

Kruisjes zetten en stroken kleuren.

Een methode om de puzzel uit Euclides 88-2 op te lossen,
door Wobien Doyer

Inleiding

Puzzel 88-2 in Euclides ging over het zetten van kruisjes op een strook papier. We beginnen met ergens op de strook een kruisje te zetten. Dan verdelen we de strook achtereenvolgens in 2, 3, 4 etc. gelijke stukken. Elke keer zetten we er een kruisje bij op de strook. De kunst is om dat zo te doen dat steeds nadat we het n^e kruisje hebben gezet er in elk van de n gelijke stukken precies één kruisje staat.

Dat klinkt eenvoudig, maar valt nog lang niet mee! In de literatuur is dit probleem bekend als het 18-Point Problem¹, omdat 18 kruisjes niet lukt! Het is bewezen dat 17 echt het maximum is.^{2,3} De puzzel wordt in Euclides 88-4 besproken, maar de ruimte daar was beperkt. We geven hier nog enkele extra beschouwingen.

In het vervolg duiden we de plaats van een kruisje op de strook aan als een getal tussen 0 en 1. Een oplossing met N kruisjes kunnen we dan weergeven door een reeks getallen $x_1, \dots, x_N$, waarbij het i^e kruisje op plaats x_i staat.

In de uitwerking in Euclides stellen we dat elke oplossing door verwisseling van de volgorde waarin de kruisjes worden gezet kunnen vervangen door een oplossing waarin x_1 helemaal links staat en x_2 helemaal rechts. Een bewijs daarvan vindt u in hoofdstuk 6. In het vervolg van deze tekst wordt dit steeds gebruikt.

In opgave 1 was er een extra voorwaarde: alle oneven kruisjes moesten in de linkerhelft van de strook komen, en alle even kruisjes in de rechterhelft. In hoofdstuk 1 gaan we na wat daarvan de consequenties zijn.

In hoofdstuk 2 blijkt, dat ook als we die extra voorwaarde niet stellen, bij wat grotere waarden van N reeksen kruisjes voorkomen die om-en-om in de linkerhelft en de rechterhelft van de strook komen, zodat een deel van wat we gevonden hebben in hoofdstuk 2 ook gebruikt kan worden om in het algemene geval wat grotere aantallen kruisjes te lijf te gaan.

Dat laatste doen we in hoofdstuk 3 en 4: met de gevonden hulpmiddelen gaan we op zoek naar het maximum aantal kruisjes dat we kunnen zetten.

Die hulpmiddelen bestaan uit schema's, waarin de oplossingen gevonden kunnen worden. In de afbeeldingen ervan tussen de tekst heb ik ze vaak gevuld, maar in de bijlage vindt u lege schema's die u kan afdrukken om er zelf in te puzzelen.

Tot slot ter geruststelling: het was zeker niet de bedoeling dat u als oplossing van de puzzel in Euclides het hier besprokene allemaal zelf ontdekte. Zelf vond ik een deel ook pas nadat u al had ingezonden en tijdens het schrijven van dit verhaal. Wij wisten wel dat er een maximum was van 17 kruisjes, maar hadden niet verwacht dat iemand een oplossing van 17 kruisjes zou vinden.

Inhoudsopgave

Inleiding.....	1
1. Een schema voor oplossingen met links-rechts voorwaarde	2
2. Omslagpunten	4
3. De eerste paar lijnen.....	5
4. Zoveel mogelijk kruisjes met omslagpunt 12	6
5. Andere omslagpunten dan 12.....	8
6. Verwisseling van de kruisjes zodat x_1 helemaal links, en x_2 helemaal rechts komt	10
7. Samenvatting	10
8. Bijlage: lege schema's om zelf in te puzzelen.	11

¹ H.Steinhaus: One Hundred Problems in Elementary Mathematics. *Courier Dover Publications* (1964) ons probleem heet daar: Distribution of numbers

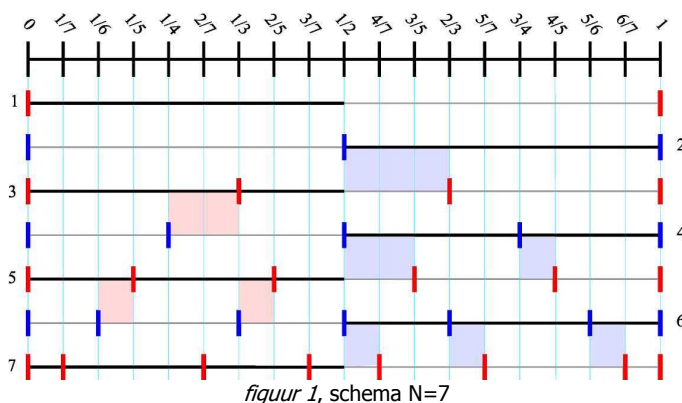
² E.R.Berlekamp en R.L.Graham: Irregularities in the distributions of finite sequences. *Journal of Number Theory* 2, 152-161 (1970). Het artikel is als pdf te downloaden op:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022314X76900020>

³ M.Warmus: A supplementary note on the irregularities of distributions. *Journal of Number Theory* 8, 260-263 (1976). Het artikel is als pdf te downloaden op:

<http://www.sciencedirect.com/science/journal/0022314X/8/3>

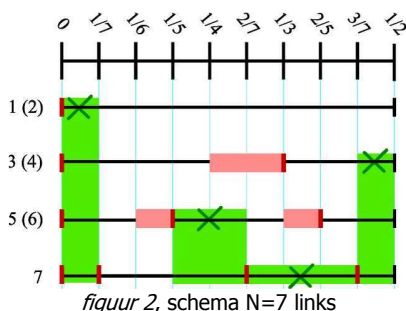
1. Een schema voor oplossingen met links-rechts voorwaarde



Zie *figuur 1*: Ik werk hier als voorbeeld een schema uit voor 7 kruisjes. Bovenlangs staan alle hiervoor relevante breuken. Daaronder voor elk kruisje een lijn, met de grenzen waartussen de kruisjes moeten staan. Ik heb rode grenzen gebruikt voor de oneven lijnen, blauwe voor de even lijnen. De nummers van die horizontale lijnen staan aan de kant waar het kruisje moet komen. De kruisjes die op een bepaalde lijn staan blijven natuurlijk ook op alle volgende lijnen staan.

Kijken we naar de linkerhelft van de 6^e lijn, dan moeten daar 3 kruisjes op staan. Omdat het 6^e kruisje rechts komt, moeten die 3 kruisjes er ook op de 5^e lijn al gestaan hebben. Dat betekent dat ze **niet** mogen staan op de plaatsen die ik met lichtrode vakjes tussen lijn 5 en 6 heb aangegeven. Op dezelfde manier is er ook een “verboden gebied” tussen de 3^e en 4^e lijn. In de rechterhelft heb ik de verboden gebieden met lichtblauwe blokjes aangegeven. Om het preciezer aan te geven: als aan de linkerkant op lijn $n+1$ geen nieuw kruisje gezet wordt, dan mogen de kruisjes op lijn n (oneven) niet staan op de intervallen $\{i/(n+1), i/n\}$, met $i = 1, \dots, (n-1)/2$. De verboden gebieden op de even lijnen rechts zijn de intervallen $\{i/n, (i+1)/(n+1)\}$, met $i = n/2, \dots, (n-1)$

We kunnen nu, los van elkaar, een oplossing zoeken voor de linkerhelft en een voor de rechterhelft. Het schema kan daarom nog compacter als we de 2 helften splitsen. Zie voor de linkerhelft *figuur 2* en voor de rechterhelft *figuur 3*.

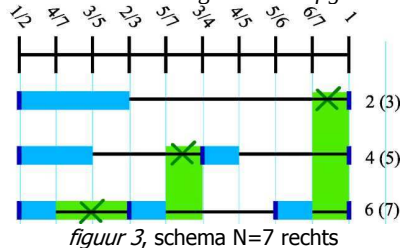


In de linkerhelft staan alleen de oneven lijnen, met de verboden gebieden die in *figuur 1* tussen de oneven lijn en de volgende even lijn staan. In de rechterhelft staan de even lijnen, met de verboden gebieden die horen bij die lijn en de opvolgende oneven lijn.

Het puzzelen wordt nu vrij eenvoudig. Ik noteer x_i met een kruisje op lijn i en een groene strook die aangeeft dat het kruisje op de volgende lijnen blijft staan. Links mogen we aannemen dat x_1 helemaal links staat, dus in $(0, 1/7)$. Op lijn 3 staat dan al een kruisje in $(0, 1/4)$, en moet er nog een kruisje komen in $(1/3, 1/2)$. In verband met de verboden gebieden komen alleen $(2/5, 3/7)$ en $(3/7, 1/2)$ in aanmerking. Op lijn 5 hebben we dan al kruisjes in het eerste en het laatste interval, en er moet er nog een komen in

$(1/5, 1/3)$. Dat kan in $(1/5, 2/7)$ of in $(2/7, 1/3)$, maar dat laatste alleen als we x_3 in $(3/7, 1/2)$ gezet hebben.

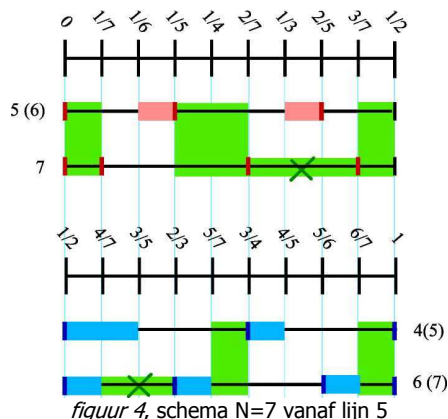
In al deze gevallen is er op lijn 7 nog één interval leeg, zodat we x_7 daar kunnen neerzetten. Er zijn dus, voor de linkerhelft, 3 oplossingen, waarvan er één is ingetekend in *figuur 2*.



Rechts (zie *figuur 3*) mogen we aannemen dat x_2 helemaal rechts staat, in $(6/7, 1)$. Op lijn 4 moeten we dan nog een kruisje plaatsen in $(3/5, 3/4)$. Daarvoor kunnen we kiezen tussen $(4/7, 2/3)$ en $(5/7, 3/4)$. In beide gevallen is er op lijn 7 nog één interval leeg, waar we x_6 in zetten. Er zijn dus voor de rechterhelft 2 mogelijkheden.

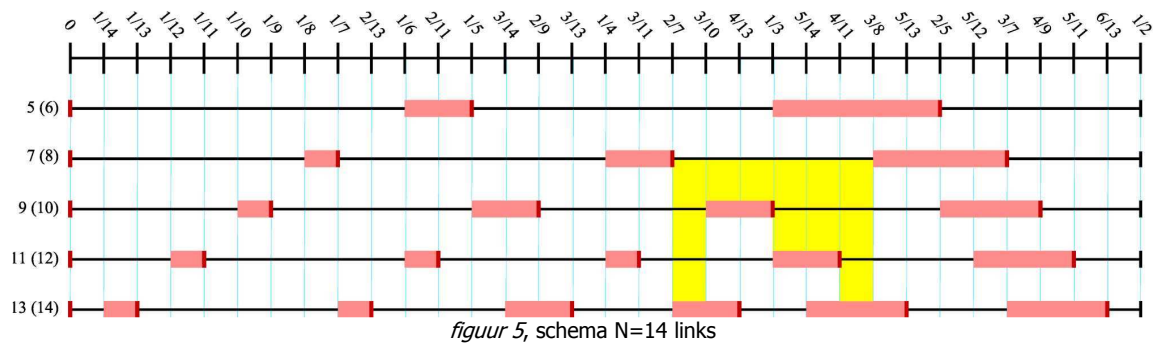
Ik hoop hiermee duidelijk gemaakt te hebben dat deze schema's het zoeken naar oplossingen aanzienlijk vereenvoudigen, omdat ze het aantal mogelijkheden a priori flink inperken.

Overigens kunnen de schema's nog compacter. Als we er in slagen om alles kloppend te maken **vanaf** lijn 5 (links 5(6) en rechts 4(5) en alles daaronder), dan kunnen we de lijnen daarboven **altijd** kloppend krijgen. De lijnen daarboven kunnen we dus weglaten



(zie *figuur 4*). Op lijn 5 staan nu 5 groene balkjes, 3 links en 2 rechts. Nog zonder kruisje, omdat we nog moeten beslissen op welke lijn we de kruisjes gaan zetten. We kunnen nu: de balk in $(0, 1/6)$ doortrekken naar lijn 1 en daar het kruisje zetten, de balk in $(1/5, 1/3)$ niet doortrekken, en er een kruisje inzetten op lijn 5, de balk in $(2/5, 1/2)$ doortrekken naar lijn 3 en daar een kruisje zetten, de balk in $(3/5, 3/4)$ niet doortrekken, en er een kruisje inzetten op lijn 4 en de balk in $(4/5, 1)$ doortrekken naar lijn 2 en er daar het kruisje zetten. Door te vergelijken met *figuur 2* en 3 kan u zelf gemakkelijk nagaan, dat dit **altijd** goed gaat.

Ik ga nu laten zien wat dit oplevert bij grotere aantallen kruisjes. Het maximum aantal kruisjes (met de links-rechts voorwaarde) dat de inzenders van de puzzel gevonden hebben was 13. In de uitwerking in Euclides stellen wij dat dat ook het maximum is dat gevonden kan worden. Om dat te onderbouwen ga ik het schema toepassen op 14 kruisjes



In *figuur 5* ziet u het uitgewerkte schema voor de linkerhelft voor 14 kruisjes. Ik heb er een geel vlak ingetekend waaraan u, in één oogopslag, kunt zien dat een oplossing met 14 kruisjes niet mogelijk is. Immers, in zo'n oplossing moet er op lijn 7 een kruisje staan in het interval $(2/7, 3/8)$, maar dit hele interval wordt geblokkeerd door verboden gebieden op de lijnen erna.

We zullen onze ambitie moeten bijstellen en dus gaan we verder met een schema voor 13 kruisjes. Het schema voor de linkerhelft daarvan vindt u in *figuur 6* hieronder.

Het aantal mogelijkheden is nu natuurlijk groter dan bij 7 kruisjes, maar toch zover ingeperkt dat die mogelijkheden bijna allemaal tot een oplossing leiden. Ik kan dat alleen laten zien door u uit te nodigen het lege schema (bijlage *figuur 20*) af te drukken en er zelf wat in te puzzelen.

Ik geef hier één van de mogelijkheden (ingetekend in *figuur 6*): Ik begin weer met x_1 helemaal links te zetten, in $(0, 1/13)$.

Op lijn 5 moeten er nu nog twee kruisjes bij komen. Één in $(2/5, 1/2)$. Een groot deel van dat interval is geblokkeerd. We kunnen nog kiezen uit $(5/11, 6/13)$ en $(6/13, 1/2)$. Ze leiden beide tot oplossingen, maar ik kies nu $(5/11, 6/13)$.

Het andere kruisje dat nog op lijn 5 moet komen komt in $(1/5, 1/3)$. Hier zijn 2 mogelijkheden: $(2/9, 3/13)$ en $(2/7, 3/10)$.

Op het eerste gezicht lijkt er een derde mogelijkheid te zijn:

$(3/13, 1/4)$. Maar hier kunnen we moeilijkheden later voorzien. In *figuur 7* ziet u dat er na die keuze tussen de kruisjes in $(3/13, 1/4)$ en $(5/11, 6/13)$ nog 2 intervallen zonder kruisje zijn op lijn 11 en nog maar één op lijn 13. Dat kan natuurlijk niet goed gaan! **Het loont dus de moeite om bij het zetten van een kruisje het aantal lege intervallen te tellen op de lijnen eronder!**

De andere mogelijkheden op lijn 5 leiden beide tot oplossingen, maar ik kies nu $(2/7, 3/10)$.

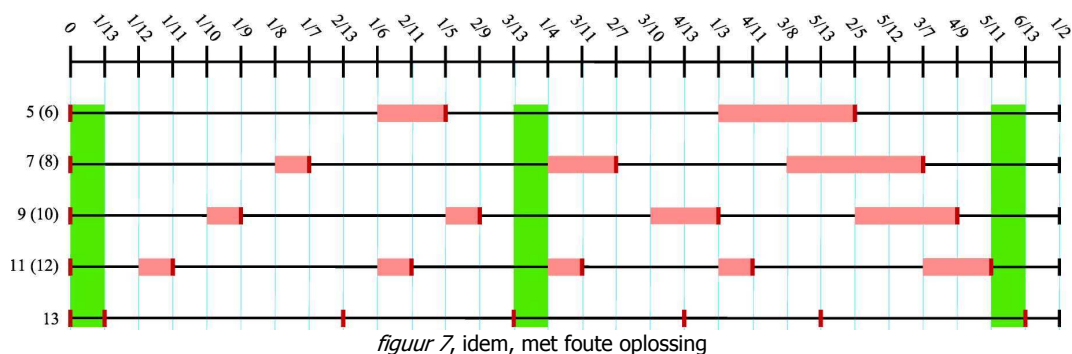
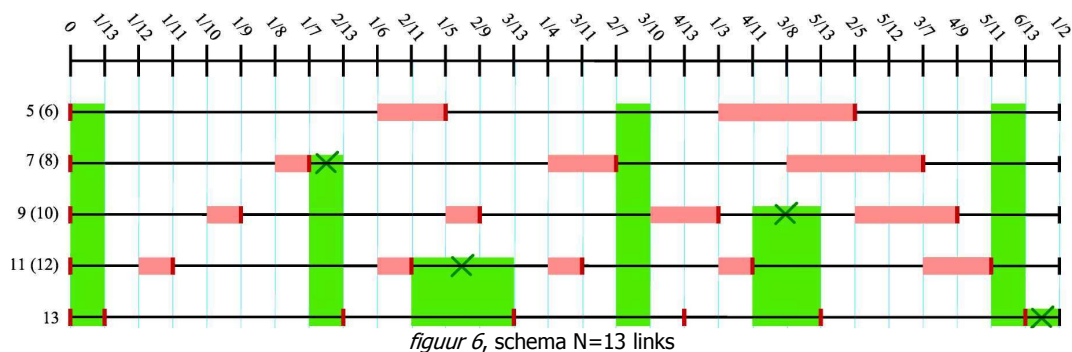
Op lijn 7 moet nu een kruisje komen in $(1/7, 1/4)$. Er zijn nu 4 mogelijkheden: $(1/7, 2/13)$, $(2/13, 1/6)$, $(2/11, 1/5)$ en $(2/9, 3/13)$.

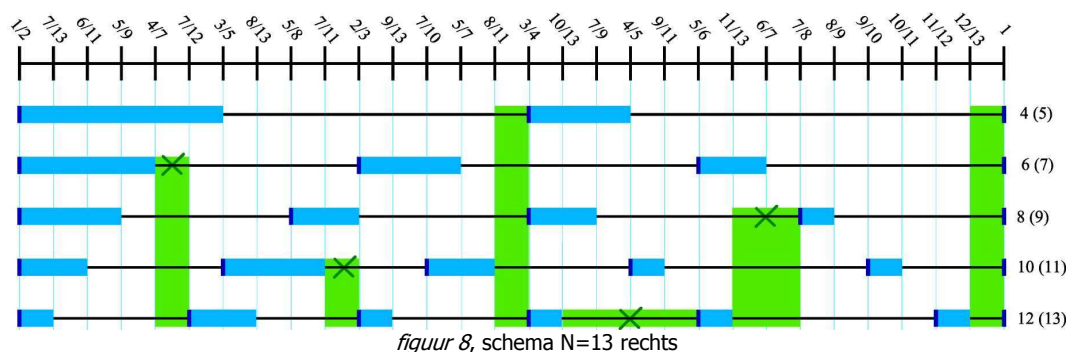
$(3/13, 1/4)$ is niet geblokkeerd door een verboden gebied, maar omdat het op lijn 13 in hetzelfde interval zou komen als het kruisje op lijn 5. Opnieuw leiden alle 4 de genoemde mogelijkheden tot oplossingen, maar ik kies nu $(1/7, 2/13)$.

Op lijn 9 zijn er 2 mogelijkheden, waarvan ik $(4/11, 5/13)$ kies.

Op lijn 11 is één mogelijkheid: $(2/11, 3/13)$ en op lijn 13 blijft $(5/13, 6/13)$ over.

Daarmee hebben we een oplossing voor de linkerhelft van het schema. We gaan nu kijken naar de rechterhelft.





Figuur 8 is de rechterhelft van het schema voor 13 kruisjes. Het aantal mogelijkheden is hier veel kleiner dan bij de linkerhelft. Als we beginnen x_2 helemaal rechts te zetten in (12/13, 1), dan hebben we verder steeds precies één mogelijkheid. U kan dat zelf gemakkelijk nagaan. U kunt ook het lege schema in *figuur 21* in de bijlage gebruiken.

We weten nu dat als de oneven kruisjes links, en de even kruisjes rechts gezet moeten worden het aantal kruisjes maximaal 13 is. We gaan nu kijken naar oplossingen als er geen restricties zijn wat betreft het links of rechts zetten van de kruisjes.

Het is u misschien bij het puzzelen opgevallen dat u bijna steeds als u een kruisje links had gezet, gedwongen was het volgende kruisje rechts te zetten en omgekeerd, ook als er geen links-rechts beperking is. Toch is het duidelijk dat we om verder te komen dan 13 kruisjes één of meer keren hiervan zullen moeten afwijken. We gaan in het volgende hoofdstuk eens kijken wanneer dat wel kan en wanneer niet.

2. Omslagpunten

Om een reeks van kruisjes die om-en-om in de linkerhelft en in de rechterhelft gezet worden te doorbreken moeten we een kruisje aan dezelfde kant zetten als het vorige kruisje.

Steeds nadat u een even kruisje gezet hebt is het aantal kruisjes even en moeten er evenveel kruisjes in de linkerhelft als in de rechterhelft staan. Als u het volgende oneven kruisje rechts zet, dan staat er in de rechterhelft dus één kruisje meer dan in de linkerhelft. Het daar weer opvolgende even kruisje zal dus in de linkerhelft moeten komen om weer aan beide kanten evenveel kruisjes te hebben.

Alleen oneven kruisjes kunnen dus aan dezelfde kant staan als het vorige kruisje.

Verder, nadat een oneven kruisje rechts is gezet, en er dus in de rechterhelft meer kruisjes staan dan in de linkerhelft moet natuurlijk het kruisje in het middelste interval rechts van het midden staan.

Om het volgende oneven kruisje links te kunnen zetten moet het kruisje in het middelste interval dus naar de andere kant van dat interval.

Dat kan natuurlijk alleen als het kruisje dat in het middelste interval stond dicht genoeg bij de rand stond, zodat het buiten het volgende middelste interval komt.

In *figuur 9* ziet u hoe de situatie zou kunnen zijn in het midden van het schema. Op de oneven lijnen ziet u het middelste interval, op de even lijnen de 2 middelste intervallen.

Op lijn $2k-1$ staat het (groene) kruisje in het middelste interval links van het midden. Dat kruisje blijft natuurlijk staan op de volgende lijnen, maar op lijn $2k+1$ raakt het buiten het middelste

interval, waardoor er plaats komt voor een nieuw (paars) kruisje rechts van het midden van het middelste interval. Ook is uit de figuur duidelijk dat het paarse kruisje rechts van het midden **moet** komen, omdat het anders op de lijn $2k+2$ in hetzelfde interval komt als het groene. Overigens hoeft dat paarse kruisje niet "nieuw" te zijn op lijn $2k+1$, het had ook al op lijn $2k$ kunnen worden gezet, als het oranje kruisje wat meer naar rechts gestaan had.

Ik noem de lijn $n = 2k$ hier een omslagpunt: vóór deze lijn staat het punt in het middelste interval links, en komen de oneven kruisjes dus ook links, daarna wisselt dat om.

We kunnen dus, door het kruisje in het middelste interval dichtbij of minder dichtbij de rand te zetten, bepalen wanneer het volgende omslagpunt komt. Toch zijn we daar niet vrij in.

Dat het groene kruisje op lijn $2k+2$ nog in het interval links van het midden staat, zodat het "nieuwe" middelste kruisje rechts moet staan is al zo als $k \geq 2$ (u kan dat gemakkelijk nagaan), maar naarmate k groter is, duurt het langer voordat het groene kruisje uit het interval links van het midden verdwijnt.

Zolang het er in staat, mag er geen nieuw omslagpunt komen, want dan komt er weer een nieuw middelste kruisje, dat nu weer links komt te staan, en op de even lijnen dus in het interval links van het midden.

We kunnen berekenen hoe lang we moeten wachten.

We bekijken een omslagpunt waarbij het kruisje in het middelste interval van links naar rechts verhuist.

Als $n = 2k$ het omslagpunt is (zoals in *figuur 9*) dan is er een kruisje x_i (het groene kruisje) met $i < 2k$ en met

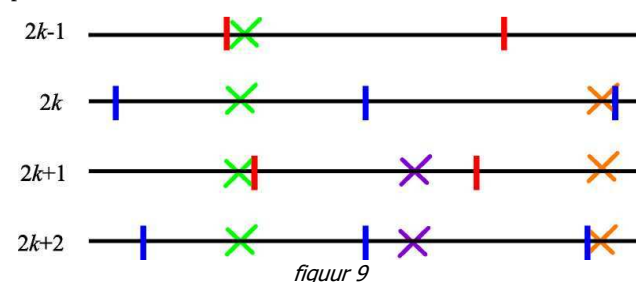
$$(k-1)/(2k-1) < x_i < k/(2k+1)$$

Als $m = 2r$ het volgende omslagpunt is ($r > k$), dan moet x_i op de lijn $2r+2$ buiten het interval links naast het midden liggen, dus $x_i < r/(2r+2)$.

We hebben dus:

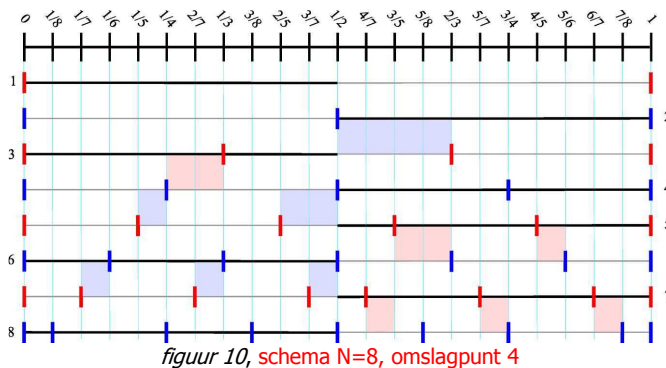
$$\frac{k-1}{2k-1} < \frac{r}{2r+2}, \text{ en dat kunnen we herleiden tot } r > 2k-2 \text{ en dus } r \geq 2k-1, \text{ en dus } m \geq 2(n-1)$$

Bij wat grotere waarden van n krijgen we dus langere reeksen kruisjes die om-en-om links en rechts gezet moeten worden, en in die reeksen krijgen we dezelfde verboden gebieden als in het geval dat we bij voorbaat alle oneven kruisjes links en de even rechts plaatsen.

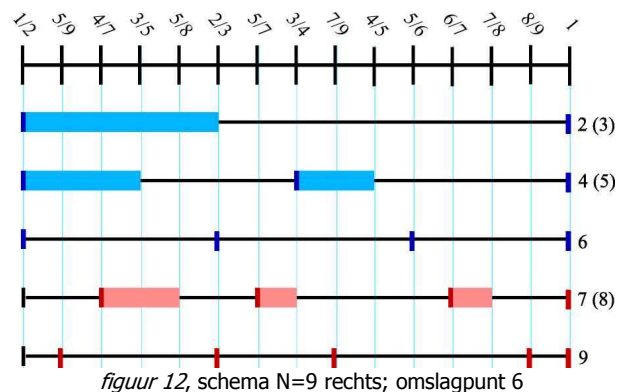
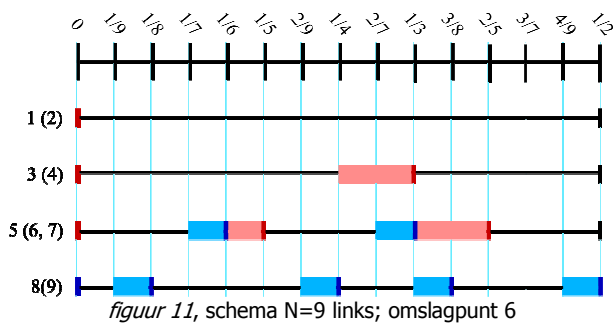


We gaan hiervan gebruik maken om handig te puzzelen.

We kijken hoe de verboden gebieden er uit zien bij een omslagpunt. We beginnen met een schema voor 8 kruisjes, met één omslagpunt bij 4. Dat betekent dat de kruisjes nrs. 1, 3, 6 en 8 links komen, de kruisjes 2, 4, 5 en 7 rechts.



In figuur 10 ziet u een vergelijkbaar schema als in figuur 2. Voorbij het omslagpunt worden de oneven kruisjes rechts en de even links, en dus worden de verboden gebieden gespiegeld. Omdat kruisje 4 en 5 allebei rechts worden gezet moeten de kruisjes die links op lijn 3 staan, nu ook kloppen voor zowel lijn 4 als lijn 5. De rechts op lijn 4 komen geen verboden gebieden, omdat op lijn 5 het kruisje ook rechts komt.



Ook hier kunnen we het schema compacter maken door het in een linker- en een rechter helft te verdelen, en in elke helft alleen de lijnen te tekenen waarop de kruisjes moeten komen, met de verboden gebieden. (Zie figuur 11 voor de linkerhelft en figuur 12 voor de rechterhelft)

In het volgende hoofdstuk gaan we op deze manier schema's maken voor grotere aantallen kruisjes.

We hebben gezien dat we met de links-rechts voorwaarde niet verder komen dan 13 kruisjes (zie bladzijde 2-4). Dat kwam doordat de verboden gebieden die je dan krijgt op de lijnen 7, 9, 11 en 13 het onmogelijk maken om een kruisje te zetten op lijn 7 tussen $2/7$ en $3/7$ (zie figuur 4) Omslagpunten bij 6 of eerder kunnen dit niet oplossen: we krijgen dan dezelfde situatie gespiegeld, zodat er tussen $4/7$ en $5/7$ geen kruisje kan staan. In figuur 11 ziet u dat een omslagpunt bij 6 op

lijn 5 zorgt voor extra verboden gebieden. Bekijk u figuur 5 nog eens, dan zal duidelijk zijn dat een omslagpunt bij 14 daar door extra verboden gebieden op lijn 13 nooit een oplossing kan brengen, evenmin als nog latere omslagpunten.

We weten dus zeker dat en (minstens één) omslagpunt moet zijn bij 8, 10 of 12. Eerder in dit hoofdstuk zagen we dat na een omslagpunt bij 8, de volgende pas kan komen bij $2.7=14$, en na een omslagpunt bij 10 pas bij $2.9=18$. We kunnen dus nog preciezer zijn: er moet precies één omslagpunt zijn bij 8, 10 of 12.

3. De eerste paar lijnen

We zagen in het geval van de links- rechts voorwaarde dat we de eerste lijnen weg konden laten, omdat we konden aantonen dat als $N > 5$, en we hebben een correcte invulling voor de lijnen 5-N, er altijd een oplossing is voor alle lijnen 1-N, met dezelfde kruisjes op lijn 5-N.

Dit geldt niet zonder meer in het algemene geval, maar er geldt wel iets dergelijks.

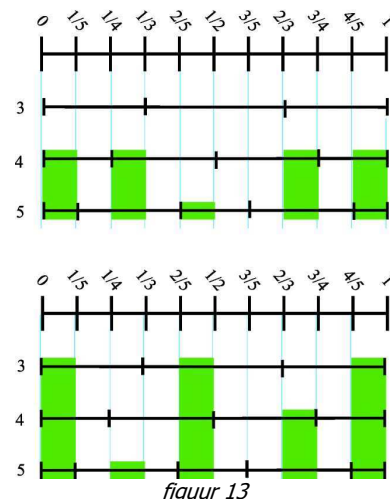
Omdat we steeds het eerste kruisje helemaal links en het tweede helemaal rechts zetten, mogen we veronderstellen dat in een invulling van de lijnen k-N op lijn k een kruisje helemaal links en een kruisje helemaal rechts staat.

In het algemene geval (zonder links-rechts voorwaarde)geldt dan: Als $N > 7$, en we hebben een correcte invulling voor de lijnen 5-N, dan is er altijd een oplossing voor alle lijnen 1-N, met dezelfde kruisjes op de lijnen 7-N.

Dit is wat lastiger aan te tonen dan met de links-rechts voorwaarde, maar hier volgt een poging:

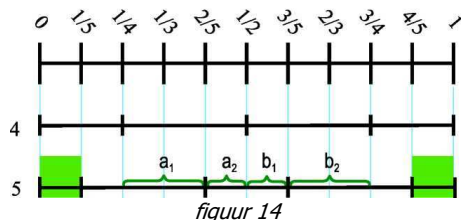
Het is eenvoudig in te zien, dat elke invulling voor lijn 3, kan worden uitgebreid tot een invulling van lijn 1-3, met dezelfde kruisjes op lijn 3. Op lijn 2 laten we dan het middelste kruisje weg, en op lijn 1 het meest rechtse.

De volgende stap is om aan te tonen dat als we een correcte invulling hebben voor lijn 4 en 5, er ook een correcte invulling is van lijn 3-5, met dezelfde kruisjes op lijn 5. (zie figuur 13).



De balkjes helemaal links en helemaal rechts zijn altijd naar boven door te trekken.

Als er van de 2 middelste balkjes op lijn 4 geen in ($1/3$, $2/3$) zit, dan kunnen we het middelste balkje op lijn 5 naar boven doortrekken. Één van de balkjes die op lijn 4 stonden wordt daarmee overtoollig, dus die brengen we terug naar alleen lijn 5 (en verder)



We zouden nu nog moeten aantonen:

Als $N > 7$, en we hebben een correcte invulling voor de lijnen 5-N, dan is er altijd een oplossing voor alle lijnen 4-N, met dezelfde kruisjes op de lijnen 7-N.

Het bewijs dat ik hiervoor vond is vrij lang en het resultaat is niet veel handiger dan iets dat we uit *figuur 14* zo kunnen aflezen:

Stel we hebben een correcte invulling van lijn 5-N. We weten dan dat als we lijn 4 kunnen invullen lijn 1-3 ook ingevuld kunnen worden.

Om te weten of dat kan hoeven alleen te kijken naar de in de *figuur* getekende intervallen $a_1 = (1/4, 2/5)$, $a_2 = (2/5, 1/2)$, $b_1 = (1/24, 3/5)$ en $b_2 = (3/5, 3/4)$. Als er op lijn 5 een kruisje staat in (minstens) één van de intervallen a en in (minstens) één van de intervallen b dan kunnen we naar alle 4 de intervallen op lijn 4 een balkje doortrekken. Ik zal daarom in de schema's lijn 1-4 weggelaten en op lijn 5 de intervallen a en b aangeven zoals in *figuur 14*.

Ondanks dat lijn 5 zonder verboden gebieden alleen als geheel bekeken kan worden zal ik uit praktische overwegingen de grotere schema's in een linker en rechter deel splitsen. Dat betekent dat we bij het invullen van lijn 5 beide schema's moeten bekijken, en op moeten letten dat er in het middelste interval precies één kruisje komt.

4. Zoveel mogelijk kruisjes met omslagpunt 12

Aan het eind van hoofdstuk 2 was de conclusie: er moet (om verder te komen dan $N=13$) precies één omslagpunt zijn op één van de lijnen 8, 10 of 12.

Toen ik het ging proberen probeerde ik het omslagpunt bij 12 het eerst. Ik deed dat uit praktische overwegingen: zo hoefde ik zo min mogelijk te veranderen in het schema zonder omslagpunten dat ik al eerder had gemaakt. Ik had daarmee veel geluk: dat blijkt het beste resultaat te geven. Ik ga u dat in dit hoofdstuk laten zien. Daarna laat ik zien dat het resultaat van omslagpunten bij 8 en 10 minder is.

We willen dus een schema maken voor een omslagpunt bij 12. We weten dat er dan geen omslagpunt kan zijn bij 8 of 10, en ook dat het eerste omslagpunt daarna pas kan komen bij 2.11=22.

schema N=18

We mogen er vanwege de symmetrie van uitgaan dat op lijn 7 het middelste kruisje links staat. Zonder omslagpunt na lijn 7 ligt het knelpunt dan bij het interval $(2/7, 3/7)$ op lijn 7. We gaan kijken of een omslagpunt op lijn 12 daar verandering in kan brengen.

Het zal blijken dat we dan wel 17, maar geen 18 kruisjes kunnen zetten. Van het schema voor 18 kruisjes laat ik alleen het deel zien waar het mis gaat: de lijnen 7-18 tussen $1/4$ en $1/2$ (zie *figuur 15*).

Dit is (een deel van) de linkerhelft van het schema. We zetten x_7 aan de linkerkant, dus x_9 en x_{11} ook, maar x_{13} komt rechts door het omslagpunt bij 12. Aan deze kant krijgen we dan dus 14, 16 en 18.

Op lijn 7 krijgen we verboden gebieden i.v.m. de (niet getekende) lijn 8: de intervallen $(i/8, i/7)$ zijn verboden. Hetzelfde geldt voor lijn 9 i.v.m. de (niet getekende) lijn 10.

Omdat lijn 13 aan de andere kant komt krijgen we op lijn 11 beperkingen zowel i.v.m. lijn 12 als i.v.m. lijn 13: de intervallen $(i/13, i/11)$ zijn

verboden.

Op dezelfde manier: verboden gebieden op de lijnen 14 en 16 i.v.m. resp. 15 en 17. Lijn 18 krijgt geen verboden gebieden, omdat het schema niet verder gaat dan 18 kruisjes.

Het kruisje in het interval $(2/7, 3/8)$ op lijn 7 kan nu maar op één plaats staan: in $(2/7, 5/17)$. Het kruisje in het interval $(1/3, 2/5)$ op lijn 9 kan ook maar op één plaats staan: in $(3/8, 5/13)$. Er zijn nog meer intervallen waarvoor we geen keus hebben, maar dat hoeft al niet meer: We hebben nu tussen de al getekende balkjes geen vrije intervallen meer op lijn 18, maar nog wel een op lijn 16. (zie de opmerking over aantallen lege intervallen op blz. 3). 18 kruisjes lukt dus niet, en we gaan verder met het schema voor 17 kruisjes.

schema N=17

We beginnen met de linkerhelft. (Zie *figuur 16* op pagina 7).

We beginnen weer met het eerste kruisje helemaal links te zetten. (Het kruisje op lijn 1 valt buiten beeld, maar de groene strook niet).

In het interval $(1/3, 1/2)$ op lijn 6 kan het kruisje alleen staan in $(5/11, 6/13)$. Ik teken de bijbehorende groene strook, maar niet het kruisje, omdat ik nog niet weet of het kruisje er al eerder stond dan op lijn 6.

In het interval $(2/7, 3/8)$ op lijn 7 kan het kruisje alleen staan in $(2/7, 5/17)$. Ook hier teken ik alleen de groene strook.

In het interval $(1/3, 2/5)$ op lijn 9 kan het kruisje alleen staan in $(3/8, 5/13)$. Hier kunnen we het kruisje wel bij tekenen, want het kan er niet eerder bestaan hebben dan op lijn 9.

Het kruisje in het interval $(5/16, 6/17)$ op lijn 16 moet er dus op die lijn voor het eerst staan.

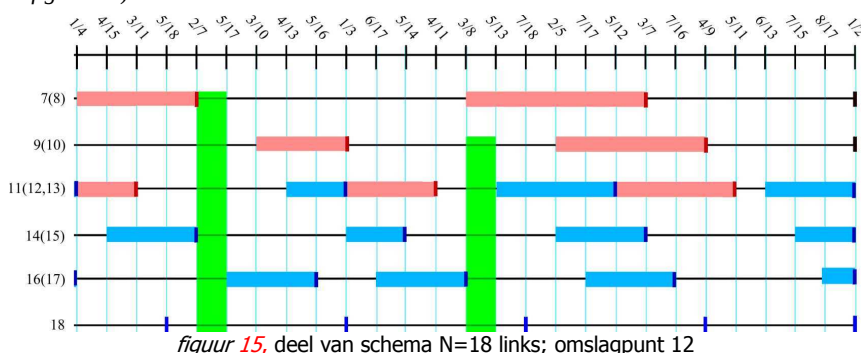
Er moeten nu nog 3 kruisjes gezet worden in het 2e, 3e en 4e interval op lijn 16. Hiervoor zijn verschillende mogelijkheden, waarvan ik er één heb ingetekend (in een iets andere kleur groen dan de "verplichtte" kruisjes).

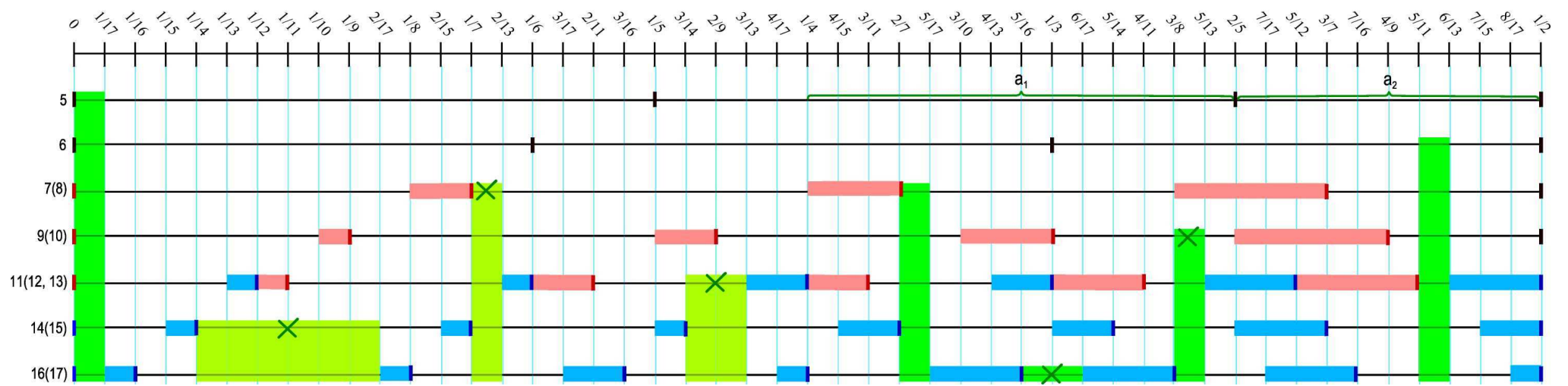
Bij de gekozen mogelijkheid komen er, behalve de strook helemaal links, slechts 2 groene stroken in aanmerking om verder naar boven te worden doorgetrokken, maar dat is voldoende om alle intervallen van de lijnen 5 en 6 een kruisje te geven. Ook kan worden voldaan aan de eis dat er een kruisje komt op a_1 of a_2

We bekijken nu de rechter helft (zie *figuur 17* op blz.7). Omdat x_7 links staat moeten de kruisjes op lijn 6 hier ook kloppen voor lijn 7, dus krijgen we verboden gebieden op lijn 6 en hoeven we lijn 7 niet te tekenen.

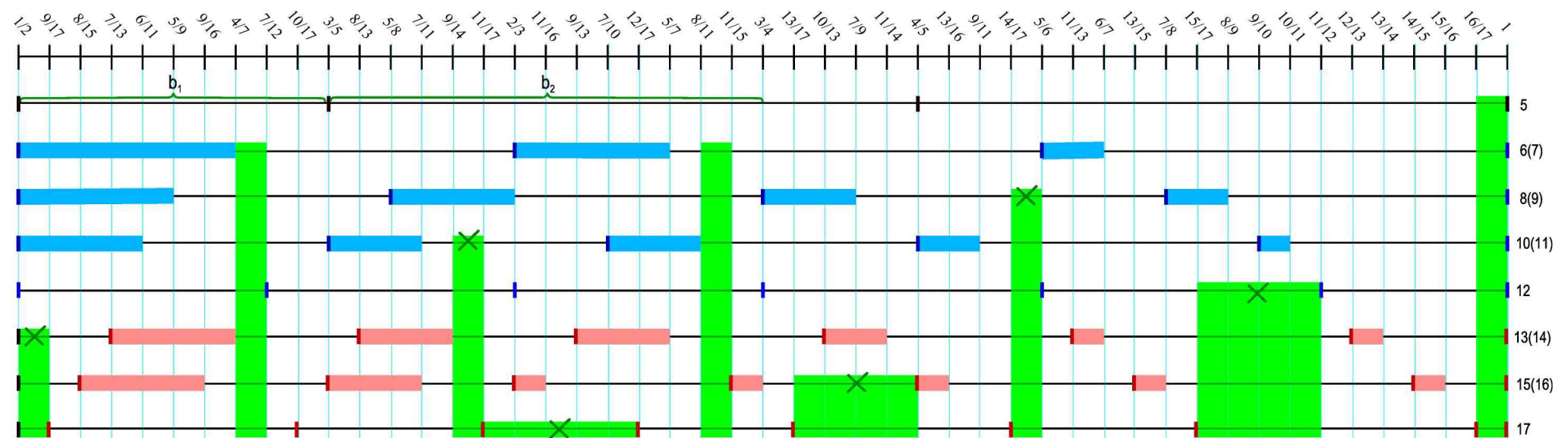
Hier beginnen we weer met het strookje helemaal rechts.

Verder zijn er hier geen kruisjes die maar op één plaats kunnen staan. Er zijn hier heel veel mogelijke manieren om de kruisjes in te vullen. Om het voorbeeld dat ik heb ingevuld te krijgen ben ik begonnen met lijn 6(7), en heb daarop de balkjes zover mogelijk naar links gezet. Hier heb ik nog geen kruisjes in gezet, om open te laten welke ik naar boven door laat lopen.. Daarna heb ik de kruisjes op de lagere lijnen ingevuld.





figuur 16, schema N=17 links; omslagpunt 12



figuur 17, schema N=17 rechts; omslagpunt 12

Om de oplossing af te maken moeten we nog één en ander doortrekken naar boven. Door de manier waarop in het voorbeeld de kruisjes zijn gezet op lijn 7, 11 en 14 hebben we maar één balkje dat we door kunnen trekken naar het 2e interval op lijn 6 (dat kan anders zijn bij een andere invulling). Dit balkje is ook de enige dat gebruikt kan worden voor het 2e interval op lijn 5, dus we trekken het balkje in (2/7, 5/17) door naar lijn 5. Lijn 6 is daarmee aan beide kanten compleet. Rechts is het balkje in (8/11, 11/15) de enige dat doorgetrokken kan worden naar het op-een-na laatste interval op lijn 5.

We hebben we zowel links als rechts een balkje dat we door kunnen trekken naar het middelste interval op lijn 5. We kunnen kiezen, omdat we in beide gevallen zowel op de intervallen a als op de intervallen b kruisjes hebben.

Het doortrekken van de oplossing naar de lijnen 1-4 (niet getekend) laat ik aan u over.

Als u het het lege schema in de bijlage (figuur 22 en 23) afdruckt en er zelf in gaat puzzelen zult u merken dat het nauwelijks fout kan gaan. Dat komt vooral door de ingetekende verboden gebieden. Daarnaast helpt het als u let op de lege intervallen op de lagere lijnen (zie blz 3!). Het aantal mogelijkheden is vrij groot! Warmus (zie noot op blz 1) zegt zelfs dat er, afgezien van spiegeling, 768 oplossingen zijn met 17 kruisjes, maar dan moet u wel oplossingen meetellen waarin **niet** het eerste kruisje helemaal links, en het tweede helemaal rechts staat.

5. Andere omslagpunten dan 12

Tot nu toe heb ik de diagrammen steeds afgebeeld met de breukenrij op gelijke afstanden, dus niet op schaal. In *figuur 18* op blz 9 ziet u de verboden gebieden zonder omslagpunten voor $N = 22$ op schaal getekend. De verboden gebieden worden zo veel regelmatig, maar de rasterlijntjes die de breukenrij aangeven komen op onregelmatige afstanden te staan. Het wordt zo ook ondoenlijk om alle breuken aan te geven, en dat heb ik ook niet gedaan.

Het is de moeite waard dat schema nader te bestuderen. We zien dan dat de verboden gebieden aan weerszijden van $1/2$ reeksen vormen die een belemmering zijn om kruisjes neer te zetten die toenemende waarden van n kunnen blijven staan.

In het linker schema begint in $(1/4, 1/2)$ op elke lijn $4i-1(4i)$ (dus $3(4)$, $7(8)$ etc.) een reeks verboden gebieden waarvan de eerste begint bij $1/4$, en die op elke volgende lijn naar rechts opschuift. Bij $1/3$ vindt u steeds 2 verboden gebieden op 2 opvolgende lijnen, waartussen geen ruimte meer is:

$(1/4, 1/3)$ en $(2/6, 2/5)$ op de lijnen $3(4)$ en $5(6)$ in de reeks met $i=1$ $(3/10, 3/9)$ en $(4/12, 4/11)$ op $9(10)$ en $11(12)$ in de reeks met $i=2$ $(5/16, 5/15)$ en $(6/18, 6/17)$ op $15(16)$ en $17(18)$ in de reeks met $i=3$ etc.

Vanaf dat punt is de reeks "gesloten" en zitten kruisjes op de intervallen tussen 2 reeksen ingeklemd. Een voorbeeld is het kruisje in het interval $(1/3, 2/5)$ op lijn $9(10)$. Dat kan, zonder omslagpunt, niet langer mee dan tot lijn $15(16)$. Dat betekent dat er op lijn 10, 12 of 14 een omslagpunt moet komen.

Maar na het omslagpunt gaan de reeksen (gespiegeld) verder in het rechterdeel van het schema, en moet er verderop weer een nieuw omslagpunt komen.

Nog verontrustender is dat hetzelfde zich vanaf lijn $15(16)$ gaat voordoen in het interval na de reeks die begint op lijn $11(12)$. Het kruisje in het interval $(1/3, 3/8)$ op deze lijn kan zonder omslagpunt niet verder mee dan tot lijn $21(22)$, dus we hebben ook een omslagpunt nodig op lijn 16, 18 of 20.

En we kunnen in het schema nog net zien, dat op lijn $21(22)$ het volgende verboden gebied bij $1/3$ is aangekomen.

Het vergt wat rekenwerk om aan te tonen dat dit zo door gaat. Ik geef die berekening hier niet maar wel het resultaat:

Om de kruisjes te kunnen blijven zetten zouden we bij één van ieder drietal lijnen $6i-2$, $6i$ en $6i+2$, met $i > 1$ een omslagpunt moeten hebben. Kan dat niet, dan is $N < 6i+4$

Maar we hebben in hoofdstuk 2 gezien dat als we een omslagpunt hebben bij n (n even), het volgende omslagpunt pas kan komen bij $m = 2(n-1)$

Als u nog de hoop zou hebben dat de rij kruisjes oneindig lang door kan gaan (en wie heeft dat niet gedacht toen hij voor het eerst geconfronteerd werd met dit probleem?), dan is die hoop nu wel vervlogen. En dan hebben we alleen nog gekeken naar de linkerhelft van het schema (of het spiegelbeeld daarvan na een omslagpunt). Maar de rechterhelft vertoont iets vergelijkbaars.

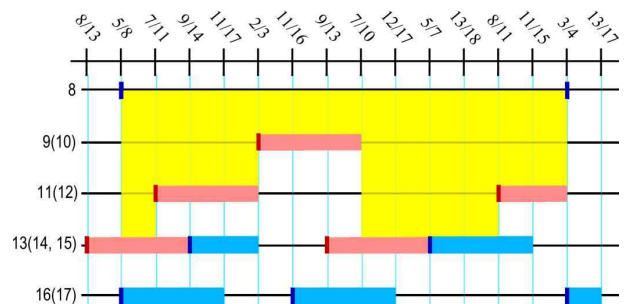
Met zoveel restricties zal het niet verbazen dat de werkelijke bovengrens voor het aantal kruisjes nog iets lager ligt dan je op grond van deze beschouwingen kan berekenen.

We weten dat we met een omslagpunt bij 12 op 17 kruisjes kunnen komen, en dat om verder te komen dan 13 kruisjes, we een omslagpunt nodig hebben bij 8, 10 of 12.

We weten ook dat de reeks kruisjes niet oneindig door kan gaan. We hebben nog één vraag over: hoe ver komen we met een omslagpunt bij 8 of 10?

Bij een omslagpunt bij 8 moet er na de 8 nog een omslagpunt komen. We zagen net dat er een omslagpunt moet zijn op 10, 12 of 14 om verder te kunnen komen dan 15 kruisjes.. Het eerste omslagpunt na 8 kan $2 \times 7 = 14$ zijn.

Het heeft dus alleen zin om te kijken naar een schema met omslagpunten op 8 en 14.

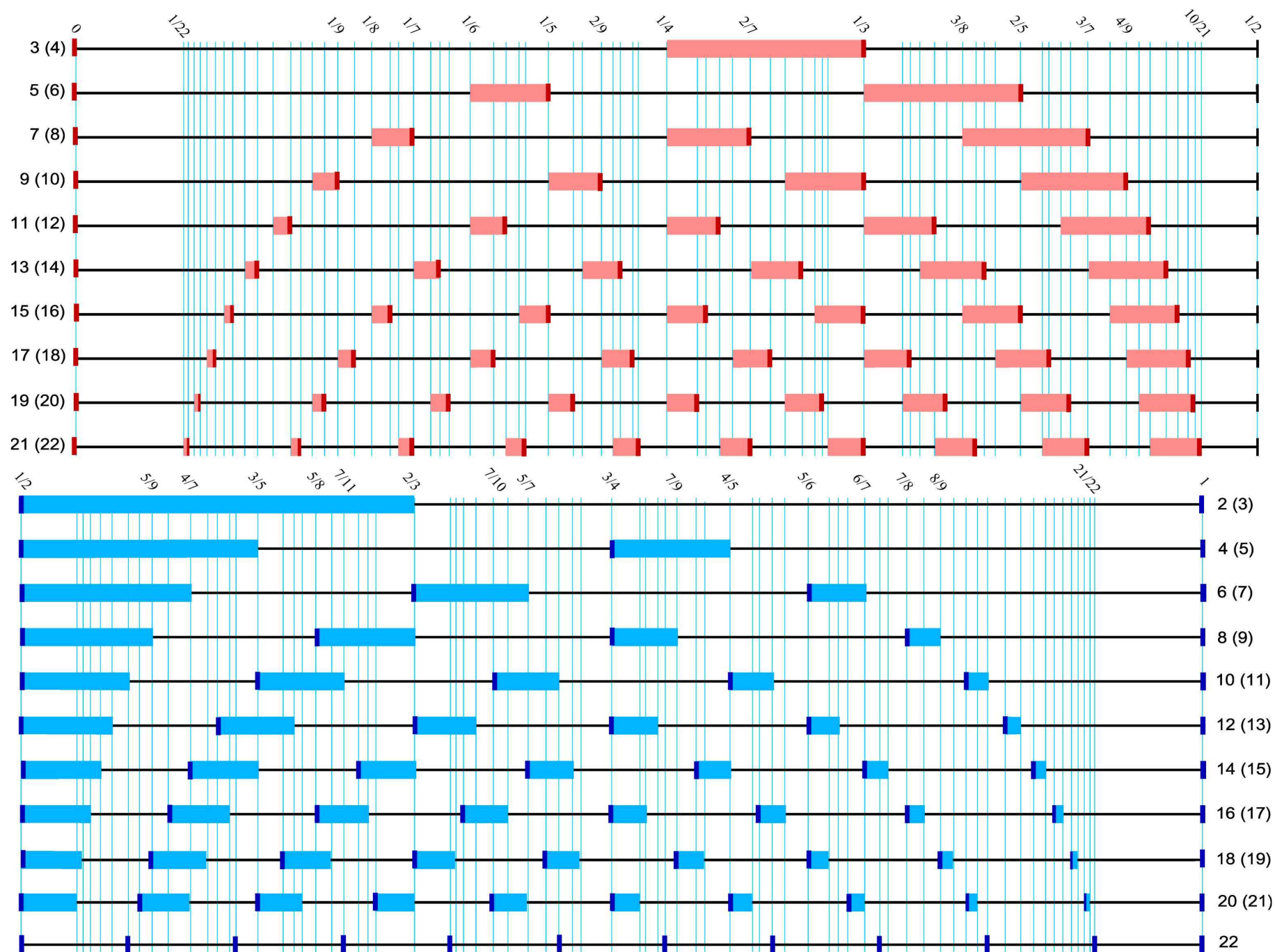


figuur 18, deel van schema $N=17$ rechts; omslagpunten 8 en 14

In *figuur 18* kunt u zien, dat het omslagpunt bij 14 het alleen maar erger maakt. De dubbele verboden gebieden op lijn 13 zorgen er voor, dat we zelfs de 15 kruisjes niet halen.

Om te weten hoe het afloopt met een omslagpunt bij 10 kijken we nog eens naar *figuur 19* op blz 9, deze keer naar de rechter helft van het schema. Het 2e interval (van links) op lijn $10(11)$ is het interval $(7/11, 7/10)$. Als u goed kijkt ziet u dat een kruisje in dit interval niet kan blijven staan op de lijn $16(17)$. We kunnen daar niets meer aan doen, want het eerst volgende mogelijke omslagpunt na 10 is $2 \times 9 = 18$.

De conclusie is dus dat we alleen met een omslagpunt bij 12 de 17 kruisjes kunnen halen.



figuur 19, schema $N=22$; op schaal, zonder omslagpunt

6. Verwisseling van de kruisjes zodat x_1 helemaal links, en x_2 helemaal rechts komt

Als er een oplossing is van N kruisjes, dan kunnen we de kruisjes omnummeren zodanig dat x_1 tussen 1 en $1/N$ ligt, en x_2 tussen $(N-1)/N$ en 1.

Ik begin met het eerste deel van de stelling: Als er een oplossing is van N kruisjes, dan kunnen we de kruisjes omnummeren zodanig dat x_1 tussen 1 en $1/N$ ligt.

Bewijs: laat $A = \{x_1 \dots x_N\}$ een correcte oplossing zijn. W is de verzameling correcte oplossingen waarvan de reeks locaties van de posities van de kruisjes een permutatie is van $x_1 \dots x_N$.

Laat nu $B = \{y_1 \dots y_N\}$ een oplossing uit W zijn, waarbij het rangnummer i van het element y_i met $0 < y_i < 1/N$ minimaal is.

We moeten bewijzen dat dan $i=1$.

Ik bewijs het uit het ongerijmde: stel dat $i > 1$:

Nadat het kruisje op positie y_i geplaatst werd, waren er i kruisjes,

in elk i^e deel van de strook één.

Dit was toen dus het enige kruisje tussen 0 en $1/i$. Omdat $i > 1$ moet er tot en met het plaatsen van kruisje $i-1$ een ander kruisje k het meest linkse geweest zijn. Dan moet: $k < i$, en $y_k < 1/(i-1)$.

We construeren nu een nieuwe oplossing $C = \{z_1 \dots z_N\}$ met $z_k = y_j$, $z_j = y_k$ en $z_i = y_i$ als $i \neq j$ en $i \neq k$.

Vóór kruisje k zijn B en C identiek, tussen kruisje k en kruisje $j-1$ is in beide kruisje k de meest linkse, bij B op $y_k < 1/(i-1)$ en bij C op $z_k = y_j < 1/N$, en dus beide in het eerste interval.

Vanaf kruisje j staan de kruisjes in beide oplossingen op dezelfde plaats.

Dus C is een correcte oplossing en een permutatie van de oorspronkelijke oplossing, dus is C een element van W . Het rangnummer van het kruisje tussen 0 en $1/N$ is $k < i$, en dat is in tegenspraak met de veronderstelling dat dat rangnummer bij B minimaal is.

Daarmee is het eerste deel van de stelling bewezen.

Wat we nu nog moeten bewijzen is: Als er een oplossing is van N kruisjes, waarbij x_1 tussen 1 en $1/N$ ligt, dan kunnen we de kruisjes met rangnummer > 1 omnummeren zodanig dat en x_2 tussen $(N-1)/N$ en 1 ligt.

Bewijs (bijna hetzelfde als het vorige bewijs):

A is nu een correcte oplossing waarbij x_1 tussen 1 en $1/N$ ligt, en W de verzameling van alle correcte oplossing waarbij x_1 tussen 1 en $1/N$ ligt en die een permutatie zijn van A .

Laat nu $B = \{y_1 \dots y_N\}$ een oplossing uit W zijn, waarbij het rangnummer i van het element y_i in het laatste interval, dus met $(N-1)/N < y_i < 1$ minimaal is.

We moeten bewijzen dat dan $i = 2$. We weten dat $i \neq 1$ (want dat is bij alle elementen van W het kruisje in het eerste interval), dus we hoeven alleen te bewijzen: $i \leq 2$

Ik bewijs het uit het ongerijmde: stel dat $i > 2$:

Nadat het kruisje op positie y_i geplaatst werd, waren er i kruisjes,

in elk i^e deel van de strook één.

Dit was toen dus het enige kruisje tussen $(i-1)/i$ en 1. Omdat $i > 2$ moet er tot en met het plaatsen van kruisje $i-1$ een ander kruisje $k \neq 1$ het meest rechtse geweest zijn. Dan moet: $1 < k < i$, en $y_k > (i-2)/(i-1)$.

We construeren nu een nieuwe oplossing $C = \{z_1 \dots z_N\}$ met $z_k = y_j$, $z_j = y_k$ en $z_i = y_i$ als $i \neq j$ en $i \neq k$.

Vóór kruisje k zijn B en C identiek, tussen kruisje k en kruisje $j-1$ is in beide kruisje k de meest rechtse, bij B op $y_k > (i-2)/(i-1)$ en bij C op $z_k = y_j > (N-1)/N$, en dus beide in het laatste interval.

Vanaf kruisje j staan de kruisjes in beide oplossingen op dezelfde plaats, (met verwisselde rangnummers).

Dus C is een correcte oplossing en een permutatie van de oorspronkelijke oplossing, dus is C een element van W .

Het rangnummer van het kruisje tussen $(N-1)/N$ en 1 is $k < i$, en dat is in tegenspraak met de veronderstelling dat dat rangnummer bij B minimaal is.

7. Samenvatting

Puzzel 88-2 in Euclides ging over het zetten van kruisjes op een strook papier. We beginnen met ergens op de strook een kruisje te zetten. Dan verdelen we de strook achtereenvolgens in 2, 3, 4 etc. gelijke stukken. Elke keer zetten we er een kruisje bij op de strook. De kunst is om dat zo te doen dat steeds nadat we het n^e kruisje hebben gezet er in elk van de n gelijke stukken precies één kruisje staat.

In opgave 1 was er een extra voorwaarde: alle oneven kruisjes moesten in de linkerhelft van de strook komen, en alle even kruisjes in de rechterhelft.

Dit artikel laat zien dat het aantal kruisjes eindig is en beschrijft een methode om redelijk eenvoudig tot een oplossing met een maximum aantal kruisjes te komen.

In hoofdstuk 1 vonden we voor de oplossing van het probleem met links-rechts voorwaarde schema's waarin we "verboden gebieden" kunnen aangeven waarin de kruisjes niet mogen worden gezet. Dit bleek het aantal mogelijkheden dusdanig te beperken, dat het puzzelen er veel gemakkelijker door wordt. We konden zo vrij eenvoudig inzien dat oplossingen met meer dan 13 kruisjes niet mogelijk zijn, en we konden de oplossingen voor 13 kruisjes vinden.

In hoofdstuk 2 laat ik zien dat ook zonder de links-rechts voorwaarde, er na de eerste paar kruisjes langere series kruisjes moeten zijn die om-en-om links en rechts van het midden staan. We kunnen daardoor de schema's die we in hoofdstuk 2 vonden aanpassen zodat ze ook bruikbaar zijn voor het algemene geval. Kernbegrip daarbij is het omslagpunt, waarvóór de oneven kruisjes links staan en erna rechts, of omgekeerd.

Voor de eerste paar kruisjes geldt dit alles niet zozeer, omdat daar de omslagpunten elkaar nog snel op kunnen volgen. Over die eerste paar kruisjes gaat hoofdstuk 3, en we zien dan dat we na een kleine ingreep die eerste paar kruisjes kunnen negeren, en pas beslissen waar we ze zetten nadat we de rest hebben opgelost.

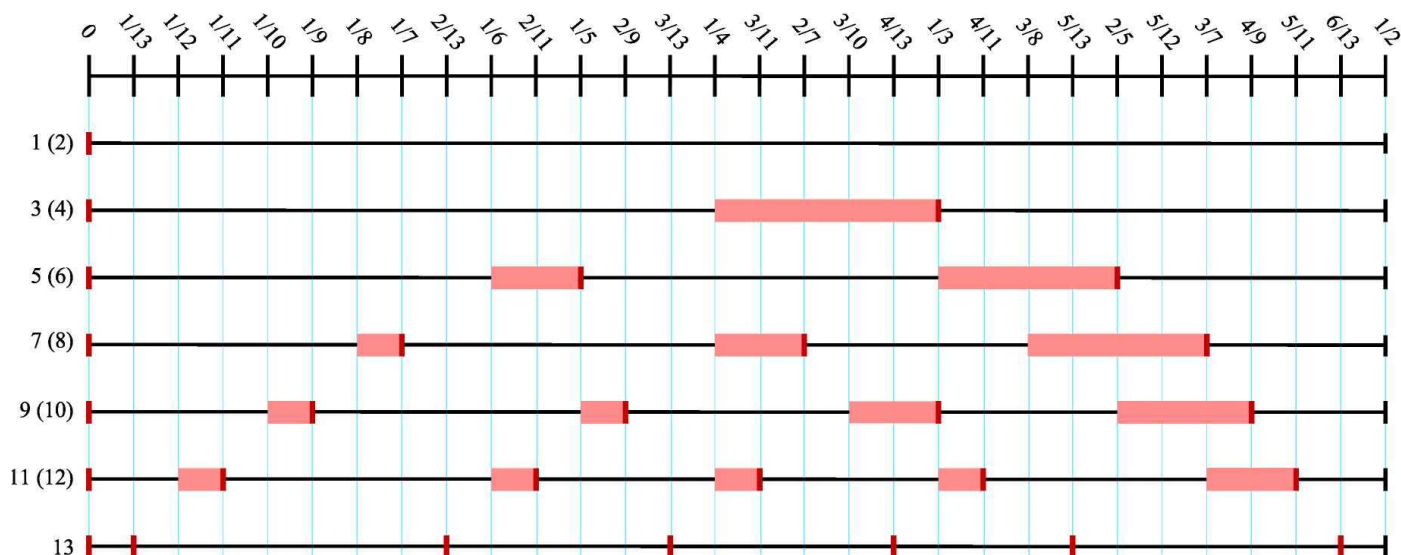
In hoofdstuk 4 en 5 passen we de schema's toe op grotere aantallen kruisjes. We vinden dan dat meer dan 17 kruisjes niet mogelijk is. Oplossingen met 17 kruisjes blijken alleen mogelijk met een omslagpunt bij het 12e kruisje. Ook levert het een schema op waarin de oplossingen met 17 kruisjes gemakkelijk gevonden kunnen worden.

In hoofdstuk 6 bewijs ik een stelling die in de overige hoofdstukken steeds gebruikt wordt. We gaan er steeds vanuit dat we het eerste kruisje zoveel mogelijk links en het tweede zoveel mogelijk rechts kunnen plaatsen. Dit wordt gerechtvaardigd door de in hoofdstuk 6 bewezen stelling.

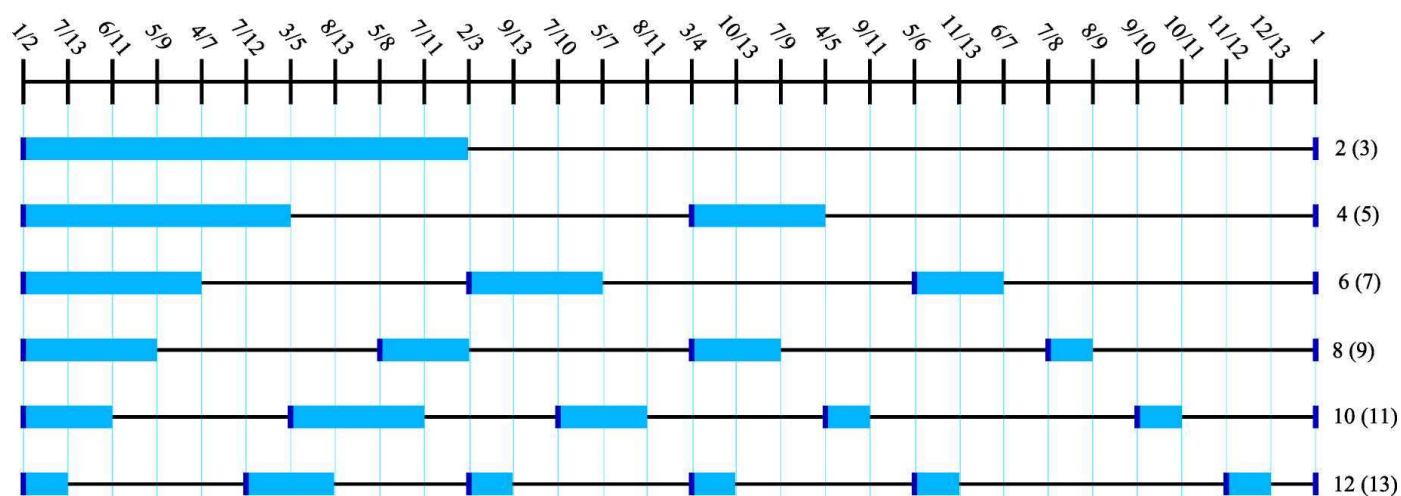
In de bijlage vindt u lege schema's, waarin u zelf kan puzzelen.

8. Bijlage: lege schema's om zelf in te puzzelen.

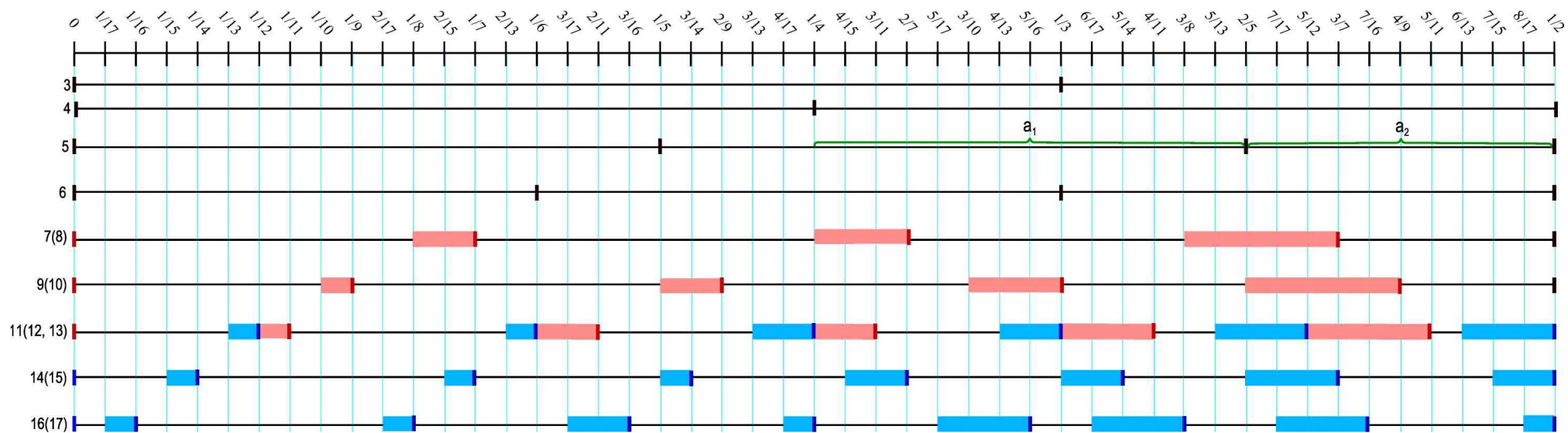
Hieronder vindt u op de komende 2 pagina's lege schema's voor $N=13$ zonder omslagpunten, en voor $N=17$ met omslagpunt 12, bedoeld om af te drukken en er zelf in te puzzelen. In de schema's heb ik ook de eerste lijnen erbij getekend (behalve lijn 1 en 2 in de schema's voor $N=17$), zodat u meteen in het schema ook het laatste deel van de oplossing kan intekenen.



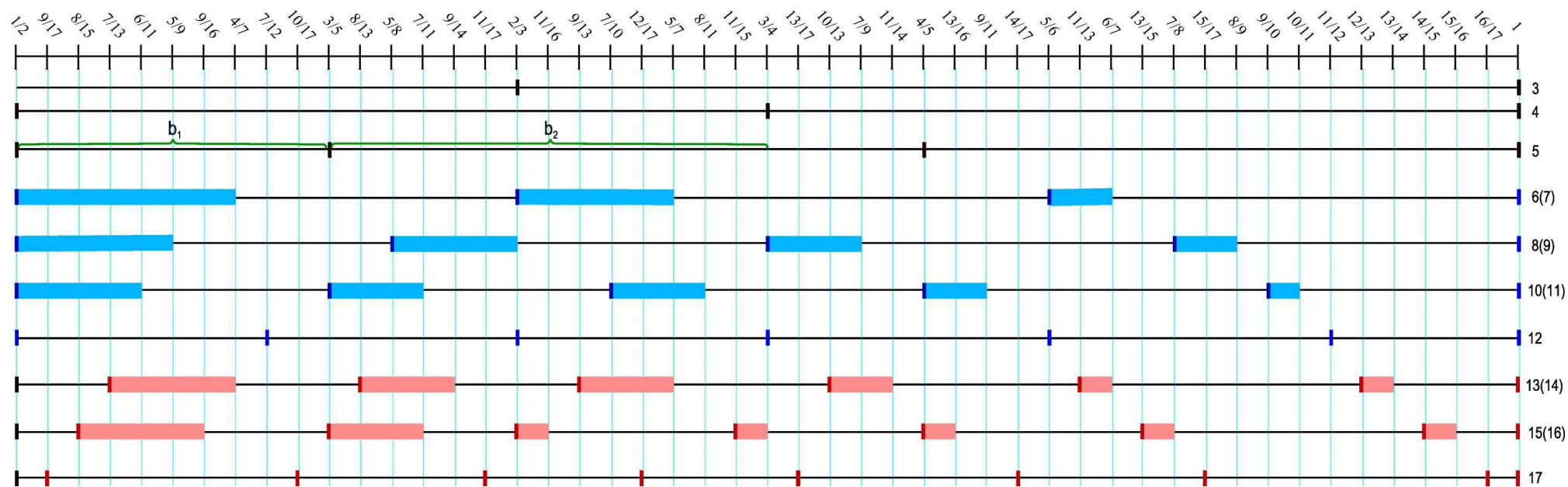
figuur 20, schema $N=13$ links; zonder omslagpunten



figuur 21, schema $N=13$ rechts; zonder omslagpunten



figuur 22, schema N=17 links; met omslagpunt 12



figuur 23, schema N=17 rechts; met omslagpunt 12