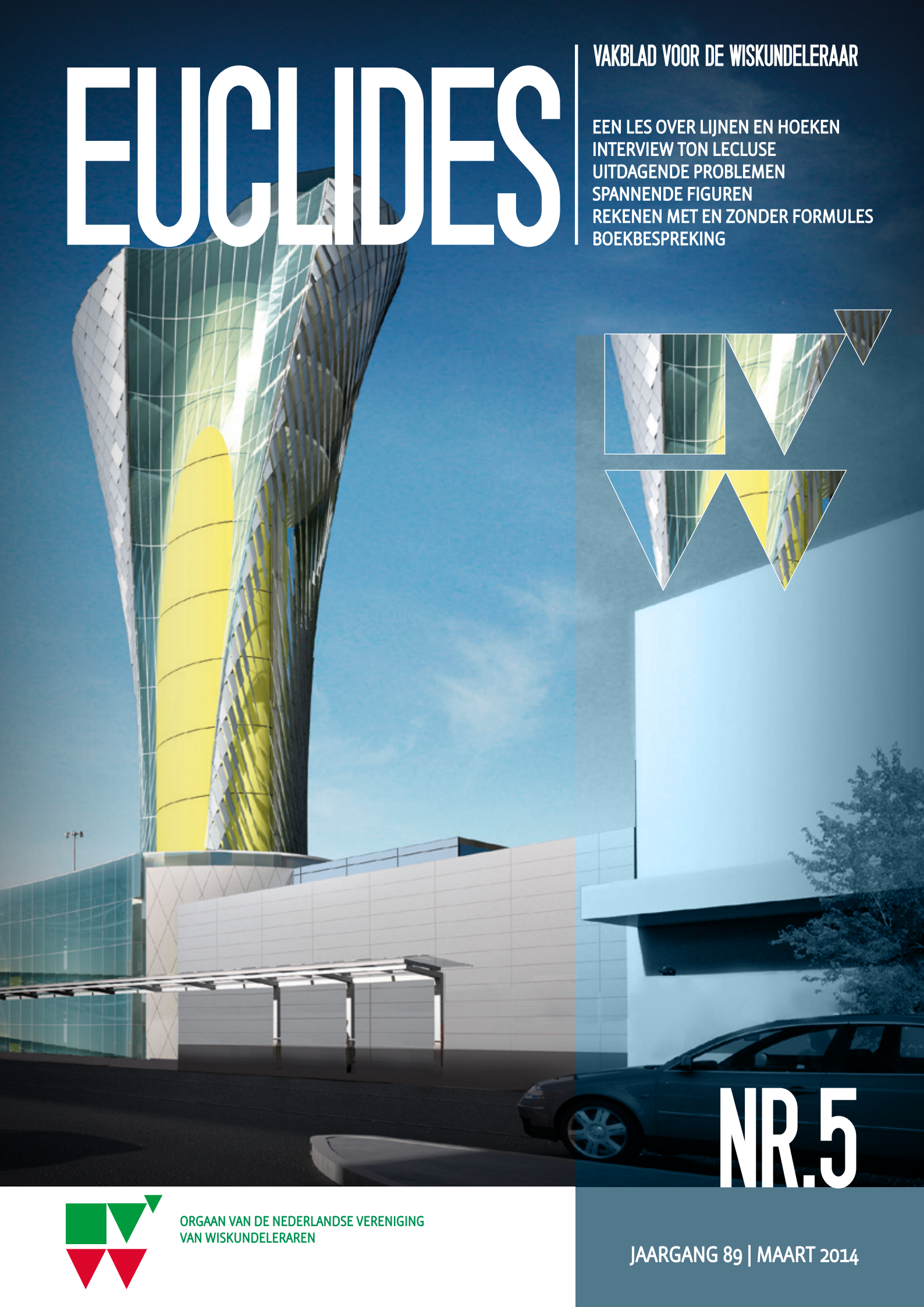
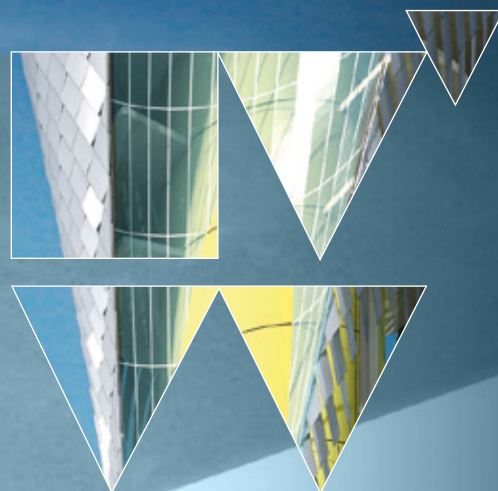


EUCLIDES

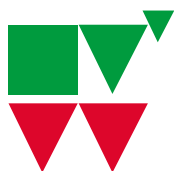


VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEERAAR

EEN LES OVER LIJNEN EN HOEKEN
INTERVIEW TON LECLUSE
UITDAGENDE PROBLEMEN
SPANNENDE FIGUREN
REKENEN MET EN ZONDER FORMULES
BOEKBESPREKING



NR.5



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 89 | MAART 2014

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 89 NR 5

IN DIT NUMMER

KORT VOORAF
MARJANNE DE NIJS

3

UITDAGENDE PROBLEMEN
JACQUES JANSEN

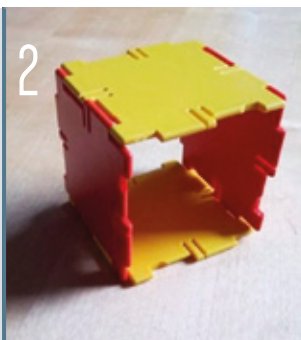
15

ONTDEKKINGSTOCHT

STEPHAN BERENDONK
LEON VAN DEN BROEK †

2

4



EEN LES OVER LIJNEN EN HOEKEN
FRANS BALLERING
SERGE BARG

6

REKENEN MET EN ZONDER FORMULES
WIM VAN DIJK

27

KLEINTJE DIDACTIEK
LONNEKE BOELS

7

VERSCHENEN
INLEIDING IN DE STATISTIEK

28

EEN GOED BEGIN...
ERIKA BAKKER

8

INTERVIEW TON LECLUSE
JOKE VERBEEK

9

GETUIGEN
DANNY BECKERS

12

HET FIZIER GERICHT OP...
ARTHUR BAKKER

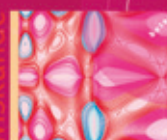
14

VERSCHENEN
MOIRÉ-KUNST MET NIVEAULIJNEN

28

*Moiré-kunst
met niveaulijnen*

wiskunde





ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

VANUIT DE OUDE DOOS

TON LECLUSE

29



WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

31

BOEKBESPREKING

ADRI DIERDORP

34

VERENIGINGSNIEUWS



SCRIPTIEPRIJS

DOUWE VAN DER KOOI

36

RECREATIE

38

SERVICEPAGINA

42

KORT VOORAF

Laatst hadden mijn (mentor-)leerlingen zorgen omdat de lessen bij een collega niet zo goed liepen en daardoor 'begrepen ze helemaal niets van de stof'. Om ook de andere kant van het verhaal te horen, sprak ik mijn collega. Die gaf aan dat de leerlingen niet gemotiveerd waren: ze speelden met hun telefoons of kletsen wat met elkaar. Het opgegeven huiswerk werd niet of nauwelijks gemaakt. 'Ze kunnen echt al mijn tijd en inzet krijgen maar eerst zullen ze zelf actief aan de slag moeten.' Dat kon ik goed begrijpen; het leverde echter wel een impasse op. De week erna vertelde ik deze klas over mijn ervaringen op verjaardagsfeestjes. 'Als ik zeg dat ik voornamelijk les geef aan vwo-leerlingen, dan prijst iedereen me gelukkig, want "die zijn altijd gemotiveerd en goed aan het werk te krijgen".' Er werd wat gegrinnikt, maar ook schuld bewust gekeken. Want hoe graag we het ook willen, veel leerlingen hebben nu eenmaal geen constante, intrinsieke motivatie die voor een goede werkhouding zorgt. Wat dat betreft, was voor mij een opmerking van Dan Meyer erg leerzaam: '*I teach high school math. I sell a product to a market that doesn't want it, but is forced by law to buy it.*'^[1] Niet zo raar dat we dan regelmatig vastzitten in een impasse. De oplossing die Dan Meyer daarvoor heeft, is om leerlingen problemen te laten formuleren, een vaardigheid die hij vindt dat ze missen. Deze aanpak past ook bij de komende vernieuwingen in de Tweede fase en het aanzetten tot denkactiviteiten. Wellicht levert dat ook op dat leerlingen beter om kunnen gaan met stof die ze niet begrijpen. Mijn klas heeft in ieder geval goede voornemens: 'We gaan proberen om verjaardagsfeestleerlingen te worden.'

Marjanne de Nijs
Hoofdredacteur *Euclides*

[1] <http://blog.mrmeyer.com/>

ONTDEKKINGSTOCHT 2

VEELVLAKKEN

Stephan Berendonk
Leon van den Broek †

Polydron, Zoomtool of gewoon papier. Er zijn verschillende materialen waarmee je veelvlakken kunt bouwen. Maakt het voor de wiskunde uit welk bouw materiaal je gaat gebruiken? De schrijvers van dit artikel denken van wel, zeker als het om het ontdekken van wiskunde gaat, en laten dat zien aan de hand van Eulers veelvlakkenstelling.

Een kubus heeft zes vlakken. Elk vlak apart genomen heeft evenveel hoekpunten als ribben, namelijk vier. Maar voor de daaruit samengestelde kubus is dat niet meer het geval: die heeft vier ribben meer dan hoekpunten. We gaan de relatie tussen ribben en hoekpunten volgen tijdens het opbouwen van de kubus met *Polydron*; zie figuur 1. We beginnen met een vierkant en klikken er een tweede vierkant aan vast. De twee ribben, die nu aan elkaar liggen, tellen nog maar als een ribbe en er worden twee keer twee hoekpunten geïdentificeerd. Het geheel van twee vierkanten heeft nu dus één ribbe meer dan hoekpunten.

Ook bij het toevoegen van de volgende drie vierkanten neemt het aantal ribben met één meer toe dan het aantal hoekpunten. Het laatste vierkant sluit de kubus; dat levert geen nieuwe ribben en geen nieuwe hoekpunten op. Er is vijf keer een vlak toegevoegd. Bij de eerste vier keer is het aantal ribben

R met 1 meer genomen dan het aantal hoekpunten H . Dat dat vier keer gebeurde, komt omdat er zes vlakken zijn, maar bij het eerste en laatste

vlak toevoegen gebeurt dat niet. Het aantal ribben R is dus uiteindelijk $V - 2$ groter dan het aantal hoekpunten H . Hetzelfde betoog hadden we voor elk ander veelvlak kunnen houden. Voor veelvlakken geldt dus de volgende formule: $R = H + (V - 2)$.

Dat dat voor 'elk veelvlak' zou gelden, is sterk overdreven. Het veelvlak moet zodanig kunnen worden opgebouwd dat het tijdens het bouwen steeds precies één rand heeft totdat het laatste vlak wordt toegevoegd; het bouwsel in figuur 2 heeft twee randen. Bij een veelvlak als de Grande Arche in Parijs kan dat niet; zie figuur 3.

Door zorgvuldig naar de stapsgewijze opbouw van een veelvlak te kijken, hebben we dus de formule van Euler voor veelvlakken ontdekt en tegelijkertijd bewezen (vergelijk Lakatos^[3]). Het geleverde bewijs is (een variatie op) het bewijs van Cauchy.^[2]



figuur 1 Opbouw van een kubus met *Polydron*



figuur 2 Bouwsel met twee randen

'WE HEBBEN TIJDENS ONZE TOCHT
EEN INTERESSANTE DIDACTISCHE
ONTDEKKING GEDAAN'

De stapsgewijze opbouw van het veelvlak kunnen we mooi met behulp van *Polydron* uitvoeren, zoals in figuur 1. Je kunt een kubus ook met ander materiaal bouwen, bijvoorbeeld met *Zoomtool* (zie figuur 4). Terwijl *Polydron* de aandacht richt op de vlakken van een kubus, richt

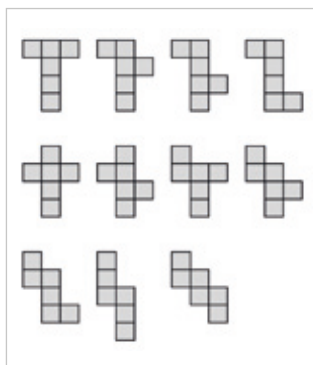
Zoomtool de aandacht op de hoekpunten en ribben. De vlakken bestaan eigenlijk bij *Zoomtool* niet; die moet je er zelf bij denken. Wat gebeurt er als we de relatie tussen de hoekpunten

en de ribben tijdens een stapsgewijze opbouw van een veelvlak met *Zoomtool* volgen?

We beginnen met een hoekpunt en voegen dan stap voor stap een ribbe toe. Als we een ribbe toevoegen met een vrij uiteinde, voegen we ook een hoekpunt toe. Als we een ribbe toevoegen die twee al bestaande hoekpunten verbindt, komt er wel een ribbe bij, maar geen hoekpunt. Verder zal er bij zo'n stap een gebied op het denkbeeldige oppervlak van het veelvlak in tweeën worden gesplitst. Omdat er uiteindelijk V gebieden, de vlakken, zijn ontstaan, moeten er tijdens het bouwen $V - 1$ van zulke stappen voorkomen. In het begin is het aantal ribben één minder dan het aantal hoekpunten; immers, er is maar een hoekpunt. Het voltooide veelvlak voldoet daarmee aan de volgende formule: $R = (H - 1) + (V - 1)$



figuur 3 Grande Arche in Parijs



figuur 4 Opbouw van een kubus met Zoomtool



figuur 5 De elf bouwplaten van de kubus

Bij het bouwen met *Zoomtool* voer je dus andere handelingen uit dan bij het bouwen met *Polydron*. Dat verschil heeft ons uiteindelijk tot verschillende bewijzen van de formule van Euler geleid. *Polydron* stuurde ons in wezen naar een bewijs met inductie naar het aantal vlakken, *Zoomtool* naar een bewijs met inductie naar het aantal ribben.

Goedkoper dan *Polydron* of *Zoomtool* is het maken van veelvlakken uit papier. Op de basisschool leer je bijvoorbeeld hoe je een kubus uit een bouwplaat kunt fabriceren. Er zijn elf verschillende bouwplaten van de kubus (zie figuur 5). Wanneer we uit zo'n bouwplaat een kubus willen maken, zullen we eerst nog een aantal plakranden aan moeten brengen. Hoeveel plakranden hebben we voor elk van deze bouwplaten nodig?

Bij elk van de bouwplaten hebben we precies zeven plakranden nodig. Als we ons dezelfde vraag ook voor bouwplaten van andere veelvlakken stellen, dan krijgen we het volgende vermoeden: het aantal plakranden van een bouwplaat is steeds één minder dan het aantal hoekpunten van het veelvlak. Bij het onderzoeken van bouwplaten ligt ook de volgende vraag voor de hand: langs hoeveel ribben van de bouwplaat moeten we vouwen

om het veelvlak te maken? Ook bij deze vraag is een vermoeden snel geformuleerd: het aantal te vouwen ribben is steeds één minder dan het aantal vlakken.

Op vakbladeuclides.nl/895berendonk vindt u concreet lesmateriaal, waarin de stelling van Euler en een bewijs uitgaande van bouwplaten worden behandeld.

Didactische les

We zien dat een behandeling van veelvlakken uitgaande van bouwplaten aanleiding geeft tot een wederom ander bewijs van de stelling van Euler, namelijk tot het bewijs van von Staudt.^[4] Dit bewijs is vermoedelijk naast het bewijs van Cauchy het meest populaire bewijs van Eulers stelling. Het komt voor in verschillende lesmaterialen (vergelijk ^[1], ^[5] en ^[6]). Echter wordt het bewijs daarbij verrassenderwijs niet in samenhang gebracht met bouwplaten van veelvlakken, terwijl je daarmee juist goed bij de ervaringswereld van de leerling aansluit. Immers, de leerlingen zijn al eerder met bouwplaten in contact gekomen.

We hebben tijdens onze tocht een interessante didactische ontdekking gedaan. Het gebruik en de keuze van het bouw materiaal heeft grote invloed op de latere ontdekkingsmogelijkheden. Het werken met bouwplaten bereidt het bewijs van von Staudt voor, terwijl het bouwen met *Polydron* aanleiding geeft tot een behandeling van het bewijs van Cauchy.

NOTEN

- [1] Aarts, J. (2002). De formules van Euler, *Pythagoras*, 42(2), 26–30.
- [2] Cauchy, A.L. (1811). Untersuchungen über die Vielflache, in Haußner, R. (1904), *Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper* (p. 66). Verlag von Wilhelm Engelmann.
- [3] Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations – The Logic of Mathematical Discovery* (pp. 70–71). Cambridge University Press.
- [4] Staudt von, G.K.C. (1847). *Geometrie der Lage* (pp. 20–21). Verlag von Bauer und Raspe.
- [5] www.jphogendijk.nl/projects/veelvlakken.pdf
- [6] www.adeleuw.nl/index_bestanden/Leukewiskunde/Veelvlakken.pdf

Vermoeden: Plakribben	=	Hoekpunten – 1
Vouwribben	=	Vlakken – 1
Ribben	=	Hoekpunten + Vlakken – 2

Over de auteurs

Stephan Berendonk is didactisch medewerker aan het mathematisch instituut van de Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. Leon van den Broek was leraar wiskunde op rsg Pantarijn te Wageningen en auteur van diverse wiskunde lesmaterialen.

EEN LES OVER LIJNEN EN HOEKEN

Frans Ballering
Serge Barg

HOE HET OOK KAN

Frans Ballering laat aan de hand van een les van Serge Barg zien hoe je lijnen en hoeken ook kunt introduceren.

De leraar begint zijn les in de brugklas met de vraag: 'Wat is een lijn?'

- 'Een streep op de weg', 'een lijn in het plafond van het lokaal.'

'Komt er ooit een einde aan deze lijn?'

- Ja, de lijnen die de kinderen kennen zijn altijd eindig. 'Hoe dik is een lijn? Kan een lijn zo dik zijn (armen uit elkaar)?'

Verwarring. Een lijn kan toch nooit zo dik zijn? 'En als de lijn heel lang is?'

- 'Ja, dan kan het wel.'

De dikke lijn wordt op het bord getekend (zeker een meter lang) met open einden aan weerskanten. 'Als het bord groter zou zijn, zouden we de lijn een stuk langer kunnen tekenen. Je moet als het ware uitzoomen om je een herkenbare lijn voor te stellen.' De leerlingen kunnen nu duidelijk zien dat dit zeker ook een lijn is.

'**Wat zou dat kunnen betekenen: loodrecht?**' - De leerlingen antwoorden met: 'horizontaal en verticaal', 'zoals in een assenstelsel', 'waterpas', 'als 'ie recht is dan is het een loodrechte lijn', 'dat randje in de wand van het lokaal is loodrecht.' 'Kan loodrecht ook schuin zijn?' 'Nee, want dat is niet loodrecht.' Voor de leerlingen is loodrecht hetzelfde als verticaal.

'**Wat zou evenwijdig betekenen?**' - 'Als lijnen even lang zijn.' 'Lijnen die gelijk lopen.' Er worden lijnen in het lokaal, het bord en het plafond aangewezen. 'Als lijnen even wijd zijn.' 'Snijden deze lijnen elkaar ooit?' Weer verwarring. 'Heb je zulke lijnen wel eens ergens gezien?' 'Een treinspoor', wordt er geroepen.

De leerlingen mogen verder werken uit het boek (*Getal en Ruimte*). Dat blijkt nog niet zo gemakkelijk. Het tekenen met de geodriehoek levert veel problemen op.

De leraar doet een poging om de wiskundige begrippen 'lijnen' en 'evenwijdigheid' te laten ontstaan vanuit de ervaringen van de kinderen. Welke voorbeelden zouden er nodig zijn voor een goed (wiskundig) begrip van een lijn? Streep met potlood, streep op de weg, vliegtuigstreep in de lucht, (rechte) weg op de kaart, zonnestraal, lichtstraal van een ster, lijn van je telefoon naar de satelliet, getallenlijn? Er zijn eigenlijk geen concrete voorbeelden van lijnen die onbegrensd zijn. De getallenlijn kennen ze van de basisschool en als de negatieve getallen aan bod zijn geweest, is dat het mooiste voorbeeld. Ter controle zou de leraar

hen kunnen vragen wat er zo bijzonder is aan wiskundige lijnen, om zo twee eigenschappen ervan te benadrukken: een wiskundige lijn houdt niet op en is heel dun. Uitgaand van de ervaringen van de leerlingen bij 'loodrecht' moeten ze zover komen dat ze dat begrip gaan koppelen aan twee lijnen en loskoppelen van 'verticaal'. Spreken over een rechte hoek maakt dat laatste misschien gemakkelijker. En een rechthoek is in alle standen op het bord te toveren. Het zou ook wel wat waard zijn als leerlingen na het bespreken van de voorbeelden met hun handen, armen en/of vingers een rechte hoek kunnen laten zien, liefst in verschillende standen. Dat laatste is ook belangrijk bij evenwijdig. Steek je armen vooruit, omhoog of opzij, links of rechts, maar steeds even (wijd) ver van elkaar.

Dan is het tijd voor potlood en papier. Er moet veel getekend worden. Loodrechte lijnen in alle standen, evenwijdige lijnen, ook als ze niet even lang zijn, rechte hoeken op veel manieren.

Lagerwerf spreekt in zijn boek *Wiskundeonderwijs voor de basisvorming* over beelden die kinderen hebben bij wiskundige begrippen. Met beelden bedoelt hij min of meer abstracte plaatjes in het hoofd bij begrippen als vierkant, driehoek, rechthoek, enzovoort. Wiskundeleraars kunnen daar gebruik van maken door er bewust op aan te sturen dat die beelden correct zijn of worden. Het beeld van een lijn moet worden aangepast, bijvoorbeeld zoals hierboven is beschreven.

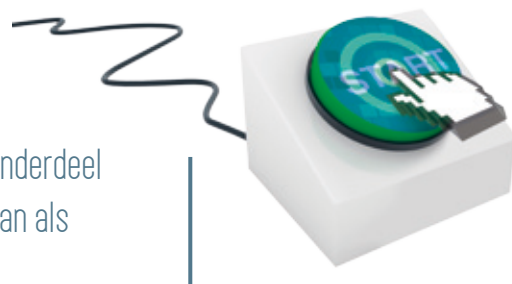
Het volgende begrip in het boek is: hoek. - Iedere brugklasser weet wat een hoek is. 'Je gaat de hoek om', 'je hebt de hoek van een tafel', 'de hoek van het lokaal', maar weinig brugklassers hebben daarbij een plaatje in het hoofd zoals wij dat graag zouden zien: twee lijnstukken die samenkomen in één punt. Als we daarop aan willen sturen, moet dat in de voorbeelden worden benadrukt. In het plaatje van de brandweerauto met de ladder moet dat beeld worden ingetekend. En ook in alle andere voorbeelden. Hoe dat dan zit met de hoek van het lokaal of de hoek van de straat moet ook duidelijk worden in tekeningen. En hoe je die twee lijnstukken moet herkennen in een driehoek, vierhoek of zevenhoek moet ook duidelijk worden. Zonder een goed beeld van het begrip hoek is het meten ervan niet mogelijk, hoe fraai we het algoritme ervoor ook beschrijven. Mij lijkt het effectiever om, in plaats van een algoritme, bij meten uit te zijn op een beeld waarin de hoek en de geodriehoek of hoekmeter verschijnen.

EEN GOED BEGIN...

Erika Bakker

TOETSEN

Erika Bakker heeft vorig schooljaar haar LIO-stage wiskunde gedaan, als onderdeel van haar Educatieve Master. Nu is ze begonnen met haar eerste echte baan als docent. In deze rubriek deelt zij haar belevenissen met u.



Toetsen maken vind ik erg leuk om te doen. Hiermee bedoel ik niet het uitzoeken van een aantal opgaven uit de toetsbundel om die dan in een documentje samen te voegen, al is dit soms wel handig als je niet zoveel tijd hebt. Nee, met toetsen maken bedoel ik dat wat ik ergens in de opleiding leerde: eerst het hoofdstuk doorbladeren en bedenken wat je wilt vragen en daarna met pen en papier opgaven bedenken; tot slot uitwerken op de computer en nog even voorleggen aan een collega. Ook voor dit laatste is niet altijd tijd. Het maken van toetsen is dus vooral leuk als je er vroeg genoeg mee begint en er echt tijd voor hebt.

Als ik een eigen toets geef, hoop ik altijd dat er geen fouten in zitten. Soms gebeurt dat toch. Dan heb ik ergens een woord overgeslagen waar ik zelf keer op keer overheen gelezen heb, of een formule met een x erin terwijl het toch echt over het aantal dagen d gaat. Over deze laatste fout had trouwens driekwart van de leerlingen ook heen gelezen.

Bij toetsen in de brugklas gebeurt er altijd van alles. Sinds kort heb ik de regel dat leerlingen geen spullen meer van elkaar mogen lenen. Ze kunnen pennen, potloden, geodriehoeken en andere dingen van mij lenen als ze op voorraad zijn. Hier is wel een consequentie aan verbonden: de volgende les trakteren. Afgelopen woensdag was met een traktatie in beide brugklassen dus een prima dag. Ook voor komende maandag verwacht ik weer iets lekkers. Een meisje dat altijd alles voor elkaar heeft, was tijdens het proefwerk haar proefwerkblok vergeten. Ze was bijna in tranen. Het uur na het proefwerk kwam ze bij mij en vroeg heel zachtjes: 'Mag ik dan op kwarktaart trakteren?' Ik ben benieuwd of ze komende maandag inderdaad met een zelfgemaakte taart naar de les komt, maar het idee om zelf iets te maken vind ik al geweldig.

Als de toets afgelopen is, komt het spannendste gedeelte: het nakijken. De punten van elk onderdeel vul ik in Excel in. Je ziet het aantal punten stijgen. Ook het cijfer kruipt vanaf een 1 omhoog. Soms hoop ik echt dat de onderdelen die op het laatste blaadje staan nog punten opleveren, zodat het cijfer net een voldoende wordt. Na de laatste leerling bekijk ik altijd het gemiddelde. Eigenlijk geeft

dat nooit echt een goed gevoel. Als de toets slecht wordt gemaakt, heb je het gevoel dat je niet goed uitgelegd hebt of dat de toets te moeilijk was. Wordt de toets goed gemaakt, dan was hij natuurlijk te gemakkelijk.

Gelukkig kom je tijdens het nakijken soms ook heel leuke opmerkingen of briljant gevonden oplossingen tegen. Bij Pieter uit havo 5 kwam ik zelfs iets tegen wat mij enorm verbaasde en wat ik totaal niet begreep. Eén van de onderwerpen van de toets was het opstellen van een raaklijn. Omdat er bij andere opgaven al heel veel gedifferentieerd moest worden, had ik bij een bepaald onderdeel de afgeleide al gegeven en ook het punt waar de raaklijn aan de grafiek moest raken. Pieter stelde niet de vergelijking van de raaklijn op, maar primitiveerde de gegeven formule. Met behulp van een integratie-constante en het gegeven punt bepaalde hij hoe de oorspronkelijke functie eruit moest zien. Erg knap, maar helemaal niet de bedoeling. Ik vond het erg jammer dat ik er geen punten voor kon geven en ik begreep niet waarom hij dit kon. Tijdens de wiskundelessen was dit onderwerp in ieder geval niet behandeld. Nadat ik de toets had uitgedeeld, ben ik toch maar even naar Pieter toegegaan om te vragen hoe hij had geleerd om te primitiveren. Hij vertelde me vrolijk: 'Ja, mijn broer studeert bouwkunde en die zegt wel eens tegen mij: "Wil je eens wat hogere wiskunde zien?"' Pieter zit altijd samen met drie andere jongens achterin de klas. Meestal hebben ze muziek op en als ze een vraag stellen, moet ik er altijd even over nadenken. De andere jongens vonden de techniek van Pieter ook wel interessant en begrepen al snel dat het Pieter de andere kant op had gedifferentieerd. Eigenlijk jammer dat ik dit niet aan mijn havo-leerlingen hoef uit te leggen. Ik vind het een leuk onderwerp en het sluit mooi aan bij het differentiëren. Gelukkig mag en moet ik in de komende weken de product- en kettingregel voor het differentiëren nog uitleggen. Genoeg te doen dus.

Over de auteur

Erika Bakker rondde in de zomer van 2013 haar Educatieve Master wiskunde af. Na een jaar stagelopen is ze dit schooljaar voor het eerst officieel docent wiskunde. E-mailadres: erikabakker66@gmail.com

INTERVIEW TON LECLUSE

Joke Verbeek

Het was al een jarenlange wens van de redactie om een interview met Ton Lecluse te plaatsen. Joke Verbeek nam de honneurs waar en ontdekte dat deze veelzijdige man in een bijzondere wereld leeft.

Wie Ton Lecluse googelt, stuit op vele hits. Ze lopen van wiskunde en ICT via een interview in de schoolkrant van Het Bilthovens Lyceum en artikelen in *Euclides*, de *Wiskunde-brief* en de *Nieuwe Wiskrant* naar de servicepagina van *Geocadabra*. Verder staan er trefwoorden als *Visiria*, *Algecadabra*, meetkundige bewijzen en de Wiskunde Olympiade. Een druk baasje in de wiskunde-wereld dus. Maar ook meer triviale sites als Facebook en LinkedIn melden zijn aanwezigheid. Ook de afbeeldingen-optie van Google laat veel gezichten zien, maar of die allemaal van 'onze' Ton zijn valt te betwijfelen. Ze verschillen nogal: van een bebaarde trompettist gaat het over in een vliegeraar, een soep-etende opa compleet met kleindochter alsmede een aantal dames. En er zijn plaatjes uit *Geocadabra* en logo's van websites. Tijd om te ontdekken wie de echte Ton Lecluse is en samen met Heiner Wind af te reizen naar Soest, om kennis te maken met de man van 'de oude doos'. Voor lezers van *Euclides* behoeft Ton natuurlijk geen introductie. Jarenlang maakte hij op de jaarvergadering van de Vereniging furore met het door hem gemaakte programma *Geocadabra*. Hij gaf workshops om *Geocadabra* te leren kennen, deelde gratis floppydisks (weet u nog?) uit en deed er alles aan om het programma onder de aandacht van docenten te krijgen. Dat is goed gelukt, want de meesten van u zullen zijn naam onmiddellijk in verband brengen met deze software. Of kent u hem beter door de rubriek 'Vanuit de oude doos', waarin hij wiskundeopgaven van voor de Tweede Wereldoorlog bespreekt?

Bill Gates

Ton en Heiner kennen elkaar al langer. Heiner steekt meteen van wal: 'Waarom heb je destijds 2D (een programma voor vlakke figuren, red.) aangepakt?' Ton: 'Nou, die vlakke meetkunde kun je gemakkelijk programmeren. Later ben ik me gaan verdiepen in 3d, met diverse projecties. Ik kwam erachter dat ik tussen die projecties kon switchen. Maar laat ik bij het begin beginnen. Ik was in mijn studietijd altijd al met de PC bezig, vooral in vakanties. Met de programmeertaal Fortran maakten we ponskaarten. Dat pakte me. Je tekende een sinus door een paar punten te zetten.'

Heiner: 'Zag je het als een didactisch hulpmiddel?'

Ton: 'Nee, als wiskunde, ook te gebruiken voor creatieve dingen.'

Hij pakt de chronologische draad weer op: 'Na mijn studie



ben ik les gaan geven aan het Collegium Marianum in Venlo. Dat was het begin van het computertijdperk. Programmeren gebeurde in Basic, als drager gebruikten we cassettebandjes. In die tijd was er een jongen, even oud als ik, Bill Gates, die ook bezig was met Basic.' Hij lacht. 'Ja, we zijn gelijk begonnen.'

Gymzaal

Ton praat makkelijk en heeft de feiten goed in zijn hoofd. 'In die tijd werd in de onderbouw van het vo het vak informatica gegeven, vaak door iemand die niets van programmeren wist. Een leraar Nederlands of zo. Dan kon ik de leerlingen laten zien hoe zo'n computerprogramma gemaakt werd. Gewoon, voor de lol, zoals ik ook voor de lol schaaklessen gaf. Zelf had ik een programma'tje geschreven voor het tekenen van grafieken, en een cijferadministratieprogramma. Op de HCC-beurs liet ik dat zien. Daar werd ik als programmeur 'ontdekt' door een bedrijf dat met name belangstelling had voor mijn cijferadministratieprogramma. Toen kreeg ik de kans les te gaan geven op de hts. Dat was in 1985. Daar ging ik in mijn wiskundelessen met programmeren aan de gang. Na een paar maanden mocht ik programmeertechnieken geven. Leraren daarin waren namelijk schaars. Ik ben een studie Informatiekunde in Eindhoven gaan doen en daarna gaf ik Informatica, Lineair programmeren en Statistiek en Kansrekening. Het was niet leuk, door gebrek aan docenten voor deze vakken moest ik drie, vier klassen tegelijk lesgeven in de gymzaal. Toen ben ik uit het onderwijs gestapt en begonnen bij Océ, waar ik na zes jaar bij een reorganisatie werd ontslagen.'

Geen uitgaanstype

Ton: 'Het was intussen 1993. Ik besloot dat programmeren een hobby moest blijven en solliciteerde weer in het onderwijs. Ik kreeg een baan in Bilthoven, bij Het Nieuwe Lyceum. Dat betekende wel dat ik door de week in Utrecht op kamers zat, want mijn leven speelde zich af in de weekenden in Venlo. De avonden dat ik in Utrecht zat heb ik me echt op de computer gestort, want ik ben geen uitgaanstype. Omdat er aan het eind van het schooljaar geen uren meer voor mij waren, solliciteerde ik naar een baan bij het Panta Rei College. Ik werd daar

aangenomen, maar toen bleek dat ik toch in Bilthoven kon blijven, heb ik dat gedaan. Achteraf jammer, want anders had ik kunnen zeggen dat ik een collega was van Leon van den Broek (auteur Wageningse methode, red.).

Heiner: 'Nu zeggen jouw collega's vast met trots dat ze een collega zijn van Ton Lecluse.'

Ton reageert heel bescheiden: 'Dat valt wel mee.'

'Ik programmeerde 2d en 3d en kwam in aanraking met Visiria, een kleine uitgeverij van software. Denk wel: ik zat nog steeds op die zolderkamer. Toen brak bij mij het inzicht door dat 2d niet nodig is, dat is gewoon een bovenaanzicht van 3d. Zo ontstond 3d-meetkunde, met van die gele werkboeken. De naam moest anders, en na wat brainstormen werd het *Geocadabra*.'

What's appening?

'De PC was er inmiddels, maar nog geen beamers. Ik had wel een groot beeldscherm in mijn eigen lokaal. Dat kon ik gebruiken om leerlingen iets te laten zien en om ze er zelf mee te laten werken. Omdat ik kon programmeren kon ik telkens het programma aanpassen aan de behoefte van mijzelf, de leerling of collega's. Er kwamen steeds meer knopjes.' Tons ogen glimmen bij de herinnering. 'In de lessen gebruikte ik het voor bijvoorbeeld praktische opdrachten, waarbij schaduwen die geworpen worden

moesten worden berekend. Een mooie toepassing. De leerlingen hebben destijds veel schitterende praktische opdrachten ingeleverd.'

Ton snelt naar zijn werkkamer en komt terug met een armvol door oudleerlingen gemaakte praktische opdrachten. Samen met Heiner bladert hij ze door en wijzen ze elkaar op tekeningen die veelal met *Geocadabra* gemaakt zijn.

Desgevraagd stelt de net 61 geworden Ton dat hij ook nu nog steeds met plezier lesgeeft. Na wat omzwervingen werkt hij inmiddels aan 't Hooghe Landt College in Amersfoort, een traditionele school waar hij op de fiets naar toe kan. 'De jeugd is wel anders geworden. Elke pauze zijn ze bezig met Facebook en wat dies meer zij. Van mij mogen ze hun smartphones ook in de les gebruiken, mits het voor de wiskunde is. Ik zet de uitwerkingen in de ELO, zodat ze die kunnen raadplegen. Bij zelfstandig werken mogen ze ook best een muziekje aanzetten. Natuurlijk wordt er wel eens misbruik van gemaakt. Dan vraag ik "What's appening?" en dan weet iedereen weer waar ie aan toe is.'

Geocadabra en Geogebra

Heiner vraagt Ton naar zijn onderwijsvisie. Ton trekt eerst een bedenkelijk gezicht, maar komt toch al vlot met een

Nieuwe delen Zebra-reeks



deel 39

De juiste ondersteuning
*Dolf van den Hombergh
en Leon van den Broek*

deel 40

**Kantelpunten en
alternatieve evenwichten**
*Lia Hemerik, Egbert van Nes
en Theo-Jan van de Pol*



Epsilon Uitgaven

prijs per deel € 10
prijs voor NVvW-leden op jaarmarkten € 9
abonnement per vijf delen € 44
www.epsilon-uitgaven.nl

statement. 'Structuur is belangrijk. Een goed lesrooster ook. We werken met *Getal en Ruimte*. Daar maak ik per kwartaal voor elke klas een studeerwijzer bij, waarop weektaken staan. De leerlingen weten waar ze aan toe zijn: ook als een les uitvalt moet er gewerkt worden. Ik kan in de lessen mijn ei kwijt en ik kan ook individuele leerlingen begeleiden.'

Een snelle blik op de studeerwijzer van 5 havo laat zien dat Ton doorsneden behandelt met behulp van *Geocadabra*.

'*Geocadabra* wordt niet meer verkocht, maar is nog steeds te gebruiken. Maar de meeste scholen zullen tegenwoordig *Geogebra* gebruiken. Dat is ontwikkeld door



Marcus Hohenwarter uit Oostenrijk. Ik heb in het begin contact met hem gehad en we hebben over en weer veel van elkaar afgekeken. Marcus ontwikkelde het programma in de baas zijn tijd. Omdat hij bij een universiteit werkte, was het gratis te downloaden, terwijl men voor mijn *Geocadabra* destijds moest betalen. Marcus heeft nu in Amerika zijn eigen Geogebra gebouw en honderd man personeel om het programma te ondersteunen.' Klinkt er spijt door in Tons opmerking? 'Nee hoor. Ik heb hele leuke buitenlandse contacten overgehouden aan mijn programmeerhobby. Bijvoorbeeld in Zuid-Afrika, want vanwege de gemeenschappelijke taal was mijn programma daar ook bruikbaar. Ik ben daar geweest op uitnodiging van Retha van Niekerk, een Zuid-Afrikaans wiskundige die veel aan didactiek doet, om workshops te geven aan docenten. Via Zuid-Afrika ben ik ook in Houston USA uitgenodigd om aan de Rice University lessen te geven. Dat deed ik gewoon tussen mijn schooltaken hier door. Een jongensdroom.'

Wiskunde B

Ton en Heiner storten zich nog met enthousiasme op een meetkundeopgave uit een proefwerk van Ton. Iets met raaklijnen en koorden. 'Die opgave is door inzicht toch veel makkelijker op te lossen dan met berekeningen: maak de tekening en KIJK!' overtuigt Ton zijn mede-meetkundefreak met klem. Hij filosofeert nog wat over zijn wensen voor het nieuwe wiskunde B-programma voor havo en vwo. 'Voor de populatie is bewijsmeetkunde niet geschikt. Ook de docenten van nu zijn er niet goed voor

opgeleid. Analytische meetkunde zou prima zijn. De sinus en cosinusregels komen er hopelijk ook in en dan doe je – samen met de Stelling van Thales – nog iets aan synthetische bewijsmeetkunde. Als we maar niet verzanden in de vectormetkunde.' Waarvan akte!

Dweilorkest

Is er nog iets anders in Tons leven dan wiskunde? De vraag verbaast Ton niet, want die is wel vaker aan hem gesteld. Maar hij is buiten de lessen om 'slechts' één tot twee avonden met wiskunde bezig. Kinderen en maar liefst vijf kleinkinderen slokken zijn aandacht op: een babybox in de huiskamer getuigt van regelmatig oppassen. En de foto van de bebaarde trompettist blijkt er toch een van hem: regelmatig blaast hij in een dweilorkest zijn deuntje mee. 'Vroeger in Venlo waren we in de carnavalsstijd, en die duurt daar van november tot en met de carnaval, altijd aan het optreden. Hier is dat niet zo. Af en toe speel ik in een Zwarte pietenorkest, een schoolorkest of een ander gelegenheidsorkest. Daar blijft het bij.' Voor ons blijft het daar ook bij: we krijgen geen demonstratie. Op zijn wiskundeavonden trekt hij zich terug in zijn ruime ondergrondse werkkamer. *Geocadabra* moet toch onderhouden worden, en datzelfde geldt voor zijn minder bekende algebraprogramma *Algecadabra*. We werpen er even een korte blik op; het blijkt verrassend actueel en biedt veel mogelijkheden om bijvoorbeeld rekenvaardigheden van leerlingen op te krikken. De lezer kan zichzelf overtuigen: al Tons programma's zijn te vinden op zijn website.

De artikelen 'Vanuit de oude doos' voor *Euclides* schrijft hij altijd in de zomervakantie. 'Dan lever ik ze in één keer in en heb ik het hele jaar geen omkijken meer', stelt hij praktisch. Ton vraagt in zijn rubriek vaak om een reactie van de lezers. Krijgt hij die ook? 'Ja hoor. Er is een vast clubje liefhebbers, vaak gepensioneerd, die de tijd hebben en nemen om te reageren. Binnenkort laat ik een van mijn artikelen vervallen om zo'n reactie te plaatsen. Dat vind ik leuk.'

Met moeite maken we ons los van het computerscherm in de werkkamer, waar Ton onvermoeibaar de laatste versie van *Algecadabra* demonstreert: tafels oefenen, klokkijken, vergelijkingen oplossen: het zit er allemaal in, naast vele andere wiskundige zaken. Geen Bill Gates, geen eigen gebouw met honderd man personeel, maar wel een begenadigd programmeur met passie voor wiskunde op de Utrechtse Heuvelrug. Dank je wel Ton, voor dit inkijkje in je wereld.

Over de auteur

Joke Verbeek was tot september 2011 docent wiskunde op het Arentheem College in Arnhem. Ze schrijft mee aan een wiskundemethode en is secretaris van de redactie van *Euclides*. E-mailadres: jokeverbeek@chello.nl

GETUIGEN

GEORGE PAPY

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



De afbeelding op de omslag van de Nederlandse vertaling van de *Mathématique Moderne* van George Papy spreekt boekdelen. Dit boek was bestemd voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs uit de zestiger jaren van de vorige eeuw. In dit boek werd de leerling geconfronteerd met verzamelingen, relaties, groepen en ringen. Dit alles in de meest precieze stijl die deze vernieuwende vorm van wiskundeonderwijs te bieden had.



figuur 1 Omslag
Moderne Wiskunde 1



figuur 2 Omslag
Moderne Wiskunde 2

Papy was een van de Belgische aanhangers van de zogenaamde *New Math*-beweging. Dit was een in didactische ideeën en idealen zeer diverse groep mensen die in de jaren vijftig en zestig het debat over het hoe en waarom van wiskundeonderwijs ging domineren. Papy was een vurig pleitbezorger van de meest exacte aanpak die deze beweging te bieden had. 'Les mathématiques de Papy ou les mathématiques du papa!' was een van zijn prachtige retorische kreten: wie niet op zijn manier wiskunde onderwees was ouderwets en hield de vooruitgang tegen, was de boodschap. Dat meende hij uiterst serieus. De slogan sloeg aan in een periode waarin verzet tegen (ver)oude(rde) normen- en waardenpatronen aan de orde van de dag was.

Er wordt wel eens beweerd dat *New Math* furore kon maken vanwege de lancering van Spoetnik in 1957. Dat is echter een overdrijving. Het *New Math*-élan bestond al kort na de oorlog; in Europa kan zij in verband worden gebracht met de pogingen tot wederopbouw vanuit de Westerse intelligentsia. In Amerika maakte zij deel uit van

het streven van exacte wetenschappers om zich ook na de oorlog – waarin zij binnen het Manhattanproject massaal werk hadden kunnen vinden – maatschappelijk nuttig te maken. Op beide continenten, en ook daarbuiten, was de *New Math* ook een uitwas van de Koude Oorlog. De *New Math*-beweging droeg het élan van de naoorlogse wiskunde op drie niveaus. Op de eerste plaats nam het de moderne academische wiskunde in haar meest zuivere vorm als zinvol onderwijsdoel serieus. Dat betekende niet per se dat men leerlingen van begin af aan met verzamelingen confronteerde – al waren de meest zichtbare aanhangers daar wel toe geneigd – maar het was wel het uiteindelijke doel. Men ging er bijvoorbeeld vanuit dat de neiging tot abstractie maar beter vroeg kon worden aangeleerd. Die abstractie kon speels ordenend, zingend of met klapspelletjes worden geïntroduceerd. Maar er kwam een moment waarop die in taal moest worden vastgelegd.

Op de tweede plaats wilde *New Math* ook didactisch vernieuwend bezig zijn. Dat betekende niet alleen dat de leerling serieus genomen werd en er op verschillende manieren werd gepoogd om de leerling te betrekken bij de lesstof. Het betekende voor Papy ook dat hij oog had voor nieuwe ontwikkelingen, zoals de computertechnologie, en de wijze waarop die didactisch kon worden ingezet. Hij gebruikte bijvoorbeeld een speelse weergave van de binaire notatie van getallen als een tussenvorm om leerlingen meer begrip bij te brengen over de rekenoperaties in het tientallig stelsel.

Op de derde plaats was de wijze waarop de *New Math*-aanhangers hun onderzoek inrichtten van een wiskundige strengheid, die getuigde van hun achtergrond. Alle onderzoeken, de eerste dateren uit de VS rond 1950, waren geheel gebaseerd op statistische correlaties van vooraf gedefinieerde, meetbare variabelen. Wie deze onderzoeksrapporten vandaag de dag leest, kan zich niet aan de indruk onttrekken dat hier de mathematisering totaal ontspoorde. De definitieve doorbraak van *New Math* volgde na 1957, toen er op nog grotere schaal budgetten werden vrijgemaakt en de onderwijsontwikkelaars ineens werden geacht zich écht maatschappelijk nuttig te maken. Achteraf zeggen sommigen dat hun ideeën te snel en te

vroeg werden geïmplementeerd. Maar dat was voor Papy zeker niet het geval. Hij had zijn lesmateriaal doordacht en samen met zijn vrouw Frédérique voor leerlingen vanaf de kleuterleeftijd opgebouwd – beiden waren en bleven overtuigd van de waarde van hun aanpak. Er zijn nog prachtige filmpjes bewaard gebleven van mevrouw Papy die een groepje kleuters de beginselen van de verzamelingenleer bijbrengt.^[1]

De enorme hausse aan *New Math*-methoden, die in vrijwel alle Westerse landen werden gepubliceerd, illustreren hoezeer de nieuwe aanpak leek aan te slaan – of eigenlijk, hoe enthousiast overheden en uitgevers de methoden wilden financieren. Niet overal werd de methode even enthousiast begroet. Wie de vijf pagina's bewijs leest van de stelling dat drie lijnen het platte vlak verdelen in zeven gebieden ('boven' en 'onder' de diverse lijnen) kan zich voorstellen dat niet elke docent bereid of in staat was om dit adequaat aan zijn leerlingen over te brengen. Het *New Math*-ideaal ging in feite ten onder aan de democratiseringsbeweging van de jaren zestig. Pogingen om docenten bij te scholen en ouders te betrekken bij het onderwijs aan hun kinderen begonnen te laat en waren er weinig.

In de jaren vijftig en zestig waren er al tegengeluiden. Alleen al uit de retoriek van Papy valt op te maken dat er tegenstanders waren, anders had hij niet zo zwaar hoeven inzetten. Het bekendste en nog immer leuke tegengeluid is zonder meer het lied *New Math*^[2] van de Amerikaanse cabaretier en wiskundeleraar Tom Lehrer (1928). Het verscheen in 1965 op plaat. Lehrer persifleerde de methode van onderwijzen, door te benadrukken dat leerlingen over de meest eenvoudige rekensommen redeneringen moesten ophangen, maar dat de juiste redenering belangrijker werd gevonden dan de goede uitkomst. In razend tempo voerde Lehrer een subtractie uit in het achttallig stelsel. Terwijl hij zichzelf begeleidde op de piano, hing hij een redenering op over de opgave, gebruikmakend van het positiestelsel en de commutatieve wet voor de optelling. Tussendoor wimpelde hij een verkeerde uitkomst weg.

Eerst in de jaren zeventig viel deze vorm van wiskunde-onderwijs uit de gratie bij beleidsmakers. Tot in de jaren

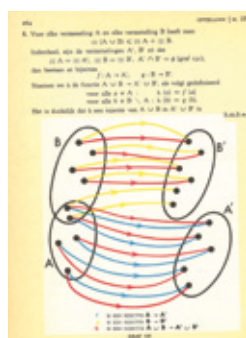
tachtig van de twintigste eeuw was er nog een behoorlijk aantal middelbare scholen waar nog restjes van de *New Math*-ideologie waarneembaar waren. Zo werd er in de 1980-edities van *Getal en Ruimte* en *Moderne Wiskunde* gesproken van oplossingsverzamelingen (inclusief accolades) van een vergelijking, in plaats van de oplossingen.

Noten

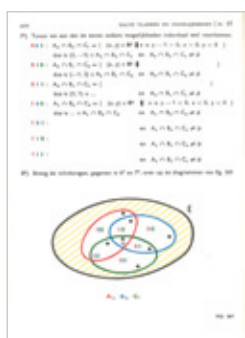
- [1] Frédérique Papy, films van haar lesexperimenten aan lagere schoolleerlingen in de VS <http://ceure.buffalostatate.edu/%7Ecsmpl/Movies/index.html>
- [2] Lehrer, T. (1965). *New Math*. Op *That was the year that was*. Reprise/Warner Bros. Records. Diverse uitvoeringen, waaronder playbacks van hedendaagse studenten, zijn te vinden op YouTube

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskunde-onderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl



figuur 3 *Moderne Wiskunde* 1, pagina 264



figuur 4 *Moderne Wiskunde* 2, pagina 420



BEVOEGDHEID TE GRAAD HALEN?

Bij Hogeschool Utrecht kunt u doorstuderen voor een Master of Education voor het vak Wiskunde. Deze master komt in aanmerking voor de lerarenbeurs.

Kom 8 maart naar de open dag of kijk op www.masters.hu.nl voor meer informatie.

ER VALT NOG GENOEG TE LEREN

**INSTITUUT
ARCHIMEDES
HOGESCHOOL
UTRECHT**



HET FIZIER GERICHT OP...

WISKUNDE VAN DE 21STE EEUW

Arthur Bakker

In Fizio belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering bespreekt Arthur Bakker enkele ideeën over waar het wiskundeonderwijs in de eenentwintigste eeuw qua vorm aan zou moeten voldoen.



Sinds de millenniumwisseling wordt er internationaal veel geschreven over *21st century skills*. Volgens de auteurs is het in deze eeuw extra belangrijk om te leren samenwerken, te communiceren, met technologie om te gaan en problemen creatief op te lossen. Naar aanleiding van dergelijke rapporten is er sinds vorig jaar veel aandacht voor de vraag hoe het wiskundeonderwijs zou moeten veranderen om bij te dragen aan de ontwikkeling van deze *21st century skills*. Om een paar voorbeelden te noemen: in 2013 waren er conferenties in Stockholm en Rome over dit thema, hield Koeno Gravemeijer een plenaire lezing hierover op een conferentie over wiskundeonderwijs in Turijn, en wijdde een groep Nederlandse wiskundededidactici een symposium aan deze vraag.

In Stockholm hield ik een lezing over de vraag wat onderzoek naar wiskunde in het bedrijfsleven ons kan vertellen over wat werknemers in de

toekomst nodig hebben aan wiskundige kennis. Ten eerste: vrijwel alle wiskunde die ik in bedrijven tegenkwam, had te maken met modelleren of statistiek. Ten tweede: het is erg belangrijk dat werknemers over kwantitatieve gegevens kunnen communiceren met leveranciers, managers, teamgenoten en klanten. Ten derde: wiskundige modellen en berekeningen zijn grotendeels aan computerprogramma's uitbesteed. De meeste werknemers moeten dus vooral in staat zijn om input en output te begrijpen. Hoe de vereiste kennis aan het verschuiven is, wordt duidelijk aan de hand van de standaarddeviatie (SD). De SD wordt veel gebruikt om de variatie van productieprocessen te meten. Op de werkvloer rekent niemand met de formule van de SD. Wat wel belangrijk is om te weten is: wat zegt de SD, wanneer gebruik je die, en vooral: welke van de vijf opties in Excel moeten we kiezen? Het valt moeilijk te zeggen of de vereiste wiskundige kennis makkelijker, moeilijker of alleen anders is.

Enkele conclusies op de conferentie in Stockholm waren dat modelleren, statistiek en complexe systemen belangrijke

onderwerpen zijn in de eenentwintigste eeuw, maar relatief weinig aandacht krijgen in de meeste wiskundecurricula. Verder betoogde bijvoorbeeld Conrad Wolfram dat we nog veel te weinig gebruikmaken van de mogelijkheden die computers bieden. In zijn TED-lezing die op YouTube te vinden is, verdedigt hij de extreme stelling dat we computers de wiskunde moeten laten doen waar computers goed in zijn, berekeningen, en daar mensen niet te veel mee lastig moeten vallen.

Koeno Gravemeijer betoogde dat een grondige doordening van het onderwijs nodig is als we de razendsnelle technologische en economische ontwikkelingen serieus nemen. Op het Nederlandse symposium was men het erover

eens dat we leerlingen moeten helpen de kennis, vaardigheden en persoonlijke kwaliteiten te ontwikkelen die nodig zijn om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve

kant van de wereld. Hoe dit te verwezenlijken valt was het onderwerp van verhitte discussie. Het lijkt in ieder geval dat leerlingen er baat bij hebben om samen echte wiskundige problemen op te lossen met behulp van de computer.

Wie meer wil lezen, kan onder andere terecht op *Didactief* online: www.didactiefonline.nl/component/content/article/15-archief/11518-wiskundeonderwijs-voor-de-21e-eeuw.html: Een overzichtelijke discussienota over *21st century skills*, geschreven door Joke Voogt en Natalie Pareja Roblin.

Over de auteur

Arthur Bakker is universitair docent aan het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
E-mailadres: A.Bakker4@uu.nl

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

HET LICHAAM ONTHOUDT

Wiskunde doen, kan dat met je handen en voeten? Jacques Jansen stuurt permutaties van leerlingen naar de schoolleiding en bedrijft Vedische wiskunde met touw en spijkers.

'Het lichaam onthoudt', dat zijn wijze woorden van een van mijn Tai Chi-leraren. Tai Chi is een oude verdedigingssport waarbij het zachte wint van het harde en waarbij één ons sterker blijkt te zijn dan één kilo. Bij het oefenen in de Tai Chi-lessen moesten we een aantal opeenvolgende handelingen steeds herhalen. Hierbij kregen we te horen dat we niet te veel moesten nadenken, maar ons lichaam het werk moesten laten doen. Bepaalde handelingen komen dan vanzelf weer terug. Misschien herkent u dit wel van uw danslessen. Van dit idee kun je gebruikmaken in de wiskundelessen. Dat doen we al, maar doen we dit wel vaak genoeg? Geïnspireerd door het artikel van Michiel Doorman in de rubriek Flzier in *Euclides* 89(3), beschrijf ik hier nog enkele ideeën.

Tabel 1									Tabel 2								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18	2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	12	15	18	21	24	27	3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	12	16	20	24	28	32	36	4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	10	15	20	25	30	35	40	45	5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	12	18	24	30	36	42	48	54	6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	14	21	28	35	42	49	56	63	7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	16	24	32	40	48	56	64	72	8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81	9	9	9	9	9	9	9	9	9

figuur 1

Verschil tussen permutatie en combinatie

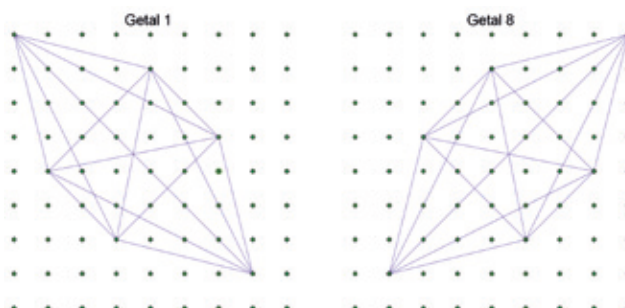
We kunnen dit bijvoorbeeld gebruiken bij het uitleggen van het verschil tussen een permutatie en een combinatie. U herkent het probleem: veel leerlingen vinden dit erg moeilijk. Je komt er niet mee weg dat bij een permutatie de volgorde wel van belang is en bij een combinatie juist niet. Ik stel dan in de les de volgende vraag: 'Op hoeveel manieren kunnen drie mensen in een rij staan?' Ik wijs drie vrijwilligers aan en heb daarmee meteen de aandacht. Floor, Viktor en Jeroen gaan in een rij staan. Floor zetten we vooraan. Daar blijft zij staan. Viktor en Jeroen staan op de tweede plaats of derde plaats. Dat kan op twee manieren. Vervolgens zetten we Viktor vast op de eerste plaats en laten we Floor en Jeroen van tweede en derde plaats wisselen. Ten slotte gaat Jeroen op de voorste plaats staan en wisselen Floor en Viktor van tweede en derde plaats. In totaal geeft dat 6 volgordes. Als ik nu ook zelf nog mee ga doen, heb ik vier mogelijke plekken om te gaan staan: eerste, tweede, derde of vierde plaats. We zien dus dat $4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$. Maar wat is nu het verschil tussen een permutatie van 3 uit 30 of een combinatie van 3 uit 30? Dan is het tijd

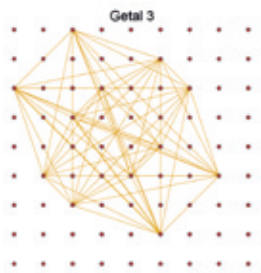
voor de volgende sketch: De klas klaagt over mijn gebrekkige uitleg bij wiskunde, het wordt daarom hoog tijd om te klagen bij mijn direct leidinggevende (DLG). De leerlingen kiezen uit hun midden een afvaardiging van drie leerlingen die naar mijn DLG wordt gestuurd. Dat kan op $30 \times 29 \times 28 = 24360$ manieren. Een permutatie van 3 uit 30. De drie leerlingen verlaten de klas in een rijtje. Dat kan dus op 6 manieren. Dit drietal vertegenwoordigt dus 6 manieren van dat grote aantal 24360. Mijn DLG is verbaasd als de drie leerlingen in zijn werkkamer binnenkomen, maar is totaal niet geïnteresseerd in de volgorde waarin ze binnenkomen. Dat zal hem een worst wezen. Het gaat hem alleen om die drie personen, wie ze zijn. Zo komen we dan bij het totaal aantal combinaties van 3 uit 30 (4060) en dat scheelt een factor 6 met het aantal permutaties van 3 uit 30. Dat is een heel stuk minder aan mogelijkheden. Ik had het gevoel dat deze performance echt werkte.

Vedische wiskunde

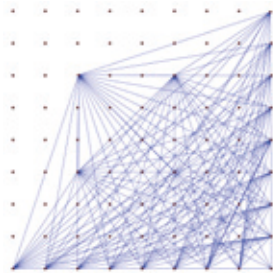
Lang geleden las ik een artikel over Vedische wiskunde, geschreven door een zekere Joseph Howse.^[1] Het ging over slim rekenen en speciale aandacht voor de natuurlijke getallen 1 tot en met 9. In de naam 'Vedische wiskunde' wordt verwezen naar de Veda's, de heilige boekwerken van de oude Indiërs. De Veda's zijn de oudste heilige boeken ter wereld. De Veda's bestaan duizenden bladzijden, verdeeld over vele boeken. In die boeken vinden we verhalen, liederen, hymnen, spreuken, voorschriften over rituelen, wetten en leefregels, toelichtingen op die wetten en regels en filosofische teksten over levensvragen. Op diverse plaatsen in de Veda's komen we wiskunde tegen.^[2] In het Vedische wiskundesysteem worden getallen aanschouwelijk gemaakt door meetkundige figuren. Dit gebeurde met tabel 1 en 2, zie figuur 1.

figuur 2





figuur 3



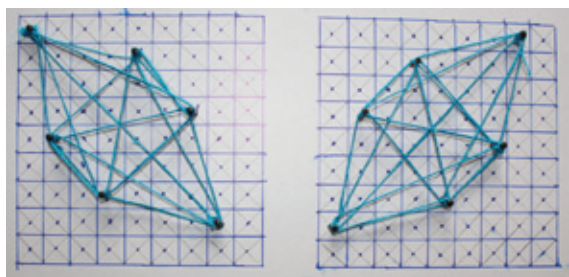
figuur 4

Tabel 1 en 2

Tabel 1 bestaat uit de getallen 1 tot en met 9 met hun verschillende veelvouden. Deze tabel vertoont geen opvallende regelmaat of patroon. Toch zijn die er wel, schrijft Howse. Negen is eigenlijk het grootste getal dat er is. Alle getallen erboven zijn eenvoudige samenstellingen van de negen natuurlijke getallen. Ik citeer nu Howse: 'Het ritme en patronen in tabel 2 komen naar voren wanneer de twee cijfers van ieder dubbelgetal bij elkaar worden opgeteld en de daaruit voortgekomen oplossing ervoor in de plaats gesteld is; dan is er geen getal groter dan 9 in de tabel. Dus 10 wordt 1 en 18 wordt 9. Wanneer de som van de twee cijfers toch nog resulteert in een dubbel getal – bijvoorbeeld $4 + 8 = 12$ – dan moet dat op zijn beurt worden opgelost ($1 + 2 = 3$). Deze 3 wordt in het hokje van 48 ingevuld.' U herkent wellicht dat in tabel 2 precies de resten staan als je de getallen uit tabel 1 deelt door 9. Alleen schrijven we hier een 9 in plaats van een 0. Bent u benieuwd waarom deze cijfersommenprocedure precies de resten bij deling door 9 oplevert? Zie dan de toelichting in het kader.

Tabel 2 vertoont opvallende patronen en lijkt mij uitdagend voor uw leerlingen. Howse schrijft verder: 'Van deze tabel kunnen de patronen, die de getallen vormen, worden getekend op vellen doorschijnend papier, die over de tabel gelegd worden. Begin met getal 1; merk dan met een potloodstip op het doorschijnend papier het midden van elk hokje waarin het getal 1 voorkomt (er zijn er zes); verwijder de tabel en verbind op het doorschijnend papier de punten, zodat een patroon ontstaat voor ieder getal. Doe dit voor ieder getal.' Ik heb dit zelf gedaan met behulp van *GeoGebra*, zie figuur 2. We zien hier grafische voorstellingen van de getallen 1 en 8. Leerlingen vinden dit tekenwerk leuk om te doen. Ik heb dit bijvoorbeeld

figuur 5



laten doen door leerlingen met wiskunde C als onderdeel van een praktische opdracht over oude talstelsels. Een paar mooie plaatjes hiervan vindt u terug op de website van *Euclides*, zie vakbladeuclides.nl/895jansen.

De getallen 1 en 8 vormen elkaars spiegelbeeld. (Waarom is dat eigenlijk zo?) Er zijn nog drie paren getallen die elkaars spiegelbeeld zijn. Bij het getal 9 hoort een heel uniek patroon, zie figuur 3. Zie in figuur 4 ook het lijnenspel van het getal 3. Het leek mij wel aardig om de getallen 1 en 8 uit te beelden met behulp van een plankje, spijkers en touw, zie figuur 5. Dit kan gefabriceerd worden in een wiskundewerklokaal, maar welke school heeft zo'n lokaal eigenlijk? Door het uitvoeren van dit spijkerwerk kom je vanzelf op een ander probleem. Ga ik bij het getal 1 vijftien touwtjes spannen tussen die 6 spijkers? Kan ik de spijkers niet met één touw onderling verbinden? Je maakt dan een lusje om een spijker. Als dat met één touw niet lukt, waarom kan dat dan niet? (Eventueel bekijkt u de situatie met vier spijkers.) Hoeveel touwtjes heb ik dan minstens nodig?



figuur 6

Brugklassers

Ook met brugklassers kunt u hiermee aan de slag. Ga het schoolplein op bewapend met stoepkrijt en sportlint. Een groep van twaalf leerlingen splitst zich in twee groepjes van zes en gaan de getallen 2 en 7 uitbeelden. Als de zes leerlingen van het getal 2 elkaar een keer de

Cijfersommen

Waarom levert de procedure van Howse precies de rest bij deling door 9 op? We bekijken als voorbeeld het getal 48. Met ons positiestelsel zien we dat $48 = 4 \times 10 + 8 \times 1$. Om negenvouden te verkrijgen, vervangen we dat door $48 = 4 \times (10 - 1) + 4 + 8 \times 1$, oftewel $48 = 4 \times 9 + 4 + 8$. Hier staat dus een negenvoud plus de cijfersom van 48. Dat kun je doen bij elk getal van twee cijfers. Het getal bestaande uit de cijfers a en b is gelijk aan $10a + 1b = 9a + a + b$. We zien weer een negenvoud vermeerderd met cijfersom $(a + b)$. In het algemeen voor een getal van vier cijfers, bestaande uit de cijfers a , b , c en d : $1000a + 100b + 10c + 1d = 999a + 99b + 9c + a + b + c + d$. Hier staat dus weer een negenvoud vermeerderd met cijfersom $(a + b + c + d)$. We zien dat het nemen van de cijfersom alleen negenvouden weghaalt uit het getal, dus de rest bij deling door 9 blijft hetzelfde.

hand schudden zullen zij er achter komen dat het gaat om totaal vijftien handdrukken. Proefondervindelijk zullen zij ervaren dat er vijftien verbindingen zijn en dat $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{1}{2} (6 \times 5)$. De leerlingen maken met kalkkrijt twee roosters naast elkaar van negen bij negen, vullen vervolgens de tweeën in en in het andere rooster de zevens. Ze nemen dan hun posities in en gaan met een sportlint elkaar onderling verbinden. Ondertussen gaan op dezelfde manier twaalf andere leerlingen aan de slag met de getallen 1 en 8. Voor de overige leerlingen is er vast nog wel een opdracht te bedenken. Laat u zich inspireren door onderstaand al ingevuld overzicht:

Getal	Frequentie	Aantal verbindingen	Spiegelbeeld van...
1	6	15	8
2	6	15	7
3	12	66	6
4	6	15	5
5	6	15	4
6	12	66	3
7	6	15	2
8	6	15	1
9	21	210	-

Zo zijn er nog veel meer projectjes te bedenken waarbij je 'lichamelijke' wiskunde kunt doen. Ongetwijfeld heeft u zelf ook ideeën. Al eens veelvlakken gemaakt met een klas? Zie figuur 6.

Noten

- [1] Howse, J. (1973). Vedic Mathematics. *Mathematics Teaching*, 62, 56–63.
- [2] Zie ook de artikelen over Vedische wiskunde van Marco Swaen in *Pythagoras*, jaargang 43.

Over de auteur

Jacques Jansen was 35 jaar docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

VERSCHENEN

MUZIEK UITGEDRUKT IN GETALLEN



Ondertitel: De toonklasseverzamelingsentheorie en haar toepassingen

Auteurs: Aline K. Honingh en Michiel Schuijjer

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2013), Zebra-reeks deel 36

ISBN: 978-90-5041-137-0

Prijs: € 10,00 (76 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Het is in eerste instantie misschien een vreemd idee om muziek in getallen te willen uitdrukken, maar het zal blijken dat dit soms nuttig kan zijn. Deze Zebra gaat over de toonklasseverzamelingsentheorie (Engels: pitch-class set theory), die aan toonhoogten getalswaarden geeft. Op deze manier kunnen bepaalde muzikale technieken verrassend eenvoudig worden beschreven, zoals bijvoorbeeld transpositie en inversie. We zullen zien dat de toonklasseverzamelingsentheorie ons helpt de structuur van verschillende soorten muziek sneller te doorgronden. En dat de theorie componisten op ideeën heeft gebracht. Dit boekje is bedoeld voor de muzikliefhebber die een wiskundige benadering niet uit de weg gaat. De tekst bevat opgaven bij ieder hoofdstuk en tevens suggesties voor eigen onderzoek.



MEDEDELING

UITSLAG TWEEDE RONDE VAN DE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE



Op 14 maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op twaalf universiteiten. De opgaven en uitwerkingen zijn inmiddels gepubliceerd op www.wiskundeolympiade.nl. Vanwege de gestegen deelname-aantallen van de afgelopen jaren waren er met ingang van dit jaar meer plaatsen beschikbaar in de tweede ronde: ongeveer 1000 leerlingen waren uitgenodigd. De leerlingen deden mee in drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer 40 leerlingen uitgenodigd worden voor de finale in september. Wie deze winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekend gemaakt.

SOMMEN MET STAMBREUKEN

Martin Kindt

De voordracht van Martin Kindt op de NVvW-studiedag 2013 had als titel 'uitvinden en oefenen'. Deze activiteiten worden dikwijls gezien als uitersten in het spectrum van het wiskundeonderwijs. Om te tonen dat deze uitersten elkaar kunnen raken, koos hij voorbeelden uit drie wiskundige oerthema's: Egyptische breuken, pythagorese drietallen en de vierkantsvergelijking. In drie artikelen werkt hij elk van die thema's wat nader uit.

Stambreuken

De door de Schot Alexander Rhind in 1858 in Luxor ontdekte en gekochte papyrusrol, wordt algemeen beschouwd als het oudst bekende wiskundeboek uit de geschiedenis. Van der Waerden zegt daarover in zijn *Ontwakende Wetenschap*: 'De papyrus begint veelbelovend: volledig en grondig onderzoek van alle dingen, inzicht in al het zijnde, kennis van alle geheimen...'. 'Maar', zo vervolgt hij, 'spoedig blijkt dat het slechts de geheimen der getallen en de kunst van het rekenen met breuken zijn, waarin men zal worden ingewijd'. Het rekenboek, samengesteld door Ahmes omstreeks 1700 voor Chr. bevat veel praktische problemen zoals hoe zeven broden te verdelen over tien werkers.



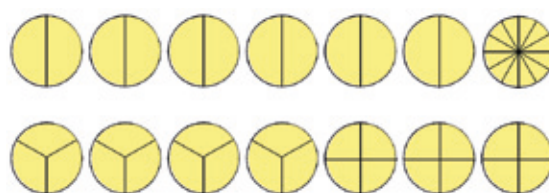
Je zou natuurlijk elk van die broden in tien kunnen verdelen en iedere arbeider zeven stukken kunnen geven. Een mooiere oplossing is het om vijf broden te halveren en de resterende twee broden elk in vijven te verdelen:



$$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

Dit is de concrete versie van de splitsing van de breuk $\frac{7}{10}$ in de *stambreuken* (unit fractions) $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{5}$.

De breuken van de Egyptenaren hadden uitsluitend de teller 1 met uitzondering van de breuk $\frac{2}{3}$ die de 'twee delen' werd genoemd. Men kan bewijzen (en dat zal ik verderop ook doen) dat iedere breuk tussen 0 en 1 is te splitsen in ongelijke(!) stambreuken. Dat die splitsing lang niet altijd eenduidig is, blijkt als er twaalf werkers in het geding zijn bij de verdeling van de zeven broden. Er is dan de mogelijkheid om zes broden te halveren en het laatste brood in twaalfen te verdelen. Men kan echter ook vier broden in drieën en drie broden in vieren delen.



$$\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Truus Dekker en ik hebben enige tijd terug vier bundels oefeningen met breuken ontworpen, omdat wij ontdekten dat de brugklasboeken op dit punt schromelijk tekortschoten. In het deel over optellen en aftrekken van breuken hebben we een paar opgaven over Egyptische breuksplitsingen opgenomen:

wel $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, **niet** $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$

a. Controleer de Egyptische splitsing van $\frac{2}{7}$.

b. Splits in twee verschillende stambreuken:

$\frac{3}{8} = \dots + \dots$	$\frac{5}{12} = \dots + \dots$	$\frac{3}{5} = \dots + \dots$
$\frac{4}{9} = \dots + \dots$	$\frac{4}{7} = \dots + \dots$	$\frac{11}{18} = \dots + \dots$
$\frac{2}{9} = \dots + \dots$	$\frac{3}{10} = \dots + \dots$	$\frac{13}{22} = \dots + \dots$

Het is soms een beetje puzzelen, maar ik ben ervan overtuigd dat dit type oefeningen veel meer zoden aan de dijk zet dan eindeloze stereotiepe rijtjes. Dat er vaak meer dan twee stambreuken nodig zijn bij een splitsing wordt snel duidelijk als je zeven broden over het Egyptische elftal wilt verdelen:

$$\frac{7}{11} = \frac{14}{22} = \frac{11}{22} + \frac{2}{22} + \frac{1}{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{22}$$

Hier past het verhaal van de oude Egyptenaar die op zijn sterfbed zijn drie zoons bij zich roept en hen zegt dat de

oudste de helft, de middelste een kwart en de jongste een vijfde van zijn kudde kamelen zal erven. Die kudde bevat echter negentien kamelen en de drie zoons zitten met hun handen in het haar. Totdat een slimme buurman komt en zegt: ik leen jullie één kameel, verdeel de kudde en zie wat er gebeurt. De zoons nemen het voorstel dankbaar aan, want nu lukt het prima: de oudste krijgt tien, de middelste vijf en de jongste vier kamelen; samen 19 en de geleende kameel gaat weer terug naar de buurman. Dit verrassende resultaat hangt samen met $\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

Het lijkt me een goed idee om de leerlingen uit te dagen nu zelf een soortgelijke verhaaltje te bedenken. Je loopt dan misschien de kans dat er leerlingen zijn die van de Egyptenaar een Fries, van de kamelen koeien en van de zoons dochters maken. Daar is niets op tegen als er ook maar aan de getallen gesleuteld wordt en zo kunnen er mooie *eigen producties* – zoals dat heet in didactisch jargon – ontstaan.

Het algoritme van Fibonacci-Sylvester

Er bestaat een systematische aanpak om een breuk in stambreken te splitsen. Beschouw de breuk $\frac{a}{b}$ (a en b natuurlijke getallen, $a < b$ en a niet deelbaar op b). Er bestaat dan een natuurlijk getal $k > 1$, zo dat $(k-1)a < b < ka$.

Neem nu $\frac{1}{k}$ als eerste term van de splitsing van $\frac{a}{b}$ in stambreken en ga verder met

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k} = \frac{ka-b}{kb} = \frac{A}{B}$$

Er geldt: $A < a$ (want $ka - a < b$) en $B > b$ (want $k > 1$). Vervolgens pas ik hetzelfde recept toe op $\frac{A}{B}$, enzovoort. Omdat bij elke stap de teller kleiner wordt, ben ik na een eindig aantal stappen klaar. Dit proces bewijst dat elke breuk tussen 0 en 1 te splitsen is in een eindig aantal ongelijke stambreken. Het algoritme kun je 'dom' noemen, want het geeft lang niet altijd de kortste of mooiste splitsing. Pas ik het algoritme toe op $\frac{19}{20}$, dan komt er:

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}$$

Nog schrijnender is het als je de breuk $\frac{99}{100}$ via dit algoritme in stambreken splitst:

$$\frac{99}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{73} + \frac{1}{9018} + \frac{1}{230409900}$$

Vergelijk dit met de ad-hocmethode:

$$\frac{99}{100} = \frac{1}{2} + \frac{49}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{24}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$$

Of, met het verhaal van de erfenis in het achterhoofd:

$$\frac{99}{100} = \frac{95}{100} + \frac{4}{100} = \frac{19}{20} + \frac{1}{25} = \dots$$

Het algoritme van Fibonacci-Sylvester is vooral van theoretisch belang. Het bewijst niet alleen dat een

Egyptische splitsing altijd mogelijk is, het leert ook dat het aantal breuken van zo'n splitsing niet groter hoeft te zijn dan de teller van de te splitsen breuk. Zo kan een breuk met teller 2 en oneven noemer in ten hoogste twee stambreken worden gesplitst. Inderdaad:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

In de papyrus Rhind is een tabel te vinden van de uitkomsten van delingen $2 : (2n+1)$ voor $n = 1, 2, \dots, 50$ uitgedrukt in stambreken. De eerste uitkomsten beantwoorden aan voorgaande formule, maar bij $2 : 13$ staat de uitkomst

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} \text{ in plaats van } \frac{1}{7} + \frac{1}{91}.$$

Hadden zij een voorkeur voor zo veel mogelijk *even* noemers, omdat dit verdubbelen simpeler maakt? Je zou het haast denken. In de tabel komen ook enkele splitsingen in vier stambreken voor, en op een na bestaan die uit breuken met even noemers. Over de maximale aantallen waarin een breuk te splitsen is, bestaan interessante en nog onbewezen vermoedens. Het meest bekend is dat van Erdős-Strauss. Dit zegt dat iedere breuk met teller 4 te splitsen is in ten hoogste drie stambreken. Onderzoek leert al gauw dat het eventueel mis kan gaan bij noemers die een viervoud plus 1 zijn. Er is door computers al flink gerekend om zo'n tegenvoorbeeld te geven, maar dit is nog niet gevonden. Wie weet?

Stambreken als uitkomsten

Het product van twee stambreken is zelf altijd een stambreuk. Voor de som van twee stambreken geldt dat duidelijk niet, dus lijkt het een aardige vraag of een som van stambreken soms wel een stambreuk kan zijn. Als je er niet bij zegt dat het twee verschillende stambreken

moeten zijn, is het flauw, want $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$ zodat er gemakkelijk een oneindige rij voorbeelden kan worden bedacht. De toevoeging dat de noemers van de twee termen ongelijk moeten zijn, werpt een niet al te hoge drempel op, want er geldt bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

en vandaar ook, deel door 2, 3, ... :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}, \text{ enzovoort.}$$

Kortom $\frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} = \frac{1}{2n}$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$. Die formule is

niet per se nodig voor het inzicht, maar als de leerlingen er aan toe zijn, is het een prima oefening in algebra om op die manier een oneindige rij sommen te fixeren. En... er zijn oneindig veel voortbrengers van zulke rijen van breukensommen te maken:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}, \dots$$

In elk van de voorbeelden treden twee opvolgende stambreuken op. Zo kan worden uitgevonden dat het verschil van twee burens in de rij van stambreuken zelf een stambreek is. In formule:

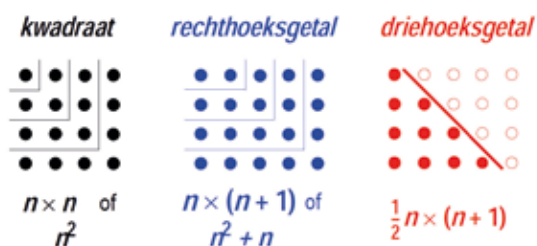
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}, \text{ als } b = a + 1.$$

Omgekeerde driehoeksgetallen

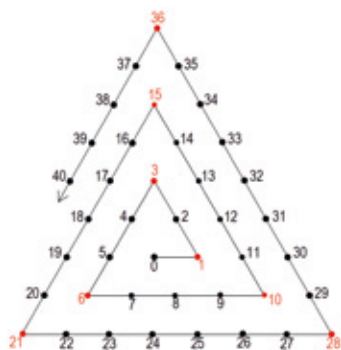
Christiaan Huygens die in 1672 in Parijs verbleef, had daar een excellente leerling in de persoon van Leibniz. De laatste kreeg als huiswerk om de volgende oneindig voortlopende stambreukensom te bepalen

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$$

De noemers van de breuken zijn de bekende driehoeksgetallen die sinds de Pythagoreërs vaak worden voorgesteld door stippenpatronen. Ze worden meestal in één adem genoemd met vierkants- en rechthoeksgetallen. Voor beginners in algebra is dit prima leerstof waarbij het opstellen van formules kan worden geoefend. In een oude jaargang van *Euclides*^[1] schreef G. Krooshof een inspirerend artikel met als titel *De eerste algebralessen*. Hij suggereert daarin om het onderwijs te starten met de zogeheten *figurale getallen*.



Krooshof koos voor tweedegraadsvormen, maar men kan ook simpeler starten met lineaire vormen bij V- en W-patronen. De groei van 'tweedegraadspatronen', dus ook van driehoeksgetallen is progressief. Dat is mooi te zien op de spiraalvormige getallenlijn:



Er is nog een andere aanpak. Als je na de beginterm 1 steeds twee opvolgende termen in de rij van omgekeerde driehoeksgetallen optelt, krijg je een omgekeerd recht-hoeksgetal en de telescoop doet de rest.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \dots$$

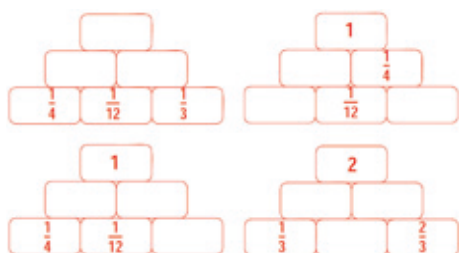
$\swarrow \quad \searrow$ $\swarrow \quad \searrow$ $\swarrow \quad \searrow$
 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$

Dat de omgekeerden van twee opvolgende driehoeksgetallen waarvan de eerste een even rangnummer heeft, een omgekeerd rechtshoekgetal opleveren, kan worden bewezen met algebra:

$$\frac{1}{n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

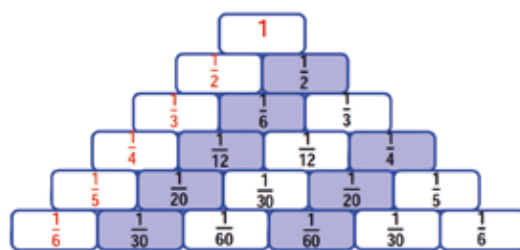
Driehoekige muurtjes

De figuur hieronder geeft een voorbeeld van een oefen-vorm die zijn weg heeft gevonden in verschillende methoden voor basis- en voortgezet onderwijs.



Op de lege stenen moeten getallen worden ingevuld en wel zo dat elke steen (niet op de onderlaag) de som bevat van de getallen op de twee stenen waarop hij rust. Bij een vorm met drie lagen moeten er drie getallen gegeven zijn; bij een vierlagenvorm heb je vier getallen nodig, enzovoort. In het voorbeeld zie je verschillende situaties, de vierde vraagt een beetje puzzelwerk, want de middelste steen op de onderlaag draagt dubbel bij aan het getal in de top. Een 'metavraag' is of het drielagenmuurtje bij elke drie ingevulde stenen vastligt. Het antwoord is nee, want van de twintig mogelijke drietallen vallen er drie af vanwege afhankelijkheid. Bij een vierlagenmuurtje wordt dit al weer wat ingewikkelder...

Het aardige van de muurtjesvorm is dat je hem kunt gebruiken bij het oefenen van optellen en aftrekken (of vermenigvuldigen en delen) van allerlei getalsoorten of algebraïsche vormen. Als je van een muurtje met een willekeurig aantal lagen één van de twee 'buitentrappen' invult, liggen alle andere getallen vast. Leibniz bedacht een muur waarbij een buitentrapp gevuld is met de termen van de *harmonische rij* ofwel de stambreuken met noemers 1, 2, 3, ... Er ontstaat dan het volgende symmetrische patroon:



Dit patroon wordt de *harmonische driehoek* of *driehoek van Leibniz* genoemd. De driehoek kan onbeperkt naar beneden worden voortgezet. Dat er louter stambreuken in komen, is niet vanzelfsprekend, maar kan met volledige inductie worden bewezen.^[2] Naast de linkerbuitentrapp let ik dan op de afwisselend witte en blauwe trappen die daar parallel aan zijn. Ieder van die trappen bevat de verschillen van de getallen in de naast hogere trap en via de telescoopsom levert dat limietsommen van rijen op.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots &= 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \dots &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \dots &= \frac{1}{3} \quad \text{enzovoort.} \end{aligned}$$

In 1714, twee jaar voor zijn dood, blikte Leibniz met het essay *Historia et origo calculi differentiales* terug op zijn baanbrekende uitvinding van de 'calculus'. Hij zegt dat het werk aan discrete wiskunde in zijn Parijse jaren hem op het idee bracht van de 'continue analyse'. Hoe moeten we dit nu zien? Ik probeer het met een paar woorden uit te leggen. Denk aan het toenamendiagram van een willekeurige functie f . Beperken we het domein van f tot een serie opeenvolgende natuurlijke getallen, dan corresponderen de zogeheten differenties $f(n+1) - f(n)$ met de hellingen van koorden van een ingeschreven polygoon van de grafiek van f . Je zou daarom van een discrete afgeleide kunnen spreken. En de telescoopsom van die differenties kan worden voorgesteld als de oppervlakte van een staafdiagram, zeg een discrete integraal. Leibniz maakte de geniale reuzenstap van discreet naar continu, waarbij hij een kromme beschouwde als een 'oneindighoekig' polygoon, en ontdekte zo het verband tussen 'raaklijn' en 'oppervlakte'.

Uitvinden en oefenen

Toen hij vijftien jaar was, kreeg Christiaan Huygens privélessen wiskunde van Jan Stampioen. Deze beval een imponerende boekenlijst aan (Archimedes, Ptolemaeus, Descartes, ...) en schreef vervolgens: 'Denk niet dat de boeken die ik zojuist heb genoemd, volstaan om tot de kern van alle wetenschap door te dringen. Ten eerste is daar een goed verstand voor nodig en ten tweede voortdurende **oefening**. Als aan deze voorwaarden is voldaan, zal de kennis ook niet ineens komen, maar stukje bij beetje, pas na lange studie. En het is een groot voordeel als men zelf ook iets **uitvindt**. Daar zal men meer profijt

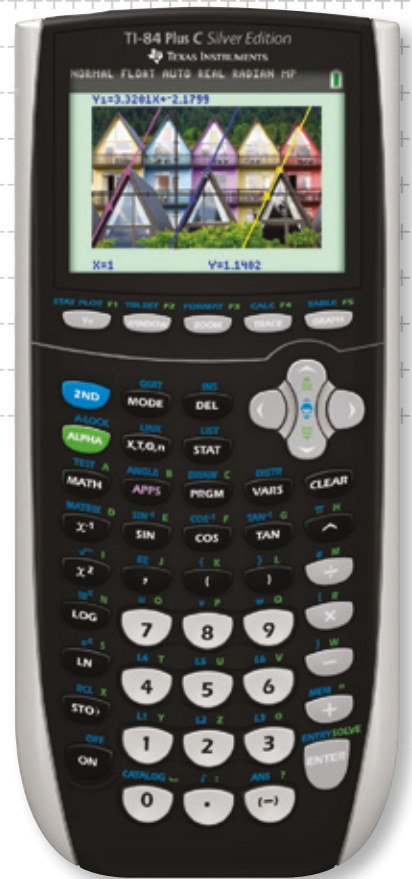
De nieuwe TI-84 Plus-C *silver edition*

Is nu beschikbaar, bestel 'm vast!

- Met backlight kleurenscherm, oplaadbare batterij en lader
- Met Examenstand/Geheugen-blokkering
- Ook weer met TI-SmartView, maar nu met kleur!
- Gratis upgrade uw huidige zwart-wit SmartView naar kleur

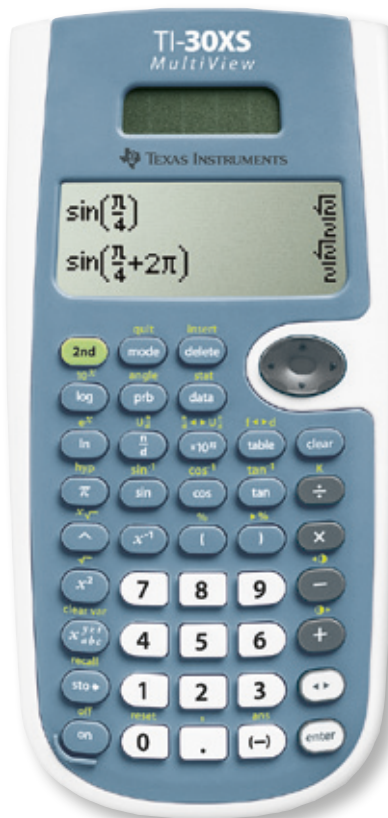
Zeer aantrekkelijke lerarenaanbieding

voor € 69,-. Met gratis TI-SmartView software voor beamer of digibord.



*Goedgekeurde grafische rekenmachines voor het
Centraal Eindexamen havo/vwo:*

- TI-83 Plus en TI-84 Plus
- TI-84 Plus C Silver Edition
- TI-Nspire CX



Nieuw! Nu ook lerarenaanbieding voor de wetenschappelijke rekenmachine TI-30XS MultiView.

Machine + SmartView software voor projectie met beamer of digibord voor slechts € 20,-

- > Mail voor aanbiedingsformulieren en/of meer informatie naar ti-cares@ti.com
- > Kijk ook op www.education.ti.com/nederland

van hebben dan van voortdurend routinematig les. Op zo'n manier van studie dring ik sterk aan.^[3]

Zoals we weten, heeft Huygens dat 'uitvinden' heel letterlijk opgevat. Bekende uitvindingen van hem zijn het slingeruurwerk, de zeevaartklok en de toverlantarn. Maar zo zal Stampioen het niet hebben bedoeld. Wiskunde leren volgens het principe van (al of niet geleide) heruitvinding lijkt me geen foute interpretatie. En dit principe kan werken op alle denkbare niveaus. Daar hoort ook voortdurende oefening bij, zeker. Maar dit oefenen moet gericht zijn op wat Van Hiele noemde 'gevarieerd handelen aangepast aan wisselende omstandigheden.' Mechanisch werken kwalificeerde hij ooit als 'verspilling van tijd', een standpunt dat ik deel (en altijd gedeeld heb). Ik meen dat de opgaven over het splitsen in stambreken voldoen aan Van Hiele's criterium: zij vragen namelijk gevarieerd en inzichtelijk rekenwerk. Bovendien zijn er vaak meer splitsingen mogelijk, die kunnen worden vergeleken en discussie uit kunnen lokken. En dan zwijg ik over de historische context waarbij leerlingen kunnen

ervaren dat wiskundige conventies niet eeuwig hetzelfde zijn geweest. Er valt ook van alles bij uit te vinden, bijvoorbeeld in de geest van het vermoeden van Erdős-Strauss. Bovenbouwleerlingen, zeker in het vwo, zou je de oneindige rijen stambreken met eindige sommen niet mogen onthouden. Spannende voorbeelden als de rij van Huygens/Leibniz zijn er genoeg.

Noten

- [1] Jaargang 25, 1949/50, pagina 164-168.
- [2] Kindt, M. (2013). Wat te bewijzen is (60), *Nieuwe Wiskrant*, 32(3), 28-31.
- [3] Andriesse, C. (2007). *Titan kan niet slapen, biografie van Christiaan Huygens*. Olympus Pockets.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar; ook na zijn pensioen is hij nog medewerker van het Freudenthal Instituut.

E-mailadres: m.kindt@uu.nl



MEDEDELING

AANKONDIGING SYMPOSIUM WGRWO

Nieuwlichterij!

Het twintigste symposium van de Werkgroep Geschiedenis van het Reken-WiskundeOnderwijs, de WGRWO, zal plaatsvinden op **10 mei 2014**, onder de titel *Nieuwlichterij!*



Programma:

- 9.30-10.15 Inloop en koffie
- 10.15-10.30 Welkom en mededelingen
- 10.30-11.15 Danny Beckers: *De invoering van het metrieke stelsel*
In 1816 werd in Nederland (en dus ook België) het metrieke stelsel ingevoerd, ook in het onderwijs. Dat had onder andere gevolgen voor de breukendidactiek, want decimale breuken werden opeens veel belangrijker.
- 11.15-12.00 Dirk de Bock: *Willy Servais en de New Math in België*
De naam van George Papy is nauw verbonden met de invoering van de *New Math* in België. Minder bekend is Willy Servais, die eveneens een cruciale rol speelde, maar een veel flexibeler persoonlijkheid was dan Papy.
- 12.00-13.30 Lunchpauze
- 13.30-14.15 Victor Schmidt en Bert Zwaneveld: *Van computerkunde tot burgerinformatica*
Eind jaren zestig begon het toenmalige IOWO een experiment met een vak *computerkunde*. Het zelf leren programmeren verdween al spoedig naar de achtergrond en computerkunde werd burgerinformatica en informatietechnologie. Hoe kijken we nu daarop terug en wat is de plaats van informatica nu in havo/vwo?
- 14.15-14.45 Theepauze
- 14.45-15.30 Marja Meeder: *W12-16*
Na Hawex en Hewet was eind jaren tachtig de onderbouw van het voortgezet onderwijs aan de beurt voor een grondige vernieuwing van het wiskundeonderwijs. Daar doorheen speelde een nog veel grotere stelselherziening, de invoering van de *basisvorming*. Wat kwam er uiteindelijk van *W12-16* terecht en hoe kijken we er nu naar?

Het symposium vindt plaats in cursus- en vergadercentrum Domstad, Koningsbergerstraat 9, 3531 AJ te Utrecht. Kosten voor NVvW- en NVORWO-leden € 25,00, anders € 30,00. Inschrijven door middel van een e-mail aan h.j.smid@ipact.nl, met gelijktijdige overmaking van het verschuldigde bedrag op rekening NL19INGB0000143917 ten name van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, onder vermelding van WGRWO symposium 20.

Spanfiguren of tensegrities zijn ruimtefiguren die bestaan uit kabeltjes verbonden door staafjes, die elkaar in evenwicht houden. Met de instructie in dit artikel van Kees Jonkers is het mogelijk om zelf (of met leerlingen) zo'n fascinerende figuur te bouwen. Kees Jonkers laat bovendien zien hoe met wat interessant modelleren en goniometrie berekend kan worden hoe zo'n figuur eruit moet zien en hoe lang de staafjes en kabeltjes gekozen moeten worden.

Het was in 1921 dat de Amerikaanse uitvinder en architect R. Buckminster Fuller (1885–1983) de naam *tensegrity* introduceerde voor een bepaalde ruimtelijke structuur. Tensegrity is een combinatie van de woorden *tension* en *integrity*. Het gaat om een aantal staafjes waarvan de uiteinden zodanig door kabeltjes met elkaar verbonden zijn dat er een stabiel evenwicht ontstaat. De aanwezige trek- en drukkrachten houden elkaar in evenwicht. Laat je één kabeltje weg, dan valt het hele bouwsel uit elkaar. Een bekend voorbeeld van een toepassing van tensegrities is te vinden in het prachtige en indrukwekkende beeldendepark van het Kröller-Müller Museum. Daar bevindt zich de 28 meter hoge zogeheten Needle Tower van Snelson die bestaat uit een opeenstapeling van tensegrities, zie figuur 1. De staafjes zijn hier van aluminium en de kabeltjes van staal. In plaats van tensegrities gebruiken we in het Nederlands het woord spanfiguren. Bij nadere bestudering zal blijken dat deze spanfiguren zeer spannende figuren zijn! In het volgende onderzoeken we eerst welke ruimtefiguur in aanmerking komt om als basis voor een spanfiguur te dienen. Daarna laten we zien hoe je zelf een spanfiguur kunt maken. Aan de hand van de ruimtefiguur (veelvlak) die samenhangt met de spanfiguur worden ook nog enkele berekeningen uitgevoerd.

Hoe ziet de spanfiguur er uit?

Het minimum aantal staafjes voor een spanfiguur moet natuurlijk drie zijn. Je hebt dan negen kabeltjes nodig. Voor het gemak kiezen we ervoor dat de drie staafjes gelijke lengte s hebben. Ook nemen we aan dat alle kabeltjes gelijke lengte a hebben ($a < s$). De ruimtelijke figuur die hierbij past blijkt een achthvlak te zijn. De noodzakelijke voorwaarden waaraan het achthvlak moet voldoen zijn:

- de drie diagonalen moeten even lang zijn;
 - van de twaalf zijden moeten er negen even lang zijn.
- Maar deze voorwaarden zijn zeker niet voldoende! Denk maar aan het *regelmatige* achthvlak: dat voldoet royaal aan de genoemde voorwaarden: drie gelijke diagonalen en twaalf gelijke zijden. Maar het kan toch niet als basisfiguur voor een spanfiguur dienen, aangezien de diagonalen *snijdende* lijnen zijn.



figuur 1 De Needle Tower van Snelson

We gaan op zoek naar een achthvlak dat wel een basis is voor de spanfiguur. Laten we beginnen met een regelmatig driezijdig prisma $A'B'C'P'Q'R'$, zie figuur 2. De beide gelijkzijdige driehoeken van het grondvlak en het bovenvlak liggen 'recht boven elkaar'. We zullen nu de bovenste driehoek ten opzichte van de onderste over een bepaalde hoek roteren. Het rotatiecentrum is het zwaartepunt van de driehoek. Het oorspronkelijke zijvlak $A'B'P'R'$ van het prisma verandert in twee *verschillende* zijvlakken ABP en APR , doordat R 'naar voren' en P 'naar achteren' is verschoven. In plaats van drie zijn er nu dus zes opstaande zijvlakken ontstaan. Het veelvlak $ABCPQR$ is een niet-regelmatig achthvlak. Dit achthvlak wordt begrensd door twee gelijkzijdige driehoeken ABC en PQR (zijde $= a$). Deze driehoeken zijn over een bepaalde hoek α ten opzichte van elkaar gedraaid. De waarde van α en de hoogte h van het prisma worden later berekend. We nemen aan dat h en α zodanige waarden hebben dat geldt: $BP = CQ = AR = a$. We zien nu dat dit achthvlak een geschikte basis is voor de spanfiguur: de lijnstukken AP , BQ en CR worden de staafjes van de spanfiguur. De kabeltjes vallen langs AR , BP en CQ , en langs de zijden van de driehoeken ABC en PQR .

Er zijn drie puntenparen die niet verbonden mogen worden: AQ , BR en CP . Dit in verband met hun afwijkende lengte ($\neq a$ en $\neq s$).

Een spanfiguur knutselen

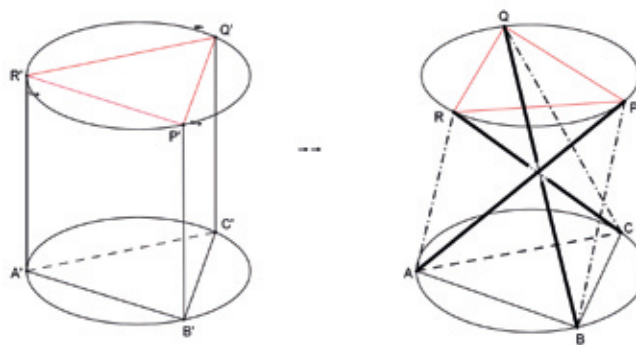
Het kan voor leerlingen een uitdagende bezigheid zijn zelf een spanfiguur te maken. Heel gemakkelijk is het niet, maar als ze nauwkeurig de instructies opvolgen moet het lukken. We maken de hierboven beschreven spanfiguur. Neem als materiaal bijvoorbeeld voor de drie staafjes de onderste baleinen van een afgedankte paraplu. Ze zijn enigszins elastisch en hebben aan de uiteinden oogjes die zeer geschikt zijn om er dunne draden door te steken. Voor de kabeltjes is ijzergaren geschikt. Met de hulp van een naald kunnen de kabeltjes door de oogjes van de baleinen geregen worden. Bij 192 mm lengte van de baleinen (gemeten van oog tot oog) moet een draadlengte van 131 mm gekozen worden. De verhouding moet ongeveer 1,47 zijn, zoals we verderop zullen berekenen. De spanfiguur wordt nu als volgt geconstrueerd. Neem de drie staafjes: dit worden AP , BQ en CR . Verbind met een draad van ruim 50 cm lengte de punten A , B en C . Maak bij de oogjes steeds dubbele knopen en let op dat de kabellengte tussen twee punten precies 131 mm is. Nu moeten de baleinen in de juiste richting geplaatst worden (zie figuur 2: AP zit aan de voorkant, BQ erachter en CR daar weer achter). Ze maken een hoek van circa 40° met het grondvlak.

Om ervoor te zorgen dat het geheel niet uit elkaar valt, kun je een massieve koker met een middellijn van 4 cm verticaal midden in de driehoek ABC plaatsen. De baleinen zullen aan deze koker raken. Op deze manier kunnen de baleinen vrij goed in positie blijven. Je kunt eventueel nog de baleinen met plakband aan de koker bevestigen.

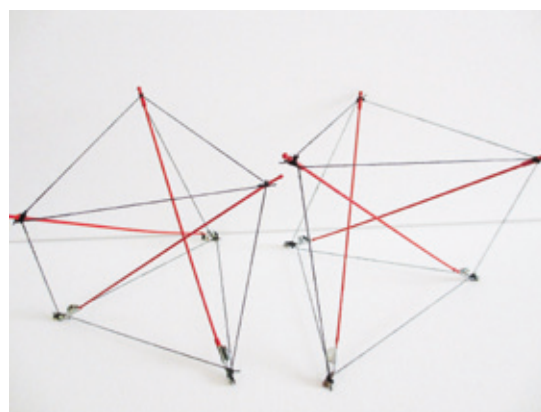
Verbind hierna de punten P , Q en R met elkaar, weer met een draad van ruim 50 cm. Breng tot slot de draden AR , BP en CQ aan (elke draad 131 mm) en haal de koker weg. Het resultaat is een stabiel bouwsel met strak gespannen draden. Je ziet dat driehoek PQR over ongeveer 30° ten opzichte van driehoek ABC is gedraaid. In figuur 3 links een foto van zo'n geknutselde spanfiguur en rechts dezelfde spanfiguur, maar dan in spiegelbeeld gemaakt.

Rekenen aan de spanfiguur

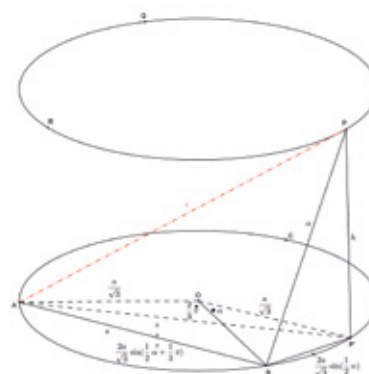
Als in het achthoek $ABCPQR$ zijde a een gegeven waarde heeft, zijn er nog oneindig veel mogelijkheden om dit veelvlak te construeren. We noemen α de kleinste hoek waarover driehoek PQR ten opzichte van driehoek ABC gedraaid is ($0 < \alpha < \frac{1}{3}\pi$). Voor een willekeurige waarde van α is het achthoek onbruikbaar als basis voor een spanfiguur. Het evenwicht tussen de krachten die werken op de staafjes kan alleen bereikt worden als er nog aan een bepaalde extra voorwaarde is voldaan. We noemen dit de *stabiliteitsvoorwaarde*. Om deze stabiliteitsvoorwaarde te vinden, zullen we in het achthoek $ABCPQR$ enige berekeningen maken.



figuur 2 Een prisma wordt een achthoek

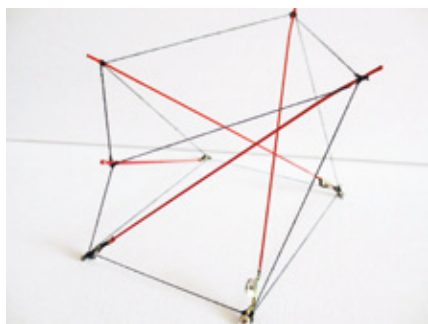


figuur 3 Twee spanfiguren (foto: José Jonkers-de Groot)



figuur 4 Achthoek $ABCPQR$ met draaiingshoek α

We gaan uit van een spanfiguur met staaflengte s en kabellengte a . Zie figuur 4 voor een tekening. Er geldt dus $AB = BP = a$ en $AP = s$. Het punt P' is de projectie van P op het grondvlak en h de hoogte van het achthoek. Driehoek ABC is gelijkzijdig met zijde a , dus cirkelstraal $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Om de lengten van de koorden BP' en AP' te berekenen gebruiken we de volgende eigenschap: in een cirkel met straal r is de lengte van de koorde die een middelpuntshoek ϕ insluit gelijk aan $2r \cdot \sin(\frac{1}{2}\phi)$.



figuur 5 Een spanfiguur met vier staafjes
(foto: José Jonkers-de Groot)

Een andere spanfiguur

In het voorgaande werd de meest eenvoudige spanfiguur behandeld. Een volgende stap is natuurlijk het geval van meer dan drie staafjes. Voor vier gelijke staafjes waarbij in elk uiteinde drie kabeltjes samenkomen zijn dan twaalf kabeltjes vereist die alle even lang zijn. De basis van deze spanfiguur is een *tienvlak* waarvan het grondvlak en het bovenvlak een vierkant zijn. Ook nu moet aan een stabiliteitsvoorwaarde worden voldaan: het bovenvlak is $22^\circ 30''$ gedraaid ten opzichte van het ondervlak. Ook kunnen we uitrekenen dat $s \approx 1,52a$. Als we dus weer baleinen van 192 mm willen gebruiken voor de staafjes, dan wordt de lengte van de kabeltjes 126 mm.

Ook voor dit geval wordt de geduldige knutselaar beloond met een fraaie spanfiguur, zie figuur 5.

Toepassing van deze eigenschap geeft:

$$BP' = 2r \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right); (BP')^2 = \frac{4a^2}{3} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right).$$

$$AP' = 2r \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right)\right) = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\pi\right); (AP')^2 = \frac{4a^2}{3} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\pi\right).$$

Uit de goniometrie gebruiken we nog de formule: $\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$. Dit geeft: $(BP')^2 = \frac{2}{3}a^2(1 - \cos\alpha)$ en $(AP')^2 = \frac{2}{3}a^2(1 - \cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi))$. Pas in driehoek $BP'P$ de stelling van Pythagoras toe:

$$h^2 = (PB)^2 - (BP')^2 = a^2 - \frac{2}{3}a^2(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{3}a^2(1 + 2\cos\alpha)$$

De stelling van Pythagoras in driehoek $AP'P$ geeft:

$$s^2 = h^2 + (AP')^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2\cos\alpha + \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2\cos\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) = a^2 + \frac{2}{3}a^2(\cos\alpha - \cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi)).$$

Gebruik de formule $\cos\beta - \cos\gamma = -2\sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)$ met $\beta = \alpha$ en $\gamma = \alpha + \frac{2}{3}\pi$. Dat geeft

$$\cos\alpha - \cos\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) = -2\sin\left(\alpha + \frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{3} + \sin\left(\alpha + \frac{1}{3}\pi\right), \text{ en dus } s^2 = a^2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\alpha + \frac{1}{3}\pi\right)\right).$$

Kies nu een vaste waarde voor s . Laat α en a variabel zijn. De spanfiguur is stabiel als de kabeltjes strak gespannen zijn. Dit betekent dat de kabellengte a minimaal moet zijn. De waarde van $\frac{s}{a}$ moet dus maximaal zijn. De waarde

$\frac{s^2}{a^2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\alpha + \frac{1}{3}\pi\right)$ is maximaal als $\sin\left(\alpha + \frac{1}{3}\pi\right) = 1$. Dat geeft $\alpha + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi$ dus $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. De stabiliteitsvoorwaarde

is dus $\alpha = \frac{1}{6}\pi$, dat wil zeggen: het bovenvlak is 30° gedraaid ten opzichte van het grondvlak.

Nu we dit weten, kunnen we nog meer dingen uitrekenen aan de geconstrueerde spanfiguur.

- voor het verband tussen s en a vinden we: $s^2 = a^2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\alpha + \frac{1}{3}\pi\right)\right) = a^2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, dus $\frac{s}{a} = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1,47$.
- voor de hoogte h vinden we:
 $h^2 = \frac{1}{3}a^2(1 + 2\cos\alpha) = \frac{1}{3}a^2(1 + \sqrt{3})$ dus $h = a\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 0,95a$.
- voor de hellingshoek θ die de staafjes maken met het grondvlak geldt:
 $\sin^2\theta = \frac{h^2}{s^2} = \frac{\frac{1}{3}(1 + \sqrt{3})}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 0,4226$ dus $\sin\theta \approx 0,650$ en dus $\theta \approx 40^\circ 33''$.

Over de auteur

Kees Jonkers was van 1963 tot 1997 leraar aan het Petrus Canisius College te Alkmaar. E-mailadres: c.jonkers8@upcmail.nl

REKENEN MET EN ZONDER FORMULES

Wim van Dijk

In *Euclides* 89(3) schreef Ab van der Roest over zijn poging om het merkwaardig product $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ te ondersteunen met een plaatje. Naar aanleiding hiervan komt Wim van Dijk met deze lessuggestie.

Een mooi idee van Ab van der Roest om leerlingen iets duidelijk te maken: een formule ondersteunen met een plaatje. Voor mijn vrouw (die bijna nooit iets van wiskunde wil weten) ging er een wereld open toen ik bij de stelling van Pythagoras het plaatje tekende met de rechthoekige driehoek en op elke zijde een vierkant.

Het inzicht geven in dit merkwaardig product is een goede aanleiding om leerlingen nog eens te wijzen op de verschillen en overeenkomsten

tussen vergelijkingen en identiteiten. Bij een vergelijking hoort de vraag 'Voor welke waarden van de variabele(n) klopt het?', terwijl een identiteit gezien kan worden als een vergelijking die voor elke (zinvolle) waarde van de variabele(n) klopt. We kunnen in dit geval de foute identiteit $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ dus wat concreter maken door te laten volgen: 'Dat betekent dat $(10 + 3)^2 = 10^2 + 9$ dus $13^2 = 109$?' De meeste leerlingen zullen (hopelijk) weten dat dit laatste niet goed is en dat het antwoord 169 moet zijn. Nu wordt het spannend, want 'Waar is die 60 gebleven?', dus 'Waarom klopt het niet?' of 'Waar zit de fout?'

Nu de stap naar het plaatje maken. Breng de leerlingen op weg met de helpende vraag: 'Kun je een probleem bedenken waar je moet vermenigvuldigen om het antwoord te krijgen?' Er zullen veel suggesties gedaan worden die niet de kant op gaan die je wilt, maar mogelijk komt één van de leerlingen dan met een vierkant of rechthoek. Je kunt het ook op de manier van Socrates aanpakken en de vraag stellen 'Is het niet zo dat je bij het berekenen van de oppervlakte van een rechthoek iets met de lengte en de breedte moet doen?'

Vervolgens bekijk je $13^2 = (10 + 3)^2$ met een plaatje; zo komt die 60 van $2 \times 10 \times 3$ boven water. Dan kun je analoog nog kijken wat er gebeurt bij $12^2 = (10 + 2)^2 = \dots$, $15^2 = (10 + 5)^2 = \dots$, $(10 + x)^2 = \dots$. Hiermee verkrijgt je eigenlijk een 'recept' om $(10 + x)^2$ op een andere manier te berekenen. Daarmee is er ook een antwoord op de vraag 'Wat is het herleiden van formules eigenlijk?'

Met belangstellende leerlingen kun je nog een stap verder gaan. Laat de leerlingen (desnoods met de rekenmachine) na 15^2 ook 25^2 en 35^2 berekenen. Vraag aan de leerlingen: 'Zie je een regelmaat?' en vervolgens: 'Kun je het antwoord van 75^2 voorspellen?' Dit wordt de kans om de rekenmachine te verslaan! Dan de slagroom op de taart: 'Kun je die regelmaat verklaren?' Met behulp van

het merkwaardig product van eerder moet het lukken om de haakjes van $(10a + 5)^2$ uit te werken en te herleiden tot de gewenste vorm.

'KUN JE HET ANTWOORD VAN 75^2
VOORSPELLEN?'

Nog een stap verder: laat de leerlingen 14×16 , 13×17 , 23×27 , 31×39 , 52×58 , ... berekenen, een regelmaat herkennen en vervolgens zelf vermenigvuldigingen bedenken die ook met dit trucje berekend kunnen worden. Uiteindelijk kunnen de leerlingen sneller dan de rekenmachine 92×98 berekenen! Als er dan ook nog leerlingen zijn die de regelmaat willen verklaren, dan wordt het helemaal mooi.

Als klap op de vuurpijl kunnen we $(p - q)(p + q) = p^2 - q^2$ combineren met de methode voor de berekening van $(10a + 5)^2$ om producten als 24×26 uit te rekenen.

Het is niet zo dat ik mijn vrouw met dit soort sommetjes kan vermaken (zij is weer goed in talen), maar er zijn misschien wel een paar leerlingen die er aardigheid in hebben en er iets van leren.

Over de auteur

Wim van Dijk was 38 jaar docent wiskunde aan het Montessori Lyceum in Rotterdam.
E-mailadres: w4dijk@gmail.com.

VERSCHENEN

INLEIDING IN DE STATISTIEK



Auteurs: Fetsje Bijma, Marianne Jonker en Aad van der Vaart
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2013), wetenschappelijke reeks nr. 76
ISBN: 978-90-5041-135-6
Prijs: € 32,00 (368 pagina's; paperback)

Van de achterkaft:

Statistiek is de wetenschap die zich richt op het trekken van conclusies uit data. Daartoe worden verzamelde gegevens gemodelleerd en geanalyseerd met behulp van wiskundige kansmodellen. In *Inleiding in de Statistiek* worden kernbegrippen uit de statistiek omschreven en wordt een wiskundige onderbouwing van belangrijke statistische methoden gegeven. Daarnaast is er veel aandacht voor het verantwoord toepassen van statistische methoden op data.

De drie belangrijkste onderwerpen uit de statistiek zijn schatters, toetsen en betrouwbaarheidsgebieden. Verder wordt een aantal bekende regressiemodellen, zoals lineaire regressie en variantie-analyse, behandeld. Ook optimaliteit van schatters en toetsen komt in dit boek aan de orde, evenals de selectie van het best passende model. Ieder hoofdstuk eindigt met een praktijkvoorbeeld waarin beschreven statistische methoden worden toegepast.

Dit boek gaat uit van basiskennis van kansrekening, calculus en lineaire algebra bij de lezer.

Bedoeld voor: studenten universiteit

VERSCHENEN

MOIRÉ-KUNST MET NIVEAULIJNEN



Auteur: Luc Van den Broeck
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2013)
Zebra-reeks, deel 37
ISBN: 978-90-5041-138-7
Prijs: € 10,00 (72 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

In de lessen wiskunde, fysica en economie komen wel eens functies voor in twee onafhankelijke variabelen. Klassieke voorstellingswijzen van deze functies zijn de driedimensionale grafiek en het tweedimensionale niveaulijnenpatroon. In dit Zebra-boekje worden verbanden tussen beide visualiseringën gezocht. Het onderzoek mondt uit in het maken van een op-art-kunstwerk. Vervolgens creëren we moiré-effecten door twee niveaulijnen op transparant over elkaar te laten schuiven. Om te voorspellen welke glanslijnen er tevoorschijn komen, maken we gebruik van differentiaal. Om een niveaulijnenpatroon te ontwerpen dat een vooraf bepaald moiré-effect genereert, steunen we op integralen. De praktische proef op het einde van dit boekje is het ontwerpen van een kinetisch kunstwerk.

VANUIT DE OUDE DOOS

OPGAVE VAN DE JAARVERGADERING

Jaarlijks deelt Ton Lecluse op de jaarvergadering een opgave uit. Van de ingezonden uitwerkingen maakt hij een mooi artikel voor de Oude Doos-serie.

Ton Lecluse

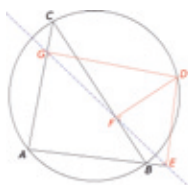


A^o 1931

Om de opgave van dit jaar toegankelijker te maken voor u, lezer, en ook geschikt voor gebruik in de les, wordt eerst gekeken naar een hulpstelling, die we in detail doornemen.

De hulpstelling

Op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt een punt D . De projecties van D op (het verlengde van) de drie zijden van driehoek ABC zijn E , F en G .



Bewijs dat de punten E , F en G collineair zijn.

We doen even niet aan gevalsonderscheiding en gaan uit van bovenstaande tekening, waarbij de projectie E op AB buiten de cirkel valt.

Probeer u het eerst even zelf?

Wanneer het niet lukt, kijk dan telkens één hint verder.

Hint 1 – $ABDC$ is een koordenvierhoek.



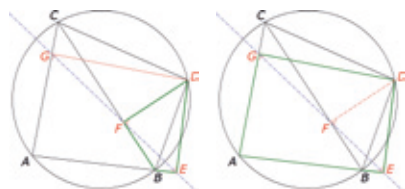
Kunt u hier al iets mee?

Jazeker: de buitenhoek bij B is gelijk aan hoek C (beide gelijk aan $180^\circ - \beta$)

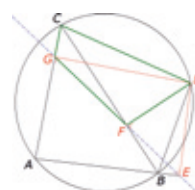


Hint 2 – zijn er nog meer koordenvierhoeken?

Jazeker: $BEDF$ en $AEDG$ (twee overstaande rechte hoeken)



Maar ook $FGCD$ is een koordenvierhoek.



Verklaring: hoek $DFC = 90^\circ$, dus ligt F op de cirkel met middellijn CD (omgekeerde Thales);

Analoog: hoek $DGC = 90^\circ$, dus ligt G op de cirkel met middellijn CD (omgekeerde Thales).

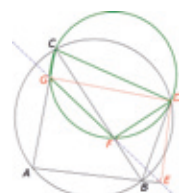
Je kunt dit natuurlijk ook zien als de stelling van de constante hoek.)

Hint 3 – beschouw nu de koordenvierhoek $BEDF$, en teken de omgeschreven cirkel erbij.

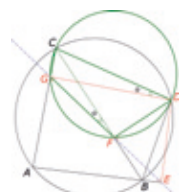


De omtrekshoeken op boog BE zijn gelijk: hoek $BFE =$ hoek $BDE = x$.

Hint 4 – zoiets kan ook worden gedaan in koordenvierhoek $FGCD$. Welke gelijke hoeken zijn hierin interessant?



Hint 5 – de omtrekshoeken op boog CG zijn gelijk: hoek $GFC =$ hoek $GDC = o$.



en nu??

Hint 6 – vergelijk het plaatje bij hint 3 en 5.

We moeten bewijzen dat FE en FG in elkaars verlengde liggen. Omdat dit al zo is bij FB en FC , zijn we klaar als we kunnen bewijzen: $x = o$. Lukt dit?

Hint 7

In de tekening bij hint 5 is in driehoek DCG :

$$\alpha = 90^\circ - \text{hoek } DCG$$

In de tekening bij hint 3 is in driehoek DBE :

$$\alpha = 90^\circ - \text{hoek } DBE$$

En hoek $DCG = \text{hoek } DBE$ staat bij hint 1. q.e.d.

Resume

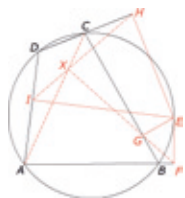
Hierboven staat de rechte van Wallace beschreven (niet te verwarren met de 'Wallacelijn', een denkbeeldige zoögeografische scheidinglijn tussen Azië en Oceanië), ook wel de Simson-lijn genoemd. Het bewijs is voor leerlingen (en wellicht ook voor u) lastig om zelf te vinden, omdat er zoveel gelijke (omtreks)hoeken (en dus ook gelijkvormige driehoeken) aanwezig zijn. Ook is de koordenvierhoek $AEDG$ nergens gebruikt. Er doen drie cirkels aan mee. Dat maakt de opgave complex. *Geocadabra* telt in de basisfiguur 44 speciale eigenschappen (zoals gelijke (omtreks)hoeken, gelijkvormigheden, aanwezige koordenvierhoeken, enzovoort). Daarvan is een handjevol nodig voor het bewijs.

De uitgedeelde jaaropgave zelf:

Op de omgeschreven cirkel van koordenvierhoek $ABCD$ ligt punt E .

De projecties van E op het (verlengde van) vier zijden zijn F , G , H en I .

Bewijs dat de lijnen AC , FG en HI door één punt (X) gaan.



Lukt het u zonder verdere hint?

Hint 8 – heeft deze tekening iets overeenkomstigs met de rechte van Wallace?

Jazeker:

Kijk naar driehoek ABC en punt E . Twee van de drie projecties van E op de driehoekszijden zijn al bekend: F en G . Dus is de lijn door F en G een rechte van Wallace. Het derde punt op deze rechte is zowel het snijpunt X van FG met AC alsook de projectie van E op AC . Hieruit volgen twee dingen: X ligt op AC en FG , én EX staat loodrecht op AC (een nevenresultaat).

Resteert de vraag waarom X ook op HI ligt. Ziet u hoe?

Hint 9 – analoog aan hint 8 krijgen we:

Kijk naar driehoek ACD en punt E . Twee van de drie projecties van E op de driehoekszijden zijn al bekend: I en H . Dus is de lijn door I en H een rechte van Wallace. Het derde punt op deze rechte is zowel het snijpunt X van HI met AC als ook de projectie van E op AC . Hieruit volgen

twee dingen: X ligt op AC en HI , én nogmaals EX staat loodrecht op AC (een nevenresultaat).

Dus ligt X op AC , FG en HI .

Ook de ons onlangs ontvallen collega Leon van den Broek loste deze opgave op. Leon wist veel van meetkunde, en de stelling van Wallace zat natuurlijk in zijn standaard-repertoire. Hij schreef me op 10 november: 'Een bekende stelling zegt dat de voetpunten van E op AB , BC en AC op één lijn liggen, de zogenaamde Simson-lijn van E ten opzichte van driehoek ABC . Die Simson-lijn is FG . Evenzo is HI de Simson-lijn van E t.o.v. driehoek ADC . Bijgevolg is het voetpunt van E op AC het snijpunt van FG en HI . Dus gaan de lijnen FG , HI en AC door één punt.'

Sjoerd Zondervan, Fred Muijres, Kees Jonkers, Ruurd Hoekstra en Martin Kindt geven een bewijs als Leon waarbij Martin verwijst naar 'Wat te bewijzen is' nummer 16 (*Nieuwe Wiskrant*) voor zijn bewijs van de rechte van Wallace. Agnes Verweij en André van den Berg stuurden me een oplossing met een ingebed bewijs van de rechte van Wallace.

Robert Simson^[1] (1687-1768) was hoogleraar op de universiteit van Glasgow. Hij heeft verschillende mooie ontdekkingen op meetkundig gebied gedaan en de 'Simson line' is naar hem vernoemd. In zijn eigen publicaties heeft hij er nooit over geschreven, maar Poncelet schrijft in *Propriétés Projectives* dat de rechte was toegeschreven aan Simson door Servois in de *Gergonne's Journal*. Men vermoedt echter dat de rechte is ontdekt door William Wallace^[2] (1768-1843), hoogleraar op de universiteit van Edinburgh. Op internet staan meerdere eigenschappen van de rechte van Wallace/Simson^[3], zo is de omgekeerde stelling ook waar: 'Als de drie projecties van een punt P op de zijden van een driehoek collineair zijn, ligt P op de omgeschreven cirkel van de driehoek.' Lukt het u deze stelling te bewijzen? U kunt het vinden in het standaardwerk *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde* van Oene Bottema (1901-1992).

Noten

- [1] www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Printonly/Simson.html
- [2] www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Printonly/Wallace.html
- [3] bijvoorbeeld: http://demo.formulasearchengine.com/index.php/Simson_line; http://nl.wikipedia.org/wiki/Rechte_van_Wallace; http://en.wikipedia.org/wiki/Simson_line; <http://mathworld.wolfram.com/SimsonLine.html>

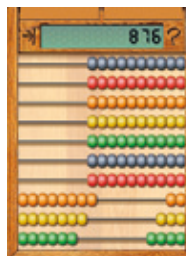
Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

WISKUNDE DIGITAAL

ONLINE OEFENEN VOOR DE WERELDWIJDE WISKUNDEWEDSTRIJD W4KANGOEROE

Lonneke Boels



Deze keer schrijft Lonneke Boels over het interactieve oefenmateriaal dat u op de Kangoeroe-site kunt vinden.

Wilt u vaker oefenen met Kangoeroe-opgaven, maar komt u er nooit aan toe om ze zelf uit te zoeken? Of krijgt u uw klas alleen maar gemotiveerd als het opgaven zijn die passen bij het onderwerp waar u op dat moment mee bezig bent? Of geeft u les aan leerlingen met wiskunde A en/of C en zijn die wizPROF-opgaven toch eigenlijk veel te moeilijk voor hen (denkt u)? Wilt u elke maand opgaven selecteren voor een puzzelrubriek in de schoolkrant, maar ontbreekt u de tijd? W4Kangoeroe heeft het al deze docenten nu gemakkelijk gemaakt. Op de site van W4Kangoeroe vindt u een interactief oefendeel. Ga naar de site (www.W4kangoeroe.nl) en klik daar op het tabje Oefenen. Op de iPad zijn deze tabs niet zichtbaar, maar kunt u via de tekst onderaan de pagina naar het onderdeel Oefenen gaan. Links in het menu kiest u *Interactief oefenen* en vervolgens in de tekst *opgaven op maat*, zie figuur 1.



figuur 1

U krijgt dan een scherm zoals gedeeltelijk te zien is in figuur 2. WizFUN en wizKID zijn voor de basisschool bedoeld, vmbo klas 1 en 2 en vmbo BK klas 3 en 4 kiezen wizSMART, vmbo 3 en 4 (niet BK) en havo en vwo klas 1 en 2 en havo klas 3 kiezen wizBRAIN, en vanaf klas 3 van het vwo en klas 4 van de havo kiest u wizPROF. Overigens mag u natuurlijk best een niveau lager of hoger kiezen als dat beter bij uw klas of leerlingen past. In de echte wedstrijd mag dat namelijk ook, zie de spelregels op de site.

Meer naar beneden op datzelfde scherm kiest u de onderwerpen. Ik kies bijvoorbeeld wizPROF eenvoudig omdat ik een wiskunde A-klas heb. We zijn bezig met het herhalen

Opgaven op maat

Kies versie, niveau en onderwerp. Bij elk van de drie kun je meer dan één item kiezen. Wil je een bestaande kangoeroe-versie maken, kies dan voor kangoeroe spelen.

versie en niveau

	wizKID	wizSMART	wizBRAIN	wizPROF	wizFUN
eenvoudig	☐	☐	☐	☐	☐
gemiddeld	☐	☐	☐	☐	☐
moeilijk	☐	☐	☐	☐	☐

figuur 2

van combinatoriek, dus ik kies drie opgaven combinatoriek. Een van de opgaven die tevoorschijn komen ziet u in figuur 3. Dit laat ook precies zien wat de kracht is van de wiskundewedstrijd W4Kangoeroe: doordat het een vraag is die niet in de boeken staat, moet je wel even goed nadenken over een handige aanpak. Toch is deze opgave niet moeilijk voor een leerling met wiskunde A. Een mogelijke aanpak is hier: noem een stap naar voren V, een stap opzij Z en een stap naar onderen O. Een mogelijke route is nu VZOO. Het probleem is nu teruggebracht tot de vraag hoeveel combinaties er mogelijk zijn met deze letters.

De opgave laat ook zien welke eisen aan Kangoeroe-opgaven worden gesteld. De eenvoudige opgaven moeten door vrijwel iedereen uit de doelgroep te maken zijn, of in elk geval een (groot) deel van deze eenvoudige opgaven. Tegelijkertijd zijn het bij voorkeur geen rechttoe-rechtaan opgaven. Je moet er dus wel even over nadenken. Nadenken wordt vaak beloond ten opzichte



figuur 3 Voorbeeld opgave wizPROF tellen (combinatoriek)



'De master heeft mijn blik verbreed en ik voel mij beter. Dat heeft een positief effect op de leerlingen.'

Word 1^e-graads docent Wiskunde bij de HAN!

Ontwikkel u op masterniveau tot zelfstandig docent in de bovenbouw havo/vwo en verdiep uw vakspecifieke kennis. Leer vernieuwingen binnen het wiskunde-onderwijs concreet te ontwerpen en in te voeren. Als 2^e-graads docent Wiskunde kunt u in september bij de HAN van start met de Master Wiskunde. Een master bij de HAN, meer dan een goed plan.

MAAK
GEBRUIK VAN
DE LERAREN-
BEURS!

OPEN DAG 5 APRIL NIJMEGEN

Programma

- Uitbreiding vakkennis op basis van de landelijke kennisbasis
- Vakdidactische vernieuwingen in het V.O. per 2015
- Praktijkgericht onderzoek
- Masterproject: vernieuwing van leerarrangementen bovenbouw havo/vwo

 **HAN**

www.han.nl/masters

MASTERPROGRAMMA'S

HAN Masteropleidingen zijn door de NVAO-geaccrediteerd

Resultaat			
opgave	jouw antwoord	juiste antwoord	aantal punten
1	B	B	5
2	C	C	5
3	D	D	5
totaal aantal punten			15

figuur 4 Resultaat van drie opgaven

van simpelweg alle mogelijkheden uitschrijven (omdat je dan sneller een fout maakt en het meer tijd kost). Als alle opgaven zijn gemaakt, kun je de antwoorden controleren. Je krijgt dan een scherm met het aantal behaalde punten, zie figuur 4. Daarbij geldt de puntentelling van de Kangoeroewedstrijd: geen antwoord is 1 punt, een fout antwoord is 0 punten en een goed antwoord is 5 punten waard. Wees dus voorzichtig met gokken!

Welke som heeft de kleinste uitkomst?

A. $2 \times 0 + 1 \times 0$ B. $2 + 0 + 1 \times 0$ C. $2 \times 0 + 1 + 0$ D. $2 + 0 \times 1 + 0$ E. $2 + 0 \times 1 \times 0$

figuur 5 Voorbeeld opgave wizSMART eenvoudig rekenen

Pluspunten

- de vragen betreffen echte wiskunde;
- leerlingen worden door deze opgaven aan het denken gezet;
- de oefensite is goed te gebruiken als opwarmer of start van een les;
- er zijn vijf verschillende niveaus en binnen elk niveau drie moeilijkheidsgraden;
- u kunt instellen welke onderwerpen en hoeveel opgaven u wilt oefenen. Per niveau en onderwerp verschilt het aantal opgaven dat al in de database zit;
- de eenvoudige opgaven zijn voor vrijwel iedereen uit de doelgroep te maken;
- na het nakijken kunt u terug met de browserknop om de opgave te bespreken;
- het is gratis.

Minpunten

- kansrekening anders dan combinatoriek ontbreekt (omdat dit in andere landen vaak niet wordt onderwezen in het vo);
- als je dezelfde selectie maakt zonder het aantal opgaven op te geven, krijg je dezelfde opgaven. Dit kan echter ook een voordeel zijn;
- op de iPad werkt de site iets minder soepel (soms wordt bijvoorbeeld het verkeerde antwoord aangevinkt; dat is dan wel zichtbaar en te herstellen);
- heel af en toe zit er een fout in bijvoorbeeld het correctiemodel en een keer ontbrak de vraag.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: gratis

Geschikt voor: basisschool vanaf groep 3, vmbo alle niveaus, havo en vwo.

Getest op: laptop met Windows 8 in Chrome; computer met Windows XP in Internet Explorer en iPad met iOS7.

Meer informatie over het spel: www.w4kangoeroe.nl; www.w4kangoeroe.nl/digitaal/uitgebreid.php

Eva heeft op vierkante vellen papier grijze figuren getekend:

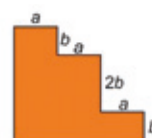


Sommige van deze figuren hebben dezelfde omtrek als het hele vel. Hoeveel figuren?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

figuur 6 Voorbeeld opgave wizPROF combinatoriek. Dit is een voorbeeld van een opgave van niveau 6 van de PISA onderzoeken onder 15-jarigen

De omtrek van deze figuur is gelijk aan



A. $3a+4b$ B. $3a+8b$ C. $6a+4b$ D. $6a+6b$ E. $6a+8b$

figuur 7 Voorbeeld opgave wizBRAIN meetkunde – lengte, oppervlakte, inhoud

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. Ze is ook lid van de internationale opgavencommissie voor de wiskundewedstrijd W4Kangoeroe. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

BOEKBESPREKING

L. E. J. BROUWER - VAN MYSTIEK TOT WISKUNDE

Adri Dierdorp



Auteur: Dirk van Dalen

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2013),
wetenschappelijke reeks nr. 74

ISBN: 978-90-5041-133-2

Prijs: € 26,00 (272 pagina's; paperback)

In *Van Mystiek tot Wiskunde* zijn bekende en onbekende teksten verzameld van de grote Nederlandse wiskundige L. E. J. Brouwer. Prof.dr. D. van Dalen, eminent Brouwerkenner, heeft de teksten verdienstelijk bewerkt, ze in een voor de hand liggende volgorde geplaatst en voorzien van relatief korte inleidingen.

Alvorens in te gaan op de door Van Dalen bewerkte teksten, wil ik eerst een summiere algemene schets geven van Brouwers werk. Voor een uitvoeriger beeld verwijs ik naar een ander werk van Van Dalen: *L. E. J. Brouwer, wiskundige en mysticus* en naar het proefschrift van John Kuiper (2004), *Ideas and Explorations*. Brouwer werd in 1881 geboren. Zijn vader was schoolmeester. Het vroegrijpe genie leverde al voor zijn promotie revolutionaire bijdragen aan de topologie en slaagde als een van de eersten erin het dimensiebegrip te definiëren. Verder introduceerde hij het topologische begrip 'afbeeldingsgraad'. Simplistisch gezegd geeft de afbeeldingsgraad aan hoe vaak het beeld van een oppervlak een ander oppervlak bedekt. Brouwer verkreeg wereldwijd erkenning voor zijn topologische ideeën. Het meest bekend is waarschijnlijk zijn dekpuntstelling. Deze stelling betreft continue afbeeldingen in een n -dimensionale topologische ruimte: als door dergelijke afbeeldingen bepaalde gebieden in zichzelf afgebeeld worden, wordt tenminste één punt, het dekpunt, op zichzelf afgebeeld. Dit soort begrippen wordt door Van Dalen als bekend veronder-

steld. Hetzelfde geldt voor vele filosofische concepten. De keuze van de auteur om geen nadere uitleg of toelichting te geven, valt wellicht te verklaren vanuit het feit dat hij al in voorafgaande uitgave van Epsilon Uitgaven (deel 51, *L. E. J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde*) uitvoerig over Brouwer heeft geschreven. Niet onvermeld mag blijven Brouwers intuïtionisme (intuïtionistische omwerking der wiskunde), waarin de menselijke ervaring van tijd een belangrijke rol speelt. Volgens het intuïtionisme-principe bestaan objecten zoals getallen, verzamelingen, functies, relaties, vectoren en matrices alleen als ze in de loop van de tijd geconstrueerd kunnen worden. Hierbij verwerpt het intuïtionisme de bewijsmethode van het 'bewijs uit het ongerijmde'. In zijn proefschrift gebruikte Brouwer nog het principe van de uitgesloten derde. Dit houdt in dat iets waar of onwaar is, er is geen derde mogelijkheid (*tertium non datur*). Later zou hij hier op terugkomen en verwierp hij dit principe van de uitgesloten derde en daarmee ieder bewijs uit het ongerijmde. Deze revolutionaire gedachte veroorzaakte een hevig conflict met Hilbert, dat bekend staat als de zogeheten 'Grundlagenstreit' en dat pas met de stelling van Gödel in het voordeel van Brouwer zou worden beslist. Tijdens dit conflict liet Brouwer de dagelijkse leiding van het wiskundig onderzoek bij het Amsterdamse Mathematische Instituut (AMI), bijna volledig aan zijn assistent Freudenthal over, die een stevig stempel drukte op de didactiek en de inhoud van schoolwiskunde. Het was dan ook Freudenthal die, na het overlijden van Brouwer, samen met Heyting in het Jaarboek van het AMI (1966-1967), een in memoriam (*Levensbericht van L. E. J. Brouwer*) schreef.

Het hier te bespreken werk bestaat uit drie delen. Het eerste deel bevat vier hoofdstukken en draagt een sterk filosofisch karakter. Dat is nog steeds aanwezig in het tweede deel, maar nu komt de wiskunde al veel meer aan bod. In het derde deel ten slotte neemt deze een prominente plaats in. Zo geeft de gekozen titel *Van Mystiek tot Wiskunde* niet alleen Brouwers ontwikkeling, maar ook de opbouw van dit boek goed weer. Het eerste deel begint met een hoofdstuk waarin we kennis nemen van Brouwers geloofsbelijdenis. In de inleiding lezen we dat deze ronduit solipsistisch genoemd kan worden. Wat dient men daar precies onder te verstaan? Wikipedia: 'Solipsisme (van solus, alleen, en ipse, zelf) is het geloof of de filosofie dat er maar een enkel bewustzijn bestaat: dat van de waarnemer. Het hele universum en alle andere personen waarmee gecommuniceerd wordt, bestaan slechts in de geest van de waarnemer.' Deze informatie

helpt ons Brouwer beter te begrijpen wanneer hij in zijn geloofsbelijdenis schrijft: 'Immers het enige voor mij is mijn eigen ikheid van het ogenblik, omgeven door een schat van voorstellingen, waaraan de ikheid gelooft, en die haar doen leven (p. 11).' Vervolgens beperkt hij zijn beleving van godsdienst tot het voelen of het zich bewust zijn van God als een niet bewuste gedachte die zich niet in woorden laat vatten. Dit verklaart ook zijn bezwaar tegen een godsbestuur. Toch breekt hij aan het eind van zijn belijdenis een lans voor het instituut kerk. Hij ziet een duidelijke rol voor haar, maar die betreft dan vooral 'de domme menigte'. Het tweede hoofdstuk van deel I bevat de bewerkte tekst van *Leven, Kunst en Mystiek*, volgens velen een beschamend document. Immers Brouwer probeert hier nagenoeg alles en iedereen. Vooral cultuur, taal, wetenschap en vrouwen komen er niet best van af. Jammer dat het commentaar van Van Dalen hier ontbreekt. Wie op zoek is naar een kritische toelichting kan terecht bij de site www.verbodengeschriften.nl/html/eenmachtigbrouwsel-hertalingmetcomm.html. Aan het eind van het hoofdstuk bekroopt me het gevoel: 'Dit gaat erg ver'. Gelukkig heeft Van Dalen een reactie toegevoegd, van Frederik van Eeden, de bekende Tachtiger en auteur van *De kleine Johannes*. Van Eeden maakt een vergelijking met zijn eigen *Kleine Johannes*, waarin hij dokter Cijfer en Pluizer opvoert als representanten van 'valse satanische machten, natuurwetenschap en intellect' (p. 89) en levert forse kritiek op de tekst van Brouwer. Het laatste hoofdstuk van het eerste deel bevat de signifi- sche dialogen. Dit zijn dialogen van Brouwer met een aantal vaste medeleden van de Signifi- sche kring, onder wie Van Eeden, Borel, Mannoury en Van Ginneken. Zij bespreken er thema's zoals manieren om de verstandhou- ding te onderhouden (Significa) en discussiëren over de taal als 'bedrieglijk communicatiemiddel', waarmee mensen elkaar proberen te beïnvloeden. In het tweede deel wordt Brouwers rede (12 oktober 1909) weergegeven, waarin hij zijn latere filosofische standpunten kenbaar maakt. Het sluit af met de 'Studium generale'-voordrachten (opvolger van de Weense voordrachten) waarin hij voor het eerst zijn 'intuitionistische omwerking der wiskunde' verduide- lijkt. In het laatste hoofdstuk van dit tweede deel verwerpt hij de logica om stellingen te bewijzen en doet hij ook afstand van het beginsel van de uitgesloten derde.

In het laatste en derde deel staan Brouwers Groningse voordrachten afgedrukt. Ze zijn opgetekend door Van der Corput en Schaake en gaan over de intuitionistische manier om stellingen te bewijzen. Zonder bewijzen uit het ongerijmde worden allerlei stellingen bewezen. De overdekkingsstelling is een goed voorbeeld:

'Is door een wet aan ieder element van een gecatalogi- seerde compacte puntsoort een n -omgeving toegevoegd, waarbij n voor verschillende punten verschillend kan zijn, dan kan men een eindig aantal van die omgevingen aanwijzen, die samen de gehele puntsoort overdekken (pagina 243)'.

Voor een leek op het gebied van de 'theorie der finiete verzamelingen', is deze stelling, evenals vele andere, misschien lastig te lezen, maar Brouwer neemt je stap voor stap mee in zijn betoog en verklaart ook ieder nodig begrip. Hoewel dit hoofdstuk vanuit wiskundig oogpunt interessante leesstof biedt, denk ik dat hier nog een taak voor Van Dalen is weggelegd: deze teksten te actualiseren en nog toegankelijker te maken voor een breder publiek. Op de achterflap van het boek staat dat het bedoeld is voor onderwijs in wiskunde en filosofie aan universiteiten en hogescholen, voor leraren en algemeen geïnteres- seerden. Dit is wel een zeer brede doelgroep. Ik ben echter van mening dat de inhoud voor een willekeurige wiskundedocent een enorme kluit zal zijn. Zoals reeds opgemerkt, veel filosofische termen worden bekend veron- dersteld en de huidige doorsneewiskundige mist wellicht de taalkundige habitus om dit soort 'oudere' filosofische teksten volledig te doorgronden. Voor de filosoof kan juist de wiskunde een struikelblok vormen. Dus vooral studenten van 'wiskunde en filosofie' zijn de ideale lezers van dit boek. Enige inspanning is vereist, maar die wordt dan ook rijkelijk beloond.

Over de recensent

Adri Dierdorp is sinds 1986 wiskundedocent op het categoriaal atheneum College Hageveld te Heemstede en promoveerde daarnaast in 2013 aan het Freudenthal Instituut met het proefschrift *Learning correlation and regression within authentic contexts*. E-mailadres: a.dierdorp@uu.nl



MEDEDELING

WIJZIGING ADRES BUREAU RECHTSPOSITIE

De nieuwe gegevens zijn:

NVvW – Rechtspositie – Adviesbureau
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg
Tel. (0345) 531 324



SCRIPTIEPRIJS

Douwe van der Kooi



Excellentie mag weer. Sterker nog, als je jezelf als school een klein beetje respecteert, dan heb je voor je ambitieuze leerlingen speciale programma's ontwikkeld waar ze hun talenten kunnen ontplooien. Hetzelfde is het geval in het hbo en het universitair onderwijs. Op verschillende lerarenopleidingen kun je tegenwoordig als betere en ambitieuze student kiezen uit een scala aan verdiepings- en versnelprogramma's. In de onlangs verschenen lerarenagenda wordt hbo-instellingen nadrukkelijk gevraagd om driejarige opleidingsprogramma's te ontwikkelen voor vwo'ers. Op diverse instituten worden die nu ook daadwerkelijk aangeboden, of ze zijn in ontwikkeling. Hbo-instellingen ontwerpen samen met universiteiten op regionaal niveau doorstroomprogramma's die voorzien in de mogelijkheid om direct na het afronden van een hbo-bachelor een universitaire master te gaan doen. De ene opleiding leent zich gemakkelijker voor deze zogenaamde academische route dan de andere. Het lijkt mij bepaald geen sinecure, om niet te zeggen onmogelijk, om vanuit de tweedegraadsopleiding wiskunde een academische master wiskunde te doen. Hoe dan ook, al deze bewegingen passen in het beleid om het niveau te verhogen. Het zijn niet alleen de excellentieprogramma's en honourstrajecten die als exponenten van dit beleid worden geëtaleerd, het is ook de trend om de zak-slaagregeling aan te scherpen en – in het hoger onderwijs – de verhoging van de zogeheten BSA-norm, het minimaal aantal punten dat een eerstejaars moet hebben gehaald om tot de hoofdfase van de studie te worden toegelaten. Een andere exponent van deze ontwikkeling zijn prijzen die diverse maatschappelijke organisaties uitloven voor het hoegenaamd beste profielwerkstuk. De KNAW doet het, universiteiten doen het, er zijn kranten die het doen, scholen doen het, bedrijven doen het, en er zijn ook vakverenigingen die het doen.

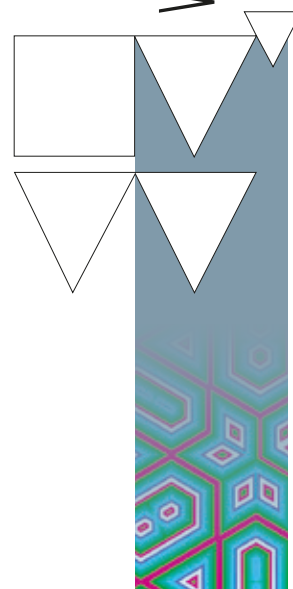
In het hbo speelt onderzoek een steeds belangrijkere rol in het curriculum. De functie van onderzoek in het hbo is vooral gericht op kennisverwerving over de eigen professionele context op basis van een vraagstelling die tot doel heeft de eigen beroepspraktijk te verbeteren. Voor de lerarenopleiding wiskunde betekent dat veelal onderzoek naar een in de klas ervaren verlegenheids situatie met een vakdidactische probleemstelling. Zulk onderzoek zal dus niet gaan over zuiver wiskundige probleemstellingen, maar wel over de vraag hoe bijvoorbeeld traditioneel het ontbinden in factoren wordt behandeld en of die vaak uniforme aanpak wel adequaat is voor alle leerlingen als je bijvoorbeeld rekening wilt houden met natuurlijke aanleg, als leerstijl, kennis op het gebied van hersenontwikkeling en meervoudige intelligentie. Het onderzoek volgt doorgaans de onderzoekscyclus van achtergrond en aanleiding van het probleem, de formulering van de onderzoeksvraag, een theoretisch kader als verantwoording van een te ontwerpen interventie, uitvoering van de interventie, effectmeting en analyse van data, het trekken van conclusies, en een reflectie op het proces en de resultaten, gelet op de probleemstelling. Veel studenten ontwerpen als interventie een lessenserie en onderzoeken de vraag of hun aanpak beter werkt dan de vaak traditionele manier van het boek. Op alle lerarenopleidingen in Nederland is dit in grote lijnen het stramien van het afstudeeronderzoek. Er zijn graduele verschillen in de nadruk die opleidingen leggen op de verschillende fases van het onderzoek. Op de ene opleiding zal bijvoorbeeld het theoretisch kader een zwaar meetellend punt zijn in de eindbeoordeling, bij andere opleidingen ligt het zwaartepunt bij de kwaliteit van het didactisch ontwerp.

De gezamenlijke lerarenopleidingen wiskunde die goed georganiseerd zijn in een geregeld landelijk vakoverleg besloten vorig cursusjaar tot de instelling van een landelijke scriptieprijs voor het beste afstudeeronderzoek in het collegejaar 2012-2013. Men had het bestuur van de NVvW gevraagd om te bepalen wie de eerste winnaar van deze zogenaamde aanmoedigingsprijs zou worden. Er waren inzendingen van vier lerarenopleidingen (HAN, Inholland, HRO en HvA). Een ad-hoccommissie vanuit het bestuur heeft de afstudeerwerkstukken beoordeeld. De winnares is geworden Lieke Ruijgrok (HvA) voor haar scriptie *De jongens tegen de meisjes*. Het is een theoretisch goed onderbouwd onderzoek, helder geschreven met een problematiek die relevant is voor het wiskunde-onderwijs. Het onderzoek behandelt de vraag in hoeverre gedrag van wiskundeleraars bijdraagt tot de attitude van meisjes, respectievelijk jongens voor wiskunde.^[1] De prijs is uitgereikt tijdens de jaarvergadering in november.

Het bestuur is voornemens om het initiatief van de gezamenlijke lerarenopleidingen wiskunde ook de komende jaren te ondersteunen. Daarbij overweegt het bestuur twee prijzen te faciliteren, namelijk een scriptieprijs voor bachelors (tweedegraadsopleidingen) en een prijs voor onderzoek door masterstudenten (eerstegraders).

Noot van de redactie

[1] Op vakbladeuclides.nl/895ruijgrok vindt u haar artikel over dit onderzoek



MEDEDELING

HOE KIJK JE EEN EXAMEN NA?



In 2013 organiseerde de NVvW voor het eerst bijeenkomsten met als titel: 'Hoe kijk je een examen na?' De deelnemers waren zeer tevreden en het bestuur heeft besloten deze activiteit te herhalen. Dit jaar zijn er weer drie bijeenkomsten waar de examens van havo en vwo centraal staan, en een nieuwe bijeenkomst voor de vmbo-examens. Aan de hand van oude examenopgaven, gecombineerd met leerlingenwerk, bespreken we hoe deze nagekeken zouden kunnen worden. Op deze wijze hopen we de jonge collega's te helpen bij de ingewikkelde opdracht om het examen na te kijken en met meer ervaren collega's onderling te vergelijken binnen de mogelijkheden van het correctievoorschrift.

De cursussen voor havo-vwo vinden plaats in Amsterdam, Eindhoven en Veenendaal. Voor het vmbo wordt de cursus georganiseerd in Utrecht. De cursus is op **donderdag 3 april** van 16.00 uur tot 18.00 uur. We sluiten af met een eenvoudige maaltijd. Voor leden is de cursus gratis. Niet-leden betalen €20,00. Overige informatie is te vinden op www.nvww.nl.

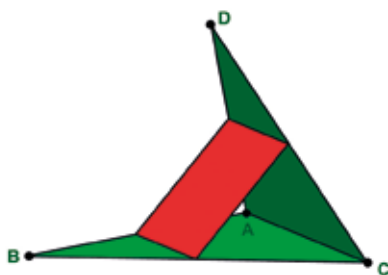
Je kunt je aanmelden bij Ab van der Roest, e-mailadres: a.vanderroest@nvww.nl. Vermeld daarbij je naam, het aantal jaren ervaring met corrigeren van examens en de plaats waar je de cursus wilt volgen. Meld je snel aan!

Ab van der Roest

DE MEETKUNDIGE PLAATS VAN HET MIDDEN

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze puzzel gaat over parallelogrammen (conform de spelling met twee paar evenwijdige lijnen), waarvan de hoekpunten P , Q , R en S elk op een verschillende zijde (of verlengde daarvan) van een vierhoek $ABCD$ liggen.



figuur 1

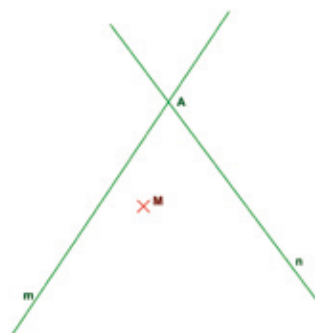
Volgens de naar de Franse wiskundige Varignon genoemde stelling vormen de middens van de zijden van elke vierhoek $ABCD$ een parallellogram. Deze stelling geldt trouwens ook als de punten A , B , C en D niet in één vlak liggen (zie figuur 1). Zie voor deze en andere stellingen bijvoorbeeld de site van Dick Klingens.^[1]

We bekijken een vierhoek $ABCD$, nu wel in één vlak. We kiezen punten P , Q , R en S , elk op één van de zijden AB , BC , CD en AD of verlengden daarvan, maar niet per se in die volgorde. Behalve de middens van die zijden zijn er meer manieren waarop we P , Q , R en S zo kunnen kiezen dat $PQRS$ een parallellogram is. Het snijpunt van de diagonalen van $PQRS$ noemen we zijn middelpunt M . Het is niet moeilijk te bedenken dat als $ABCD$ een vierkant is er oneindig veel mogelijkheden zijn waarbij M het middelpunt is van zowel $ABCD$ als van $PQRS$. Lastiger wordt het als het middelpunt van het vierkant niet samenvalt met dat van het parallellogram. Bij de opgaven kunt u steeds uw antwoorden geven met een duidelijke constructie of een beschrijving daarvan. U kunt ook variabelen kiezen voor de coördinaten van de benodigde punten en die van de gevraagde punten berekenen. Het is niet nodig om basale constructiestappen zoals die van evenwijdige lijnen, middelpunten van lijnstukken, enzovoort nader te specificeren.

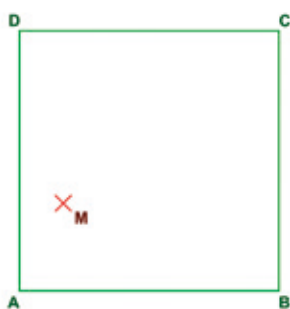
We beginnen met een opgave die misschien op het eerste gezicht weinig met voorgaande te maken heeft, maar kan helpen met de opgaven die erna komen. Ook als opgave 1 niet lukt, mag u in de opgaven daarna het resultaat van opgave 1 als bekend veronderstellen.

Opgave 1

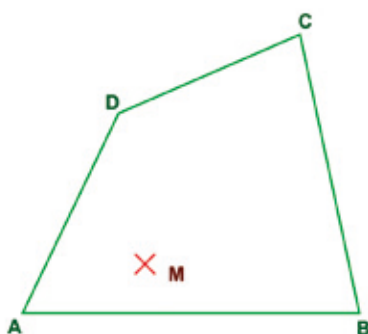
Gegeven zijn twee lijnen m en n met snijpunt A en een punt M (zie figuur 2). Bepaal punten B op m en C op n , zodat M het midden is van AB .



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Opgave 2

Gegeven een vierkant $ABCD$, met daarbinnen een willekeurig punt M , niet in het middelpunt van het vierkant (zie figuur 3). Bepaal een parallellogram $PQRS$ met de hoekpunten elk op een verschillende zijde van het vierkant of op het verlengde daarvan met M als middelpunt. U zult gemerkt hebben dat er hoekpunten van $PQRS$ op de verlengden van de zijden van $ABCD$ liggen. Dat hoeft natuurlijk niet altijd, zoals bij het voorbeeld van Varignon. In de volgende opgaven is $ABCD$ niet meer een vierkant, maar een willekeurige convexe vierhoek (in één vlak)

Opgave 3

Gegeven vierhoek $ABCD$ en een punt M binnen die vierhoek (zie figuur 4).

- Beschrijf hoe u minstens één parallellogram kan bepalen waarvan M het middelpunt is en waarvan de hoekpunten elk op een verschillende zijde (of verlengde daarvan) van $ABCD$ liggen.
- Hoeveel verschillende van zulke parallellogrammen zijn er?

Van de parallellogrammen van opgave 3 zullen hoekpunten op de zijden van $ABCD$ zelf en/of op hun verlengde terecht gekomen zijn. We gaan nu kijken hoe we M moeten kiezen, zodat de hoekpunten allen op de zijden zelf terechtkomen.

Opgave 4

Bepaal de meetkundige plaats van alle mogelijke middens M van parallellogrammen waarvan de hoekpunten **op** de zijden van $ABCD$ liggen, dus niet op de verlengden daarvan. U mag er daarbij vanuit gaan dat vierhoek $ABCD$ convex is, zoals figuur 3. (Is dit meetkunde of lineair programmeren?).

Als toegift is het wel aardig om te letten op een aantal bijzondere eigenschappen van die meetkundige plaats. Daarmee is die meetkundige plaats namelijk ook snel te beschrijven en dus ook te construeren. Als vierhoek $ABCD$ concaaf is en M ook buiten $ABCD$ mag liggen, zijn er nog extra mogelijkheden om de hoekpunten van het parallellogram op de zijden en niet op hun verlengden te krijgen. Als extra opgave buiten de puntentelling zou u opgave 4 kunnen beantwoorden voor vierhoek $ABCD$ concaaf, waarbij M ook buiten $ABCD$ mag liggen.

Noot

[1] www.pandd.demon.nl/vierh/varignon.htm

Inzenden oplossingen

Heeft u een of meer van de opgaven beantwoord, doe dan eens gek en doe mee. Oplossingen kunt u mailen naar liekewobien@hotmail.nl of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. U kunt weer 20 punten verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. De deadline is **29 april a.s.**

Wij wensen u veel plezier.

UITWERKING PUZZEL 89-3

DIAGONALEN IN HET KWADRAAT

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

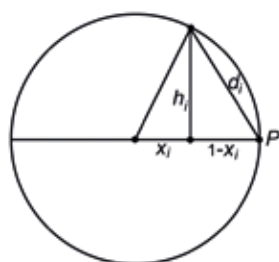
Met deze puzzel wilden we onder andere de fraaie productstelling van diagonalen weer eens in het zonnetje zetten. De stelling luidt: Gegeven een regelmatige n -hoek, met de hoekpunten op een cirkel met straal 1. Dan is het product van lijnstukken (diagonalen, d_i), getrokken vanuit één hoekpunt naar alle overige hoekpunten gelijk aan n .^[1]

In formule $\prod_{i=1}^{n-1} d_i = n$. De stelling zelf was echter geen opgave, omdat deze vrij gemakkelijk

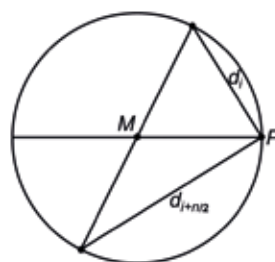
op internet is te vinden. De ons oudst bekende bron met bewijs komt van Legendre^[2], gevonden mede dankzij de inspanningen van Jan Guichelaar en Hessel Pot, die verwante stellingen beschreven in *Pythagoras*.^[3,4] Legendre heeft die formule afgeleid uit een meer algemene formule van niemand minder dan Euler^[5], overigens zonder complexe getallen.

De puzzel ging ook over de som van de kwadraten van die diagonalen: $\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 = 2n$.

Controle van de som- en productformules voor enkele waarden van n (opgave 1a) is een mooie goniometrische oefening voor uw leerlingen, maar was niet nodig als u de meer algemene formules kon bewijzen. Niet exact, maar wel overtuigend kan de controle ook met de rekenmachine (TI): `sum(seq((2sin(πx/n))²,x,1,n-1))`, of `prod(seq(2sin(πx/n),x,1,n-1))` waar u dan de waarde van n invult. Naast zuiver meetkundige toepassingen die we hier zullen bespreken, werd er bij de inzendingen ook gebruikgemaakt van vectoren en goniometrie.



figuur 1



figuur 2

Opgave 1b

Een algemeen bewijs voor de somformule.

Voor elke d_i geldt: $h_i^2 + x_i^2 = 1$; $d_i^2 = h_i^2 + (1 - x_i)^2 = h_i^2 + x_i^2 + 1 - 2x_i = 2 - 2x_i$ (zie

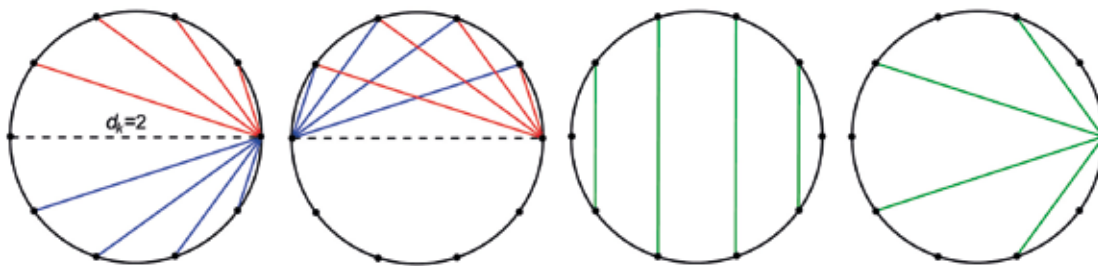
figuur 1). Dus $\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 = 2(n-1) - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i$.

We gaven u de tip dat de som van alle n vectoren vanuit het midden naar de hoekpunten van de veelhoek 0 moet zijn, en dus ook hun horizontale componenten x_i .

Dus $\sum_{i=0}^{n-1} x_i = 0$, en omdat $x_0 = 1$: $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = -1$. Daarmee hebben we $\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 = 2n$.

Jos Remijn liet zien dat dit ook kan met een elegant bewijs met behulp van inproducten van vectoren.

Voor even waarden van n is het eenvoudiger. De punten liggen dan twee aan twee op een middellijn van de cirkel. Zo'n puntenpaar vormt samen met P een rechthoekige driehoek, waardoor de som van de kwadraten voor die twee punten altijd 4 is. (zie figuur 2). Er zijn $(n-2)/2$ van die paren, die elk een bijdrage 4 leveren aan de som. En het punt tegenover P levert nog eens 4, in totaal $2n$.



figuur 3

Opgave 2

Bewijs dat als de productformule geldt voor $n = k$, dan geldt hij ook voor $n = 2k$ en omgekeerd. Daartoe nemen we het product van de rode en blauwe diagonalen van het eerste plaatje (zie figuur 3). Dat zijn de diagonalen met $n = 2k$, maar zonder $d_k = 2$, dus de helft van het product voor $n = 2k$. Spiegelen we de blauwe lijnen in het middelpunt van de cirkel, dan krijgen we het tweede plaatje met rechthoekige driehoeken. Elke groene diagonaal in het derde plaatje is het dubbele van de verticale hoogtelijn van een rechthoekige driehoek in het tweede plaatje. Als a en b de rechthoekszijden van de driehoek zijn, h de hoogte en c de schuine zijde hebben we: $ab = hc$. In ons geval is dat dus twee maal de hoogtelijn. Het product van de groene diagonalen in het derde en vierde plaatje is dus gelijk aan de producten van de blauwe en rode diagonalen in het eerste en tweede plaatje. Gevolg: product diagonalen ($n = 2k$) = 2 x product diagonalen ($n = k$).

Noten

- [1] Zie www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/ProductOfDiagonals.shtml
- [2] Legendre, M. (1826). *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*. Hfdst. X (blz 443).
- [3] <https://archive.org/det/1826ails/traitledesfonctio00legegoog>
- [4] Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*: hfdst. 14, §240 (p. 265).
- [5] Zie: The Euler Archive: *Publications/books and pamphlets/E101*
- [6] Guichelaar, J. (2012). Koorddans in een regelmatige veelhoek. *Pythagoras*, 52(2).
- [7] Pot, H. (1989). Een tienhoekslijnproduct. *Pythagoras*, 28(2).

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na 89-3 is:

K. van der Straaten	151
K. Vugs	137
F. Göbel	124
G. Bouwhuis	116
J. Meerhof	104
R. Stolwijk	104
H. Bakker	92
J. Verbakel	78
L. Pos	68
G. Riphagen	62

De ladderprijs is gewonnen door Kees van der Straaten.
Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Dick Klingens
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzending bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast. Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvww.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard, Eindhovenensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 50,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur

E-mail redactie@nvww.nl

2014

wo
02/
04

OP DE SCHOLEN

Grote Rekendag
Organisatie Flsme

do
03/
04

DIVERSE LOCATIES

Cursus 'Hoe kijk je een examen na'
Organisatie NVvW, zie ook pagina 37

vr
11/
04

AMSTERDAM

Docentencongres Leve de Wiskunde!
Organisatie UvA

wo/do
16/17
04

DELFT

Nederlands Mathematisch Congres 2014
Organisatie KWG

za
10/
05

ZATERDAG 10 MEI, UTRECHT

Symposium WGRWO
Organisatie NVvW, zie ook pagina 23

di
13/
05

NIJMEGEN

WiskundeDialog, nascholingsdag
Organisatie Radboud PUC of Science en het Instituut Leraar en School (ILS).

vr
12/
09

VRIJDAG 12 SEPTEMBER, EINDHOVEN

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr
08/
11

ZATERDAG 8 NOVEMBER, VEENENDAAL

Jaarvergadering/Studiedag
Organisatie NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

JAARGANG 89

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	17 september 2013	24 juni 2013
2	5 november 2013	2 september 2013
3	17 januari 2014	28 oktober 2013
4	6 februari 2014	2 januari 2014
5	25 maart 2014	27 januari 2014
6	13 mei 2014	17 maart 2014
7	24 juni 2014	6 mei 2014

Uitdaging:

Kiest u voor de workshop of ontdekt u de *fx-CG20* zelf?

Ontdek de eenvoud van de *fx-CG20* in een professionele Casio Workshop, die op afspraak én bij u op locatie kosteloos zal worden gegeven. Casio Educatief Consulent David Kropveld zorgt er voor dat u zich de werking van de *fx-CG20* in korte tijd eigen maakt. Vele collega's gingen u voor.

- Supersnel resultaat in berekening én weergave.
- Menustructuur op basis van iconen navigatie.
- Hogeresolutie LCD-kleurenscherm 65.000 kleuren.
- Haarscherpe grafieken: weergave als in een studieboek.
- Software voor projectie en presentatie in de klas.

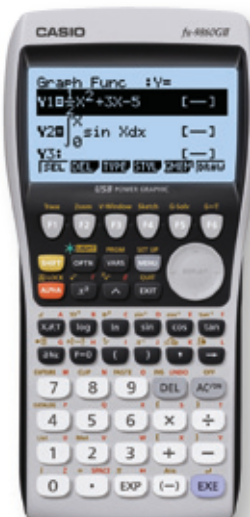
Test u de *fx-CG20* of een andere Casio rekenmachine liever zélf? Maak dan gebruik van een speciaal geprijsd docentenexemplaar.

Kijk op:
www.casio-educatie.nl



3 jaar
garantie

Informeer naar de Casio *fx-CG20* Workshop of bestel uw exemplaar voor € 39,50 via e-mail: educatie@casio.nl



CASIO *fx-9860GII*

Rekengemak: de grafische rekenmachine *fx-9860GII* met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB groot Flash-ROM-geheugen.



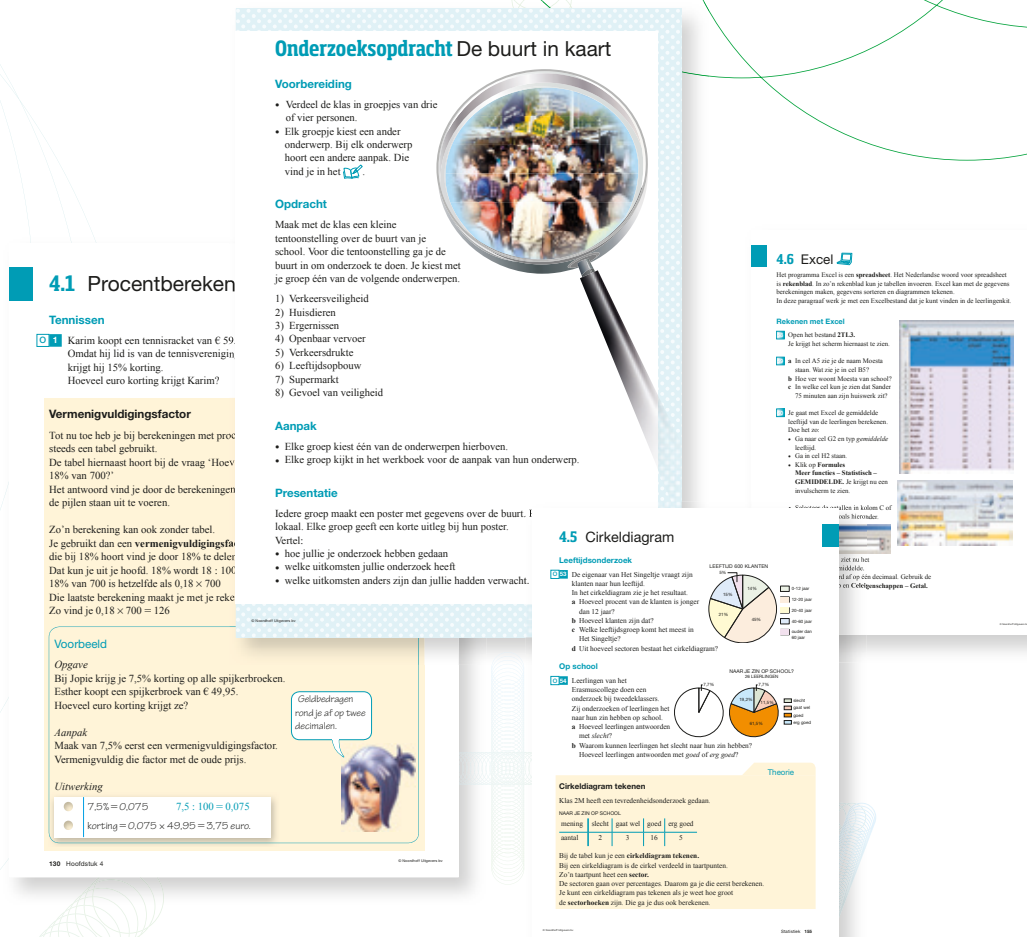
CASIO *fx-82ES PLUS*

Geniale oplossing: de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx-82ES Plus*, met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie. Het puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl

GETAL & RUIMTE



Getal & Ruimte 10^e editie vmbo onderbouw compleet beschikbaar voor 2014-2015!

- Perfect afgestemd op de nieuwe tussendoelen en de tussentoets;
- Ruim aanbod aan actuele praktijkvoorbeelden;
- Nu met Onderzoeksopdrachten: praktische toepassingen die leerlingen motiveren;
- Het pittigere vmbo-t/havo boek biedt naadloze aansluiting op de 10^e editie voor havo/vwo.

Oordeel zelf! Ga naar www.getalruimte.noordhoff.nl voor meer informatie over de 10^e editie en om uw beoordelingsexemplaar aan te vragen!