

ONTDEKKINGSTOCHT 2

Aanvullend op het artikel van Stephan Berendonk en Leon van den Broek hierbij het bijbehorende lesmateriaal. In dit document vindt u eerst het leelingsmateriaal en verderop het materiaal aangevuld met opmerkingen voor docenten.

Les 2 – Hoekpunten, ribben, vlakken

Het vermoeden

Opdracht

Bouw een veelvlak en tel daarvan het aantal hoekpunten, ribben en vlakken.

Iemand zegt: *Hoe meer vlakken, des te meer hoekpunten en ribben er zijn.* Is dat zo? Dat gaan we onderzoeken.

Vraag 1

Laat zien, dat de volgende uitspraken niet kloppen:

1. *Hoe meer hoekpunten een veelvlak heeft, hoe meer ribben heeft het.*
2. *Hoe meer hoekpunten een veelvlak heeft, hoe meer vlakken heeft het.*
3. *Hoe meer ribben een veelvlak heeft, hoe meer vlakken heeft het.*

Vraag 2

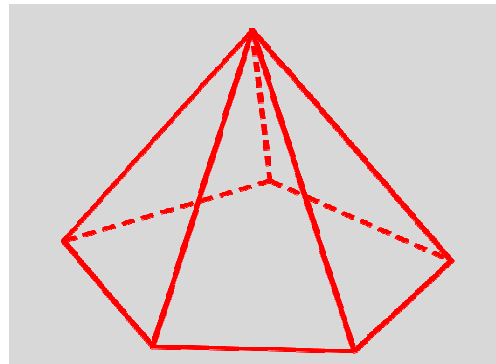
Is er toch een verband tussen de drie aantallen?

We gaan deze formule in de volgende vragen controleren.

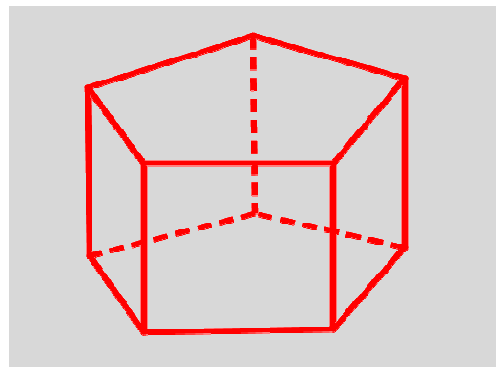
Vraag 3

Hiernaast zie je een vijfzijdige piramide (boven), een vijfzijdig prisma (midden) en een vijfzijdig antiprisma (onder).

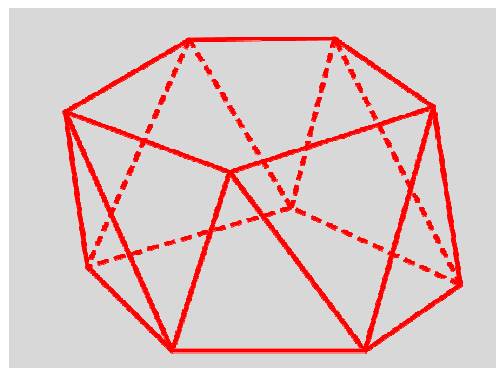
- a Controleer, dat de formule voor een n -zijdig piramide geldt.
- b Controleer, dat de formule voor een n -zijdig prisma geldt.
- c Controleer, dat de formule voor een n -zijdig antiprisma geldt.



vijfzijdige piramide



vijfzijdig prisma

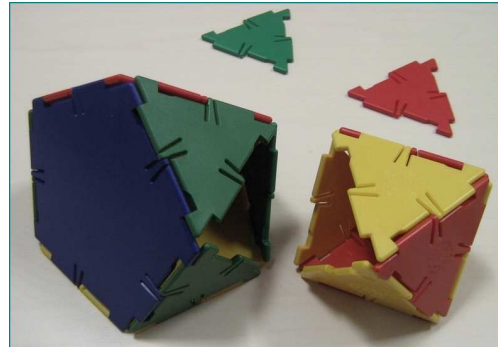
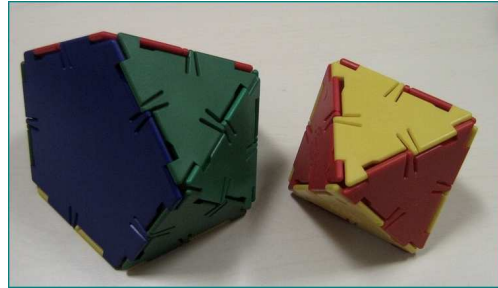


vijfzijdig antiprisma

Vraag 4

Je hebt twee veelvlakken, waarvoor de formule geldt en een vlak van het eerste veelvlak is congruent met een vlak van het tweede veelvlak. Verwijder deze gelijke vlakken en plak de twee veelvlakken langs hun rand aan elkaar. Hierdoor krijg je een nieuw veelvlak. (Hiernaast is dat in een voorbeeld gedemonstreerd.)

Controleer, dat de formule ook voor dit nieuwe veelvlak geldt.

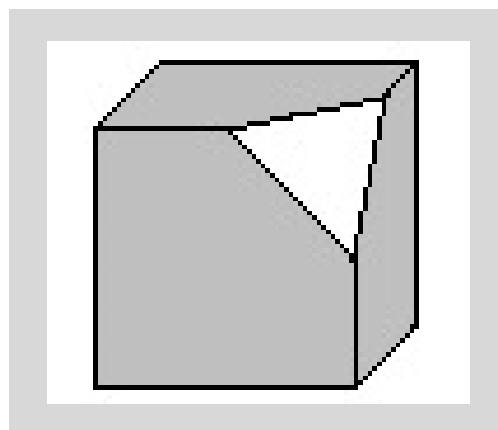


Vraag 5

Van een veelvlak kun je een hoek afkappen. Dat is hiernaast als voorbeeld gebeurd bij een kubus. Het afgekapte stuk is een driezijdige piramide.

We gaan uit een veelvlak waarvoor de formule geldt. Van dat veelvlak kappen we een hoek af; zeg een n-zijdige piramide. Dan krijgen we een nieuw veelvlak.

Controleer dat de formule ook voor dit nieuwe veelvlak geldt.



Op de bol

Opdracht

Deel de bol op in gebieden. (Tekenen alleen de grenzen van de gebieden.)

Een gemeenschappelijke grens van twee gebieden noemen we een ribbe. Een punt waar meer dan twee gebieden samenkomen noemen we een hoekpunt. De gebieden zelf noemen we vlakken.

Vraag 6

Geldt de formule voor de zo gemaakte kaart?

Vraag 7:

Een gewone voetbal wordt door de naden verdeeld in gebieden: 12 vijfhoeken en 20 zeshoeken.

- a Bepaal het aantal hoekpunten en het aantal ribben van de voetbal en controleer dat de formule ook voor de voetbal geldt.

Een basketbal wordt door de gleuven verdeeld in gebieden.

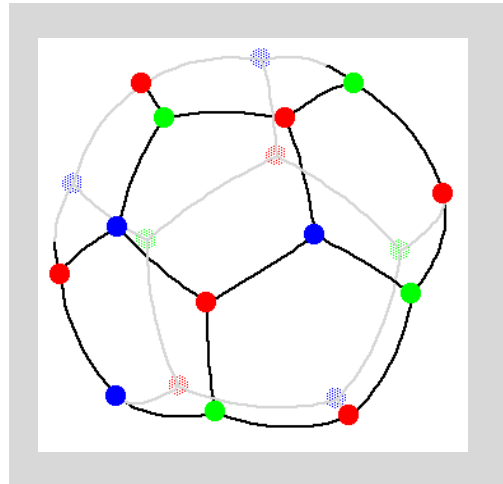
- b Bepaal het aantal hoekpunten, ribben en vlakken van de basketbal en controleer dat de formule ook voor de basketbal geldt.

Opdracht

Kies vijf punten op de bol. Probeer elk punt met elk ander punt door een lijn te verbinden, zonder dat de lijnen elkaar snijden.

Opdracht

Een gewone voetbal bestaat - zoals gezegd - uit 12 vijfhoeken en 20 zeshoeken. Probeer eens een voetbal te maken, die alleen uit zeshoeken bestaat. Dus verdeel je plastic bol zo in gebieden, dat elk gebied een zeshoek is.



Uitleg van de formule mbv Polydron

We gaan een kubus bouwen met Polydron. We hebben zes losse vierkanten.

We beginnen met een vierkant (stap 1); daar klikken we een vierkant aan vast (stap 2); dan kunnen we op verschillende manieren verder gaan. We moeten het zo doen dat er steeds één rand is. Na zes stappen is de kubus af. We volgen het aantal hoekpunten en het aantal ribben die er in totaal na elke stap zijn.

Vraag 8

a. Vul de tabel in:

Na stap	1	2	3	4	5	6
H	4	6				
R	4	7				
$R-H$	0	1				

b. Kun je uitleggen dat bij elke stap, behalve de eerste en de laatste, H met 1 meer stijgt dan R ?

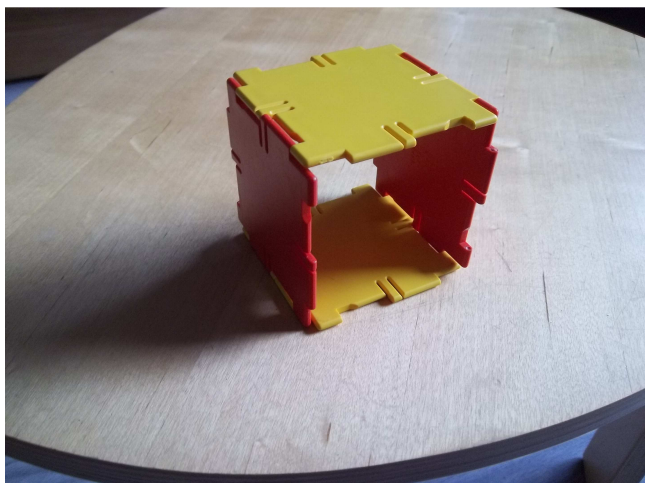
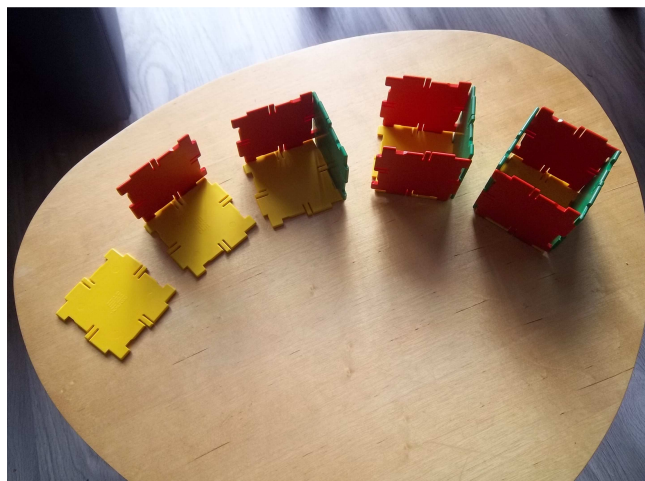
Het aantal stappen is gelijk aan V .

c. Hoe volgt hieruit dat $R-H = V-2$

Dit geldt voor elk veelvlak dat met Polydron (op de zojuist beschreven manier) gebouwd kan worden:

- Bij elke stap, behalve de eerste en de laatste, neemt R met 1 meer toe dan H
- Na de eerste stap is $R-H = 0$ en bij de laatste stap veranderen R en H niet.
- Het aantal stappen is gelijk aan V .

Gevolg: $R+2 = H+V$



Dit is een foute manier om de kubus te bouwen, want nu heeft het bouwsel na de vierde stap twee randen.

Uitleg van de formule mbv Zoomtool

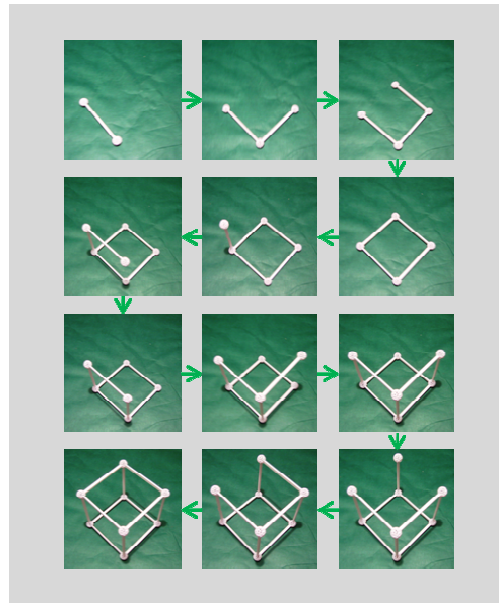
We gaan nu de kubus bouwen met Zoomtool. We hebben twaalf losse ribben en acht losse hoekpunten.

We beginnen met een hoekpunt (stap 0); daar maken we een ribbe aan vast en aan het vrije uiteinde weer een hoekpunt (stap1); dan kunnen we op verschillende manieren verder gaan.

Telkens als we een ribbe met een vrij uiteinde hebben toegevoegd, steken we een hoekpunt aan dat uiteinde: dat is een stap van type 1; bijvoorbeeld is stap 1 een stap van type 1.

Anders verbinden we twee hoekpunten met een ribbe: dat is een stap van type 2.

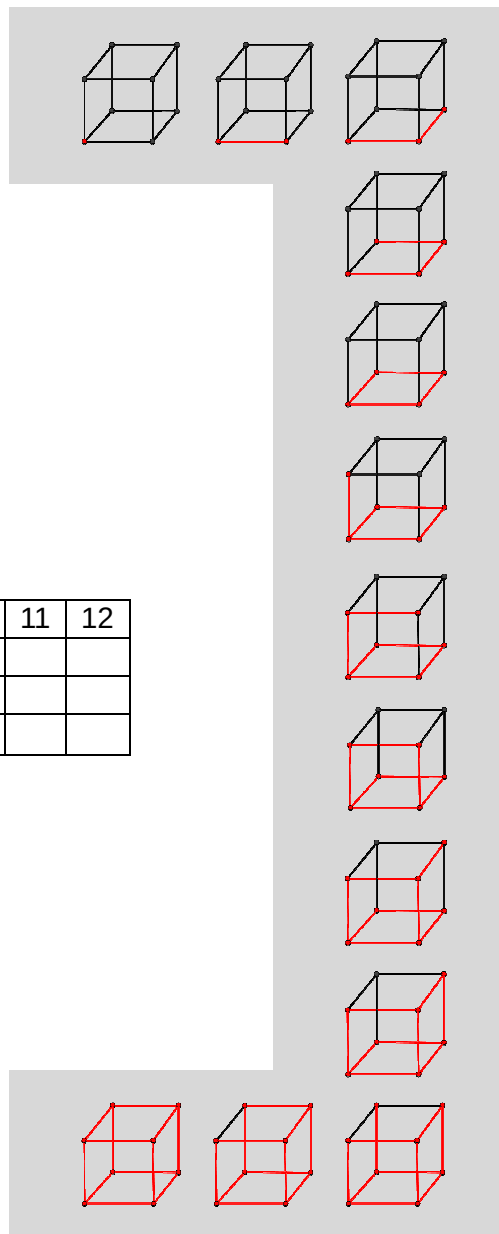
Na 12 stappen is de kubus af.



Vraag 9

In het plaatje hiernaast zien we een kubus waarvan in het begin alleen een hoekpunt gekleurd is. Daarna komt er bij elke stap een gekleurde ribbe bij. Dit kleuringsproces correspondeert met de boven afgebeelde bouw van de kubus met Zoomtool.

We stellen ons voor, dat we op deze kubus leven en dat de gekleurde ribben en hoekpunten grenzen zijn, die we niet kunnen oversteken. In het begin kunnen we vanuit elk punt van de kubus elk ander punt van de kubus bereiken. Na de **vierde stap** kan dat voor het eerst niet meer. Dan zijn er twee aparte landen ontstaan. We volgen het aantal landen L en het aantal hoekpunten H die er in totaal na elke stap zijn.



a. Vul de tabel in:

na stap	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H	1	2	3										
L	1	1	1										
$H+L$	2	3	4										

b. Ga na dat bij elke stap van type 1 H met 1 toeneemt en L hetzelfde blijft.

c. Ga na dat bij elke stap van type 2 L met 1 toeneemt en H hetzelfde blijft.

d. Leg uit dat bij elke stap $H+L$ met 1 toeneemt.

e. Ga na dat er aan het einde V landen zijn.

Het aantal stappen is R

f. Leg uit dat $H+V = 2+R$.

Dit geldt voor elk (convex) veelvlak dat met Zoomtool gebouwd kan worden:

- Voor de eerste stap is $H+L = 2$.
- Na de laatste stap is $L = V$.

-
- Bij elke stap neemt $H+L$ met 1 toe.
 - Het aantal stappen is gelijk aan R .
- Gevolg: $2+R = H+V$.

Uitleg van de formule mbv een bouwplaat

Opdracht

Voor je ligt een bouwplaat van een bepaald veelvlak. Kleur de rand van de bouwplaat met blauw. Kleur de vouwlijnen van de bouwplaat, die niet op de rand liggen rood. Vouw nu het veelvlak. Elke ribbe van het ontstane veelvlak is of blauw of rood. De rode kanten zijn de gevouwen ribben en de blauwe ribben zijn de geplakte ribben.

Vraag 10

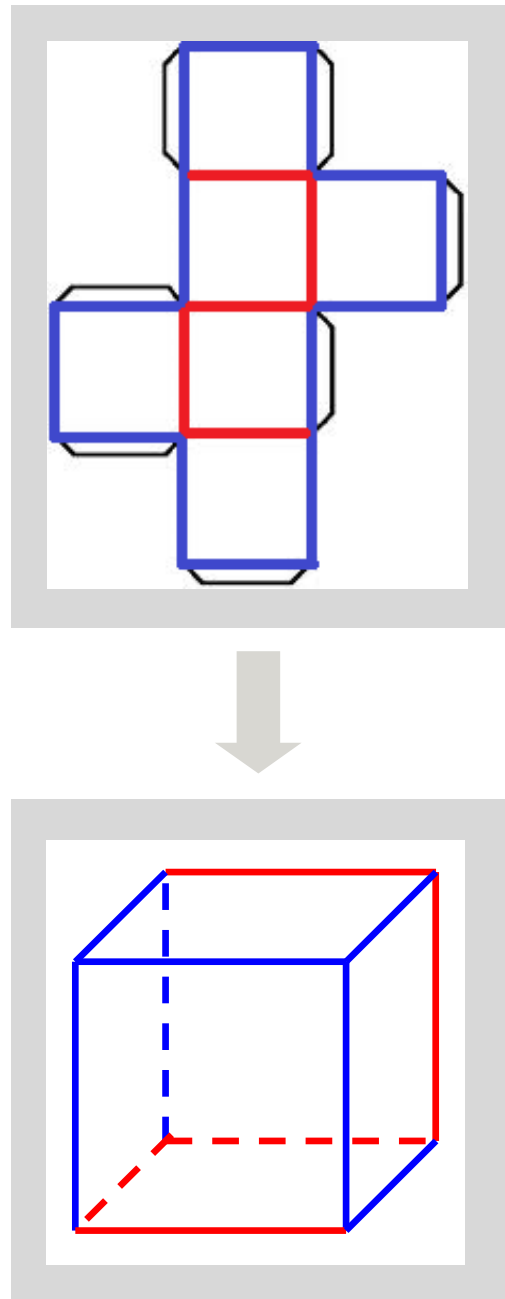
- Hoeveel vlakken heeft jouw veelvlak? Langs hoeveel ribben heb je gevouwen?
- Hoeveel hoekpunten heeft jouw veelvlak? Hoeveel paren van ribben heb je aan elkaar geplakt?
- Vergelijk deze aantallen met die van je klasgenoten. Valt je iets op?

Vraag 11

- Alle hoekpunten van onze bouwplaten liggen op de rand. Kan een hoekpunt van een bouwplaat ook in het inwendige liggen?
- Op de gebouwde veelvlakken kun je vanuit elk hoekpunt naar elk ander hoekpunt via een pad van blauwe ribben lopen. Waarom is dat zo? (Hint: De bouwplaat heeft al deze eigenschap.)
- Op de gebouwde veelvlakken kun je slechts op een manier vanuit elk hoekpunt naar elk ander hoekpunt via een pad van blauwe ribben lopen, zonder dat je een ribbe twee keer doorloopt. Waarom is dat zo?
- Leid uit b. en c. af, dat voor onze veelvlakken geldt:
hoekpunten = geplakte ribben + 1.
- Knip je in een van onze bouwplaten langs een rode ribben, dan zal die bouwplaat in twee stukken uit elkaar vallen.
Leid hieruit af, dat voor onze veelvlakken geldt:
vlakken = gevouwen ribben + 1

Uit d. en e. volgt ten slotte:

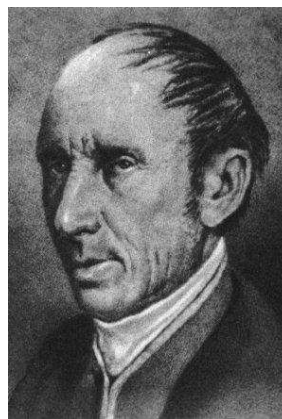
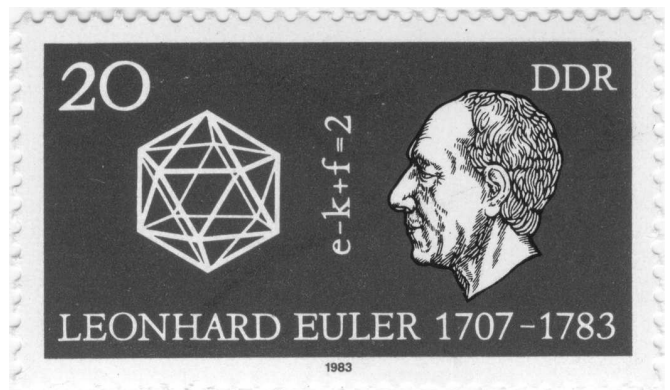
hoekpunten + vlakken =
(geplakte ribben + 1) + (gevouwen ribben + 1) =
ribben + 2



Ter informatie

Veelvlakken trekken van oudsher het interesse van de mensen. Een typische probleem was het bepalen van het volume van zulke objecten. Al de oude grieken besteden hier veel aandacht aan. Bij zulke vragen spelen de afmetingen van de veelvlakken een rol: de grootte van de hoeken of de lengtes van de ribben zijn van belang. Dat je ook slechts op het aantal hoekpunten, ribben en vlakken van een veelvlak kunt letten, bleef heel lang verborgen. De in deze les behandelde formule is dan ook pas in 1750 ontdekt, en wel door de Zwitserse wiskundige Leonard Euler. De formule staat daarom vandaag bekend als de formule van Euler. Vaak wordt de formule als geboorteuur van de topologie beschouwd. Topologie is een deelgebied van de pure wiskunde, zoals algebra, kansrekening of analyse, waarin echter de grootte van hoeken en afstanden er niet toe doen.

Toen Euler de formule in 1750 ontdekte, had hij er nog niet meteen een bewijs voor. Dat vond hij pas een jaar later. Sindsdien zijn er allerlei verschillende bewijzen voor de formule bijgekomen. Het bewijs mbv Polydron is afkomstig van de Franse wiskunde A. Cauchy, het bewijs mbv een bouwplaat is van de Duitse wiskundige von Staudt.



Augustin Louis Cauchy



Karl Georg Christian von Staudt

Les 2 – Hoekpunten, ribben, vlakken

Het vermoeden

Opdracht

Bouw een veelvlak en tel daarvan het aantal hoekpunten, ribben en vlakken.

Iemand zegt: *Hoe meer vlakken, des te meer hoekpunten en ribben er zijn.* Is dat zo? Dat gaan we onderzoeken.

Vraag 1

Laat zien, dat de volgende uitspraken niet kloppen:

1. *Hoe meer hoekpunten een veelvlak heeft, hoe meer ribben heeft het.*
2. *Hoe meer hoekpunten een veelvlak heeft, hoe meer vlakken heeft het.*
3. *Hoe meer ribben een veelvlak heeft, hoe meer vlakken heeft het.*

Vraag 2

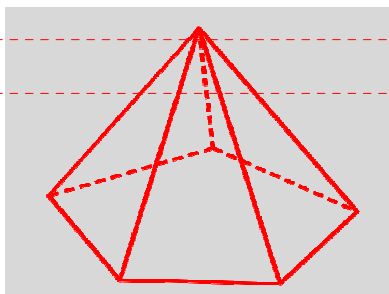
Is er toch een verband tussen de drie aantallen?

We gaan deze formule in de volgende vragen controleren.

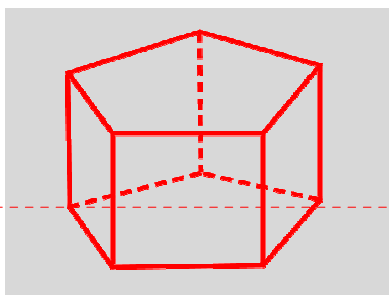
Vraag 3

Hiernaast zie je een vijfzijdige piramide (boven), een vijfzijdig prisma (midden) en een vijfzijdig antiprisma (onder).

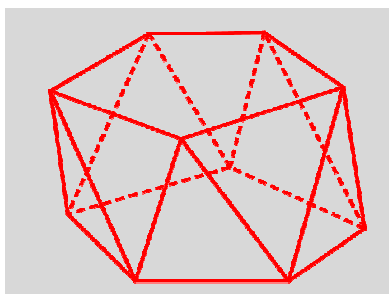
- a. Controleer, dat de formule voor een n -zijdig piramide geldt.
- b. Controleer, dat de formule voor een n -zijdig prisma geldt.
- c. Controleer, dat de formule voor een n -zijdig antiprisma geldt.



vijfzijdige piramide



vijfzijdig prisma



vijfzijdig antiprisma

Kommentar [SB1]: (Deel Polydron aan de scholieren uit. Geef niet iedereen dezelfde vlakken; dan krijg je meer verschillende voorbeelden)

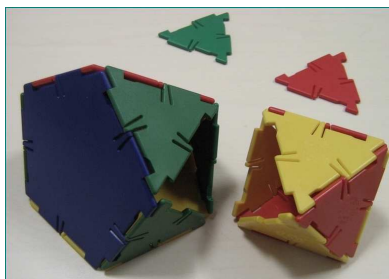
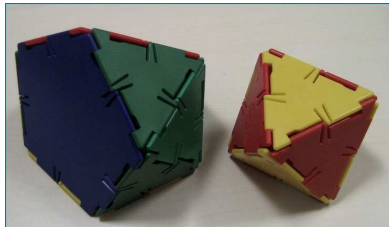
Kommentar [SB2]: Inventariseer de resultaten in een tabel.

Kommentar [SB3]: (Vermoeden op het bord: hoekpunten – ribben + vlakken = 2)

Vraag 4

Je hebt twee veelvlakken, waarvoor de formule geldt en een vlak van het eerste veelvlak is congruent met een vlak van het tweede veelvlak. Verwijder deze gelijke vlakken en plak de twee veelvlakken langs hun rand aan elkaar. Hierdoor krijg je een nieuw veelvlak. (Hiernaast is dat in een voorbeeld gedemonstreerd.)

Controleer, dat de formule ook voor dit nieuwe veelvlak geldt.

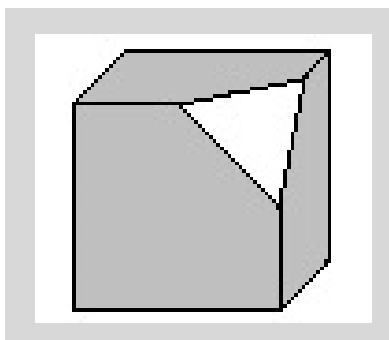


Vraag 5

Van een veelvlak kun je een hoek afkappen. Dat is hiernaast als voorbeeld gebeurd bij een kubus. Het afgekapte stuk is een driezijdige piramide.

We gaan uit een veelvlak waarvoor de formule geldt. Van dat veelvlak kappen we een hoek af; zeg een n-zijdige piramide. Dan krijgen we een nieuw veelvlak.

Controleer dat de formule ook voor dit nieuwe veelvlak geldt.



Op de bol

Opdracht

Deel de bol op in gebieden. (Tekenen alleen de grenzen van de gebieden.)

Een gemeenschappelijke grens van twee gebieden noemen we een ribbe. Een punt waar meer dan twee gebieden samenkomen noemen we een hoekpunt. De gebieden zelf noemen we vlakken.

Vraag 6

Geldt de formule voor de zo gemaakte kaart?

Vraag 7:

Een gewone voetbal wordt door de naden verdeeld in gebieden: 12 vijfhoeken en 20 zeshoeken.

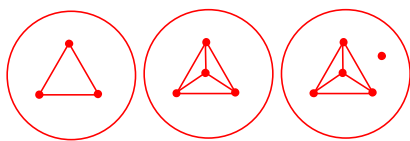
- a Bepaal het aantal hoekpunten en het aantal ribben van de voetbal en controleer dat de formule ook voor de voetbal geldt.

Een basketbal wordt door de gleuven verdeeld in gebieden.

- b Bepaal het aantal hoekpunten, ribben en vlakken van de basketbal en controleer dat de formule ook voor de basketbal geldt.

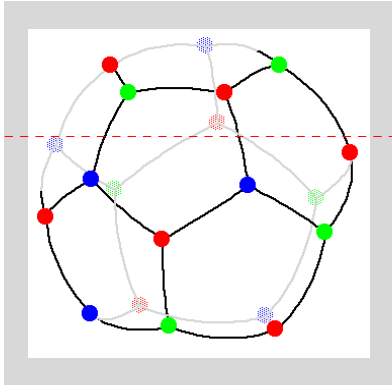
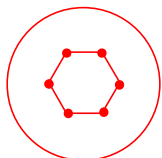
Opdracht

Kies vijf punten op de bol. Probeer elk punt met elk ander punt door een lijn te verbinden, zonder dat de lijnen elkaar snijden.



Opdracht

Een gewone voetbal bestaat - zoals gezegd - uit 12 vijfhoeken en 20 zeshoeken. Probeer eens een voetbal te maken, die alleen uit zeshoeken bestaat. Dus verdeel je plastic bol zo in gebieden, dat elk gebied een zeshoek is.



Kommentar [SB4]: (Iedereen krijgt een plastic bol en een pen)



Kommentar [SB5]: Leraar laat zien waarom dit niet mogelijk is. Als volgt. Je mag veronderstellen (door topologische ver-vormingen) dat drie punten dicht bij elkaar liggen. De driehoek verdeelt de bol in twee stukken. In welk van die twee stukken een vierde punt ligt, mag ik kiezen. Ik maak een keuze; zie het tweede plaatje. De bol is nu verdeeld in vier gebieden. Het vijfde punt ligt in één van deze gebieden; welk gebied ik daarvoor kies is niet relevant. Ik maak een keuze; zie het derde plaatje. Het vijfde punt ligt daar buiten de driehoek waarmee ik begon en het vierde punt ligt erbinnen. Die kunnen dus niet met elkaar verbonden worden.

Met behulp van de formule van vraag 3 is het eenvoudiger. Als volgt. Stel dat je een graaf hebt van vijf punten waarbij elk tweetal verbonden is. Dan heb je een graaf met louter driehoeken.
 $H = 5$, $R = 5 \times 4 : 2 = 10$, volgens de formule is dus $V = 7$. Omdat de graaf uit louter driehoeken bestaat, is $R = 3V : 2 = 10\frac{1}{2}$. Tegenspraak.

Kommentar [SB6]: Leraar laat zien waarom dit niet mogelijk is.
* We veronderstellen dat in elk hoekpunt ten minste drie vlakken samenkomen. Als dat niet zo hoeft te zijn, kunnen we het volgende voorbeeld maken van twee zeshoeken op de bol:

* Mét die veronderstelling is het zonder de formule van vraag 3 te gebruiken zeer lastig aan te tonen dat er geen verdeling van de sfeer in louter zeshoeken bestaat. Mét de formule kan dat wel vrij gemakkelijk. Als volgt. Er geldt: $R = 6V : 2 = 3V$. Omdat in elk hoekpunt ten minste drie vlakken samenkomen is
 $H \geq 6V : 3 = 2V$. Dus $H - R + V \geq 2V - 3V + V = 0 \neq 2$. Tegenspraak.

Uitleg van de formule mbv Polydron

We gaan een kubus bouwen met Polydron. We hebben zes losse vierkanten. We beginnen met een vierkant (stap 1); daar klikken we een vierkant aan vast (stap 2); dan kunnen we op verschillende manieren verder gaan. We moeten het zo doen dat er steeds één rand is. Na zes stappen is de kubus af. We volgen het aantal hoekpunten en het aantal ribben die er in totaal na elke stap zijn.

Vraag 8

a. Vul de tabel in:

Na stap	1	2	3	4	5	6
H	4	6				
R	4	7				
$R-H$	0	1				

b. Kun je uitleggen dat bij elke stap, behalve de eerste en de laatste, H met 1 meer stijgt dan R ?

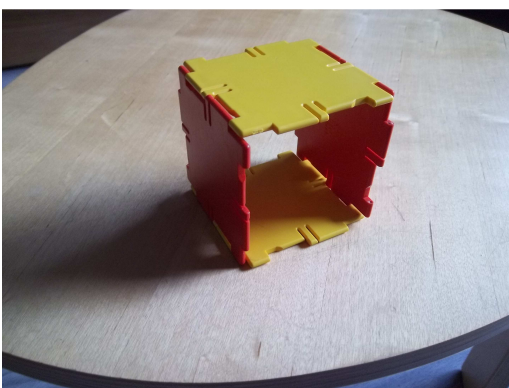
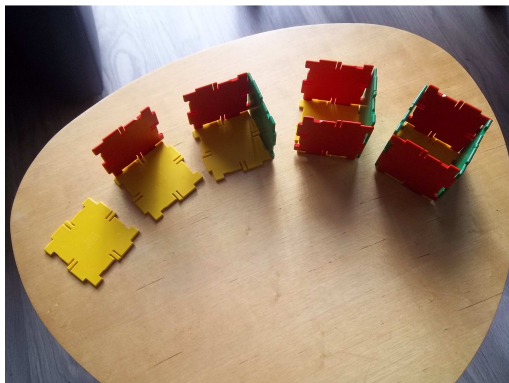
Het aantal stappen is gelijk aan V .

c. Hoe volgt hieruit dat $R-H = V-2$

Dit geldt voor elk veelvlak dat met Polydron (op de zojuist beschreven manier) gebouwd kan worden:

- Bij elke stap, behalve de eerste en de laatste, neemt R met 1 meer toe dan H
- Na de eerste stap is $R-H = 0$ en bij de laatste stap veranderen R en H niet.
- Het aantal stappen is gelijk aan V .

Gevolg: $R+2 = H+V$



Dit is een foute manier om de kubus te bouwen, want nu heeft het bouwset na de vierde stap twee randen.

Kommentar [SB7]: (Iedereen krijgt zes vierkanten van Polydron)

Uitleg van de formule mbv Zoomtool

We gaan nu de kubus bouwen met Zoomtool. We hebben twaalf losse ribben en acht losse hoekpunten.

We beginnen met een hoekpunt (stap 0); daar maken we een ribbe aan vast en aan het vrije uiteinde weer een hoekpunt (stap1); dan kunnen we op verschillende manieren verder gaan.

Telkens als we een ribbe met een vrij uiteinde hebben toegevoegd, steken we een hoekpunt aan dat uiteinde: dat is een stap van type 1; bijvoorbeeld is stap 1 een stap van type 1.

Anders verbinden we twee hoekpunten met een ribbe: dat is een stap van type 2.

Na 12 stappen is de kubus af.

Vraag 9

In het plaatje hiernaast zien we een kubus waarvan in het begin alleen een hoekpunt gekleurd is. Daarna komt er bij elke stap een gekleurde ribbe bij. Dit kleuringsproces correspondeert met de boven afgebeelde bouw van de kubus met Zoomtool.

We stellen ons voor, dat we op deze kubus leven en dat de gekleurde ribben en hoekpunten grenzen zijn, die we niet kunnen oversteken. In het begin kunnen we vanuit elk punt van de kubus elk ander punt van de kubus bereiken. Na de **vierde stap** kan dat voor het eerst niet meer. Dan zijn er twee aparte landen ontstaan. We volgen het aantal landen L en het aantal hoekpunten H die er in totaal na elke stap zijn.

a. Vul de tabel in:

na stap	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H	1	2	3										
L	1	1	1										
$H+L$	2	3	4										

b. Ga na dat bij elke stap van type 1 H met 1 toeneemt en L hetzelfde blijft.

c. Ga na dat bij elke stap van type 2 L met 1 toeneemt en H hetzelfde blijft.

d. Leg uit dat bij elke stap $H+L$ met 1 toeneemt.

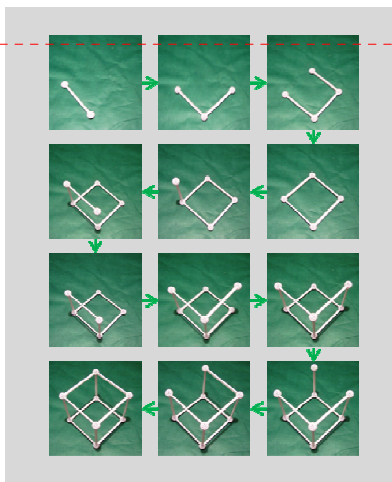
e. Ga na dat er aan het einde V landen zijn.

Het aantal stappen is R

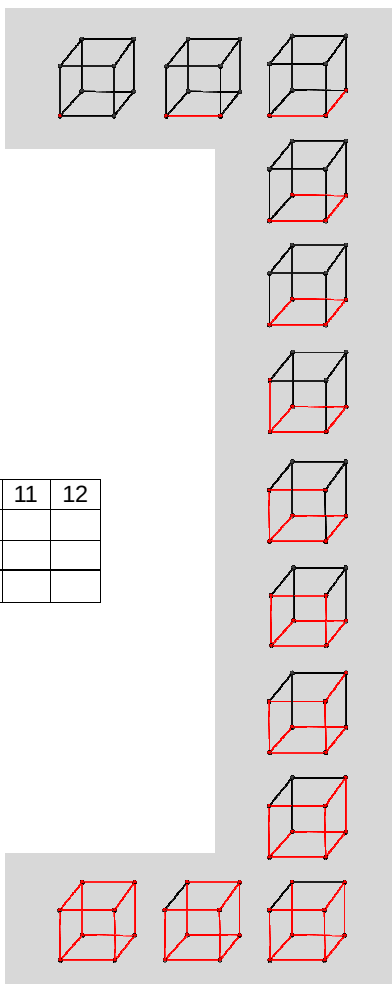
f. Leg uit dat $H+V = 2+R$.

Dit geldt voor elk (convex) veelvlak dat met Zoomtool gebouwd kan worden:

- Voor de eerste stap is $H+L = 2$.
- Na de laatste stap is $L = V$.



Kommentar [SB8]: (Iedereen krijgt twaalf staven en acht bolletjes van Zoomtool)



-
- Bij elke stap neemt $H+L$ met 1 toe.
 - Het aantal stappen is gelijk aan R .
- Gevolg: $2+R = H+V$.

Uitleg van de formule mbv een bouwplaat

Opdracht

Voor je ligt een bouwplaat van een bepaald veelvlak. Kleur de rand van de bouwplaat met blauw. Kleur de vouwlijnen van de bouwplaat, die niet op de rand liggen rood. Vouw nu het veelvlak. Elke ribbe van het ontstane veelvlak is of blauw of rood. De rode kanten zijn de gevouwen ribben en de blauwe ribben zijn de geplakte ribben.

Vraag 10

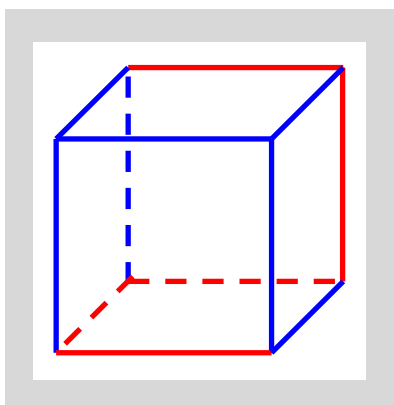
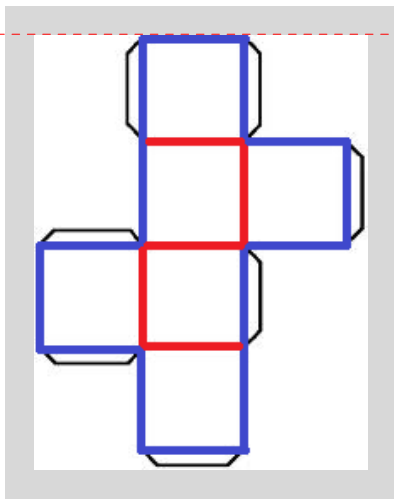
- Hoeveel vlakken heeft jouw veelvlak? Langs hoeveel ribben heb je gevouwen?
- Hoeveel hoekpunten heeft jouw veelvlak? Hoeveel paren van ribben heb je aan elkaar geplakt?
- Vergelijk deze aantallen met die van je klasgenoten. Valt je iets op?

Vraag 11

- Alle hoekpunten van onze bouwplaten liggen op de rand. Kan een hoekpunt van een bouwplaat ook in het inwendige liggen?
- Op de gebouwde veelvlakken kun je vanuit elk hoekpunt naar elk ander hoekpunt via een pad van blauwe ribben lopen. Waarom is dat zo? (Hint: De bouwplaat heeft al deze eigenschap.)
- Op de gebouwde veelvlakken kun je slechts op een manier vanuit elk hoekpunt naar elk ander hoekpunt via een pad van blauwe ribben lopen, zonder dat je een ribbe twee keer doorloopt. Waarom is dat zo?
- Leid uit b. en c. af, dat voor onze veelvlakken geldt:
 $\text{hoekpunten} = \text{geplakte ribben} + 1$
- Knip je in een van onze bouwplaten langs een rode ribben, dan zal die bouwplaat in twee stukken uit elkaar vallen. Leid hieruit af, dat voor onze veelvlakken geldt:
 $\text{vlakken} = \text{gevouwen ribben} + 1$

Uit d. en e. volgt ten slotte:

$$\begin{aligned} \text{hoekpunten} + \text{vlakken} &= \\ (\text{geplakte ribben} + 1) + (\text{gevouwen ribben} + 1) &= \\ \text{ribben} + 2 \end{aligned}$$



Kommentar [SB9]: (Iedereen krijgt een bouwplaat van een veel-vlak)

Kommentar [SB10]: Vermoeden:
 $\text{hoekpunten} = \text{blauwe ribben} + 1 = \text{geplakte ribben} + 1$
 $\text{vlakken} = \text{rode ribben} + 1 = \text{gevouwen ribben} + 1$

De volgende opdracht is misschien te vervangen door een uitleg van de leraar.

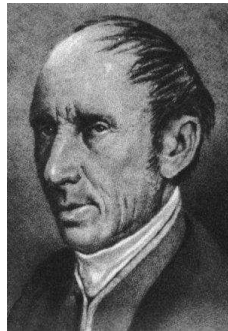
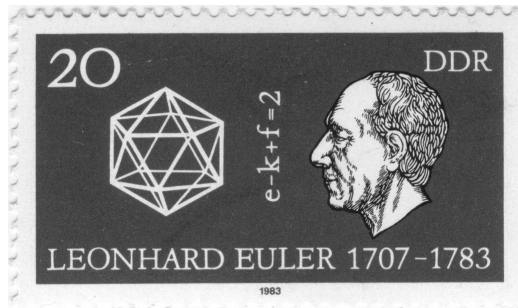
Kommentar [SB11]: (inverse chocoladeprobleem)

Kommentar [SB12]: (chocoladeprobleem)

Ter informatie

Veelvlakken trekken van oudsher het interesse van de mensen. Een typische probleem was het bepalen van het volume van zulke objecten. Al de oude grieken besteden hier veel aandacht aan. Bij zulke vragen spelen de afmetingen van de veelvlakken een rol: de grootte van de hoeken of de lengtes van de ribben zijn van belang. Dat je ook slechts op het aantal hoekpunten, ribben en vlakken van een veelvlak kunt letten, bleef heel lang verborgen. De in deze les behandelde formule is dan ook pas in 1750 ontdekt, en wel door de Zwitserse wiskundige Leonard Euler. De formule staat daarom vandaag bekend als de formule van Euler. Vaak wordt de formule als geboorteur van de topologie beschouwd. Topologie is een deelgebied van de pure wiskunde, zoals algebra, kansrekening of analyse, waarin echter de grootte van hoeken en afstanden er niet toe doen.

Toen Euler de formule in 1750 ontdekte, had hij er nog niet meteen een bewijs voor. Dat vond hij pas een jaar later. Sindsdien zijn er allerlei verschillende bewijzen voor de formule bijgekomen. Het bewijs mbv Polydron is afkomstig van de Franse wiskunde A. Cauchy, het bewijs mbv een bouwplaat is van de Duitse wiskundige von Staudt.



Augustin Louis Cauchy



Karl Georg Christian von Staudt