontdekken’? Ik concentreer me in dit artikel op leerlingen uit 6 vwo die de leerlijn van het boek al hebben doorlopen. Het onderstaande is dus beslist geen ‘ideale’ opbouw van het leren van bewijzen in de meetkunde, maar meer tips voor leerlingen die zijn vastgelopen.

- 1 Soms is wiskunde ook gewoon leerwerk. Ik laat leerlingen de stellingen en meetkundige plaatsen uit hun hoofd leren. ‘Kun je een plaatje tekenen bij de stelling van Thales?’ Of ‘Welke eigenschappen gelden voor een gelijkzijdige driehoek (teken ze in een plaatje)?’ zijn checkvragen om na te gaan of dit uit het hoofd leren is gelukt. Dit doe ik bijvoorbeeld via het laten inleveren van de tekening en tekst bij een stelling of het construeren van een meetkundige plaats (met name de parabool) en de resultaten te bespreken. Wie de stellingen niet kent, kan geen van de volgende stappen gebruiken, dus dit is een voorwaarde voor de rest.
- 2 Ik laat leerlingen nagaan of de meest voorkomende stellingen een oplossing bieden bij een opgave. Dit zijn de volgende stellingen:
Veelhoeken: hoekensom driehoek, F-hoeken en Z-hoeken, gelijkvormigheid en congruentie, buitenhoek driehoek.
Cirkels: koordenvierhoek, constante hoek, Thales, middelpuntshoek, hoek tussen koorde en raaklijn. Als dit onvoldoende is, laat ik ze alle stellingen die bij het examen genoemd worden, één voor één aflopen. Zou die nuttig kunnen zijn? Waarom (niet)? Vaak blijven er dan maar één of twee kansrijke stellingen over. Dit past goed bij het ‘vooruitdenken’ of ‘terugdenken’ als aanpak.^[1]
- 3 Ik laat leerlingen een *mindmap* op A3 gebruiken waarin het overzicht van meetkundige stellingen staat. Bij elke opgave gaan ze met de *mindmap* zo gestructureerd na welke mogelijke oplossingen of denkrichtingen er zijn. De *mindmap* die ik gebruik, is te vinden op de site van *Euclides* en is gemaakt met het gratis *mindmap*-programma *Freeplane*. Nadeel van dit programma is dat plaatjes minder scherp worden als je van de *mindmap* een afdruk

maakt of deze exporteert. Aanvullingen of verbeteringen zijn van harte welkom! Als leerlingen al eerder een *mindmap* voor wiskunde hebben gemaakt, is het beter om de *mindmap* met de leerlingen samen te maken. Als dit niet het geval is, is het gezamenlijk maken van een *mindmap* bij dit onderwerp vaak echt een brug te ver; start dan eerst eens met een eenvoudiger onderwerp. In [1] wordt de *mindmap* ook wel een kennisgraaf genoemd en hoort het (laten!) maken van een *mindmap* bij het ‘weten waarom’. Voor sommige leerlingen werkt deze *mindmap* uitstekend; er zijn echter ook leerlingen die een *mindmap* verschrikkelijk of nutteloos vinden. Het grootste leerrendement zie ik bij leerlingen die de *mindmap* zelf hebben nagetekend.

- 4 Ik laat leerlingen met kleurpotloden of viltstiften hoeken kleuren die hetzelfde zijn, zie het examen vwo wiskunde B 2013, eerste tijdvak. Niet alle kleureringen blijken hierin nuttig, maar het helpt wel bij het ‘zien’ van een mogelijke aanpak. ‘Welke vind jij hier nuttig en waarom?’ of ‘Hoe zie je welke nuttig kunnen zijn?’ zijn vragen aan leerlingen die daarbij horen. De kleuriging van de hoeken, samen met de stelling van de koordenvierhoek, geeft de leerling een idee of stappenplan van een mogelijke oplossing. De nette uitwerking volgt daarna. Het moge duidelijk zijn dat lang niet alle kleureringen in de uitwerking terechtkomen; de ‘constante hoeken’ en de ‘koordenvierhoek’ zijn samen al voldoende voor een bewijs.

Lonneke Boels

- [1] Drijvers, P., Van Streun, A., & Zwaneveld, B. (2012). *Handboek wiskundededidactiek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.



vakbladeuclides.nl/904boels

Het Over Betuwe College in Elst heeft ter ondersteuning van het rekenonderwijs in de school het *Spiekboekje rekenen* ontwikkeld. In een uitgebreid interview vertelt Maaïke Dekker, leraar wiskunde en rekencoördinator, over het rekenen op school en het ontstaan van het spiekboekje. Dit artikel is een weergave van dit interview.^[1]

Werkwijze

Voor het *Spiekboekje* inventariseerde Maaïke Dekker eerst met behulp van haar collega's van de bètavakken en vakken als aardrijkskunde en economie welke uitleg ze bij welk onderwerp (procenten, schaalberekeningen, verhoudingen) hanteerden. Een eerste inventarisatie gebeurde tijdens een studiemiddag, het jaar erop ging een werkgroep verder met het bespreken van de rekeninhouden en de didactiek. 'Lagen de accenten anders, dan hadden we een een-op-een-gesprek over de manier van rekenen die we het beste konden kiezen. Niks dramatisch, gewoon een wandelgangmoment.'

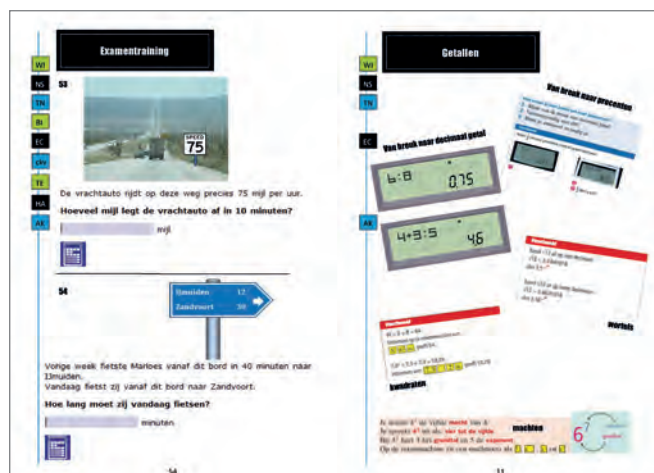
Hierna maakte Dekker het *Spiekboekje*: per onderwerp wordt een rekenwijze gepresenteerd. Daarnaast kunnen de leerlingen precies zien in welk vak elk onderwerp terugkomt. In de lessen kunnen leerlingen terugvallen op de manier die in het *Spiekboekje* staat beschreven, maar er is geen verplichting om het op één manier aan te pakken. Regelmatig herinnert Dekker haar collega's aan het boekje, ze presenteert het op een locatievergadering of studiemiddag.

Motivatie en doelen

Door de komst van de rekentoets heeft het rekenonderwijs op het Betuwe College een enorme impuls gekregen. De doelstelling voor het rekenonderwijs op school was vanaf het begin om de leerlingen goed voor te bereiden op de rekentoets. Daarbij was van meet af aan duidelijk dat rekenen geen wiskunde is. 'De wiskundesectie had al gezegd: het kan wel bij ons, maar niet alleen bij ons.' Wie rekenen in verschillende vakken onderbrengt, is Dekkers ervaring, deelt verantwoordelijkheid en verdeelt de lasten. De gedachte was dat extra aandacht voor rekenen positieve effecten zou hebben op alle (reken)vakken, juist als er een gezamenlijke aanpak zou komen. 'De rekenles duurt een lesuur, maar eigenlijk willen we aan leerlingen laten zien dat ze twaalf uur in de week bezig zijn met rekenen.' Inzichtelijk maken dat rekenen ergens bij hoort, dat er samenhang is met andere vakken, vinden Dekker en haar collega's belangrijk.

Succesfactoren

De kleinschalige school (vmbo-t en havo, ca. 600 leerlingen, twee locaties) leende zich goed voor dit



figuur 1 Twee bladzijden uit het *Spiekboekje* over Getallen: links de theorie, met een overzicht van de vakken waar het onderwerp terugkomt, voorbeelden uit rekentoetsen en examens. Hiervoor is gebruikgemaakt van *Moderne Wiskunde* van Noordhoff Uitgevers

initiatief. Het heldere doel – het behalen van het eindexamen – zorgde vanaf het begin voor medewerking van de collega's. Alle betrokken vakken hebben hun lokalen op één gang, de vaksecties zijn klein, de lijnen kort. Een aantal collega's heeft daarnaast een dubbele bevoegdheid waardoor overleg tussen de vakken met een klein groepje mogelijk was.

Activiteiten

Omdat er nog veel onbekend was over rekenonderwijs, is begonnen met het verzamelen van informatie. Drie mensen volgden cursussen en woonden studiedagen en bijeenkomsten van verschillende partijen bij. De posters van het APS, waarop de rekenniveaus 2F en 3F beeldend in kaart zijn gebracht, bleken een mooi uitgangspunt te zijn voor een studiemiddag met collega's. De teamleider en twee docenten (wiskunde en nask) bereidden de middag voor met als doel de collega's te laten kennismaken met het rekenen en te inventariseren wat ze in hun eigen vak allemaal doen. Tijdens de studiemiddag kreeg ieder de opdracht om stickers te plakken op de APS-posters als een onderdeel in het eigen vak aan bod kwam. De uitkomsten werden meegenomen naar een nieuwe werkgroep rekenen, waarin alle vakken die minimaal tien stickers

hadden geplakt, vertegenwoordigd waren. Wat was het doel van de werkgroep? 'Ik wist welke onderdelen bij de verschillende vakken aan bod kwamen, maar hoe kwamen ze aan bod? Daar zijn we een jaar mee bezig geweest, het kost allemaal tijd. Ieder vak heeft boekjes van SLO erbij gepakt. Die posters, dat is leuk om mee te starten, maar op een gegeven moment moet je over op een saaiere gedeelte. Uiteindelijk hebben de vakken de uitleg die zij gebruiken opgeschreven en naar mij toegestuurd. Aan de hand daarvan hebben we een rekenboekje gemaakt.'

Didactiek

De didactiek is goed doorgespit. Alle onderwerpen werden behandeld in de werkgroep. Daarbij liet de werkgroep meerdere manieren de revue passeren, bijvoorbeeld het omrekenen van m/s naar km/u (via verhoudingstabel of 'gewoon' maal 3,6). Het doel van het boekje is dan ook niet om leerlingen te verplichten een bepaalde strategie te gebruiken. 'De leerlingen mogen terugvallen op de techniek in het boekje, ondanks dat het bij een vak misschien anders verteld wordt. Hebben ze geleerd om te werken met maal 3,6 dan mogen wij dat als wiskundesectie niet fout tellen terwijl in feite bij wiskunde de bedoeling is dat er een verhoudingstabel gemaakt wordt; 1000 meter, 0,36 sec. et cetera en daar krijgen ze puntsgewijs de punten voor.'

Toekomstplannen

De rekenactiviteiten zijn nog steeds in ontwikkeling op het Betuwe College. Zo wil Dekker kijken naar taal en notaties bij/van rekenen en afstemmen daartussen. Ook heeft ze het plan opgevat om over de vragen in de reken-toets theoriekaarten te maken. Een voorbeeld hiervan is een vraag over de inhoud van een zwembad. De vraag staat dan op de kaart, met daarbij de stappen die een leerling moet doorlopen om de vraag te beantwoorden. Als de leerlingen zelfstandig oefenen, kunnen ze de kaarten gebruiken als uitleg en richtlijn. Op de kaarten wordt een koppeling gemaakt met de verschillende vakken en vakdocenten zijn bovendien betrokken bij het maken van de kaarten.

Ook naar de uitkomsten van de samenwerking met toeleverende po-scholen, die in groep 8 een 2F-toets gaan afnemen, is Dekker benieuwd.

Uitvoering rekenlessen

Leerlingen krijgen rekenen als apart vak in leerjaar 1, 3, 4 en 5. 'Na de brugklas maken we een selectie', vertelt Maaïke Dekker. 'Een deel kan daarna zelfstandig door met rekenen in andere vakken. De leerlingen die het niveau nog niet halen, blijf ik in de tweede klas lesgeven.' Selectie gebeurt onder andere aan de hand van de ABC



APS Rekenen en Exact

Maatwerk trainingen, coaching en studiemiddagen rekenen/wiskunde.

Rekendidactiek, omgaan met verschillen in de rekenles, zwakke rekenaars, nieuwe examenprogramma's wiskunde.

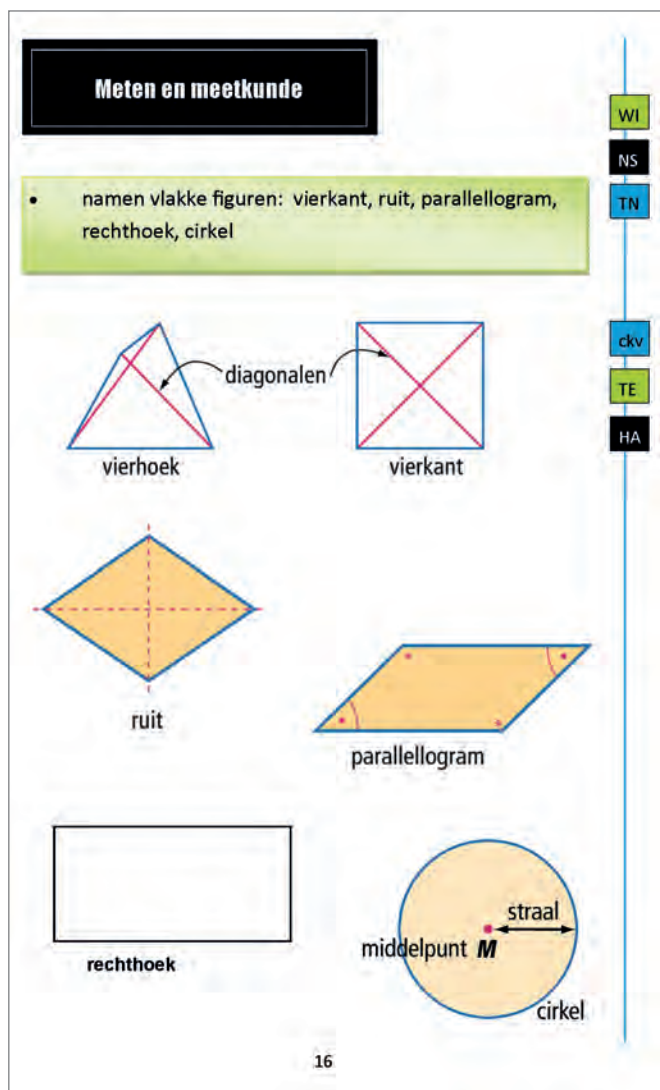
Afspraak maken voor een maatwerkgesprek

030 28 56 600
secretariaat@aps.nl

Informatie

APS
030 28 56 600
secretariaat@aps.nl
www.aps.nl





figuur 2 Pagina over meetkundige figuren uit het *Spiekboekje*

begin- en eindtoets. Verder is er gekozen voor *Gecijferd! All in one* van het APS. Met de bijbehorende instaptoets gaan de leerlingen zelf aan de slag.

In de onderbouw krijgen de leerlingen vanaf het begin één uur rekenles in klas 1, nu nog uit rekenboekjes maar straks met eigen materiaal. De lessen worden onder andere verzorgd door een pabo-docent, en docenten uit de secties biologie, natuurkunde, nask en wiskunde. De eerste rekenlessen staat vooral in het teken van het doornemen van de stof die bij het rekenexamen aan bod komt. Het *Spiekboekje* wordt geïntroduceerd in de derde klassen. Leerlingen ervaren het boekje als een erg prettig naslagwerk, waarin kort en bondig de belangrijkste rekenonderdelen van de verschillende vakken staan. Het was oorspronkelijk niet de bedoeling dat er apart rekenonderwijs voor 4 havo kwam, maar omdat de school voor het tweede jaar heeft meegedaan aan de reken-toetspilot, leek het toch verstandig een uur toe te voegen en dan met name voor de leerlingen die een CM- of EM-profiel hebben. Om ook de uitvallers bij de

NG-/NT-profielen mee te pakken is gekozen voor een uur rekenen voor iedereen. Voor schooljaar 2013/2014 is er in de klassen 3, 4 en 5 havo en 3 en 4 vmbo één uur rekenen per week ingevoerd, voor havo richting 3F en voor vmbo 2F. Naast het uur op het rooster van de leerlingen, is het de bedoeling ICT in te zetten voor eigen oefening.

Facilitering

De rekencoördinator heeft het eerste jaar veel uren gekregen voor de ontwikkeling van het rekenonderwijs. In schooljaar 2013-2014 zijn er 50 taakuren gereserveerd (inclusief de rekentoetsafname). Dekker is wel veel extra tijd kwijt aan de coördinatie van het rekenonderwijs; 60 uur zou realistischer zijn, maar ze vindt het leuk om te doen en maakt er tijd voor.

De werkgroepleden hebben geen aparte taakuren voor het rekenen. Maar de school heeft het beleid dat iedereen in een werkgroep is ingedeeld. De inzet in de werkgroep was heel positief. 'De collega's zeiden: "Wat jij wilt, vinden we belangrijk en daar willen we ook in onze tijd aandacht besteden." Dat was mijn heel grote voordeel en daar heb ik mazzel mee gehad.'

Ook de facilitering van benodigde materialen is goed: als rekencoördinator kan ze zonder problemen 32 computers laten installeren. Winst valt er ook nog te behalen: zo is er nu nog weinig ondersteuning bij de rekentoetsen. Dekker verwacht echter dat het rekenonderwijs in de toekomst meer gaat leven binnen de school: 'Het eerste jaar heeft een onderwijsassistent de rekentoets afgenomen, dit jaar zat ik er met een collega die op dat moment les zou geven. En voor volgend jaar, en de schoolleiding is daar ook van overtuigd, moet het bij de rekentoets net zo gaan als bij een echt examen, met een opening, sluiting, en een 'officieel persoon'. Zo zal op het Over Betuwe de rekentoets een volwaardig onderdeel worden van het curriculum.

Noot

[1] Een uitgebreidere versie van dit artikel staat op de website rekeneninanderevakken.slo.nl. Gedeeltes van de tekst zijn ontleend aan het artikel in *Van twaalf tot achttien* door Truus van Groenewegen, november 2013.

Over de auteur

Nelleke den Braber is werkzaam bij SLO en was projectleider van het project 'rekenen in andere vakken'. Daarnaast is ze sinds 1 januari 2015 verbonden aan de lerarenopleiding wiskunde aan de NHL Hogeschool te Leeuwarden. E-mailadres: n.denbraber@slo.nl

HET FIZIER GERICHT OP...

FORMATIEVE TOETSTECHNIKEN

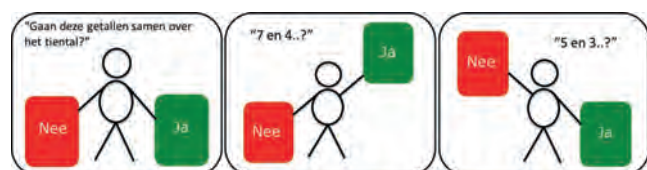
Michiel Veldhuis

In Flzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering bespreekt Michiel Veldhuis de resultaten van zijn promotieonderzoek naar formatieve toetstechnieken bij het reken- en wiskundeonderwijs.



Om leerlingen op de best mogelijke wijze te leren rekenen, is het voor leerkrachten in zowel basis- als voortgezet onderwijs van groot belang precies te weten wat hun leerlingen wel en niet begrijpen, en wel of niet kunnen. De leerkracht kan dit te weten komen door een goede vraag te stellen of bijvoorbeeld een klassikale activiteit te doen waarbij de leerlingen moeten laten zien wat ze kunnen. In wetenschappelijke literatuur wordt hiervoor de term *formatieve toetsing* (ook wel *assessment for learning*) gebruikt. Deze toetsende blik van een leerkracht is niet gericht op het evalueren van de leerlingen om bijvoorbeeld een cijfer te geven, maar juist op het vooruithelpen van leerlingen. Op basis van wat de leerkracht ziet, kan hij/zij goed geïnformeerde beslissingen nemen over de verder te volgen instructiestrategie. Het gebruik van formatieve toetsen is door velen omschreven als een van de meest effectieve activiteiten voor het bevorderen van de leerresultaten van leerlingen. In mijn promotieonderzoek^[1] streven we ernaar om leerkrachten in het basisonderwijs zo'n toetsende blik meer te laten gebruiken. Voor rekenen-wiskunde hebben we uitgezocht of het verbeteren van de toetspraktijk van de leerkracht door het gebruik van formatieve toetstechnieken een positief effect op leerresultaten van leerlingen heeft. Een voorbeeld van een formatieve toetstechniek is *Rode en groene kaartjes*. Het doel van deze techniek is om snel uit te zoeken of leerlingen weten of twee getallen samen over het tiental gaan of niet. Dit inzien is van essentieel belang als leerlingen optel- of aftrekopgaven maken met getallen van twee of meer cijfers. De leerkracht noemt telkens getalparen op waarvan de leerlingen zonder te rekenen moeten beslissen of ze samen meer of minder dan 10 zijn. Dit laten ze zien door een rood of groen kaartje in de lucht te houden (zie figuur 1).

figuur 1



Door naar de zwaaiende groene en rode kaartjes te kijken, krijgt de leerkracht direct een overzicht van dit specifieke getalinzicht van de leerlingen. Door daarbij ook analoge getalparen, zoals 40 en 70 of 400 en 700, te noemen, met de vraag of deze getallen meer of minder dan 100 of 1000 zijn, kan de docent heel precies identificeren waar welke leerlingen nog lacunes hebben. Voor sommige leerlingen zijn 4 en 7, en 40 en 70 twee heel verschillende paren, terwijl andere direct de analogie zien. Tegelijkertijd is deze toetstechniek ook voor de leerlingen erg leerzaam. Alle leerlingen zijn bezig, ze oefenen hun getalinzicht en hoeven maar om zich heen te kijken om direct feedback te krijgen. Deze zelfde vorm hebben we in ons onderzoek ook gebruikt om begrip van aftrekken ('Is het verschil tussen 14 en 8 groter dan 5?') en delen vermenigvuldigtafels ('Zit 44 in de tafel van 8?') te toetsen. In het voortgezet onderwijs kan deze techniek simpel aangepast worden om andere rekenwiskundige begrippen te toetsen.

Met behulp van een grootschalig vragenlijstonderzoek^[2,3] vooraf, waarin ruim duizend basisschoolleerkrachten hun visie op en praktijk van het toetsen bij rekenen-wiskunde hebben beschreven, hebben we verschillende formatieve toetstechnieken voor rekenen-wiskunde ontwikkeld in samenwerking met tien leerkrachten van groep 5. Om het effect van het gebruik van deze technieken uit te zoeken, hebben we een experiment met pre-/posttest en controlegroep opgezet (met dertig leerkrachten en hun 616 leerlingen). In maximaal drie workshops van een uur werden leerkrachten begeleid in het gebruik van de technieken. Leerlingen bleken aanmerkelijk meer leerwinst te boeken bij leerkrachten die de formatieve toetstechnieken gebruikten dan normaal. Deze leerlingen gingen namelijk ongeveer acht punten vooruit op Cito-leerlingvolgsysteemtoetsen van medio naar eind groep 5, terwijl leerlingen uit de controlegroep slechts vijf punten vooruit gingen. Naast dat de ontwikkelde technieken relatief weinig investering vergen en leuk worden gevonden door leerlingen en leerkrachten, is de leeropbrengst alleszins veelbelovend en geeft dus extra aanleiding om het gebruik van deze formatieve toetstechnieken te stimuleren.

Noten

- [1] Promotor: prof. dr. Marja van den Heuvel-Panhuizen. *Improving Classroom Assessment*, NWO MaGW/ PROO: Project 411-10-750.
- [2] Veldhuis, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Vermeulen, J.A., & Eggen, T.J.H.M. (2013). Teachers' use of classroom assessment in primary school mathematics education in the Netherlands. *CADMO*, 21(2), 35-53.
- [3] Veldhuis, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Primary school teachers' assessment profiles in mathematics education. *PLoS ONE*, 9(1), e86817.

Over de auteur

Michiel Veldhuis is promovendus bij het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

E-mailadres: m.veldhuis1@uu.nl

IMPRESSIE VERENIGINGSDAG

[Mathilda Offereins]



De jaarvergadering is één van onze sectieuitjes. Het streven is er met zoveel mogelijk sectieleden naar toe te gaan, en op de terugweg gaan we samen uit eten. We ontmoeten oud-sectieleden en collega's van andere vestigingen die zich soms bij ons aansluiten. De eerlijkheid gebiedt me te bekennen dat wij het huishoudelijk gedeelte meestal *skippen*, we kunnen als we arriveren zo nog op ons gemak koffiedrinken en op de markt rondneuzen.

Ook dit jaar was het weer een leuke dag. We begonnen met de inspirerende plenaire lezing van Martijn Slob. Het plaatje van de grote doos waarin zijn kleine bestelling bezorgd werd, riep in de zaal herkenning op. Dat vraagt om optimaliseren, dus wiskunde. Mijn eerste werkgroep werd verzorgd door

Theo Wesker en was getiteld: *Wiskundige denkactiviteiten: een tussendoortje of andere didactiek?* Een filmpje van een Japanse schoolklas die aan de slag ging met het oplossen van een vlot te begrijpen meetkundig probleem, bracht ons in de stemming. De werkvorm: eerst individueel, dan samen, met als keuzemogelijkheid: tip gebruiken, was herkenbaar. Ik nam mij voor dat in mijn eigen lessen ook weer eens toe te gaan passen. En dat geldt voor veel van de voorbeelden die Theo gaf. Afgezien van het feit dat het een verplicht examenonderdeel wordt, een WDA doen wij natuurlijk allemaal geregeld in onze lessen, en het is goed je repertoire uit te breiden en te zien dat dat helemaal niet zo moeilijk hoeft te zijn.

De tweede werkgroep die ik bezocht, ging over dyscalculie en werd gegeven door Marije van Oostendorp. Ik had deze werkgroep gekozen, omdat ik bij ons op school me bezig ga houden met rekenen en mijn deskundigheid wil vergroten. Dat is gelukt. Het was interessant om meer over de theoretische achtergrond van dyscalculie te weten te komen. Ik weet nu wat *number sense* is en dat sommige diersoorten daar ook over beschikken. Daar bleef het niet bij. Er werden praktische tips gegeven zoals 'je leert iets door het vier keer per week te doen'. Zelf samenvatten, thuis laten overhoren op dezelfde manier als je dat bij de zaakvakken doet en veel herhalen is voor alle leerlingen goed. De afsluitende plenaire lezing van Derk Pik: *Bewegende wiskunde* bevestigde weer eens wat een mooi vak wiskunde is.

De sfeer op de jaarvergadering is altijd heel prettig. Los en informeel maar zonder dat je er last van hebt ook weer strak: alles loopt perfect op tijd.

Als postactieve wiskundedocent geeft de studiedag mij de laatste jaren vooral de gelegenheid 'bij' te blijven met de actuele stand van het wiskundeonderwijs en de vernieuwingen die gaande zijn. Ik kies dan ook elk jaar een workshop om daarmee op de hoogte te blijven. Daarnaast probeer ik nog een workshop te kiezen die meer speels, recreatief, liefst activerend en vooral inspirerend mijn wiskundige geest kan verrijken in algemene zin.

En dan is het moeilijk kiezen. Dit jaar vielen van mijn groslijst uiteindelijk het WDA-verhaal van Anne van Streun en de alternatieve goniometrie van Thomas Cool af ten gunste van de workshop C3 van Carel van der Giessen over de eindterm *Statistische uitspraken in de nieuwe examenprogramma's A en D1*, de *Bewogen geschiedenis* van Harm Jan Smid en Jasper van der Schors.

Om met de laatste te beginnen: in deze workshop werd enthousiast verteld hoe het Museum Boerhaave leerlingen in beweging kan zetten met wiskundeobjecten uit voorbije eeuwen. De wiskunde-aap om tekeningen, zoals kaarten, in verhouding over te brengen, de rekenstokjes van Napier en hoe daarmee snel vermenigvuldigd kan worden en duimstokken gebaseerd op de van plaats tot plaats verschillende lengte-eenheden voet en duim, teneinde die te vergelijken met eigen ledematen.



Het leukste vond ik nog wel het experiment met een bol, kegel en cilinder, waarvan de hoogte twee keer de straal was. Met een weegschaaltje moest worden onderzocht welke twee samen evenveel wogen als de derde. De stelling van Archimedes: De kegel en de bol wegen samen evenveel als de cilinder: $\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h + \frac{2}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \pi \times r^2 \times h$ (de h van de bol is immers $2r$, de inhoud van de bol $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$) en omdat de drie hetzelfde soortelijk gewicht hebben geldt wat voor het volume geldt ook voor het gewicht.

Leerlingen die het museum bezoeken, krijgen een fraaie wiskundekrant en een wiskundekoffer. In de krant staan op een leuke manier zes opdrachten uitgelegd, in de koffer zitten de spullen die ze bij de opdrachten nodig hebben. Daarmee gaan ze de wiskunderoute in het museum langs. In deze werkgroep stonden tafeltjes van vier klaar met de krant en de genoemde attributen. Getweeën werden we 'losgelaten' op dus drie van de zes opdrachten.

Dan zijn 50 minuten samen met een paar collega's, erg gezellig, zo voorbij.

Carel van der Giessens workshop bestond voornamelijk uit het demonstreren van digitale software waarmee herhaalde steekproeven uit grote populaties werden getrokken, waarna gekeken werd naar de verdeling van de gemiddeldes van die steekproeven. Op grond daarvan kunnen dan statistische uitspraken gedaan worden (en was de wortel- n -wet overigens ook nog mooi aan de orde). De software toont snel *boxplots* om te vergelijken en er kan met betrouwbaarheidsintervallen gewerkt worden om zo mogelijk significante uitspraken te kunnen doen. In deze neemt de kracht van de computer in feite over wat tot nu toe werd gedaan met de trucjesprocedure van de hypothesetoets, die dan ook uit het programma verdwenen is.

De software is te vinden op www.vusoft.eu/apps onder Sampling. Statistiek met ICT wordt een onderdeel van het SE voor vwo wiskunde A en van SE en CE van havo wiskunde A, maar het *Digiboek Statistiek* (www.rustroest.eu) maakt duidelijk dat de ICT niet alleen nodig is voor het werken met grote datasets. Het staat ook ten dienste van begrip en inzicht in statistische concepten met behulp van simulaties. Dit werken met steekproeven uit populaties en daarmee komen tot statistische uitspraken is daar een voorbeeld van, en het was een goede en overtuigende gelegenheid om dat hier in de praktijk te kunnen aanschouwen. De workshop werd zeer goed bezocht; er moesten stoelen bij, wat aangeeft dat de inhoud van grote relevantie blijkt te zijn voor het komende statistiekonderwijs bij wiskunde A en daarom veel collega's in beweging zet.

DERDEGRAADSVERGELIJKINGEN OPLOSSEN DOOR TE ZAGEN

Kwadraatafsplitsing kan meetkundig weergegeven worden. Kunnen we ook een derdegraadsvergelijking op deze manier oplossen? Een leuk onderzoek voor uw leerlingen, waar wellicht een stuk hout en een zaag behulpzaam bij zijn.



figuur 1 Een boa constrictor werkt een knaagdier naar binnen

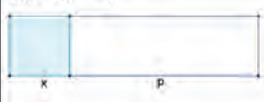
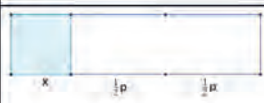
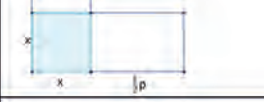
Mijn leerlingen liet ik kwadratische vergelijkingen altijd oplossen met de BOA-constrictormethode. De B stond voor Bordjesmethode, de O voor Ontbinden en de A voor abc-formule. Ik vertelde daarbij dat je een storende mug met een kanon onschadelijk kunt maken, maar als je een vliegenmepper binnen je bereik hebt, is het toch handiger om daar gebruik van te maken. De boa constrictor wurgt zijn prooi en slikt deze vervolgens in één keer door, zie figuur 1. De abc-formule werkt voor elke vierkantsvergelijking, maar waarom zou je de bordjesmethode niet kunnen toepassen bij het oplossen van vergelijking $2x^2 = 5$?

Tweedegraadsvergelijkingen

Martin Kindt schreef onlangs een prachtig stuk over het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen.^[1] Kindt werkt met kwadraatafsplitsing en brengt dat met vlakke meetkunde in beeld. We gaan onderzoeken of dit ook voor derdegraadsvergelijkingen kan werken. Hiervoor is het heel belangrijk om alle stappen van Kindt voor tweedegraadsvergelijkingen precies na te gaan. Een willekeurig kwadratische vergelijking is van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$. Deze kunnen we terug brengen naar de vorm $x^2 + px + q = 0$. Zo'n vergelijking kun je een meetkundige betekenis geven door de vergelijking anders te schrijven: $x(x + p) = -q$. We moeten voor de meetkundige betekenis wel voorwaarden stellen aan p en q : $p > 0$ en $q < 0$. Zie tabel 1 voor een overzicht van uit te voeren acties, die we straks gaan kopiëren bij het oplossen van de derdegraadsvergelijkingen.

Derdegraadsvergelijkingen

Als we deze methode willen toepassen op derdegraadsvergelijkingen, dan moeten we van twee dimensies drie dimensies maken en van het vierkant een kubus. De algemene vorm van een derdegraadsvergelijking is: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ met $a \neq 0$. Ook dit kunnen we terug brengen tot de vorm $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Kijken we terug in de geschiedenis, dan zien we dat omstreeks 1500 wiskundigen van de universiteit van Bologna een algemene oplossing probeerden te vinden voor de derdegraadsvergelijking. Deze kon tot drie soorten worden teruggebracht, te weten: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ en $x^3 + q = px$. Men probeerde dus de term met x^2 weg te werken. Dit kan bijvoorbeeld door in de vergelijking

Resultaat	Acties op $ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	Deel door a . ($a \neq 0$)
$x^2 + px + q = 0$	Nieuwe vorm
$x(x + p) = -q$	Een meetkundige betekenis geven met behulp van een rechthoek door x buiten haakjes te halen bij begintweeterm.
	
	p splitsen in $\frac{1}{2}p$ en $\frac{1}{2}p$ en gehele rechthoek opsplitsen in drie delen.
	Drie delen herschikken tot winkelhaak.
	
	Winkelhaak met behulp van vierkantje met zijde $\frac{1}{2}p$ aanvullen tot het grote vierkant met afmetingen: $x + \frac{1}{2}p$ bij $x + \frac{1}{2}p$. Oppervlakte winkelhaak is oppervlakte grote vierkant verminderd met oppervlakte kleine vierkant.
$(x + \frac{1}{2}p)^2 - (\frac{1}{2}p)^2 = -q$	Van meetkunde naar algebra
$(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$	Wortel trekken
$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$	Anders schrijven

tabel 1

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ de x te vervangen door $z + \lambda$ met $\lambda = -p/3$. Door nog een geschikte substitutie en gebruikmaking van abc-formule wist men tot een oplossing te komen, zie ook [2]. We gaan daar verder niet op in, maar keren terug naar de aanpak van Kindt. We gaan alle stappen opnieuw zetten en zo nodig aanpassen. Zie tabel 2.

Alle reële oplossingen

We hebben nu één oplossing gevonden van de derdegraadsvergelijking, maar er zouden misschien nog meer reële oplossingen kunnen zijn. We bekijken de bijbehorende functies. Deze zijn van de vorm $f(x) = x^3 + px^2 + \frac{1}{3}p^2x + r$. We weten nu dat de grafiek van f de x -as op minstens één plaats snijdt. Zijn er meer plaatsen? We hebben de afgeleide

nog als gereedschap: $f'(x) = 3x^2 + 2px + \frac{1}{3}p^2$.

We lossen op: $f'(x) = 3x^2 + 2px + \frac{1}{3}p^2 = 0$.

We kunnen de afgeleide herschrijven tot

$$f'(x) = 3(x + \frac{1}{3}p)^2.$$

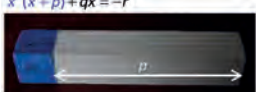
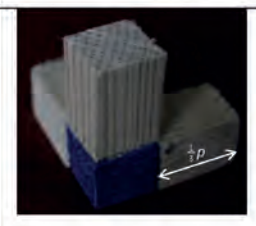
Dus $f'(x) \geq 0$, wat betekent dat de grafiek van f slechts één punt met helling 0 heeft. De grafiek van f is verder stijgend en daarmee is aangetoond dat de grafiek niet meer snijpunten heeft met de x -as. Er is dus maar één reële oplossing van de derdegraadsvergelijking en die hebben we gevonden.

We kunnen met deze methode van 'derdemachtafsplitsing' niet alle derdegraadsvergelijkingen oplossen. Het kan alleen als de coëfficiënt van x een geschikte relatie heeft met de coëfficiënt van x^2 , namelijk $q = 3 \cdot (\frac{1}{3}p)^2$. Met het argument van de afgeleide is trouwens aan te tonen dat deze voorwaarde precies geldt voor alle derdegraadsfuncties die maar één punt met helling 0 hebben. We kunnen nu dus bijvoorbeeld $x^3 + 6x^2 + 12x - 100 = 0$ oplossen. De ribbe van de bijbehorende grote kubus is $x + 2$ en die van de kleine kubus is 2.

De oplossing is $-2 + \sqrt[3]{108} \approx 2,76$. En dit is dus ook de enige reële oplossing.

Tot slot

Het lijkt mij nuttig als leerlingen bij het oplossen van deze vergelijkingen werken met karton en hout. Knippen en zagen, dat bekijft. En hoe gaat het dan verder met het oplossen van vierdegraadsvergelijkingen? Dan komt de hyperkubus in zicht, ooit prachtig in beeld gebracht door de Spaanse schilder Salvador Dali. Een vijftiendelig bouwsel gaan we aanvullen met een kleine hyperkubus. Gaat u maar na. Het lijkt me een dimensie te veel voor onze doelgroep. Of toch niet?

Resultaat	Actie op $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$	Deel door a .
$x^3 + px^2 + qx + r = 0$	Nieuwe vorm
$x^2(x+p) + qx = -r$ 	Een meetkundige betekenis geven met behulp van een balk door x^2 buiten haakjes te halen bij de tweeterm aan het begin.
$x^2(x + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p) + qx = -q$ 	p splitsen in $\frac{1}{3}p$ en $\frac{1}{3}p$ en $\frac{1}{3}p$ en gehele balk opsplitsen in vier delen. Vier delen herschikken tot hoekdeel van grote kubus. We willen qx nu ook nog kwijt door hiermee drie aanvullende delen van het hoekstuk te maken (dat worden weer balken), zodat er alleen nog een kleinere kubus ontbreekt. Elke balk krijgt de afmetingen van $\frac{1}{3}p$ bij $\frac{1}{3}p$ bij x . De inhoud van zo'n balk is dan $(\frac{1}{3}p)^2 x$. We kunnen hiermee dus alleen qx wegwerken als $q = 3 \cdot (\frac{1}{3}p)^2$. We komen dan tot een zevendelig bouwsel.
$x^2(x + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p) + qx =$ Inhoud zevendelig bouwsel	Bouwsel van zeven delen met behulp van kubusje met ribbe $\frac{1}{3}p$ aanvullen tot grote kubus met afmetingen: $x + \frac{1}{3}p$ bij $x + \frac{1}{3}p$ bij $x + \frac{1}{3}p$. Inhoud zevendelig bouwsel is inhoud grote kubus verminderd met inhoud kleine kubus.
$(x + \frac{1}{3}p)^3 - (\frac{1}{3}p)^3 = -r$	Van meetkunde naar algebra
$(x + \frac{1}{3}p)^3 = (\frac{1}{3}p)^3 - r$	Derdemachtswortel trekken
$x = -\frac{1}{3}p + \sqrt[3]{(\frac{1}{3}p)^3 - r}$	Anders schrijven

tabel 2

Noten

- [1] Kindt, M. (2014). De abc-formule en de salontafel. *Euclides*, 89(7), 8-11.
 - [2] *Moderne wiskunde*, deel 3 VWO 6 wiskunde B blok 2 vaardigheden.
- Zie ook CWI syllabus 54 Vakantiecursus 2005.
De 'abc-formule' voor hogere-graadsvergelijkingen.
E. Coplakova

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

EEN OPMERKELIJKE SERIE BOEKEN

Wim Kleijne

Wim Kleijne ontdekte dat onze Zebrareeks ook familie heeft die in het Frans verschijnt.

De Zebrareeks, gestart volgens het voortreffelijke idee van de helaas te vroeg overleden collega Jan Breeman, heeft zijn plaats in ons wiskunde onderwijs meer dan veroverd en verdiend. Een groot aantal boekjes is inmiddels verschenen; zij voorzien in een duidelijke behoefte.



Wie schetst mijn verbazing toen ik in het voorjaar van dit jaar (2014) in het Franse deel van Zwitserland geconfronteerd werd met een nieuwe uitgave, die als twee druppels water lijkt op onze Zebrareeks. Onder de titel *Le monde est mathématique* verschijnt een reeks boeken, waarvan bij de aankondiging direct de eerste 40 titels bekend zijn gemaakt. Een grote advertentiecampagne begeleidde de start van de reeks. De serie loopt nu al ruim een half jaar en de boeken zijn verkrijgbaar in boekwinkels, kiosken, bij benzinepompen(!) en dergelijke. Dat wil zeggen dat de doelgroep niet alleen bestaat uit leerlingen van het voortgezet onderwijs, maar dat de schrijvers mikken op een veel breder publiek. Vol overtuiging wordt de lezer warm gemaakt voor het kopen van de deeltjes. Want zo zegt men, zonder de wiskunde is de wereld niet meer te begrijpen. Citaat: *'Et si les mathématiques étaient la clé pour comprendre le monde...'* en *'Savez-vous que les mathématiques sont partout autour de vous? L'univers qui vous entoure, du très banal au plus exceptionnel, ne peut se comprendre sans elles.'* Nou, dat liegt er niet om. En dat allemaal in begeleidende flyers, artikelen in de dagbladen, enzovoort. Smaakmakers tot en met. Het resultaat mag er dan ook wezen.

Direct al in het eerste deel: *Le nombre d'or*. Het zal duidelijk zijn dat mijn hart open ging deze titel als eerste te zien. Uiteraard meteen gekocht, dit eerste deel voor de startprijs van CHF 2,90 en dat voor een boek

van 159 pagina's, met harde kaft en in vierkleurendruk. De ondertitel van dit boek, geschreven door Fernando Corbalán, luidt: *'Le langage mathématique de la beauté'*. De formule van de inhoud van het boek is dezelfde als ons Zebraboekje nummer 4, *De Gulden Snede*, maar het is aanmerkelijk uitgebreider. Datzelfde geldt voor de andere al verschenen delen en naar verwachting ook voor de delen die nog volgen.

De serie is ontstaan uit een eerder collectief project van Spaanse auteurs, waarna het project gerealiseerd en uitgegeven werd onder auspiciën van L'Institut Henri Poincaré te Parijs. Het geheel staat onder leiding van prof Cédric Villani, directeur van genoemd instituut, drager van de Fields medaille (2010). Om een idee te geven, noem ik enkele van de eerste 40 titels: *Le nombre d'or*; *Mathématiques*; *Espionnage et piratage informatique*; *La quatrième dimension*; *Plans de métro et réseaux neuronaux*; *La conquête du hasard*; *Les formes qui se déforment*, enzovoort.

Alle delen (en tot dusver zijn er al vele verschenen) hebben dezelfde schitterende uitvoering als het eerste deel. De prijs bedraagt CHF 14,90 per deel (spotgoedkoop gezien de kwaliteit van de boeken).

Velen zullen wellicht aanhikken tegen het Frans, maar met enige moeite kom je daar best overheen. U begrijpt dat ik – net als voor de Zebrareeks – enorm enthousiast ben voor deze serie. Wat mij bovendien buitengewoon aanspreekt, is het feit dat er zo'n breed publiek gezocht (en gevonden!) wordt. Zou dat ook niet iets zijn voor de Zebrareeks?

Over de auteur

Drs. Wim Kleijne (1942) is met pensioen, maar nog steeds werkzaam als wiskundedocent. Hij was rector, inspecteur, en lerarenopleider. Momenteel nog adviseur en coach van docenten; samen met Ton Konings auteur van *De Gulden Snede* (Zebraboekje nummer 4).

E-mailadres: wim.kleijne@xs4all.nl

IMPRESSIES VERENIGINGSDAG

TOESPRAAK BIJ HET AFSCHEID VAN MARIAN KOLLENVELD ALS VOORZITTER VAN DE NVVW



[Henk Rozenhart]



Geachte aanwezigen,

Een belangrijk moment op deze dag en waarschijnlijk in de geschiedenis van onze vereniging is aangebroken. We gaan afscheid nemen van Marian Kollenveld in haar functie van bestuurslid en voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het is mij een eer en genoegen om haar daar bij toe te spreken namens u allen.

Zij is 23 jaar lid geweest van het bestuur en daarvan heeft zij 16 jaar de rol van voorzitter vervuld. U snapt dat haar invloed op het Nederlandse wiskundeonderwijs groot geweest is. Zo groot dat het ondoenlijk is om die grote lijst

van prestaties hier in zijn geheel op te sommen. Daar ontbreekt mij gewoon de tijd voor en het zou ook indruisen tegen de bescheidenheid die Marian zelf altijd in acht neemt. 'Ik ben ook maar een radertje dat de goede kant opdraait' zou zij zeggen. Maar wij weten dat het ontbreken van welk radertje dan ook het uurwerk tot stilstand brengt. Daarom noem ik er u twee:

- zonder Marian waarschijnlijk geen wiskunde D. Zij sleepte het voor de poorten van de hel weg;
- zonder Marian waarschijnlijk geen echte bemoeienis met de nieuwe programma's: nu schreven voor het eerst echte leraren mee.

Daar ligt waarschijnlijk de kern van haar hele bestuursperiode: invloed van leraren vergroten. De u wel bekende wiskundige Poisson heeft eens gezegd: 'Het leven is eigenlijk maar goed voor twee dingen: wiskunde leren en wiskunde onderwijzen'. Als er ergens mensen te vinden zijn die dit onderschrijven, moet dat hier zijn, zou ik zo denken. Hoewel, wij weten dat er meer is, maar wij allen zullen toch wel het gevoel delen dat wiskunde leren en wiskunde onderwijzen ons leven behoorlijk heeft beïnvloed. Maar als ik naar Marian kijk, heeft zij aan deze twee dingen een derde doel in het leven toegevoegd, namelijk zorgen dat zij die dit tweede doel dienen (dat onderwijzen dus) dit zo goed mogelijk en onder zo gunstig mogelijke omstandigheden kunnen doen. Dat was de taak die ze op zich had genomen. Daarmee heeft zij naast de twee eerder genoemde doelen haar arbeidzame leven gevuld.

Zij heeft samen met de vele bestuursleden die naast haar hebben gezeten, van de NVvW een vereniging gemaakt waar naar geluisterd wordt, die gevraagd wordt om mee te denken, die meebeslist hoe het moet gaan. Wij spelen dankzij haar tomeloze inzet een rol bij het maken van het beleid. Men kan niet meer om ons heen. Als het om wiskundeonderwijs gaat moet je bij de NVvW zijn. Voorwaar een geweldige prestatie waar wij haar allen dankbaar voor moeten zijn. En dan past er in onze vereniging maar een beloning om deze dankbaarheid tot uitdrukking te brengen en dat is het erelidmaatschap.

Wellicht vindt u dat ik wat overdrijf als ik haar een geweldenaar noem; het woord icoon past ook wel vind ik, maar zoals Oscar Wilde al heeft gezegd: 'Zonder overdrijven geen passie en zonder passie geen liefde'. Passie en liefde voor dat geweldige vak van ons.



TOESPRAAK (SAMENGEVAT) BIJ HET AFSCHIED VAN KEES LAGERWAARD ALS SECRETARIS VAN DE NVVW

[Marian Kollenveld]

Geachte aanwezigen,

Kees Lagerwaard treedt af en is niet herkiesbaar. Dus mag ik nu nog afscheid van hem nemen. In de *Euclides* met de werkgroepen van de studiedag 1991 heb ik een rondje gezet om de werkgroep met de titel: *Examens en wiskunde A: onmogelijke combinatie of goede afsluiting? Een werkgroep door C. Lagerwaard*, met als tekst:

Het doel van wiskunde A is dat kandidaten aan de werkelijkheid ontleende problemen kunnen doorgronden en kunnen oplossen met wiskundige middelen. Met het examen willen we meten in hoeverre de leerling dat doel heeft bereikt. En de vraag is: kan dat met een schriftelijk werk van 3 uur en hoe open mag/moet de vraagstelling zijn om probleemaanpak te kunnen toetsen.

Ik kan me eerlijk gezegd deze werkgroep niet meer voor de geest halen, maar het is wel *vintage* Kees: zijn ambacht was wiskunde A en de examens. Bij de invoering van wiskunde A was hij eerst pilotdocent en daarna was hij jarenlang verantwoordelijk voor de examens havo wiskunde A, waar ik hem als lid van de vaksectie weer tegenkwam.

Ik noemde hem de oude meester en dat vond ik ook: het vakmanschap in combinatie met de betrokkenheid die Kees in vele jaren had opgebouwd, zorgden ervoor dat het bij de examens havo A zelden misging. Als het zo is heb ik het verdrongen, ik droom zelden meer van een glasbak met een kleurenblinde. Maar ik herinner me wel een paar mooie opgaven, over mossels bijvoorbeeld.

Bij Profi, waar we werkten aan de programma's voor de tweede fase, was Kees als secretaris van de vakontwikkelgroep een volstreekte rots in de branding. Alles op orde, volstrekt helder opgeschreven en niet te vergeten netjes gearchiveerd met een mooi systeem van cijfers en letters, en toen dacht ik: die wil ik ook.

Voor mij was Kees dus de gedroomde secretaris en ik was dan ook erg blij dat ik hem heb kunnen verlokken om in het bestuur van de NVvW die taak op zich te nemen. Kees is volstrekt integer, hij heeft goed doordachte opvattingen over wiskundeonderwijs en de rol van de docent, en een grote betrokkenheid bij de leerlingen die wat minder begaafd zijn voor wiskunde, voor wie wiskunde een moeilijk vak is. En hij brengt die opvattingen welbespraakt te berde als dat van pas komt bij een vergadering of een extern overleg.

Kijk, aan zo iemand heb je wat. Hoe dat nu verder moet zonder hem, weet ik niet, maar ik denk dat het niet verkeerd is, om met Kees te spreken, om hem heel hartelijk te bedanken voor het vele goede werk dat hij de afgelopen jaren voor de vereniging heeft gedaan.



GEZIEN TIJDENS DE NOT: ONZE KLEURRIJKE PRIMEUR.

Nu voor maar
€69,- met gratis
TI-SmartView software
voor beamer of
digibord

Kleur maakt het verschil!

- Oplaadbare batterij en lader; lagere kosten en beter voor milieu
- Examenstand / geheugenblokkering (verplicht tijdens CE 2016)
- Volledige functionaliteit van de TI-84 Plus (Silver Edition)
- Met backlight en hoge resolutiescherm (240 x 320 pixels)

Profiteer nu van de docentenaanbieding.

Ga naar www.education.ti.com/nederland en
download het aanbiedingsformulier (onder het kopje service).



VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A^o 19³⁹/₄₀

Deze keer twee echt eenvoudige opgaven, die (ook) onze vwo-leerlingen zonder hulp moeten kunnen maken. Het betreft twee dwarsverbanden: (synthetische of analytische) meetkunde met analyse, en meetkunde met goniometrie.

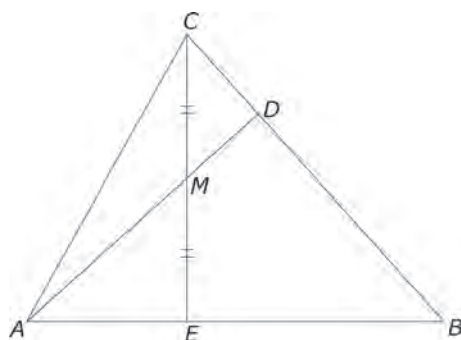
Opgave 1

Bereken de hoeken van driehoek ABC , als gegeven is dat het hoogtepunt ervan samenvalt met het midden van de hoogtelijn uit C en $\angle C$ zo klein mogelijk is.

Opgave 2

Gegeven een lijnstuk AB (midden C) en zijn middelloodlijn. Men construeert met A als middelpunt en AB als straal een cirkelboog, die door B gaat en de middelloodlijn eenmaal, in D , snijdt. Men neemt op boog BD een punt E en construeert de raaklijn in E aan de cirkelboog. Deze raaklijn snijdt het verlengde van AB in P en de middelloodlijn in Q . Bereken $\angle EAB$, als gegeven is, dat E het midden is van PQ .

Uitwerking opgave 1



Een werkschets

Het is een uitdaging op zich een kloppende werkschets te maken op de computer.

Een eerste inventarisatie

- er zijn gelijkvormige driehoeken aanwezig;
- probeer dit te combineren met lijnstukken ME , MC en/of CE .

Lukt het u?

Nu in meer detail

Stel $EM = 1$, dus $EC = 2$.

De driehoeken AEM en CDM zijn gelijkvormig (hh), dus $\angle EAM = \angle DCM$, dus ook de driehoeken AEM en CEB zijn gelijkvormig (hh). De verhoudingstabel hierbij:

AE	ME = 2
CE = 1	BE

Stel $AE = x$, dan is dus $BE = \frac{2}{x}$, en

$AB = x + \frac{2}{x} = f(x)$. $\angle C$ is zo klein mogelijk wanneer

AB zo klein mogelijk is, dus zoeken we het minimum van f .

$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ nul stellen geeft als positieve uitkomst

$x = \sqrt{2}$, waarna de hoeken van driehoek ABC snel kunnen worden bepaald. Dat mag u zelf doen.

Opmerking

Bovenstaande uitwerking begint met synthetische meetkunde, maar het kan ook mooi en kort met een beetje analytische meetkunde. Dan past de opgave mooi in het nieuwe programma.

In het kort: kies een assenstelsel: AB als horizontale en CE als verticale as. Stel $M = (0;1)$ en $C = (0;2)$,

$A = (-a;0)$ en $B = (0;b)$. Dan geldt $rc_{AM} = \frac{1}{a}$; $rc_{BC} = -\frac{2}{b}$;

AM staat loodrecht op BC dus $\frac{1}{a} \cdot -\frac{2}{b} = -1$, dit geeft

$ab = 2$, waarna de functie f kan worden opgesteld.

Een mooie praktische mini-opdracht van ongeveer één lesuur, geïnspireerd door deze opgave, zou kunnen zijn:

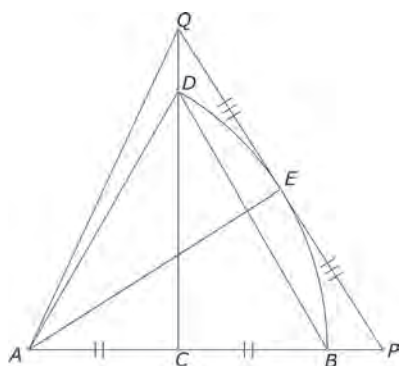
Teken een driehoek ABC waarvan het hoogtepunt halverwege één van de hoogtelijnen ligt. Licht je werkwijze toe.

Uitwerking opgave 2

Een werkschets

Een eerste inventarisatie

- driehoek ABD is gelijkzijdig;
- stel $\angle EAB = \alpha$ en cirkelstraal = 1;
- $\angle QAP = 2\alpha$;
- kies een geschikt assenstelsel en probeer de coördinaten van punten uit te drukken in α .



De uitwerking

Kies AB als horizontale as en A als oorsprong.
 Dan is $E = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ (eenheidscirkel!).
 Q ligt twee keer zo hoog als E , dus $y_Q = 2\sin\alpha$.

In driehoek ACQ geldt nu:

$$\tan 2\alpha = \frac{CQ}{AC} = \frac{2\sin\alpha}{\frac{1}{2}} = 4\sin\alpha.$$

Kunt u deze vergelijking algebraïsch oplossen?

----- ??? -----

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 4\sin\alpha;$$

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = 4 \sin \alpha, \text{ dus } \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} = 2;$$

Substitutie van $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ levert op:
 $4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 2 = 0$, met als positieve uitkomst $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, waaruit volgt $\alpha \approx 32,53422655^\circ \approx 32^\circ 32' 3,2''$
 (een grappige uitkomst als je alleen naar de cijfers kijkt).

Opmerking

Een alternatieve route is een assenstelsel te kiezen met AB als horizontale en CQ als verticale as. Stel $AC = 1$, dan geldt $A = (-1; 0)$, $E = (2\cos\alpha - 1; 2\sin\alpha)$. Je zou nu ook de richtingscoëfficiënt van AE en PQ kunnen uitdrukken in α , en hieruit de vergelijking van PQ kunnen opstellen.

Dit levert op: $y_0 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\tan \alpha}$, waaruit volgt:

$$\tan 2\alpha = \frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$
 Deze vergelijking op zich past

mooi in een goniometrietoeets, en kan met onder andere verdubbelingsformules worden herleid tot de kwadratische cosinusvergelijking hiervoor.

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

EERSTE RONDE



In de tweede helft van januari hebben leerlingen op vele scholen hun tanden gezet in de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade. De opgaven en uitwerkingen zijn nu te vinden op de website www.wiskundeolympiade.nl. Op 6 februari maken we via de site bekend met hoeveel punten leerlingen door zijn naar de volgende ronde. In totaal worden ongeveer 1000 leerlingen uitgenodigd voor deze tweede ronde.

Verder kunnen elk moment de winnaars van de scholenprijzen bekend worden. Dit jaar worden er maar liefst vier scholenprijzen uitgereikt. Zo zal er een apart klassement worden gemaakt voor scholen die dit jaar (of in de afgelopen twee jaar) nieuw mee zijn gaan doen. Om deelname van jonge leerlingen en meisjes extra te stimuleren, hebben we ook een prijs ingesteld voor de school met de beste onderbouwleerlingen en de school met de beste vrouwelijke deelnemers. Daarnaast zal voor de bestaande scholenprijs niet meer worden gekeken naar de somscore van de beste vijf deelnemers, maar naar de somscore van in totaal zes deelnemers: de beste twee uit de onderbouw, de beste twee uit klas 4 en de beste twee uit klas 5.

VERNIEUWDE PROGRAMMA'S LEIDEN TOT AANPASSINGEN ADVISERING

Hielke Peereboom

VOORAL BIJ WISKUNDE C MOET HET ROER OM

In het schooljaar 2015-2016 starten in klas 4 van de Tweede Fase van havo-vwo de vernieuwde wiskundeprogramma's. Dit heeft gevolgen voor de advisering aan de huidige derdeklassers in het voorjaar van 2015. Hieronder doet Hielke Peereboom een poging om bij dit keuzeproces bij elke soort wiskunde na te gaan wat de mogelijke consequenties zijn van de vakvernieuwingen.

Wiskunde A havo

Bij wiskunde A bestaat de grote verandering in een gewijzigde opzet voor het onderdeel *Statistiek en kansrekening*. De statistiek in het nieuwe curriculum is gebaseerd op de empirische cyclus van data verwerven-data verwerken-data analyseren-trekken van conclusies. Omdat er gewerkt moet gaan worden met realistische en dus grote datasets, is de inzet van ICT onmisbaar. Dit laatste is op het CE niet mogelijk, zodat op het CE de nadruk meer zal liggen op het kwalitatief redeneren. Kwantitatieve uitspraken en/of berekeningen vinden alleen plaats aan de hand van gegeven berekeningswijzen. De kansrekening is verdwenen en telproblemen (combinatoriek) is een SE-onderdeel geworden. In het nieuwe programma is meer aandacht voor rekenregels en algebraïsche vaardigheden dan in het programma van 2007. De syllabus geeft een concreet en gedetailleerd overzicht. Mijn indruk is dan ook dat het CE wat algebraïscher wordt en voor een deel van de leerlingen dus iets lastiger. Anderzijds zal het voor sommige leerlingen een voordeel zijn dat combinatoriek niet meer op het CE terugkomt. Alles bij elkaar genomen kan er bij individuele leerlingen dus anders geadviseerd worden dan in het verleden, maar er zijn geen grote veranderingen in de adviseringen te verwachten.

Wiskunde B havo

Hier is de grootste verandering in het programma de meetkunde. De ruimtemeetkunde is vervangen door analytische meetkunde. Dit betekent dat de leerling nauwelijks ruimtelijk inzicht meer nodig heeft, maar dat veel meer een beroep wordt gedaan op de algebraïsche vaardigheden. Het is dus van belang om in klas 3 vooral te letten op de capaciteiten van de leerling op dit terrein. Een ander aspect is de werkhouding van de leerling; hij zal er blijk van moeten geven dat hij bereid is om tijd en energie te steken in het vak. Ga maar eens na hoeveel werk en nauwkeurigheid van werken er zit in een schijnbaar eenvoudige opgave om de lengte van een lijnstuk uit te

Gegeven zijn de punten $A(1,4)$, $B(5,1)$ en $C(2,-2)$. Cirkel c heeft middelpunt A en gaat door punt B . Lijn m is de lijn door B en C en deze snijdt c , behalve in punt B ook nog in een punt D . Bereken de lengte van het lijnstuk BD .

figuur 1

rekenen (zie figuur 1). Een en ander kan zeker leiden tot een andere advisering bij de leerling en dus andere keuzes voor het vak wiskunde B dan in het verleden. Het hoeft niet zo te zijn dat de aantallen

leerlingen bij dit vak drastisch zullen wijzigen, maar het is zeker mogelijk dat door de algebraïsering van wiskunde B de samenstelling van de groepen anders zal zijn dan in het huidige programma.

Wiskunde D havo en vwo

Hoewel er enkele wijzigingen zijn in het programma (onder andere een uitruil van het type meetkunde met wiskunde B) heeft dit waarschijnlijk geen gevolgen voor de advisering van leerlingen.

Wiskunde A vwo

In het nieuwe programma is meer aandacht voor rekenregels en algebraïsche vaardigheden. Wat voor wiskunde A havo is opgemerkt over statistiek geldt ook hier, maar op het vwo wordt dit onderdeel alleen op het SE getoetst. De kansrekening is gebleven, maar wordt niet getoetst op het CE (wel op het SE), zodat het gevolg is dat het CE alleen nog maar bestaat uit analyse en combinatoriek. Doordat ook de goniometrie terugkeert op het CE, wordt het CE dus behoorlijk algebraïscher. Derdeklassers moeten dus kunnen laten zien dat ze beschikken over een behoorlijke basis van algebraïsche en formulevaardigheden, wil een wiskunde A-keuze succesvol zijn. Dit zal in de advisering duidelijk aan de orde moeten komen, des te meer bij leerlingen uit het CM-profiel. Daarover verderop in dit artikel meer.

Wiskunde B vwo

Hier is de grootste verandering ook bij de meetkunde: de synthetische meetkunde ('bewijsmeetkunde') is vrijwel

verdwenen en vervangen door analytische meetkunde (*Meetkunde met coördinaten*, zoals het domein officieel heet). Verder is een subdomein *Vectoren* toegevoegd aan meetkunde en ook parameterkrommen (als bewegingsvergelijkingen) hebben hier hun plek gekregen. Binnen de analyse zien we nieuwe elementen: twee nieuwe subdomeinen: *B4 Inverse functies* en *B6 Asymptoten en limietgedrag van functies*. Scheve asymptoten, linker- en rechterlimiet en perforaties worden hierin expliciet vermeld. Ook nieuw: de absolute-waarde-functie als standaard-functie, stelsels vergelijkingen worden expliciet benoemd, en er is een eindterm over de drie karakteristieke vormen waarin tweedegraadsfuncties geschreven kunnen worden (dus ook als $f(x) = a(x - p)(x - q)$ en $f(x) = a(x - r)^2 + s$). Al met al lijkt dus ook wiskunde B voor vwo algebraïscher te worden en dit zal bij individuele leerlingen tot een andere advisering leiden.

Wiskunde C vwo

De grootste verandering in advisering is nodig bij wiskunde C. Dit programma heeft een totale metamorfose

ondergaan en heeft een compleet eigen gezicht gekregen. In de huidige situatie is wiskunde C een deelverzameling van wiskunde A, een soort 'wiskunde A light' ook wel 'theezakje-model' geheten. Het nieuwe programma heeft eigenlijk alleen een overlap met wiskunde A voor zover het om het onderdeel *Statistiek en kansrekening* gaat, en is specifiek gericht op het profiel Cultuur en Maatschappij en op de interessesfeer en de (on)mogelijkheden van de

CM-leerling. Eén van de redenen voor de herziening van het wiskunde C-programma is de doorstroomrelevantie geweest. Het examenprogramma bereidt specifiek voor

op een studie in de sector Recht, de sector Gedrag en Maatschappij en de sector Taal en Cultuur. Binnen het nieuwe wiskunde C-programma nemen contexten die passen in het CM-profiel een belangrijke plaats in. De nadruk ligt minder op het reproduceren van technieken en meer op de functie, de cultuurhistorische rol en de waarde van wiskunde in onze maatschappij.

In de twee nieuwe domeinen bij wiskunde C, te weten *Vorm en ruimte* en *Logisch redeneren*, ervaren de leerlingen de relevantie van wiskunde bij de specifieke maatschappelijke, culturele en historische onderdelen van het CM-profiel. Bij *Logisch redeneren* worden logisch-wiskundige aspecten gekoppeld aan correctheid van redeneringen en het trekken van conclusies zoals in het maatschappelijk debat. Bij *Vorm en ruimte* vinden meetkundige principes hun plaats in toepassingen in architectuur en beeldende kunst.

Op de pilotscholen zijn de ervaringen met dit nieuwe programma erg positief. De leerlingen die in klas 4 beginnen met een erg negatief zelfbeeld – 'Meneer, wij kunnen geen wiskunde' – ontdekken dat ze deze minder formele wiskunde (heel) goed aankunnen en er zelfs plezier aan beleven en over het algemeen redelijke tot goede resultaten halen.

Een praktisch gevolg van deze herziening is dat, in tegenstelling tot de huidige praktijk, het erg lastig wordt om wiskunde C-leerlingen, in ieder geval na klas 4, in een wiskunde A-groep onder te brengen. Aparte homogene wiskunde C-klassen zijn nodig, in ieder geval vanaf klas 5. Op de pilotscholen is met succes gewerkt met een verticale clustering, dat wil zeggen met combinaties van klas 4, 5 en 6 C-groepen. Een ander gevolg van de herziening is dat een overstap van wiskunde A naar wiskunde C na klas 4 heel wat lastiger is dan in de huidige situatie. De huidige advisering aan CM-leerlingen, zo lijkt het althans, heeft meestal als uitgangspunt: 'Kies wiskunde A, want dan heb je veel meer doorstudeermogelijkheden. Lukt dit niet, dan kun je altijd nog terug naar wiskunde C.' Hiervoor is al aangegeven dat dit laatste vanaf 2015

Advisering CM-leerlingen t.a.v. wiskunde C moet 180 graden draaien.
Van: 'Kies maar wiskunde A want dan heb je meer doorstroommogelijkheden en je kunt altijd nog terug naar wiskunde C.'
Naar: 'Kies wiskunde C tenzij je specifieke doorstroomplannen hebt waar wiskunde A of wiskunde B voor nodig is'.

figuur 2



BEVOEGDHEID TE GRAAD HALEN?

Bij Hogeschool Utrecht kunt u doorstuderen voor een Master of Education voor het vak Wiskunde. Deze master komt in aanmerking voor de lerarenbeurs.

Kijk op www.ca.hu.nl voor meer informatie en kom naar de open avond op 10 maart.

ER VALT NOG GENOEG TE LEREN

**INSTITUUT
ARCHIMEDES
HOGESCHOOL
UTRECHT**



niet meer het geval is. Het uitgangspunt (meer vervolgmogelijkheden bij wiskunde A) klopt wellicht in theorie, vooral als het gaat om de sector Economie en een enkele studie in de sector Gezondheidszorg. In de praktijk zal het natuurlijk erg weinig voorkomen dat de belangstelling van een CM-leerling hiernaar uitgaat. De sectoren Techniek en Natuur zijn niet toegankelijk voor leerlingen met wiskunde A of wiskunde C. Daarentegen bieden de sectoren Recht (100 %), Taal en Cultuur (100 %) en Gedrag en Maatschappij (95 %) gelijke mogelijkheden voor deze twee soorten wiskunde. Gezien het nieuwe programma lijkt bij een aantal studies in de hierboven genoemde sectoren het vak wiskunde C juist een betere aansluiting te hebben dan wiskunde A. Let wel: bij studies in de drie hierboven genoemde sectoren is het van belang dat leerlingen statistiek hebben gehad. En wat dat betreft is er geen verschil tussen wiskunde C- en wiskunde A-leerlingen (op het onderdeel hypothese toetsen na).

Een ander punt dat aandacht verdient, is de kernvakkenregeling. De formeel-wiskundig-zwakke leerling moet gewezen worden op de risico's bij een eventuele keuze voor wiskunde A, zeker als hierbij ook nog eens de Rekentoets betrokken wordt.

Conclusie

Ten aanzien van de advisering zou het uitgangspunt dus 180 graden moeten worden gedraaid: een CM-leerling adviseer je wiskunde C, zie figuur 2. Dit is helemaal conform de opzet van wiskunde C, als dé wiskunde voor het profiel CM. Er moet een goede reden zijn om hiervan af te wijken. Bijvoorbeeld als de leerling ook economie in zijn pakket heeft en de mogelijkheid voor een economische studie wil openhouden, dan is een keuze voor wiskunde A (of nog beter wiskunde B) nodig. In dit kader heeft het SLO-projectteam een kenniskaart ontwikkeld voor wiskunde C die beschikbaar wordt gesteld aan docenten en decanen, zie figuur 3. Overigens zijn voor de andere wiskundevakken ook dergelijke kaarten in ontwikkeling en binnenkort te downloaden. Wat betreft de toelatingseisen van het WO, de zogenoemde 'kruisjeslijst' van de VSNU: wij zijn in gesprek om wiskunde C op de een of andere manier hier zichtbaar een plek te geven, zodat nog beter duidelijk wordt (ook voor leerlingen en ouders) welke doorstroommogelijkheden een CM-leerling met wiskunde C heeft.

WISKUNDE C KENNISKAART VOOR DOCENTEN EN DECANEN

Het geheel vernieuwde Wiskunde C examenprogramma

- Wiskunde C is een profielvak in het profiel Cultuur en Maatschappij in het vwo met een studielast van 480 sluis en bereidt voor op universitaire studies in de sector Recht, de sector Gedrag en Maatschappij en de sector Taal en Cultuur.
- Statistiek en kansrekening neemt, evenals bij wiskunde A, een belangrijke plaats in bij wiskunde C. De nadruk ligt minder op de empirische cyclus data verwerven-data verwerken-data analyseren en conclusies trekken. Door het werken met realistische grote datasets is de inzet van ICT onmisbaar.
- Contexten, die passen in het profiel C&M, nemen een belangrijke plaats in bij wiskunde C. De nadruk ligt minder op de formeel-algebraïsche technieken en meer op het herkennen, interpreteren en gebruik van wiskunde in verschillende situaties.
- De profielspecifieke eigenheid van wiskunde C komt extra tot zijn recht door de nieuwe domeinen *Vorm en ruimte* (meetkundige principes toegepast in maatschappij, beeldende kunst en architectuur) en *Logisch redeneren* (logisch-wiskundige aspecten gekoppeld aan correctheid van redeneringen en conclusies, zoals bijvoorbeeld gebruikt in het maatschappelijk debat).

Kenmerken van de wiskunde C leerling

- Heeft in de eerste drie leerjaren de nodige moeite gehad met wiskunde.
- Heeft een negatief zelfbeeld met betrekking tot wiskundemogelijkheden.
- Heeft veel individuele aandacht nodig van docent.
- Heeft (veel) tijd nodig om zich wiskunde eigen te maken.
- Heeft weinig betrokkenheid en vaardigheid met abstract-formele wiskunde.
- Heeft als C&M leerling wel belangstelling voor praktische en aan cultuur en maatschappij gerelateerde wiskundeactiviteiten.

Gevolgen voor advisering door decanen en docenten

Het nieuwe wis C examenprogramma wijkt zoveel af van wis A (en het oude wis C) dat het erg lastig wordt om in klas 5 of 6 van wis A nog over te stappen naar wis C. Dat een CM leerling met wis A veel meer studiemogelijkheden open houdt, klopt slechts als het gaat om de sector Economie en een enkele studie in de sector Gezondheidszorg. In de praktijk blijkt dat de belangstelling van een CM-leerling hier niet naar uit gaat. De sectoren Recht, Taal en Cultuur en Gedrag en Maatschappij daarentegen bieden (vrijwel) gelijke mogelijkheden voor deze twee soorten wiskunde. Bij een aantal studies in de hierboven genoemde sectoren lijkt het nieuwe wis C juist een betere aansluiting te hebben dan wis A. Conclusie:

- Van *'Kies maar wis A want dan heb je veel meer doorstudeermogelijkheden en je kunt altijd nog terug naar wis C'* naar *'Kies wis C tenzij je nadrukkelijk de mogelijkheid tot een studie in de sector Economie open wil houden'*.

Aparte wiskunde C klassen

Hoewel er sprake is van een overlap in de examenprogramma's (Statistiek) van de wis A en wis C, verdient het een sterke voorkeur, mede op grond van ervaringen op de pilotscholen, dat aparte wiskunde C klassen vanaf 4-vwo gevormd worden. Hiervoor pleit:

1. De interesse en de mogelijkheden van de wis C-leerlingen vragen om een andere, eigen inhoud, aanpak en tempo dan wis A leerlingen.
2. Wis A is op het terrein van de algebraïsche vaardigheden behoorlijk verzaagd; in de gemengde WA/WC-klassen worden de wis C-leerlingen hier onnodig en ten onrechte ook mee geconfronteerd.
3. Het is op de pilotscholen gebleken dat, om (heel) kleine groepen te voorkomen, een verticale clustering, V4-V5-V6 wis C klassen, veel beter uitpakt dan het onderbrengen van wis C leerlingen in wis A groepen.

figuur 3

Over de auteur

Hielke Peereboom is lid van het projectteam SLO.
E-mailadres: hielkepeereboom@gmail.com

IMPRESSIE VERENIGINGSDAG

A2 Wiskundige denkactiviteiten

Henk Reuling en Dolf van den Hombergh

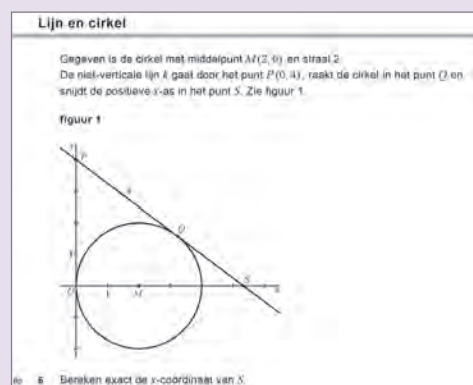
[Gerard Koolstra]

De belangstelling voor de werkgroep was zo groot dat uitgeweken moest worden naar een grotere zaal. Het thema is blijkbaar *hot*, en de leiders van de workshop zijn nauw betrokken bij enerzijds de pilot-examens, en anderzijds (via de *Wageningse Methode*) een aanpak waarbij bewust niet alle hobbels voor de leerlingen worden weggewerkt. De term wiskundige denkactiviteiten is afkomstig uit het visiedocument van cTWO (commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs). Henk formuleerde als hoofddoel: 'Aan het denken zetten'. Dat betekent concreet (ook voor de eindexamens) dat sommige opgaven wat minder voorgekookt zijn, en de leerling zelf wat stappen moet zetten. Als binnenkomer werd een opgave gebruikt uit het pilotexamen vwo wiskunde B 2012.

Een aardige opgave, met veel mogelijke aanpakken, onder andere gelijkvormigheid, al dan niet in combinatie met Pythagoras; tangens dubbele hoek; machtstelling; discriminant; afstand lijn tot oorsprong. Bij de pilot ging de opgave echter totaal de mist in. De resultaten waren zo bedroevend dat uiteindelijk alle kandidaten zes punten cadeau hebben gekregen. In hoeverre is hier sprake van denkactiviteiten? Dat hangt ook af van de aanwezige voorkennis en training. Het onderscheid tussen standaard en origineel, reproductie en productie heeft alles te maken met ervaringen en beheersingsniveau.

Dit kwam ook aan de orde bij een andere examenopgave (pilot 2013) waarbij het beeld van een (punt op een) grafiek bij spiegeling in de lijn $y = x + 1$ moest worden bepaald. Wanneer alleen spiegeling in $y = x$ bekend is, moet het probleem worden getransformeerd. Deze transformatie werd trouwens in de betreffende opgave behoorlijk voorgekookt. In de workshop kwamen diverse andere voorbeelden van vragen waarbij even nagedacht moet worden aan bod, zoals het doorprikken van gezichtsbedrog bij wiskunde C, en een 'onderzoeksvraag' waarbij de leerling zelf een aantal stappen moet doen zonder tussenvragen die op weg helpen. In de *Wageningse Methode* is van oudsher veel aandacht voor vragen die net even anders zijn, zoals het opdelen van figuren en een aantal (onderling congruente) andere figuren. De hamvraag voor velen is hoe dit te onderwijzen? Als eerste punt werd genoemd: voldoende kennis en vaardigheden. Als je weinig gereedschap hebt, valt er niet zoveel te kiezen. Daarnaast:

- aandacht voor begrijpen;
- bespreken van oplossingsstrategieën;
- waken voor te makkelijke beschikbaarheid van uitwerkingen.



A3 Wiskundige denkactiviteiten in de les: hoe doe je dat?

Mariska Sas

[Ton Lecluse]

Mariska heeft op de Googlecursus vorig jaar in een groepje een lessenserie ontworpen over het onderwerp *Tellen* voor havo wiskunde A. Deze lessenserie van 14 lessen is hoofdstukvervangend, en kan worden gedownload op www.leergangwiskunde.nl. Gebaseerd op de aanpak van Polya zijn in deze lessenserie een aantal spellen geïntegreerd en een aantal mooie denkactiviteiten ingebouwd. Speciaal voor de deelnemers werd de wiskunde-estafette gekozen, waar men een beginopgave krijgt, deze zo snel mogelijk moet oplossen, waarbij een fout antwoord tot strafpunten leidt en een herkansing, en er twee moeilijkheidsgraden zijn. Na een correct antwoord kan het groepje kiezen uit een eenvoudige of pittige vervolgo opdracht. Wie aan het einde van de les de meeste punten verzamelt,

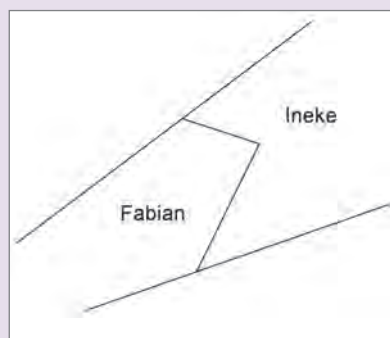
heeft gewonnen. Deze werkvorm maakt leerlingen actief en productief tot de laatste seconde van de les; prachtig. Ook prima voor de onderbouw, maar, zo waarschuwt Mariska, stop er geen echte puzzelopdrachten bij.

A4 Wiskundige denkactiviteiten: een tussendoortje of andere didactiek?

Theo Wesker, e.a.

[Ineke van Pol]

Deze workshop was boeiend. Er was voldoende afwisseling tussen zelf nadenken en luisteren. We bekeken eerst een deel van een filmpje uit een Japanse wiskundeles waarin leerlingen aangezet werden om na te denken over een probleem. Er zijn twee bezitters van een stuk land. De scheidslijn loopt niet recht.



Hoe kun je zorgen dat de scheidslijn wel recht is, maar beide bezitters een even groot stuk land behouden als ze voor de herverdeling hadden? De leraar vroeg aan de leerlingen of ze enig idee hadden waar de rechte lijn moest komen. De film werd stilgezet en de workshopbezoekers kregen drie minuten om zelf na te denken. Daarna ging het filmpje verder. De leerlingen mochten in viertallen overleggen. Als ze geen idee hadden, konden ze naar twee hints die in de hoek op de muur hingen gaan kijken. Aan het eind werd de oplossing doorgesproken. Wat de leerlingen wel net aan het begin van de les hadden herhaald, maar wat wij niet mochten zien, was

dat ze de vorige les hadden besproken dat de oppervlakte van een driehoek gelijk blijft wanneer je de top evenwijdig aan de basis verschuift. Voor de leerlingen was het ondanks deze herhaling een wiskundige denkactiviteit. Wanneer wij deze informatie hadden gehad, was het geen wiskundige denkactiviteit. Vaak als je de oplossing ziet of hoort, heb je een 'oh ja'-gevoel. De definitie van 'wiskundige denkactiviteit' (WDA) is lastig. Wanneer is het een wiskundige denkactiviteit? Als het een routine betreft, is het geen wiskundige denkactiviteit. Eenzelfde som kan het schooljaar ervoor wel een wiskundige denkactiviteit zijn, maar is na oefening dit schooljaar routine en brengt dus geen denkactiviteit bij leerlingen teweeg. Een manier om leerlingen aan een denkactiviteit te zetten, is om activerende werkvormen in te zetten, zoals: 'Denken, delen, uitwisselen'. De conclusie van Theo en de anderen was dat WDA geen tussendoortje is. Het is een manier van werken. Zowel voor havo als voor vwo vanaf 2015 in het nieuwe programma, en vanaf nu is het zeker van belang om een doorlopende leerlijn op te bouwen. Op de site van cTWO zijn voor de leerlijn van 1 t/m 5 havo ideeën geplaatst. Daar wordt ook verwezen naar Kangoeroe-opgaven. Er staat bij deze voorbeelden steeds dat het in dezelfde tijd kan, maar Theo betwijfelt of dat klopt. Een voorbeeld: Sem, Thomas en Daan hebben in totaal 30 knikkers. Sem geeft Thomas vijf knikkers. Thomas geeft er vier aan Daan en Daan geeft er twee aan Sem. Nu hebben ze alle drie evenveel knikkers. Hoeveel knikkers had Daan eerst?

Ik ben helemaal enthousiast geworden om, ondanks dat het voor mijn gevoel niet nieuw is, leerlingen aan het denken te krijgen, en samen met mijn collega's onze leerlingen meer wiskundig te laten denken.

Noot redactie: dit is een korte samenvatting, de oorspronkelijke bijdrage is te vinden op:



vakbladeuclides.nl/904impressies

A5 Wiskundige denkactiviteiten en gelaagde opdrachten

Jacoliene van Wijk

[Harm Bakker]

Als we wiskundige denkactiviteiten interpreteren als: een leerling maakt zelfstandig meerdere denkstappen van probleem naar oplossing, dan kan een gelaagde opdracht een werkvorm zijn om leerlingen daarin op te leiden. Bij een gelaagde opdracht krijgen groepjes leerlingen, bij voorkeur op niveau ingedeeld, een niet in stapjes opgedeelde opgave voorgelegd. Als in een groep de voortgang te lang op zich laat wachten, deel je als begeleider een kaart met een hint uit, zodat ze weer verder kunnen. Afhankelijk van de aanwezige vaardigheden zal de ene groep meer hints nodig hebben om tot de (een?) oplossing te komen dan de andere.

De werkgroepdeelnemers mogen aan den lijve ervaren hoe dit functioneert: leid in de groepjes waar je nu zit de formules voor $\cos(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha + \beta)$ maar af. Met zo'n lokaal vol geïnteresseerde leraren wiskunde zijn er maar weinig hintkaarten nodig om iedereen bij de oplossing te brengen. Mevrouw Van Wijk benadrukt dat dit een werkvorm is die met betrekkelijk weinig voorbereidingstijd kan worden uitgevoerd. Je kunt natuurlijk nieuwe opgaven verzinnen, maar ook opdrachten uit het boek zijn vaak eenvoudig om te bouwen: neem de stam van de opgave en opdracht d en herformuleer a, b en c als hints. Een heel nuttige workshop, waarin we zien dat het best mogelijk is leerlingen meer denk-actief met de standaardleerstof bezig te laten zijn.

B5 Animath: wiskundige animatiefilms maken

Maarten van der Burg, Monique Pijls

[Joke Verbeek]



Een volle klas bij de workshop van Maarten van der Burg en Monique Pijls. Van der Burg produceert en registreert educatieve documentaires voor *Scriptfactory*, Monique Pijls werkt aan de Hogeschool van Amsterdam, onder andere als Bètacoach. Zij zijn samen verantwoordelijk voor de lustrumwedstrijd van de vereniging *Animath*. *Animath* was ook het thema van hun workshop. Bij binnenkomst vielen al meteen de tafels met spullen op: kleurige sponsjes, pijpenragers, velletjes papier en veel

ondefinieerbare materialen. Dat, zo bleek later, waren de hoofdpersonen geweest van een wiskundige animatiefilm. Voor wie geen kinderen (meer) heeft: animatiefilms zijn erg populair tegenwoordig. Zagen we vroeger vooral animatiefilms met kleifiguurtjes, tegenwoordig zijn de hoofdpersonen veelal gemaakt van papiersnippers, huishoudelijke materialen, etenswaren en speelgoedfiguurtjes.

'De hedendaagse leerling is erg visueel ingesteld. Er is een relatie tussen afbeelding en inzicht. Afbeeldingen helpen het geheugen en helpen analyseren. Uit onderzoek is gebleken dat je het meeste leert als je iets uitlegt. De vraag is dus: hoe krijg je leerlingen aan het uitleggen? Eén manier is de leerlingen een film laten maken met uitleg,' aldus Monique. Zij verwoordt de grondgedachte achter *Animath*. In die wedstrijd is het de bedoeling dat een klas of groepje leerlingen aan de slag gaat om een animatiefilm te maken waarin een wiskundig begrip, bijvoorbeeld een driehoek, een formule of een stelling, de hoofdrol speelt. Met de huidige technieken ligt dat binnen de mogelijkheden van leerlingen. *BYOD* (voor Apple) en *Windows Movie Maker* zijn de programma's die daarbij gebruikt worden. Het komt neer op het maken van foto's van objecten die telkens een stukje verplaatst worden, en die vervolgens achter elkaar met een snelheid van 24 foto's per seconde afdraaien. De nadruk ligt bij *Animath* niet enkel op wiskunde: de esthetische kant heeft net zo veel aandacht. Het product moet er aantrekkelijk uitzien, mooie kleuren hebben, voorzien zijn van interessante muziek et cetera.

Met het project *Animath* is proefgedraaid op het Keizer Karel College in Amstelveen, waar brugklassers een filmpje voor basisschoolleerlingen moesten maken. Ook deelnemers aan de workshop bleken ervaring te hebben met het door leerlingen laten maken van stop-motion films, zodat het fenomeen van alle kanten belicht werd. En natuurlijk werden voorbeelden getoond van filmpjes, zoals een met avontuurlijke driehoeken en een met onvoorzichtige breuken.

Wie meer wil weten over de lustrumwedstrijd: <http://animath.scriptfactory.nl>.



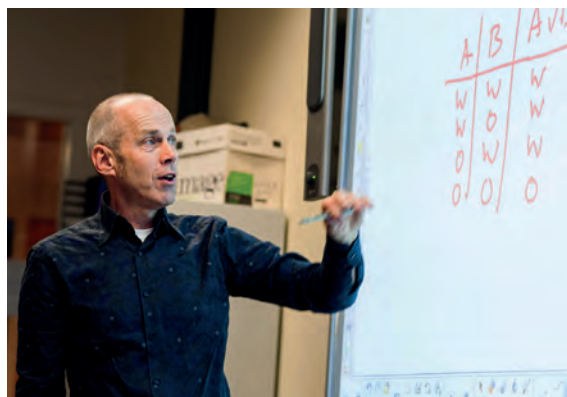
C2 Logisch redeneren

Theo van den Bogaart en Piet Versnel

[Ger Limpens]

Workshopleider Piet Versnel geeft als deelnemend cTWO-pilotdocent een impressie van wat er in de pilot-/doorloopscholen in de dagelijkse lespraktijk gebeurt in het kader van het nieuwe wiskunde C-domein *Logisch redeneren*. Oorspronkelijk was het ook de bedoeling dat er aandacht voor die andere hoofdpoort van de vernieuwing in wiskunde C, zijnde *Vorm en Ruimte*, zou zijn maar om tijds-technische redenen is gekozen voor de huidige invulling. Via de uitgangspunten van cTWO^[1] en de eindtermen uit de syllabus belanden we al snel bij het lesmateriaal dat speciaal voor dit domein ontwikkeld is. Piet maakt ons er attent op dat dit lesmateriaal bij aanvang van het cTWO-gebeuren ruimer van opzet was dan het nu is. Met name de predicaatlogica is nu niet meer in het materiaal vertegenwoordigd. Daar staat tegenover dat er wel wat meer aandacht is voor Venndiagrammen. Verder benadrukt Piet dat waarheidstafels weliswaar erg handig kunnen zijn, maar niet in de syllabus staan en dus niet als parate kennis gezien kunnen worden. Het wordt tijdens de workshop duidelijk dat docenten er goed aan doen om zich bewust te zijn van het feit dat het cTWO-materiaal in veel gevallen net wat ruimer/breder geformuleerd is dan de syllabus. Hoe dat zal uitwerken in de methodes is natuurlijk afwachten. En verder kun je ook constateren dat lang niet

iedere docent zich even zeker zal voelen bij de behandeling van deze voor velen kennelijk nieuwe materie. Ook Piet is af en toe nog aftastend bij het bespreken van bepaalde zaken die bij dit thema horen. Afgesloten wordt met de constatering van Piet dat zijn C-leerlingen dit domein als het leukste stukje C-wiskunde ervaren. En op de valreep wordt ook nog verwezen naar de mogelijkheid om nascholing in het kader van dit domein en het domein *Vorm en Ruimte* te volgen bij het Bètasteunpunt op de Hogeschool van Utrecht in het voorjaar van 2015.



[1] Zie www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/Rijkaanbetekenisweb.pdf

C3. Statistische uitspraken: van aanwijzing naar overtuigend bewijs

Carel van de Giessen

[Bert Wikkerink]

In het nieuwe examenprogramma havo en vwo is er een duidelijke verandering in het onderwerp statistiek. Was tot nu toe een eenvoudige grafische rekenmachine genoeg om de vragen te beantwoorden, in het nieuwe programma speelt software een belangrijke rol. Het doen van statistische uitspraken, simulaties en het werken met grote datasets nemen een belangrijke plaats in. In de

workshop laat Carel zien hoe je het softwareprogramma *Digiboek Statistiek*^[1] hierbij in de les kunt gebruiken. De goed gekozen voorbeelden geven duidelijk aan waartoe het programma in staat is. Het is zeer goed te gebruiken door de leerlingen in de les, maar kan ook zeer wel als demonstratie door de docent worden ingezet. De workshop was voor mij aanleiding om direct de volgende les al met het programma te werken in 6 vwo wiskunde A. Een leerzame bijeenkomst dus!

[1] Zie www.rustroest.eu

C6 Logica is niet altijd even logisch

Marco Swaen

[Marja Bos]

Zoals bekend, wordt volgend schooljaar vanaf vwo-4 een drastisch vernieuwd examenprogramma voor wiskunde C ingevoerd. Het programma is dan niet langer een uitgeklede versie van wiskunde A; het krijgt een meer profielspecifieke en op de doelgroep toegespitste inhoud, met als meest karakteristieke C-elementen de nieuwe domeinen *Logisch redeneren* en *Vorm en ruimte*. Het vernieuwde vak wiskunde C is bedoeld voor leerlingen in het profiel Cultuur & Maatschappij die denken aan vervolgstudies als bijvoorbeeld letteren, geschiedenis, filosofie, rechten of cultuurwetenschappen, voor C&M-leerlingen die niet opteren voor wiskunde A of B. De werkgroep van Marco Swaen ging over één van de twee nieuwe domeinen: Logisch redeneren. Eerst keken we naar de eindtermen zoals die in de 2018-syllabus voor het centraal examen staan vermeld. (Zie ook www.examenblad.nl) Zo moeten onder andere de logische symbolen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, tot de parate kennis gaan behoren. Als

Shoppen

Vier vriendinnen, Julia, Lotte, Roos en Sofie, gaan een middagje shoppen. Aan het eind van de middag hebben ze alle vier twee verschillende aankopen gedaan. Sommige meisjes kochten een paar schoenen.

Op basis van het bovenstaande bleek de volgende uitspraak waar te zijn:

‘Als een meisje geen schoenen kocht, dan had ze bruin haar.’

Bovenstaande zin kunnen we met symbolen als volgt weergeven:

$(\neg P) \Rightarrow Q$

5p 23 Beschrijf in gewoon Nederlands de uitspraak $(\neg Q) \Rightarrow P$ en geef aan of deze uitspraak waar of onwaar is.

Er zijn meer ware uitspraken over het middagje shoppen. Hieronder staan ze allemaal.

- 1 Drie van hen hebben een paar schoenen gekocht.
- 2 Er is precies één meisje met bruin haar en zij kocht geen schoenen.
- 3 Slechts één meisje kocht een jas.
- 4 Twee meisjes kochten een rokje, één van hen had rood haar.
- 5 De zwartharige Lotte en het blonde meisje kochten allebei een broek.
- 6 Julia kocht niets dat Roos of het zwartharige meisje kocht.

We kunnen nu concluderen dat het meisje met het bruine haar Julia moet zijn.

4p 24 Leg uit dat het meisje met het bruine haar Julia moet zijn.

figuur 1 Uit vwo C pilot 2014 tijdvak II (Shoppen)

productieve vaardigheden staan in de eindtermen onder meer vermeld: onderscheid maken tussen nodige en voldoende voorwaarde, correctheid en conclusies van redeneringen (zoals gebruikt in het maatschappelijk debat) verifiëren en analyseren, een tegenvoorbeeld gebruiken om een bewering te weerleggen, tabellen en Venndiagrammen gebruiken bij het analyseren en oplossen van logische problemen. Waarheidstabellen worden in de syllabus voor 2018 niet expliciet genoemd. Marco bleek hier overigens ook geen voorstander van te zijn: volgens hem roepen waarheidstabellen met hun nulle-tjes en eentjes al snel allerlei onbegrepen verbalisme op, met name voor wat betreft de implicatie-pijl. Hij hield juist een pleidooi voor het gebruik van Venndiagrammen om logische redeneringen te analyseren. Hierna bogen we ons over enkele opgaven uit de pilotexamens. Eén daarvan (2014, 1^e tijdvak) was ontleend aan een aflevering van de Volkskrantstrip *Sigmund* van Peter de Wit, waarin een personage verbaasd meedeelt: ‘Als je hoogopgeleid bent, word je ouder en blijf je langer gezond. Maar ik heb alleen lagere school gehad en toch ben ik al 97 en kerngezond.’

De examenopgave *Shoppen*, zie figuur 1, was een logische puzzel, waarbij uit een zestal ware uitspraken een conclusie getrokken moest worden. Diverse aanwezigen pakten deze opgave aan als een logigram. De context van de pilot-examenopgaven (en trouwens ook van veel experimenteel lesmateriaal bij dit nieuwe onderwerp) is wel vaker een grapje, stripje of puzzeltje. Sommige werkgroepdeelnemers vroegen zich af of dit geen knelpunten oplevert: het informele, diffuse taalgebruik binnen alledaagse contexten kan al snel botsen met de vereiste scherpheid bij formeel redeneren. En hoewel 'correct en fatsoenlijk redeneren in het maatschappelijk debat' door de deelnemers aan deze werkgroep breed gedragen werd als waardevol leerdoel, zeker ook binnen wiskunde C, vroegen sommige collega's zich af of 'de weg er naar toe' via puzzels en informele contexten wel zo geschikt is om dat doel te bereiken en te toetsen. Er was aan het eind van deze boeiende werkgroep eigenlijk te weinig tijd over om deze kwesties nog wat diepgaander met elkaar te bediscussiëren, maar Marco heeft ons nu wél een aanzet gegeven tot het uitwisselen van ervaringen hiermee en het verder doordenken van deze aspecten.

D1 Bewogen geschiedenis

Jasper van der Schors en Harm Jan Smid

[Frans Ballering]



Wat een verrassende ontvangst. Tafels met prachtige materialen staan voor ons klaar. Mooie houten dingen: cilinder, bol en kegel, stokjes met Franse en Vlaamse voeten en duimen, een teken-aap en een mooi uitgevoerde grote krant. En zoals beloofd, gaan we ermee aan het werk. Het toeval wil dat ik pas een goede week geleden in Museum Boerhaave kinderen op de vloer heb zien liggen die ermee aan het werk waren. Dat is nog eens wat anders dan:

NIET AANRAKEN en etiketjes lezen. Een jonge wiskundeleraar legt het ons uit, beveelt het aan en is er met een klas geweest, met ook nog een rondleiding langs andere mooie objecten.

D3 De derde afgeleide

Fred Lauwers

[Marja Bos]

Functie, afgeleide, dubbele afgeleide, raaklijnen, toppen, maximale hellingen, buigpunten... Toen ik halverwege de jaren '70 zelf in 6 vwo zat, was functieonderzoek een belangrijk onderdeel van het examenprogramma Wiskunde I, en ik verkeerde tijdens mijn examenjaar daardoor in de veronderstelling dat ik binnen de wiskundestudie vooral nóg meer bijzonderheden van functies en grafieken zou tegenkomen. Dat functieonderzoek werd (zeker ook later) door veel curriculumontwerpers beschouwd als een statisch en saai programmaonderdeel, maar mij boeide het als leerling wel degelijk. Ik dacht: 'Waaaauw! Misschien gaan we ons straks tijdens m'n studie wel verdiepen in de derde afgeleide, de vierde, de vijfde..., en in de bijbehorende betekenissen voor de grafiek, en wat je dáár nu allemaal weer mee kunt onderzoeken!?!' Maar de wiskundestudie bleek toch wat anders in elkaar te zitten. (En ik heb geen spijt, hoor.)

Zo'n kleine 40 jaar later, op de NVvW-studiedag van afgelopen november, moet ik er ineens weer aan denken. Fred Lauwers laat zijn werkgroepdeelnemers zien, hoe 'de derde afgeleide' leidt tot fraaie vergezichten vanuit een duizelingwekkend wolkenkrabberperspectief. In een bewegingscontext blijkt f''' zelfs een naam te hebben, zij het dat je die naam niet meteen met veel fraais associeert: de derde afgeleide van de afgelegde weg heet de *jerk*... We hebben het dus over de afgeleide van de versnelling, de tweede afgeleide van de snelheid. De *jerk* kwam om de hoek kijken bij de constructie van de liften voor 's werelds één-na-hoogste wolkenkrabber, de Shanghai Tower (632 meter hoog;

'DE DERDE AFGELEIDE VAN DE AFGELEGDE WEG HEET DE JERK.'



121 verdiepingen), waarvan de supersnelle lift (18 m/s) de passagiers snel maar toch nog veilig en comfortabel naar boven moet kunnen brengen – reden om de *jerk* onder een grens van $2,50 \text{ m/s}^3$ te houden. Fred Lauwers heeft er fraai lesmateriaal over gemaakt, bestemd voor wiskunde B in 4 vwo, in te zetten bij het begin van het onderwerp ‘differentiëren’ en met de nadruk op een aanpak met behulp van grafieken. In zijn NVvW-werkgroep moest er flink getekend en gerekend worden. Differentiëren (en impliciet dus ook primitiveren) bleek op deze manier op een natuurlijke manier uit de context naar voren te komen, met een opvallende rol voor de grafische aanpak. Het lesmateriaal over de *jerk* is te vinden op de website van de NVvW. Een aanrader!

D4 Reuzenraderen (Ferris Wheels)

Epi van Winsen

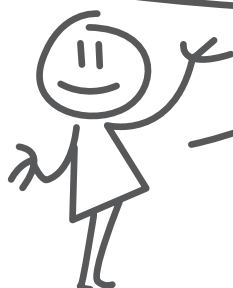
[Zwaantje Warmelink]

Deze workshop was, zoals meerdere workshops op deze studiedag, een uitvloeisel van de ontwikkeling van lesmateriaal binnen de Google-leergang vernieuwing wiskundeonderwijs. Epi van Winsen presenteerde materiaal om de introductie van goniometrische functies vloeiend te laten verlopen. Allereerst liet Epi (een deel van) een uitgebreide PowerPointpresentatie zien over reuzenraderen door de jaren heen. Prachtige plaatjes, veel informatie en anekdotes; een mooie start. In het bijbehorende lesmateriaal staan opgaven om aan en in cirkels te rekenen. Daarna kwamen de eenheids-

ARE YOU A GENIUS?

DE BETTERMARKS WISKUNDE CHALLENGE

Wat is de som van de cijfers van de uitkomst van
 $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \dots + 10^{2015}$



Weet je het antwoord?

Ga naar het internet en vul het antwoord in na de '/'
www.bettermarkschallenge.nl/...



cirkel en goniometrische grafieken. Met behulp van *Geogebra*-bestanden en *apps* voor de TI-Nspire kwam een en ander mooi naar voren. Wat was het weer inspirerend om een collega zo enthousiast over zijn prachtige materiaal te horen en zien vertellen! Ik weet nu al dat ik dit over een paar maanden ga gebruiken als mijn 4 vwo-leerlingen en ik met goniometrische functies aan de slag gaan. Het materiaal is te vinden op www.leergangwiskunde.nl/lesmateriaal.html.

D7 Hoe staat het met de wiskunde op het MBO?

Michel van Glabbeek en Roel van Asselt

[Joke Verbeek]

Roel van Asselt en Michel van Glabbeek zijn beide lid van de landelijke werkgroep hbo wiskunde. Zij leggen uit waarom het tot 2000 goed ging met leerlingen van het mto die de overstap maakten naar het hto. Toen waren er nog pittige examens wiskunde en natuurkunde op het mbo, onder toezicht van de vmts en verzorgd door het CITO en was een diploma mts met wis- en natuurkunde voorwaarde voor toelating op de hts. Na 2000 werd het moeilijk voor de mbo's om de wiskunde op hetzelfde peil te houden, onder meer door de veranderde examenprogramma's in het vmbo. Het percentage doorstromers dat in het hbo een diploma haalde zakte van 76% naar 55%.

Er zijn verschillende oplossingen mogelijk, waaronder aanscherping van de toelatingsvoorwaarden, studiekeuzechecks en aanpassing van het hbo-programma. Maar flexibilisering in leerroutes is niet de sterkste kant van het hbo. Een beter idee lijkt een verzwaard wiskundeprogramma te maken voor alleen die leerlingen die doorstromen naar het hbo. Er wordt gewerkt aan het maken van landelijk geregistreerde modules, waaruit het ROC een keuze kan maken. De modules bereiden voor op het hbo met algemene competenties als planning, vakspecifieke modules en wiskunde. Het ligt voor de hand voor de wiskunde de vakspecifieke wiskunde te nemen, maar ook te kijken naar de examenprogramma's van havo wiskunde B. Het streven is de modules in te voeren vanaf 2016.

E5 Aan de slag met dyscalculie

Marije van Oostendorp

[Frans Ballering]

De grootste zorg van de aanwezigen lijkt hier dat wat met vijf uur rekenen per week op de basisschool niet is gelukt, in 45 minuten per week moet worden rechtgezet. En, zegt Marije, zwakke rekenaars hebben vooral moeite met getalbegrip. Voor hen is het belangrijk om er vaak mee bezig te zijn. Hoe jammer is het dan dat rekenen niet is opgenomen in wiskunde, zodat onze leerlingen minstens vier à vijf keer per week met getallen aan de slag kunnen.

[Simon Biesheuvel]



Bij sommige peuters is al bij een hersenscan te zien dat de rekengebieden minder activiteit vertonen. Er bestaat zoiets als *number sense*, dat is intussen wetenschappelijk bewezen. Dyscalculie kan worden veroorzaakt door een 'core deficit in *number sense*'. Het is een groter probleem dan alleen 'een probleem met rekenen'. Er moet door kinderen met dyscalculie veel geoefend en herhaald worden, en daarmee moet doorgegaan worden in de vakanties. Verder veel tips, zoals opzoekboekjes, extra oefenboekjes enzovoort.

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar wisenwaarachtig@nvww.nl.

Rekenmeester overleden



Jaap Vedder (1944–2014) werd gezien als ambassadeur van het Nederlandse reken-onderwijs. Hij streefde zijn hele leven naar verbetering van het reken- en wiskundenniveau. Zo was hij initiatiefnemer en bestuurslid van

Bartjens Rekendictee en het *Protocol ERWD* (Ernstige Reken- Wiskundeproblemen en Dyscalculie). Hij speelde een rol in veel onderwijsinstellingen, vooral in en rond Zwolle. Hij was jarenlang inspecteur van hoger onderwijs en deed afgelopen zomer nog een onderwijsvisitatie op Curaçao. Vedder studeerde na de HBS aan de universiteit van Amsterdam wiskunde, logica en psychologie. Hij werd docent op de universiteit en op meerdere pabo's. Hij zag hier van nabij de omwenteling in de didactiek: het cijferen veranderde na de komst van de rekenmachine in het inzichtelijk of realistisch rekenen. Dat bracht het rekenonderwijs aanvankelijk op een veel hoger niveau, maar dat

veranderde toen bleek dat in het voortgezet onderwijs de kennis niet werd onderhouden. Vedder was een bestuurder in de strijd tussen de cijferaars en de rekenaars. Hij kon mensen van allerlei gremia bij elkaar brengen, en luisterde naar opvattingen zonder het doel – beter rekenonderwijs – uit het oog te verliezen. Zijn grote zorg was dat veel leraren zelf te weinig rekeninhoudelijke en vakdidactische kennis hebben, wat hij weet aan het tijdgebrek voor het rekenonderwijs als gevolg van de verbreding van de vakkenpakketten. Bron: *Volkskrant*

Bartjens Rekendictee kent eerste vrouwelijke winnaar

Wilma den Boer uit Goes, in het dagelijks leven wiskundedocente op Prins Maurits in Middelharnis, mag zich een jaar lang de beste rekenaar van Nederland noemen. Zij won vrijdag 21 november de finale van het in Zwolle gehouden rekendictee, dat net als andere jaren enthousiast werd gepresteerd door Marjolein Kool, die ook de actueel getinte opgaven bedacht. Oud politicus en schrijver Jan Terlouw fungeerde als juryvoorzitter.

De jaarlijkse rekenwedstrijd werd voor de tiende keer

OPROEP

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) roept enthousiaste collega's op te solliciteren naar de functie van

HOOFDREDACTEUR VAN *EUCLIDES*

ter vervanging van Marjanne de Nijs, die na een aantal jaren deze taak graag wil overdragen. De redactie bestaat uit even enthousiaste collega's, die elk op hun eigen terrein bijdragen leveren aan ons mooie blad.

De hoofdredacteur zorgt onder andere voor

- Het beoordelen van ingezonden artikelen
- Het redigeren van artikelen, samen met andere redactieleden
- Het bewaken van de kwaliteit van het blad
- Het samenstellen van de inhoud van een nummer van *Euclides*
- Het onderhouden van de contacten met vormgever

Er vindt nauw overleg plaats met de andere leden van de (kern)redactie, die daartoe enkele malen per jaar bij elkaar komen.

Het spreekt vanzelf, dat de hoofdredacteur beschikt over de volgende eigenschappen

- Goede beheersing van de Nederlandse taal
- Is werkzaam in het onderwijs
- Is bekend met ontwikkelingen van het wiskundeonderwijs in Nederland
- Is inhoudelijk goed op de hoogte van het wiskundeonderwijs in de gehele breedte van het onderwijs in Nederland
- Beschikt over een netwerk binnen wiskundig Nederland
- Beschikt over goede contactuele eigenschappen

Het betreft een prachtige, uitdagende en voldoening gevende functie, die de nodige tijd vraagt. Daarom stelt het bestuur een detachering van omstreeks 1 dag per week ter beschikking. Dit betreft meestal 0,2 wtf.

Nadere inlichtingen omtrent de werkzaamheden kunnen worden ingewonnen bij de redactievoorzitter Heiner Wind, per email hwind@home.nl of telefoon 0505263742.

Sollicitatiebrieven met curriculum vitae dienen voor 23-2-2015 te worden gemaild aan de secretaris van de NVvW, de heer C. Garst. secretaris@nvww.nl

georganiseerd. In de zaal zaten 150 over zes categorieën verdeelde kandidaten met behulp van kladpapier, pen en grijze cellen te zweten op veertien pittige rekenopgaven. De antwoorden moesten worden ingevoerd in stemkastjes, zodat snel na het maken van de opgaven de winnaars bekend konden worden gemaakt. De winnares had niet als enige alle veertien opgaven goed, maar ze was wel de snelste door het in slechts 599,04 seconden te doen. Ook bij de andere categorieën waren de dames goed vertegenwoordigd: bij de scholieren won de 14-jarige Auke Kieviet, van dezelfde school als *overall* winnares Den Boer, en bij de categorie leerkrachten basisonderwijs ging Hilma van Dommelen uit Apeldoorn met de eer strijken. In de categorie Pabo-studenten won Pieter Modderkolk uit Veenendaal, bij de sponsors was het Douwe Jan Douwes en bij de vroegere winnaars was het Epi van Winsem. Er werden leuke prijzen uitgereikt zoals uitstapjes naar Londen, met de hele klas naar Nemo en arrangementen voor De Librije. Voor wie zijn eigen rekentalent wil testen: alle opgaven inclusief de antwoorden zijn op internet te vinden. Zie www.bartjensrekendictee.nl

Wiskundeleraar in Onderwijsraad

In de vorige Onderwijsraad zaten geen docenten uit het voortgezet onderwijs. Daar is nu verandering in gekomen. René Kneyber, leraar wiskunde aan het Oosterlicht College in Nieuwegein, is een van de nieuwe leden van de Onderwijsraad.

René Kneyber is ook bestuurslid van de Stichting Beroepseer en mede-initiator van het project *LeerKracht*. Ook verzorgt hij trainingen en publiceert hij over thema's als orde houden, evaluatie en onderwijsbeleid. Bron: *WiskundeE-brief*, www.onderwijsraad.nl/actueel

Alexander Grothendieck overleden

Volgens sommigen was Alexander Grothendieck (1928–2014) de grootste wiskundige van de twintigste eeuw, die vakgebieden veroverde die zo abstract waren, dat slechts een handjevol wiskundigen echt snapt waarover zijn wiskunde gaat. Hij won de Fieldsmedaille in 1966, maar ging hem niet ophalen in Moskou omdat hij tegenstander was van de militaire acties die de Sovjet Unie uitvoerde. Grothendieck verdween ruim twintig jaar geleden zonder een adres achter te laten, om pas in 2010 weer van zich te laten horen middels een brief, waarin hij meldt geen enkele verantwoording te nemen voor materiaal dat zonder zijn toestemming is gepubliceerd. Hij werkte in Frankrijk aan *Elements de géométrie algébrique*, een duizenden pagina's dik boekwerk dat geldt als de basis voor de hedendaagse algebraïsche meetkunde en de getaltheorie. Hij introduceerde onder meer tegenwoordig veelgebruikte begrippen als schema's en motieven.

Bang voor Pythagoras



'Krijg jij angstige wiskunde-flashbacks bij Pythagoras? Sander Mulder brengt daar verandering in!' Zo begint een artikel in een woonmodeblad dat gaat over de Pythagorasstoel, dat vervolgens in stijl eindigt met de slogan: 'Wij nemen stelling

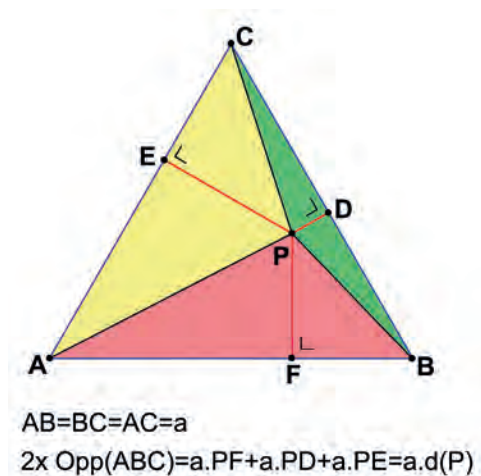
vóór Pythagoras!' De Pythagorasstoel was te zien op de Dutch Design Week 2014. Het ontwerp is geïnspireerd door origamitechnieken. De driehoekige lijnen hebben zowel een esthetische als een structureel doel. De ontwerper is de Nederlander Sander Mulder (1978). 'De Pythagorasstoel is, op een aantal verbindingdelen na, volledig opgebouwd uit driehoeken, ook al zijn het maar enkele rechthoekige driehoeken. Dit heeft tot gevolg dat tijdens het ontwerp- en productieproces de stelling van toepassing is geweest en dat dit ook meteen als een goede naam voor de stoel werd gezien,' licht de ontwerper desgevraagd zijn naamkeuze toe. De stoel was niet alleen te bewonderen op de designbeurs in Eindhoven, maar is gewoon te bestellen via allerlei websites. Fotografie: *Diewke v/d Heuvel, Sander Mulder*.

Elegante wiskundige redeneringen

Ruben Stienstra, student op de Radboud Universiteit Nijmegen, nam op 28 november de ASML Afstudeerprijs Wiskunde voor onderzoek naar volledige beweging in ontvangst. Hij bedacht een uitbreiding van de klassieke mechanica, die volledige beweging mogelijk maakt. De klassieke mechanica beschrijft de beweging van macroscopische systemen. Volgens deze theorie is beweging van een systeem niet altijd volledig. In de kwantummechanica beschrijft men de microscopische wereld van atomen en elektronendeeltjes en is beweging juist altijd volledig (zonder begin en einde). Beweging is te definiëren op ieder tijdstip. Ruben onderzocht of hij vanuit deze volledige beweging een onvolledige klassieke beweging kon verkrijgen door de zogenaamde klassieke limiet te nemen. Hij gebruikte hierbij simulaties. Dat lukte niet, hij zag nog steeds volledige beweging. Vervolgens legde hij de omgekeerde weg af, van klassieke mechanica naar kwantummechanica. Het lukte hem om de klassieke mechanica zo aan te passen dat beweging daar in enkele situaties ook volledig werd. De jury vindt zijn scriptie helder en goed gebalanceerd geschreven, voorzien van motivatie, computersimulaties en voorbeelden en afgewisseld met elegante wiskundige redeneringen. Bron: *Wiskundepersdienst*.

SOM GERICHTE AFSTANDEN TOT EEN N-HOEK

Anneke Grunefeld leverde ons een fraaie constructie c.q. bewijs van de meetkundige plaats van alle punten met gelijke totale afstand tot de zijden van een driehoek, de basis van deze puzzel. Wellicht geeft het u ideeën voor originele vraagstukken voor uw leerlingen. Met wat hints die u al of niet kan gebruiken, willen we u uitdagen om voor een toch best lastig probleem een of meer verrassend mooie oplossingen te vinden. U mag bij de opgaven uiteraard eerder genoemde stellingen gebruiken, ook als u die niet heeft bewezen.



figuur 1

Wellicht kent u de stelling van Vincenzo Viviani, zeventiende eeuw: Voor een punt P , gelegen binnen een gelijkzijdige driehoek, is de som van de kortste afstanden tot de drie zijden van die driehoek onafhankelijk van de plaats van P . Het bewijs gaat meestal met behulp van oppervlakten (zie figuur 1). Het is duidelijk dat dit niet geldt voor elke willekeurige driehoek of n -hoek, maar wel voor bijvoorbeeld een regelmatige n -hoek.

Hier gebruikte definitie van de afstandsom $d(P)$ (= som gerichte afstanden) van een punt P tot een convexe n -hoek: Bekijk de lijnen z_1 t/m z_n die de convexe n -hoek insluiten. Dan geldt $d(P) = d_1 + d_2 + \dots + d_n$. Hierbij is $|d_i|$ de loodrecht gemeten afstand van punt P tot z_i , met d_i positief als P en het inwendige van de n -hoek aan dezelfde kant van de lijn z_i liggen, anders is d_i negatief. Met die definitie van afstandsom $d(P)$ geldt de stelling van Viviani zelfs voor elk willekeurig punt P , ook buiten de gelijkzijdige driehoek.

Wel mooi, maar niet relevant voor deze puzzel, is de stelling van Carnot: Voor driehoek ABC met P als middelpunt van de omschreven cirkel geldt: $d(P) = R + r$, waarbij R de straal van die omschreven cirkel is en r die van de ingeschreven cirkel.^[1]

Voor enkele bijzondere convexe n -hoeken is $d(P)$ voor alle punten P in het vlak, binnen of buiten de n -hoek, gelijk, zoals bij de gelijkzijdige driehoek.

Opgave 1 – Welke andere bijzondere n -hoeken met deze eigenschap kunt u bedenken?

We bekijken nu een convexe vierhoek $ABCD$ met drie gelijke zijden, waarbij CD de afwijkende en tevens kortste zijde is.

Stelling 1

- a. $d(C) = d(D)$;
- b. de lijn door C en D is de meetkundige plaats van alle punten P met $d(P) = d(C)$.

Opgave 2 – Geef een bewijs van stelling 1a en 1b.

Opgave 3 – Gegeven een driehoek met daarbinnen een punt P . Bepaal een constructie van de meetkundige plaats van alle punten waarvoor de afstandsom gelijk is aan $d(P)$. Toon aan (zonder onderstaande stelling 2 te gebruiken) dat uw constructie klopt. Tip: U kunt uw resultaten van opgave 2 gebruiken door de verlengden van zijden BC en AD van de vierhoek uit stelling 1 met elkaar te snijden zodat een driehoek ontstaat.

Om de meetkundige plaats te bepalen voor n -hoeken met $n > 3$ heeft u wellicht de volgende stelling nodig. Het bewijs laten we aan de liefhebbers over.

Stelling 2

Met uitzondering van de n -hoeken waarbij alle punten een gelijke afstandsom hebben, geldt: De iso-afstandlijnen, dat wil zeggen de lijnen die punten met gelijke afstandsom tot de zijden van een n -hoek verbinden, zijn evenwijdige rechte lijnen.

Hieruit blijkt dat het voor het vinden van de meetkundige plaats voldoende is om twee punten te bepalen met gelijke afstandsom. Dat kan bijvoorbeeld met punten met afstandsom $= 0$, die buiten de n -hoek zullen liggen.

Opgave 4 – Bepaal de lijn waarop de punten P liggen met $d(P) = 0$ bij een driehoek.

En tot slot de lastigste:

Opgave 5 – Bepaal een constructie van de meetkundige plaats van alle punten met afstandsom gelijk aan die van een gegeven punt P binnen een convexe vierhoek.

En zo is het ook mogelijk voor convexe veelhoeken met $n > 4$.

Noot

[1] www.cut-the-knot.org/proofs/carnot.shtml

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. Inzendingen moeten uiterlijk op 4 maart 2015 binnen zijn.



SPIEGELENDE RECURSIE

Deze puzzel, waar Hans Klein ons op attendeerde, was gebaseerd op een oude IMO-opgave. Met een kleine variatie was dat: Een functie B wordt op alle natuurlijke getallen gedefinieerd door $B(0) = 0$, $B(1) = 1$ en de recursieformules voor k geheel:

- I. $B(2k) = B(k)$ met $k \geq 0$;
- II. $B(4k+1) = 2 \cdot B(2k+1) - B(k)$ met $k > 0$;
- III. $B(4k+3) = 3 \cdot B(2k+1) - 2 \cdot B(2k)$ voor $k \geq 0$.

De IMO-gangers moesten bepalen hoe vaak geldt $B(n) = n$, voor $1 \leq n \leq 1988$, het jaar van die IMO. Daarbij moest uiteraard ook een bewijs worden geleverd. Er werd niets gezegd over spiegelen of binaire notaties, dat moesten ze zelf ontdekken! Onze variaties hierop:

In **opgave 1** moest u $B(14)$ berekenen met de recursie. Dat gaf niet veel problemen: bereken eerst $B(3)$ uit (III) met $k = 0$; $B(3) = 3 \cdot B(1) - 2 \cdot B(0) = 3$. Dan ook uit (III) met $k = 1$: $B(7) = 3 \cdot B(3) - 2 \cdot B(1) = 7$, en ten slotte uit (I) met $k = 7$: $B(14) = B(7) = 7$.

De spiegelstelling stelt dat als we voor deze functie B zowel n als $B(n)$ binair schrijven, dan is het rijtje nullen en enen van n en $B(n)$ elkaars spiegelbeeld.

Notatie: met $\bar{n}$ bedoelen we het rijtje nullen en enen van het binair geschreven getal n . Het gespiegelde bit-rijtje is dan $\bar{\bar{n}}$ met een spiegel functie $S(n) = \bar{\bar{n}}$. Laat verder x, y het rijtje nullen en enen zijn dat je krijgt door de rijtjes x en y achter elkaar te zetten. Met 0_k wordt bedoeld: een rijtje van net zoveel nullen als het aantal binaire cijfers in k , behalve als $k = 0$, dan is het rijtje leeg.

In **opgave 2** moest u voor de drie recursievergelijkingen bewijzen: als de stelling geldt voor de waarden in het rechterlid, dan geldt hij ook voor de waarde in het linkerlid. We nemen dus aan: $B(k) = S(k) = \bar{k}$ en in 2b en 2c ook nog $B(2k+1) = S(2k+1) = 1, \bar{k}$.

2a: We moeten aantonen dat daarmee uit (I) volgt: $B(2k) = S(2k)$. Volgens (I) hebben we $B(2k) = B(k) = \bar{k}$. Maar omdat $2k = k, 0_k$ is $S(2k) = 0, \bar{k}$. De waarde daarvan is natuurlijk gelijk aan die van $\bar{k}$. Dus is $B(2k) = S(2k)$.

2b: We moeten aantonen dat uit (II) volgt: $B(4k+1) = S(4k+1)$, dus $B(k, 0, 1) = 1, 0, \bar{k}$. $B(k) = \bar{k}$ en $B(2k+1) = 1, \bar{k} = 1, 0_k + \bar{k}$.

Dit vullen we in bij II: $B(4k+1) = 2 \cdot (1, 0_k + \bar{k}) - \bar{k} = 1, 0_k, 0 + \bar{k} = 1, 0, \bar{k}$. QED

2c: Analoog tonen we aan dat uit (III) volgt $B(4k+3) = B(k, 1, 1) = 1, 1, \bar{k} = S(4k+3)$.

We vroegen u niet expliciet om te bewijzen dat de spiegelstelling geldt voor alle waarden van n , maar dat kan na opgave 2 met volledige inductie:

Voor $n = 0$ en $n = 1$ geldt: $B(n) = S(n)$ (triviaal).

Voor $n \leq m$ ($m > 0$) veronderstellen we: $B(n) = S(n)$ (inductieveronderstelling)

We moeten aantonen dat dan geldt voor $n = m + 1$: $B(n) = \bar{\bar{n}}$.

Er bestaat een k zodat ofwel $n = 2k$, ofwel $n = 4k + 1$, ofwel $n = 4k + 3$, met $k \leq m$ en als n oneven $2k + 1 \leq m$.

In 2a, b en c hebben we in alle drie de gevallen de gevraagde uitdrukking bewezen.

Opgave 3: Hoe vaak geldt $B(n) = n$ voor $n = 1$ t/m duizend? Daarvoor moeten we het aantal palindromen van de binaire getallen tellen. Voor getallen met $2k + 1$ of $2k + 2$ cijfers zijn dat er 2^k . Voor de getallen 1 t/m 1023 geeft dat $1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 = 62$. Tussen 1000 en 1024 zit één tweetallig palindroom: 1023, met 10 enen. Het aantal voor $1 \leq n \leq 1000$ is dus 61.

Opgave 4a: Bepaal $S_t = \sum_{i=0}^t B(i)$ voor $t = 64 = 2^{5+1}$. Bekijk de verzameling binair geschreven

getallen i met $2^n \leq i < 2^{n+1}$. Die bestaat uit 2^n getallen met $n+1$ cijfers. De omgekeerden ervan

zijn allemaal verschillend, allemaal oneven en allemaal kleiner dan 2^{n+1} . Het zijn dus alle oneven getallen kleiner dan 2^{n+1} , dus hun som is 2^{2n} . Deze deelsommen vormen dus de meetkundige rij 1, 4, 16... . We hebben die nodig tot en met $2^{2 \times 5} = 4^5 = 1024$. De som ervan is $(4 \cdot 4^5 - 1)/(4 - 1) =$

1365. We hebben dan alle gevraagde termen behalve $B(64) = B(1) = 1$, dus $\sum_{i=0}^{64} B(i) = 1366$.

Opgave 4b: Een algemene formule, met $t = 2^m$:

Uit 4a blijkt: $S_t = \sum_{i=0}^t B(i) = \frac{4^m - 1}{4 - 1} + 1 = \frac{4^m + 2}{3}$.

Opgave 5: We werken nu in het drietallig stelsel. We zoeken een set recursievergelijkingen en beginwaarden voor een functie T , zodat de spiegelstelling klopt in het drietallig stelsel. We gebruiken dezelfde notatie, maar met een ander kleurtje (n is het ternaire cijferrijtje van n). Gegeven is voor elke waarde van n : $T(n) = S(n)$. Als $n = 3k$ hebben we: $n = k, 0$ dus $S(n) = 0, \bar{k}$ en dus hebben $T(n)$ en $T(k)$ dezelfde waarde. De eerste recursievergelijking is dus $T(3k) = T(k)$. Naar analogie van de vergelijkingen voor het tweetallig stelsel zoeken we nog uitdrukkingen voor $T(9k+d)$, waarbij $0 < d < 9$ en $\text{ggd}(d, 3) = 1$.

d bestaat dus drietallig uit twee cijfers: $d = a, b$, met $b = 1$ of 2 , en $a = 0, 1$ of 2 . Als $k > 0$ geldt $9k + d = k, a, b$ en dus $T(9k+d) = b, a, \bar{k} = b, a, 0_k + \bar{k} = b, a, 0_k + T(k)$. (Als $k = 0$ geldt $T(9k+d) = T(d) = \bar{d}$. Dat is alleen gelijk aan de laatste uitdrukking hierboven als $a > 0$)

Er geldt $3k + 1 = k, 1$ dus $T(3k+1) = 1, \bar{k} = 1, 0_k + T(k)$.

$(3b + a) \cdot T(3k+1) = (3b + a) \cdot (1, 0_k) + (3b + a) \cdot T(k) = b, a, 0_k + (3b + a) \cdot T(k)$.

$(3b + a) \cdot T(3k+1) - (3b + a - 1) \cdot T(k) = b, a, 0_k + (3b + a) \cdot T(k) - (3b + a - 1) \cdot T(k) = b, a, 0_k + T(k) = T(9k+d)$, dus:

(A)... $T(9k+d) = (3b + a) \cdot T(3k+1) - (3b + a - 1) \cdot T(k)$

Vullen we in (A) de mogelijke waarden van d en de bijbehorende waarden van a en b in dan krijgen we de overige zes recursievergelijkingen. Dat is een goede oplossing.

Maar we zochten de vergelijkingen met de kleinst mogelijke coëfficiënten. We kunnen op vergelijkbare manier vinden:

(B)... $T(9k+d) = \{(3b + a) \cdot T(3k + 2) - (3b + a - 2) \cdot T(k)\}/2$ en

(C)... $T(9k+d) = (3b + a - 1) \cdot T(3k+2) - (3b + a - 2) \cdot (3k + 1)$

Als we dus (B) gebruiken voor even waarden van $3b + a$, en (C) voor oneven waarden kunnen we kleinere coëfficiënten krijgen dan met alleen (A):

Dat levert het volgende rijtje op:

$T(3k) = T(k)$ voor $k \geq 0$

$T(9k+1) = 2 \cdot T(3k+2) - T(3k+1)$ voor $k > 0$

$T(9k+2) = 3 \cdot T(3k+2) - 2 \cdot T(k)$ voor $k > 0$

$T(9k+4) = 2 \cdot T(3k+2) - T(k)$ voor $k \geq 0$

$T(9k+5) = 6 \cdot T(3k+2) - 5 \cdot T(3k+1)$ voor $k \geq 0$

$T(9k+7) = 4 \cdot T(3k+2) - 3 \cdot T(3k+1)$ voor $k \geq 0$

$T(9k+8) = 4 \cdot T(3k+2) - 3 \cdot T(k)$ voor $k \geq 0$

Startwaarden voor 0, 1 en 2 vinden we met behulp van de spiegelstelling: $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ en $T(2) = 2$.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 90-2 is:

G. Riphagen	182	J. Guichelaar	126
L. Pos	166	K. van der Straaten	112
J. Remijn	164	J. Verbakel	110
R. Stolwijk	158	F. Göbel	86
H. Linders	149	H. Klein	85

De ladderprijs is gewonnen door Gerhard Riphagen. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!



COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Annelien Jonkman
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzenden bijdragen

Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard, Eindhovenensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 50,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

2015

wo 11/2	OP DE SCHOLEN Onderbouw WiskundeDag, Organisatie Flsme
vr 13/3	LANDELIJK Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade Organisatie NWO
do 19/3	OP DE SCHOLEN W4 Kangoeroewedstrijd Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe
wo 25/3	OP DE SCHOLEN Grote Rekendag, Organisatie Flsme
za 18/4	HILVERSUM Jubileumfeest Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren Organisatie NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

JAARGANG 90

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	24 maart 2015	19 januari 2015
6	13 mei 2015	16 maart 2015
7	30 juni 2015	18 mei 2015

Maak drie leerlingen blij! En vergeet vooral jezelf niet



Speciaal aanbod voor scholen die geen ervaring hebben met Casio grafische rekenmachines. Laat drie leerlingen een maand lang de Casio fx-CG20 testen. Na afloop ervan mogen de leerlingen de rekenmachine houden. Doe mee en ontvang zélf ook een gratis fx-CG20.*

De Casio fx-CG20 mag worden gebruikt op het centraal examen en is geheel aangepast aan het nieuwe wiskunde programma 2015.



Aanmelden: www.casio-educatie.nl/actie
Vragen? E-mail David Kropveld: dkropveld@casio.nl



MODERNE WISKUNDE

Nieuw!
Leerwerkboeken
bij vmbo-basis



Moderne Wiskunde geeft
uw leerlingen inzicht!



Noordhoff Uitgevers

Vraag
nu een
beoordelings-
exemplaar
aan!

Nieuw

Moderne Wiskunde 10^e editie:

- gebaseerd op nieuwe tussendoelen en referentieniveaus;
- perfecte afstemming tussen vmbo en havo/vwo;
- delen 3 vmbo beschikbaar voor schooljaar 2015-2016;
- sterk verbeterde ICT voor leerlingen en docenten;
- naadloze aansluiting op de nieuwe 11e editie voor de Tweede Fase waarmee u kunt starten in augustus 2015.

Met *Moderne Wiskunde* bereidt u uw leerlingen optimaal voor op het eindexamen en het vervolgonderwijs!

Meer weten?

Ga naar www.modernewiskunde.noordhoff.nl

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent