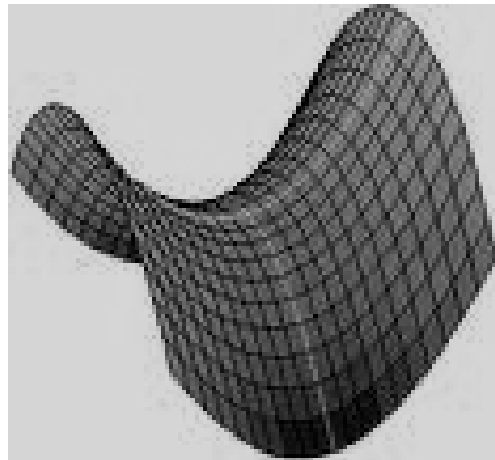


Les 3 – Toppen, passen, dalen

Fatzoenlijke eilanden

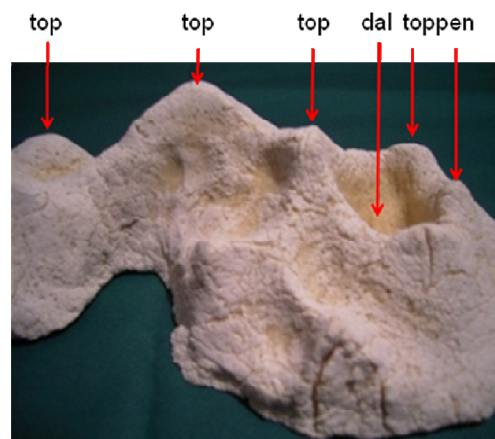
Een eiland is omgeven door water. De kustlijn van het eiland is dus op zeeniveau. Op ons eiland zijn er veel hoogteverschillen: er zijn **toppen** en **dalen**. Als je van een dal naar het naburige dal wilt lopen, moet je over een **pas**. Dat is het hoogste punt van je wandeling, daar loopt de grond links en rechts van je omhoog en voor en achter je omlaag. De omgeving van een pas lijkt op een zadel (zie het plaatje hiernaast). We spreken daarom ook wel over een **zadelpunt**. Wat een top is, is duidelijk; daar loopt de grond in elke richting omlaag. Net zo is een dal een punt waar de grond in alle richtingen omhoog loopt. Merk op dat in het dagelijkse taalgebruik een dal meestal een groter gebied is. Wij bedoelen alleen het laagste punt.



Vraag 1

In het hiernaast staande plaatje van een eiland zijn er een aantal toppen en dalen gemarkeerd. Hoeveel passen zie je? Markeer ook deze in het plaatje.

Er zijn allerlei ingewikkelde landschappen, met vele toppen, passen en dalen op een eiland mogelijk. Toch is er een eenvoudige relatie tussen het aantal toppen, het aantal passen en het aantal dalen op een eiland. In deze les zullen we op zoek gaan naar deze relatie.



Vraag 2

Een top is zoals gezegd een punt op het eiland, waar de grond in elke richting *echt* omlaag gaat. Kun je een eiland zonder toppen verzinnen? Kun je ook een eiland zonder een top, maar wel met een dal verzinnen?

Dus we kunnen ons zulke eilanden voorstellen, namelijk met een zuiver horizontale richel of een zuiver horizontale kraterand. In de praktijk komen we zulke eilanden echter nooit tegen, omdat de situaties instabiel zijn; al na een kleine verstoring (bijvoorbeeld een windvlaag) ontstaat er toch ergens een top. We willen ons met zulke uitzonderlijke eilanden niet bemoeien en gaan ze uitsluiten door te eisen, dat onze eilanden aan de volgende conditie voldoen:

In elk punt dat geen top en geen dal is, is er een richting waarin de grond omhoog loopt en is er een richting waarin de grond omlaag loopt.

conditie (1)

Wanneer je een wandeling over ons eiland maakt, zul je meestal of omhoog of omlaag lopen. Je kunt natuurlijk ook wel op eenzelfde hoogte blijven lopen, bijvoorbeeld op de helling van een kegelvormige berg. Volgens conditie (1) loop je dan wel “ongelukkig”, met je ene voet hoger dan de andere. Zolang de helling maar vlak genoeg is, zal je daar echter geen last van hebben.

Vraag 3

Een eiland dat aan conditie (1) voldoet heeft altijd minstens één top. Waarom?

Het eiland in het plaatje hiernaast is dus in zekere zin het makkelijkste eiland, dat er is. Het heeft maar één top en verder geen pas en geen dal.

Voor het onderzoeken van de hoogteverschillen van een eiland is het handig dat je van het driedimensionale eiland een tweedimensionale landkaart kunt maken, die van elk punt de hoogte aangeeft. Daarom eisen we dat onze eilanden ook aan de volgende conditie voldoen:

Twee punten van het eiland liggen nooit direct boven elkaar.

Wanneer je dus met een vliegtuig over het eiland vliegt en recht naar beneden kijkt, zul je elk punt moeten kunnen zien. Er is dus geen punt van het andere afgedekt.

Vraag 4

Verzin een eiland, dat niet aan conditie (2) voldoet.

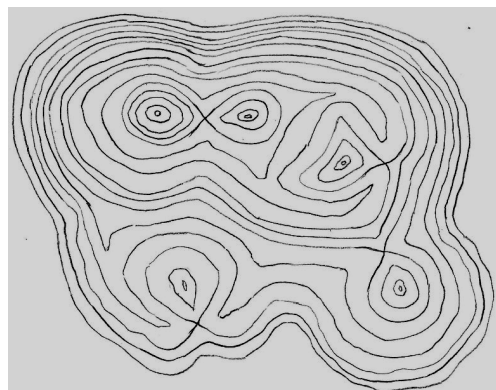
We noemen een eiland **fatsoenlijk**, wanneer het aan conditie (1) en aan conditie (2) voldoet. Het woord “fatsoenlijk” wil hier zeggen “in wiskundige zin netjes” of “eenvoudig”.

Speciale punten op een eiland

Hiernaast zie je een landkaart van een fatsoenlijk eiland. Op de kaart zijn hoogtelijnen getekend. Daarop liggen de punten die dezelfde hoogte hebben boven het zeeniveau. De buitenste kromme representeert de kust (hoogte 0). De landkaart is zo gemaakt, dat er tussen twee naburige hoogtelijnen geen bergen, geen dalen en geen passen liggen.



conditie (2)



Vraag 5

Bekijk drie opeenvolgende hoogtelijnen van de kaart. Daarbij horen drie hoogtes. Beredeneer dat de hoogte van de middelste hoogtelijn tussen de hoogtes van de twee naburige hoogtelijnen moet liggen. Je moet gebruiken dat we het over een fatsoenlijk eiland hebben.

Vraag 6

Bekijk weer de kaart van het eiland.

- Een punt van de kaart is gemarkeerd met de letter D. Dat punt is een dal. Beredeneer dat dat punt inderdaad een dal is en geen top.
- Markeer alle toppen met een T, alle dalen met een D en alle passen met een P.

Opdracht

Bouw met zoutdeeg een model van het eiland van onze kaart.

Sommige hoogtelijnen op de kaart kruisen zichzelf. In het kruispunt zijn er meer dan twee richtingen waarin de hoogte hetzelfde blijft.

Vraag 7

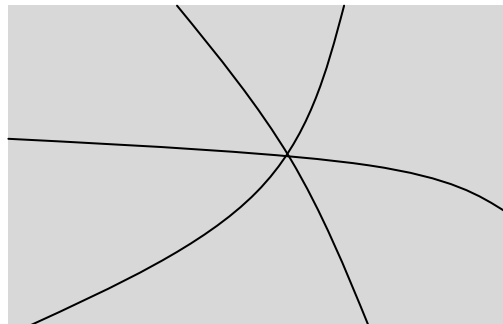
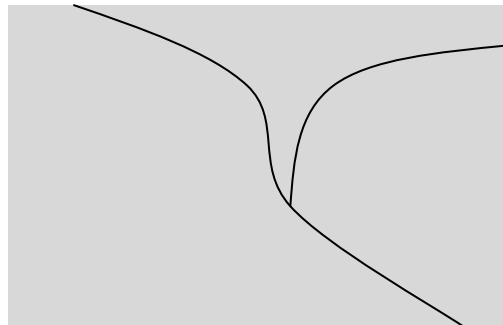
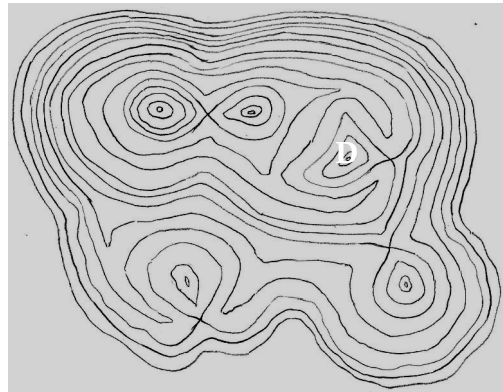
Leg uit dat de situatie hiernaast niet kan voorkomen op een fatsoenlijk eiland. Hoeveel richtingen kunnen er in een kruispunt zijn, waarin de hoogte hetzelfde blijft?

Vraag 8

Bouw, met zoutdeeg, een model van de omgeving van een kruispunt, waarin de hoogte in 6 richtingen hetzelfde blijft. Zo'n punt wordt ook wel een "apenzadel" genoemd. Waarom is dit een toepasselijke naam?

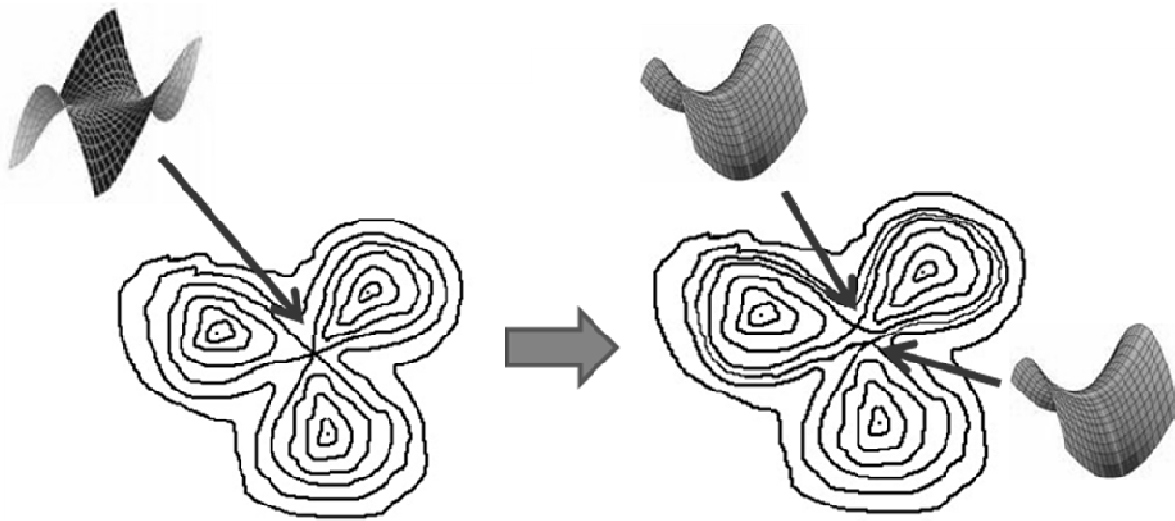
Kruispunten, waarin de hoogte in meer dan vier richtingen hetzelfde blijft, zoals bijvoorbeeld bij de apenzadel, zijn instabiele punten. Door een kleine verandering kun je zo'n apenzadel in twee of meer gewone passen splitsen, dus in kruispunten, waarbij de hoogte precies in vier richtingen hetzelfde blijft (zie plaatje op de volgende pagina). Omdat we niet met instabiele punten willen werken, eisen we van nu af dat er op de hoogtekaart van een fatsoenlijk eiland slechts kruispunten van hoogtelijnen zijn, waarin de hoogte maar in vier richtingen hetzelfde blijft. Met andere woorden:

Elk kruispunt is een gewone pas.



conditie (3)

We verscherpen de eis voor een fatsoenlijk eiland dus; behalve aan conditie (1) en (2) moet ook aan (3) voldaan zijn.



De formule van Maxwell

We hebben afgesproken wat we met een top, pas en dal bedoelen en we hebben een aantal “gekke” situaties uitgesloten. We zijn nu klaar om op zoek te gaan naar de relatie tussen het aantal toppen, passen en dalen.

Opdracht

Bouw met behulp van zoutdeeg een fatsoenlijk eiland en tel het aantal toppen, passen en dalen van jouw eiland. Controleer zorgvuldig of je alle passen op het eiland hebt meegeteld.



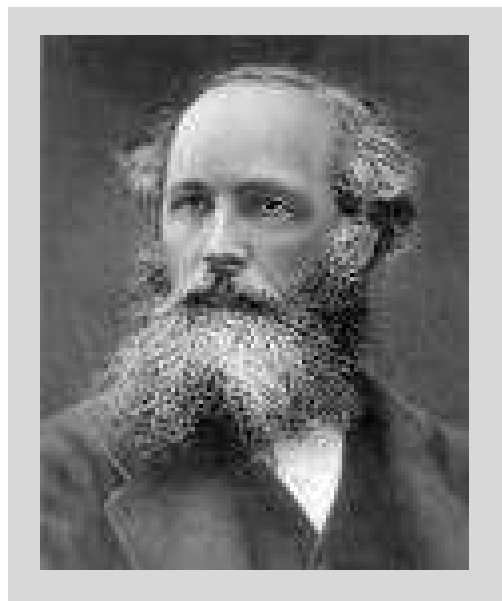
Vraag 9

Wat is het verband tussen de drie aantallen? Geef een formule van het verband.

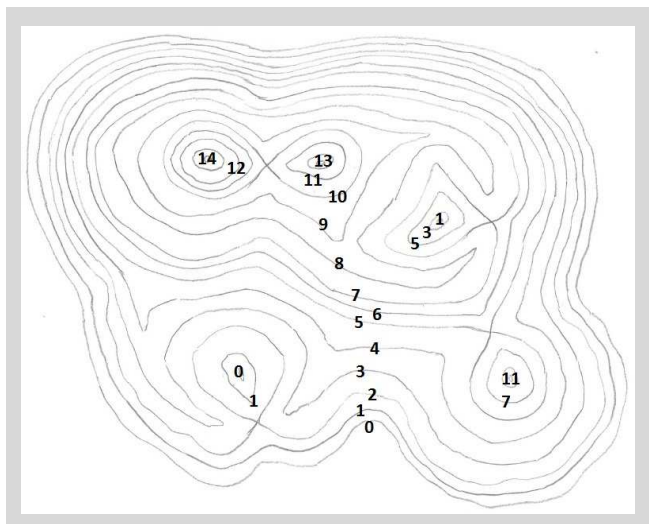
Vraag 10

- Maak van zoutdeeg een fatsoenlijk eiland met 5 toppen en 0 dalen. Voldoet jouw eiland aan de formule?
- Maak een fatsoenlijk eiland met 1 top en 5 dalen. Voldoet jouw eiland aan de formule?
- Je kunt voor elk tweetal positieve gehele getallen b en d een fatsoenlijk eiland maken met b toppen en d dalen. Laat dat zien.

De formule voor het aantal toppen, dalen en passen is ontdekt door Maxwell, de beroemde Schotse fysicus.



Hieronder is opnieuw de kaart van ons eiland afgebeeld. Deze keer zijn wel de hoogtes van de hoogtelijnen aangegeven.



Stel, dat door klimaatveranderingen het zeeniveau langzaam stijgt, totdat aan het einde het hele eiland onder water staat. Stel verder, dat de peil van het grondwater tijdens dit proces steeds gelijk aan het zeeniveau is.

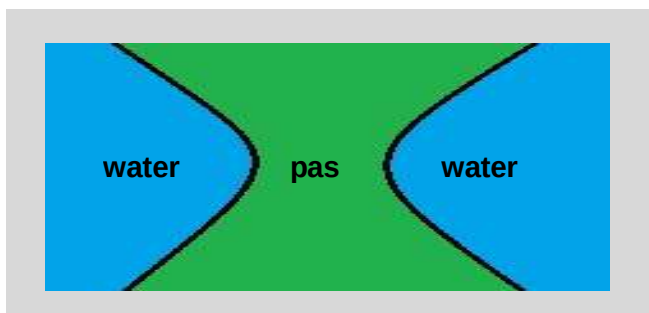
Opdracht

Hiernaast zie je vier kaarten van het eiland. Veronderstel dat het zeeniveau

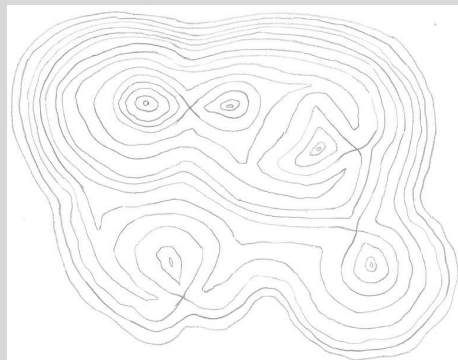
- in de eerste kaart de hoogte van de laagste pas bereikt,
- in de tweede kaart de hoogte van de op één na laagste pas bereikt,
- in de derde kaart de hoogte van de op één na hoogste pas bereikt,
- in de vierde kaart de hoogte van de hoogste pas bereikt.

Geef in alle vier de kaarten met blauw aan waar het water staat.

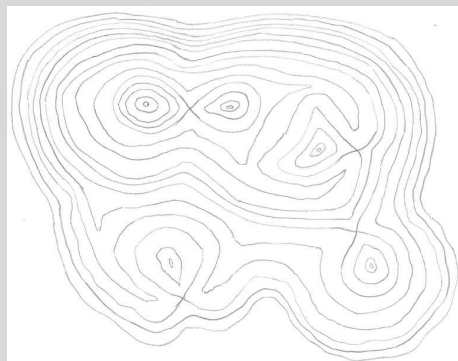
Wanneer het zeeniveau bijna de hoogte van een pas heeft bereikt, staat er aan beide zijden van de pas water, zoals in het plaatje hieronder.



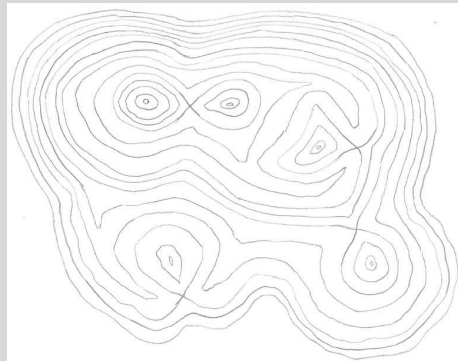
kaart 1



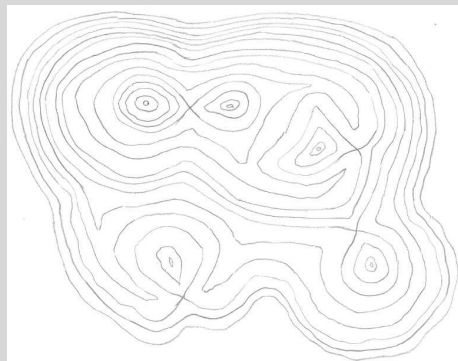
kaart 2



kaart 3



kaart 4



Er zijn twee mogelijkheden:

Situatie 1:

Het water aan beide kanten van de pas behoort tot één en hetzelfde meer, zoals in het plaatje hiernaast. Op het moment dat het zeeniveau de hoogte van de pas bereikt ontstaat er een nieuw eiland.

Het aantal passen wordt 1 minder en het aantal eilanden wordt 1 meer.

Situatie 2:

Het water aan beide kanten van de pas behoort tot twee verschillende meren, zoals in het plaatje hiernaast. Op het moment dat het zeeniveau de hoogte van de pas bereikt verenigen de twee meren zich tot één.

Het aantal passen wordt 1 minder en het aantal meren wordt ook 1 minder.

Vraag 11

Hoe vaak komt situatie 1 voor op ons eiland en hoe vaak situatie 2?

Zonder het aantal toppen, passen of dalen te veranderen kun je door de toppen op te hogen ervoor zorgen, dat de toppen van het eiland hoger dan alle passen liggen. Ook kun je er door de dalen uit te diepen ervoor zorgen dat de dalen van het eiland lager dan alle passen liggen. Ten slotte kun je ervoor zorgen dat alle passen op verschillende hoogtes liggen.

Vraag 12

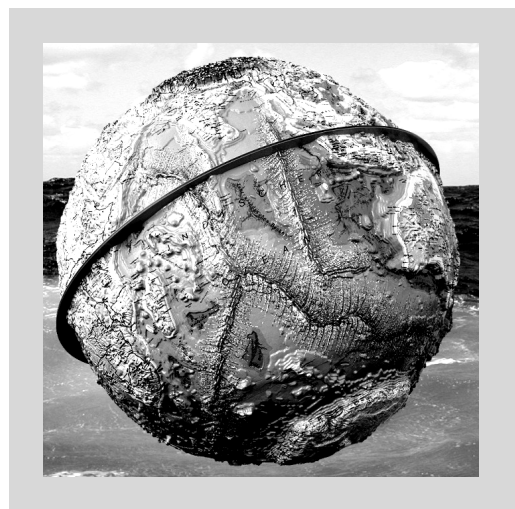
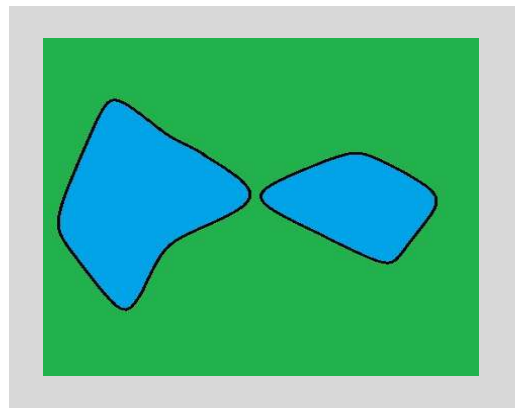
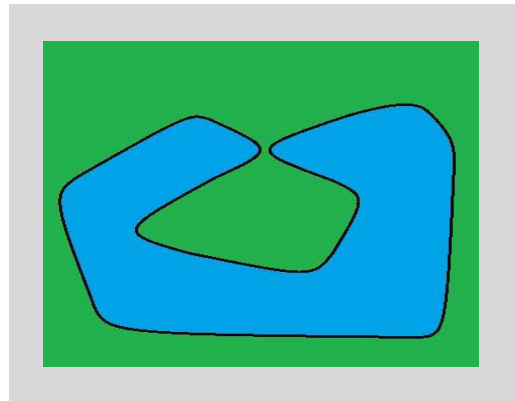
Op ons eiland is het aantal toppen 1 groter dan het aantal situaties 1 en is het aantal dalen hetzelfde als het aantal situaties 2. Laat zien dat deze twee verbanden voor alle fatsoenlijke eilanden moeten gelden en leid hieruit de formule van Maxwell af.

En op de aarde?

Stel dat de aarde helemaal is opgedroogd, zodat er geen water meer op de aarde is.

Vraag 13

a Kun je je een aarde voorstellen met één top en één dal? Hoeveel passen zijn er?



-
- b Kun je je een aarde voorstellen met twee toppen en één dal. Hoeveel passen zijn er?
 - c Kun je je een aarde voorstellen met zes toppen en acht dalen? Hoeveel passen zijn er?

Er is weer een verband tussen het aantal toppen, passen en dalen, net als bij de eilanden het geval was. Om dit verband te vinden, gaan we proberen het bewijs uit opgave 14 op de aarde toe te passen.

Stap 1: Zorg er voor dat de toppen hoger dan alle passen liggen en dat de dalen lager dan alle passen liggen.
Zorg er verder voor dat alle passen op verschillende hoogtes liggen.

Stap 2: Laat het nu voortdurend overal regenen op aarde. In elk dal ontstaat dan een meer. Mettertijd groeien deze meren. Als de waterspiegel een pas bereikt, kunnen zich weer twee situaties voordoen: situatie 1 en situatie 2.

Nadat de waterspiegel de hoogte van de hoogste pas heeft overtroffen, zijn alle meren tot een grote oceaan verbonden en elke top ligt op een apart eiland.

Vraag 14

Bepaal het verband tussen het aantal toppen en het aantal situaties 1 op de uitgedroogde aarde. Bepaal het verband tussen het aantal dalen en het aantal situaties 2 op de uitgedroogde aarde. Leid hieruit een verband tussen het aantal toppen, passen en dalen op de uitgedroogde aarde af.

Vraag 15

Elk landschap op de uitgedroogde aarde kun je vertalen naar een landschap op een eiland, en omgekeerd. Je zou dus verwachten dat “aantal toppen + aantal dalen – aantal passen” hetzelfde is voor de uitgedroogde aarde als voor een eiland. Verklaar het verschil tussen de formules voor de uitgedroogde aarde en voor een eiland.