

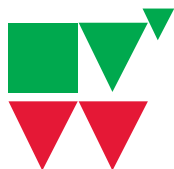
EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEERAAR

ONTDEKKINGSTOCHT 3
METAFOREN BIJ HET LEREN VAN WISKUNDE
HET FIZIER GERICHT OP
NATIONALE WISKUNDEDAGEN 2014
WISKUNDE, WANNEER HEB IK DAT
NOU NODIG?



NR.6



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 89 | MEI 2014

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 89 NR 6

IN DIT NUMMER

KORT VOORAF

MARJANNE DE NIJS

3

ONTDEKKINGSTOCHT 3

STEPHAN BERENDONK

LEON VAN DEN BROEK †

4

EEN GOED BEGIN...

ERIKA BAKKER

7

VANUIT DE OUDE DOOS

TON LECLUSE

8

SPEEDDATING MET WISKUNDIGE OPDRACHTEN

MARIKEN BARENTS

11

KLEINTJE DIDACTIEK

LONNEKE BOELS

13

$$a^2 + b^2 = c^2$$

MARTIN KINDT

14



GETUIGEN

DANNY BECKERS

18

METAFOREN BIJ HET LEREN VAN WISKUNDE

JOOP VAN DORMOLEN

20

UITDAGENDE PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

23



HET FIZIER GERICHT OP...

VINCENT JONKER

MONICA WIJERS

27

PISA 2012

GER LIMPENS

RUUD STOLWIJK

29

NATIONALE WISKUNDEDAGEN 2014

ROB VAN OORD

33

TALIGE ONDERSTEUNING IN EEN TAALZWAKKE REKEN-WISKUNDEKLAS

JANTJEN SMIT

37



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

KORT VOORAF

In de week dat deze *Euclides* bij u in de bus valt, zijn alle eindexamenkandidaten gestart met hun centraal examen. Voordat de leerlingen zich over wiskunde mogen buigen, zal op veel scholen eerst een nieuwe procedure in gebruik worden genomen: het resetten van de grafische rekenmachine. Na de eerste berichten over programmaatjes die leerlingen op de GR kunnen downloaden, heb ik me op internet geïnformeerd over de mogelijkheden. Niet alleen de nieuwste ontwikkelingen staan daar, maar ook mooie videofilmpjes die stap voor stap laten zien hoe je complete spieklíjstjes kan maken, en de bijbehorende tips hoe je ze zodanig kan opslaan dat zelfs resetten geen einde maakt aan hun bestaan. We hebben blijkbaar met deze rekenmachines een soort Paard van Troje binnen gehaald. Hopelijk zal het allemaal niet zo'n vaart lopen en laten de leerlingen massaal zien dat ze aan hun eigen geheugen genoeg hebben.

Met de start van de examens begint voor de redactie ook het samenstellen van het eerste nummer van de komende jaargang. Zoals u weet, starten we het schooljaar altijd met een nummer dat grotendeels gewijd is aan het terugkijken op de examens. Mocht u daar ook aan willen bijdragen, dan bent u van harte welkom. De voorwaarden die we stellen aan artikelen staan op vakbladeuclides.nl en u kunt u bijdrage sturen aan vakbladeuclides@nvww.nl.

En nu terug naar het nummer dat voor u ligt. Hierin hebben we weer voor alle collega's – met of zonder examenklas – getracht om veel interessante en informatieve artikelen bij elkaar te brengen. Met, zoals gewoonlijk, grote dank aan alle auteurs. We wensen u veel leesplezier.

Marjanne de Nijs
Hoofdredacteur *Euclides*

'WISKUNDE, WANNEER HEB IK DAT NOU NODIG?'

ASTRID VAN DE KERKHOF

39

VERSCHENEN

SPIROSPOREN

40

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

42

BOEKBESPREKING

MONIQUE STIENSTRA



VASTGEROEST

AB VAN DER ROEST

46

RECREATIE

47

SERVICEPAGINA

50

ONTDEKKINGSTOCHT 3

Stephan Berendonk
Leon van den Broek †

In dit artikel schrijft Stephan Berendonk over een wiskundig onderwerp dat in de klas prima uitgelegd kan worden met behulp van zoutdeeg. En weer speelt de veelvlakkenstelling van Euler een hoofdrol.



figuur 1 Aardkluit in Keulen

Het wildpark in Keulen-Lindenthal heeft veel attracties. Een paar weken geleden kwam ik er naast geiten, ezeltjes en reeën ook de in figuur 1 afgebeelde aardkluit tegen. Het koste mij veel geduld om de foto te maken, omdat er steeds weer andere bezoekers van het park langs liepen. Sommige van deze passanten keken mij verbaasd aan, toen ze merkten dat ik van plan was de aardkluit te fotograferen. Voor hun was de berg blijkbaar helemaal geen attractie, die hun aandacht verdiende. Daarentegen valt te verwachten, dat u, gewaardeerde lezer, alles over deze kluit te weten wilt komen: Hoe ziet de hoop van de andere kant eruit? Uit welk soort aarde bestaat hij? Waar komt die aarde vandaan? Hoe lang staat hij er al? Heeft hij een bepaalde functie? Hoe lang is de aardkluit? Waar zit het hoogste punt? Hoe hoog is die? Hoeveel *toppen* (lokaal hoogste punten) heeft de hoop?

Helaas moeten we de meeste vragen schuldig blijven. De topografische vragen echter kunt u zelf beantwoorden, namelijk met behulp van de in figuur 2 afgebeelde hoogtekaart van de kluit. De kaart bestaat uit een collectie gesloten krommen, de zogenaamde *hoogtelijnen*. Elke hoogtelijn bestaat uit punten, die dezelfde hoogte ten opzichte van de grond hebben. Welke hoogte dat is, wordt door het bijbehorende getal aangegeven.

De onregelmatige punten en hun regelmaat

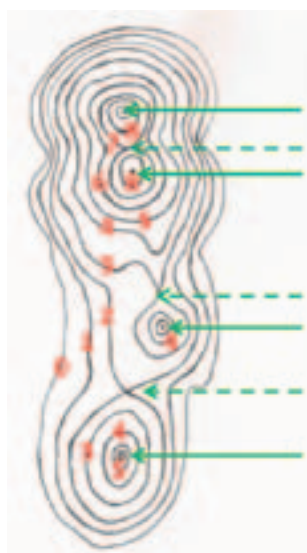
De kaart heeft een aantal opvallende punten. We hebben ze in figuur 2 gemarkeerd. Daarbij hebben we verschil gemaakt tussen twee verschillende soorten opvallende punten. De doorgetrokken pijlen wijzen op de toppen van de aardkluit. De kluit heeft dus vier toppen. De gestippelde pijlen wijzen op punten, waar een hoogtelijn een

zelfdoorsnijding heeft. Zulke dubbelpunten van hoogtelijnen noemen we *passen*. Figuur 3 laat zien hoe de omgeving van een typische pas eruit ziet. Onze kluit heeft dus blijkbaar drie passen.

We kijken nu naar de hoogtekaart in figuur 4, die bij een andere kluit hoort (kluit (a)). De interessante punten zijn weer door pijlen aangegeven. Anders dan de kluit uit het wildpark heeft deze hoop niet alleen toppen, maar ook *dalen* (lokaal laagste punten). Als je niet op de hoogtes van de hoogtelijnen let, dan zien toppen en dalen er lokaal hetzelfde uit. Daarom hebben we ze allebei met doorgetrokken pijlen gemarkeerd. Het valt op dat op beide kluiten het aantal doorgetrokken pijlen om 1 groter is dan het aantal gestippelde pijlen. Met andere woorden: (1)... $toppen + dalen = passen + 1$. Is dat toeval of geldt dat altijd?

Het antwoord ligt daar ergens tussenin. Kluiten, die niet aan formule (1) voldoen, zijn makkelijk te vinden. Hoeveel toppen heeft kluit (b) in figuur 5? Dat hangt ervan af hoe we het begrip *top* precies definiëren: Als we een punt bedoelen dat hoger ligt dan alle andere punten in zijn buurt, dan heeft kluit (b) helemaal geen top. Als het punt alleen maar geen hogere punten in zijn omgeving mag hebben, dan zijn er oneindig veel toppen op kluit (b). Hoe je het ook doet, het aantal toppen samen met het aantal

figuur 2 Hoogtekaart van de aardkluit



figuur 3 Omgeving van een pas



dalen is in ieder geval niet om 1 groter dan het aantal passen. Is formule (1) wel goed, als we kluit (b) en alle andere kluiten, die oneindig veel *kritische* punten hebben, uitsluiten? We kijken hiervoor naar het tweede voorbeeld, kluit (c) in figuur 5. Hij heeft slechts vier kritische punten: drie toppen en een pas. Daarmee voldoet ook kluit (c) niet aan de formule. Opvallend is, dat je vanuit de pas op kluit (c) in zes richtingen kunt lopen zonder van hoogte te veranderen. Bij de passen die we eerder zijn tegengekomen, waren het steeds maar vier richtingen. Dat leidt ons tot de vraag of de formule misschien waar is wanneer we alleen *gewone* passen met vier richtingen toelaten.

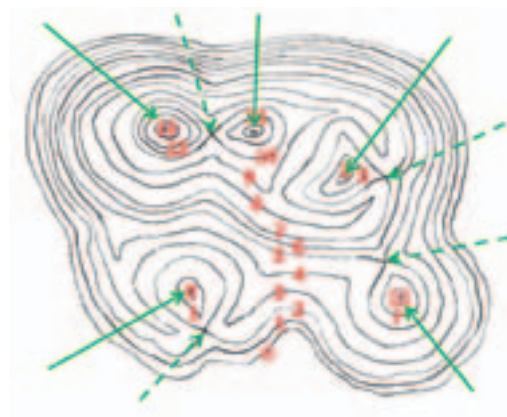
Wat bij het passeren van een pas passeert...

We voeren met kluit (a) een gedachtenexperiment uit. We doen alsof de kluit door water is omgeven. De kluit is dan een eiland, de buitenste hoogtelijn is zijn kust. Wat gebeurt er als het waterpeil stijgt? De buitenste hoogtelijn verzinkt in het water en mettertijd komen de steeds verder landinwaarts liggende hoogtelijnen als kust aan de beurt. Als we veronderstellen dat het grondwater steeds op dezelfde hoogte blijft als het zeewater, dan ziet de ondergang van het eiland er uit als in figuur 6. De meeste tijd zal het eiland gewoon inkrimpen, zonder dat er iets opmerkelijks gebeurt. Speciaal zijn alleen de momenten, wanneer het water de hoogte van een dal, top of pas bereikt. Zodra het water de hoogte van een dal passeert, ontstaat er in dat dal een meer. Het aantal meren stijgt dus op dat moment om 1. Telkens als de hoogte van een top wordt gepasseerd, verdwijnt een eiland onder water. Het aantal eilanden daalt op dat moment dus om 1. In figuur 7 zijn echter alleen de momenten wanneer het water de hoogte van een pas bereikt, weergegeven. We zien dat daarbij twee verschillende situaties kunnen optreden: het water aan beide zijden van de pas behoort tot één en hetzelfde meer of het behoort tot twee verschillende meren (de zee tellen we ook als meer). In de eerste situatie zal een eiland in tweeën splitsen. Het aantal eilanden stijgt dus op dat moment om 1. In de tweede situatie zullen twee meren fuseren. Het aantal meren daalt dus op dat moment om 1.

Nu vergelijken we de begin- en de eindsituatie van de zondvloed. In het begin is er één eiland en aan het einde, als alles onder water staat, zijn er nul eilanden. Omdat het aantal eilanden bij de hoogte van een *situatie* – 1 – *pas* om 1 stijgt en bij de hoogte van een top om 1 daalt, moet het aantal toppen van het oorspronkelijke eiland om 1 groter zijn dan het aantal *situatie* – 1 – *passen*. In formule:

(2)... $\text{toppen} = \text{situatie} - 1 - \text{passen} + 1$.

Het aantal meren is in het begin en aan het einde hetzelfde, namelijk 1. Omdat het aantal meren bij de hoogte van een *situatie* – 2 – *pas* om 1 daalt en bij de hoogte van een dal om 1 stijgt, moet het aantal dalen van het oorspronkelijke eiland hetzelfde zijn als het aantal passen *situatie* – 2 – *passen*. In formule:



figuur 4 Hoogtekaart van kluit (a)

kluit (b)



kluit (c)



figuur 5 Hoogtekaart van twee kluiten die niet aan formule (1) voldoen

(3)... $\text{dalen} = \text{situatie} - 2 - \text{passen}$.

Tellen we vergelijkingen (2) en (3) bij elkaar op, dan krijgen we formule (1).

Een wiskundeles met zoutdeeg als bouw materiaal

Het verband tussen het aantal toppen, passen en dalen van een eiland en het hierboven gevoerde bewijs is voor het eerst te vinden in een kort en zeer leesbaar artikel van James Clerk Maxwell (zie [2]). Concreet lesmateriaal over dit onderwerp is beschikbaar op vakbladeuclides.nl/896berendonk. Het materiaal is ontwikkeld in samenwerking met de Nijmeegse ASL-groep (Actief Samenwerkend Leraarschap). Een opmerkelijk feature van dit voorstel is het gebruik van een in het wiskundeonderwijs ongebruikelijk materiaal: zoutdeeg! Iedere leerling bouwt daarmee zijn eigen kluit (zie figuur 8) en telt hoeveel toppen, passen en dalen het heeft. Het onderwerp leeft wezenlijk van zijn zinnelijkheid, van de beeldende

en aanschouwelijke redeneringen. Door het gebruik van zoutdeeg krijgt de les bovendien een tastbaar karakter. Dat heeft op veel leerlingen een motiverend effect.

Het is mogelijk om de les zonder zoutdeeg te doen. Dan werk je dus alleen met de hoogtekaarten. Het idee achter het lesvoorstel is echter de leerlingen juist met twee verschillende representatievormen van hetzelfde object te confronteren, een actieve, de zoutdeegkluiten, en een iconische, de hoogtekaarten (vergelijk [1], p.10). De simultane beschikbaarheid van beide vormen helpt ons bij het ontdekken en levert ons een grotere flexibiliteit bij het communiceren over het onderwerp. Daarom is een centraal doel van de les, dat de leerlingen met beide representaties kunnen omgaan en ertussen heen en weer kunnen schakelen.



figuur 6
Kluit (a) tijdens een
zondvloed



figuur 7 Zoutdeegkluit

De overgang van een kluit naar een bijbehorende hoogtekaart is een discretisering, die de aandacht op de kritische punten richt en daarmee de ontdekking van Maxwells formule voorbereidt. Verder corresponderen de hoogtekaarten bijzonder goed met het zondvloedexperiment van Maxwell, omdat iedere hoogtelijn een potentiële kust voorstelt. De hoogtekaarten zijn dus ideaal geschikt om Maxwells bewijs te illustreren.

Complexere kluiten zijn moeilijk verbaal te beschrijven. Zoutdeeg geeft ons echter de mogelijkheid snel concrete kluiten te bouwen, waarmee we bijvoorbeeld, zonder ook maar een woord te gebruiken, vragen naar de existentie van kluiten met bepaalde eigenschappen kunnen beantwoorden. Het tekenen van een geschikte en fatsoenlijke hoogtekaart zou in vergelijking veel langer duren. We gebruiken het zoutdeeg in de voorgestelde les dus ook om het niveau van de gebruikte taal te reduceren.

Noten

- [1] Bruner, J.S. (1974). *Toward a Theory of Instruction*. Belknap Press.
- [2] Maxwell, J.C. (1870). On hills and dales, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 40(269).

Zie voor het lesmateriaal vakbladeuclides.nl/896berendonk

Over de auteurs

Stephan Berendonk is didactisch medewerker aan het mathematisch instituut van de Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. Leon van den Broek was leraar wiskunde op rsg Pantarijn te Wageningen en auteur van diverse wiskundelesmaterialen. E-mailadres van Stephan: berendonk@math.uni-bonn.de

EEN GOED BEGIN...

WISKUNDE A

Erika Bakker

Erika Bakker heeft vorig schooljaar haar LIO-stage wiskunde gedaan, als onderdeel van haar Educatieve Master. Nu is ze begonnen met haar eerste echte baan als docent. In deze rubriek deelt zij haar belevenissen met u.



Met mijn 4 vwo-klas met wiskunde A heb ik sinds het begin van het jaar niet zo'n goede band. Dit betekent niet dat onze relatie slecht is, maar dat deze band er eigenlijk niet is. De grootste oorzaak hiervan is denk ik dat ik de leerlingen maar twee keer per week zie, op maandag- en donderdagmiddag. In weken met rapportvergaderingen gaan de lessen op die middagen meestal niet door. Verder is maandag ook een dag die nog wel eens uitvalt en dat deze maandagles op het negende lesuur valt, komt onze band ook al niet ten goede. Kortom, ik zie mijn 4 vwo-leerlingen weinig en als ik ze zie, zijn we niet altijd in onze meest geconcentreerde staat.

Wat het ook niet makkelijk maakt, is dat ik met 27 leerlingen begon en er inmiddels 31 heb. Leerlingen mogen aan het begin van het schooljaar nog overstappen van wiskunde B naar wiskunde A. Vorig jaar zag ik vanaf de wiskunde B-kant hoe dat werkt. Je bent blij als de periode tussen het moment waarop de leerling nadenkt om over te stappen en het daadwerkelijke moment van overstap zo kort mogelijk duurt. De positieve kant hiervan is dat je klas een beetje kleiner wordt. Nu zit ik aan de ontvangende kant. Daar kan ik tot nu toe niet veel positiefs aan zien. Wanneer het begin van het schooljaar afgelopen is, weet ik niet precies. De laatste overstapper kwam in de week na de kerstvakantie.

In overleg met collega's had ik besloten dat alle overstappers het hoofdstuk over combinatoriek moesten inhalen en dat het hoofdstuk over beschrijvende statistiek dan maar even achterwege moest blijven. Optimistisch als ik ben, had ik voor de overstappers een planning van week tot week gemaakt met linkjes naar filmpjes waarin de theorie werd behandeld. Bij de eerste overstapper werkte dit prima. Deze leerling haalt voornamelijk goede cijfers op zowel inhaaltoetsen als op toetsen waar we nu mee bezig zijn. Ik had me niet gerealiseerd dat dit bij andere overstappers anders zou gaan. Die bleken bij navraag van mijn kant de filmpjes niet te bekijken en het altijd precies op het moment dat ik met ze sprak, even heel druk te hebben met andere vakken. En zowel op inhaal- als 'gewone' toetsen werden er maar weinig voldoende gehaald. Dit moet ik een volgende keer echt anders aanpakken. Ik moet er niet vanuit gaan dat leerlingen de planning die ik in elkaar zet, braaf volgen, maar ik moet er veel meer achteraan zitten.

Ook al gaat het een en ander dus wat moeizaam in deze klas, er zijn ook altijd positieve kanten. Zo vind ik de onderwerpen die we dit jaar moeten doen, echt superleuk. Het begon met tellen en daar zijn we nu eigenlijk weer mee bezig bij de kansrekening. Ik vind het grappig om te zien hoe vraagstukken die in het boek net niet precies genoeg geformuleerd zijn, door verschillende leerlingen op verschillende manieren worden geïnterpreteerd. Het is ook interessant dat leerlingen de kansproblemen niet allemaal met dezelfde berekeningen oplossen, maar toch, als alles goed gaat, op het zelfde antwoord uitkomen. Ik vind de notatie bij dit onderwerp dan ook erg belangrijk. Ik wil niet alleen breuken zien, maar ook wat gewone woorden erbij. Als een leerling aan mij vraagt of zijn berekening ook goed is, moet ik daar soms even diep over nadenken omdat ik zelf een andere route in gedachten had.

Het hoofdstuk over kansrekening is bijna afgelopen. Een proefwerk en nog één hoofdstuk en dan is het schooljaar ook alweer voorbij. Tegen het plannen van het proefwerk zag ik een beetje op. Bij ons op school is er een proefwerkrooster waar staat op welke datum een bepaald cluster een proefwerk mag geven. Mijn eerstvolgende datum is ver nadat ik het hoofdstuk heb afgerond. De enige oplossing hiervoor was dat ik het proefwerk tijdens de proefwerkweken van de examenklassen zou plannen. In die periode hebben we altijd een aangepast rooster en is het proefwerkrooster, op gecoördineerde proefwerken na, leeg.

In de betreffende periode zie ik vwo 4 in totaal vijf keer. Ik heb deze dagen aan de klas voorgelegd en uiteraard ontstond er meteen discussie. Een aantal leerlingen riep argumenten voor en tegen bepaalde dagen door de klas. Maar na twee minuten was de discussie alweer over en was de klas het helemaal eens over welke datum het moest worden. De laatste datum, zou je misschien denken? Maar nee, ze hebben de middelste gekozen.

Over de auteur

Erika Bakker rondde in de zomer van 2013 haar Educatieve Master wiskunde af. Na een jaar stagelopen is ze dit schooljaar voor het eerst officieel docent wiskunde. E-mailadres: erikabakker66@gmail.com

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A^o 19 $\frac{29}{31}$

Deze keer een juweeltje waarin drie mooie meetkunde-regels uit ons vroegere curriculum worden gecombineerd en een kleine uitsmijter, uit 1931 en 1929. De eerste opgave komt uit een examen trigonometrie en analytische meetkunde, de tweede uit een algebraexamen. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

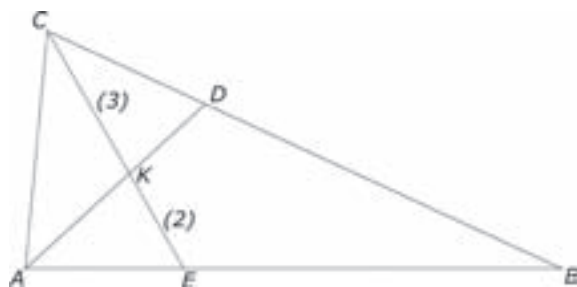
Opgave 1

In driehoek ABC trekt men de bissectrices AD en CE . Snijpunt dezer bissectrices is K . Indien $CK : KE = 3 : 2$ en bovendien $\angle A - \angle B = 60^\circ$, vraagt men de hoeken van de driehoek te berekenen.

Opgave 2

Men vraagt hoogte en inhoud te bepalen van de kleinste kegel, die men om een bol met straal R kan beschrijven.

Opgave 1. een werkschets

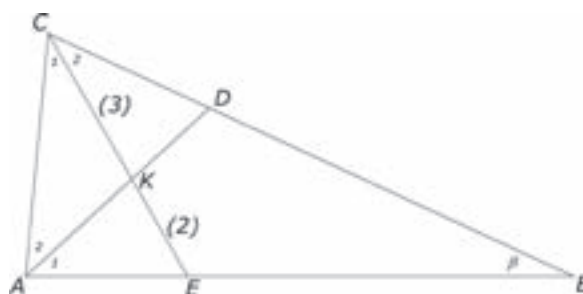


Ter overweging:

- (1) hoe kunnen we het gegeven: $\angle A - \angle B = 60^\circ$ inzetten?
- (2) hoe gebruiken we de gegeven verhouding $2 : 3$?
- (3) hoe gebruiken we de aanwezige bissectrices?

Wilt u het zelf eerst eens verder proberen?

De eerste overweging, op hoekenjacht



$\angle A = \angle B + 60^\circ$, dus $\angle C_{1+2} = 180^\circ - (\angle B + 60^\circ) - \angle B = 120^\circ - 2\angle B$. Dus $\angle C_1 = 60^\circ - \beta$. In driehoek ACE volgt hieruit (met de hoekensom van deze driehoek): $\angle E = 60^\circ$. Het ligt nu voor de hand deze vaste hoek te gaan inzetten.

Hoe kunt u nu deze hoek handig inzetten bij overwegingen (2) en (3)?

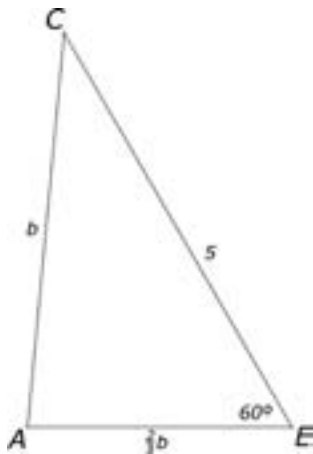
Overwegingen (2) en (3) + $\angle E = 60^\circ$

Het zal nu duidelijk zijn, dat we in driehoek ACE verdergaan! Immers in deze driehoek kennen we $\angle E$, en is bissectrice AK getekend, die de overstaande zijde verdeelt in de gegeven verhouding.

Dus? $1 + 1 = 2$

Dus gebruiken we de bissectricestelling: een bissectrice verdeelt de overstaande zijden in de verhouding van de zijden van de hoek; in de tekening: $AC : AE = 3 : 2$.

Omdat we hoekgroottes moeten uitrekenen, geen lengtes, kunnen we zonder meer stellen dat $CK = 3$ en $EK = 2$. Stel $AC = b$, dan is dus volgens de bissectricestelling $AE = \frac{2}{3}b$. In een tekening:



Bereken u even $\angle A$?

Afronding

Eerst kan met de cosinusregel de waarde van b worden berekend:

$$b^2 = 5^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}b \cdot \cos 60^\circ$$

$$b^2 + 6b - 45 = 0$$

Met als positieve uitkomst $b = 3\sqrt{6} - 3$.

Hierna kan $\angle A$ met de sinusregel worden berekend:

$$\frac{\sin \alpha}{5} = \frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{6} - 3}$$

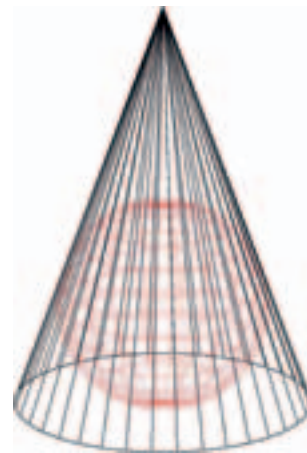
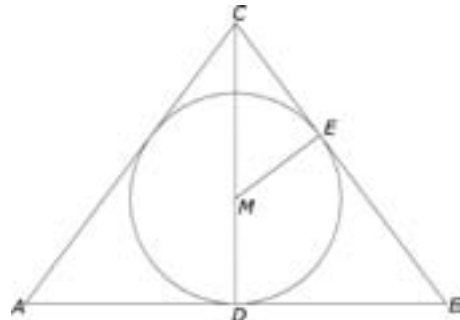
Waaruit volgt: $\sin \alpha = \frac{2\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3\sqrt{6} - 3}$, dus $\alpha \approx 84,73561032^\circ \approx$

$84^\circ 44' 8''$, waarmee de hoeken van driehoek ABC bekend zijn.

Eigenlijk best wel jammer dat de kwadratische vergelijking waarmee b is uitgerekend niet mooi uitkomt. Dit kan ondervangen worden door driehoek ACE geschikt te kiezen. Een bekende driehoek waarin een hoek van 60° voorkomt en de cosinusregel mooi uitkomt, heeft zijden 5, 7 en 8. Door in de oorspronkelijke opgave de verhouding $2 : 3$ te vervangen door $5 : 7$ lukt dit. Rekent u bij deze keuze alles even na?

Opgave 2. een werkschets

In dit vooraanzicht is $ME = MD = R$ de straal van de bol, $BD = r$ de straal van de grondcirkel en $CD = h$ de hoogte van de kegel. De formule voor de inhoud van de kegel luidt: $I_{\text{kegel}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Wanneer het lukt de gegevens te verwerken en daarbij een van de variabelen in deze formule weg te werken, komt het probleem neer op het zoeken naar het minimum van een functie. Dat lukt u natuurlijk zonder hieronder te spieken, toch?!



Verdere uitwerking

De driehoeken BDC en MEC zijn gelijkvormig, dus $ME : BD = MC : BC$.

$$\text{Dit levert op: } \frac{R}{r} = \frac{h-R}{\sqrt{r^2 - h^2}}$$

$$\text{Kwadrateren geeft: } \frac{R^2}{r^2} = \frac{h^2 - 2hR + R^2}{r^2 + h^2}$$

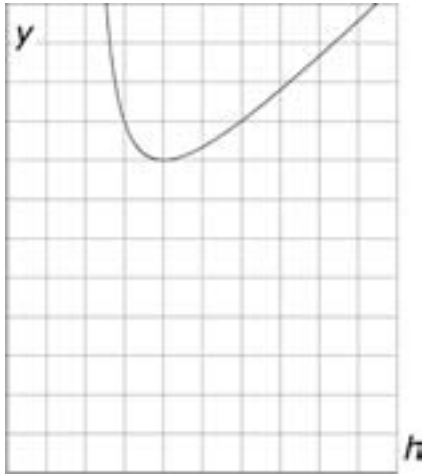
$$\text{Waaruit } r^2 \text{ kan worden vrijgemaakt: } r^2 = \frac{R^2 h}{h - 2R}$$

Zodat de inhoud van de kegel wordt:

$$I_{\text{kegel}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 h}{h - 2R} \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 h^2}{h - 2R}$$

We zoeken naar het minimum van de functie $f(h) = \frac{R^2 h^2}{h - 2R}$,

waarvan de grafiek is geplott om te checken of het een minimum betreft.



Welnu, $f'(h) = \frac{R^2 h(h-4R)}{(h-2R)^2}$, met positief nulpunt $h = 4R$.

De inhoud van deze kegel is $\frac{8}{3}\pi R^3$.

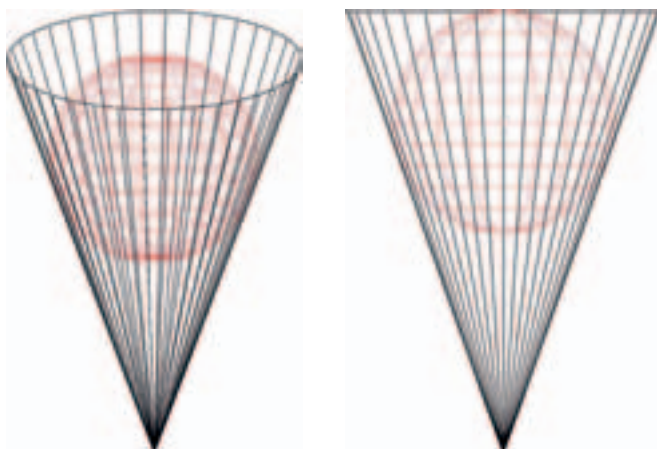
N.B. deze opgave is uiterst geschikt als toetsopgave in het huidige havo wiskunde B-curriculum. Wel aanpassen aan de huidige stijl van presenteren. Een poging:

Er zijn vele kegels mogelijk waarin een bol met straal 3 cm past.

Welke afmetingen heeft zo'n kegel, met een zo klein mogelijke inhoud?

Of

Een ijscokraam verkoopt bolletjes ijs, die in een kegelvormig hoorntje worden geplaatst. De bolletjes hebben een diameter van 6 cm. De gebruikte hoorntjes hebben een bijzondere eigenschap: het eerste bolletje ijs zakt precies in het hoorntje, zonder uit te steken. Zie bijgaande figuren (eerste figuur: ruimtelijk, tweede figuur: vooraanzicht, staat ook op de uitwerkbijlage.)



Er zijn meerdere kegelvormige hoorntjes mogelijk waarmee dat lukt.

Wanneer we de hoogte van het hoorntje h noemen, en de straal van de grondcirkel r , is de inhoud van het hoorntje

gelijk aan $3\pi \cdot \frac{h^2}{h-6}$.

- Toon aan dat deze formule klopt. Gebruik hierbij de uitwerkbijlage.
- Welke afmetingen heeft het hoorntje opdat het een zo klein mogelijke inhoud heeft?

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

SPEEDDATING MET WISKUNDIGE OPDRACHTEN

Mariken Barents

Het ontwikkelingsmotto van Mariken Barents is 'frustratie is het begin van een mooie (onderwijs)ontwikkeling'. In dit artikel laat ze zien hoe frustratie leidde tot een succesvolle activerende werkvorm.

In 2007 raakte ik gefrustreerd door het consumptieve gedrag van 5 vwo-leerlingen. Ik wilde een activerende werkvorm, waarbij ik geen strijd hoefde aan te gaan over bij wie ze in een groepje zaten (omdat ze het liefst alleen maar met hun vrienden praatten), waarbij ze geprikkeld werden om door te werken, en waarbij ze binnen een kwartier zes opgaven zouden maken. De werkvorm *Speeddating* werd geboren. Deze is door de jaren heen verfijnd en gestandaardiseerd met bepaalde parameters zodat de werkvorm op verschillende momenten en in verschillende vormen in het leerproces is toe te passen. Deze werkvorm gebruik ik voornamelijk in de bovenbouw, omdat ik in de onderbouw al andere werkvormen gebruik. Wat niet wil zeggen dat het niet toepasbaar is. Integendeel.

Hoe werkt het?

De tafels staan in groepen, zoveel als er opdrachten zijn. Per groep ligt één unieke opdracht op de tafel. Daarnaast ligt een unieke route per leerling. Deze route leidt de

leerling langs alle opdrachten. De routes zijn zo gemaakt dat iedere leerling voor iedere opdracht met weer andere klasgenoten aan een tafel zit. De leerlingen gaan zitten waar ze willen. De leerlingen maken de opdracht waar ze starten. Na een door de docent bepaalde tijd gaan alle leerlingen naar de volgende opdracht die op hun route staat. Zoveel opdrachten als er zijn, zijn er ronden. Als alle leerlingen alle opdrachten hebben gedaan, volgt de nabespreking. Dit kan op verschillende manieren.

Wanneer?

Deze werkvorm kan in alle fasen van het leerproces toegepast worden:

- voorkennis opfrissen, alle facetten van de voorkennis kunnen in de verschillende opdrachten verwerkt worden;
- verschillende oefeningen over een onderwerp, bijvoorbeeld vergelijkingen oplossen, in iedere opdracht een aspect van het oplossen ervan;
- aan het eind van een hoofdstuk, of vlak voor een toets, over elk van de belangrijke onderwerpen een opdracht, zodat hier de aandacht goed op gevestigd wordt.

Daarnaast is Speeddating zodanig activerend dat het ook ingezet kan worden bij lesgroepen waar de leerlingen lastig aan het werk te krijgen zijn.

Wat heb je nodig?

Om deze werkvorm strak te laten verlopen in de les is het nodig van tevoren de volgende parameters te bepalen:

- aantal opdrachten (= aantal ronden);
- aantal leerlingen per opdracht/groep;
- tijdsduur van een ronde, kort en krachtig bij bijvoorbeeld basisvaardigheden of langer bij inzichtvragen. Probeer de tijd te nemen die de beste 25% van de leerlingen nodig heeft om de opdracht te maken.

1	A	B	C	D
2	B	A	D	C
3	C	D	A	B
4	D	C	B	A
5	A	D	B	C
6	D	A	C	B
7	B	C	A	D
8	C	B	D	A
9	A	C	D	B
10	C	A	B	D
11	D	B	A	C
12	B	D	C	A

figuur 1
Voorbeeld van
de SomSoms
voor een groep
van twaalf
leerlingen

Zodra de parameters bepaald zijn, kan het materiaal gemaakt worden:

- iedere leerling krijgt een unieke route langs de opdrachten (SomSom, zie figuur 1);
- de opdrachten;
- uitwerkingsblad/-formulier.

Maak voor de bespreking na afloop een overzicht van de opgaven in PowerPoint of op het Smartboard, of print de opdrachten op een groot vel en plak ze op het bord.

Mogelijke opdrachten

Graag geef ik wat ideeën voor mogelijke opdrachten. Bij de normale verdeling kan gekozen worden uit opdrachten als 'Bereken de oppervlakte', 'Bereken het gemiddelde', 'Bereken de standaardafwijking' en 'Bereken de grenzen'. Bij exponentiële en/of logaritmische functies kan men denken aan 'Bereken exact voor welke x de functies gelijk zijn', 'Stel de formule van de raaklijn op', 'Bereken de oppervlakte'. In figuur 2 zien we vier voorbeeldopdrachten; op www.vakbladeuclides.nl/896barents vindt u ook de uitwerkbladen. Het voordeel van uitwerkbladen is dat de leerlingen de uitwerking van de opdracht in het daarvoor bestemde vak kunnen schrijven. Zo krijgt iedere leerling een uitwerkblad met voor iedere opdracht een eigen uitwerking. Dit maakt het bespreken makkelijker.

Globaal lesplan

Omdat een nieuwe werkvorm de eerste keer onwennig kan aanvoelen of onzeker kan maken, geef ik hierbij een mogelijk lesplan. Een werkvorm heeft een grotere kans van slagen als de docent gelooft in de werkvorm en vertrouwen heeft in de uitvoering. Dit lesplan kan daarbij helpen.

Voorbereiding:

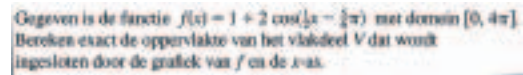
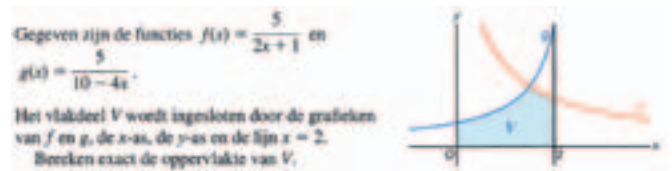
- zorg voor het materiaal;
- vorm in het lokaal met tafels al de groepjes en leg het materiaal neer.

Bij binnenkomst:

- Geef iedere leerling een SomSom en geef aan dat ze naar de tafel moeten met de eerste letter erop of leg deze bij de juiste opdracht (de eerste letter geeft aan waar de SomSom moet liggen);
- Geef aan wat de werkvorm is: 'Je zit bij een opdracht en je krijgt daar m minuten voor. Na m minuten ga je naar de volgende letter op de SomSom. Schrijf je eigen uitwerking op het uitwerkblad. Als alle ronden geweest zijn, bespreken we het. Als het zover is, geef ik je aan hoe we dat aanpakken'.

Start:

- de leerlingen beginnen met opdracht 1. Na m minuten krijgen de leerlingen het signaal dat ze door mogen naar de volgende opdracht (volgens hun eigen SomSom). Dit gaat door tot alle leerlingen alle opdrachten hebben gedaan.



figuur 2 Voorbeeld van vier opgaven die als opdrachten kunnen dienen

Bespreking

Als het goed is, hebben alle leerlingen hun uitwerkingen op hun uitwerkblad staan. Er zijn meerdere manieren om de opgaven te bespreken. Voordat de bespreking klassikaal begint, is het mogelijk om te kiezen voor de volgende opties:

- laat de leerlingen in de groep waar ze eindigen de uitwerkingen bespreken. Hierbij kan de opdracht meegegeven worden dat voor iedere opgave een uitwerking wordt gemaakt waar de hele groep achter staat;
- laat de leerlingen voor de opdracht waar ze eindigen hun eigen ideale uitwerking maken.

Vervolgens is het mogelijk om als docent de uitwerkingen te laten zien, of per groep een leerling aan te wijzen die op het bord of mondeling vertelt wat de uitwerking is. Belangrijk is dat voor alle onderdelen er voldoende tijd is om ze uit te voeren tijdens de les. De afsluiting in de vorm van de bespreking is erg belangrijk. Dit rondt de fijne les perfect af.

Ten slotte

Naast mogelijke drempels:

- ontstaat er geen chaos vanwege het lopen?
- gaan ze niet kletsen?
- welke opdrachten zijn geschikt?
- kost het niet veel voorbereidingstijd?

Wil ik graag vertellen waarom deze drempels er eigenlijk niet hoeven te zijn. Het is goed voor leerlingen om te bewegen in de les. Na iedere ronde komen ze los van de opdracht die ze net gemaakt hebben. Daardoor komt er ruimte in het hoofd voor aandacht voor de volgende opdracht. Door de afbakening door tijd raken de leerlingen gemotiveerd. Als de tijd kort genoeg genomen wordt, blijft de aandacht op de opdrachten. Doordat iedereen steeds in een andere samenstelling zit, wordt kletsgedrag met vrienden voorkomen. De opdrachten komen altijd uit het boek: vergelijkingen, kansopdrachten, oppervlakte- en inhoudsopdrachten. Hierdoor is de voorbereidingstijd slechts het zorgen dat het op papier komt, en het kost geen extra tijd in het lesprogramma, integendeel.

Daarnaast hebben leerlingen aan het eind alle opdrachten in ieder geval gezien en geprobeerd. Er zijn drie categorieën te onderscheiden in de groep:

1. de leerling weet hoe de opgave moet en kan dat snel;
2. de leerling weet hoe de opgave moet, en heeft meer tijd nodig dan gegeven;
3. de leerling weet niet goed hoe de opgaven opgelost moet worden.

Bij deze werkvorm is leerling 1 net klaar binnen de tijd, heeft leerling 2 het (net) niet af, en een serieuze uitwerking is in de maak, leerling 3 is blij dat er klasgenoten zijn die kunnen helpen of dat de tijd voorbij is, en weet dat hij nog wat harder moet studeren op de stof.

Dan wil ik eindigen met de vraag: wanneer gaat uw klas genieten van wiskunde met *Speeddaten*?

Over de auteur:

Mariken Barents is docente wiskunde aan het Goois Lyceum te Bussum. E-mailadres: mbarents@hotmail.com

KLEINTJE DIDACTIEK

DE HERONTDEKKING VAN DE STICKERS

Ik controleer huiswerk in 6 vwo. Nou ja, eigenlijk controleer ik vooral hoe het huiswerk wordt gemaakt, wat een subtiel maar belangrijk verschil is. Ik gebruik dit om leerlingen waar nodig feedback te geven, gesprekken met ze te hebben over huiswerk maken, werkdruk, afspraken met jezelf nakomen (en wat het met je zelfvertrouwen doet als je je eigen afspraken niet nakomt), enzovoort. Kortom: ik gebruik het om ze voor te bereiden op volgend jaar als ze losgelaten worden op de universiteit. Preken doe ik nooit, afspraken maken en leerlingen prijzen als ze die nakomen, dat wel. Bij het maken van de afspraken wil ik ook dat die reëel zijn. Dus geen beloften dat alles morgen is ingehaald als het om 40 opgaven gaat. En ook geen beloften dat het huiswerk over vijf dagen af is als in het weekend aan twee praktische opdrachten en het profielwerkstuk moet worden gewerkt. Dan spreek ik liever af dat de leerling tien opgaven maakt, en prijs ik de leerling de hemel in als het gelukt is. Vaak heeft die leerling het werk dan niet alleen af, maar ook nog meer.

Laatst vroeg een leerling mij: 'Krijg ik dan ook een

sticker?' 'Ja hoor', antwoordde ik. 'Ik heb thuis nog wat stickers voor mijn basisschoolleerlingen.' Maar zelfs die uitspraak schrikte niet af. Ik ben toch maar even naar de HEMA gegaan voor wat mooie plaatjes van paarden, honden en katten, en ook tekstballonnetjes enzovoort bedoeld voor fotoboeken. Tot mijn grote verrassing is dit stickerbeleid een groot succes. Leerlingen komen zelf het huiswerk laten zien voor een sticker, vinden de glimmende stickers het mooist en willen het liefst dat ik elke les huiswerk controleer (en stickers uitdeel).

Ik had dit stickerbeleid wel eens eerder uitgetoetst in de eerste of tweede klas, maar daar lachten ze me uit; vééél te kinderachtig. Navraag bij collega's van andere scholen leert mij dat veel meer collega's stickers uitdelen in de bovenbouw. En niet alleen voor huiswerk. Maar daarover een andere keer meer.

Lonneke Boels

$$a^2 + b^2 = c^2$$

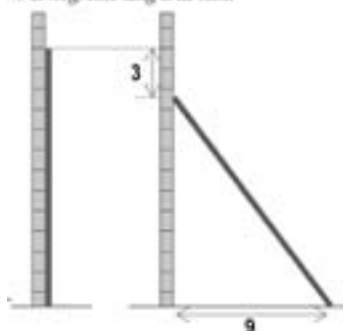
Hoe het leerplan wiskunde er over honderd jaar uit zal zien, is moeilijk te voorspellen. De stelling van Pythagoras, die het al zo'n 2000 jaar heeft uitgehouden, lijkt wel een zekerheid. Of is zij een 'dood paard' dat ooit begraven zal worden? Maar de stelling is rijk vanwege de diverse aspecten: meetkunde, algebra, getaltheorie. In dit tweede artikel belicht Martin Kindt het thema *uitvinden & oefenen*.



Babylonische wiskunde

Twee millennia terug was wat wij de stelling van Pythagoras noemen al bekend aan de Babylonische wiskundigen. Dat blijkt uit meetkundige problemen zoals die op kleitabletten beschreven staan. Een voorbeeld van zo'n opgave is:^[1]

Een stok staat recht tegen een muur.
Schuif ik het bovineinde 3 el naar
beneden, dan schuift het onderveinde
9 el weg. Hoe lang is de stok?

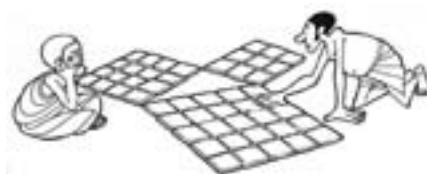


Een hedendaagse oplossing van dit vraagstuk gaat als volgt: stel de stoklengte x en pas Pythagoras toe. Dat geeft dan $(x - 3)^2 + 9^2 = x^2$. Uitwerken en er komt $6x = 90$ ofwel $x = 15$.

Is dit geen mooie oefening die meetkunde en algebra verenigt? Eén van de redenen waarom het onderwijs in algebra zo weinig vruchten afwerpt, is – naar mijn onbescheiden mening – dat er geïsoleerd wordt geoefend en dat er te weinig aandacht is voor het gebruik van algebra bij rekenkundige of meetkundige problemen. De Babyloniërs werkten veelal met vuistregels. In het geval van de glijdende stok: neem de helft van de som van de kwadraten van de glijfstanden 3 en 9 en deel de uitkomst vervolgens door de verticale afstand 3. Om die vuistregel te verklaren, is algebra van iets meer kaliber nodig. Stel het bovineinde is verschoven over een afstand a en het benedeneinde over een afstand b . Dat leidt tot de vergelijking $(x - a)^2 + b^2 = x^2$. Met als gevolg: $2ax = a^2 + b^2$. Hiermee is de regel voor ons helder geworden. Hoe de Babyloniërs hebben gedacht, blijft in het ongewisse. Maar een puike oefening in algebra voor onze leerlingen is het zeker.

Driehoeken leggen

In de periode 1976–1980 ontwikkelden we op het Freudenthal Instituut (toen nog IOWO) leerstofpakketjes die in eerste instantie werden getest op een proefschoon voor 'lager economisch en administratief onderwijs'. Een van de pakketjes had als titel *Pythagoras*. Een inleidende opdracht daarin was om, zoals de tegelzetter in het plaatje, driehoeken te leggen met vierkanten geknipt uit ruitjeskarton.



Er werd daarbij gekeken naar de aard – scherp, recht of stomp – van de hoek gelegen tegenover het grootste vierkant. Inventarisatie van een lange lijst gevallen leidde tot het vermoeden dat bij een rechthoekige driehoek het vierkant op de lange zijde evenveel ruitjes telt als de andere twee vierkanten samen. Er waren ook twijfelgevallen, zoals de vierkanten van 4 bij 4, 7 bij 7 en 8 bij 8, waarbij het moeilijk te zien is dat de hoek tegenover het grootste vierkant wat minder dan 90° is. Een betere manier om de behoefte aan een bewijs te laten voelen is er niet! Een intuïtief direct te snappen bewijs beschreef Multatuli in zijn *Ideeën*.

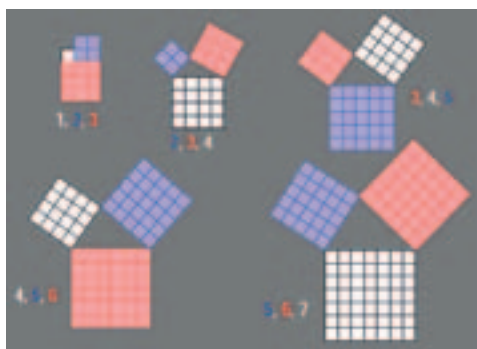


Voor de goede verstaander zijn woorden overbodig! Alleen al vanwege de vele fraaie bewijzen – ik vind dat je op school er minstens drie zou moeten behandelen – mag de stelling van Pythagoras van mij eeuwig in het programma blijven. Bovendien denk ik dat het goed is om in een vroeg stadium de gevallen $a^2 + b^2$ groter of kleiner dan c^2 te bekijken. Letterlijk logischerwijs pak je dan ook

het omgekeerde van de stelling mee!

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Lex Schrijver^[2] noemt dit een van zijn twee favoriete formules; hij zegt dat zij door de eeuwen heen de algebra en de meetkunde heeft geïnspireerd. Een vraag die leerlingen tot een onderzoekje kan uitdagen, is of er nog andere rechthoekige driehoeken bestaan waarvan de zijden zich verhouden als opeenvolgende natuurlijke getallen. De aanschouwelijke aanpak met de uitgeknipte vierkanten doet meteen vermoeden dat dit niet het geval kan zijn.

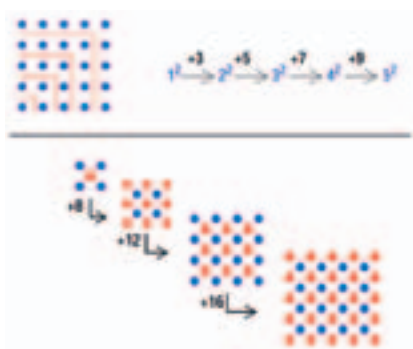


Hoe verder het drietal zich in de rij van natuurlijke getallen bevindt, hoe meer de driehoek op een gelijkzijdige driehoek zal gaan lijken....

Een rekenkundige aanpak, waarbij de groei van het kwadraat van het grootste getal wordt vergeleken met de groei van de som van de kwadraten van zijn onderburen, leidt tot:



en de conclusie is gauw getrokken. In mijn vorige artikel heb ik de figurale getallen aangestipt. Daarmee kan zichtbaar worden gemaakt dat de groei van kwadraten volgens de rij van oneven getallen verloopt en dat de sommen van kwadraten van twee opvolgende getallen met viervouden toenemen.



Voor een derde oplossing kies ik een algebra-weg. Drie opeenvolgende natuurlijke getallen kunnen worden voorgesteld door x , $x + 1$ en $x + 2$. De stelling van Pythagoras geeft de kwadratische vergelijking:

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$$

 gelijkwaardig met $x^2 - 2x - 3 = 0$
 Dus $x = 3$ of $x = -1$. Van de twee drietallen $(3, 4, 5)$ en $(-1, 0, 1)$ past alleen het eerste bij een driehoek. De vraagstelling had nog wat algemener gekund: zijn er pythagorese drietallen die een rekenkundig rijtje vormen? Het antwoord is weer nee en dat volgt het gemakkelijkst via de algebraïsche aanpak. Kortom, net als bij het vraagstuk in de aanhef van dit artikel is dit een goede algebra-oefening in een meetkundige context. Ik kan dit nog uitbouwen door naar de hoek te kijken die tegenover de grootste van de drie zijden x , $x + 1$ en $x + 2$ ligt. Het geschikte instrument hiertoe is de cosinusregel

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2 - 2x(x + 1)\cos\alpha$$

$$\text{Zo dat } \cos\alpha = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x(x + 1)} = \frac{x - 3}{2x}$$

Dit levert de volgende tabel:

x	$\cos\alpha$	α
1	-1	180°
2	-1/4	104,5°
3	0	90°
4	1/8	82,8°
5	3/10	78,5°
6	1/2	75,5°
7	2/7	73,4°
8	3/8	71,8°
9	4/9	70,5°
10	1/2	69,5°

Voor $x = 100$ geeft mijn GR de hoek 60,988°. Voor $x = 1000$ is dat 60,099°, de 60° komt in zicht! Dat $\cos\alpha$ tot $\frac{1}{2}$ nadert voor $x \rightarrow \infty$ volgt eenvoudig uit

$$\frac{x - 3}{2x} = \frac{x}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x}$$

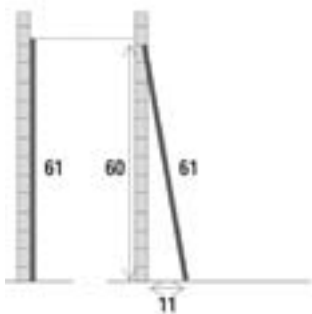
Meer pythagorese tripels

Het trio 3, 4, 5 is zonder twijfel het meest bekende voorbeeld van drie hele getallen die voldoen aan de formule van Pythagoras. Dat er oneindig veel van die tripels bestaan is al lang bekend. De Babyloniërs moeten al hebben beschikt over een recept om zulke tripels op te sporen. Hiervan getuigt het kleitablet *Plimpton 322* waarop vijftien pythagorese tripels staan met als grootste het indrukwekkende drietal 12709, 13500, 18541.^[1] Een aardige onderzoeksvraag voor leerlingen kan zijn: bestaan er buiten 3, 4, 5 nog pythagorese drietallen (ik noem ze voortaan kortweg *pythripels*) waarin twee opvolgende getallen voorkomen?

De rij oneven getallen leidt tot een fraaie oplossing. Immers, de som van een beginstuk van die rij is een kwadraat, dus als het laatste getal uit dat beginstuk zelf een kwadraat is, heb ik zo'n drietal te pakken.

$$\begin{aligned} 1+3+5+7+9 &= 3^2 \\ 1+3+5+7+9+11+\dots+23+25 &= 5^2 \\ 1+3+5+7+9+11+\dots+47+49 &= 7^2 \\ 1+3+5+7+9+11+\dots+47+81 &= 9^2 \end{aligned}$$

Er zijn dus oneindig veel pythripels te vinden waarvan de grootste twee getallen elkaar opvolgen. Een andere ingang is de formule bij de glijdende stok in het begin van het artikel. Door de top van een stok 1 el te laten zakken schuift het onderstuk k el op, waarbij ik eis dat k geheel is. Volgens de Babylonische formule is de lengte van de stok gelijk aan $\frac{1}{2}(k^2+1)$. Deze uitkomst is geheel als k oneven is. Bijvoorbeeld $k = 11$ geeft een stoklengte van 61 en daarmee het pythripel: 11, 60, 61.



Voor elke oneven k -waarde is het drietal

$k, \frac{1}{2}(k^2-1), \frac{1}{2}(k^2+1)$ een pythripel met de gewenste

eigenschap. Rechttoe-rechtaanalgebra werkt hier ook prima. Stel $x, y, y+1$ (met $x < y$) is een pythripel, dan volgt $x^2 = 2y+1$ (*). Het kleinste getal van zo'n pythripel is dus de wortel uit een oneven kwadraat en bij elk oneven getal kan dan direct zo'n tripel worden bepaald. Dit onderzoek naar speciale pythripels heeft een voor de hand liggend vervolg: zijn er buiten 3, 4, 5 ook (oneindig veel) pythripels, waarvan de kleinste twee getallen elkaar opvolgen? Het antwoord is ja, zie bijvoorbeeld 20, 21, 29. Algebra leidt hier tot de diophantische vergelijking:

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2 \quad (**).$$

Deze is echter aanmerkelijk lastiger op te lossen dan de vorige vergelijking (*). Nu staat een pythripel van de vorm $x, x+1, y$ borg voor een rechthoekige driehoek die zeg maar quasi-gelijkbenig is. De gedachte dat de oplossingen iets met rationale benaderingen van $\sqrt{2}$ te maken hebben, is dus niet zo gezocht.

De Griekse wiskundigen hebben al geworsteld met het probleem om $\sqrt{2}$ met breuken te benaderen. Plato noemt in *Politeia* als eerste benadering de breuk $\frac{7}{5}$.

Merk op dat die breuk kan worden gevonden via de klassieke 3, 4, 5-driehoek door 3 en 4 op te tellen. Als ik dit idee toepas op een rechthoekige driehoek met zijden $x, x+1, y$ dan zou de breuk met teller $2x+1$ en noemer y een benadering moeten opleveren voor $\sqrt{2}$.

Dus $(2x+1)^2$ zou dan dicht bij $2y^2$ moeten liggen. Dit brengt mij op het idee om (**) zo om te werken:

$$2x^2 + 2x + 1 = y^2 \leftrightarrow (2x+1)^2 + 1 = 2y^2$$

Stel $d = 2x+1$ en er komt $d^2 - 2y^2 = -1$, een zogeheten Pell-vergelijking. Bij een geheeltallige oplossing (d, y) noemt Plato 'd de rationale diagonaal van het vierkant met zijde y .' Proklos (411-485) schrijft in zijn commentaar op Plato's werk dat men een nieuw 'zijde-getal' kan vinden door y en d op te tellen en een nieuw diagonaalgetal door bij d tweemaal y op te tellen. Dat is dus de transformatie (zeg P) met: $y \rightarrow y + d = Y$ en $d \rightarrow 2y + d = D$.

Er volgt (algebra!): $D^2 - 2Y^2 = -(d^2 - 2y^2)$.

Theon van Smyrna (rond 100 na Chr.) gebruikte P om

steeds beter wordende benaderbreuken $\frac{d}{y}$ voor $\sqrt{2}$ te

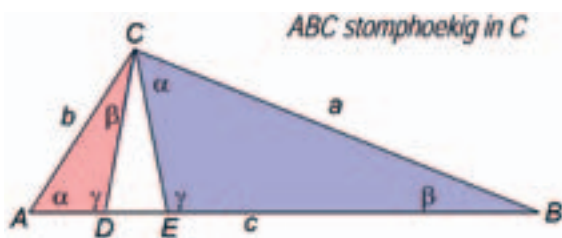
vinden, uitgaande van $y = 2, d = 3$. Teller en noemer voldoen dan beurtelings aan $d^2 - 2y^2 = \pm 1$. Alleen de oplossingen van de vergelijking met -1 in het rechterlid geven rechthoekige driehoeken $x, x+1, y$. Om hiervan een rij oplossingen te vinden pas ik P^2 toe: $y \rightarrow 3y + 2d$ en $d \rightarrow 4y + 3d$ en dat geeft: de rij paren, uitgaande van $y = 5, d = 7$: $(5, 7) \rightarrow (29, 41) \rightarrow (169, 239) \rightarrow \dots$ en na splitsing van het grootste getal in twee opvolgende hele getallen leidt dit tot de pythripels: $(3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169), \dots$ Er zijn dus ook oneindig veel pythripels waarvan de kleinste twee getallen elkaar opvolgen. Het derde tripel was al aan de Babyloniërs bekend, het staat als eerste genoteerd op het kleitablet *Plimpton 322*!

Dood paard weer springlevend

De informaticus Edsger Dijkstra (1930-2002), bekend van het Dijkstra-algoritme voor het vinden van het kortste pad, schreef met regelmaat spitse stukjes in handschrift die hij een EWD-nummer meegaf. Nummer 975 heeft een paar jaar terug in het *Nieuw Archief* gestaan en gaat over de stelling van Pythagoras, door hem een dead horse genoemd, maar die hij tot leven wekt door haar in deze vorm te gieten: $\text{Sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{Sgn}(a^2 + b^2 - c^2)$ Hierin stellen a, b en c de lengten van de zijden van een willekeurige driehoek voor en α, β en γ de tegenoverliggende hoeken. Sgn (ook wel signum) is de functie op de reële getallen gedefinieerd door:

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

De waarde van $\text{Sgn}(\alpha + \beta - \gamma)$ zegt of de driehoek stomp-, recht-, dan wel scherphoekig is. Dijkstra's formulering van de stelling van Pythagoras zou je 'zes vliegen in één klap' kunnen noemen. De stelling van Pythagoras en zijn omgekeerde corresponderen met het geval $\text{Sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = 0$. De andere twee gevallen geven noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor het stomp- of scherphoekig zijn van een driehoek. Dijkstra geeft een elegant bewijs van zijn zesklapper. Om de hoekensom $\alpha + \beta$ te vergelijken met γ zet hij α en β uit tegen de benen a en b van hoek ACB , zoals in de figuur voor het geval $\alpha + \beta < \gamma$.



Er zijn nu drie α , β , γ -driehoeken in de figuur en die zijn uiteraard gelijkvormig. De oppervlakten van gelijkvormige driehoeken verhouden zich als kwadraten van overeenkomstige zijden, dus als a^2 , b^2 en c^2 . Is $\alpha + \beta < \gamma$, dan opp. BCE + opp. ACD < opp. ABC en vice versa. De tweede ongelijkheid is op zijn beurt gelijkwaardig met $a^2 + b^2 < c^2$.

Analoog voor de gevallen $\alpha + \beta = \gamma$ en $\alpha + \beta > \gamma$. Klaar! Een werkelijk prachtig bewijs dat je de leerlingen niet zou mogen onthouden. Niet als enige en niet als eerste, stel ik mij voor, maar als het ultieme bewijs. Dat oppervlakten (inhouden) van figuren bij vermenigvuldiging worden vergroot met het kwadraat (derde macht) van de vermenigvuldigingsfactor is sowieso een belangrijk principe waarvan ik trouwens niet zeker ben of dit in het onderwijs wel voldoende aandacht krijgt. Er hoeven ook geen vierkanten op de zijden van een rechthoekige driehoek te worden geplaatst; elk drietal gelijkvormige figuren is even goed. Die uitbreiding van de stelling van Pythagoras komt ook in de *Elementen* van Euclides voor (boek 6, propositie 31). En Hippocrates (430 v. Chr.) moet er al van hebben geweten, want hij gebruikte dit bij de constructie van zijn 'maantjes':



De oppervlakte van de halve cirkel op de schuine zijde is gelijk aan de som van de oppervlakten van de halve cirkels op de rechtshoekszijden en daaruit volgt dat de twee blauwe maantjes samen evenveel oppervlakte hebben als de rode driehoek. Welbekend, maar daarom niet minder mooi. En als je het in de context van de kwadratuur van de cirkel plaatst, kan dit een boeiend stukje onderwijs opleveren.

Uitvinden en oefenen

Geleide heruitvinding (*guided reinvention*) is een van de leidende principes van realistisch wiskundeonderwijs (RME). Het boekje *Pythagoras* waaraan ik refereerde was op die leest geschoeid. Behalve de activiteit met de uitgeknipte vierkanten werd ook het spijkerbord gebruikt, waarop rechthoekige driehoeken met elastiekjes konden worden gespannen en via de oppervlakten van vierkanten op de zijden kwam Pythagoras tot leven. In onze tijd kan dat natuurlijk net zo makkelijk met een geschikte applet. Maar goed, het leidde vanzelf ook tot berekeningen met vierkantswortels en de ontdekking dat je bijvoorbeeld met een elastiekje wel een vierkant met oppervlakte 13 kon insluiten, maar niet één met oppervlakte 3. Dat alles in een klas die nu onder vmbo zou vallen. In een gymnasiomklas bood het de mogelijkheid om daar wat dieper mee te gaan. Dat er geoefend moest worden in het bepalen van oppervlakten van figuren met roosterhoekpunten of met toepassingen van de stelling van Pythagoras – ook in de ruimte – spreekt vanzelf. Het was ook een van mijn eerste ervaringen met wat wel 'eigen producties' wordt genoemd. Nanda Querelle, lerares in klas 2 leao, vroeg de leerlingen om elk een 'contextopgave' met Pythagoras te bedenken en in te leveren. De beste vier of vijf zouden dan op het proefwerk komen. Het was een groot succes. Naast kleine aanpassingen van opgaven uit het boek waren er heel originele inzendingen en die werden natuurlijk in het proefwerk opgenomen. Heb ik de lezer-leraar op een idee gebracht?

Noten

- [1] Van der Roest, A., & Kindt, M. *Babylonische Wiskunde*, Zebrareeks nr. 20.
- [2] Mols, B. (2007) *Opgelost*, Veen Magazines.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar; ook na zijn pensioen is hij nog medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: m.kindt@uu.nl

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

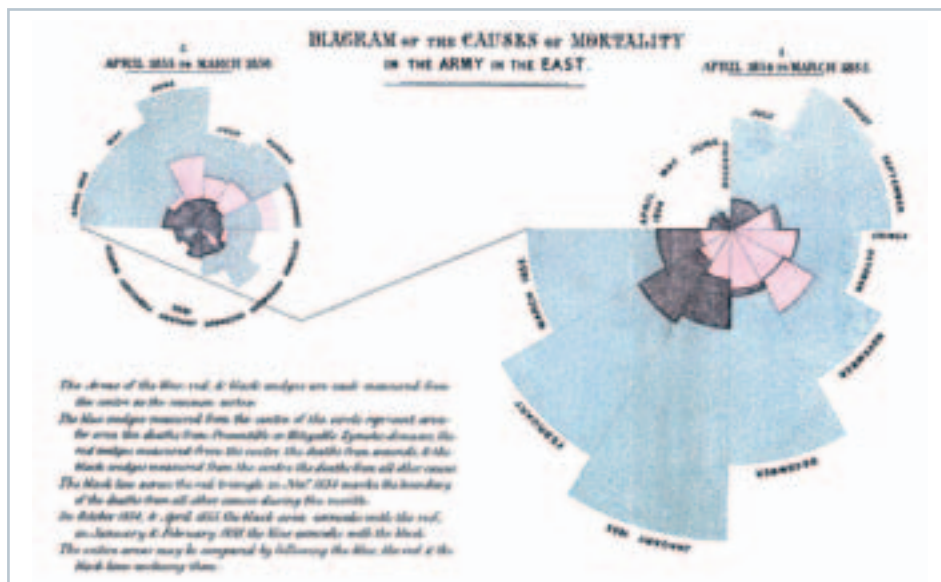


Grafische weergaven van statistische data zijn tegenwoordig heel gewoon. Het is aan het wiskundeonderwijs van de laatste decennia te danken dat statistische grafieken in kranten en tijdschriften gewoon zijn geworden. Vóór de jaren zeventig van de twintigste eeuw was dit hoogst ongebruikelijk. In meer geleerde periodieken werd wel eens statistische data gepresenteerd, maar veelal in tabelvorm.

Wie zich verdiept in de geschiedenis van statistische grafieken stuit allereerst op de naam van Florence Nightingale (1820-1910). Nightingale is tegenwoordig niet meer zo'n heel bekende naam. Mensen die haar kennen, hebben veelal een opleiding in de medicijnen of de verpleging gevolgd. In die kringen staat zij bekend als de verpleegster die tijdens de Krimoorlog gewonde soldaten verpleegde. In die hoedanigheid is ze bekend als *the lady with the lamp*, en staat ze model voor de opofferingsgezindheid van de verpleegkundige. Onder de mensen met een academische medicijnen-achtergrond is zij soms ook bekend als degene die furore maakte met taartdiagrammen. Dan staat ze model voor het moderne onderzoek aan medische ingrepen. Beide beelden gaan voorbij aan een belangrijke verandering in de negentiende-eeuwse westerse cultuur die zich laat kenmerken

door een toenemend vertrouwen in de zeggingskracht van cijfers. Vertrouwen in statistische gegevens sprak niet vanzelf voor de negentiende-eeuwse mens. Vertrouwen werd gesteld in de familie en in God; vertrouwen kon men hebben in de adellijke heersers die namens God het bewind over landen voerden. Die laatste macht was tanende. Meer democratisch georiënteerde partijen ontleenden niet per se minder houvast aan God en familie, maar zagen hun belangen beter vertegenwoordigd bij een gekozen staatshoofd. Het waren deze groeperingen die ook meer belang stelden in statistiek.

Eind achttiende eeuw, ten tijde van de Franse revolutie, was voor het eerst gepoogd om op basis van statistieken overheidsbeleid te voeren. De gelijkheidsgedachte die achter het verzamelen van de data zat, was nog dermate weinig bekend, dat veel van de prefecten die de data moesten aanleveren juist kwalitatieve gegevens leverden, in plaats van de kwantitatieve waarom werd gevraagd. Het project strandde zodoende op een gebrek aan vergelijkbare gegevens. Toch was het idee op kleine schaal succesvol. In de vroege negentiende eeuw werden door tal van lokale organisaties statistieken gebruikt. De best bekende is wel de hygiënistebeweging, die bestond uit diverse groepen van uiteenlopende politieke pluimage,



figuur 1 Taartgrafiek
Florence Nightingale

die pleitten voor de aanleg van riolering en waterleiding, om daarmee de gezondheidssituatie in de grote steden te bevorderen. Nightingale kwam uit een gegoede Britse familie. Haar ouders hadden connecties in regeringskringen en zij was dus in een uitstekende positie om de waarde van statistische gegevens te promoten. Tijdens de Krimoorlog verzamelde zij statistische data met dat doel. De tabellen konden de Britse regering echter evenmin overtuigen van het nut om actie te ondernemen, als de berichten in de krant. Door de informatie in grafieken weer te geven, wist Nightingale de Britse regering wel te overtuigen. De blauwe wiggen geven het aantal sterfgevallen weer van Britse soldaten die aan de gevolgen van een besmetting overleden. Die konden relatief eenvoudig worden voorkomen door te zorgen dat er in de veldhospitalen schoon water werd gebruikt en steriel werd gewerkt. Met name de verhouding met de rode (sterfte aan wonden) en zwarte (overige) wiggen had het gewenste effect. Voor hetzelfde geld kon er een veel grotere inspanning worden geleverd in de oorlog, was de boodschap die aansloeg. Het leidde onder andere tot de beslissing om bij bevoorrading van regimenten ook rekening te houden met waterwagens.

De statistische representaties die Nightingale gebruikte, maakten deel uit van een aantal bewuste pogingen van Victoriaanse statistici om vat te krijgen op het overheidsbeleid. De grafieken toonden de correlatie tussen de sterfgevallen en de hygiënische omstandigheden helemaal niet aan. Op de eerste plaats moest de lezer natuurlijk vertrouwen op de achterliggende wijze waarop de gegevens waren verzameld, maar door de manier waarop ze in de grafieken waren weergegeven werd een mate van exactheid gesuggereerd die tot de verbeelding sprak.

De idee om statistische data grafisch weer te geven was al veel eerder gebruikelijk. William Farr (1808-1883) had in een eerdere publicatie over de temperatuur en het aantal doden in Londen een vergelijkbare grafiek geproduceerd. Vanaf het begin van de negentiende eeuw werden dit soort grafieken gemaakt om overheden te overtuigen van het nemen van bepaalde maatregelen. Gebruik van statistiek, en daarmee het gebruik van grafische representaties, was vooral een onderdeel van pogingen van individuen en groeperingen uit de middenklasse om het overheidsbeleid te beïnvloeden. Voor overheden gold in de negentiende eeuw dat statistische gegevens niet per se overtuigden. Daar was een voorvechterster van het kaliber Nightingale voor nodig. Ook in andere landen zien we dat het vertrouwen in mensen met ervaring en de juiste politieke connecties zwaarder woog dan statistische informatie. Dat gold in Nederland bijvoorbeeld met betrekking tot inpolderingen: statistische data met betrekking tot neerslag – van invloed op de capaciteit van de pompen die nodig waren om polders droog te houden – werd door de overheid in 1830 als irrelevant terzijde geschoven.



figuur 2 William Farr, taartgrafieken ca 1850
(bron Wellcome Library, Londen)

Toen tijdens de tweede helft van de negentiende eeuw overheden overstag gingen – niet toevallig viel dat veelal samen met de democratische revoluties van 1848 – won statistische informatie snel aan populariteit. Wetgeving met betrekking tot de berekening van verzekeringspremies dicteerde vanaf de tweede helft van de negentiende eeuw bijvoorbeeld in vrijwel alle Europese landen dat een verzekeringswiskundige de premiecalculaties moest nazien en dat de gebruikte tabellen openbaar werden gemaakt. Verzekeraars die niet-gecertificeerde tabellen gebruikten, kregen geen autorisatie van de overheid. Begin twintigste eeuw hadden alle westerse landen een statistische dienst actief die de overheid gevraagd en ongevraagd van cijfers voorzag. Rond 1970 was statistiek een onderdeel dat als vanzelfsprekend in het wiskundeonderwijs aan bod kwam. Dat we tegenwoordig zo vaak statistische diagrammen aantreffen in populaire media betekent dat het wiskundeonderwijs succesvol aan de geschetste cultuuromslag heeft bijgedragen. De lessen over de manier waarop je met statistische representaties voor de gek kunt worden gehouden zijn – wegens het succes van statistische grafieken – de meest recente reactie van het wiskundeonderwijs op een van haar eigen geesteskinders. Waar de nieuwe ontwikkelingen met *big data* ons heenvoeren wat betreft het wiskundeonderwijs zal de toekomst nog moeten leren. Duidelijk is dat op dit vlak de overheid in elk geval al om is. Daar is weinig lobby voor nodig geweest.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

METAFOREN BIJ HET LEREN VAN WISKUNDE

Joop van Dormolen

OF...WAAROM ZEGGEN WE NIET GEWOON WAT WE BEDOELEN?

Dit artikel is een bewerking van de voordracht die Joop van Dormolen gaf ter gelegenheid van het uitkomen van het nieuwe *Handboek wiskundendidactiek*. Deze voordracht ging over het gebruik van dagelijkse taal bij wiskundige onderwerpen. In dagelijkse taal wordt dikwijls gebruikgemaakt van uitdrukkingen die, letterlijk opgevat, als onzin worden ervaren. Maar in overdrachtelijke zin brengen die uitdrukkingen betekenis in de taal.

Voorbeelden:

- ... ook al kent de wiskunde nóg zoveel verschillende *facetten* en ook al zijn er nóg zoveel *aanknopingspunten* met de meest *uiteenlopende* disciplines, toch blijft de wiskunde uiteindelijk één *geheel*.^[1]
- Voor een *bredere* bespreking van die *achterliggende* theorieën wordt verwezen naar dit hoofdstuk 1, ...^[1]
- De *bedrukte* uitdrukking op haar gezicht was een gevolg van het *rechtlijnige* gedrag van haar baas.
- Bij het *vallen* van de avond werd het koeler.
- De spreker *onderstreepte* zijn betoog met de opmerking, dat het hier ging over de *fundamenten* van een *gezonde* samenleving.
- Na een paar jaar hard werken was zij eindelijk *uit*^[2] de schulden.

De cursief gedrukte woorden zijn zo gewoon in onze dagelijkse taal, dat het

ons niet meer opvalt dat de zinnen als complete onzin zouden worden ervaren, als de woorden letterlijk opgevat zouden worden.

We zijn er aan gewend

zulke woorden niet letterlijk te nemen. We weten dat het niet gaat om de letterlijke betekenis van de gebruikte begrippen, maar om bepaalde eigenschappen ervan; eigenschappen die van toepassing zijn.

Ook de taal waarmee we over wiskunde praten en schrijven kent zulke woorden.

Bijvoorbeeld zo iets als:

- De *wortels* van de *vergelijking* $x^2 = 1$ zijn 1 en -1.
- Als twee lijnen in het platte vlak een gemeenschappelijk punt hebben dan zeggen we dat ze elkaar *snijden*.
- Van die hoek staan de *benen* loodrecht op elkaar.

De woorden in deze voorbeelden die cursief zijn geschreven zijn woorden die in oorsprong uit een andere context komen.

Bijvoorbeeld:

- het woord *wortel* wordt hier gebruikt omdat er een analogie is met het begrip wortel in de plantenwereld;
- het woord *snijden* wordt hier gebruikt omdat er een analogie is met het snijden van een mes;
- het woord *benen* wordt hier gebruikt omdat er een analogie is met lichaamsdelen.

Iets dergelijks is er aan de hand met de andere cursieve woorden in de voorbeelden, ook in de voorbeelden waarmee dit artikel begint. Steeds wordt een woord gebruikt dat niet zijn oorspronkelijke betekenis heeft, maar waarvan de eigenschappen een zekere analogie hebben met de eigenschappen van het woord in de oorspronkelijke betekenis. Zulke woorden worden metaforen genoemd.^[3]

Men zou kunnen opmerken dat het in de praktijk helemaal geen analogieën zijn, omdat ze zodanig zijn ingeburgerd dat iemand zich helemaal niet realiseert dat het in

oorsprong weldegelijk metaforen waren. Dat is voor de meeste mensen inderdaad het geval. Er is hier sprake van *dode metaforen*.^[4] Maar dat is niet bij iedereen zo. Ik was eens in gezelschap van een niet-Nederlander die bezig was Nederlands te leren en in verwarring raakte toen ik opmerkte dat het bij het vallen van de avond ineens een stuk koeler werd. Mijn gezelschap kon zich moeilijk een avond voorstellen, die aan het vallen is.

Daarmee ben ik aan het doel van dit artikel. Het gaat er hier niet om te analyseren wat een metafoor taalkundig te betekenen heeft. Het gaat nu om het feit dat het gebeuren kan dat mensen een uitdrukking letterlijk nemen, terwijl deze metaforisch bedoeld is. Dat komt ook voor bij het leren van wiskunde. Hier volgen een paar voorbeelden die echt gebeurd zijn.

'HET DOET JE BESEFFEN DAT HET GEBRUIK
ERVAN PROBLEMEN KAN GEVEN BIJ HEN DIE
HET VAK AAN HET LEREN ZIJN'

- Bij een van de eerste lessen over meetkunde in de brugklas, merkte ik op: ‘Door twee punten kun je niet meer dan één lijn trekken.’ Ik wilde bewust niet een meer correcte (maar abstractere) taal gebruiken, zoals bijvoorbeeld: ‘Bij elk tweetal verschillende punten bestaat er precies één rechte lijn die met die punten incident is’. Een van mijn leerlingen protesteerde. Ze zette twee stippen op een blad papier, legde haar liniaal erlangs en strepte meerdere keren met een potlood langs de liniaal. Ze bewees daarmee dat je door twee punten heel veel lijnen kan trekken. Wat als metaforisch bedoeld was, vatte zij letterlijk op.
- Een collega vertelde me eens dat een leerling hem vroeg wat $\sqrt{5}$ met wortels te maken had.
- Het kostte me als leraar een tijd om te realiseren wat er aan de hand was met antwoorden die mijn leerlingen gaven op de vraag: Welk getal wordt door de functie $x \rightarrow 2x + 3$ aan de getallen 2, 5, 10 toegevoegd?
Er kwam meermalen het antwoord: 9, 18, 33. Een van de leerlingen wilde het me wel uitleggen: ‘Je neemt bijvoorbeeld vijf. Twee maal vijf is tien. Tien plus drie is dertien. Voeg dat toe aan vijf: dertien plus vijf is achttien’. In het Nederlands heeft ‘toevoegen’

twee verschillende betekenissen. De oorspronkelijk betekenis is zoiets als ‘er bij laten horen’, zoals bijvoorbeeld in ‘Jan is als tolk toegevoegd aan de commissie Buitenland’. De afgeleide andere betekenis is zoiets als ‘er bij doen’, zoals in: ‘Een theelepel zout aan de soep toevoegen’. Mijn leerlingen gebruikten deze tweede betekenis en vertaalden ‘toevoegen’ als ‘optellen’. Zij gebruikten het woord ‘toevoegen’ als metafoor, terwijl het letterlijk bedoeld was in de oorspronkelijke betekenis. Ik heb daarna het woord ‘toevoegen’ nooit meer gebruikt in deze context.

- In mijn eigen studie raakte ik eens compleet geblokkeerd, toen er in het college ‘Groepen, Ringen en Lichamen’ verteld was, dat de verzameling gehele getallen een voorbeeld was van een ring. Een medestudent kon het me uitleggen: ‘Je moet niet denken aan de verzameling van gehele getallen, maar aan een eindige verzameling. Bijvoorbeeld de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5 met de plus als optelling en de maal als vermenigvuldiging. Bij optellen kom je telkens weer terug bij nul: $2 + 1 = 3$, $2 + 2 = 4$, $2 + 3 = 5$, $2 + 4 = 0$, $2 + 5 = 1$, enzovoort. De getallen staan in een ring. Net zoiets als bij de klok.’ Ik begreep dat (en waarom) het woord ‘ring’ een metafoor was.

Meer snelheid en gebruiksgemak. Tegen een lagere prijs.

De HP 39gII grafische rekenmachine biedt het.

Gebruiksgemak.

De HP 39gII werkt niet alleen intuïtief, maar geeft de uitkomsten ook nog eens erg snel. Niet lang hoeven wachten om een grafiek te plotten, maar meteen door kunnen gaan met uw werkzaamheden. Daarnaast is op elk moment een interactieve help-functie oproepbaar, die in het Nederlands antwoord op uw vragen geeft.

De 39gII is goedgekeurd door de CvE en mag dus gewoon tijdens examens gebruikt worden!

Lagere prijs.

De HP 39gII biedt dus meer, voor minder. Als school betaalt u slechts €69.95, waarmee een duidelijk goedkoper alternatief kan worden geboden.

Interesse?

Bent u als school geïnteresseerd om de voordelen van de HP 39gII zelf te ervaren? Neem dan contact met ons team op en wij zorgen voor een gratis ‘school-kit’ met daarin 5 rekenmachines, quick start guides, handleidingen en oefenmaterialen. Indien gewenst, is er een team van professionals beschikbaar om een demo te geven op uw school. Toch niet tevreden? Dan betaalt u ook niks!

Voor meer informatie neemt u contact op met info@hpcalcs.com



Preparation and Copyright: MORAVIA Education, a division of MORAVIA Consulting Ltd.
www.moravia-consulting.com
www.hpcalcs.com

Date of issue: 04.2014

Een uitdrukking kan dus

- letterlijk geïnterpreteerd worden terwijl hij ook letterlijk bedoeld is;
- letterlijk geïnterpreteerd worden terwijl hij overdrachtelijk bedoeld is;
- overdrachtelijk geïnterpreteerd worden terwijl hij letterlijk bedoeld is;
- overdrachtelijk geïnterpreteerd worden terwijl hij ook overdrachtelijk bedoeld is.

Toen ik in de wiskunde aan het zoeken was naar uitdrukkingen die in oorsprong metaforisch bedoeld zijn, werd ik verbaasd door het grote aantal van zulke uitdrukkingen. Het doet je beseffen dat het gebruik ervan problemen kan geven bij hen die het vak aan het leren zijn. Hier is een lijst met zulke woorden.

Wortel van een getal
Imaginaire getallen
Lichaam
Lijn
Reële getallen
Wortel van den vergelijking
Vectorveld

Kegel
Breuk
Snijdende lijnen
Vlak
Benen van een hoek
Negatieve getallen
Ruit

De moeder de vrouw

Ik ging naar Bommel om de brug te zien.
Ik zag de nieuwe brug. Twee overzijden
die elkaar vroeger schenen te vermijden,
worden weer burens. Een minuut of tien
dat ik daar lag, in 't gras, mijn thee gedronken,
mijn hoofd vol van het landschap, wijd en zijd –
laat mij daar midden uit de oneindigheid
een stem vernemen dat mijn oren klonken.

Het was een vrouw. Het schip dat zij bevoer
kwam langzaam stroomaf door de brug gevaren.
Zij was alleen aan dek, zij stond bij 't roer,

en wat zij zong hoorde ik dat psalmen waren.
O, dacht ik, o, dat daar mijn moeder voer.
Prijs God, zong zij, Zijn hand zal u bewaren.

Worteltrekken
Ring
Punt
Limiet
Gelijkbenige driehoek
Determinant
Gehele getallen

Het is de moeite waard om een van deze woorden te nemen en een dialoog te verzinnen tussen een leraar die zich niet bewust is van het metaforische karakter, en een leerling die nog niet geleerd heeft het woord als metafoor in een wiskundige context te plaatsen.

Waarom kunnen de mensen niet gewoon zeggen wat ze bedoelen?

Het antwoord is: Dat doen ze nou juist. We kunnen niet zonder metaforen. Probeer maar eens een woord uit het bovenstaande lijstje te vervangen door woorden die niet metaforisch opgevat hoeven te worden. Probeer hetzelfde met de zinnen waar dit artikel mee begonnen is. Het zal niet eens in alle gevallen lukken en als het wel lukt, is het resultaat zo abstract dat maar weinigen zullen begrijpen wat je bedoelt. Mensen leren vanuit hun ervaringen. Er zijn voorbeelden nodig om de bedoeling duidelijk te maken en heel dikwijls zijn voorbeelden alleen maar te vinden in een vreemde context, zoals wortel, vlak, ring, snijden, uit de schuld, facetten van wiskunde, gelijkbenige driehoek, achterliggende theorieën, ...

Tot zover gaat dit artikel over situaties in de wiskundetaal. Elk vak, maar vooral ook de gewone dagelijkse taal, kan niet zonder metaforen. Dichters gebruiken metaforen om duidelijk te maken wat ze willen zeggen. Ze kunnen niet anders. Hier volgt een voorbeeld van een gedicht van Martinus Nijhoff (1894–1953) dat je letterlijk kunt opvatten als een verhaaltje. Maar dan is het geen gedicht meer ...

Noten en referenties

- [1] Drijvers e.a. (2012), *Handboek wiskundendidactiek*. Epsilon.
- [2] Het woord 'uit' heeft in letterlijke zin betrekking op een ruimtelijke situatie, net zoals 'in', 'voor', 'links', 'onder', enz. In de uitdrukking 'uit de schulden' wordt gedaan alsof 'schulden' een ruimtelijk object is. Net zoals als bij 'op de hoogte zijn', 'onder invloed rijden', 'uitleggen', 'zich in het probleem verdiepen', 'bij de tijd zijn'.
- [3] Metaforen zijn niet de enige vorm van overdrachtelijke taal. Er zijn ook andere, zoals analogie en metoniem. Ook die spelen een rol bij het leren van wiskunde. Maar daarover een andere keer.
- [4] Merk op dat het woord 'dode' ook een metafoor is.

De moeite waard om te lezen:

en.wikipedia.org/wiki/Metaphor
nl.wikipedia.org/wiki/Metafoor
en.m.wikipedia.org/wiki/Metaphors_We_Live_By
Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors We Live By*. University of Chicago Press, Chicago (Ook als e-boek te krijgen bij Amazon.com)

Over de auteur

Joop van Dormolen was van 1955–1971 leraar wiskunde, natuurkunde en kosmografie aan verschillende lycea en van 1969–1993 docent didactiek van de wiskunde aan de Rijksuniversiteit Utrecht. Hij woont sinds 1994 in Israël. E-mailadres: joop_v@netvision.net.il

UITDAGENDE PROBLEMEN

TWEE DENKACTIVITEITEN

Jacques Jansen

In dit artikel gaat Jacques Jansen met havo 4 wiskunde B op zoek naar het plaatje achter een formule: hoe ziet een koppelingsplaat eruit? En met vwo 5 wiskunde D wordt er gerekend aan een ander tastbaar probleem: een gevouwen A4'tje.



Koppelingsplaat

'Hoe ziet een koppelingsplaat eruit, jongens?' vraag ik aan havo 4 wiskunde B, bij de bespreking van een huiswerkopgave over een koppelingsplaat. Tot mijn grote ontsteltenis reageert niemand. Dat had ik niet verwacht. In zo'n groep zou je toch minstens een paar bromfietsmoniteurs moeten aantreffen. Mooi niet dus.

De opgave, zie figuur 1, staat in de tiende editie van *Moderne Wiskunde* bij de gemengde opdrachten in het allereerste hoofdstuk over het opstellen van vergelijkingen. Ik behandelde deze echter al verschillende keren bij de negende editie. De opgave stond toen in hoofdstuk 2, *Algebra of rekenmachine*, bij de paragraaf *Wortelvergelijkingen oplossen*. De context en de vragen zijn bij de tiende editie hetzelfde gebleven. De formulering van de vragen is wat bijgesteld. Bij beide edities staat geen foto van een koppelingsplaat. We zien bij het begin van het jaar in havo 4 dat een formule meteen in de stam van een opgave gepresenteerd wordt. Als ik in de les naar het gemaakte huiswerk kijk, zie ik dat er van deze opgave niet veel terecht is gekomen. Ze vinden het erg moeilijk. Maar waarom eigenlijk?

Om mijn leerlingen te motiveren voor deze lastige vraag, vertel ik hen in mijn klassengesprek dat je een voorstelling van een koppelingsplaat kunt krijgen door de formule te herschrijven. Eigenlijk is dat onderdeel c al. Daar

doe je een aantal stappen, die je heel zorgvuldig moet uitvoeren. Dat kan met een *uitlegmatrix*, waarbij ik de rechterkolom deels heb ingevuld. Leerlingen krijgen dat van mij op papier uitgereikt, zie figuur 2. Alle acties laten we vergezellen door de vraag: waarom doen we dit? Leerlingen noteren dat in de rechterkolom.

Formule/resultaat	Actie	Waarom doe je dat?/Reflectie
$r = \sqrt{\frac{Q}{\pi} + 9}$	Kwadrateren	Wortel wegschrijven
$r^2 = \frac{Q}{\pi} + 9$	Linker- en rechterlid verwisselen	
$\frac{Q}{\pi} + 9 = r^2$	9 aan beide kanten aftrekken	Proberen om oppervlakte Q links van het gelijkteken vrij te krijgen
$\frac{Q}{\pi} = r^2 - 9$	Vermenigvuldigen met factor π	
$Q = \pi(r^2 - 9)$	Haakjes verdrijven	
$Q = \pi r^2 - \pi \cdot 9$	9 als een kwadraat schrijven	
$Q = \pi r^2 - \pi \cdot 3^2$	Interpretëren	

figuur 2 De uitlegmatrix bij deze opgave

figuur 1 Opgave uit het boek over een koppelingsplaat

- 54 Voor het verband tussen de straal r in cm en de oppervlakte Q in cm^2 van de koppelingsplaat van een motor geldt de formule $r = \sqrt{\frac{Q}{\pi} + 9}$.
- Van een motor heeft de koppelingsplaat een oppervlakte van 50 cm^2 . Bereken hoe groot de straal is van deze koppelingsplaat.
 - Van een andere motor is de straal van een koppelingsplaat gelijk aan $6,23 \text{ cm}$. Bereken hoe groot de oppervlakte van deze koppelingsplaat is.
 - Herleid de formule waarbij je Q in r uitdrukt.
 - De koppelingsplaat van een auto heeft een oppervlakte die twee keer zo groot is als die van een bromfiets. Beredeneer met behulp van de formule of de straal ook twee keer zo groot is.



figuur 3 Vorm koppelingsplaat

Maar naast de algebraïsche verrichtingen willen we nu door de formule heen kijken. We vervolgen het klassengesprek. 'Zie je nu aan de geschreven formule $Q = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot 9$ hoe die koppelingsplaat eruit moet zien?' Nee dus, niet iedereen herkent de oppervlakte van een cirkel. Verder was voor de leerlingen de formule nog niet voldoende herleid. Er was nog één stap nodig met als resultaat: $Q = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot 3^2$. De plaat is dus ringvormig met een diameter groter dan 6 cm maar wel met steeds een

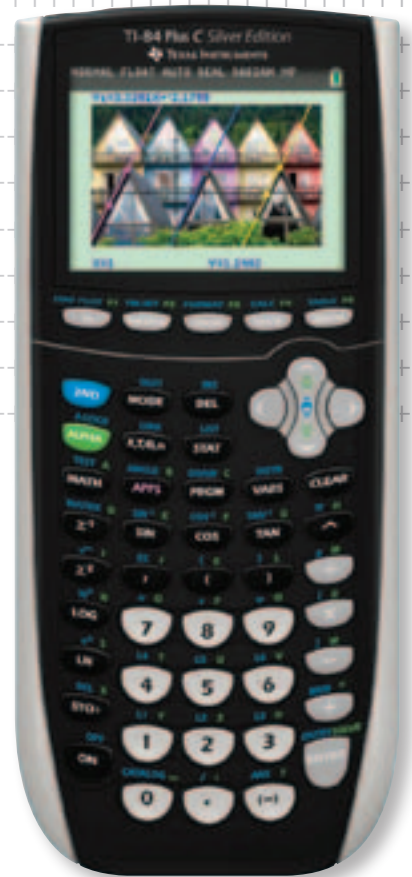
De nieuwe TI-84 Plus-C *silver edition*

Is nu beschikbaar, bestel 'm vast!

- Met backlight kleurenscherm, oplaadbare batterij en lader
- Met Examenstand/Geheugen-blokkering
- Ook weer met TI-SmartView, maar nu met kleur!
- Gratis upgrade uw huidige zwart-wit SmartView naar kleur

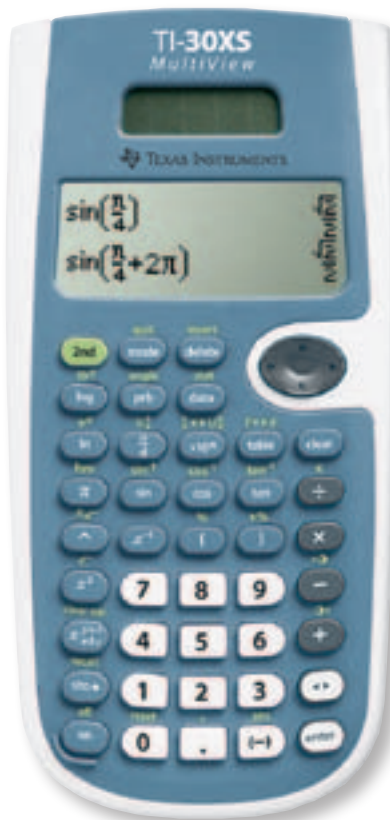
Zeer aantrekkelijke lerarenaanbieding

voor € 69,-. Met gratis TI-SmartView software voor beamer of digibord.



*Goedgekeurde grafische rekenmachines voor het
Centraal Eindexamen havo/vwo:*

- TI-83 Plus en TI-84 Plus
- TI-84 Plus C Silver Edition
- TI-Nspire CX



Nieuw! Nu ook lerarenaanbieding voor de wetenschappelijke rekenmachine TI-30XS MultiView.

Machine + SmartView software voor projectie met beamer of digibord voor slechts € 20,-

- > Mail voor aanbiedingsformulieren en/of meer informatie naar ti-cares@ti.com
- > Kijk ook op www.education.ti.com/nederland

zelfde ronde opening met een diameter van 6 cm. We gaan *GeoGebra* inzetten met schuifparameter r om de leerlingen inlevingsgevoel te geven voor de onderdelen a en b, zie figuur 3. Er zijn blijkbaar koppelingsplaten van verschillende grootte.

'Is dat gat met diameter 6 cm altijd even groot?' vraag ik aan de leerlingen. Gezien vraag 54d denken de auteurs in elk geval dat die 6 cm onafhankelijk is van of de motor in een auto of bromfiets zit. In de klas wordt hier verschillend over gedacht.

Uitdaging voor de lezer

Het is van belang dat een leerling niet alleen algebraïsche verrichtingen kan doen met een formule, maar ook door een formule kan heen kijken, of anders gezegd de formule kan interpreteren. Als je puur algebra wilt doen, kun je net zo goed de context weglaten. Daarom de volgende uitdaging voor u als lezer: schrijf een opgave met *koppelingsplaat* als context en met de volgende vier voorwaarden:

- geschikt voor havo 4 wiskunde B;
- intro met eventueel een kort filmpje;
- de formule wordt niet meteen gepresenteerd, maar leerlingen gaan zelf een formule opstellen;
- de vragen moeten betrekking hebben op de context. Wellicht kan ik de mooiste inzending presenteren in ons vakblad.

A4'tje vouwen

We bekijken het volgende probleem:

De lange zijde van een A4'tje is $\sqrt{2}$ maal zo groot als de lengte van een korte zijde. Neem voor de lengte van de korte zijde 21 cm.

Een A4'tje wordt gevouwen langs één van de diagonalen. Er ontstaat een symmetrische figuur met twee toppen die dezelfde afstand hebben ten opzichte van de vouwlijn, zie figuur 5. Er is een vijfde hoekpunt bijgekomen.

- Schat hoeveel procent van het papier na het vouwen nog zichtbaar is.
- Bereken exact hoeveel procent van het papier na het vouwen nog zichtbaar is.

Dit probleem had ik als denkactiviteit aan mijn 5 vwo-leerlingen wiskunde D aangeboden, met een kleine aanpassing. Ik had letters bij de vijf hoekpunten gezet. Linksonder B , rechtsonder D . De bovenste hoekpunten van links naar rechts A , S en C . Vervolgens onderstaande vragen:

- bereken de afstand van punt S tot vouwlijn BD ;
- bereken de grootte van hoek ASC ;
- onderzoek hoeveel procent van het papier na het vouwen nog zichtbaar is;
- bedenk nog een andere vraag en los die op.



figuur 4 Een gevouwen A4'tje

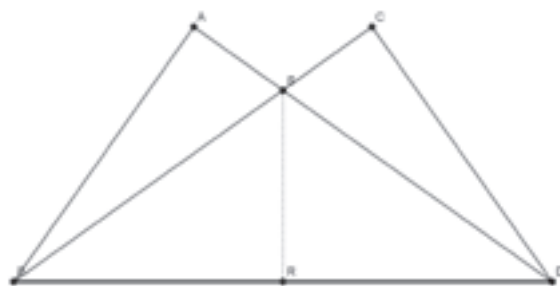
Het zou leuk zijn om een elegante oplossing te krijgen bij deze denkactiviteit.

Strategie Jeroen uit 5 vwo

Hieronder volgt de uitwerking van Jeroen in zijn eigen taalgebruik. Jeroen ziet er een goniometrie probleem in. Zie ook figuur 5. Op de notaties en tussentijdse afrondingen valt wel wat af te dingen, maar het is wel heel overzichtelijk. Het rekenwerk is wellicht ingegeven door mijn eigen vraagstelling.

- de korte zijde = 21 cm;
- lange zijde = $21\sqrt{2} = 29,7$ cm;
- de diagonaal = $\sqrt{(21^2 + 29,7^2)} = 36,4$ cm;
- je hebt de lijn loodrecht op BD dat punt S snijdt. Die lijn snijdt BD op een punt (laat zeggen punt R);
- de figuur is symmetrisch;
- dus $RB = \frac{1}{2}DB = 18,2$ cm;
- hoek CBD is in dit geval $\tan^{-1}(DC/CB)$;
- $DC/BC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is hoek CBD , $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 35,3^\circ$;
- SR is dan $18,2 \cdot \tan(35,3) = 12,9$ cm.
- hoek $CBD = 35,3^\circ$. Hoek $BRS = 90^\circ$;
- dus hoek $BSR = 180 - 90 - 35,3 = 54,7^\circ$;
- driehoek BRS is congruent met driehoek DRS . Dus hoek $DSR = 54,7^\circ$;
- punt S : X -hoeken, hoek $ASC = 2 \cdot 54,7 = 109,5^\circ$.

figuur 5



- zichtbaar: totale opp. van A4 – opp. BSD;
- totale opp. = $21 \cdot 21\sqrt{2} = 623,7 \text{ cm}^2$;
- opp. driehoek BSD = (basis $\times$ hoogte)/2 = $(36,4 \times 12,9)/2 = 234,8 \text{ cm}^2$;
- dus na vouwen nog $623,7 - 234,8 = 388,9 \text{ cm}^2$ zichtbaar;
- $(388,9/623,7) \cdot 100\% = 62,4\%$.

Strategie collega

Een bevriende collega offert zich op, maakt de vouwopgave en heeft de volgende strategie bedacht met behulp van het opstellen van vergelijkingen. Hieronder zijn eigen tekst:

- probleem is simpel, reduceer alles met een factor 21;
- trek de lijnen BC en AD. Stel $SC = x$;
- verder is $BD = \sqrt{3}$;
- nu: $SD = \sqrt{x^2 + 1} = BS = \sqrt{2} - x$, vervolgens kwadrateren;
- conclusie $x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, in werkelijkheid $x = \frac{21}{4}\sqrt{2}$;
- opp. zichtbaar stuk = opp.(BCD + BSA) =

$$21 \times 21 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) = 21 \times 21 \times \frac{5}{8} \times \sqrt{2};$$

- opp. A4 is $21 \times 21 \times \sqrt{2}$. Dus zichtbare stuk is $\frac{5}{8} \times 100\% = 62,5\%$;
- $\tan(\angle ASB) = 2\sqrt{2}$ dus $\angle ASB \approx 71^\circ$;
- $\angle ASC \approx 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$.

Reflectie

Ik vind het achteraf gezien belangrijk om het vouwprobleem zo open mogelijk aan te bieden. Alleen die twee vragen a) en b) dus, om onnodige berekeningen zoveel mogelijk te voorkomen. Het is belangrijk dat leerlingen zelf tot modelleren komen, een schets maken van de vijfhoek en letters zetten bij de vijf hoekpunten. Inderdaad, dat doen ze niet gauw uit zichzelf. Stimuleren dus en leerlingen voldoende tijd geven. Veel leerlingen hebben een aanpak die op die van Jeroen lijkt. Ze hebben niet de neiging om een variabele in te voeren en vergelijkingen op te stellen. Maar het kan ook anders.

Eerst het schatten. Als je het gevouwen papier goed bekijkt, zie je dat het zichtbare deel het halve A4'tje is met een uitsteeksel in de vorm van een rechthoekige driehoek (SCD). De schatting is dan gauw gemaakt: 50% én een deel van 50%. Je hoeft alleen te schatten hoeveelste deel SC is van lange zijde BC. Driehoek SCD heeft immers dezelfde hoogte als driehoek BCD. Laten we zeggen een kwart (met vouwen zie je dat al gauw), dus de zichtbare oppervlakte wordt dan 50% en een kwart van 50%, totaal 62,5%.

Nu nog de exacte berekening:

- korte kant als eenheid nemen, dus $CD = 1$ en $BC = \sqrt{2}$;

- driehoek BRS is gelijkvormig met driehoek BCD (gemeenschappelijke hoek en een rechte hoek), dus geldt $\frac{BS}{BR} = \frac{BD}{BC}$;
- invullen geeft $\frac{BS}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ dus $BS = \frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{4}BC$ en dus $SC = \frac{1}{4}BC$;
- oppervlakte in procenten van zichtbare deel = $50\% + \frac{1}{4} \cdot 50\% = 62,5\%$.

Bij de hele wiskundige actie is het belangrijk om het papier ook daadwerkelijk in je handen te hebben. Bij de nabespreking van het vouwprobleem vind ik het betekenisvol om de verschillende strategieën te bekijken en leerlingen te laten bepalen wat een elegante oplossing is. Eerst goed kijken en niet meteen gaan rekenen.

Tot slot

Kijken we naar het toekomstige wiskunde B-programma, dat vanaf september 2015 in werking gaat, dan is het interessant om een strategie te bedenken voor het vouwprobleem met behulp van analytische meetkunde. Probeer u maar om met een geschikt assenstelsel tot een oplossing te komen. Hebt u zelf ook een uitdagend vouwprobleem, met een interessante didactische ervaring? Laat het ons weten.

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar wiskundedocent. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. Hij heeft speciale belangstelling voor de wiskundendidactiek. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

HET FIZIER GERICHT OP...

REKENGROEN

Vincent Jonker
Monica Wijers

In Fzizer belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering bespreken Vincent Jonker en Monica Wijers het project RekenGroen: rekenmodules voor de groene sector van het vmbo en mbo.



De invoering van de referentieniveaus rekenen met verplichte toetsing heeft consequenties voor het hele onderwijs, dus ook voor het onderwijs in vmbo en mbo in de groene sector. In deze sector – voorheen bekend als het agrarisch onderwijs – kunnen leerlingen na de onderbouw van het vmbo kiezen voor diverse beroepsrichtingen: plant & productie, ontwerp & creatie, leefomgeving & recreatie, voeding & gezondheid en dier & zorg. Ook een groen-breed programma is mogelijk, waarbij een combinatie gemaakt wordt van alle vakken.

Hoewel in vmbo-groen wiskunde een verplicht vak is, is daarnaast behoefte ontstaan aan een passend rekenprogramma. Vragen die daarbij spelen zijn: hoe kan er extra aandacht aan rekenen gegeven worden, passend bij de sector? Hoe kan het rekenonderwijs gericht op referentieniveau 2F in het groene vmbo (klas 3 en 4) en mbo eruit zien?

Op de achterkant van een pak meststof staat het volgende doseringsadvies.

Doseringsadvies	
bladgroenten, knolgewassen, koolsoorten	
meststof	0,15 kg/m ²
bonen en erwten	
meststof	0,05 kg/m ²
kruiden	
meststof	0,10 kg/m ²
fruit	
meststof	0,20 kg/m ²

Hoeveel kilogram meststof moet je toedienen wanneer je 20 m² bonen teelt?

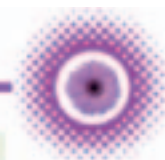
figuur 1 Opgave uit het CSPE Landbouw breed voor vmbo-4 (2011)

Deze vragen zijn beantwoord in het project *RekenGroen*. In dit project zijn op initiatief van de AOC Raad (de brancheorganisatie van alle Agrarische OpleidingsCentra in Nederland) door het Freudenthal Instituut, in samenwerking met het Ontwikkelcentrum voor het groene onderwijs, rekenmodules ontworpen die passen bij het onderwijs in de sector Groen.^[1] Vanaf najaar 2010 is gewerkt aan

de ontwikkeling van vier rekenmodules.^[2] Drie daarvan zijn thematische rekenmodules in een groene context: *Stadsboerderij*, *Tuincentrum* en *IJsfabriek*. In deze modules komen de verschillende rekenonderwerpen gemengd aan bod. De thema-modules zijn elk rond een groter thema uit de sector groen opgebouwd, om een brug te kunnen slaan tussen het rekenen uit referentieniveau 2F en dat wat er binnen de praktijkvakken gebeurt. Daarnaast is er nog een aparte extra rekenmodule waarin specifieke rekenonderwerpen uit referentieniveau 2F centraal staan, zoals procenten, inhoud en maten. In deze rekenmodule zijn als afsluiting van elk onderwerp enkele opgaven uit de Centraal Schriftelijke en Praktische Examens (CSPE's) van de beroepsgerichte programma's in het vmbo opgenomen. In de CSPE's werd en wordt namelijk al volop gerekend binnen de context van het beroep, zoals te zien is in het voorbeeld in figuur 1.

Het doet daarom geen recht aan de praktijk om te constateren, zoals sommigen doen, dat rekenen voor deze leerlingen nieuw is en dat niveau 2F onhaalbaar is. Om leerlingen die moeite hebben met rekenen te ondersteunen, is in het RekenGroen-materiaal getracht zowel het rekenen voor het CSPE als het rekenen voor 2F aan bod te laten komen.

In de pilots met het materiaal en de scholingsbijeenkomsten voor docenten is geconstateerd dat zowel rekendocenten als docenten van praktijkvakken de thema-modules in kunnen zetten om rekenen meer betekenis te geven, door het te koppelen aan een voor hen herkenbare (beroeps)context. Voor het gebruik van het RekenGroen-materiaal zijn verschillende scenario's beschreven en uitgetest in de pilots. We geven een voorbeeld van het scenario waarin de praktijkdocent en de rekendocent hun onderwijs afstemmen aan de hand van het hoofdstuk *Kwekerij* uit de module *Tuincentrum*. In het betreffende hoofdstuk staat in een aantal opdrachten de kiemkracht, ofwel het kiempercentage, centraal. Dit is een belangrijk begrip in de praktijklessen *Plant*. De leerlingen vullen in het praktijklokaal zaaibakjes



Kiempercentage

Het kiempercentage geeft aan hoeveel procent van de zaden ontkiemd is. Het kiempercentage is minstens zo belangrijk als de prijs.



2. Hoe groot is het kiempercentage van de vier plantjes hierboven? Waarom?

3. Wanneer er 1 van de 10 zaden niet ontkiemd is, hoe groot is dan het kiempercentage? Laat je berekeningen zien.

figuur 2 Een kenmerkende opgave uit de module Tuincentrum van het RekenGroen-materiaal

met een verschillend aantal zaden. Na een week wordt bekeken hoeveel zaden zijn opgekomen en welk bakje het beste resultaat laat zien. Daarbij komt de noodzaak tot verhoudingsgewijs vergelijken naar voren. Voor het bepalen van de kiemkracht bij die verschillende aantallen zaden blijkt de overgang naar percentages vanzelfsprekend te zijn. In de rekenles wordt vervolgens ingegaan op het begrip kiempercentage, met een verwijzing naar de zaaibakjes (die natuurlijk meegenomen kunnen worden). Vervolgens worden de opgaven uit de module gebruikt om hiermee te oefenen. Leerlingen gebruiken daarin onder andere verhoudingstabellen om kiempercentages te berekenen en te vergelijken.

De extra rekenmodule is ontworpen om een aantal lastige rekenonderwerpen nog eens apart te kunnen belichten. Ook voor het gebruik van deze rekenmodule naast de thematische modules is een werkwijze voorgesteld. Het voorstel is om te beginnen met een verankering van het rekenen in de beroepspraktijk, zoals in de themamodules is uitgewerkt. Vervolgens kan extra oefenstof worden aangeboden om de lastige onderwerpen uit het rekenen nogmaals apart onder de aandacht te brengen. Dit is noodzakelijk voor een goede voorbereiding op de verplichte rekentoets in het vmbo en het examen rekenen in het mbo.

Dat het materiaal inderdaad voorziet in een behoefte, blijkt uit het feit dat momenteel zo'n tachtig scholen (voornamelijk vmbo-groen) het materiaal op een of andere manier inzetten in hun onderwijs (bijvoorbeeld als aanvulling op of als onderdeel van praktijklessen). De docenten,

die het lesmateriaal gratis kunnen downloaden maar de handleidingen met antwoorden en toetsen moeten aanvragen, geven aan dat de aansluiting met de praktijk hen bevalt. We illustreren dit met een citaat:

'Jullie modules zijn goed opgezet: goede praktijkvoorbeelden bij praktisch rekenwerk. Geweldig!'

Noten

- [1] In feite ligt het project in het verlengde van het project RekenVOort (2008), een initiatief van de NVvW en het Freudenthal Instituut, ondersteund door OCW, om zowel voor havo als voor vmbo rekenmaterialen te ontwikkelen voor leerlingen die geen wiskunde hebben. Voor het vmbo past het RekenVOort-materiaal bij de sectoren Zorg & Welzijn en Economie.
- [2] Deze modules zijn beschikbaar op de website www.rekengroen.nl

Over de auteurs

Vincent Jonker en Monica Wijers zijn beide werkzaam aan de Universiteit Utrecht (bij het Freudenthal Instituut en bij het Centrum voor Onderwijs en Leren). Samen met Mieke Abels en Elise van Vliet zijn zij auteur van het materiaal van *RekenGroen*. Verder zijn zij betrokken bij diverse ontwikkel- en onderzoeksprojecten voor rekenen/wiskunde in po, vo en mbo. E-mailadressen: v.jonker@uu.nl, m.wijers@uu.nl

Afgelopen december publiceerde het Cito het nationale PISA 2012-rapport. Ger Limpens en Ruud Stolwijk schreven het wiskundedeel van deze rapportage. Naar aanleiding daarvan geven ze in dit artikel een overzicht van het onderzoek, plaatsen de resultaten in de juiste context en noemen de belangrijkste conclusies. De auteurs doen daarbij vooral een oproep om tijdig de ingezette daling van het niveau in eigen land te stoppen.

Op 3 december 2013 werden overal ter wereld de nationale en internationale resultaten van PISA 2012 bekend gemaakt. Alle landen die deelnamen aan dit onderzoek publiceerden die dag hun nationale rapport en vanuit de OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) werd ook het internationale, overkoepelende verslag de wereld in gestuurd. In tegenstelling tot eerdere afleveringen was er dit jaar al iets uitgelekt en de media hadden daar dan ook al, voorafgaand aan de voornoemde datum, melding van gemaakt: de eerder zo onaantastbaar geleken positie van Finland binnen de *horse race ranking* die PISA in de ogen van sommigen ook wel is, bleek toch wat wankeler dan gedacht.

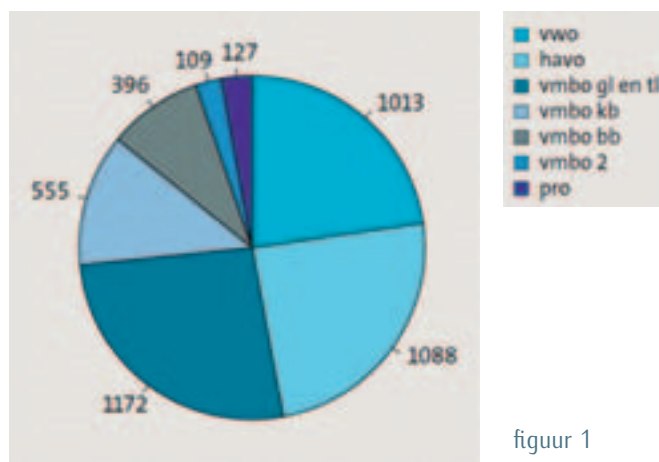
Inleiding

PISA is een initiatief van de OESO. PISA, een acroniem voor *Programme for International Student Assessment*, is een onderzoek dat zich op basis van een cyclus van drie jaren ten doel stelt de sleutelcompetenties van 15-jarige leerlingen te meten. Dit onderzoek vindt plaats sinds 2000 binnen de OESO-lidstaten maar ook andere landen/economieën haken in steeds grotere aantallen aan. In 2012 vormden de deelnemers ongeveer 90% van de wereldeconomie. Het uit PISA voortvloeiende beeld mag dus zeker 'wereldwijd' genoemd worden (al mag hierbij wel worden opgemerkt dat Afrika sterk ondervetegenwoordigd is binnen PISA).

PISA brengt drie soorten indicatoren in kaart:

- basisindicatoren, die een profiel geven van de kennis en vaardigheden van leerlingen;
- contextuele indicatoren, die tonen hoe zulke vaardigheden zich verhouden tot belangrijke demografische, sociale, economische en onderwijskundige variabelen;^[1]
- trendindicatoren, ontstaan uit de gegevens die om de drie jaar worden verzameld.

In ieder deelnemend land wordt een steekproef genomen van scholen, waarop vervolgens per school verschillende 15-jarige (wederom middels een steekproef gekozen) leerlingen vragen voorgelegd krijgen. Die vragen betreffen steeds drie terugkerende onderwerpen, te weten leesbaar-



figuur 1

digheid (in de moedertaal), wiskunde en natuurwetenschappen. Per PISA-afnamejaar wisselt het hoofdonderwerp. In 2012 was dat hoofdonderwerp, net als in 2003, wiskunde. Behalve de vakgerelateerde vragen kregen de leerlingen ook vragenlijsten voorgelegd die leidden tot de bovenvermelde contextuele indicatoren. In dat kader werden ook aan schoolleiders van de betreffende scholen vragenlijsten voorgelegd. Voor Nederland betekende dit dat 4460 leerlingen van 179 scholen deelnamen aan een toets die twee uur in beslag nam. Deze leerlingen kwamen, volgens een internationaal vastgestelde verdeelsleutel, uit alle vormen van middelbaar onderwijs. In figuur 1 is de verdeling over de verschillende onderwijstypen weergegeven.

In Nederland vond het onderzoek plaats in het voorjaar van 2012. Dit werd uitgevoerd door het Cito. Alle materiaal werd vervolgens door het Cito verwerkt en geschikt gemaakt voor verdere analyse door het internationale consortium dat in opdracht van de OESO de PISA-gegevens beheert.

Het doel van het PISA-onderzoek ten aanzien van wiskunde is het vaststellen van het niveau van wiskundige geletterdheid van 15-jarigen. In het verslag van PISA 2012^[2] treffen we de volgende definitie van wiskundige geletterdheid aan:

Wiskundige geletterdheid is het vermogen van een individu wiskunde in een diversiteit van contexten te kunnen formuleren, hanteren en interpreteren. Het bevat wiskundig redeneren en het gebruiken van wiskundige concepten, procedures, kennis en instrumenten waarmee verschijnselen beschreven, verklaard en voorspeld kunnen worden. Het helpt individuen de rol die wiskunde speelt in de wereld te herkennen en goed doordachte oordelen en beslissingen te nemen die noodzakelijk zijn voor opbouwende, betrokken en beschouwende burgers.

Er worden vier vakinhoudelijke domeinen onderscheiden binnen PISA-wiskunde: Vorm & Ruimte, Veranderingen & Relaties, Onzekerheid en Hoeveelheid. De namen van deze domeinen zijn wellicht wat bijzonder in de ogen van degene die bekend is met de standaardclassificaties bij wiskundige domeinen, maar nadere beschouwing leert al snel dat we hier eigenlijk met niets anders van doen hebben dan respectievelijk meetkunde, algebra, statistiek/kansrekening en rekenkunde.

Deze domeinen worden in verschillende soorten contexten aangeboden: contexten binnen de persoonlijke levenssfeer, beroepsmatige contexten, maatschappelijk gerelateerde contexten en wetenschappelijk georiënteerde contexten. Uit deze opsomming valt op te maken dat de wiskunde die bij PISA aan de orde gesteld wordt, altijd beoogt een niet-puur mathematische connotatie te geven. Er zijn dan ook maar weinig PISA-items waarbij er geen relatie gelegd wordt met de wereld buiten de wiskunde. Je zou kunnen zeggen dat de realistische wiskunde die in Nederland al diverse jaren opgeld doet, sterk overeenkomt met wat bij PISA aan de orde gesteld wordt. Die overeenkomst tussen de aanpak in het nationale curriculum en PISA is er zeker niet bij alle andere deelnemende landen: hoewel PISA zich juist niet richt op de inhoud van de curricula van de diverse landen, is het onmiskenbaar dat er nogal wat landen zijn waar de wijze waarop wiskunde in het onderwijs aan leerlingen wordt aangeboden fors verschilt met de presentatie van wiskunde binnen PISA.

Verder wordt er sinds PISA 2012 bij de rapportage ook aandacht geschonken aan wat je zou kunnen noemen drie verschillende wiskundige competenties: formuleren, toepassen en interpreteren. Om die rapportage te kunnen laten plaatsvinden, worden de wiskunderesultaten van alle deelnemende leerlingen op een schaal ondergebracht die gebaseerd is op de resultaten van de OESO-landen bij PISA 2003. Het gemiddelde van alle OESO-landen wordt op deze schaal op 500 geplaatst en de schaalbreedte wordt vervolgens zodanig aangepast dat de standaardafwijking van de OESO-wiskunderesultaten van 2003 overeenkomt met 100 op deze schaal. Door middel van ankeritems die door de jaren heen niet veranderen, is het mogelijk om ook de PISA-afleveringen na 2003 op deze schaal te plaatsen. Zodoende kunnen zowel vergelijkingen

tussen verschillende landen onderling als vergelijkingen van een land met zichzelf in de loop der jaren gemaakt worden.

Resultaten PISA 2012

In tabel 1 zien we de resultaten van de 'koplopers' van 2012. In alle PISA-tabellen wordt voortdurend het verschil gevisualiseerd tussen de OESO-landen enerzijds en de zogenoemde partnerlanden aan de andere kant. Het is opmerkelijk dat de top-vijf voor 80% uit vertegenwoordigers van deze partnerlanden bestaat: Zuid-Korea maakt als enige OESO-land deel uit van dit vijftal. Uit de tabel kunnen we ook aflezen dat Nederland het als vierde OESO-land in OESO-kader behoorlijk goed doet. En verder illustreert deze tabel ook meteen hoe je als land redelijk kunt 'shoppen' in de hoeveelheid data: Nederland doet het dan misschien niet uitzonderlijk goed in breed internationaal verband (ook niet bepaald slecht overigens) maar als je beperkt tot de OESO-landen,

Land	Gemiddelde	Standaardfout
Shanghai-China*	613	3.29
Singapore*	573	1.32
Hong Kong-China*	561	3.22
Taipei-China*	560	3.30
Zuid-Korea	554	4.43
Macao-China*	538	0.96
Japan	536	3.59
Liechtenstein*	535	3.95
Zwitserland	531	3.04
Nederland	523	3.47
Estland	521	2.02
Finland	519	1.94
Canada	518	1.84
OESO	494	
* Partnerlanden		

tabel 1

Subschaal	Positie op de ranglijst	Aantal landen boven NL (sign.)
Vorm & Ruimte	14	10
Veranderingen & Relaties	13	9
Onzekerheid	6	4
Hoeveelheid	7	4
Formuleren	10	7
Toepassen	13	7
Interpreteren	11	6

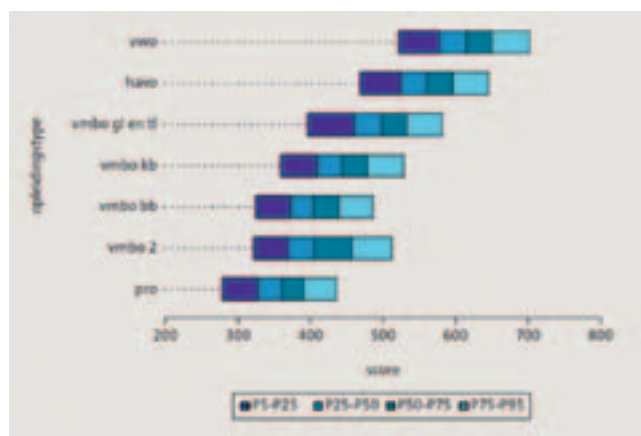
tabel 2

dan is die vermelde vierde plaats toch echt wel als eervol te betitelen. Zeker als dan ook nog opgemerkt wordt dat Nederland niet significant onderdoet voor Zwitserland: de onzekerheid waarmee iedere steekproef gepaard gaat, wordt gevisualiseerd door het grijze gebied 'om Nederland heen'. Van elk land in dit grijze gebied is niet met 95% zekerheid te zeggen of het beter/slechter is dan Nederland.

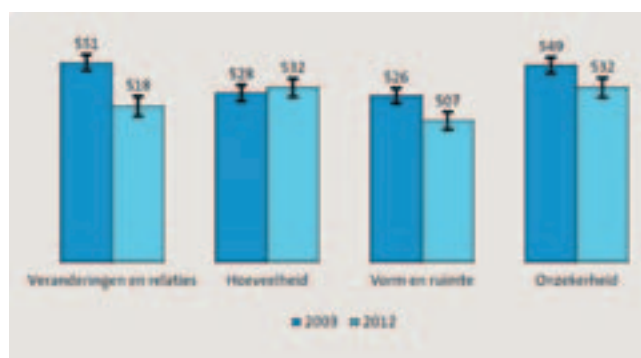
Ook op de verschillende domeinen en competenties wordt gerapporteerd. Zie hiervoor tabel 2. In deze tabel wordt de 'overall'-telling aangehouden: Nederland scoort, bijvoorbeeld, als nummer 6 op de internationale ranglijst (OESO + partnerlanden) van het domein Onzekerheid en er zijn vier landen in die lijst die het significant beter doen. De lijstjes spreken voor zich. Het is op zich wel opvallend dat de Nederlandse positie in de domeinen Vorm & Ruimte en Veranderingen & Relaties een stuk minder hoog is dan die bij de domeinen Onzekerheid en Hoeveelheid. Een verklaring hiervoor is er op dit moment niet: PISA signaleert, maar verklaart niet. Een vervolgonderzoek naar een verklaring zou alleszins de moeite waard kunnen zijn.

In figuur 2 zijn de verschillende opleidingstypen die we in het Nederlandse bestel kennen, op de PISA-schaal geplaatst: hierbij kunnen de vaardigheden van verschillende percentielen worden afgelezen. De leerlingen van, bijvoorbeeld, percentiel 25 tot percentiel 50 van vmbo scoren tussen ongeveer 375 en 400 op de PISA-schaal. Wat onmiddellijk opvalt, is dat de vaardigheid volgens PISA stijgt naarmate het onderwijsniveau stijgt – en dat is niet merkwaardig. Wat wel bijzonder is, is dat die verschillende onderwijstypes elkaar in vaardigheid niet zo fors ontlopen: zo heeft de groep vmbo GLTL-leerlingen tussen percentiel 75 en percentiel 90 een PISA-score die min of meer overeenkomt met de PISA-score van de havo-leerlingen die tussen percentielscore 25 en percentielscore 75 in zitten: die vmbo-leerlingen zijn, met andere woorden, in PISA-opzicht redelijke havo-leerlingen. Al met al is deze figuur onderbouwing voor de stelling dat we in Nederland wel behoorlijk de niveaus uit elkaar kunnen halen en er tussen die niveaus niet al te grote kloven voorkomen: de onderwijsniveaus lijken aardig op elkaar aan te sluiten.

In figuur 3 wordt Nederland, zo zou je kunnen zeggen, met zichzelf vergeleken in de loop der jaren. Omdat er gewerkt wordt met vaste ankeritems en er stevast met dezelfde schaal gewerkt wordt, kan behoorlijk eenduidig vastgesteld worden dat er wel degelijk iets gebeurd is in de loop van de afgelopen negen jaar. Op drie van de vier domeinen waar PISA meet, zien we de gemiddelde Nederlandse vaardigheid achteruitgaan. Niet fors en ook niet altijd significant (zie de 'verticale paaltjes' boven in de staven) maar opvallend is het wel. De vooruitgang die



figuur 2



figuur 3

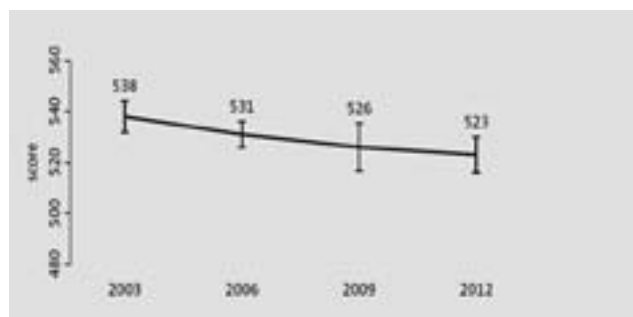
geboekt wordt bij het domein Hoeveelheid is overigens ook niet significant. Maar het feit dat Nederland zich bij dit domein iets anders manifesteert dan bij de andere drie domeinen zou wellicht verklaard kunnen worden door het feit dat dit domein, zoals eerder vermeld, redelijk overeenkomt met wat we in Nederland rekenen zouden noemen en juist het rekenen de laatste jaren in een verhevigde aandacht heeft gestaan. Die extra aandacht zou hier wellicht 'verzilverd' worden. Maar als we vervolgens uitzoomen naar het 'overall'-plaatje en Nederland op compleet wiskundegebied vergelijken met zichzelf in de loop der jaren en daar ook nog de tussenliggende PISA-jaren 2006 en 2009 bij betrekken (in die jaren werd er 'slechts' op het complete wiskundegebied bij PISA gerapporteerd en niet op de afzonderlijke domeinen) ontstaat de grafiek uit figuur 4.

Ook hier is er weer aandacht voor het feit dat we de significantiegrenzen niet uit het oog moeten verliezen, maar toch: er lijkt iets aan de hand met het gemiddelde niveau van de 15-jarige Nederlandse leerling in de laatste negen jaar. De gemiddelde PISA-score daalt onmiskenbaar. In het Nederlandse PISA-rapport worden enkele suggesties voor verklaringen gedaan:

- zien we hier een gevolg van het feit dat er juist in de laatste jaren een forse verschuiving van leerlingpopulaties heeft plaatsgevonden? Juist in het laatste decennium zien we een behoorlijke toename van het percentage h/v-leerlingen en een afname van het percentage vmbo-leerlingen binnen een leeftijdscohort. Het is denkbaar dat dit verschijnsel verantwoordelijk is voor de daling binnen elk onderwijsniveau afzonderlijk. En het is zelfs denkbaar dat dit verschijnsel verantwoordelijk is voor de daling van het totale niveau: denk daarbij aan de omgekeerde variant van het zogeheten locomotief-effect. Als een groep leerlingen aan de onderkant van het vaardigheidsspectrum een forse toename kent, is het heel goed mogelijk dat ook de betere leerlingen niet meer op hun maximale niveau uitgedaagd worden omdat een docent zich wellicht richt op het gemiddelde dat lager is geworden;
- manifesteert zich hier het feit dat we juist de laatste jaren moeten constateren dat lessen lang niet altijd gegeven worden door docenten die een recente of adequate vooropleiding genoten hebben? Denk daarbij aan on(der)bevoegden, her- of zij-intreders.

En een andere gedachte zou de volgende kunnen zijn: is het onderwijs in negen jaar meer afgeweken van hetgeen in PISA aan de orde gesteld wordt? Productgerichtheid zou in het onderwijs de laatste tien jaar best wel eens een stuk groter kunnen zijn geworden, terwijl de PISA-items nu juist toch wat afwijken van de gebaande paden c.q. de aangeleerde procedures. Denk daarbij aan wat in cTWO denkactiviteiten genoemd worden. Het feit dat we zien (zie figuur 3) dat de negatieve trend zich bij alle domeinen behalve bij Hoeveelheid voordoet, past hierin: rekenvaardigheid, het meest terug te vinden in het domein Hoeveelheid, heeft de laatste jaren een enorme stimulans in de vorm van proceduregericht onderwijs ondergaan.

Al met al constateren we zelf met enige spijt dat de media-aandacht die er in december 2013 voor PISA en de Nederlandse resultaten is geweest, niet altijd de schijnwerper gericht heeft op zaken die wel aandacht behoeven: PISA is een meetlat waaraan je je als land kunt meten ten opzichte van andere landen en het is zeker relevant om te constateren dat je het met andere landen vergeleken helemaal niet slecht doet. Maar het is zonde als je die meetlat niet gebruikt om je door de jaren heen met jezelf te vergelijken, zeker als je met niet al te veel moeite kunt constateren dat je je wellicht bevindt op een dalende weg en je niveau als land een neerwaartse beweging ondergaat. Als je je nu bewust bent van de richting van die beweging, ben je wellicht op dit moment nog op tijd om daar nog iets tegen te ondernemen voordat die daling prominent doorzet.



figuur 4

Noten

- [1] In dit artikel wordt verder geen aandacht gegeven aan deze contextuele indicatoren. In het nationale PISA-rapport^[2] komen deze aspecten wel aan de orde. Ook uit deze indicatoren is het een en ander ten aanzien van het Nederlandse (wiskunde-)onderwijs te concluderen.
- [2] *Resultaten PISA-2012, Praktische kennis en vaardigheden van 15-jarigen*, Joke Kordes, Maria Bolsinova, Ger Limpens, Ruud Stolwijk, ook te downloaden via vakbladeuclides.nl/896pisa

Over de auteurs

Ger Limpens en Ruud Stolwijk zijn wiskundemedewerkers en toetsdeskundigen van het Cito te Arnhem (website: www.cito.nl). E-mailadressen: ger.limpens@cito.nl en ruud.stolwijk@cito.nl

NATIONALE WISKUNDEDAGEN 2014

Rob van Oord

DE EERSTE KEER

Eigenlijk zou Rob van Oord 'de laatste keer' moeten schrijven, want hij is per 1 februari 2014 met fpu gegaan en stopt deze zomer na 40 jaar met lesgeven aan het Coenecoop College in Waddinxveen. Hierbij een verslag van zijn, misschien wel laatste, bezoek aan de Nationale Wiskundedagen.

Maar bij een conferentie waar het onder andere over *Wiskunde en seks* gaat hoort natuurlijk *de eerste keer*. Toch denk ik bij seks aan andere dingen dan die in de gids staan, zo werd in het vierde blok (*Sex and the City*) duidelijk dat je beter in Amsterdam kan wonen als single dan in Apeldoorn, hoewel het percentage singles in Amsterdam twee keer zo groot is als in Apeldoorn, maar je hebt er veel meer contactmogelijkheden per tijdseenheid dan in Apeldoorn. Toch is de kans op een partner weer kleiner, omdat er relatief veel single vrouwen in Amsterdam wonen. Professor Pieter Gautier bekijkt de wereld als econoom vanuit een andere hoek. Hij gebruikte een unieke Deense dataset met veel gegevens over inwoners om enkele stellingen over kansen op partnerschap en echtscheidingen toe te lichten.

Maar laten we bij het begin starten: nadat Michiel Doorman even had stilgestaan bij het grote verlies in wiskundeland van onze vriend Leon van den Broek werd de twintigste NWD geopend door Hans van Duijn. Hij is de voorzitter van PWN^[1] (Platform Wiskunde Nederland). Ik zat in de commissie onderwijs bij de start van PWN. Helaas voelde het bij mij als een te log lichaam, het duurde lang voordat er dingen van de grond kwamen. Misschien was ik ook niet de juiste persoon. Hans pleitte voor lerarenopleidingen op maat. Wiskunde moet worden opgestuwd in de vijf *Grand Challenges* van deze tijd. De eerste plenaire lezing kwam van Don Zagier. Deze man spreekt sneller dan zijn schaduw, om die reden wordt hij ook wel de Lucky Luke van de wiskunde genoemd. Een zuivere getaltheoreticus die met vuur vertelde over de Indiase klerk Ramanujan die in een brief aan de beroemde Engelse wiskundige Hardy verteld over zijn ontdekkingen van partities van n . Twaalf bladzijden formules die de wereld op zijn kop zetten. Ramanujan noemde deze nieuwe functies modulaire vormen. De eerste voorbeelden waren nog goed te volgen: $P(4) = 5$ want je kunt 4 op 5 manieren verdelen in (sommen van) gehele getallen; 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1 en $P(5) = 7$, dit is ook makkelijk na te gaan. $P(200) = 3972999029388$, al lastig om zelf te vinden. Daarna ging Don in sneltreinvaart door naar een formule van Euler, de theta-functies en de mock(= net niet)-theta-functies. Een prachtig pleidooi



figuur 1 Kettinglijn op een stuk karton

hoe de wiskunde met stappen en sprongen van beroemde wiskundigen in de tijd vooruit gaat.

Tijd voor de lunch en om wat bekenden op te zoeken, want de NWD heeft voor velen van ons ook de functie van een reünie. Er heerst een nieuw culinair klimaat in het congrescentrum; het smaakt niet alleen heerlijk, het ziet er ook gezellig uit. Zo was het voor mij *de eerste keer* dat ik satéstokjes at uit een glas en bouwsels maakte van kubusvormige blokjes kibbeling. Omdat ik ooit in mijn studie als een van de eerste studenten probeerde af te studeren in de geschiedenis van de wiskunde bij professor Henk Bos, koos ik in mijn eerste blok voor de lezing^[2] van Viktor Bläsjo, een Zweed en AIO aan het Mathematisch Instituut in Utrecht. Via eenvoudige wiskunde met gelijkvormige driehoeken werd de eerste wet van Newton bewezen. Newton deed dit door de baan van de maan in infinitesimale stukjes tijd te bekijken.

De kettinglijn (van Leibniz) oftewel de 'linea Catenaria vel Funicularis' is ook een mooi staaltje van eenvoudige wiskunde. Het was Leibniz niet begonnen om een formule van de kettinglijn, de cosinushyperbolicus maar hoe je $\log(a)$ kan vinden vanuit de kettinglijn. Leibniz noemde de kromme van $y = e^x$ dan ook de 'linea logarithmica'. Advies van Viktor: koop een kettinkje bij de HEMA (2 euro), prik de uiteinden even hoog op een stuk karton. Noem M het midden van de prikpunten A en B , teken een

Voor punt p , naar verschillende punten op lijn k (ongeveer 8 keer)
 In welk gebied kunnen de voorwerpen **niet** komen?

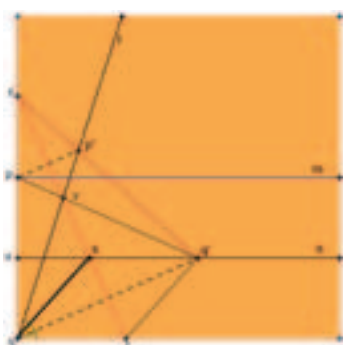
EUCLIDES 89 | 6

tweede optreden kwam van Vincent van der Noort, een nerd die in een grote spraakwaterval liet zien waarom Getallen je beste vrienden zijn. Met sprankelende raadsels liet hij zien hoe verwarrend wiskunde kan zijn. De eerste ging over een bak met 50 rode en 50 zwarte sokken. In het donker moet je net zo veel sokken pakken dat je zeker weet dat je een juist paar hebt. Hoeveel sokken moet je pakken?

Ogen dicht en denken. Probeer dit eens uit tijdens een familiebijeenkomst. Hoeveel zullen er denken dat het 51 is? Van het driedeeurenprobleem bij een quiz werden verschillende varianten opgedist. Verwarrend, dat wel. Ook lag op elke tafel lag een plak chocolade met 24 stukjes (een reep van 3 bij 8). De vraag is in hoeveel keer je minimaal moet breken om de reep in allemaal losse brokjes te delen. Wie wint krijgt de reep. Pure wiskunde en pure chocola. Op de NWD-site vind je nog meer raadsels en oplossingen.

Tijdens het avondprogramma was er weer de wiskundequiz, die gewonnen werd door Henk Reuling. Proficiat, Henk. Ik vond eerst ontspanning bij de vele spelletjes die weer in de hal waren uitgesteld. Met het oog op de spelletjes die ik met mijn kleinkind(eren) ga spelen, vond ik het spel *Khet* (Innovention Toys) met sfinxen en piramides erg leuk. Een strategisch spel met laserstralen. Een modern soort schaken, strategisch denken waarbij je via spiegeltjes de 'koning' van je tegenstander moet uitschakelen. Ik heb het al vast aangeschaft. Daarna nog naar de dansvloer. Lekker gedanst (geen chachacha of rumba helaas) met Marjan en haar collega Frederique, die aanvankelijk was uitgeloot voor de NWD. Maar als je een boeiende workshop instuurt, kun je er toch heen, en nog gratis ook. Dus collega's die uitgeloot worden, zend een mooie workshop in! Wie weet kom je er dan toch nog in. Na een superkort nachtje vroeg op voor de funrun. Ik kreeg halverwege een dipje, of het nu door de wind kwam of van de banana, ik kwam zo'n beetje als laatste binnen. Kon na een kort sprintje toch nog enkele dames voorblijven. Maar ik vind dat het aantal deelnemers wel steeds minder is. Kom op mensen, voor zo'n mooi T-shirt kun je ook zonder trainen best 6 km hollen volhouden. De kleur dit jaar was diep rood met het Lorenz-oppervlak achterop.

figuur 4 Trisectie



figuur 5 Object van Rinus Roelofs



figuur 6 Gehaakt Lorenz-oppervlak

In de eerste workshop, zaterdagochtend, over binomen, liet Steven Wepster zien hoe de klassieke Grieken worstelden met de irrationale getallen. Zij noemden de zijde en de diagonaal van een vierkant incommensurabel, onmeetbaar, omdat er geen geheel veelvoud van de een even groot kan zijn als een geheel veelvoud van de ander. Zij kenden er geen getalswaarden aan toe. Simon Stevin probeerde de meetkundige classificatie van Euclides om te zetten in rekenkundige voorbeelden. Daarbij kwam hij met binomen, geheel getal plus (veelvoud van) een wortel, en apotomen, geheel getal min (veelvoud van) een wortel. Oftewel $a \pm \sqrt{b}$. Onder bepaalde voorwerpen is de wortel van een binoom te vereenvoudigen zodat $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ te schrijven is als $p \pm \sqrt{q}$. Klassieke methode: schrijf het binoom als $A \pm B$ met $A > B$. neem dan C zo dat $C^2 = A^2 - B^2$. Dan

geldt $\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$. Dit is eenvoudig aan

te tonen door links en rechts te kwadrateren.

Voorbeeld: $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $C^2 = 4 - 3 = 1$, dus

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Deze methode werkt niet voor $\sqrt{12+\sqrt{3}}$; je krijgt dan

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{3}, \text{ dit is geen vereenvoudiging tot een}$$

binoom; je kunt dit, naar een recept dat Euler al bedacht,

wel schrijven als $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}$

Na de laatste lezing die ik bijwoonde, over *Seks and the City* door Professor Gautier, was het tijd voor de plenaire slotlezing van professor Hinke Osinga. Zij is de eerste vrouwelijke wiskundehoogleraar aan de universiteit van Auckland (NZ). Deze sprankelende, van oorsprong Friese jonge vrouw, met een hoog Doutzengehalte, gaf een wervelende show weg over het ontstaan van de Lorenz attractor en de chaostheorie. Voor mij blijft het vooralsnog een raadsel hoe ik zelf op mijn PC die mooie plaatjes

tevoorschijn kan toveren. Wie weet vind ik ooit nog eens een site waarop ik alleen de waarden van σ , ρ en β kan kiezen en dat dan hupsakee het ene mooie plaatje na het andere verschijnt. Hinke's plaatjes zijn gebaseerd op de Lorenzvergelijkingen:

$$x'(t) = \sigma(y - x)$$

$$y'(t) = x(\rho - z)$$

$$z'(t) = xy - \beta z$$

Deze vergelijkingen liggen ten grondslag aan chaotisch gedrag. Doorgaans neemt men $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ en varieert ρ . Bij $\rho = 28$ vertoont het systeem chaotisch gedrag, maar voor andere waarden van ρ vertoont het geknoopte periodieke banen. Klapstuk was het door Hinke zelf gehaakte Lorenz-oppervlak. Vijfentachtig uren huisvlijt leverden dit fantastische resultaat, zie figuur 6. Kunstenaar Benjamin Storch heeft daarna volgens hetzelfde procedé als waarmee het oppervlak gehaakt is, er een van metaal gemaakt. Moe maar voldaan besloten we de NWD met een heerlijke lunch. Ik ben blij dat ik twee nieuwe collega's heb kunnen meenemen naar deze onvergetelijke dagen. Hopelijk raken zij ook weer geïnspireerd om mooie dingen te doen en te laten zien in hun wiskundelessen. In elk geval heb ik ze weer veilig thuis gebracht. Dit is *de eerste keer* dat ik een verslag van de NWD voor *Euclides* schrijf. Hopelijk is het niet de laatste keer.

Noten

- [1] Zie www.platformwiskunde.nl
- [2] Zie voor alle handouts www.fi.uu.nl/nwd/
- [3] Hairer, E., & Wanner, G. (2008) *Analysis by Its History*. Springer.
- [4] Hand-out Workshop Verpakkingen NWD 2013.
- [5] Eindexamen wiskunde B1,2 2008 tijdvak 1 *Een parabool vouwen*, vragen 4, 5 en 6.
- [6] Zie www.janendaan.nl voor hun nieuwste show *Reken maar nergens op*.

Over de auteur

Rob van Oord is sinds 1974 werkzaam als eerste-graads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen. Voor vragen, suggesties en opmerkingen kunt u hem mailen: robvanoord@tiscali.nl

Van meester tot master: een investering in jezelf die je op voorsprong zet!

Fontys biedt de **masteropleidingen**:

- Master of Education
- Master Special Educational Needs (SEN)
- Master Leren en Innoveren

Wel kennis vergroten maar geen tijd voor een volledige opleiding?

Volg vrijblijvend **korte cursussen** van de opleiding Master of Education bij Fontys Lerarenopleiding Tilburg.

Fontys Lerarenopleiding Tilburg is verkozen tot nr. 1 in de Keuzegids Masters 2013 voor de opleidingen:

- Master of Education Biologie
- Master of Education Nederlands



Lerarenopleiding Tilburg

fontys.nl/flot

TALIGE ONDERSTEUNING IN EEN TAAL-ZWAKKE REKEN-WISKUNDEKLAS

Jantien Smit

In het afgelopen decennium was er in toenemende mate aandacht voor de rol van taal bij het leren van rekenen-wiskunde. Jantien Smit deed promotieonderzoek waar- bij de volgende vraag centraal stond: Hoe kunnen leerkrachten in meertalige klassen leerlingen ondersteunen bij het leren van taal die nodig is voor rekenen-wiskunde?

Taalontwikkeling verdient bij uitstek aandacht in klassen met leerlingen voor wie het Nederlands een tweede taal is, omdat deze leerlingen bij het leren van de 'taal van het vak rekenen-wiskunde' (rekentaal) zich minder dan autochtone klasgenoten kunnen beroepen op reeds ontwikkelde dagelijkse en algemeen-schooltalige vaardig- heid in het Nederlands.^[1] Uit onderzoek blijkt echter dat taal als toegangspoort tot het denken essentieel is het inzichtelijk leren van *alle* leerlingen.^[2] In plaats van het vermijden of versimpelen van talige componenten in de reken-wiskundeles, behoeft de ontwikkeling van vakspeci- fieke taal dus juist expliciete aandacht.

In dit promotieonderzoek stond het domein lijngra- fiek centraal: een domein dat bij uitstek taal met zich meebrengt. In dit domein ondervinden leerlingen bijvoorbeeld problemen bij de talige activiteit van het interpreteren van het verloop van de grafiek, zo blijkt uit de onderzoeksliteratuur.^[3] Anders dan het aflezen van gegevens uit de grafiek, waarbij *getallen* het antwoord vormen, vergen grafiekinterpretaties het praten en schrijven in *zinnen*. In de loop van drie ontwerpgerichte onderwijsexperimenten, uitgevoerd in groep 7/8 van drie multiculturele basisscholen, is een taalgerichte lessen- serie ontwikkeld gericht op het leren interpreteren van lijngrafieken. De focus was daarbij tweeledig: enerzijds het ontwikkelen van vakinhoudelijke kennis over lijngra- fiek (bijvoorbeeld: hoe construeer je een lijngrafiek en welke conventies gelden daarbij), anderzijds het verwerven van de taal die nodig is voor het beschrijven en interpre- teren van lijngrafieken.

Een eerste uitgangspunt bij het ontwerpen vormden de principes van realistisch reken-wiskundeonderwijs. Zo werd de lijngrafiek niet als kant-en-klare representatie aan leerlingen aangeboden, maar begon de lessenserie met een open probleem waarbij leerlingen zelf tot 'heruitvin- ding' van de lijngrafiek kwamen door verschillende eigen representaties aan elkaar te presenteren en te vergelijken. Ook was er veel ruimte voor doelgerichte interactie in de lessen. Een tweede leidraad bij het ontwerpen was de onderwijsleercyclus^[4]: een gefaseerde aanpak die zelfstan- digheid in de benodigde domein specifieke (reken)taal bevordert. In het begin van de lessenserie werd het domein



figuur 1 Groeiende woordenlijst: schooltaal (linkerkolom: werke- lijkheden) en vaktaal (rechterkolom: grafiek) voor het spreken en schrijven over lijngrafieken

figuur 2 Spreek- of schrijfkader bij een lijngrafiek over de groei van giraf Niek

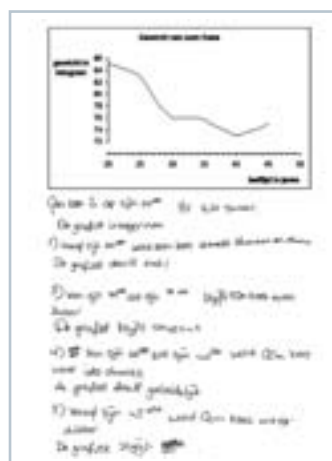
lijngrafieken verkend en werden belangrijke school- en vaktaalwoorden geïntroduceerd en opgeschreven op een 'groeende woordenlijst' (zie figuur 1). Daarna kregen leerlingen in lesactiviteiten op allerlei manieren steun bij het spreken en schrijven over lijngrafieken (zie bijvoorbeeld het spreek- en schrijfkader in figuur 2).

Om de hoofdvraag van het onderzoek te kunnen beant- woorden, zijn we om te beginnen nagegaan *welke taal* nodig is om te kunnen spreken en schrijven over lijngra- fiek. Daartoe is een literatuurstudie uitgevoerd, een expertondervraging gedaan, en hebben we ons laten informeren door talige hobbels die in het uitvoeren van de lessen naar voren kwamen. De benodigde taal voor het domein lijngrafieken hebben we geïdentificeerd in termen van een 'genre'. In lijn met principes uit de genredidac- tie^[5] hebben we vastgesteld wat de taal- en structuur- kenmerken zijn van een prototypische grafiekbescrij- ving (zie figuur 3), zodat we deze kenmerken vervolgens expliciet aan de orde konden stellen in de lessen en het instructiemateriaal. Een structuurkenmerk van het genre

is bijvoorbeeld het op twee manieren duiden van de lijngrafiek: wat gebeurt er in de werkelijkheid én wat laat de grafiek zien? Dit brengt verschillende formuleringen met zich mee: 'Van zijn 35e tot zijn 40e blijft zijn gewicht hetzelfde [werkelijkheid]. Dat zie ik aan de grafiek, die constant blijft [grafiek].' Een taalkenmerk van het genre betrof onder meer bepaalde woordcombinaties zoals *van... tot*, die een tijdsperiode uitdrukken. Bij het interpreteren van grafieken is het essentieel om onderscheid te kunnen maken tussen een moment in de tijd (een punt in de grafiek) en een periode in de tijd (een segment van de grafiek) – iets waar bij uitstek tweedetaalleerders moeite mee hebben. Een ander taalkenmerk betrof het gebruiken van vaktaalwoorden voor het verloop van de grafiek (bijvoorbeeld: stijgen, dalen, constant) en het gebruik van schooltaalwoorden voor de werkelijkheid (bijvoorbeeld: toenemen, afnemen, gelijk blijven).

Ter beantwoording van de hoofdvraag hebben we ons ten tweede gericht op de *ondersteuning van taalontwikkeling* door de leerkracht. Deze ondersteuning hebben we geconceptualiseerd als *scaffolding*^[6] van taal: adaptieve talige ondersteuning die leerlingen helpt bij het verwerven van taalvaardigheid die bijdraagt aan het zelfstandig denken en communiceren in schoolse vakken. Dit idee hebben we uitgewerkt door een repertoire van scaffolding-strategieën te ontwikkelen, gericht op taalontwikkeling.^[7] Met deze scaffolding-strategieën zetten leraren de taalontwikkeling metaforisch gezien 'in de steigers'. Een leraar kan bijvoorbeeld een uitspraak van een leerling ('dan gaat-ie dalen') herformuleren in rekentaal ('de grafiek daalt'). Ook de dagelijkse taal van leerlingen werd op een hoger plan getild: 'oom Kees gaat gewoon steeds dikker worden' werd bijvoorbeeld geherformuleerd tot 'inderdaad, zijn gewicht neemt toe'. Maar een leraar kan een leerling ook vragen om preciezer te formuleren: 'Hoe zeggen we dat in rekentaal?' Wanneer een leerling zich al precies uitdrukt, kan de leraar deze uitspraak letterlijk herhalen om een voorbeeld te stellen aan de andere leerlingen ('inderdaad, de grafiek blijft constant').

De resultaten van het onderzoek lieten zien dat de leerlingen door de taalgerichte lessen waarin scaffolding-strategieën werden geboden, inderdaad vooruit zijn gegaan in het beoogde genre voor lijngrafieken.^[8] Aan de hand van een analysemodel hebben we aan grafiekbeschrijvingen die gemaakt zijn door leerlingen, zowel voorafgaand als na afloop van de lessenserie, een cijfer van 0 tot 10 toegekend. De leerlingen lieten een absolute vooruitgang in het genre van 2,90 zien. Deze vooruitgang is statistisch significant, met een effectgrootte van 1,79. Door de aard van het onderzoek kon geen vergelijking gemaakt worden met het reguliere rekenonderwijs. Wel laat het onderzoek zien dat een dergelijke taalgerichte aanpak in relatief weinig tijd een groot effect kan sorteren: dankzij de vaktaalontwikkeling gingen leerlingen beter wiskundig redeneren. Aangezien uit nationale en internationale prestatiestudies blijkt dat allochtone



figuur 3 Beschrijving van een lijngrafiek in het geïdentificeerde domeinspecifieke genre

leerlingen slechter presteren in taal en rekenen dan autochtone leerlingen, is dit een belangrijke opbrengst van het promotieonderzoek. Door aandacht te schenken aan taal in de rekenles sla je twee vliegen in één klap: leerlingen ontwikkelen hun taalvaardigheid én ze krijgen beter toegang tot reken-wiskundige vakinhoud.

Noten

- [1] Elbers, E. (2010). Learning and social interaction in culturally diverse classrooms. In K.S. Littleton, C. Wood, & J. Kleine Staarman (Eds.), *International handbook of psychology in education* (pp. 277-318). Bingley, UK: Emerald.
- [2] Mercer, N., & Littleton, K. (2007) *Dialogue and the development of children's thinking: A sociocultural approach*. London: Routledge.
- [3] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- [4] Gibbons, P. (2009). *English learners, academic literacy, and thinking*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- [5] Derewianka, B. (1990). *Exploring how texts work*. Sydney: Primary English Teaching Association (PETA).
- [6] Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89-100.
- [7] Smit, J., van Eerde, H. A. A., & Bakker, A. (2013). A conceptualisation of whole-class scaffolding. *British Educational Research Journal*, 39(5), 817-834.
- [8] Smit, J., & Van Eerde, H. A. A. (2013). What counts as evidence for the long-term realisation of whole-class scaffolding? *Learning, Culture and Social Interaction*, 2, 22-31. doi: 10.1016/j.lcsi.2012.12.006

Over de auteur

Jantien Smit voerde haar promotieonderzoek uit aan het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Ze promoveerde op 10 juni 2013. Sinds 1 augustus 2013 is ze als *associate lector reken-wiskundendidactiek* werkzaam bij Hogeschool Saxion. E-mailadres: j.smit@saxion.nl

'WISKUNDE, WANNEER HEB IK DAT NOU NODIG?'

Astrid van de Kerkhof

Vakdocenten kunnen veel invloed hebben op de loopbaan van hun leerlingen. Toch ligt op de meeste scholen de loopbaanoriëntatie en -begeleiding (LOB) bij de decaan.^[1] Het project Stimulering LOB hield een brainstormbijeenkomst met docenten wiskunde en vroeg hen naar hun tips en ervaringen. In dit en het volgende nummer van Euclides een verslag van deze bijeenkomst.

'Wiskunde, wanneer heb ik dat nou nodig?', vroegen de leerlingen van een Engelse meisjesschool regelmatig aan hun wiskundedocent. Deze beantwoordde hun vraag met een kleurrijke PowerPointpresentatie die hij tijdens zijn lessen regelmatig vertoonde. Els van Osch, LOB-VO projectleider en docent aan de lerarenopleiding, nam de presentatie mee naar Nederland en stelde haar collega's voor om een soortgelijke presentatie te maken – of beter nog: scholieren te vragen dit te doen. Nu opent ze de brainstormbijeenkomst met deze presentatie: *When will I ever need maths?* De presentatie legt leerlingen haarfijn uit waar ze wiskunde zoal voor nodig hebben: 'om klimaatveranderingen te beschrijven met klimaatgrafieken', 'om genezingspercentages te berekenen door hartritmes in slagen per minuut vast te leggen', 'om met een grafisch programma door spiegeling en draaiing een logo te ontwerpen', 'om in een spreadsheet de kosten van een schoolreisje uit te rekenen'. Maar ook 'omdat goede wiskundescores je veel meer en bredere carrièrekansen bieden' en 'goede wiskundescores je tijdens je leven gemiddeld 150.000 pond (182.000 euro) extra inkomen opleveren'.

Bewust van je rol

Over het nut van wiskundeonderwijs is bij de deelnemers aan de brainstorm natuurlijk geen discussie. Wel is de eigen rol als inspirator voor de loopbaanontwikkeling van scholieren voor veel docenten nog erg impliciet: 'Als je mij vraagt of LOB bij mijn takenpakket hoort, zeg ik "nee"', vertelt Rob Wieleman, docent Wiskunde aan het Rembrandt College in Veenendaal. 'Maar als je vraagt wat voor invloed ik als vakdocent heb op de loopbaanideeën van mijn leerlingen, dan kan ik wel heel wat voorbeelden geven.' Heleen van der Ree, beleidsmedewerker NVvW, beaamt de invloed van de docent uit eigen ervaring: 'Ik ben econometrie gaan studeren omdat mijn vakdocent

economie zei dat ik dat niet kon en mijn wiskundedocent zei dat ik het wel kon. Een docent heeft veel meer invloed dan deze zelf denkt; word je maar eens bewust van die rol!'

Een leven vol loopbaankeuzes

Op veel scholen is LOB nog vooral een zaak van decaan en mentor, maar scholieren vinden dat juist de vakdocent de meest zinvolle bijdrage levert aan hun loopbaancompetenties, zo blijkt uit het LAKS-onderzoek naar gebruik, waardering, impact en behoefte aan LOB onder scholieren en studenten. Ze zouden zelfs willen dat meer vakdo-

centen deze ondersteuning bieden. 'Ikzelf heb meer aan gesprekken met leraren die ik zelf om advies vraag. Dat zijn dan leraren die vakken geven waar

mijn interesses naar uitgaan,' aldus een scholier in het LAKS-onderzoek. LOB gaat steeds meer over het voorbereiden van scholieren op een loopbaan die een leven lang verandert. Het wordt daarmee een overkoepelende onderwijsopdracht voor alle docenten, waarin zij scholieren kennis laten maken met vragen over zichzelf. 'Wat kan ik?', 'Wat drijft mij?', 'Wie kan ik inzetten voor mijn loopbaan?' en 'Wat moet ik kiezen?' Maar wat moet je met loopbaanoriëntatie in je lessen wiskunde? Hoe doen collega's dat in de praktijk?

Rekenen in alle vakken

'Op mijn vorige school keken we bij alle vaksecties waar rekenen naar voren komt,' vertelt Rob. 'Bij geschiedenis kan je een tijdlijn uitzetten, bij Engels de Engelse en Amerikaanse maten en eenheden omrekenen naar kilo's en liters, bij Frans de optelling van *quatre-vingt-dix-neuf* laten zien. In de gymles kan je bijvoorbeeld tijd opnemen, afstanden meten en gemiddelden berekenen. Leerlingen zijn hartstikke geboeid als je ze uitlegt dat het Nederlandse honkbalteam, dat wereldkampioen is, al zijn

'WELKE WISKUNDEKENNIS HEB JE NODIG VOOR INTERESSANTE BEROEPEN?'

VERSCHENEN

SPIROSPOREN



Ondertitel: tekenen met de spirograaf

Auteurs: Stephan Berendonk en Leon van den Broek

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2013)

Zebra-reeks, deel 38

ISBN: 978-90-5041-139-4

Prijs: € 10,00 (64 pagina's; paperback)

Van de achterkaft:

Bevestig een pen aan een draaiend wiel en fraaie figuren worden getekend. Dat is het idee achter de Spirograaf, een spel dat in de zestiger en zeventiger jaren razend populair was en ook nu nog menigeen veel tekenplezier geeft. Iedereen snapt wel dat dit met wiskunde te maken heeft. Maar wat precies...?

In deze Zebra worden allerlei vragen over de spirograafkrommen gesteld en beantwoord. Bijvoorbeeld, welk circuit en welk wiel je moet kiezen om een gegeven figuur te tekenen. De spirograafkrommen zijn al vanaf de zestiende eeuw hot stuff en geven aanleiding om mooie wiskundige theorieën te ontwikkelen van eenvoudig tot pittig. In dit boekje is gekozen voor een elementair meetkundige behandeling.

statistische data bijhoudt. Of dat zwemkampioene Ranomi Kromowidjojo altijd in een hoek van 21 graden vanaf het startblok het water in duikt – in het *Pieter van den Hoogenband*-zwemstadion meten ze dat. Elke zwemmer heeft een andere hoek!

Wat wil een scholier van zijn vakdocent?

Scholieren willen vooral:

- praten over wat ze interessant vinden aan het vak;
- horen wat je met het vak in een vervolgopleiding of beroep kan doen;
- ontdekken wat ze goed kunnen;
- voorbeelden krijgen van waar ze goed in zijn.

Een vakdocent heeft daarmee de meeste invloed op de loopbaancompetenties van een leerling, meer nog dan proefstuderen, meelopen bij een vervolgopleiding of begeleiding van iemand die al aan het werk is! Twintig procent van de scholieren heeft zelfs het liefst een vakdocent als LOB-begeleider.

Algebra in de praktijk

Praktijktoeepassingen voor meetkunde lijken makkelijker te bedenken dan voor algebra. Om 'het nut' van algebra uit te leggen, gebruikt Rob voorbeelden uit de methode en uit zijn eerdere studie natuurkunde. 'Modelleren is een belangrijke toepassing. Om voorspellingen te doen over wat je nog niet weet, gebruik je allemaal wiskundige modellen en formules. Computers zitten er vol mee. Er zijn zoveel wetmatigheden in de praktijk die te vervatten zijn in wiskundige modellen. Ik leg de koppeling naar de leefwereld van de leerlingen, en gebruik Facebook en Twitter om de exponentiële functies uit te leggen: als je nu tachtig volgers hebt en je krijgt er iedere maand tien procent bij, hoeveel heb je er dan na een jaar? Voorbeelden uit het boek over bezoekersaantallen zijn niet zo heel interessant. Maar stel, jij bent ijsjesverkoper, of bedrijfsleider van een winkelketen: Hoe weet je nu hoeveel mensen er komen? Waarom is het nuttig om dat in een grafiek te zetten? Hoe weet je hoeveel parkeerplaatsen je nodig hebt? Je moet ze pakken op het concrete. Dan kan je de link leggen naar waar dat dadelijk terugkomt in hun beroep.'

Focus op de toepassingen

'Je moet kinderen op de toepassingen enthousiast maken,' vindt Jos Verhoosel, docent Wiskunde aan Lerarenopleiding Fontys in Tilburg. 'Conrad Wolfram legt het helder uit in zijn TEDtalk. Hij pleit ervoor leerlingen niet lastig te vallen met de basics en al het rekenwerk. Dat kan een computer stukken beter en sneller. De interesse voor wiskunde, natuur en techniek ontstaat juist door het zien van toepassingen. Raketten, aandelenbeurzen, een levensverzekering kiezen of je hypotheek uitrekenen. Gooi leerlingen op dat creatieve stuk en

ga daarmee spelen. Dat motiveert om aan de slag te gaan met de basics.' Rob: 'Met havo drie ben ik binaire getallen gaan optellen. Dat in een mobieltje alle elektronica zo werkt, dat vonden ze hartstikke leuk.'

How to lie with statistics?

'Statistiek kan je goed vanuit de praktijk illustreren,' vindt Heleen 'want dat heb je bijna overal voor nodig.' Rob gebruikt in de onderbouw voorbeelden uit het boekje *How to lie with statistics?* (1954). 'Ik vraag leerlingen of ze zelf ook kunnen manipuleren met data. In een 3T-klas wil ik het niet meteen over procenten hebben, maar ik pak ze wel door algemene uitspraken als 'vliegen is veiliger dan autorijden' ter discussie te stellen: Is dat eigenlijk wel zo? Vergelijk je op basis van de afstand of het aantal uren in het vervoermiddel? Dat is eigenlijk al een stap te ver, maar ze vinden het verhaal leuk en ze begrijpen even waar het over gaat.'



Handige links voor LOB in de vaklessen:

- Conrad Wolfram over wiskundeonderwijs: www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers.html
- NLT modules, gecertificeerde lesmodules voor de lessen Natuur, Leven en Technologie: <http://betavak-nlt.nl/lesmateriaal/modules/>
- *How to lie with statistics?* (Darrell Huff, 1954) (via Google)
- CBS in de klas: gratis CBS-materiaal dat direct bruikbaar is in de klas en past in het lesprogramma: www.cbs.nl/nl-NL/menu/informatie/onderwijs/home/default.htm
- Project Stimulering LOB www.lob-vo.nl
- www.studiekeuze123.nl geeft informatie over alle geaccrediteerde bachelor- en masteropleidingen en associate degrees in Nederland.

- www.beroepeninbeeld.nl geeft informatie over alle beroepen op mbo-niveau, met filmpjes, beroepsbeschrijvingen en arbeidsmarktinformatie.
- Websites van de kenniscentra van beroepsonderwijs en bedrijfsleven (toegankelijk via links onderaan www.beroepeninbeeld.nl)

Noten

- [1] LOB staat voor loopbaanoriëntatie en -begeleiding. Loopbaanoriëntatie betreft alles wat scholieren helpt om hen voor te bereiden op keuzes voor hun toekomstige studie of baan. Loopbaanbegeleiding gaat over de mensen die hen hierbij helpen en met wie ze hierover praten. Het project Stimulering LOB loopt van 2009 tot eind 2014 en is erop gericht om scholen (onderwijs) te stimuleren om meer te doen aan LOB en een goede doorstroom van leerlingen. Het project wordt geheel gesubsidieerd door het Ministerie van OCW en uitgevoerd door de VO-raad.
- [2] Schut, K., Kuijpers, M., & Lamé, M. (2013) 'Scholieren eisen tijd en begeleiding voor hun loopbaan.' Onderzoek naar gebruik, waardering, impact en behoefte aan LOB onder scholieren en studenten. Utrecht: LAKS, OIG.

Over de auteur

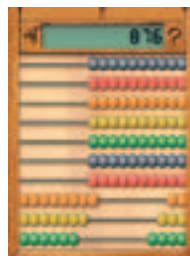
Astrid van de Kerkhof is zelfstandig communicatieadviseur voor (landelijke) projecten op het gebied van onderwijs, kinderopvang en onderzoek. Zij werkt in opdracht van de VO-raad voor het project Stimulering LOB: www.lob-vo.nl. E-mailadres: Astrid@zintcommunicatie.nl

Het tweede deel van dit artikel verschijnt in de volgende *Euclides*.

WISKUNDE DIGITAAL

ONLINE MINI-LOCO, MEMORY EN ANDERE SPELLETJES

Lonneke Boels



Sommige oefensites zijn zo leuk dat één artikel eigenlijk te kort is voor het beschrijven van alle mogelijkheden. Toch gaat Lonneke Boels hier een poging doen met het beschrijven van een aantal spellen op de site van Henk Reuling.

Geschikt voor: computer, iPad en Androidtablet
met Chrome

De site van Henk Reuling (www.henkreuling.nl) ontdekte ik toevallig tijdens de bijeenkomst van *Mathematics of the Planet Earth* op de eerste dag van de kerstvakantie. Mijn twaalf jaar oude zoon en een vriendin van de basisschool strandden bij de informatiekraam van Henk Reuling over de *Wageningse Methode*. Een uur lang hebben ze daar games gespeeld, voornamelijk mini-loco en memory en daarna ook een flippo-game.

Kent u mini-loco nog? Het originele spel bestaat uit twaalf vierkantjes met daarop een nummer. Henk heeft dit oude spel gedigitaliseerd in *GeoGebra*, en ze zijn dus ook te vinden op *GeogebraTube* (zie figuur 1). In de digitale versie staat op het vierkantje het antwoord op de vraag. De vraag is bijvoorbeeld welke maten gelijk zijn. De ene maat is dan bijvoorbeeld 10 cm^2 en de andere is $0,001 \text{ m}^2$. Doordat twaalf maten bij twaalf andere maten moeten worden gezocht, is het flink rekenen geblazen. Nadat alles op zijn plek is gelegd, klik je op controleren en worden de vierkantjes omgedraaid waarna een mozaïek verschijnt (zie figuur 2). Als het mozaïek klopt, heb je het goed gedaan, zo niet dan kun je het verbeteren.

mini-loco: aantal symmetrieassen

Beoordeling door Iljo (brugklasleerling)

Pluspunten

- het is leerzaam en leuk omdat je kunt laten zien of je goed bent in dit soort dingen of niet;
- het is ook leuk om een wedstrijd te doen wie het snelste klaar is.

Minpunten

- als je het op de iPad doet, scrolt hij niet goed;
- de eerste keer is het leuk, maar na een tijd weet je al heel snel wat waar moet.

Niet alleen twaalfjarigen vinden dit een leuk spel, ook leerlingen uit de bovenbouw kunnen het waarderen. Voor deze doelgroep heeft Henk bijvoorbeeld het spel *Mini-loco: verbanden; grafiek en formule*. De opdracht

komt neer op: zoek de juiste formule bij de gegeven grafiek. De formule is dan bijvoorbeeld gegeven in de vorm van $y = b \cdot g^t$ met $b > 0$ en $0 < g < 1$. Doordat er geen getallen zijn ingevuld, gaat het echt om het herkennen van de standaardvormen.



figuur 1 Mini-loco:
aantal symmetrie-
assen



figuur 2 Mini-loco: opgelost

Naast mini-loco heeft Henk ook applets gemaakt. Eén ervan is memory met logaritmen (zie figuur 3). Als herhaling voor het schoolexamen over onder andere logaritmen liet ik twee leerlingen uit 6 vwo wiskunde A achter mijn computer plaatsnemen. De memory stond vanuit die computer op het bord geprojecteerd. De klas keek mee of ging aan het werk met andere oefenopgaven. De twee leerlingen gingen fanatiek aan de slag en bedachten een strategie om mij te verslaan: kladpapier! In een overzichtelijk schema werden alle kaartjes genoteerd en alle logaritmen waar mogelijk omgerekend. Terwijl de leerlingen allerlei ontdekkingen deden over logaritmen (waarom kan $\log(10)$ niet?) waren ze zelf vooral bezig met het verminderen van het aantal *flips* (pogingen). Het is ze zo in 60 flips gelukt, met enige hulp van klasgenoten. Daarmee zaten ze tot hun genoegen 27 flips onder mijn eerste poging. Hierna gingen deze twee leerlingen uit zichzelf aan het werk met het herleiden van een ingewikkelde formule met daarin logaritmen. Dat lukte, waarna een van de twee zei: 'Mevrouw, ik snap het nu eindelijk'. Hij is bovendien voor het eerst de volle 50 lesminuten met wiskunde bezig geweest.

Overzicht aantal spellen

G: spel staat op *GeogebraTube*

H: applet in html5

Alles is vindbaar via www.henkreuling.nl. De collectie wordt nog steeds uitgebreid, dus het overzicht hieronder is niet compleet.

Rekenen

Metriek stelsel (G): mini-loco – maten in het metriek stelsel in elkaar omrekenen

Rekenvolgorde (H): memory – rekenvolgorde gebruiken bij optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en verbeteren getalinzicht

24-flippo-game (H): rekenvolgorde, gebruik van haakjes

Algebra

Roosterdam (H): oppervlakten met letters berekenen, haakjes wegwerken

Machten en logaritmen (H): memory – (toepassen rekenregels) logaritmen of (toepassen rekenregels) machten

Meetkunde

Aantal symmetrieassen (G): mini-loco lijnsymmetrie – aantal symmetrieassen benoemen

Orde draaisymmetrie en symmetrieassen (G): miniloco lijn- en draaisymmetrie – symmetrie-assen en draaiorde benoemen

Sin/cos/tan (G): miniloco – formules bij sin/cos/tan

Platte en ruimtelijke figuren (H): memory namen koppelen aan juiste vormen

Verbanden (G): mini-loco voor herkennen standaard-grafieken bij standaardformules zoals grafiek van een exponentiële verband, hyperbool etc.

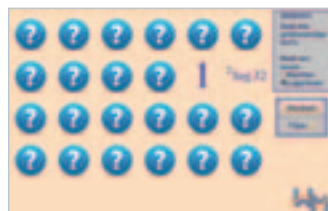
Statistiek (G): Dotplot – uitleg bij boxplot.

Pluspunten (zie ook kaders)

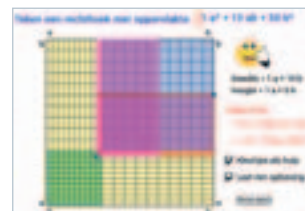
- de vragen betreffen echte wiskunde;
- het zijn echte spellen;
- leerlingen worden door deze opgaven aan het denken gezet, doordat niet alleen voor de hand liggende vragen worden gesteld;
- de oefensite is goed te gebruiken als opwarmer of start van een les;
- de vragen sluiten goed aan bij één bepaald onderwerp uit de wiskunde;
- het is goed te gebruiken als herhaling kort voor een repetitie;
- een aantal spellen kan vaak ook juist als start van een onderwerp worden gebruikt om leerlingen zelf de stof te laten ontdekken;
- ondanks dat de oefeningen geschreven zijn voor havo- en vwo-leerlingen, zijn sommige spellen, (zoals maten) ook geschikt voor vmbo-tl;
- het is gratis.

Minpunten (zie ook kaders)

- er zit maar één set opgaven achter de oefeningen. Die worden wel door elkaar gegooid, maar na twee of drie keer oefenen zijn leerlingen er klaar mee;



figuur 3 Memory machten en logaritmen



figuur 4 De oplossing van Iljo voor Roosterdam (oranje rechthoek) en de oplossing die het spel als alternatief geeft (roze rechthoek)

- de spellen in *GeogebraTube* kunnen op een digitaal bord niet worden vergroot (het kader vergroot wel maar de loco zelf niet). Dit maakt de loco-spellen ongeschikt voor klassikale toepassingen;
- op de iPad werken de oefeningen in *GeogebraTube* iets minder soepel; hij opent bijvoorbeeld niet in een nieuw venster.

Roosterdam: oppervlakte selecteren

Om bijvoorbeeld $45a^2$ te maken neem je $5a$ horizontaal en $9a$ verticaal, want 5 keer 9 is 45 (zie figuur 4).

Beoordeling door Iljo (brugklasleerling)

Pluspunten

- als je van puzzelen houdt, is dit een leuk spel en ook nog leerzaam;
- als ze echt te lastig worden kun je ze overslaan of de antwoorden bekijken en er van leren.

Minpunten

- voor oudere kinderen is het te veel leren en te weinig spel en jonge kinderen snappen het echt niet;
- als je nog maar net op de middelbare school zit (of nog niet eens), is het in het begin niet te begrijpen, maar als je een beetje gaat opletten, merk je steeds meer dingen op en dan begin je steeds meer te snappen hoe het moet.

Doelgroep

basisschool groep 8, vmbo-tl, havo en vwo. Dit is afhankelijk van het type spel.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: geen; meer informatie: www.henkreuling.nl

Getest op: Windows 8/Chrome, Windows XP/IE en iPad/iOS7.

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

BOEKBESPREKING

VERBORGEN BOODSCHAPPEN

Monique Stienstra



Ondertitel: Een inleiding in de cryptografie

Reeks: Zebra-reeks, nr. 35

Auteur: Aldine Aaten en Cor Kraaikamp

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht

ISBN: 978-90-5041-131-8

Prijs: € 10,00 (76 pagina's)

Cryptografie is bij uitstek een onderwerp voor wiskunde D. Het klinkt spannend, het is duidelijk dat het in de huidige tijd een belangrijke toepassing van de wiskunde is en er zit heel wat mooie en voor een middelbare scholier goed te begrijpen wiskunde in. Een uitstekend onderwerp voor een Zebra-boekje dus. Er was al wel vrij te downloaden materiaal te vinden op de website van het Freudenthal Instituut en cTWO met lessenseries voor wiskunde D, maar een Zebra-boekje over dit onderwerp mag natuurlijk niet ontbreken. Nu is er dit boekje, genaamd *Verborgen boodschappen – Een inleiding in de cryptografie* van Aldine Aaten en Cor Kraaikamp.

Het boekje leest makkelijk en prettig weg. Er is veel aandacht voor de geschiedenis van de cryptografie en voor de plaats van cryptografie in de geschiedenis. Het boekje start bij de Grieken en gaat via Caesar en permutatie- en substitutiever sleutelingen al snel naar Vigenère. Uiteraard wordt stilgestaan bij het kraken van deze code, al wordt er veel uitgelegd en hoeft de leerling zelf wiskundig gezien niet zo heel veel te doen. Het eerste hoofdstuk sluit af met de geschiedenis van de Enigma-code en de introductie van *public key*-cryptografie. Helaas ontbreekt hier elementaire informatie die volgens mij wel van belang is voor een goed begrip van de beginselen van de

hedendaagse cryptografie. Zo wordt er niet verteld over het principe van Kerckhoffs, dat stelt dat het van belang is dat de vijand geen voordeel mag hebben als hij weet met welke methode de boodschap gecijferd is. Dit is een belangrijk principe omdat men vaak wel weet met welke cryptografische methode een boodschap versleuteld is omdat die in de hardware vastgelegd is. Zolang de privé-sleutel niet uitgelekt is, mag er geen probleem zijn. Een ander punt dat wat mij betreft explicieter vermeld had mogen worden, is de functie van cryptografie. Cryptografie wordt niet alleen gebruikt om berichten te versleutelen, maar is minstens zo belangrijk om de authenticiteit (is het bericht gestuurd door wie je denkt dat het verstuurd is?) en de integriteit (is er niet met het bericht geknoeid?) vast te stellen.

Het tweede hoofdstuk is een wiskundig intermezzo waarin de wiskunde achter het RSA-systeem behandeld wordt. Achtereenvolgens wordt er aandacht besteed aan gehele getallen, deelbaarheid en priemgetallen. Daarna volgt het algoritme van Euclides en de lineaire diophantische vergelijking, al wordt die niet als zodanig benoemd. Tot slot wordt gekeken naar eigenschappen van het modulo-rekenen en naar de priemfactorisatie. Aardig bij dit laatste is dat behandeld wordt hoe je met de priemfactorisatie van Fermat iets verder komt bij het factoriseren. Ook worden andere factorisatiemethoden genoemd. Iets meer aandacht had misschien nog kunnen gaan naar dat het, ondanks die methoden, toch nagenoeg onmogelijk is heel grote getallen, zoals die in de cryptografie gebruikt worden, te ontbinden. Dit is toch waar de veiligheid van dergelijke systemen op stoelt. In dit tweede hoofdstuk leveren leerlingen regelmatig bewijzen of delen daarvan, maar verricht de schrijver naar mijn smaak meer werk op dit vlak dan voor de leerlingen uit de doelgroep nodig is. Dit vergroot de leesbaarheid zeker, maar mijn ervaring is dat leerlingen met enige sturing ver kunnen komen en dat dit hen voldoening en meer betrokkenheid bij het onderwerp oplevert. Al met al is dit hoofdstuk een goede kennismaking met de getaltheorie die het RSA-systeem gebruikt, maar had de leerling meer aangemoedigd kunnen worden zelf in de materie te duiken.

Het RSA-systeem komt in het derde hoofdstuk uitgebreid aan de orde. Het hoofdstuk begint met de sleuteluitwisseling van Diffie en Hellman en daarna wordt de overstap naar RSA gemaakt. In de volgende paragraaf worden de stellingen van Euler en Fermat behandeld die onmisbaar zijn voor het begrip van de werking van

RSA. Uiteindelijk komt alles samen in de behandeling van het RSA-algoritme. Het gebruik van RSA voor het zetten van digitale handtekeningen ontbreekt hier, maar komt in hoofdstuk 4 in een vervolgopdracht aan de orde. In dit vierde en laatste hoofdstuk worden veel aardige suggesties voor vervolgonderzoek gegeven, sommige uitgesproken wiskundig, andere meer in de maatschappelijke of geschiedkundige hoek.

Al met al vind ik dit een heel aardig boekje. Het is zeer geschikt om leerlingen zelfstandig door te laten werken als keuzeonderwerp bij wiskunde B of wiskunde D op het vwo. Ook als uitgangspunt voor een profielwerkstuk voldoet het uitstekend, en er staan in het laatste hoofdstuk heel aardige ideeën voor verder onderzoek. Voor een klassikale behandeling van het onderwerp leent het boekje zich ook zeer zeker, met name wanneer er niet heel veel lessen ter beschikking staan. Wiskundig gezien vind ik dat er niet zo heel veel van de leerlingen gevraagd wordt. De bewijzen en afleidingen staan er meestal wel, maar de rol van de leerling blijft vaak beperkt tot goed lezen, hier en daar wat aanvullen en eenvoudige stukjes bewijzen en narekenen. Het sterke punt van dit boekje vind ik echt het beeld van de ontwikkeling van de cryptografie door de eeuwen heen dat geschetst wordt en de prettige schrijfstijl. Het zal leerlingen zeker weten te boeien en de nieuwsgierigheid naar meer weten te prikkelen.

Over de recensent

Monique Stienstra is wiskundedocent aan het Stedelijk Gymnasium Nijmegen en in haar vrije tijd begeleidt zij plusgroepen in het basisonderwijs bij de reken- en wiskundelessen. Voor cTWO heeft zij in samenwerking met Harm Bakker de module cryptografie geschreven voor vwo wiskunde D. E-mailadres: m.stienstra@stedelijkgymn nijmegen.nl

PI, TAU OF ARCHI

Parameter π is historisch in gebruik gekomen doordat de vroege meetkunde uitging van de diagonaal van een cirkel. In de huidige analyse is de straal de relevante variabele, en dan is ook 2π de relevante parameter. Een aantal van t draaien of slagen in het rond leidt nu tot $2\pi t$ radialen, en het is didactisch ondoorzichtig dat je π hier met 2 moet vermenigvuldigen. Naast Pi-dag op 14 maart (3.14) proberen enkele wiskundigen zoals Michael Hartl, Vi Hart, Peter Harremoes en Bob Palais daarom ook 28 juni (6.28) als Tau-dag te pluggen, met $2\pi = \tau$ (tau). Mijn probleem hiermee is dat τ sterk lijkt op het gangbare symbool voor de straal r zodat hier veel verwarring kan ontstaan. Mijn advies is dat er in ieder geval goed onderzoek wordt gedaan voordat internationaal tot een keuze wordt gekomen. Mijn eigen suggestie is hoofdletter Theta, dus Θ , en dit uit te spreken als 'archi', met verwijzing naar Archimedes. Nadere informatie en links staan hier: vakbladeuclides.nl/896colignatus

Thomas Colignatus

DE INVLOED VAN REKENMACHINE EN GR

Ab van der Roest mijmert over de goede oude tijd, terwijl hij het hedendaags gebruik van de rekenmachine aanschouwt.

Ooit zat ik op de lagere school; dat is de voorloper van de basisschool. We zaten in klassen en niet in groepen. De meester heette meester en de juf heette juf. Het leven was heel overzichtelijk. Ik hield van rekenen. Maakte niet uit of het hoofdrekenen, cijferen of iets anders was. Als er maar gerekend kon worden. Nadat we de tafels geleerd hadden, werd er gecijferd. Bij iets ingewikkelder sommen, sommen die uit meerdere bewerkingen bestonden, was de rekenvolgorde bepaald door Mijnheer Van Dalen Wacht Op Antwoord. (M staat voor machtsverheffen, V voor vermenigvuldigen, D voor delen, W voor worteltrekken, O voor optellen en A voor aftrekken.) Ik denk niet dat ik wist wat machtsverheffen en worteltrekken was, maar het regeltje was nu eenmaal zo. Ik zei al dat het leven zeer overzichtelijk was ...

De uitkomst van de opgave $9 - 3 + 4$ was daarom 2. Van de opgave $8 : 4 \times 2$ was de uitkomst 1. Vandaag zijn beide uitkomsten fout, $9 - 3 + 4 = 10$ en $8 : 4 \times 2 = 4$. Ik weet dat en ik accepteer dat. Als wiskundige zeg ik dan dat de eerste opgave geschreven kan worden als $9 + - 3 + 4$ en is het hopelijk voor iedereen duidelijk dat de uitkomst 10 is.

Ik worstel nog wel met de vraag wie besloten heeft om Mijnheer Van Dalen af te schaffen. Wanneer was dat? Ik heb wel eens begrepen dat de rekenvolgorde veranderde met de komst van de rekenmachine. Als het argument om de bewerkingsvolgorde te veranderen de rekenmachine is, vind ik het een slecht argument.

Lesgevend aan de eerstejaars studenten kwam ik de volgende vergelijking tegen: $x^{0,24} = 7$. Dit was voor menig student, ze doen de overstapcursus van wiskunde A naar wiskunde B, te moeilijk. Uiteraard was er uitgelegd dat $(a^p)^q = a^{pq}$ en met behulp van dit regeltje zou de opgave gemaakt kunnen worden. De oplossing van deze vergelijking

is $x = 7^{\frac{1}{0,24}} = 3320,8$. Toen ik dit uitlegde was mijn

beloning een zeer wazige blik. Een medestudent kwam te hulp: 'Ik doe in dit geval $x = \sqrt[0,24]{7} = 3320,8$, dit geeft hetzelfde antwoord en dat is dan toch ook goed?' De betekenis van $\sqrt[0,24]{7}$ deed er niet toe, want de GR accepteert dit en het goede antwoord komt te voorschijn. Ik legde uit dat $\sqrt[0,24]{7}$ wiskundig gezien geen enkele

betekenis heeft, maar wiskundige correctheid was totaal niet aan de orde, en werd ook nauwelijks geaccepteerd. Zo was het op de middelbare school geleerd, en dat was dus goed.

Een tweede voorbeeld kwam ik eerder tegen. Een leerling kreeg de opdracht de vergelijking van de lijn door de punten (1,4) en (4,10) op te stellen. In plaats van het

verwachte $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{3} = 2$ en van daaruit de vergelijking

$y = 2x + 2$, pakte deze leerling de GR, voerde bij de lijsten de coördinaten in en koos voor *LinReg* en schreef de goede vergelijking op. 'Wat betekent *LinReg*?', vroeg ik aan deze leerling, waarop hij het antwoord schuldig bleef. Het goede antwoord was belangrijk en de leerling vond dat ik daar verder niet moeilijk over moest doen. Natuurlijk is het antwoord goed, want de best passende lijn door twee punten is de lijn door die twee punten. Het kostte me moeite het antwoord goed te keuren.

Als de rekenvolgorde veranderd is door de komst van rekenmachine, dan ben ik bang dat de wiskunde het gaat verliezen van de GR. Een apparaat dat de notatie verandert of de manier van antwoorden overhoop haalt, lijkt me niet wenselijk. Ik pleit er dus voor om de twee gegeven voorbeelden, ik bedoel de wiskundige en niet de rekenvoorbeelden, daarom fout te rekenen. Dat een apparaat fout gemaakt is of dat er misbruik gemaakt wordt van bepaalde functionaliteit van het apparaat, rechtvaardigt geen aanpassing van de wiskunde.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

WEB-DRIEHOEKEN

Met een webgrafiek tekenen we de punten van een rij u_n , waarbij u_{n+1} wordt uitgezet tegen u_n . Indien we kijken naar de recursievergelijking $70 \times u_{n+1} = -39u_n^2 + 409u_n - 382$ (excuses voor de lelijke coëfficiënten), en we starten met $u_0 = 2$, dan blijkt de rij u_n repeterend te zijn: 2, 4, 9, 2, 4, 9, ... In figuur 1 ziet u de bijbehorende webgrafiek.

Bij deze puzzel onderzoeken we repeterende rijen met periode 3, die we aangeven met (a,b,c) . Dat betekent dat de grafieken slechts uit drie punten bestaan, met coördinaten $A(a,b)$, $B(b,c)$ en $C(c,a)$. Daarmee maken we driehoek ABC , die we hier *web-driehoek* zullen noemen, hoewel we daarbij het eigenlijke web en een recursievergelijking strikt genomen niet meer nodig hebben. Bij bovengenoemd voorbeeld geldt $(a,b,c) = (2,4,9)$. We gaan vervolgens enkele eigenschappen van de zo te verkrijgen web-driehoeken onderzoeken. Ten eerste blijkt het zwaartepunt van zo'n web-driehoek op een speciale plaats te liggen.

Opgave 1 – Wat is de meetkundige plaats van de zwaartepunten van alle mogelijk web-driehoeken? Bij de volgende opgaven letten we alleen op de vorm van de web-driehoeken. Het blijkt dan mogelijk om bij elke keuze van (a,b,c) een of meer tripletten $(0,1,d)$ te bepalen zodat deze gelijkvormige driehoeken opleveren met die van (a,b,c) . Wat de vorm betreft kunnen we ons dus zonder verlies van algemeenheid beperken tot tripletten $(0,1,d)$.



figuur 1

Opgave 2 – Bepaal een waarde d uit het triplet $(0,1,d)$, zodanig dat de gevormde driehoek gelijkvormig is met die van $(2,4,9)$ uit figuur 1.

Opgave 3 – Voor welke waarde(n) van d ontstaan er rechthoekige web-driehoeken en welke rechthoekige driehoeken zijn dat?

Opgave 4a – Voor welke waarde(n) van d ontstaan er gelijkbenige niet-rechthoekige web-driehoeken?

Opgave 4b – Bepaal de tophoek van één zo'n gelijkbenige driehoek, in graden, de sinus, cosinus of tangens, net wat het mooiste uitkomt.

Extra – In welke speciale rechthoekige driehoek vind je een hoek gelijk aan de tophoek van de bedoelde web-driehoeken van opgave 4?

Het zal blijken dat niet alle willekeurige driehoeken op deze manier gemaakt kunnen worden. Er zijn grenzen aan de grootte van de hoeken.

Opgave 5 – Onderzoek (toon aan) wat die grenzen zijn. Een constructie met bijvoorbeeld *Geogebra* kan u helpen een idee te krijgen van de mogelijkheden, maar we vragen u exact te bepalen wat de grenzen zijn van de hoeken van alle mogelijke web-driehoeken.

Inzenden oplossingen

Heeft u een of meer van de opgaven beantwoord, doe dan eens gek en doe mee.

Oplossingen kunt u mailen naar liekewobien@hotmail.nl of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. U kan weer 20 punten verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. De deadline is 20 juni a.s.

GOOCHELEN MET NULLEN

Bij deze puzzel moesten rijtjes gehele positieve getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ worden gemaakt, waarbij elk getal ontstaat uit het vorige door óf te vermenigvuldigen met een gehele positieve factor f , óf door het schrappen van een of meer nullen. Het eerste getal a_1 werd gegeven. De kwaliteit van de rijtjes werd bepaald door een zo klein mogelijke waarde van a_n . Bij gelijke a_n was het kortste rijtje de beste. Het zal blijken dat het altijd kan met $n \leq 5$, en $a_n = 1, 3$ of 9 .

Het idee kwam van een oude Russische Olympiadeopgave. Daar werd slechts gevraagd te bewijzen dat $a_n < 10$ altijd mogelijk is.

De oplossing:^[1] $a_1 \xrightarrow{f} 11111\dots11 \xrightarrow{82} 9111\dots102 \longrightarrow 9111\dots12 \xrightarrow{9} 82000\dots008$
 $\longrightarrow 828 \xrightarrow{25} 20700 \longrightarrow 27 \xrightarrow{4} 108 \longrightarrow 18 \xrightarrow{5} 90 \longrightarrow 9$. Kortom, $a_n \leq 9$.

Knap als leerlingen dat vonden! Voor ons probleem is dit echter geen optimaal rijtje.

Als hint vroegen wij in opgave 1 naar de minimale waarden n en a_n als $a_1 = 2^k$ of 5^k . Dat werd door alle inzenders (15) goed beantwoord: $n = 3$ en $a_n = 1$. Rijtjes: $a_1, 2^k \cdot 5^k = 10^k, 1$. Voor machten van 10 geldt uiteraard $n = 1$.

Bij opgave 3 werd gevraagd naar een verklaring waarom bepaalde startgetallen niet tot 1 zijn te slopen, zoals K. Vugs dat noemde. Ook dat bleek niet al te lastig: alle drie- en negenvouden. Het schrappen van nullen heeft immers geen invloed op de deelbaarheid door 3 of 9. Dus alle drie-(niet negen)vouden zijn op z'n best te slopen tot 3 en de negenvouden tot 9. Als we op 1 willen uitkomen moet je dus nooit met een drievoud vermenigvuldigen.

Bij opgaven 2 en 4 waren de startgetallen: 2 tot en met 12, 17, 33, 37, 42, 99 en 101. Er zijn meerdere beste rijtjes. Voorbeelden van nog niet besproken oplossingen:

6, 30, 3	17, 6205, 625, 10^4 , 1	42, 1092, 192, $3 \cdot 10^6$, 3
7, 30002, 32, 10^5 , 1	33, 108075, 1875, $3 \cdot 10^4$, 3	99, 920106, 9216, $9 \cdot 10^{10}$, 9
11, 10208, 128, 10^7 , 1	37, 1063084, 16384, 10^{14} , 1	101, 10020008, 128, 10^7 , 1
12, 300, 3		

Meerdere inzenders kwamen tot de volgende strategie:

Als a_1 niet deelbaar is door 3: $a_2 = f \cdot a_1$, waarbij $f \cdot a_1$ een macht is van 2 of 5 waar nullen tussen of achter zijn geplaatst. Dat kan dan na het schrappen van nullen in nog twee stappen worden gesloopt tot $a_5 = 1$. Dus $n = 5$, $a_n = 1$. Analoog: Als a_1 deelbaar is door 3 of 9 zoeken we een f zodat $f \cdot a_1$ de vorm heeft van $3 \cdot 2^k$ of $3 \cdot 5^k$ respectievelijk $9 \cdot 2^k$ of $9 \cdot 5^k$, waar nullen tussen of achter zijn geplaatst. De conclusie is dan dat alle gevraagde waarden van a_1 met $n \leq 5$ tot 1, 3 of 9 kunnen worden gesloopt, afhankelijk van de deelbaarheid door 3 en 9. Ruim de helft van de inzenders is dat ook gelukt. G. Riphagen en H. Bakker bevestigden ook nog eens met een computerprogramma dat dat ook lukt voor alle a_1 tot en met 1000 of zelfs 100000.

De kunst is om de juiste machten van 2 of 5 (of het drie- of negenvoud daarvan) te vinden die na het plaatsen van nullen deelbaar zijn door a_1 . Dat kan door gebruik te maken van deelbaarheidscriteria. J. Remijn gaf daarvoor een verrassend lijstje met criteria voor alle door ons gevraagde waarden van a_1 . Maar de meeste inzenders bekeken alle mogelijke resten van machten van 10 gedeeld door a_1 . Vermenigvuldig dan elk cijfer van zo'n twee- of vijf-macht ($\times 3$ of $\times 9$) met een van die resten en tel die op. Als het lukt om

daarmee een som te maken die deelbaar is door a_1 zijn we klaar. In sommige gevallen kunnen we het al snel zien, zoals enkele inzenders opmerkten:

- als de som van de cijfers van een twee- of vijf-macht ($\times 3$ of $\times 9$) gelijk is aan a_1 of een veelvoud daarvan. Voorbeelden: 7 met 16 of 25, 11 met 128;
- als de resten van $10^k/a_1$ alle waarden 1 tot en met $a_1 - 1$ kunnen zijn, dan lukt het met elk getal van minstens twee cijfers. Voorbeelden: 7 en 17 met 16 of 25;
- Als er een k bestaat waarbij $10^k/a_1$ rest $a_1 - 1$ heeft, ofwel $10^k \equiv -1 \pmod{a_1}$. En dat zijn er een heleboel, zoals 7, 11, 13 en 101. Dan lukt het voor a_1 niet deelbaar door 3 met $2^{13} = 8192$, $8+2 = 9+1$, dus kies de 8 en de 2 op een positie met rest 1 en de 1 en 9 met rest -1 .

F. Göbel en G. Bouwhuis stelden enkele oneindige rijen op van getallen die met $n = 5$ te slopen zijn tot 1. Een mooie van F. Göbel is: voor elke u en v kan je $10^u(5^v - 1) + 1$ als startgetal nemen. Vermenigvuldig je dat met 5, dan krijg je een getal dat na het schrappen van u nullen omgezet wordt in 5^{v+1} . Enkele inzenders waagden zich aan het vermoeden dat het altijd lukt om met $n \leq 5$ tot 1 of in geval van drie-(niet negen)vouden tot 3 en voor negenvouden tot 9 te komen. Naar mate we meer cijfers hebben in twee- of vijf-machten, zijn er steeds meer mogelijkheden om nullen te plaatsen en neemt de kans sterk toe dat dit ook tot een oplossing leidt. Wobien stelde een bewijs op, maar (veel) te lang voor dit artikel. Als u daar belangstelling voor heeft, stuur dan een mailtje naar liekewobien@hotmail.nl.

Noten

[1] <http://cms.math.ca/crux/v23/n2/page78-80.pdf>

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na 89-4 is:

K. Vugs	147
F. Göbel	142
G. Bouwhuis	136
J. Meerhof	124
R. Stolwijk	113
H. Bakker	112
J. Verbakel	98
L. Pos	86
G. Riphagen	82
J. Remijn	71

De felicitaties en de boekenbon gaan naar K. Vugs

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Dick Klingens
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzenden bijdragen

Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard, Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
– leden: € 80,00
– leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
– studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
– leden van de VVWL of het KWG: € 50,00
Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

2014

vr 12/09 EINDHOVEN
Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr 07/11 EINDHOVEN
Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

za 08/11 VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag
Organisatie NVvW

2015

vr/za 30/01-31/01 Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

19-29/01 LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

JAARGANG 89

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	17 september 2013	24 juni 2013
2	5 november 2013	2 september 2013
3	17 januari 2014	28 oktober 2013
4	6 februari 2014	2 januari 2014
5	25 april 2014	27 januari 2014
6	13 mei 2014	17 april 2014
7	24 juni 2014	6 mei 2014

Uitdaging:

Kiest u voor de workshop of ontdekt u de *fx-CG20* zelf?

Ontdek de eenvoud van de *fx-CG20* in een professionele Casio Workshop, die op afspraak én bij u op locatie kosteloos zal worden gegeven. Casio Educatief Consulent David Kropveld zorgt er voor dat u zich de werking van de *fx-CG20* in korte tijd eigen maakt. Vele collega's gingen u voor.

- Supersnel resultaat in berekening én weergave.
- Menustructuur op basis van iconen navigatie.
- Hogeresolutie LCD-kleurenscherm 65.000 kleuren.
- Haarscherpe grafieken: weergave als in een studieboek.
- Software voor projectie en presentatie in de klas.

Test u de *fx-CG20* of een andere Casio rekenmachine liever zélf? Maak dan gebruik van een speciaal geprijsd docentenexemplaar.

Kijk op:
www.casio-educatie.nl



3 jaar
garantie

Informeer naar de Casio *fx-CG20* Workshop of bestel uw exemplaar voor € 39,50 via e-mail: educatie@casio.nl



CASIO *fx-9860GII*

Rekengemak: de grafische rekenmachine *fx-9860GII* met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB groot Flash-ROM-geheugen.



CASIO *fx-82ES PLUS*

Geniale oplossing: de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx-82ES Plus*, met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie. Het puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl

MODERNE WISKUNDE



Kent u de 10e editie van
Moderne Wiskunde al?



Noordhoff Uitgevers

Nieuw

Moderne Wiskunde 10^e editie vmbo en havo/vwo onderbouw

Moderne Wiskunde is op maar liefst 10 punten verbeterd, waaronder:

- gebaseerd op nieuwe tussendoelen en referentieniveaus;
- perfecte afstemming tussen vmbo en havo/vwo;
- sterk verbeterde ICT voor leerlingen en docenten;
- RTTI-toetsen.

Met *Moderne Wiskunde* bereidt u uw leerlingen optimaal voor op de tussentoets, het eindexamen en het vervolgonderwijs!

Meer weten?

Ga naar www.modernewiskunde.noordhoff.nl

Vraag
nu een
beoordelings-
exemplaar
aan!

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent