

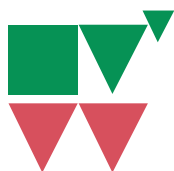
EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERaar

EEN GOED BEGIN...
FORMULEKAARTEN BIJ HET CE
DE REKENTOETS 2F VMBO TOEGELICHT
EEN OUD VERHAAL EN NIEUWE
WISKUNDE
UITDAGENDE PROBLEMEN



NR.2



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 89 | NOVEMBER 2013

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 89 NR 2

IN DIT NUMMER

KORT VOORAF
MARJANNE DE NIJS

3

DEZE AAP KAN REKENEN

LEON VAN DEN BROEK

4



EEN GOED BEGIN...
ERIKA BAKKER

7

FORMULEKAARTEN BIJ HET CE
AMELING ALGRA

8

GETUIGEN
DANNY BECKERS

10

DE REKENTOETS 2F VMBO TOEGELICHT
PIETER VAN DER ZWAART

12

BESMET UW LEERLINGEN MET HET OLYMPIADE-VIRUS

BIRGIT VAN DALEN

15



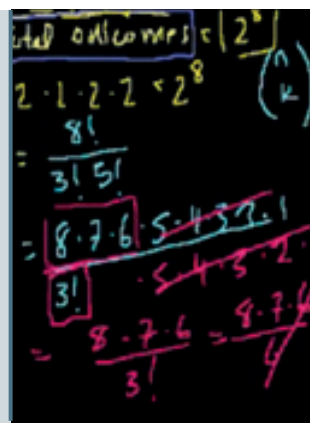
EEN OUD VERHAAL EN NIEUWE WISKUNDE
WIM PIJLS

17

OPTIMALISEREN VAN INSTRUCTIE-VIDEO'S

MIKAËL FLENS

20



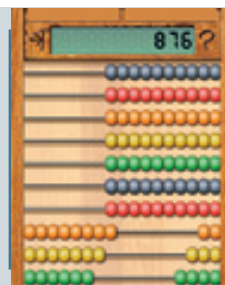
VANUIT DE OUDE DOOS
TON LECLUSE

24

WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

26



UITDAGENDE PROBLEMEN
JACQUES JANSEN

27



KORT VOORAF

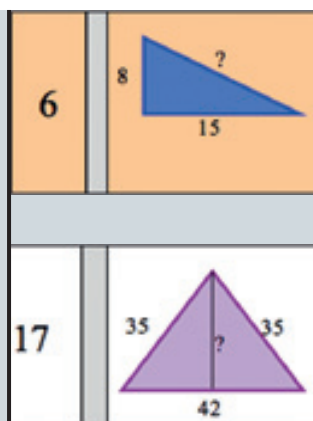
Op dinsdagmiddag mag ik altijd een dubbeluur les geven aan mijn 5 vwo wiskunde B-klas. Dat doe ik in lokaal 207. Geweldig lokaal, grote ramen met een prachtig uitzicht op mooie wolkenpartijen en aan de muur 'heel ouderwets' een groot *whiteboard*. Met een *cleaner* zorg ik dat het ook werkelijk helemaal wit is, de wisser een nieuw velletje papier heeft en vier kleuren stiften op de daarvoor bestemde reling liggen. Ik kan me werkelijk verheugen op het vullen van het oppervlak met mooie wiskunde. De wolkenpartijen laat ik dan ook regelmatig links liggen om achter in het lokaal het resultaat te bewonderen. Een opmerkelijk genoeg voor iemand die al in 2007 een enthousiasmerend artikel schreef over het gebruik van het interactive whiteboard... Wat nou digitaal? Nee, ik ben niet bekeerd. Het genoeg zit in de combinatie. Dezelfde klas kan ik op een ander moment in een ander lokaal, met veel plezier de stof uitleggen middels een digibord. Applets, GeoGebra en de interactieve grafische rekenmachine ondersteunen dan mijn les. Of een video. Waarbij ik bijvoorbeeld dankbaar gebruik maak van de bronnen die Mikaël Flens in zijn artikel noemt. Uw vakblad gaat ook voor de combinatie, namelijk papier en digitaal. Met links van u de inhoud is het duidelijk wat deze *Euclides* op papier brengt. En door het blad heen vindt u ook verwijzingen naar artikelen die op onze website staan, op de digitale versie dus. Met dank aan onze webmasters die hard gewerkt hebben om de website voor u zo toegankelijk mogelijk te maken. We wensen u veel leesplezier.

Marjanne de Nijs
Hoofdredacteur *Euclides*

EEN SPEL DAT IEDEREEN KENT

ANJA MOEIJES

30



VERENIGINGSNIEUWS



NOTULEN VAN DE NVVW-JAARVERGADERING

KEES LAGERWAARD

32

RECREATIE

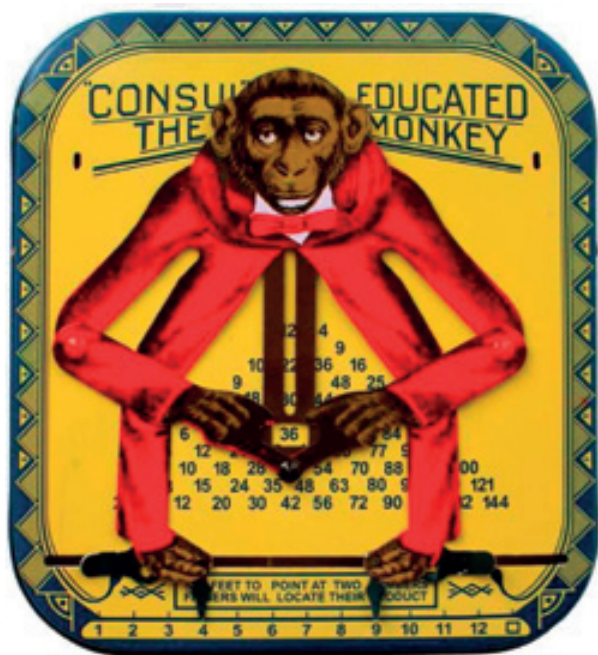
34

SERVICEPAGINA

38

Een serieus speeltje

Het past eigenlijk niet meer in deze tijd: een mechanisch apparaatje waarmee je kunt vermenigvuldigen. Het speeltje met de toepasselijke naam 'Consul', the educated monkey ('Raadgever', de geschoolde aap) geeft niets anders dan de tafels van vermenigvuldiging.



Het werkt zó. De voeten van de aap kun je horizontaal verplaatsen naar de getallen die je wilt vermenigvuldigen; in de figuur zijn dat 4 en 9. Tussen de handen van de aap zit een venster: daar lees je de uitkomst af, in dit geval 36.

Ik kocht het apparaatje in Museum Boerhaave voor € 14,95. Het is afkomstig van DBS, een bedrijf in Düsseldorf dat zich toelegt op de herproductie van blikken speelgoed van een eeuw geleden. Vreemd genoeg wordt het niet geschikt gevonden voor kinderen onder veertien jaar, dit vanwege de scherpe randen. Waar overdreven zorg al niet toe kan leiden. Zie www.dbs-blechspielwaren.de. Het speeltje is ook te koop op internet; google maar op 'consul' en 'monkey'.

In de originele aanbeveling uit 1916 staat:
IT DOESN'T MAKE DIFFERENCE TO THE MONKEY
WETHER THE CHILDREN ARE BRIGHT OR STUPID, HE
NEVER LOSES PATIENCE AT HAVING TO ANSWER THEIR
QUESTIONS.

Zie voor de originele begeleidende tekst uit 1916
<http://www.officemuseum.com/kids.htm>.

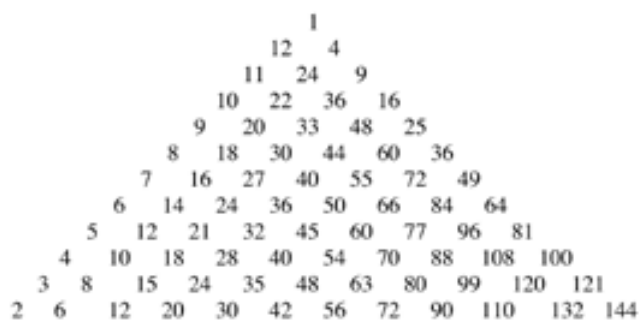
Getallendriehoek

Als de voeten worden verplaatst, beweegt het venster zich over een driehoek met getallen.

Een online-versie vind je op:

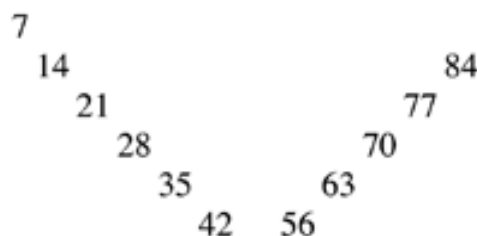
<http://www.rechenwerkzeug.de/default.htm>.

Het getallenpatroon is als volgt:



In de onderste rij staan de *rechthoeksgetallen*. Daarover schuift het venster als je twee opvolgende getallen vermenigvuldigt. De getallen op de tweede rij krijg je als je getallen die 2 verschillen vermenigvuldigt. Enzovoort. Aan de linkerkant staan de getallen 2, 3, 4, Die krijg je als je met 1 vermenigvuldigt (zet de rechtervoet van de aap op 1). Op de schuin lopende lijn daarnaast staan de tweevouden (behalve 2 en 4), daarnaast de drievouden. Enzovoort.

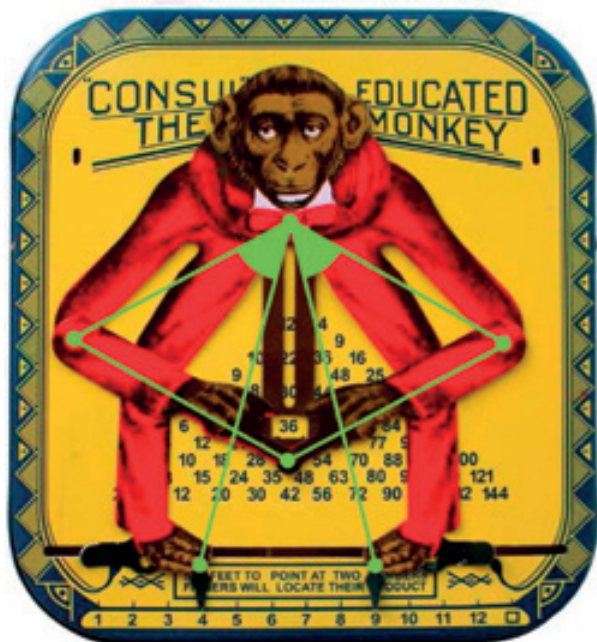
Als we nog iets beter kijken en bijvoorbeeld de zevenvouden opsporen, dan zien we die in een V-vorm staan:



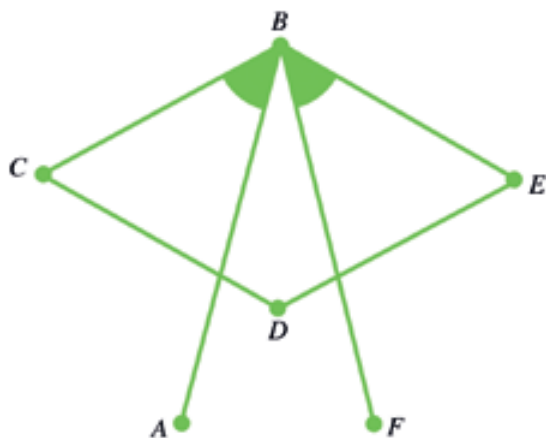
Het kwadraat van 7 ontbreekt in de V-vorm. Logisch, want aaps voeten kunnen niet tegelijk op 7 staan. De kwadraten zijn (daarom?) apart geplaatst: aan de rechterkant van de driehoek. Het venster komt daarop als je de linkervoet van de aap op het vierkantje (helemaal rechts) zet. (Het vierkantje werd vroeger wel vaker gebruikt als teken voor kwadraat.)

De wiskunde van het mechanisme

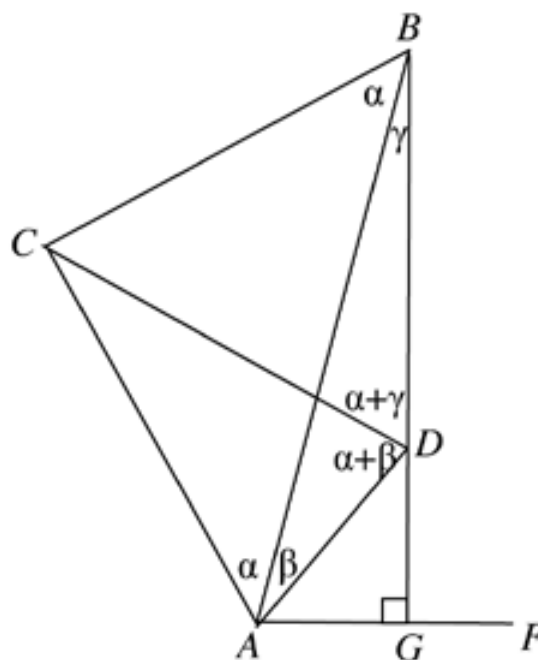
Als je de rechtermoet van de aap vasthoudt en je verschuift de linkervoet steeds 1 opzij, dan verschuift het venster met gelijke stappen over een rechte lijn. Hoe kun je dat met het mechaniek verklaren?



Om het apparaatje te begrijpen, helpt het om de aapfiguur te vergeten. We abstraheren het speeltje door het terug te brengen tot de draaipunten en de verbindingslijnen daartussen. Die zijn in het groen op de aap getekend.



De twee gevulde hoeken $\angle ABC$ en $\angle FBE$ hebben een vaste grootte. De afmetingen zijn speciaal gekozen, namelijk $CB = CD = CA = EB = ED = EF$. Als dat niet het geval zou zijn, zou het venster niet over rechte lijnen bewegen. Uit deze gelijkheden blijkt te volgen dat in elke stand $\angle DAF = \angle ABC$ en daarom beweegt D onder een vaste hoek ten opzichte van AF . Dat kun je met elementair rekenen met hoeken inzien.



Omdat $CA = CB$ is $\angle CAB = \angle CBA$; noem deze hoeken α . In de figuur zijn ook de hoeken β en γ aangegeven.

Omdat $CA = CD$ en $CB = CD$ komen de hoeken $\alpha + \beta$ en $\alpha + \gamma$ ook bij punt D voor.

De hoekensom in driehoek ABD geeft:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ.$$

De hoekensom in driehoek ABG geeft:

$$\gamma + \beta + \angle DAG + 90^\circ = 180^\circ.$$

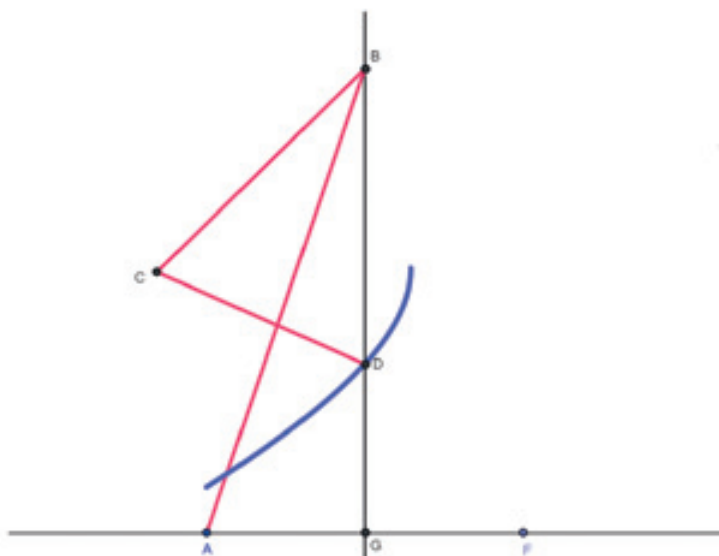
Door deze twee gelijkheden te combineren, krijgen we:

$$\angle DAG = \alpha.$$

Bij onze aap is $\alpha = 45^\circ$ en is dus de hoek bij C recht. Maar dat is niet essentieel voor de werking. Je krijgt altijd een mooie getallendriehoek, met de getallen op rechte lijnen, als $CA = CB = CD$ en $\angle G = 90^\circ$. Het enige verschil is dat de getallendriehoek platter is als $\alpha < 45^\circ$ en steiler als $\alpha > 45^\circ$.

Als $\alpha = 45^\circ$, is $DG = AG$. Als de linkervoet F één eenheid naar rechts gaat, gaat G een halve eenheid naar rechts en D dus een halve eenheid naar boven. Het venster verplaatst zich dan dus een vast stukje, namelijk een half naar rechts en een half naar boven. Hiermee is uitgelegd dat de getallen in de driehoek op rechte lijnen liggen en wel op onderling gelijke afstanden.

Op de volgende pagina zie je een baan (gemaakt met GeoGebra) die D kan doorlopen als de lijnstukken CA , CB en CD niet gelijk zijn.



De vermenigvuldigaap lijkt mij persoonlijk een leuke variatie voor het leren en oefenen van de tafels. Wat vindt u, beste lezer? Is de consul een zinvol en toegestaan hulpmiddel in het rekenonderwijs op de basisschool? Of heeft het alleen nostalgische waarde voor oude rekenmeesters?

Meer moois

Afgezien daarvan zijn er in elk geval aardige patronen te ontdekken in de getallendriehoek.

Ik noemde al de zevenvouden, die in een V-vorm staan.

Zo staan ook de n -vouden in een V-vorm, voor $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9$ en 10 .

Bekijk ook eens de kolommen

	10	22	36	
8	18	30	44	60
14	24	36	50	66
18	28	40	54	70
20	30	42	56	72

Van onder naar boven zijn de verschillen steeds 2, 4, 6, en 8. Dat schreeuwt natuurlijk om een verklaring. Net zo iets is er aan de hand in de kolommen

	11	24		
	20	33	48	
16	27	40	55	72
21	32	45	60	77
24	35	48	63	80

Met de rijen is er ook zo iets aan de hand (met weglating van het laatste getal, wat een kunstmatig toegevoegd kwadraat is). Bijvoorbeeld:

4 10 18 28 40 54 70 88 108

Ook hiervan is de rij van de opvolgende verschillen rekenkundig, dus is de rij zelf kwadratisch.

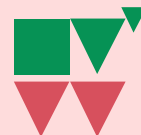
Over de auteur

Leon van den Broek was docent wiskunde op rsg Pantarijn te Wageningen en is auteur van diverse wiskunde-publicaties, waaronder lesmaterialen van de Wageningse Methode. Hij wil wiskunde toegankelijk maken voor een breed publiek en is betrokken bij verschillende wiskundewedstrijden in Nederland.

E-mailadres: L.vandenBroek@math.ru.nl

WEBSITE

JAARVERSLAGEN NVvW EN EUCLIDES



Tijdens de jaarvergadering van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 9 november 2013** staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van *Euclides* jaargang 89 nummer 2. U kunt ze vinden op resp. vakbladeuclides.nl/892nvw en vakbladeuclides.nl/892euclides.

EEN GOED BEGIN...

Erika Bakker



Erika Bakker heeft vorig schooljaar haar LIO-stage Wiskunde gedaan, als onderdeel van haar Educatieve Master. Nu is ze begonnen met haar eerste echte baan als docent. In deze rubriek deelt zij haar belevenissen met u.

Het nieuwe schooljaar is begonnen! Met dit jaar drie andere klassen dan vorig jaar: een 3 vwo-klas, een 4 vwo-klas wiskunde A en een 5 havo-klas wiskunde B. Wel hetzelfde als vorig jaar is dat ik twee brugklassen heb. In de eerste lesweek kon ik direct een blokuur kennismaken met een van deze twee brugklassen. Dat was een bijzondere les omdat ik sinds mijn Educatieve Minor, vier jaar geleden, geen blokuren heb gegeven. Ik vond het daarom erg lastig om in te schatten hoeveel theorie en opgaven ik in zo'n les kon behandelen en vooral op welke manier ik zo lang de interesse van de leerlingen kon vasthouden.

Het was niet alleen nieuw dat ik een blokuur moest vullen, maar voor mij zat ook een andere klas dan vorig jaar. Dat gaf echt een heel raar gevoel. Zeker aan het begin van de les had ik het idee: dit is niet mijn klas. Nadat ik een plattegrond had gemaakt en enkele leerlingen een aantal wiskundewoorden zoals 'kwadraten' hadden bedacht en aan de rest van de klas hadden uitgelegd, trok dit rare gevoel weer een beetje weg. Aan het eind van de les kwam een meisje naar me toe om te vertellen dat ze deze wiskundeles eigenlijk leuker vond dan de les Nederlands die ze het uur daarvoor had gehad. Zelf had ze dat van te voren niet verwacht: 'U bracht het ook zo enthousiast.' Zo'n opmerking maakt natuurlijk je hele dag weer goed.

De eerste les in 5 havo verliep helemaal anders dan ik verwacht en gepland had. De leerlingen hadden in hun boekenpakket drie wiskundeboeken gekregen. Deel 2 was vorig schooljaar, ondanks dat het laatste hoofdstuk wel op de planning stond, nog niet helemaal behandeld. Ik had verwacht dat een deel van de leerlingen dit boek dus wel bij zich zou hebben. Daar had ik natuurlijk nooit vanuit mogen gaan en dit was zeker een leermoment. Precies één leerling had deel 2 bij zich. De leerlingen met deel 1 dachten dat we gewoon vooraan zouden beginnen en één van de leerlingen met deel 3 zei 'Ik ben nu toch een examenleerling, dus ik gebruik nu ook het laatste boek.' De leerlingen die niets zeiden hadden helemaal geen boek bij zich.

Naast het vergeten van een boek, was een deel van de klas ook de kennis uit vorige leerjaren even kwijt. Mijn introductie op het gebruik van de eenheidscirkel bestond uit het berekenen van de zijden van een rechthoekige driehoek. De schuine zijde had ik alvast 1 gekozen en de hoe-

ken waren gegeven. De 'examenleerling met boek 3' bleek hier wel iets mee te kunnen en riep 'sos-cas-toa' door de klas. Deze opmerking bleek voor andere leerlingen een sein te zijn om ook even mee te denken. Al snel stonden de lengtes van de zijden op het bord. Na de uitleg was er weer een lastig punt omdat ik van te voren had bedacht dat de leerlingen een aantal opgaven uit hun boek moesten maken. Eén hiervan heb ik op het bord geschreven en met een aantal klikken kon ik eenvoudig bij een andere opgave het plaatje op het digibord vertonen. Ondanks deze handelingen liep ik na de eerste les al achter op mijn planning. Gelukkig kon ik dat in de tweede les weer inhalen, zodat in deze klas de eerste lesweek toch nog goed verliep.

In 4 vwo gebeurde in de eerste les precies het tegenovergestelde van de les in 5 havo, want deze leerlingen hadden allemaal hun boeken bij zich. Dat bleek echter meer een nadeel dan een voordeel. Ik had de les geïntroduceerd met de opmerking dat het eerste hoofdstuk over 'tellen' zou gaan. Na een uitleg over verschillende visualisaties van telproblemen deelde ik een opgave uit het boek op in verschillende deelproblemen. Aan de leerlingen de taak om elk deelprobleem op te lossen en ten slotte het eindantwoord te geven. Toen de leerlingen even hadden nagedacht vroeg ik aan hen de berekening bij het eerste deelprobleem. Meerdere leerlingen in de klas riepen '14', wat niet het antwoord op de eerste deelvraag was, maar het eindantwoord van de opgave. Ik vroeg aan deze leerlingen hoe ze aan het antwoord waren gekomen, maar het bleef erg stil. Toen ik even de klas goed rondkeek zag ik hoe er onder elk lesboek een opengeklapt antwoordenboekje lag. Het lostrekken van de leerlingen uit dat antwoordenboekje wordt dit jaar één van mijn doelen.

Al met al een afwisselende eerste lesweek. Ik ben erg benieuwd hoe de rest van mijn eerste gewone schooljaar zal verlopen, hoe ik de theorie uit mijn studie kan toepassen en welke nieuwe dingen ik allemaal nog ga leren.

Over de auteur

Erika Bakker rondde in de zomer van 2013 haar Educatieve Master Wiskunde af. Na een jaar stagelopen is ze dit schooljaar voor het eerst officieel docent wiskunde. E-mailadres: erikabakker66@gmail.com

FORMULEKAARTEN BIJ HET CENTRAAL EXAMEN

Ameling Algra

PANACEE OF PLACEBO?

Een (door de leerling zelf opgestelde) formulekaart als spiekbrieftje is een handig en verantwoord hulpmiddel bij de centrale examens voor leerlingen met dyscalculie. Dat zeggen deskundigen. Toestaan dus, op basis van de Wet gelijke behandeling op grond van handicap en chronische ziekte. Nee, zegt het CvE, de school mag de kaart niet toestaan want hij kan informatie bevatten die exameneisen vervangt. Dat is, zeggen ouders en deskundigen, alsof je een slechtzinnige leerling voor het centraal examen zijn bril afpakt. Nee, zegt het CvE, al oefen je met zwembandjes, die moeten toch af als je opgaat voor het zwemdiploma. Twee vergelijkingen, die – zoals buiten de wiskunde gebruikelijk – geen van beide helemaal opgaan. In dit artikel staat een aantal argumenten voor en tegen het gebruik van een formulekaart in het vmbo op een rij.

Commissie

Met *one liners* tegenover elkaar komen we niet verder. Dat werd duidelijk in een zitting voor de Commissie Gelijke Behandeling vorig jaar, waar deskundigen, het CvE en een leerling over 'de' formulekaart spraken maar in feite heel verschillende kaarten bedoelden.

Het CvE concludeerde daarom dat een meer inhoudelijke benadering gewenst is. Wat staat er op die formulekaart? Is het een spiekbrieftje dat inhoud verklapt waar de leerling over moet beschikken? Of een ruggensteuntje, zoals de audio voor dyslectische leerlingen? Zijn er kaarten denkbaar die passen binnen de exameneisen en die net dat beetje extra houvast bieden dat de leerling met dyscalculie nodig heeft? Complicatie: de kaart is individueel, zeggen de deskundigen. Een standaardkaart werkt niet.

Wat staat er op de kaarten?

Het CvE heeft, voor wiskunde en economie vmbo TL, in het afgelopen schooljaar een aantal kaarten ontvangen van scholen, en van ouders en leerlingen.

De formulekaarten bleken heel verschillend. Er waren zeer beperkte voorstellen: Op één school wenste de leerling alleen een verhoudingstabelletje te gebruiken:

100%				
aantal				

Een ander zette op haar kaart twee formules die zij niet kon onthouden en die geen examenstof waren.

Andere 'formulekaarten' daarentegen bevatten onjuiste of contraproductieve informatie, of informatie die klip en klaar afbreuk deed aan de exameneisen, zoals voor economie een volledige beschrijving van ons belastingstelsel. De kaarten

waren soms complete samenvattingen met uitgewerkte voorbeelden, die de dikte van het leerboek benaderden en die van het centraal examen een open-boek-examen zouden maken. Het CvE heeft voorlopige conclusies getrokken. Die voorlopige conclusies zijn vertaalbaar naar vmbo BB, vmbo KB, havo en vwo voor de vakken wiskunde en economie, maar nog niet naar de rekentoets.

Hoe werkt een kaart bij dyscalculie?

Even terug naar de deskundige en dyscalculie. Deskundigen geven aan dat dyscalculie vaak en vooral een automatiseringsprobleem bij abstracte handelingen is. De opgave 57 min 29 gaat op de vingers, en 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met...' kan niet worden onthouden. Voor deze problemen hebben we een adequaat hulpmiddel bij de centrale examens (maar niet bij alle opgaven van de rekentoets): de rekenmachine. Daarnaast staat de examenstof, zo zeggen de deskundigen, bol van de abstracte formules zoals $\sin p + \sin q = \dots$ Maar klopt dat eigenlijk wel?

Bij bijvoorbeeld wiskunde vmbo TL komt dat nauwelijks voor. De formule voor oppervlakte van een driehoek wordt op begrip onthouden. En formules zonder voor leerlingen reële begripsbasis (de oppervlakte van een cirkel) staan in het examen vermeld.

Formulekaart en begrip

Eén voorbeeld: bij wiskunde vmbo TL kan worden gevraagd 'bereken de oppervlakte van deze cilinder'. Van de leerling wordt gevraagd de ruimtelijke figuur te duiden. Hij ziet dat het bovenvlak een cirkel is. De formule voor de oppervlakte van een cirkel staat in het examen: oppervlakte cirkel = $\pi \times \text{straal}^2$. Dan zit aan de onderkant nog een cirkel. Nog een keer uitrekenen of (iets slimmer) nog

een keer hetzelfde getal. En dan de 'wikkel'. Zien dat dat (uitgerold) een rechthoek is. De formule voor de oppervlakte van een rechthoek staat niet in het examen, die onthoud je door begrip. De lengte is hier $\pi \times \text{diameter}$ (formule omtrek cirkel staat weer in het examen), de breedte is de hoogte van de cilinder. Zo moet de leerling aan de slag met verschillende vormen. Op een formulekaart werd dit inzicht vervangen door een formule: $2\pi r^2 + 2\pi rh$. De formule klopt, maar is *niet* zinvol. Onze exameneis is niet 'We willen gediplomeerde TL-leerlingen die als een automaat door invullen de oppervlakte van een cilinder kunnen berekenen'. Maar: 'We willen leerlingen leren dat ze, gebruikmakend van meetkundig inzicht en wiskundige regels, tot de oppervlakte komen'. Heeft de leerling zo'n formulekaart, dan wordt het inzicht *niet* ontwikkeld want de leerling vult liever domweg in. Sneller resultaat, maar een vaardigheid die niet beklijft en niet wendbaar is.

En de dyscalculieverklaring dan?

De leerling heeft een dyscalculieverklaring. Zo'n verklaring is niet een einde, een vrijstelling van rekenwerk, maar een begin. Met de verklaring gaan leerling en school aan de slag om ondanks de beperking zo ver mogelijk te komen, gebruikmakend van de aanwijzingen bij de verklaring, en die in het protocol ERWD. De verklaring noemt de formulekaart, hopelijk naast andere, effectievere instrumenten. De kaart lijkt een test waarmee de bereidheid om rekening te houden met dyscalculie wordt gecheckt. De kaart is een simpel antwoord op rekenproblemen, maar niet de oplossing in alle situaties. Het protocol ERWD noemt als eerste van vier hoofdlijnen het verder ontwikkelen van begripsvorming. Ook andere deskundigen stellen dat begripsvorming, het verlenen van betekenis aan de handelingen, voor iedereen en vooral voor leerlingen met dyscalculie een essentieel onderdeel is van het leren. Uiteindelijk is een formulekaart alleen zinvol bij formules die zonder enig begrip 'gestampt' moeten worden. En zulke formules zijn in ieder geval bij wiskunde in het vmbo zeldzaam. Vandaar de soms verrassend beknopte kaarten. En vandaar dat een zelfgemaakte kaart met veel informatie contra-productief is. Met die kaart is het niet meer nodig om begrip te ontwikkelen. Begrijpen is vermoeiender, bijna elke leerling past liever een trucje toe. Zoals de wiskundeleraar weet van de leerling die van zijn oudere broer het trucje 'naar de andere kant dan verandert het van teken' heeft geleerd. Vél handiger, zolang alles in dat model staat. Maar al niet meer toepasbaar bij $3x = 12$. Wordt dat dan $x = -4$?

School en centraal examen

Wat doet de school? De deskundige noemt de formulekaart, geeft aan dat de leerling die zelf moet ontwikkelen. Dat is niet aan dovemansoren gezegd. De leerling gaat enthousiast aan de slag, ziet korte-termijn-effect en klampt zich eraan vast. En de school wil de leerling zo ver mogelijk laten komen, dus wordt de kaart bij het schoolexamen toegestaan. Maar helaas, bij het centraal examen mag het niet. Is dan het centraal examen dan de boosdoener? Zo voelt het misschien, zo wordt het soms gepresenteerd. Maar: examen en hulpmiddelen horen bij elkaar, worden in samenhang door

het CvE vastgesteld. Een examen vmbo aardrijkskunde mét atlas is mogelijk, maar dat wordt wel een ander examen dan zonder atlas. Een centraal examen met formulekaart zou best mogelijk zijn. Dan zijn er andere manieren om het inzicht te toetsen. Maar dan wel met een ander examen.

Open-boek-examens of examens met geoorloofd spiekbriefje zijn overwogen. Of het er gemakkelijker van zou worden, is maar zeer de vraag. Overzichtelijker wordt het in ieder geval niet, bij het examen en bij de voorbereiding. Daarom is daar niet voor gekozen. Overzichtelijker wordt het al helemaal niet met allemaal persoonlijke formulekaarten en daarop aangepaste individuele examens.

Conclusie

Een formule- of rekenkaart kán de leerling met dyscalculie houvast bieden. Zoals de zwembandjes bij het kind dat leert zwemmen. Maar de school moet het niet klakkeloos toestaan of toepassen. De leerling gaat het ook gebruiken waar het niet effectief is, komt aan inzicht niet toe. De kaart helpt hem dan niet verder, hoogstens verder van het doel af. En bij het centraal examen mag het ineens niet. Met als gevolg stress en onzekerheid.

Formulekaarten zijn maar één van de middelen die bij ernstige reken- en wiskunde problemen kunnen worden toegepast. Een middel dat soms nuttig is, maar soms erger dan de kwaal. Het kan houvast bieden, maar ook een strohalm blijken. Het middel heeft zin als voortdurend gecheckt wordt of de kaart inzicht vervangt en als voortdurend formules geschrapt worden omdat de vaardigheid door inzicht ook zonder kaart wordt beheerst. Een persoonlijke kaart waar anderen van af moeten blijven, die gaat niet werken. En zal zeker ook niet worden toegestaan bij de centrale examens.

Bij de schoolexamens bepaalt de school of en in hoeverre een kaart wordt toegestaan, in de les, bij de toetsen, bij de schoolexamens. Dat is de pedagogisch-didactische verantwoordelijkheid van de school. Maar bij die verantwoordelijkheid hoort óók de vraag of nog adequaat wordt opgeleid voor het centraal examen. En belangrijker nog: of überhaupt adequaat wordt opgeleid. Of een ruim gebruik, bedoeld als panacee, niet een placebo is met alleen psychologisch effect op de korte termijn. Het CvE onderzoekt wat wél zinvol kan zijn bij examens, en bij de rekentoets. Misschien wordt op termijn zo'n verhoudings-tabelletje toegestaan bij de centrale examens. Dat zit al standaard in digitale examens BB en KB als kladpapier, kan je zien als een papieren 'rekenmachine' en kan net het kleine beetje houvast bieden dat sommige leerlingen nodig hebben. Maar een kaart vol met formules en rekenvoorbeelden, dat zit er niet in.

Over de auteur

Ameling Algra (1952) was tot 2000 leraar wiskunde en schoolleider in het voortgezet onderwijs en werkt sindsdien bij het College voor Examens en zijn rechtsvoorganger CEVO. Hij is op dit moment projectmanager van CvE en OCW voor het beleid omtrent centrale toetsing PO/VO/MBO en leerlingen met een beperking. E-mailadres: a.algra@cve.nl

ALGORISMUS

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



Met het opbloeien van de handel groeide in de loop van de twaalfde en dertiende eeuw de vraag naar reken- onderwijs. In tegenstelling tot het tot dan toe gebruikelijke onderwijs was dit rekenen vooral gericht op de behoeften van de koopmanspraktijk. Het bestond zodoende uit rekenen met munten, maten en gewichten, alsmede uit regels tot het zorgvuldig administreren van transacties ten behoeve van de handel: boekhouden. Deze ontwikkelingen begonnen in Italië, waar in 1202 het bekende *Liber Abaci* van Fibonacci verscheen. Van daaruit kwam deze nieuwe vorm van onderwijs, samen met de handel en de nieuwe manier van cijfers noteren, langzaam naar het noorden van Europa. Met de uitbreiding van de handel kregen sommige succesvolle koopmanshuizen meerdere vestigingen. Daarbij kwam het voor dat kapitaal van een filiaal in Venetië fungeerde als onderpand voor een transactie in Parijs. Daarmee gingen de koopmanshuizen tevens een functie als bank vervullen. Zodoende werd administratie en rekenwerk nog belangrijker, en werd daarmee ook deze nieuwe vorm van rekenonderwijs van groter belang.

ALS DE VROUW BEVIEL VAN EEN
JONGETJE MOEST DE ERFENIS
ANDERS VERDEELD WORDEN DAN ALS
DE VROUW BEVIEL VAN EEN MEISJE

Dit nieuwe onderwijs vond plaats in de landstaal, niet in het Latijn, en werd gedoceerd aan rekenscholen. Rekenscholen waren een fenomeen in opkomst; soms waren ze verbonden aan een koopmanshuis. Die hadden behoefte aan rekenaars die in staat waren om rekenwerk te verrichten met betrekking tot vrijwel alle facetten van de bedrijfsvoering. Ook werden rekenscholen gesticht op eigen initiatief van een schoolhouder. Om hun lessen te kunnen geven, gebruikten de rekenmeesters aan die scholen hun eigen collecties opgaven, die zij verzamelden in manuscripten.

Een prachtexemplaar van zo'n manuscript, geschreven met donkere inkt en royaal versierd met verschillende kleuren en bladgoud, werd omstreeks 1478 geproduceerd door een Veronese koopman, die samen met een paar vennoten een koopmanshuis stichtte. Mogelijk was hij verantwoordelijk

voor de interne opleiding van de rekenaars die het koopmanshuis nodig had. In elk geval had hij de moeite genomen om zijn manuscript uitbundig te illustreren. Op die manier gaf hij ook aan dat hij rekenen en rekenaars belangrijk vond.

Het manuscript, met de titel *Algorismus*, was grotendeels in het Italiaans geschreven, met soms kleine stukjes in het Latijn. We weten bijna niets van de auteur, behalve dan dat hij zich op de laatste pagina van het manuscript bekendmaakt als Petrus Paulus Muscharellus. Hij was in elk geval goed thuis in het rekenen met de nieuwe cijfers: nergens gebruikte hij Romeinse cijfers, ook niet voor het aangeven van foliant-nummers of jaartallen. Het rekenen met gehele getallen kende voor hem ook geen geheimen. Hij begon zijn manuscript met recepten voor

het rekenen met breuken: aan de hand van voorbeelden deed de auteur voor hoe je twee breuken kon optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen. Vervolgens behandelde hij een aantal voorbeelden van de regel van drieën: een rekenregel

die leerde hoe je een vierde evenredig getal kon vinden wanneer je een verhouding had en een beginwaarde. Die regel werd in eerste instantie gebruikt om tal van opgaven mee uit te werken die betrekking hebben op handelswaar: 100 stuks van een bepaald goed kosten 11 dukaten, hoeveel kosten dan 38 stuks? Omdat veel maten en gewichten niet tientallig waren onderverdeeld, leverde dit soms spannend rekenwerk op, waarbij eventuele breuken voortdurend moesten worden omgerekend in de bijbehorende maten.

De auteur gaat ook verder met deze regel, door vragen te stellen die betrekking hadden op omgekeerde evenredigheden. De zogenaamde werklieden-vraagstukken: die handelden veeleer om opdrachten van het soort waarin een aantal werklieden voorkomt die een bouwwerk of reparatie ieder in een bepaalde tijd kunnen afkrijgen. De

vraag is steevast hoeveel tijd ze er gezamenlijk over doen. Het aardige van het manuscript van Muscharellus is dat hij de vraag ook omdraait: van drie werklieden vertelt hij hoeveel tijd ze in paren werkend over een bepaalde opdracht doen, en de vraag is vervolgens hoe lang ze er ieder afzonderlijk over zouden doen.

Naast al deze vanzelfsprekend nuttige rekenregels bevatte het manuscript een serie opgaven die meer tot de aardigheden behoorde dan tot de basale kennis waar elke koopman over behoorde te beschikken. Zo bevatte het manuscript bijvoorbeeld een uitwerking van het zogenaamde erfenisvraagstuk. Dat vraagstuk was al veel ouder, stamde uit de Romeinse Rechtsgeschiedenis, en handelde over een erfenisverdeling. Een zwangere vrouw kreeg van haar man op zijn sterfbed te horen hoe zijn erfenis moest worden verdeeld. Als de vrouw beviel van een jongetje moest de erfenis anders verdeeld worden dan als de vrouw beviel van een meisje. Na het overlijden van de man beviel de vrouw dan van een tweeling: een jongetje én een meisje. Hoe diende nu de erfenis te worden verdeeld? Met dit soort opgaven liet de auteur zien dat hij zijn werk tot in de puntjes beheerste en dat hij ook goed op de hoogte was van de bestaande traditie in dit soort vraagstukken. Ook de opgave over drie roofdieren rond een lammetje – gegeven is hoe lang ze er ieder voor zich over deden om het lammetje op te eten en de vraag is in hoeveel tijd ze met z'n drieën het lammetje verorberden – behoorde tot diezelfde traditie.

De *Algorismus* van Muscharellus ligt nu in de kluis van de Banca Commerciale Italiana te Verona. Daar ligt het om ons eraan te herinneren dat er een tijd was waarin je als wiskundedocent gelieerd kon zijn aan een succesvol koopmanshuis, om daar rekenaars op te leiden die direct met hun nieuwe kennis en vaardigheden aan de slag konden. Achteraf werd het werk van de leerlingen gecontroleerd door de docent, die verantwoordelijk bleef voor het rekenwerk. Deze leerlingen waren als vanzelf geïnteresseerd in wat de docent te bieden had. Ze deden automatisch hun best, want anders konden ze niet op werk rekenen. Ze wilden dus zelfs leren hoe het zat met al die lastige vraagstukken die de docent hen voorlegde, ook al zagen ze daar geen direct nut van, want het vak dat deze docent te bieden had, zou voor hen wel eens veel te bieden kunnen hebben, mits ze zich er voldoende in konden verdiepen. Indien ze net zo goed konden worden als hun docent, konden zij zich ook ergens als docent vestigen, en wellicht een even succesvolle rekenschool of evenzo florerend koopmanshuis beginnen.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl



figuur 1 *Algorismus*
folio 1r. De rijk
geïllustreerde
openingspagina van
het manuscript



figuur 2 *Algorismus*
folio 58r. Een variant
op het werklieden-
vraagstuk met
illustratie



figuur 3 *Algorismus*
folio 101r. De
recto-zijde van het
laatste foliant, waar-
op de auteur zich
onderaan de
pagina bekend
maakt: Finis
per me Petrum
Paulum Nolensem
Muscharellum sub
anno domini 1478

In het voorjaar van 2013 is voor de tweede keer de rekentoets 2F in het vmbo afgenomen. De pilotperiode van twee jaar is geen overbodige luxe, omdat het onderwijsveld aan een vernieuwing moet kunnen wennen. Enerzijds vraagt de afname van de rekentoets veel van de schoolorganisaties, anderzijds wordt van de docenten rekenen verwacht dat zij hun leerlingen de inhouden bijbrengen die in de rekentoets worden getoetst. Over deze inhouden en de vragen die het College voor Examen (CvE) daarover bereikt hebben gaat dit artikel. Om duidelijkheid te scheppen over deze inhouden publiceert het CvE jaarlijks na de afname een voorbeeldrekentoets.

Een kijkje in de opgaven^[1]

De aan het CvE gestelde vragen komen aan de orde aan de hand van opgaven uit de voorbeeldrekentoetsen van 2012 en 2013. Aangezien de rekentoetsen digitaal worden afgenomen, wijkt de vormgeving van de opgaven in dit artikel af van die in de toets. De voorbeeldtoetsen geven de best mogelijke benadering van de beeldschermweergave. Ter informatie is bij iedere opgave de p-waarde^[2] gegeven.

Contextloze opgaven en rekenvaardigheden

Iedere variant van de toets bevat een aantal (in 2013 twaalf) contextloze opgaven waarmee wordt nagegaan of de rekenvaardigheid op basaal niveau voldoende paraat is. Bij deze opgaven is geen rekenmachine beschikbaar. Er wordt alleen getoetst of de kandidaat in staat is het juiste antwoord op een rekenopgave te bepalen en niet welke achterliggende cijferprocedure hij daarbij gebruikt. Oplossen met een 'handig-reken' strategie is mogelijk, maar de opgaven kunnen natuurlijk ook met behulp van een cijferprocedure worden opgelost. Enkele opgaven uit de voorbeeldtoets 2013:

- Handig rekenen kan helpen bij:

$$48 \times 25 =$$

p=0,60

Dat is hetzelfde als 24×50 en als 12×100

- Bij kommagetallen is het bedenken van een situatie bij de opgave een goed hulpmiddel:

$$4,50 : 0,50 =$$

p=0,68

Hoeveel keer gaat 50 cent uit € 4,50?

- Denk aan centimeters en millimeters

$$5,7 + 3,6 =$$

p=0,91

Iedere kandidaat kan de oplossingsmethode kiezen die hem het beste ligt. Als de uitkomst maar correct is.

Contextopgaven

Bij de contextopgaven wordt getoetst of kandidaten voldoende rekenvaardigheid bezitten om rekenproblemen uit alledaagse situaties op te lossen. Bij al deze opgaven is een rekenmachine beschikbaar.

Rekenen met breuken

Optellen en aftrekken van veelvoorkomende gelijknamige en ongelijknamige breuken worden in contextopgaven getoetst. Dat wil zeggen in een realistische, betekenisvolle situatie en ook zonder dat de kandidaat per se terug moet vallen op een cijferprocedure.

Op Stefans werk komt 1/5 deel van de mensen met de bus en 1/4 deel met de auto. De rest gaat op de fiets.

Welk deel van de mensen gaat op de fiets naar het werk?

- ☐ meer dan de helft
- ☐ minder dan de helft
- ☐ de helft

p=0,21

Wie inziet dat 1/5 minder is dan 1/4 en daarmee ziet dat het aandeel bus- en autoreizigers minder dan de helft is, kan deze opgave zonder kennis van de procedures voor het rekenen met breuken oplossen. Een andere mogelijkheid is dat de kandidaat de breuk omzet naar procenten: 1/5 deel is 20% en 1/4 deel is 25% en dat is samen minder dan 50%. Maar een oplossing kan natuurlijk ook worden bereikt via de cijferprocedure voor het optellen van ongelijknamige breuken.

Soms zijn meerdere antwoorden juist

Er zijn opgaven waarbij meerdere antwoorden goed worden gerekend.

Is het binnen de context van de opgave voorstelbaar dat een bedrag aan de kassa moet worden afgerekend, dan worden zowel het exacte bedrag als de afronding op 5 cent goed gerekend.



Saskia koopt 350 gram gerookte zalm. Hoeveel moet zij betalen?

€

p=0,47

In deze opgave gelden € 13,99 en € 14,00 beide als een correct antwoord.

De antwoorden worden door *ExamenTester*, de software waarmee de rekentoets is afgenomen, automatisch gescoord. *ExamenTester* kan slechts één antwoord of alle antwoorden binnen een bepaald interval goedkeuren. Bij deze opgave worden alle antwoorden die vallen binnen het interval [13,99-14,00] goed gerekend.^[3]

Er zijn opgaven waarbij een door de kandidaat zelf gekozen afronding goed wordt gerekend, mits die afronding bij de situatie past. Ook in dat geval wordt gebruikgemaakt van een interval.



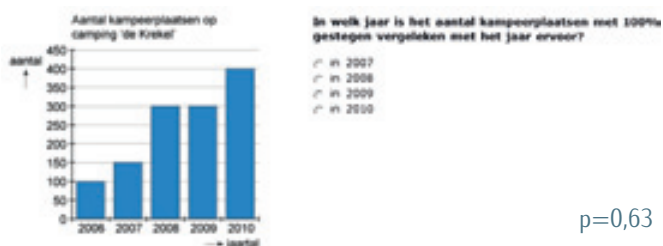
p=0,15

De precieze uitkomst is 94,608 (94,8672 als het een schrikkeljaar betreft). Wie er even over nadenkt, beseft dat 95 miljoen gegeven de situatie ook een correct en misschien zelfs een beter antwoord is.

Niet altijd wordt een afrondingsvoorschrift in de vraagstelling vermeld. Belangrijkste reden is dat een afrondingsvoorschrift de authenticiteit van de opgave te zeer kan schaden. In het bijzonder in de situatie uit het voorbeeld. Want wat is hier de juiste significantie: 10 miljoen, 5 miljoen, hele miljoenen?^[4]

Voorstelbaarheid en realiteit

Het referentieniveau 2F beschrijft wat iedere burger aan rekenkundige bagage tot zijn beschikking zou moeten hebben. Voor de situaties en probleemstellingen uit de opgaven wordt daarom als uitgangspunt genomen dat de kandidaat zich voor kan stellen dat die in het dagelijks leven ook voor kunnen komen.



p=0,63

Het aantal plaatsen op deze camping is ieder jaar een mooi, rond getal, haast te mooi om in werkelijkheid voor te kunnen komen. Echter een campingeigenaar die met deze aantallen een camping in de loop der jaren uitbreidt is goed voorstelbaar en daarmee is de situatie bruikbaar. Dezelfde grafiek had ook het aantal gasten op de camping kunnen beschrijven. Dat vijf jaar achter elkaar een zo mooi rond aantal gasten de camping bezoekt, overschrijdt de grens van de voorstelbaarheid. In het laatstgenoemde geval wordt de situatie onbruikbaar geacht.

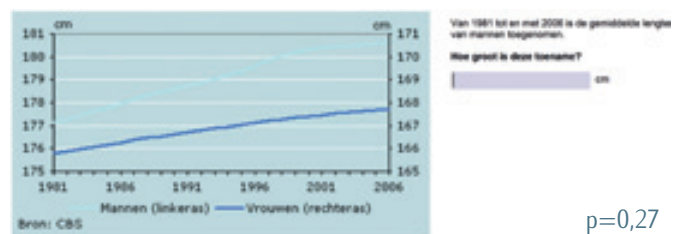
In enkele reacties uit het veld wordt aangegeven dat in de volgende opgave de maateenheid ontbreekt.



p=0,17

In bouwtekeningen wordt echter in veel gevallen geen maateenheid vermeld, ook niet in tekeningen voor het publiek. Van de kandidaat wordt verwacht dat hij weet of inziet dat het hier om millimeters gaat. Een lengte van 7000 m of 7000 cm voor een woonkamer komt niet voor en kan dus worden uitgesloten.

Ook waren enkele reacties over het gebruik van de volgende grafiek:



p=0,27

De hier getoonde grafiek komt van de site van het CBS en ook in andere media worden grafieken met twee verticale assen gebruikt. Van dubbelzinnigheid is hier geen sprake en met het doel 'rekenvaardigheid functioneel kunnen gebruiken' voor ogen is deze context geschikt bevonden. De complexiteit van een dergelijke grafiek is wel dusdanig groot dat deze opgave op de grens ligt van wat in 2F gevraagd kan worden.

Absolute criteria opstellen voor voorstelbaarheid en realiteit is niet goed mogelijk, maar contexten en vragen waarbij een kandidaat met reden kan gaan denken: 'Wie verzint zo iets?' of 'Wie wil dat nou weten?' worden vermeden. En is een context een in het echt bestaande situatie dan dienen de gebruikte gegevens overeen te komen met de werkelijkheid. Een kandidaat die de werkelijke gegevens zou kunnen weten, mag niet gehinderd worden door het feit dat gegevens in de opgave eventueel niet voor 100% in overeenstemming zijn met de werkelijkheid.

Alle opgaven die in de rekentoets 2F voorkomen zijn zo opgesteld dat voor het oplossen van het probleem geen specifieke voorkennis over die context nodig is. Wie de bouwwereld kent, gaat gemakkelijker om met de genoemde plattegrondopgave. Echter, omdat iedere burger een dergelijke plattegrond tegen kan komen, past deze opgave toch binnen de rekentoets 2F. Voor de bouwvakker in opleiding is de waarschijnlijkheid van een

goed antwoord wellicht bovengemiddeld, maar bij andere contexten geldt dat weer voor sporters, mantelzorgers, tuinliefhebbers of wie op zaterdag achter de kassa zit.

Een van de vragen uit het veld betreft de gangbaarheid van maten als hectare (ha). Voor de rekentoets 2F gelden de grenzen van het referentieniveau 2F, dus kunnen alle in het referentieniveau opgenomen maateenheden, waaronder hectare, voorkomen in een toetsopgave.

Taal- en beeldgebruik

Een andere vraag uit het veld betreft het gebruik van het begrip 'etmaal'. Enkele kandidaten bleken deze term niet te kennen en 'etmaal' komt niet in het referentieniveau 2F voor. Bij het ontwerpen van de desbetreffende opgave is het gebruik van 'dag' in plaats van 'etmaal' overwogen. Echter 'dag' verwijst niet ondubbelzinnig naar 24 uur en 'etmaal' wel, wat bij de betreffende opgave essentieel is. Omdat 'etmaal' een begrip is dat voorkomt in dagelijkse situaties, is de opgave op dat punt niet afgewezen.

Om het probleem van onbekendheid met een woord op te lossen: net als bij de centrale examens is bij de rekentoets het gebruik van een woordenboek toegestaan.

Het is niet de bedoeling om moeilijke woorden in de toets op te nemen. Integendeel. De taal die in de opgaven wordt gehanteerd is in principe direct en eenvoudig en bevat geen of nauwelijks moeilijke woorden en begrippen. Begrippen als hectare, die tot de toetsstof behoren, uiteraard uitgezonderd. Helaas is echter niet altijd te vermijden dat kandidaten hinder ondervinden van een zwakke taalvaardigheid.

Om onnodig taalgebruik te vermijden wordt in veel opgaven de benodigde informatie in afbeeldingen verwerkt. Dat informatie in het dagelijks leven vaak via beeldmateriaal wordt aangeboden is eveneens een belangrijke reden. En dat gebruik van beeldmateriaal tegemoetkomt aan taalzwakke en 'beelddenkende' leerlingen loopt mooi parallel met het streven om niet op taalbegrip te toetsen.

Resumerend

Het referentieniveau 2F richt zich op basale kennis en vaardigheden en is gericht op een toepassingsgerichte benadering van het rekenen. Dat heeft werkenderwijs geleid tot een aantal uitgangspunten bij het construeren van de rekentoets:

Essentieel is het kunnen oplossen van een rekenkundig probleem, in mindere mate het beheersen van een achterliggende procedure.

Contexten en probleemstellingen moeten een hoge realiteitswaarde hebben en voorstelbaar zijn voor de kandidaat. In principe worden opgaven vermeden die weinig realistisch zijn en overduidelijk alleen bedacht zijn om een rekenprobleem in onder te brengen.

Contexten betreffen vooral de rol als zestienjarige burger. Gezin, maatschappelijk verkeer, prijsbewuste, gezonde,

milieubewuste consument, nieuwslezer en wereldburger zijn voorbeelden van thema's. Situaties die specifieke kennis vereisen, bijvoorbeeld uit beroepen, worden vermeden. Bij gebruik van begrippen, illustraties, grafieken, enzovoort is leidend wat in alledaagse situaties kan worden aangetroffen, en niet zo zeer wat gebruikelijk is in schoolvakken. Denk hierbij aan de bouwtekening zonder millimeters en de opgave met de twee verticale assen.

Tot slot

Het CvE hoopt dat dit artikel bijdraagt aan kennis over de inhoud van de rekentoets 2F en daarmee aan de mogelijkheden van de docenten rekenen om de leerlingen voor te bereiden op de rekentoets 2F. Verdere informatie is te vinden in het referentieniveau 2F, de rekentoetswijzer 2F en de voorbeeldrekentoetsen 2F.^[5]

Noten:

- [1] Net als voor de centrale examens geldt dat de rekentoets in opdracht van het CvE door Cito wordt geconstrueerd en dat de rekentoets wordt vastgesteld door een vaststellingscommissie van het CvE.
- [2] De p-waarde geeft aan welk deel van de kandidaten een correct antwoord gaf.
- [3] Beide antwoorden kwamen voor. Echter ook het exacte antwoord € 13,993 werd nu als correct aangemerkt. Dit zal in de toekomst zeker worden vermeden. Deze 'intervalkwestie' wordt in de nabije toekomst opgelost door de invoering van de nieuwe softwareomgeving *FACET*. Daarin is, in tegenstelling tot *ExamenTester*, het aangeven van precies twee (of meer) correcte alternatieven wel mogelijk.
- [4] Bij de antwoorden kwamen de afrondingsmogelijkheden 94,608000; 94,608; 94,61; 94,6; en 95 allemaal voor. Al deze antwoorden zijn als correct aangemerkt.
- [5] De documenten zijn te vinden op de volgende sites:
Voorbeeldrekentoetsen: http://www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/rekentoets_vo/voorbeeldtoetsen.aspx
Rekentoetswijzer 2F: www.examenblad.nl: kies TL (of GL, KB of BB), kies rekenen en rekenen 2F.
Referentieniveau 2F: zie: Besluit referentieniveaus Nederlandse taal en rekenen. Door deze zoekterm in te voeren in enkele veelgebruikte zoekmachines komt u bij de officiële regelgeving van de overheid.

Over de auteur

Pieter van der Zwaart is voorzitter van de vaststellingscommissie rekenen 2F VO van het College voor Examens. E-mailadres: info@cve.nl

BESMET UW LEERLINGEN MET HET OLYMPIADEVIRUS

Birgit van Dalen

Steeds meer scholen doen met steeds grotere aantallen leerlingen mee aan de Wiskunde Olympiade. In dit artikel geeft Birgit van Dalen u handvatten om komende januari ook op uw school de Wiskunde Olympiade te organiseren. Ze spreekt als ervaringsdeskundige van twee kanten: enerzijds is ze betrokken bij de landelijke organisatie van de Wiskunde Olympiade en anderzijds is ze sinds twee jaar docent op een school waar voorheen deze wedstrijd niet georganiseerd werd.



Al jaren probeer ik steeds meer docenten wiskunde te overtuigen om ook mee te gaan doen aan de Wiskunde Olympiade en vertel ik ze dat het weinig werk is en dat op elke school wel getalenteerde leerlingen rondlopen. Dus toen ik ruim twee jaar geleden zelf op een school kwam die nog niet meedeed aan de Wiskunde Olympiade, stond voor mij vast dat ik ervoor ging zorgen dat de school wel mee ging doen. Hoe ik dat precies moest gaan regelen, was voor mij, zonder eerdere ervaring met de organisatiestructuur van een middelbare school, nog wel wat uitzoekwerk. Maar het is gelukt: de afgelopen twee jaar heeft mijn school meegedaan met 70 respectievelijk 86 deelnemers.

De grootste uitdaging was wellicht het enthousiast maken van de leerlingen. Vaak genoeg had ik van docenten gehoord dat ze de leerlingen niet mee kregen, of dat er 'bij ons geen slimme leerlingen rondlopen'. Het regelen van voldoende ruimte en het afspreken van een geschikt tijdstip

met de schoolleiding, dat lukt allemaal nog wel, maar heeft weinig zin als er vervolgens maar één of twee leerlingen mee willen doen.

Daarom nam ik vanaf het begin van het schooljaar regelmatig het Olympiade Puzzelspel mee naar de klas. Als een leerling wat eerder klaar was met zijn of haar werk, kreeg hij of zij een puzzelkaart om zich op te storten. Dit werkte boven verwachting goed. In eerste instantie werden de leerlingen misschien aangetrokken door het kleurige uiterlijk van de kaarten, maar ze bleken het vooral heel leuk te vinden om aan ongebruikelijke, puzzelachtige wiskunde te werken. Al snel waren de puzzelkaarten populairder dan het lesboek, ook bij de wat minder sterke leerlingen.

In december werd het tijd om mijn klassen uit te leggen dat die leuke puzzelkaarten hoorden bij een wedstrijd waar je ook echt aan mee kon doen en die plaatsvond in januari. Mijn eersteklassers heb ik erbij verteld dat het wel een



heel pittige wedstrijd is, waar ook leerlingen uit de vijfde klas aan meedoen, dus dat ze er wel op voorbereid moesten zijn dat ze er misschien niet zoveel van op konden lossen. Desondanks was het animo om mee te doen heel groot: ongeveer de helft van de klas meldde zich aan. (Dit betreft wel een klas met hoogbegaafde leerlingen. In een reguliere eerste klas zouden wellicht minder leerlingen enthousiast zijn. Maar probeert u het eens; er willen vast wel enkele leerlingen meedoen.)

Bijna al deze leerlingen hebben twee of drie opgaven van de wedstrijd weten op te lossen. Dankzij de eerdere waarschuwingen over de moeilijkheidsgraad, waren ze daar tevreden mee. Bovendien was de hele klas trots op hun toppresterder die door wist te dringen tot de tweede ronde; bij dat nieuws brak spontaan applaus uit. Een jaar later heeft weer een groter deel van diezelfde klas meegedaan en zijn zelfs twee leerlingen doorgegaan naar de tweede ronde. Ik durf wel te zeggen dat het olympiadevirus definitief toegeslagen heeft in deze klas. In de bovenbouw heb ik het enthousiasme een klein handje geholpen door bonuspunten uit te loven: de olympiadescore gedeeld door 20 zou toegevoegd worden aan het volgende proefwerkcijfer. Omkoping van leerlingen? Ja, in zekere zin wel. Maar in de bovenbouw zijn leerlingen nou eenmaal iets kritischer over 'wat het oplevert' om aan zo'n wedstrijd mee te doen en helpt een bonuspunt ze net over een drempel heen. In onze bovenbouw vwo doen dan ook alle leerlingen met wiskunde B fanatiek mee.

Overigens vinden leerlingen het ook interessant om te weten dat de landelijke top vijf per categorie (onderbouw, vierde klas, vijfde klas) een geldprijs wint. Het is natuurlijk onrealistisch om te denken dat onze leerlingen daar massaal aanspraak op kunnen maken, maar toch werkt

het voor hen blijkbaar motiverend. Als school hebben we besloten om de leerlingen die door zijn naar de tweede ronde (beide jaren een handjevol) zelf in het zonnetje te zetten en een prijsje aan te bieden. Dat is voor de leerlingen leuk en met een foto op de schoolwebsite ook meteen weer goede PR naar buiten (handig argument om de schoolleiding mee te overtuigen om hier budget voor beschikbaar te stellen).

Heeft u ook zin gekregen om op uw school de Wiskunde Olympiade te gaan organiseren dit jaar? Voor meer informatie kunt u op www.wiskundeolympiade.nl kijken. Het puzzelspel is in 2011 naar alle scholen gestuurd (twee exemplaren per school), dus kijkt u eens in de sectiekast of het daar misschien staat. We hebben ook nog enkele exemplaren op voorraad die u kunt bijbestellen via de website.

Over de auteur

Birgit van Dalen is docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag en daarnaast betrokken bij de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Ook is zij adjunct-hoofdredacteur van *Euclides*. E-mailadres: bevandalen@gmail.com



MEDEDELING

VELDRAADPLEGING SYLLABI WISKUNDE A EN C (HAVO/VWO)

Van dinsdag **29 oktober** tot en met vrijdag **20 december 2013** organiseert het College voor Examens (CvE) een veldraadpleging rondom de syllabi bij de nieuwe examenprogramma's wiskunde A en C voor havo en vwo. Docenten VO, vakdidactici en andere vakdeskundigen kunnen hun mening geven over deze syllabi.

U kunt zich vanaf dinsdag 29 oktober aanmelden via www.cve.nl. Na aanmelding ontvangt u een mail met een link naar die enquêtes waarvoor u zich heeft aangemeld. U hebt dan tot en met 20 december de tijd om de enquêtes in te vullen.

EEN OUD VERHAAL EN NIEUWE WISKUNDE

Wim Pijls

Aan de hand van een oude prijsvraag van Pythagoras bespreekt Wim Pijls in dit artikel twee verschillende problemen uit de grafentheorie. Diverse algoritmes komen langs waarmee deze problemen aangepakt kunnen worden en hij laat zien dat de problemen en hun oplossingen in feite dualen van elkaar zijn.

Het is een bekend verschijnsel dat mensen naarmate ze ouder worden, meer belangstelling tonen voor hun 'roots'. Tot mijn wiskundige roots behoren de eerste jaargangen van *Pythagoras*, de jaargangen uit mijn schooltijd. Deze heb ik altijd bewaard, maar tegenwoordig kan iedereen ze op internet vinden (www.pythagoras.nl/pyth/archief.php). Al bladerend in oude nummers stuitte ik in jaargang 3 (1963-1964) op twee stukjes waar ik destijds mee geworsteld heb. Met de kennis van nu denk ik beter te kunnen verklaren wat er aan de hand was. In nummer 3 staat een prijsvraag. Deze omvat het 'spoorwegnet' **van figuur 1**, waarin elk lijnstuk een lengte heeft. De afstand van een punt tot punt A is gedefinieerd als de lengte van zijn kortste route naar A. Stel men wil van elk knooppunt de afstand tot A weten. De opgave luidt: *met welke methode kan men deze afstanden vinden?* Degenen die vandaag de dag in de grafentheorie of informatica zijn opgeleid, herkennen meteen het probleem van het kortste pad. De *methode* noemen wij tegenwoordig algoritme. Wat was er zo merkwaardig aan deze prijsvraag? Antwoord: de oplossing. In nummer 4 wordt de volgende oplossing gegeven. *Kies een zijde en zoek een veelhoek waar deze zijde in voorkomt; vergelijk het getal bij de zijde met de som van de andere getallen in de veelhoek. Is het eerste getal groter dan het tweede, poets de gekozen kant dan weg. Herhaal dit proces totdat de figuur geen veelhoeken meer bevat.* Deze oplossing is evident incorrect. Men ziet snel dat op deze manier lang niet alle veelhoeken weggewerkt kunnen worden. Vreemd genoeg stond bij de oplossing wel een correcte figuur, **zie figuur 2**, met bij elk knooppunt de afstand tot punt A. In dit artikel zet ik uiteen welke vergissing vermoedelijk gemaakt is. Hier kan een aardig stukje grafentheorie aan vastgeknoopt worden.

Meetkunde is duizenden jaren oud, calculus honderden jaren, maar deze materie is slechts tientallen jaren oud.

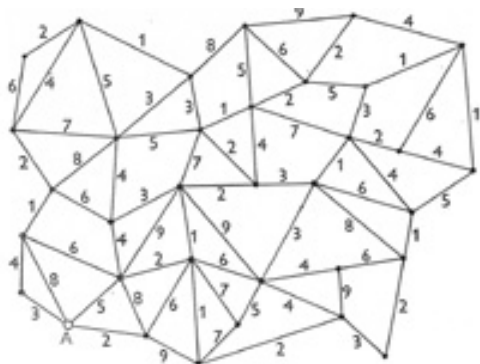
Twee klassieke problemen

We moeten eerst enkele begrippen preciseren. Een netwerk of graaf bestaat uit punten en lijnen, ofwel knopen en kanten. Een graaf heet samenhangend als elk tweetal knopen door een pad verbonden kan worden. Om de definities eenvoudig te houden, gaan we in dit artikel uit van samenhangende grafen. Een cykel is een gesloten veelhoek van kanten. Als men een aantal kanten verwijdert zodanig dat het overblijvende deel geen cycli bevat, maar wel nog samenhangend is, heeft men een opspannende boom. De vette lijnstukken in figuur 2 vormen, als eindresultaat van het kortstepadprobleem, een opspannende boom. Bij een gegeven graaf is in het algemeen meer dan één opspannende boom te construeren.

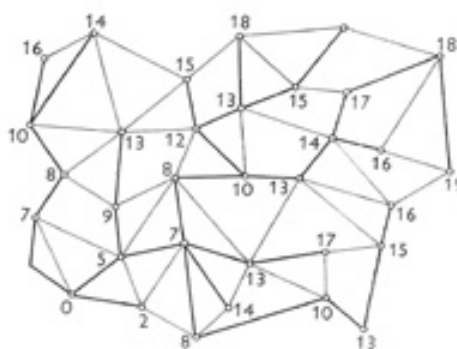
Men kan elke kant k een lengte $\ell(k)$ toekennen. Een *minimale* opspannende boom, kortweg MOB, is een opspannende boom waarvan de totale lengte van de kanten minimaal is.

De grafentheorie is een jonge tak van de wiskunde. Ofschoon Euler in 1736 met zijn Koningsberger bruggen het eerste grafentheoretische probleem formuleerde, dateren de meeste boeken van na 1960. Wiskunde D-scholieren kunnen terecht bij Broersma^[1] en Tijms^[2]. In een ander jong gebied, de informatica, is een groot aantal boeken verschenen over algoritmiek.

Toch zijn in deze jonge vakgebieden twee onderwerpen al klassiek te noemen: het probleem van het kortste pad en dat van de MOB. De prijsvraag betreft het kortstepadprobleem. Het algoritme van Dijkstra^[3] is hier



figuur 1



figuur 2

het bekendste; het is tevens de basis voor de moderne navigatiesoftware.

Vermoedelijk hebben de opstellers van de prijsvraag de twee problemen door elkaar gehaald. Zoals uit figuur 2 al bleek, is het eindresultaat van een kortstepad-algoritme ook een opspannende boom, maar meestal geen minimale. De oplossing die voor de prijsvraag gegeven werd, lijkt sterk op het volgende algoritme voor de MOB. *Poets in elke veelhoek de langste kant weg, totdat geen veelhoeken meer over zijn.* Een specifiekere versie luidt: *Bekijk de kanten op volgorde van hun lengtes van groot naar klein. Poets de aan de beurt zijnde kant k weg alleen als na wegpooetsen de resterende graaf samenhangend blijft (of ook: als k deel uitmaakt van een cykel).*

Algoritmen

In de meeste leerboeken zijn de algoritmen van de vorige paragraaf niet te vinden. Men treft er meestal het MOB-algoritme van Kruskal en dat van Prim aan. Deze zullen we in deze paragraaf behandelen, gevolgd door een verwant algoritme voor het kortste pad. Overal deze algoritmen is veel op internet te vinden: teksten, computerprogramma's, animaties, etc. Onze formuleringen zijn in termen van het kleuren van kanten. In plaats van wegpooetsen, kleuren we een kant rood. De kanten worden stap voor stap gekleurd. Het algoritme eindigt als alle kanten gekleurd zijn. De blauwe kanten vormen aan het einde een opspannende boom. We nemen verder steeds aan: *zodra een kant blauw gekleurd wordt, worden de aangrenzende knopen (voor zover nog niet gekleurd) ook blauw gekleurd.*

Het algoritme van Kruskal (1956) luidt als volgt. *Bekijk de kanten op volgorde van hun lengtes van klein naar groot. Kleur de aan de beurt zijnde kant k blauw als k met de reeds blauwe kanten geen cykel vormt; kleur k anders rood.*

Het algoritme van Prim (1957) luidt: *Kleur een willekeurige knoop blauw. Herhaal de volgende stappen. Beschouw de verzameling K van ongekleurde kanten grenzend aan een blauwe knoop. De kanten van K die aan het andere uiteinde uitkomen op een blauwe knoop, worden rood gekleurd. Van de kanten in K die uitkomen op een ongekleurde knoop, wordt de kortste kant blauw gekleurd.*

In het algoritme van Kruskal gaat men kriskras door de graaf heen, terwijl bij Prim het blauwe gedeelte zich als een olievlek uitbreidt. Het algoritme van Prim is het eenvoudigst te programmeren omdat het zoeken naar cyclen daar niet nodig is.

We maken nu een uitstapje naar het kortstepadprobleem, waar zoals gezegd Dijkstra de boventoon voert. Het eindresultaat van dit algoritme is weer een opspannende boom, echter niet noodzakelijk minimaal. Voor de graaf van de prijsvraag is deze boom is te zien in figuur 2. Dijkstra's algoritme luidt als volgt. *Kleur beginpunt A blauw. Herhaal de volgende stappen. Beschouw de verzameling K van ongekleurde kanten grenzend aan een blauwe knoop. De kanten van K die aan het andere uiteinde uitkomen op een blauwe knoop, worden rood gekleurd. Van de kanten k in K die uitkomen op een ongekleurde knoop, wordt de afstand van die knoop via k tot A bepaald. De kant waarbij de kortste afstand gevonden wordt, wordt blauw gekleurd.* Omdat van de blauwe knopen de afstand tot A al bekend is, kan men de afstand van het ongekleurde uiteinde van een kant gemakkelijk bepalen.

De gelijkenis tussen Prim en Dijkstra laat opnieuw zien dat het kortste pad en de MOB verwante problemen zijn. Vanwege deze gelijkenis lichten we ze toe met een voorbeeld. *Zie figuur 3*, waar de lengtes tussen de haakjes staan. Stel $\ell(c) = 4$. We nemen A als beginknoop voor beide algoritmen. Prim kleurt achtereenvolgens a , c en d blauw; ten slotte wordt b rood

gekleurd. Dijkstra kleurt eerst a . Dan is $K = \{b, c\}$. De afstanden bij C en D zijn respectievelijk 9 en 4. Derhalve wordt kant c blauw gekleurd en dan is $K = \{b, d\}$. Bij B ontstaat door b de afstand 9 en door d de afstand 10. Kant b wordt dus blauw en kant d wordt rood gekleurd.

Stel nu $\ell(c) = 8$. Dijkstra kleurt de kanten in dezelfde volgorde met dezelfde kleuren. Prim kleurt achtereenvolgens a , b en d blauw en c rood.

Unificatie door dualiteit

We hebben inmiddels vier MOB-algoritmen gezien. Deze zijn alle bijzondere gevallen van het Blauw-rood-algoritme van Tarjan (1983). Een belangrijke rol daarin speelt het begrip *sne*. Een sne S is een verzameling van kanten met de eigenschap: na verwijdering van de kanten van S uit de graaf, is de graaf on samenhangend. Bovendien geldt voor een sne dat deze zo klein mogelijk gehouden wordt, dus kanten die niet nodig zijn om de samenhang te doorbreken, worden niet tot de sne gerekend. In figuur 3 vormt $\{c, d\}$ een sne, want na verwijdering wordt punt D geïsoleerd. Ook $\{b, c\}$ is een sne, want na verwijdering zijn A en B niet meer met C en D verbonden. Het Blauw-rood-algoritme luidt als volgt.

EEN FORMEEL BEWIJS VAN HET
BLAUW-ROOD-ALGORITME IS
TE VINDEN OP DE WEBSITE
VAN EUCLIDES

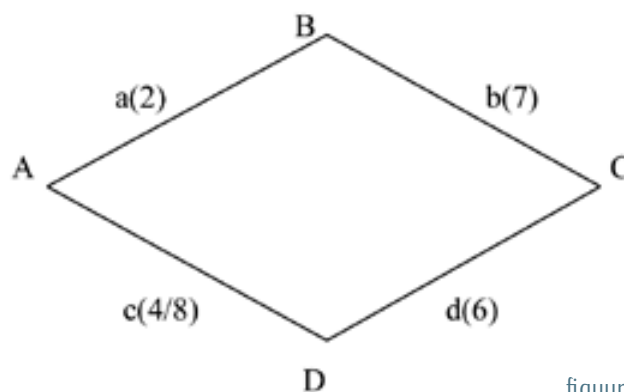
Blauw-rood-algoritme.

Herhaal in willekeurige volgorde de volgende stappen.

Blauwe stap: zoek een snede S met een ongekleurde kant maar zonder blauwe kanten. Kleur de kortste ongekleurde kant van S blauw.

Rode stap: zoek een cykel C met een ongekleurde kant maar zonder rode kanten. Kleur de langste ongekleurde kant van C rood.

Opvallend is de symmetrische rol van cykel en snede. We zeggen dat cykel en snede duale begrippen zijn. Deze dualiteit is als volgt te verklaren. Bij een gegeven opspannende boom noemen we de verzameling van kanten die *niet* in die boom optreden, een *vulling*. Omdat er in het algemeen meerdere opspannende bomen mogelijk zijn, zijn er ook meerdere vullingen mogelijk. Een boom is zoals bekend cykelvrij. De duale bewering is dat een vulling snedevrij is, want zijn complement, een opspannende boom, is samenhangend. Elke cykel C heeft een niet-lege doorsnede met elke vulling, want anders zou C deel zijn van een cykelvrije opspannende boom. Elke snede S heeft een niet-lege doorsnede met een opspannende boom, want anders zou S deel zijn van een snedevrije vulling. De cyclen worden derhalve gebruikt om een vulling te construeren; de snedes worden gebruikt voor een opspannende boom. Een formeel bewijs van het Blauw-rood-algoritme is te vinden op de website van *Euclides* (www.vakbladeuclides.nl/892pijls). Er wordt bewezen dat aan het einde de blauwe kanten een MOB vormen en dat de rode kanten een vulling van maximale lengte vormen. Ook wordt bewezen dat het algoritme niet 'vastloopt', dus zolang er ongekleurde



kanten zijn, kan een snede S of een cykel C met de gevraagde kenmerken gevonden worden. Het bewijs bestaat uit twee stellingen die dankzij de dualiteit slechts 'voor de helft' bewezen hoeven te worden. In veel literatuur, bijvoorbeeld Dijkstra, wordt deze dualiteit overigens niet uitgebuit.

Literatuur

- [1] Broersma, H. (2002). *Grafen in de praktijk*, Zebra-reeks nr. 14, Epsilon-uitgaven.
- [2] Tijms, H. *Optimalisatie in Netwerken*, www.epsilon-uitgaven.nl/wiskunded.php.
- [3] E.W. Dijkstra Archive, item 1273 (het vrijwel volledige oeuvre van Dijkstra), www.cs.utexas.edu/~EWD/

Over de auteur

Wim Pijs werkte van 1973 tot 1984 als docent wiskunde aan de Lerarenopleiding Zuidwest-Nederland (thans Hogeschool Rotterdam). Van 1984 tot 2011 was hij docent informatica aan de Erasmus Universiteit Rotterdam. Inmiddels is hij met pensioen.
E-mailadres: pijs@ese.eur.nl

KLEINTJE DIDACTIEK

HYPOTHESE TOETSEN

Doelgroep: vwo wiskunde A

Bij het toetsen van hypothesen weten leerlingen vaak niet wat ze moeten kiezen voor de nulhypothese en de alternatieve hypothese. Nadat de leerlingen eerst enkele opgaven zelf hebben gemaakt – al dan niet met klassikale of individuele begeleiding van mij – zet ik op het bord het volgende rijtje:

H_0 :	$\mu =$	$p =$
H_1 :	$\mu \neq$	$p \neq$
	$\mu >$	$p >$
	$\mu <$	$p <$

De eerste vraag aan de leerlingen is dan hoe je kunt bepalen welke toets je moet nemen: de normale toets of de binomiale toets? Welke gegevens in de context bepalen dit? Als eenmaal is vastgesteld welk rijtje we moeten hebben (normale toets dan μ en binomiale toets dan p) is de tweede vraag welk getal er dan moet staan bij de nulhypothese H_0 ? Hoe weet je dat? De derde vraag is uiteraard wat de alternatieve hypothese H_1 is. De hamvraag is nu hoe je kunt bepalen of het ongelijk, groter dan of kleiner dan moet zijn.

Door deze vragen krijgen leerlingen inzicht in de gegevens die bepalen welke hypothese moet worden gekozen. Een inzicht dat ze niet of nauwelijks verwerven als ze alleen maar veel opgaven maken...

Lonneke Boels

YouTube staat vol met 'uitlegfilmpjes' over allerlei onderwerpen, inclusief video's over wiskunde. Iedereen kent Khan Academy waarschijnlijk. Deze video's zijn voor leerlingen handig ter ondersteuning van zelfstudie-lessen in de school, maar ook bij het maken van huiswerk. Uit onderzoek van Akkas, Hart en Ooms^[1] blijkt dat leerlingen bij het maken van huiswerk al vaak online zijn. Ze vragen hulp aan klasgenoten via ping, WhatsApp en/of chat. Het aanbieden van online video's kan dus goed aansluiten bij de manier waarop leerlingen tegenwoordig leren. Het enige wat ze nodig hebben, is een computer of smartphone met internetverbinding.

Na het zien van video's van Khan Academy, raakte ik geïnspireerd en ben ik mijn eigen video's gaan maken. Ik had destijds beperkte middelen, dus mijn eerste video's zagen er simpel uit. Met een videocamera zoomde ik in op een geruit blaadje waar ik vervolgens op schreef. Mijn hand was daarbij zichtbaar in beeld en met mijn stem loodste ik leerlingen door de video heen (*zie figuur 1*). Het resultaat werd positief ontvangen door zowel leerlingen als collega's en voor een paar weken vond ik het zo ook prima gaan.

Als onderdeel van het behalen van mijn eerstegraads bevoegdheid wiskunde besloot ik dieper in de wereld van instructievideo's te duiken. Ik was vooral benieuwd naar wat voor wiskundige video's er nog meer waren en hoe ik mijn eigen video's beter en mooier kon maken.

Onderzoek

Het aanbod aan Nederlandstalige video's was op dat moment nog beperkt (eind 2011), maar toch vond ik een aantal video's die op bepaalde punten flink van elkaar verschilden en soms juist overeenkomsten vertoonden. Maar welke video was nu eigenlijk de beste? Wat waren goede en minder goede kenmerken van die gevonden video's?

Om hier antwoord op te kunnen geven, heb ik individuele interviews afgenomen bij collega's en (examen)leerlingen havo/vwo. Ik liet ze een aantal video's zien en heb ze daarna naar hun mening gevraagd. Ook heb ik ontwerpers van video's gesproken, zodat alle kanten van het spectrum belicht werden.

De interviews waren gebaseerd op video's van Khan Academy^[2], Vincius te Amsterdam^[3] en het Hermann Wesselink College (HWC) te Amstelveen.^[4] *In figuur 2* staan respectievelijk van boven naar beneden drie kleine screenshots van de gebruikte video's.

Het analyseren van de afgenomen interviews leidde tot een aanbevolen kenmerkenlijst van instructievideo's.

Ik bespreek in het kort een aantal van die kenmerken, verdeeld over een paar hoofdcategorieën.

Lengte van een video

Hoe korter de video, hoe beter, maar je wilt uiteraard wel een verhaal kunnen vertellen. Dus als richtlijn kozen we een maximum van zeven minuten. Leerlingen die wiskunde B hebben, geven aan ook naar iets langere video's te kunnen kijken, maar veel langer dan tien minuten moet het echt niet duren.

Procedureel versus conceptueel

Video's met een overwegend procedurele inhoud zijn vooral voor leerlingen met wiskunde A/C bedoeld. Leerlingen met wiskunde B geven aan ook aandacht te willen voor de conceptuele kant (50%-50%). Voor iedereen geldt wel dat er echt één of twee voorbeeldsommen in de video moeten worden uitgewerkt, maar meer dan twee maakt de video weer te lang(dradig).

Stem van de spreker

Niet iedere stem is geschikt voor het inspreken van video's! Het is belangrijk dat de stem zo min mogelijk afleidt, dus probeer stopwoordjes en versprekingen te voorkomen. Verder horen leerlingen graag een vriendelijke stem. Ze willen aangesproken worden op een manier zoals in een normaal gesprek. De video van Vincius kreeg het verwijt dat de spreker zijn publiek te zakelijk toesprak.

Vormgeving

Leerlingen zien graag een combinatie van getypte en geschreven tekst in een video. De opgave moet altijd netjes zijn, dus getypt. De uitwerking moet worden geschreven. Zo zien leerlingen altijd de scheiding tussen vraag en uitwerking en tegelijkertijd kunnen zij eventueel in hetzelfde tempo meeschrijven met de uitwerking. Deze scheiding kan extra benadrukt worden door kleur-gebruik. De opgave en de uitwerking dienen niet in

dezelfde kleur in beeld te komen. Kleur maakt een video ook wat levendiger. Beperk je alleen wel tot een paar kleuren, anders komt het heel chaotisch over. De video van Khan Academy bevatte veel verschillende kleuren en dit werd negatief beoordeeld.

Verder dienen er geen overbodige zaken in beeld te staan. Als je iets niet gebruikt, moet je het ook niet kunnen zien, want anders leidt het alleen maar af. In de video van HWC was continu een kolom met informatie zichtbaar, zoals de naam van de school. Leerlingen en docenten gaven aan dat het niets toevoegt aan de inhoud van de video en daarom zou het achterwege moeten blijven. Bovendien werd hiermee de grootte van het schrijfvlak beperkt. Verder moet de informatie die in beeld komt, gedoseerd aangeboden worden. Dus niet meteen vanaf het begin een vol scherm, maar langzaam opbouwen.

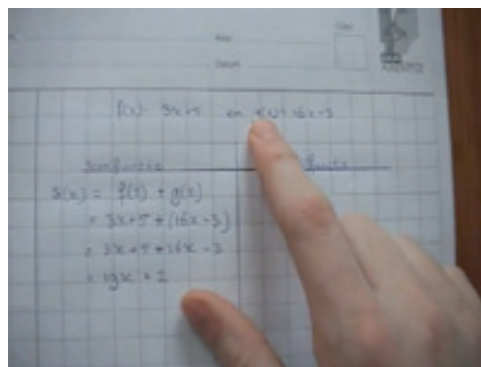
Tot slot willen leerlingen graag een persoon in beeld zien, omdat het een herkenbare situatie is. Echter, er worden dan wel eisen gesteld aan die docent. De belangrijkste is toch wel dat de leerling de docent aardig moet vinden. Is dit niet het geval, dan wil hij (preventief) niet meer naar de video kijken.

Ik heb niet de illusie dat iedere leerling mij aardig vindt en om toch zoveel mogelijk leerlingen te bereiken met mijn video's, concludeer ik dat een screencast de beste optie is. Een screencast is een opname van het computerscherm aangevuld met gesproken tekst, zoals de bovenste en de onderste video uit **figuur 2**. Deze manier van video's maken wordt overigens ook door de ondervraagden zeer gewaardeerd. Bijkomend voordeel van de screencast is dat het productieproces voor ontwerpers aanzienlijk wordt ingekort. Je hoeft bijvoorbeeld niet een nieuwe opname te maken als je even een raar gezicht trekt of iets dergelijks.

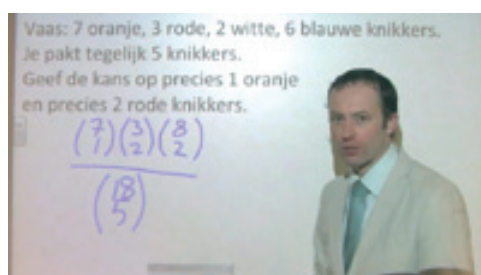
Zelf video's maken

Nu ik wist wat goede en minder goede kenmerken waren van een video, kon ik mijn eigen materiaal optimaliseren. Voor het maken van een screencast had ik echter wel nieuwe apparatuur en software nodig. Ik schrijf dus tegenwoordig met een Bamboo Pen (soort schrijftablet, zie **figuur 3**), die mijn handschrift naar het computerscherm vertaalt. Met behulp van het programma Camtasia film ik als het ware mijn computerscherm, terwijl ik met een headset de video van geluid voorzie. U kunt zich misschien wel voorstellen dat dit nieuwe productieproces in het begin erg wennen was en ook kon leiden tot enige frustratie van mijn kant.

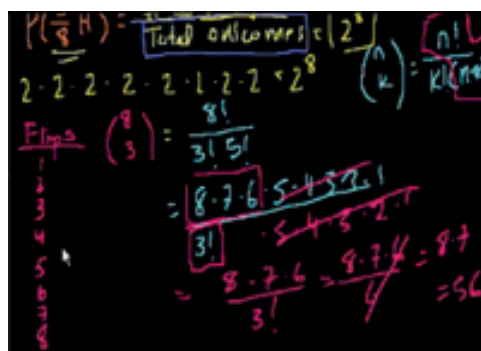
Al snel had ik het redelijk onder de knie en maakte ik dertien nieuwe video's op basis van de aanbevolen kenmerkenlijst. Deze video's zijn uitgetest door 55 leerlingen uit klas 3 vwo/gymnasium.



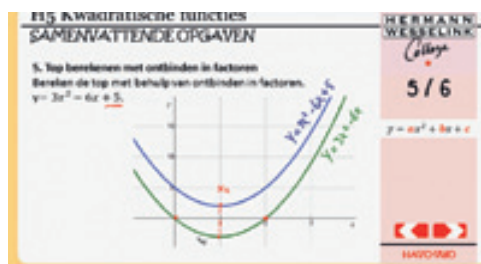
figuur 1



figuur 2a



figuur 2b



figuur 2c



figuur 3



De nieuwe TI-84 Plus C *Silver Edition*

Is nu beschikbaar, bestel 'm vast!

- Goedgekeurd door CVE voor Centraal Eindexamen h/v
- Met backlit kleurenscherm, oplaadbare batterij en lader
- Met Examenstand/Geheugen-blokkering
- Ook weer met TI-SmartView, maar nu met kleur! (vanaf juni)
- Gratis upgrade huidige zwart-wit SmartView naar kleur

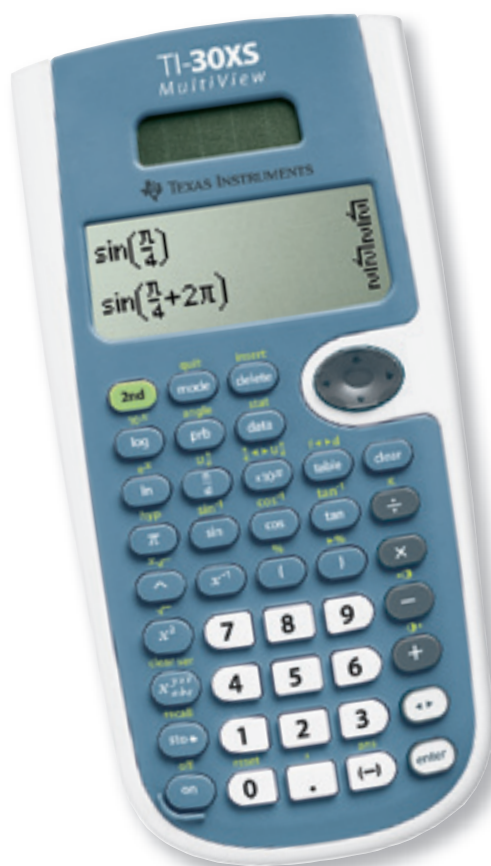
Zeer aantrekkelijke lerarenaanbieding
voor € 69,-. Met gratis TI-SmartView software voor
beamer of digibord.

Mail voor aanbiedingsformulieren en/of meer informatie naar

ti-cares@ti.com

Kijk ook op

www.education.ti.com/nederland



**Nieuw! Nu ook lerarenaanbieding voor
de wetenschappelijke rekenmachine
TI-30XS MultiView.**

**Machine + SmartView software voor projectie
met beamer of digibord
voor slechts € 20,-**

Evaluatie

Na evaluatie blijkt dat de kenmerkenlijst op het gebied van uiterlijke vormgeving en de stem van de spreker inderdaad valide is. Leerlingen bevestigen het nut van bijvoorbeeld kleurgebruik en de combinatie van getypte en geschreven tekst. Een vriendelijke stem op de achtergrond lijkt daarbij de beste keuze.

Wat ik persoonlijk een heel mooi resultaat vind, is dat leerlingen unaniem aangeven het gevoel te hebben echt iets van de video's te hebben geleerd! Ze willen ze volgend jaar graag weer tot hun beschikking hebben en geven het materiaal gemiddeld het cijfer 8 (met een lage standaarddeviatie). Leerlingen keken zowel op school als thuis naar de video's, bij het maken van huiswerk, maar vooral bij het leren voor de toets. Ook blijken video's handig in geval van (langdurige) ziekte. Doordat leerlingen thuis toch nog uitleg van de docent kunnen volgen, beperkt dit de achterstand die ze anders zouden oplopen.

Vervolgonderzoek

Anno 2013 zien we steeds meer instructievideo's op internet verschijnen; ook leerlingen kunnen ze op eigen initiatief vinden. Dus waarom zouden we instructievideo's niet integreren in onze lessen? Wat wordt dan eigenlijk de rol van video's in het onderwijs? Daarbij kunnen we ook kijken naar de veranderende rol van de docent. Geen docent meer als centrale uitlegger, maar meer een gespreksleider in een onderwijsleerdialoog. Je krijgt bijvoorbeeld de situatie dat leerlingen thuis een video bestuderen als huiswerk waar vervolgens in de les over wordt gesproken; er volgt dan verwerking en verdieping van de stof. Dit wordt 'flipping the classroom' genoemd en is momenteel onderwerp van meerdere onderzoeken. Zal deze manier van onderwijs leiden tot (significant) betere resultaten? Zal deze nieuwe werkvorm bijdragen aan motivatie voor het vak?

Tot slot

Video's helpen leerlingen dus bij het maken van huiswerk en het leren voor de toets. Zieke leerlingen hebben er ook profijt van, omdat zij thuis toch nog het een en ander kunnen volgen en zo de achterstand kunnen beperken. Maar ik zie ook zeker nut voor leerlingen die juist voorlopen op de rest; leerlingen die al verder in het hoofdstuk zijn of 'gewoon' meer willen weten over bepaalde onderwerpen. Klassikale uitleg gaat vaak uit van de gemiddelde leerling en voldoet dus niet voor de hoogvliegers. Met video's kun je ook tempodifferentiatie realiseren in en buiten de les.

Ik kan me voorstellen dat niet iedereen zich bezig zal (willen) houden met het produceren van instructievideo's. Dat is begrijpelijk, het kost tijd en moeite. Gelukkig ligt er al veel materiaal voor het grijpen. Kijk eens rond op YouTube, misschien ziet u iets interessants voor in de les!

Bovendien kunnen enkele van mijn onderzoeksresultaten ook zonder video's in de les geïntegreerd worden. Het feit dat leerlingen graag een getypte opdracht zien met een geschreven uitwerking, is uitvoerbaar voor docenten die beschikken over een digitaal bord. Hetzelfde geldt voor het verschil in kleur tussen opgave en uitwerking en het uitwerken van een voorbeeldopgave. Hilbert e.a.^[5] concluderen dat docenten vaak slechts één voorbeeld gebruiken, terwijl het leereffect juist groter wordt bij meer voorbeelden. Leerlingen geven aan dat teveel voorbeelden uitwerken teveel tijd kost, maar twee opgaven is zeker aan te raden.

Info

Enkele oude en nieuwe video's van mij zijn te zien op www.youtube.com/jawiskunde

Mijn onderzoek is te downloaden via <http://hva.academia.edu/MikaelFlens>

Noten en referenties

- [1] Akkas, H., Hart, M. & Ooms, S. (2011). *Huiswerk; O ja, dat moet ook nog @!* (Thesis, Universiteit Utrecht, 2011)
- [2] Video's Khan Academy: www.khanacademy.org/
- [3] Video's Vincius: www.vincius.nl/videoles.html
- [4] Video's Hermann Wesselink College: www.wiskundezonderboek.nl/materiaal/videos/
- [5] Hilbert, T. S., Renkl, A., Schworm, S., Kessler, S., & Reiss, K. (2007). Learning to teach with worked-out examples: a computer-based learning environment for teachers. *Journal of Computer Assisted Learning*, 24(4), 316–332.

Over de auteur

Mikaël Flens is docent wiskunde aan het Zaanlands Lyceum te Zaandam. E-mailadres: m.flens@zaanlands.nl



WEBSITE

WWF BESTAAT 20 JAAR

Het Wereldwiskunde Fonds bestaat 20 jaar. Geen schokkend wereldnieuws, maar wel een mijlpaal. Naar aanleiding daar van een interview met twee (oud-) voorzitters van het Wereldwiskunde Fonds, oprichter en tevens eerste voorzitter, Hans Wisbrun en de huidige voorzitter Sjaak Schoen die binnenkort stopt. U vindt dit interview op vakbladeuclides.nl/892wwf.

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreek ik opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.

Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het VWO gemaakt moeten kunnen worden. Wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A^o 1931

Deze keer een relatief lastige opgave uit 1931, die we op twee manieren gaan oplossen. Er is een flinke portie goniöformules nodig, met name met tangensgebruik. Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.

Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

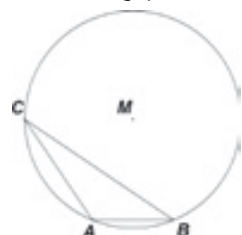
Opgave

Van $\triangle ABC$ is gegeven $A - B = 90^\circ$. Bewijs, dat de afstand van het middelpunt van de omschreven cirkel tot de zijde AB gelijk is aan h_c .

Bereken de hoeken van die driehoek ABC , waarvoor $\frac{Opp}{R^2}$ maximaal is en bepaal dit maximum. (R is de straal van de omschreven cirkel)

Opmerking: $A - B = 90^\circ$ betekent $\angle A - \angle B = 90^\circ$, en h_c is de lengte van de hoogtelijn vanuit C .

Uitwerking (eerste deel)



Wellicht enige handvaten bij deze werkschets:

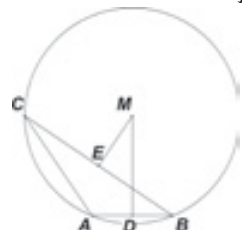
We moeten (dus) bewijzen dat $CM \parallel AB$.

Je kunt overwegen er middelloodlijnen van de zijden van de driehoek bij te halen. Deze gaan immers door M .

Wilt u het zelf eerst eens proberen?

Een analytische aanpak

Trek de middelloodlijnen MD en ME .



We introduceren een assenstelsel waarvan AB de horizontale en MD de verticale as is. Stel ook $AD = BD = 1$.

Lijn AC heeft richtingscoëfficiënt $\tan(90^\circ + \beta)$ en gaat door $A(-1,0)$.

Lijn BC heeft richtingscoëfficiënt $\tan(180^\circ - \beta)$ en gaat door $B(1,0)$.

Nu kunnen de y -coördinaten van C en M worden uitgedrukt in β . Wanneer deze uitdrukkingen gelijk(waardig) zijn, is het eerste deel van de opgave bewezen.

Wilt u het zelf eerst eens proberen?

Mijn uitwerking

Het is relatief eenvoudig, om af te leiden dat

$$\tan(90^\circ + \beta) = \frac{-1}{\tan \beta} \text{ en } \tan(180^\circ - \beta) = -\tan \beta.$$

Dat hebben we zo dadelijk nodig.

Lijnvergelijkingen:

$$AC: y = \tan(90^\circ + \beta)(x + 1) = \frac{-1}{\tan \beta} \cdot (x + 1)$$

$$BC: y = \tan(180^\circ - \beta)(x - 1) = -\tan \beta \cdot (x - 1)$$

$$\text{Gelijkstellen geeft: } \frac{x + 1}{-\tan \beta} = \frac{-\tan \beta}{x + 1},$$

$$\text{dus } x^2 - 1 = \tan^2 \beta.$$

$$\text{Dus } x_c = -\sqrt{1 + \tan^2 \beta} = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \beta}} = -\frac{1}{\cos \beta}$$

$$\text{Dan is } y_c = -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \left(-\frac{1}{\cos \beta} + 1 \right) = -\frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta},$$

$$\text{dus } C = \left(-\frac{1}{\cos \beta}, \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} \right)$$

$$E \text{ is het midden van } BC, \text{ dus } E = \left(\frac{\cos \beta - 1}{2 \cos \beta}, \frac{1 - \cos \beta}{2 \sin \beta} \right)$$

Dus heeft EM vergelijking

$$y = -\frac{1 - \cos \beta}{2 \sin \beta} = \frac{1}{\tan \beta} \left(x - \frac{\cos \beta - 1}{2 \cos \beta} \right)$$

Snijden met de y -as geeft

$$y_M = -\frac{1 - \cos \beta}{2 \sin \beta} = \frac{\cos \beta - 1}{2 \sin \beta} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta}$$

Dus ligt M even hoog als C .

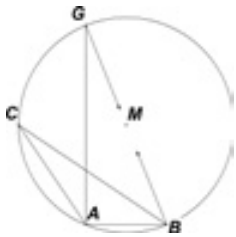
Q.E.D.

Een meetkundige aanpak

Trek een verticale lijn door A , die de cirkel snijdt in G .

Dan lijkt het erop dat M op BG ligt. Zou dat zo zijn?

Gaan we nu ook middelloodlijnen trekken?

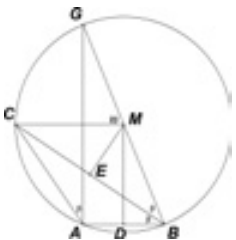


Wilt u het zelf eerst eens proberen?

Mijn uitwerking

M ligt inderdaad op BG , omdat omtrekshoek

$\angle BAG = 90^\circ$, dus BG is middellijn (stelling van Thales).



$\angle CAG = \beta$ en $\angle CAG = \angle CBG$ (beide op boog CG), dus ook $\angle CBG = \beta$, dus $\angle ABG = 2\beta$.

De stelling van de omtrekshoek zegt dat $\angle CMG = 2 \cdot \angle CBG = 2\beta$, zodat $CM \parallel AB$ (F -hoeken). Q.E.D.

Elegant, uiterst kort, in schril contrast met de analytische manier. Opvallend natuurlijk wel, dat deze opgave werd gepresenteerd binnen het examen trigonometrie en analytische meetkunde.

Resteert het zoeken naar de maximale waarde van

$$\frac{\text{Opp}_{\triangle ABC}}{R^2}. \text{ Wilt u het zelf eerst eens proberen?}$$

Uitwerking (tweede deel)

De oppervlakte van $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \tan 2\beta = \tan 2\beta$

$$\text{en } R^2 = MB^2 = 1^2 + (\tan 2\beta)^2 = \frac{1}{\cos^2 2\beta}, \text{ dus}$$

$$\frac{\text{Opp}_{\triangle ABC}}{R^2} = \frac{\tan 2\beta}{\frac{1}{\cos^2 2\beta}} = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} \cdot \cos^2 2\beta = \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = \frac{1}{2} \sin 4\beta$$

met $0 < \beta < 90^\circ$.

Deze functie is maximaal $\frac{1}{2}$ als $4\beta = 90^\circ$, dus als $\beta = 22,5^\circ$.

Dan zijn $\alpha = 112,5^\circ$ en $\gamma = 45^\circ$.

Maar natuurlijk kan ook de functie $\frac{\tan 2\beta}{1 + \tan^2 2\beta}$

worden gedifferentieerd. Handig is in dat geval om $\tan 2\beta = p$ te stellen waardoor het maximum van de

functie $f(p) = \frac{p}{1 + p^2}$ moet worden bepaald. Aangezien

$$f'(p) = \frac{1 - p^2}{(1 + p^2)^2} \quad (\text{met } p > 0) \text{ wordt het maximum}$$

gevonden bij $p = \tan 2\beta = 1$, dus $2\beta = 45^\circ$, enzovoort.

Alternatief, zonder gonio:

De oppervlakte van

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot MD \wedge R^2 = MB^2 = MD^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Opp}_{\triangle ABC}}{R^2} = \frac{MD}{MD^2 + 1}$$

en zoek het maximum van deze functie van MD .

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G. & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

WISKUNDE DIGITAAL

TANZEN, ZENTOMINO EN TRIZEN

Geschikt voor: iPhone, iPad

In het vorige nummer schreef ik over een game die in de onder- en bovenbouw bruikbaar is als voorbereiding op wiskunde A. Ditmaal een game die in de onderbouw kan worden gebruikt om het meetkundig inzicht en begrip te vergroten en patroonherkenning te versterken en daarmee voor te bereiden op wiskunde B maar ook op wiskunde C in het nieuwe examenprogramma. In Tanzen leg je tangrammen in allerlei mogelijke vormen. De figuren zijn enigszins oplopend in moeilijkheidsgraad en er zijn er vijftien per pagina. Er zijn meer dan honderden figuren die je in deze app kunt leggen voordat je hem hebt uitgespeeld.

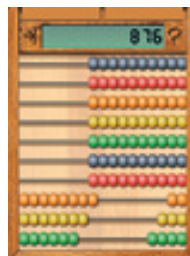


figuur 1 Op één pagina staan vijftien figuren en elk 'rondje' is één pagina

Het spel is simpel en eenvoudig te begrijpen en te bedienen. De bediening gaat via eenmaal aantikken en dan schuiven. Randon de tangramsteen verschijnt een cirkel en als je daarop je vinger legt, kun je de figuur draaien. Tweemaal aantikken zorgt dat de steen 'flipt' oftewel: de onderkant komt boven te liggen. Het enige wat mis kan gaan is dat de gelegde figuur niet binnen de grijze arcering valt en dan wordt een goede oplossing niet 'goed' gerekend terwijl hij dat wel is. Verschuiven van de stenen tot ze binnen de grijze lijnen liggen, is dan de oplossing.

Het spel geeft desgevraagd hints, maar lost de puzzel niet voor je op. Bij de 'help' zit wel een voorbeeldpuzzel die helemaal wordt opgelost.

Van dit spel zijn nog twee andere varianten beschikbaar die iets minder figuren kennen maar wel weer nieuwe uitdagingen geven: Zentomino en TriZen. Bij Zentomino worden pentomino's in vormen gelegd. Er zijn 12 verschillende pentomino's maar in de eerste spellen worden er maar vier of vijf gebruikt om de te leggen figuur nog eenvoudig te houden. Bij deze variant is er wel duidelijk een opbouw in moeilijkheidsgraad zichtbaar, al blijft dat natuurlijk ook enigszins afhankelijk van of je de oplossing ziet of niet. Bij TriZen zijn de puzzelstukjes opgebouwd uit vier, vijf of zes gelijkzijdige driehoeken. Nog een leuk grapje in het spel: leg de puzzelstukjes willekeurig (niet overlappend) neer en schud eens flink hard met de tablet. Werkt niet bij TriZen.



Pluspunten

- je kunt pauzeren (als je de app verlaat, ga je bij terugkomst verder waar je gebleven was);
- hints zijn mogelijk;
- het is een echt spel;
- het is ook echte wiskunde;
- er zijn verschillende niveaus;
- als je een pagina vol hebt, komen er extra functies beschikbaar;
- er zijn zoveel varianten dat het uitspelen heel lang zal duren;
- je kunt een gelegde figuur 'resetten' om bijvoorbeeld een tweede leerling de oplossing te laten vinden;
- het kan leerlingen ondersteunen om sneller driehoeken te ontdekken in wiskundige figuren (bijvoorbeeld voor het berekenen van hoeken en lijnstukken in de onderbouw of voor het vinden van driehoeken in bewijsopgaven in de bovenbouw wiskunde B).

Minpunt

De taal en uitleg zijn in het Engels.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten € 4,49 per onderdeel

Geschikt voor: vmbo, havo, vwo, vermoedelijk alle niveaus.

Meer informatie over het spel:

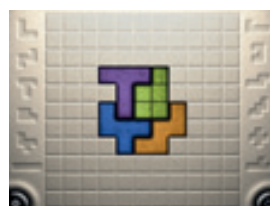
www.LittleWhiteBearStudios.com



figuur 2 Als je een pagina vol hebt, komt er een nieuwe 'huid' beschikbaar voor de poppetjes. Deze is niet alleen anders van kleur, maar ook van structuur.



figuur 3 Een pagina met figuren uit TriZen



figuur 4 De beginnersfiguur van Zentomino

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

UITDAGENDE PROBLEMEN

EEN EI HOORT ERBIJ

Met dit artikel kunnen vooral B-leerlingen uit de vwo-examenklas worden uitgedaagd. We berekenen inhouden van een ei, een wig en de doorsnede van twee cilinders. Maar is hierbij integreren altijd nodig?

Een ei hoort erbij. Vindt u niet? In ieder geval was dat de mening van de examenmakers van examen wiskunde B VWO 2013 eerste tijdvak. Zie de opgave **in figuur 2**.

De inhoud van het ei blijkt ongeveer 61cm^3 te zijn, maar ligt die inhoud wel zo eenduidig vast? De examenmakers veronderstellen dat de leerlingen de grafiek van f zullen wentelen om de x -as en dat zal bij de leerlingen inderdaad wel goed gaan. Maar wentelen om een verticale as had ook gekund, al ligt die as wat minder voor de hand, omdat de gegeven functie niet symmetrisch is ten opzichte van de y -as. Maar de examenopgave deed mij denken aan een ingelaste les in 6 VWO B van een paar jaar geleden. Ik was met de leerlingen bezig met het onderwerp 'omwentelingslichamen'. Ik deed dat met het leggen van een ei, maar wel een gekunsteld ei: *de ellipsoïde*. Je kiest een geschikte ellips in het assenstelsel en gaat die wentelen om de x -as en vervolgens uit de oorspronkelijke situatie om de y -as. Zal de inhoud van het ei groter of juist kleiner zijn? Of maakt het niets uit? Gaat u maar eens even na.

Leerlingen aan de slag

Met mijn B-leerlingen had ik al eerder de vorm van een ei bekeken. Ik koos voor een symmetrische vorm geïnspireerd door het HEWET-boekje *Lessen in Ruimte meetkunde 2*.^[1]

Onderzoeksoopdracht bij hoofdstuk 6 Moderne Wiskunde VWO 6 wiskunde B

Doel: inhouden berekenen van omwentelingslichamen. Vaak wordt gezegd dat een kippenei ovaalvormig is. Bekijken we echter een willekeurig ei dan zien we een spitse kant en een wat bollere kant. We gaan de werkelijkheid een beetje geweld aan doen en benaderen de omtrek van een ei met de volgende ellips:

$$x^2 + 2y^2 = 9.$$

Door deze ellips te wentelen om de x - of om de y -as, ontstaat een ruimtelijke figuur die we ellipsoïde noemen. Deze ellipsoïde doet denken aan een ei, echter een ei dat je niet bij je supermarkt zult vinden.

Jacques Jansen

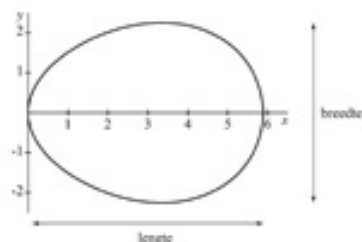


figuur 1 Ei met een T-stukje

Een eivorm

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{87x - 3x^2 - 2x^3}$. In figuur 1 is de grafiek van f getekend en ook het spiegelbeeld hiervan in de x -as. De twee grafieken vormen samen een figuur die lijkt op een doorsnede van een ei.

figuur 1



Op de x -as en de y -as is de eenheid 1 cm. In figuur 1 is aangegeven wat bedoeld wordt met de lengte en de breedte van het ei. De lengte van het ei is ongeveer 5,9 cm.

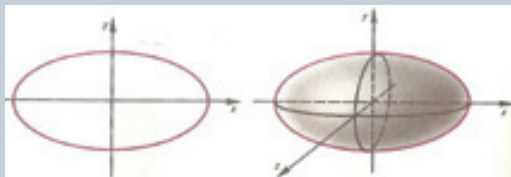
- 40 11 Bereken op algebraïsche wijze de lengte van het ei in cm. Rond je antwoord af op twee decimalen.

figuur 2 Uit: vwo B 2013 (Een eivorm)

De kernvraag is: welke ellipsoïde heeft de grootste inhoud? Of maakt het helemaal niets uit?

1. Schrijf een vermoeden op. Geef daarbij een mogelijke argumentatie.

Zie hieronder twee schetsen.



figuur 3

2. Bereken de breedte en hoogte van het ei.
3. Bereken de inhoud van het ei door de ellips $x^2 + 2y^2 = 9$ te wentelen om de x -as.
4. Bereken de inhoud van het ei door de ellips $x^2 + 2y^2 = 9$ te wentelen om de y -as.
5. Beantwoord de kernvraag.

Elk jaar opnieuw zijn er veel leerlingen die denken dat het niets uitmaakt. Interessant om aan de leerlingen te vragen waarom het niets zou uitmaken. Hierbij speelt de symmetrie van de ellips een belangrijke rol. Het is grappig om op het bord een overzicht te maken van de vermoedens inclusief de namen van de leerlingen. Na zo'n discussie gaan de leerlingen meestal gemotiveerd aan de slag met de andere vragen. Dat de opgave geen eitje is, blijkt meestal wel bij vraag 4. Toch is er gelukkig altijd wel een leerling die met behulp van de integraal

$$2 \cdot \int_0^{\sqrt{4,5}} \pi(9 - 2x^2) dx \text{ snel tot de juiste conclusie komt.}$$

Wentelen om de x -as, bij vraag 3, geeft een inhoud van 18π , maar wentelen om de y -as, bij vraag 4, geeft een inhoud die $\sqrt{2}$ maal zo groot is.

Voor veel leerlingen is dit een verrassing. De vraag is dan ook: kun je dit vooraf al vermoeden? We doen dan een beroep op het ruimtelijk inzicht en het toepassen van de Riemannsom. In de klas ontstaat vaak een leuke brainstorming. En dan is het nog de kunst om ook die factor $\sqrt{2}$ te verklaren. Is dat mogelijk? (Een mogelijke uitwerking hiervan vindt u op de *Euclides*-website: www.vakbladeuclides.nl/892jansen).

Kussentje

In het boek *Lessen in Ruimte meetkunde 2* staat nog een ander interessant probleem. Hiermee daag ik mijn leerlingen ook uit.

Twee cilinders met dezelfde straal (r) zijn zo geplaatst dat de assen elkaar loodrecht snijden.

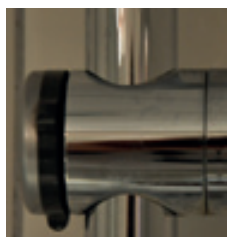
Bereken de inhoud van het deel van de ruimte (K) dat binnen allebei de cilinders ligt.



figuur 4

Het is raadzaam om de tekening nog niet aan de leerlingen te laten zien; wel twee even grote closetrolletjes. Veel leerlingen menen dat de doorsnede een bol is met straal r . Dat is handig voor straks.

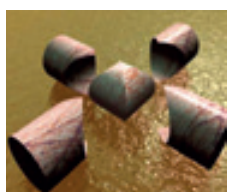
Douchecabine



figuur 5

Waarschijnlijk ziet u elke dag in de doucheruimte de ophangbeugel van de doucheslang. Hier gaat het om een doorsnede van twee cilinders van verschillende diameters. Bij dezelfde diameters zullen de tegenover elkaar liggende krommen elkaar raken en krijgen we de vorm van een kussentje.

Boterbabbelaar



figuur 6

Dick Klingens werd geïnspireerd door de doorsnijding. Hij zag er een boterbabbelaar (kokinje) in.^[2]

Leerlingen krijgen bij *Moderne Wiskunde* bij het berekenen van inhoud van ruimtelijke lichamen het volgende stappenplan aangereikt:

- Teken in de figuur de doorsnede op een willekeurige hoogte, evenwijdig aan het grondvlak.
- Kies als variabele de afstand van de doorsnede tot de onder- of bovenkant van de figuur.
- Druk de oppervlakte van de doorsnede uit in deze variabele.
- Stel de integraal op voor de inhoud van de figuur en bereken hiermee de inhoud.

Vaak moet je de leerlingen toch even helpen bij het plaatsen van een assenstelsel. Het is handig om de oorsprong te kiezen in het midden van het bedoelde ruimtedeel, een soort kussentje. De doorsnede van K met een horizontaal vlak op een afstand x van O , is

een vierkant met zijde $2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ (tip: teken het bovenaanzicht van de twee cilinders om een idee te krijgen van de vorm van de doorsnede). De inhoud van

$$K \text{ is dus } 2 \cdot \int_0^r 4(r^2 - x^2)dx = \frac{16}{3} \cdot r^3. \text{ Opmerkelijk is}$$

dat in de inhoud van een cilinder het getal π voorkomt, terwijl dat dus niet het geval is bij de inhoud van deze doorsnede van twee cilinders.^[2]

Principe van Cavalieri

Een andere oplossing voor hetzelfde probleem is gebaseerd op het *Principe van Cavalieri* en kun je de leerlingen eigenlijk niet onthouden. Maar wat was dat Principe van Cavalieri precies?

Francesco Bonaventura Cavalieri (1598 of eerder - Bologna, 1647) was een Italiaans wiskundige, natuurkundige, sterrenkundige en astroloog. Hij werd bekend om zijn nieuwe methoden ter berekening van inhoud en oppervlakken, zoals het Principe van Cavalieri. Hij bereidde hiermee de infinitesimaalrekening voor.

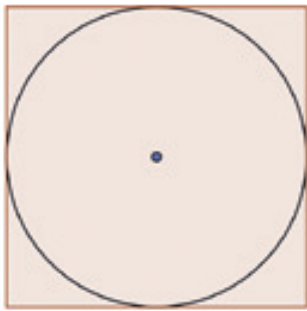
Twee ruimtelijke figuren hebben dezelfde inhoud als op elke hoogte de dwarsdoorsnede een even grote oppervlakte heeft. Zie de twee stapels cd-doosjes in **figuur 7 en figuur 8**. Bij de ene stapeling zijn de doosjes precies op elkaar gepast. Bij de andere stapeling zijn de doosjes verschoven. De ruimtelijke objecten hebben toch dezelfde inhoud.



figuur 7



figuur 8



figuur 9

In het kussentje plaatsen we de al eerder genoemde bol met straal r . Het vlak bepaald door de assen van de cilinders noemen we V . We snijden het kussentje en de bol met vlakken die evenwijdig zijn aan V . Zo'n vlak snijdt het kussentje volgens een vierkant (zoals eerder gezien) en de bol volgens een cirkel. De cirkel raakt hierbij bovendien precies aan het vierkant. **Zie figuur 9.** De verhouding van de oppervlaktes van het vierkant en de ingeschreven cirkel is steeds $4 : \pi$.

De inhoud van het kussentje K is dus volgens het

Principe van Cavalieri $\frac{4}{\pi}$ maal de inhoud van een bol met straal r en dat geeft $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{16}{3} \cdot r^3$.

Oefening van het principe met de Wig van Wallis

U kent vast wel het spel driekantje. Mijn kleindochter oefent op zachte aandrang van opa al met de drie aanzichten van het driekantje: cirkel, vierkant en gelijkbenige driehoek. Op de jaarlijkse verenigingsdag heeft u vast het kraampje gezien met veel houten modellen, **zie figuur 10 en figuur 11**. We kunnen nu zelf zo'n object met de drie genoemde aanzichten maken als *regeloppervlak*. Een regeloppervlak is een oppervlak waarbij door elk punt van het oppervlak minstens één rechte – een *beschrijvende* of *regel* – gaat die volledig tot het oppervlak behoort. Bekende voorbeelden zijn de kegel en de cilinder. Maar ook het driekantje is er een, **zie figuur 12**.^[3]

- Neem in een XOY -assenstelsel een cirkel met O als middelpunt en diameter d .
- Zet loodrecht op deze cirkel een vierkant $ABCD$ (in het XOZ -vlak) met $AB = d$. Zijde AB ligt dus op de X -as.
- We bekijken vervolgens vlakken loodrecht op AB , die CD in P en de cirkel in Q en R snijden. Nu zijn Q en R dus variabele punten en de lijnstukken PQ en PR worden beschrijvende genoemd. Deze beschrijvende vormen samen de mantel.

Dit ruimtelijk lichaam wordt de Wig van Wallis genoemd. John Wallis was een Britse wiskundige (1616-1703). We gaan de inhoud van de wig uitrekenen. Voor het gemak nemen we $d = 2$. Het berekenen van de inhoud kan zowel met een integraal als met behulp van het Principe van Cavalieri.

Het verticale vlak op afstand x van YOZ -vlak geeft een doorsnijing $\triangle QRP$ waarvan de oppervlakte gelijk is

aan $2 \cdot \sqrt{1 - x^2}$. Gaat u maar na dat de inhoud van de wig nu $4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ is. Deze integraal heeft niet

zo'n leuke integrand. Maar met behulp van de grafische rekenmachine krijgen we een benadering op twee decimalen van 3,14. Hopelijk bent u niet tevreden met dit antwoord en heeft u een vermoeden. Dat vermoeden kunt u met behulp van het Principe van Cavalieri exact aantonen. Ga uw gang! Tip: kies een geschikte cilinder. Misschien is het een idee om in uw leerboek eens na te gaan welke opgaven geschikt zijn voor het toepassen van het Principe van Cavalieri.

In een volgend artikel gaan we het cilinderprobleem uitbreiden tot drie cilinders. Een leerling ontwierp een mooie tekening hierbij; die ziet u de volgende keer.

Noten en referenties

- [1] Kindt, M., & de Lange, J. (1986). *Lessen in Ruimte meetkunde 2*. Educaboek.
- [2] www.pandd.demon.nl/rhino/kokinje.htm
- [3] Wells, D. (1991). *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde*. Amsterdam: Bert Bakker.

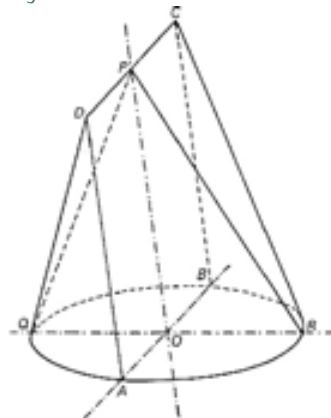
Met dank aan Aad Goddijn voor de aanpak met behulp van het Principe van Cavalieri.



figuur 10



figuur 11



figuur 12

Over de auteur

Jacques Jansen was 35 jaar docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

EEN SPEL DAT IEDEREEN KENT, GEBRUIKEN IN EEN WISKUNDELES

Anja Moeijes

Waarom een spel

Al een kleine 30 jaar ben ik bezig met het afwisselender en leuker maken van mijn wiskundelessen. Het grootste deel van mijn lessen geef ik in de onderbouw, en dan met name aan vmbo TL-klassen. Deze leerlingen hebben vaak extra motivatie nodig om aan de gang te gaan. Met mijn spelletjeslessen lukt dat meestal; in ieder geval gaan ze dan met meer enthousiasme aan de gang dan bij het gewone wiskundewerk. Een spelletjesles gebruik ik doorgaans bij herhaling van de leerstof in een van de laatste lessen voor een proefwerk.

Bij elk leerstofonderdeel is wel een spelvorm te bedenken. Verderop zal ik een voorbeeld geven. Met elke spelvorm worden volop wiskundige vaardigheden geoefend in kleine groepjes en dat is wat alle docenten willen. Voor de leerlingen voelt het niet aan als herhaling of het maken van oefenopgaven; het is iets heel anders! Er wordt fanatiek (samen)gewerkt om zo snel mogelijk alle sommen op te lossen. Als er fouten worden gemaakt, klopt het spel niet meer, dus dan wordt er gezocht naar waar de fout zit...

Door het samenwerken bij een spel wordt er meer gedeeld dan bij het 'gewone' samenwerken aan het wiskundewerk. Met name het samen zoeken naar een fout werkt zeer verhelderend voor zwakke leerlingen. Die zien de strategieën van medeleerlingen direct toegepast en nemen ze sneller over.

De spellen

De spellen die ik gebruik in de lessen zijn door mijzelf gemaakt in samenwerking met Adri Knop. De tijd die dat kost wordt ruimschoots gecompenseerd door het plezier dat ik beleef aan de spelletjeslessen. Doordat de spellen geplastificeerd zijn, gaan ze jaren mee.

Voorwaarden waaraan een spel moet voldoen zijn:

- zeer korte uitleg, dus bij voorkeur aansluiten bij een al bestaande spelvorm;
- een gesloten structuur zodat nakijken vanzelf gaat en nauwelijks tijd kost;

- het spel moet in een deel van de les kunnen worden afgerond, zodat er ook nog wat tijd overblijft voor een andere lesactiviteit;
- het spel moet snel kunnen worden uitgedeeld en opgeruimd;
- het spel moet datgene oefenen waarmee leerlingen in de komende toets hun voordeel kunnen doen.

Domino

Een spelvorm die ik veel gebruik is het dominospel. Dat gaat als volgt:

De leerlingen worden verdeeld in groepjes. Dit gaat snel door alleen stoelen te draaien, zodat er vier leerlingen rondom een tweetal tafels zitten.

Elk groepje krijgt een plastic zakje met 25 dominokaartjes. Op elk dominokaartje staat een opgave en een antwoord. Er is één kaartje dat qua kleur afwijkt van de rest, het zogenaamde startkaartje. Dat kaartje wordt open op tafel gelegd. De 24 kaartjes die overblijven, worden verdeeld over de groepsleden.

De groepsleden lossen samen de som, die op tafel ligt, op en kijken of ze het antwoord vinden op één van de kaartjes in hun hand. Het kaartje met het goede antwoord moet worden aangelegd aan het kaartje met de opgave. Er ligt nu een nieuwe opgave op tafel. Degene die het kaartje met het antwoord heeft neergelegd, moet nu de som oplossen. Zo komt iedereen een vast aantal keren aan de beurt. Er komt een lange sliert kaartjes op tafel te

liggen, met als doel dat alle kaartjes worden gebruikt en dat het laatste kaartje weer aansluit op het eerste kaartje. Het groepje dat het snelst de omloop heeft voltooid, wint de wedstrijd.

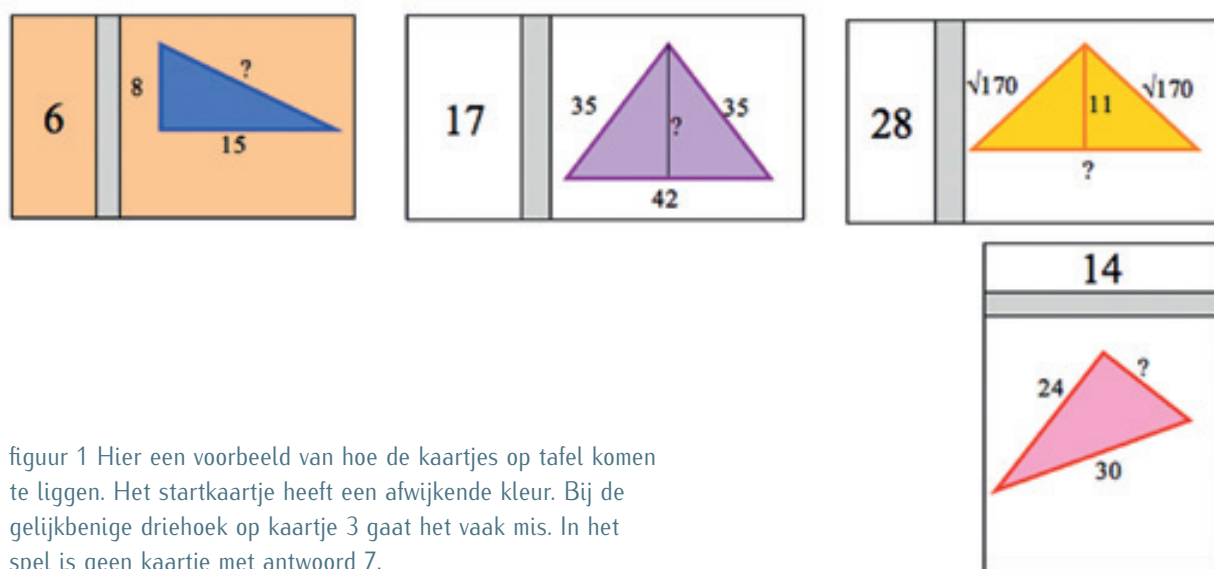
Een succesvol voorbeeld van een dominospel dat ik elk jaar weer gebruik is het Pythagorasdomino.

In figuur 1 ziet u het begin van de omloop.

Leservaring

Ik werk vaak met 'lekkere' prijsjes. Soms krijgt het snelste groepje een prijs, soms iedereen als het spel goed is afgerond. De ene keer ben ik tevreden met alleen een antwoord, een

ZO AUTOMATISEREN
DE LEERLINGEN HUN
PASGELEERDE
VAARDIGHEDEN OP
EEN MANIER WAAR JE
ALLEEN MAAR VAN
KUNT DROMEN...



figuur 1 Hier een voorbeeld van hoe de kaartjes op tafel komen te liggen. Het startkaartje heeft een afwijkende kleur. Bij de gelijkbenige driehoek op kaartje 3 gaat het vaak mis. In het spel is geen kaartje met antwoord 7.

andere keer moet er een volledige berekening worden genoteerd op een bijgeleverd werkblad. Af en toe laat ik de gemaakte opgaven meetellen als een bonuspunt bij de nog te maken toets. Dit stimuleert het serieus werken en is voor de zwakke leerlingen prettig omdat ze nu gebruik mogen maken van de sterkere krachten binnen het groepje.

In de klas gaat het ene groepje preciezer om met de spelregels dan het andere groepje. In de ban van het spel telt ook de snelheid en worden soms alle kaartjes op tafel gelegd om zo snel mogelijk het goede kaartje te kunnen aanleggen...

Er wordt zo snel mogelijk gerekend en daarbij mag de RM worden gebruikt.

Zo automatiseren de leerlingen hun pasgeleerde vaardigheden op een manier waar je alleen maar van kunt dromen...

De dominospelvorm kun je bij veel leerstof gebruiken.

Denk aan:

Rekenen met voorrangregels	klas 1
Rekenen met negatieve getallen	klas 1
Rekenen met getallen in formules*	klas 1, 2
Haakjes verdrijven	klas 2, 3
Rekenen met eerste/tweede gr. vergelijkingen	klas 2, 3
Rekenen in driehoeken	klas 2, 3

*goed invullen van negatieve getallen bij formules met machten

Geef een aantal driehoeken met een onbekende zijde of onbekende hoek en laat ze in groepjes nadenken over het goede gereedschap (Pythagoras of goniometrie)

Meer weten?

- Op de NWD van 2011 hebben Adri Knop en Anja Moeijes een workshop over spel(l)en in de wiskundeles gegeven. Bij de link naar de inhoud van deze NWD kan een handout van deze workshop worden gedownload met nog veel meer spelvormen.
- In 2012 hebben Adri Knop en Anja Moeijes de Nationale Scholen Prijs (VMBO) ontvangen voor hun inzending van Spel(l)en in de wiskundeles, zie www.fisme.science.uu.nl/wiskundescholenprijs/
- In mei 2013 verscheen de documentaire Wiskunde Spelenderwijs. Hierin vertellen Adri Knop en Anja Moeijes over hun visie en laten ze zien hoe zij hun onderwijs inrichten. Deze film is gemaakt door Maarten van der Burg, Script Factory en Monique Pijls, Bètaboost in opdracht van het Vaknetwerk Wiskunde, van het Domein Onderwijs en Opvoeding van de Hogeschool van Amsterdam. De film maakt deel uit van een serie van vijf korte documentaires over niet-alledaags wiskundeonderwijs.

Over de auteur

Anja Moeijes is sinds 1983 docente wiskunde. Zij heeft haar opleiding gevolgd aan de Nieuwe Leraren Opleiding van de VL-VU (Vrije Leergangen van de Vrije Universiteit) te Amsterdam (1978-1983). Zij geeft sinds 1986 les op Sg Tabor, locatie Oscar Romero te Hoorn. Samen met Adri Knop (ook Sg Tabor) heeft zij al vele workshops over 'andere' wiskunde gegeven bij het APS, de NWD, de NVvW en bij de docentendag van *Moderne Wiskunde*. E-mailadres: a.moeijes@tabor.nl

NOTULEN VAN DE NVvW- JAARVERGADERING

Kees Lagerwaard



ZATERDAG 3 NOVEMBER 2012, VEENENDAAL

Opening

Voorzitter Marian Kollenveld opent de vergadering. Ze heet allen van harte welkom. Een speciaal welkom is er voor ereleden van onze vereniging en voor vertegenwoordigers van PWN, NVON, ministerie van OCW, Steunpunt taal en rekenen en onze Vlaamse zustervereniging. Ook de aanwezige LIO's en een veertigtal nieuwe leden krijgen een aparte vermelding.

Jaarrede

De voorzitter spreekt de jaarrede uit. De volledige tekst van de jaarrede is terug te lezen in *Euclides* nummer 3 jaargang 88.

Notulen

De notulen van de jaarvergadering 2011 worden zonder vragen of opmerkingen vastgesteld.

Jaarverslagen

Over het NVvW-jaarverslag van verenigingsjaar 2011-2012 wenst geen der aanwezigen het woord. Ook het jaarverslag *Euclides* jaargang 87 lokt geen vragen of opmerkingen uit. De twee jaarverslagen worden vastgesteld onder dankzegging aan de auteurs Marjanne de Nijs en Kees Lagerwaard.

Financiën

Interim-penningmeester Gert de Kleuver licht de exploitatierekening over boekjaar 2011-2012 op enkele punten toe, alsmede de balans per 31 juli 2012. Ondanks een licht negatief resultaat is de financiële positie van de Vereniging dermate solide dat er geen aanleiding is de contributie voor 2013/2014 te verhogen. Zowel penningmeester Frank van den Heuvel als Pim en Elly van Bommel worden bedankt voor het vele en goede werk. De kascommissie, bestaande uit de heren F. O. van Leeuwe en J. van den Berg, wordt bedankt. Zij hebben de boeken in orde bevonden en stellen de vergadering voor de penningmeester te dechargeren voor het gevoerde financiële beleid. Dit voorstel wordt door de aanwezigen onder applaus aangenomen. Er zijn verder geen vragen of opmerkingen.

Bestuursverkiezing

De bestuursleden Marian Kollenveld, Henk van der Kooij en Henk Rozenhart zijn aftredend en stellen zich herkiesbaar. Penningmeester Frank van den Heuvel heeft zijn bestuurstaak kort voor de zomervakantie neergelegd. Henk Bijleveld is aftredend en stelt zich niet herkiesbaar. De voorzitter dankt beiden voor hun enthousiaste inzet voor de Vereniging. Het bestuur heeft Lidy Wesker-Elzinga, Gert de Kleuver en Ab van der Roest als nieuwe bestuursleden voorgedragen. Er zijn geen tegenkandidaten, zodat het eerstgenoemde drietal is herkozen en het laatstgenoemde drietal is verkozen. Een en ander wordt met een warm applaus ondersteund. Het bestuur is hiermee per saldo met 1 persoon uitgebreid. Het bestuur had graag een nog wat grotere uitbreiding gerealiseerd vanwege het omvangrijke takenpakket. Helaas heeft Heleen Traas haar kandidatuur voor een bestuursfunctie onlangs om persoonlijke redenen ingetrokken.

Rondvraag

Grada Fokkens spreekt haar zorg uit over het ontbreken van speciale regels bij de verplichte rekentoets voor leerlingen met dyscalculie. Ze vreest dat deze leerlingen daardoor weinig

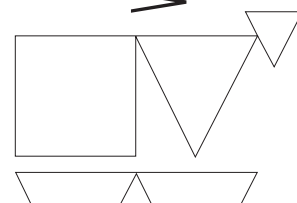
kans hebben de toets met goed gevolg af te leggen en vraagt het bestuur deze kwestie bij het CvE en het Ministerie van OCW onder de aandacht te brengen. De voorzitter zegt dit toe.

Het lerarenregister

Marianne Lambriex praat de vergadering bij over de ontwikkelingen rond het lerarenregister en nodigt de aanwezigen uit zich te registreren. Haar PowerPoint-presentatie is te vinden op de NVW-site.

Sluiting

De voorzitter sluit de jaarvergadering en geeft het woord aan Marianne Lambriex en Henk van der Kooij voor de inleiding op de studiedag.



AANKONDIGING WINTERSYMPOSIUM KWG 2014

MATHEMATICS OF PLANET EARTH



zaterdag, 11 januari 2014, Utrecht

Het Wintersymposium 2014 van het Koninklijk Wiskundig Genootschap heeft deze keer een internationaal thema. *Mathematics of Planet Earth* (MPE2013) is in 2013 het thema waarbinnen wereldwijd meer dan 100 instellingen en organisaties voor onderzoek en onderwijs actief zijn. Voor Nederland was de opening tijdens de Nationale Wiskundedagen 2013. Het wintersymposium op 11 januari 2014 vormt een afsluiting voor docenten, met een viertal presentaties van Nederlandstalige onderzoekers. MPE2013 wil, naast de wetenschappelijke activiteiten, voor scholen illustreren wat de rol van wiskundige wetenschappen is bij het vinden van oplossingen voor de vele grote uitdagingen die er nu zijn. Denk bijvoorbeeld aan klimaatverandering, natuurrampen, stromingen in oceanen, epidemieën, verdwijnen van regenwouden, verwoestijning, biodiversiteit, communicatie, economische, sociale en financiële systemen. U kunt na het bijwonen van dit symposium nieuwe antwoorden geven op de klassieke vraag van uw leerlingen: 'Waarvoor is wiskunde eigenlijk nodig?'

Sprekers

Gezien het thema zullen er verschillende modellen aan de orde komen. We zijn dan ook zeer gelukkig met het aanbod van

- Ferdinand Verhulst (universiteit Utrecht) om een korte inleiding op modellen te geven: *Modellen in alle maten*.

Na de inleiding zullen drie wetenschappers uit verschillende instituten een specifiek onderwerp bespreken. Alle bijdragen hebben iets te maken met water: in de oceanen, als neerslag en (de kosten van) bescherming tegen water.

- Leo Maas (NIOZ, universiteit Utrecht) vertelt over *Zwaartepuntsdynamiek van de oceaan en onderwatervolven*.
- Geert Lenderink (KNMI) spreekt over *Neerslagextremen in een opwarmend klimaat: van waarnemingen en conceptuele modellen tot klimaatprojecties*.
- Carel Eijgenraam (CPB) beantwoordt misschien de vraag of u droge voeten kunt houden: *Efficiënte normen voor de bescherming van dijkgebieden tegen overstromen*.

Een rijk programma dat veel onderwerpen geeft voor de 'blik naar buiten', door cTWO opgenomen in de nieuwe examenprogramma's voor wiskunde. Ook interessant voor uw collega's natuurwetenschap, aardrijkskunde en zelfs economie. Zegt het voort!

Datum, plaats, bijdrage

Het symposium wordt gehouden op **zaterdag 11 januari 2014** in het Academieggebouw van de Universiteit Utrecht (Domein 29, 3512 JE Utrecht).

Het programma start om 10:00 uur (koffie vanaf 9:30) en eindigt ca. 15:00 uur.

Graag aanmelding vooraf, bij voorkeur voor 28 december, via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, www.wiskgenoot.nl (kies dan 'wat doet het KWG' en vervolgens 'congressen en symposia'). Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden.

De kosten voor het symposium bedragen € 25,00 voor KWG-leden en € 30,00 voor niet-leden. Deze bijdrage is inclusief lunch en consumpties gedurende de dag. Nadere inlichtingen: Jenneke Krüger, e-mailadres: jenneke.kruger@gmail.com

MOZAÏEKEN (VOOR) GROOT EN KLEIN

Deze puzzel is grotendeels naar een idee van Frits Göbel, ontstaan, zo schrijft hij ons, 'bij het nuttigen van een vierkante pizza'. U kunt gewoon puzzelen, maar een beetje rekenen kan soms helpen.

In figuur 1a ziet u een vierkant, verdeeld in vijf puzzelstukjes. *In figuur 1b* zijn diezelfde puzzelstukjes gebruikt om twee kleinere vierkanten te leggen.

Een vierkant verdelen in stukjes en die weer samenstellen tot nieuwe vierkanten is waarschijnlijk de oudste methode om de stelling van Pythagoras te bewijzen (hoewel de *in figuur 1* gegeven verdeling daartoe niet echt bijdraagt).

In de tiende eeuw probeerden Iraanse wiskundigen vierkanten te verdelen in mozaïekstukjes waarmee een aantal kleinere vierkanten gelegd konden worden. Doel was nu het gebruik ervan in geometrische mozaïeken. Een daarvan was een verdeling in drie gelijke kleinere vierkanten. *Figuur 2* lijkt zo'n verdeling te geven met zes stukjes, maar dat is schijn. U zou uw leerlingen kunnen vragen aan te tonen dat dit niet klopt met behulp van eenvoudige goniometrische verhoudingen. De figuur is afkomstig uit het tiende-eeuwse Persië, van Abu 'l Wafa Buzjani, die erbij schrijft dat dit gebruikt werd door kunstenaars, maar dat het incorrect is, en geeft dan zijn correcte oplossing in negen stukjes^[1].

In de veertiende eeuw, en later in de negentiende eeuw werden oplossingen in eerst acht, toen zeven en tenslotte zelfs zes stukjes gevonden.

Dit alles is op internet te vinden, en we gaan het u daarom niet vragen.

Maar als u onderstaande problemen hebt opgelost, wilt u misschien uw tanden stukbijten op die drie gelijke vierkanten...

De opdracht bij deze puzzel is steeds: Verdeel één vierkant in zo **weinig** mogelijk stukjes, zodanig dat u, gebruikmakend van alle stukjes, meerdere kleinere vierkanten kunt leggen. Wij geven bij elke opgave aan hoeveel kleinere vierkanten u moet maken en de voorwaarden waaraan ze moeten voldoen. Om warm te lopen een opgave die elke brugklasser zou moeten kunnen oplossen:

Opgave 1 – 2 gelijke vierkanten.

In figuur 1 hebben we twee ongelijke vierkanten gemaakt in vijf stukjes. Dat kan beter:

Opgave 2 – twee ongelijke vierkanten in minder dan vijf stukjes.

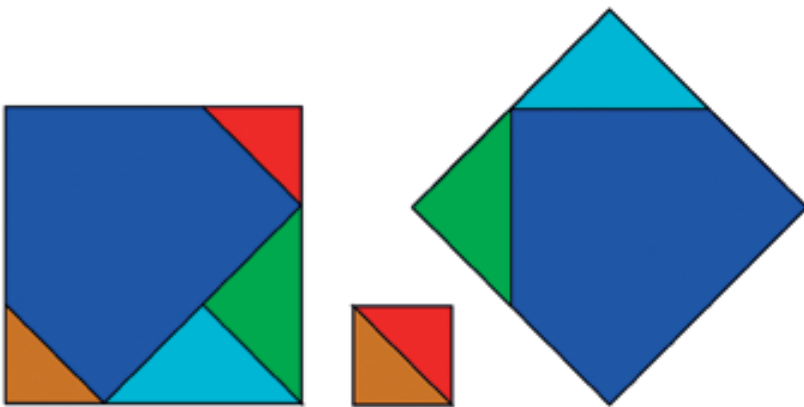
Opgave 3 – twee ongelijke vierkanten waarvan de oppervlakten zich verhouden als 1:3.

Opgave 4 – drie vierkanten; twee gelijke en één grotere.

Opgave 5 – drie vierkanten; twee gelijke een één kleinere.

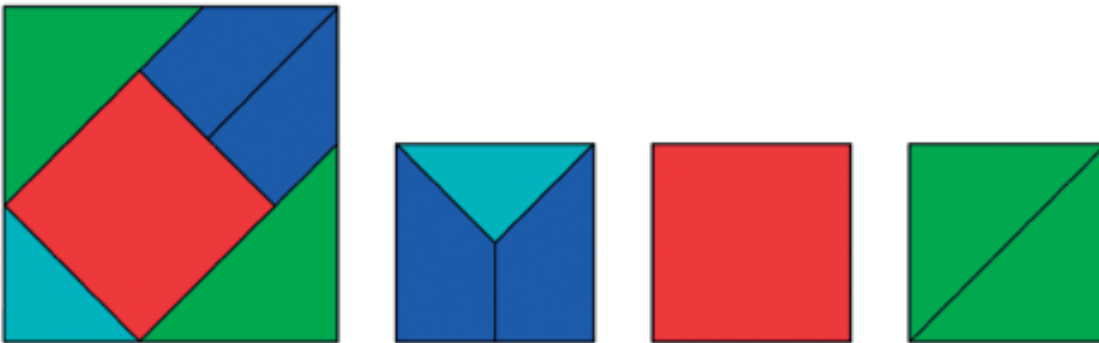
Opgave 6 – drie verschillende vierkanten.

Opgave 7 – vier vierkanten waarvan twee gelijk: één kleine, twee midden en één grote.



figuur 1a

figuur 1b



figuur 2

Een tekening van uw oplossingen is natuurlijk mooi, maar het kan ook door bijvoorbeeld de coördinaten van de hoekpunten van uw stukjes in de grote en de kleinere vierkanten te geven.

Noot

[1] zie bijvoorbeeld Slavic Jablan en Radmila Sazdanovic; *Modularity in medieval Persian Mosaics*, www.mi.sanu.ac.rs/vismath/sarhangi/

Inzenden oplossingen

Heeft u een of meer van de mozaïeken gevonden, doe dan eens gek en stuur het op, het gaat uiteindelijk niet om de punten maar om het puzzelplezier. Oplossingen kunt u mailen naar liekewobien@hotmail.nl of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. U kunt weer twintig punten verdienen voor de ladderwedstrijd, en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken.

De persoon die het hoogst op de ladder staat ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro.

De deadline is 25 november a.s.

Wij wensen u veel plezier.

SEINEN MET WATERSTRALEN

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

In deze puzzel sturen Alice en Bob elkaar boodschappen door middel van een waterstraal. Ze testen dan of ze beiden hetzelfde getal k in gedachten hebben. Ze hebben daartoe een aantal (t) parallelle tuinslangen. Aan een kant sluit Alice een kraan aan op een van de slangen. Verder kan zij desgewenst paren slangen aan haar kant aan elkaar koppelen. Bob mag aan zijn kant slechts één paar slangen aan elkaar koppelen.

Na het openen van de kraan zal ofwel Alice ofwel Bob een douche over zich heen krijgen. Samen hebben ze een afgesproken code-schema waarin staat hoe ze voor elk geheel getal k ($1 \leq k \leq n$) de slangen met elkaar verbinden en aan welke slang de kraan zit gekoppeld. Dit schema is zo opgesteld dat **alleen** als ze beide voor eenzelfde getal k hebben gecodeerd de douche aan de kant van Alice terecht komt. Hoe groter n , hoe meer slangen er nodig zijn om alle getallen 1 tot en met n te coderen, of omgekeerd, hoe meer slangen, hoe groter n mag zijn.

De opdracht was om een schema te bedenken voor 3, 4, 5 en 6 slangen, steeds voor een zo groot mogelijke waarde van n .

Voor 3, 4 en 6 slangen vonden de meeste inzenders een correct schema, met resp. $n = 2$, 6 en 15. Voor $t = 5$ (=aantal slangen) werden meestal wel correcte schema's gevonden, maar niet altijd optimaal.

Er zijn natuurlijk meerdere oplossingen, waar we er hier een van beschrijven voor $t = 5$, gevolgd door een algemeen toepasbaar algoritme voor alle waarden van t .

$k(t=5)$	1	2	3	4	5	6	7	8
Bob	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)
Alice	1;(4,5)	1;(3,5)	1;(3,4)	2;(4,5)	2;(3,5)	2;(3,4)	3;(1,2)	4;(1,2)

Hans Linders en Jan Verbakel gaven een algemeen algoritme voor t tuinslangen voor alle waarden van t .

Stel, Bob verbindt voor codering van getal x de slangen i en j . Dan moet Alice voor dat getal x de kraan aansluiten op één van die twee slangen, zeg i . De andere slang ($= j$) laat ze onverbonden. Alle andere slangen verbindt ze voor zover mogelijk twee aan twee met elkaar, geeft niet hoe.

Geval t even: Bob gebruikt alle mogelijke paren slangen, met elk een bijbehorend getal. Dat zijn er $t(t-1)/2$. Bij verbinding van slangen i en j heeft Alice steeds behalve slang j geen onverbonden slangen over. Er geldt: Alice wordt nat d.e.s.d.a. Bob en Alice voor hetzelfde getal hebben gecodeerd. **Voor $t = 4$ (4 slangen) geldt dit $n = 6$** (maximaal 6 code getallen) **en voor $t = 6$ geldt $n = 15$.**

Geval t oneven: Nummer de slangen van 1 tot en met t . De paren (1,2), (3,4),..., ($t-2$, $t-1$) noemt Jan Verbakel 'brothers'. Bob koppelt alle paren (i,j) behalve de brother-paren. Voor elk paar (i,j) sluit Alice de kraan weer aan op een van die twee (zeg i), maar ze kiest daarvoor nooit slang nr. t . Slang j en de brother van i laat ze open. Alle andere slangen koppelt ze twee aan twee aan elkaar, geeft niet hoe. Ga na dat dit werkt voor elke oneven t en dat er dan $t(t-1)/2 - (t-1)/2 = (t-1)^2/2$ getallen kunnen worden gecodeerd. **Voor $t = 3$ geldt dan $n = 2$ en voor $t = 5$ geldt $n = 8$.** Daar heeft Bob dus de paren (1,2) en (3,4) geschraapt, zoals in de tabel.

Is hiermee ook de maximale waarde van n bereikt?

Meerdere inzenders toonden aan : Voor t even zijn alle paren van Bob gebruikt, dus meer kan niet:

$$n = \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}$$

Jan Verbakel toonde voor oneven t aan dat er niet meer getallen kunnen worden gecodeerd dan $(t-1)^2/2$:

Voor t oneven: Alice kan nooit alle slangen afsluiten, dan wordt ze nooit nat. Ze laat er dus minstens twee open. Bob heeft maximaal $t(t-1)/2$ verschillende paren slangen die in zijn schema zouden kunnen staan. Ga na dat als hij er daarvan minder dan $(t-1)/2$ weglaat er altijd (minstens) twee slangen (zeg i en j) zijn die in Bobs schema in combinatie met alle andere slangen voorkomen. Stel x is het getal dat door Bob wordt gecodeerd met (i,j) . Alice moet voor getal x dan de kraan aansluiten op één van de twee, zeg i . Slang j laat ze dan vrij, en nog een andere, zeg k . Maar Bob gebruikt i met alle andere slangen, dus ook (i,k) , waarmee hij codeert voor een ander getal $y \neq x$. Maar dan wordt Alice nat als Bob getal y heeft en zij heeft gecodeerd voor x . Er moeten dus minstens $(t-1)/2$ paren worden weggelaten. De maximumwaarde voor n is dus

$$\binom{t}{2} - \frac{t-1}{2} = \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Het idee voor deze puzzel was gebaseerd op een beschreven model om de complexiteit van een cryptografisch probleem te bepalen^[1]. Het model komt overeen met de situatie die we voor deze puzzel hebben beschreven, met dit verschil dat in het oorspronkelijke model Bob ook meerdere paren slangen mag verbinden. Het minimaal benodigde aantal slangen (t) is dan een maat voor de bedoelde complexiteit.

Als Bob ook meer dan één verbinding kan leggen, zijn er voor grotere waarden van t veel meer getallen te coderen en de optimale waarde van n kan worden begrensd^[1], maar de exacte waarde is nog een open vraag.

Noot

- [1] Buhrman, H., Fehr, S. Schaffner, C., & Speelman, F. (2012). *The Garden-Hose Game - A New Model of Computation, and Application to Position-Based Quantum Cryptography*.

Ladderstand

De top-10 op de ladder na puzzel 88-7 is:

J. Remijn	143
H. Linders	113
H. Klein	98
K. van der Straaten	91
K. Vugs	89
J. Meerhof	85
F. Göbel	82
J. Verbakel	78
R. Stolwijk	75
T. Kool	57

De felicitaties en de boekenbon gaan naar Jos Remijn.



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Dick Klingens
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzending bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast. Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvww.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard, Eindhovenensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks, De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie. Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur

E-mail redactie@nvww.nl

za 09/11 VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag 2013 Organisatie NVvW
Zie ook pag. 32-33 in dit nummer, vakbladeuclides.nl/892nvww en vakbladeuclides.nl/892euclides.

vr 15/11 OP DE SCHOLEN
Wiskunde A-lympiade/Wiskunde B-dag
Organisatie Flsme

za 16/11 AMSTERDAM
Ars et Mathesisdag
Zie: www.arsetmathesis.nl

za 22/11 ZWOLLE
ELWleR Conferentie 2013

2014

za 11/01 UTRECHT
KWG Wintersymposium 2014
Mathematics of Planet Earth. Organisatie KWG

do/vr 16/17 01 NOORDWIJKERHOUT
Panama-conferentie. Organisatie FSW, UU

vr/za 31/01 01/02 NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen. Organisatie Flsme

wo 12/02 OP DE SCHOLEN
Onderbouw Wiskunde Dag. Organisatie Flsme

wo 02/04 OP DE SCHOLEN
Grote Rekendag. Organisatie Flsme

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

JAARGANG 89

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	17 september 2013	24 juni 2013
2	5 november 2013	2 september 2013
3	17 december 2013	28 oktober 2013
4	6 februari 2014	2 december 2013
5	25 maart 2014	27 januari 2014
6	13 mei 2014	17 maart 2014
7	24 juni 2014	6 mei 2014

Uitdaging:

Kiest u voor de workshop of ontdekt u de fx-CG20 zelf?

Ontdek de eenvoud van de fx-CG20 in een professionele Casio Workshop, die op afspraak én bij u op locatie kosteloos zal worden gegeven. Casio Educatief Consulent David Kropveld zorgt er voor dat u zich de werking van de fx-CG20 in korte tijd eigen maakt. Vele collega's gingen u voor.

- Supersnel resultaat in berekening én weergave.
- Menustructuur op basis van iconen navigatie.
- Hogeresolutie LCD-kleurenscherm 65.000 kleuren.
- Haarscherpe grafieken: weergave als in een studieboek.
- Software voor projectie en presentatie in de klas.

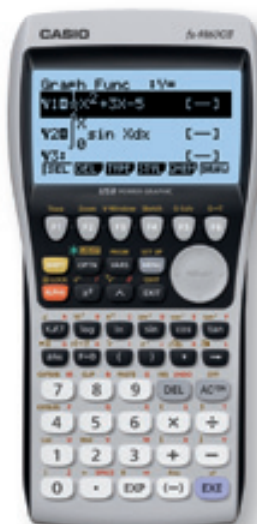
Test u de fx-CG20 of een andere Casio rekenmachine liever zelf? Maak dan gebruik van een speciaal geprijsd docentenexemplaar.

Kijk op:
www.casio-educatie.nl



3 jaar
garantie

Informeer naar de Casio fx-CG20 Workshop of bestel uw exemplaar voor € 39,50 via e-mail: educatie@casio.nl



CASIO fx-9860GII

Rekengemak: de grafische rekenmachine fx-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB groot Flash-ROM-geheugen.



CASIO fx-82ES PLUS

Geniale oplossing: de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine fx-82ES Plus, met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie. Het puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

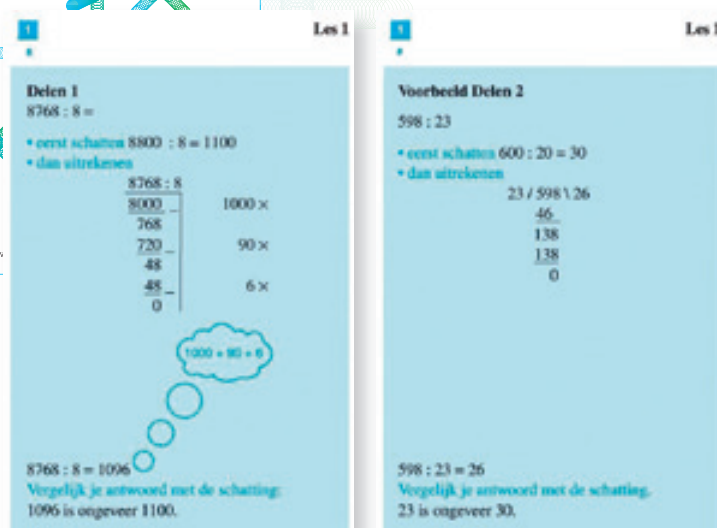
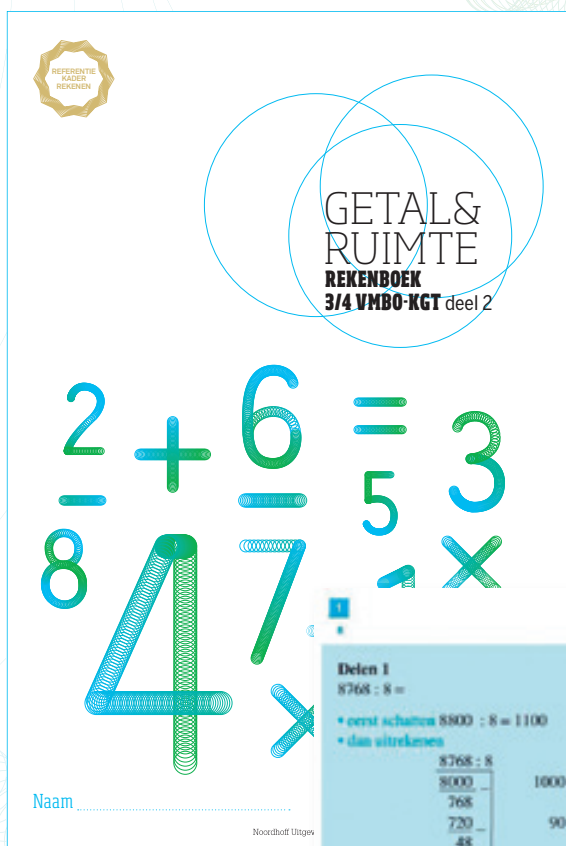
CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl

GETAL & RUIMTE

Getal & Ruimte Rekenen, geheel herzien!

- Herzien voor 2F en 3F (boek en ICT)
- Aansluiting bij de rekentoets
- Aansluiting bij rekenstrategieën in het basisonderwijs
- Met nieuwe digitale referentietoetsen



Vraag vandaag nog uw beoordelingsexemplaar aan via
www.getalenruimterekenen.noordhoff.nl