Wim Pijls

# BEWIJS VAN HET BLAUW-ROOD ALGORITME

In Euclides nummer 2 schrijft Wim Pijls over grafentheorie. Het Blauw-rood-algoritme dat hij daarin noemt, bewijst hij in dit website artikel

Alvorens het bewijs te geven, moeten we enkele eigenschappen van grafen bespreken. Strikt genomen bestaat een opspannende boom uit knopen en kanten. De verzameling $V$ van de kanten in een opspannende boom noemen we een skeleton. Het complement $W$ van een skeleton noemen we volgens de naamgeving in het artikel een vulling. De totale verzameling van kanten duiden we aan met $E$. Er geldt dus $E = V \cup W$.

De volgende eigenschap is belangrijk voor ons bewijs: voor elke cykel $C$ en voor elke snede $S$ geldt dat

$|C \cap S| \neq 1$. Dit is als volgt te verklaren. Stel de kanten van $S$ worden uit de graaf verwijderd, waardoor de graaf onsamenhangend wordt. Als de uiteinden van een kant $k \in C \cap S$ dan nog steeds met elkaar verbonden zijn, is $k$ een overbodige kant in $S$ en is $S$ dus geen snede (per definitie is een snede een zo klein mogelijke verzameling). Als de uiteinden niet meer verbonden zijn, moet tenminste één andere kant van $C$ ook met $S$ uit de graaf verdwenen zijn. Er is nog een andere relevante eigenschap die in de literatuur meestal gebruikt wordt in het bewijs van de algoritmen van Kruskal en Prim. Als $V$ een skeleton is en $k \notin V$, dan bevat $V+k$ een cykel $C$. De uiteinden van $k$ zijn dan immers op twee manieren met elkaar verbonden. Als men een willekeurige kant $k' \in C$ verwijdert uit de verzameling $V+k$, is met $V+k-k'$ weer een skeleton verkregen. Elk tweetal knopen is dan weer door precies één pad verbonden.
We behandelen ook de duale tegenhanger. Als $W$ een vulling is en $k \notin W$, dan bevat $W+k$ een snede $S$, want het complement is niet meer samenhangend. (Als men een kant verwijdert uit een opspannende boom, is het restant onsamenhangend.) Kies $k' \neq k$ willekeurig in $S$. Dan bevat $V+k'$ een cykel $C$.
Omdat $k$ het enige element van $S$ is dat in $V$ ligt en $k'$ het enige element van $C$ is dat in $W$ ligt, concluderen we dat $k$ ook op $C$ ligt (anders zou $C \cap S=\{k'\}$). Op grond van de bovenstaande eigenschap is $V+k'-k$ een skeleton en dus $W+k$-$k'$ een vulling. De duale eigenschap luidt derhalve: als $W$ een vulling is en $k \notin W$, dan bevat $W+k$ een snede $S$; als men een kant $k' \in S$ verwijdert is $W+k-k'$ weer een vulling.

We komen nu aan het eigenlijke bewijs toe. Stelling 1 bevat een invariante eigenschap van het algoritme, d.w.z. na elke stap geldt deze eigenschap. Het bewijs vertoont gelijkenis met een bewijs door volledige inductie.
We bewijzen steeds: als de eigenschap na $n$ stappen geldt, geldt hij ook nog na $n + 1$ stappen.
We laten aan de lezer over na te gaan dat de invariante eigenschap geldt na 0 stappen. Met $R$ en $B$ geven we aan de verzameling van kanten die rood resp. blauw gekleurd zijn.

**Stelling 1**. Het algoritme heeft de volgende invariant: er is een skeleton $V$ van minimale lengte zodat $B \subseteq V$ en een vulling $W$ van maximale lengte zodat $R \subseteq W$ met $W$ het complement van $V$.

**Bewijs**. Stel de blauwe regel wordt toegepast en een kant $k$ in een snede $S$ wordt gekleurd. Als $k \in V$ dan blijft de invariant gehandhaafd.
Stel $k \notin V$. De verzameling $V + k$ bevat een cykel $C$. Omdat $|C \cap S| \neq 1$, is er een nog een andere kant $k'$ in deze doorsnede. Vanwege de blauwe stap heeft $S$ geen blauwe kanten en is $k'$ dus niet blauw.
Verwijder een $k' \in C$ uit $V + k$; dit levert een skeleton $V'$.
Vanwege de blauwe stap geldt $\ell(k) \leq \ell(k')$ en dus heeft $V'$ ook een minimale lengte.
Het complement van $V'$ is $W'$. De invariant $R \subseteq W'$ is door bovenstaande wisseling in het skeleton niet gewijzigd.
Omdat $V'$ een skeleton van minimale lengte is, is $W'$ een vulling van maximale lengte.
Het geval dat de rode regel wordt toegepast is duaal.□

**Stelling 2.** Zolang er ongekleurde kanten zijn, is altijd een ongekleurde kant te vinden in een cykel zonder rode of in een snede zonder blauwe kanten (dus is een rode of blauwe stap mogelijk).

**Bewijs.** Stel $k$ is ongekleurd. Als $k \in V$ dan, dan bevat $W + k$ een snede $S$ zonder blauwe kanten. De blauwe stap is dus mogelijk. Het geval $k \in W$ is duaal. □
Uit stelling 1 volgt onmiddellijk dat $B = V$ en $R = W$ wanneer alle kanten gekleurd zijn.

## Over de auteur

Wim Pijls werkte van 1973 tot 1984 als docent wiskunde aan de Lerarenopleiding Zuidwest-Nederland (thans Hogeschool Rotterdam). Van 1984 tot 2011 was hij docent informatica aan de Erasmus Universiteit Rotterdam. Inmiddels is hij met pensioen. E-mailadres: *pijls@ese.eur.nl*