

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 88

nr **4**

februari 2013

Didactiek

**(Werk)woorden in de
centrale examens**

**Tussendoelen
havo/vwo**

Lesson study, deel 3

**Regionale
correctiecursussen**

Impressies NVvW-dag

**Mathematics of
Planet Earth**



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 88

nr 4

februari
2013

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofdredacteur

Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur

Dick Klingens, eindredacteur

Thomas van Berkel

Rob Bosch

Wim Laaper

Ernst Lambeck

Joke Verbeek, secretaris

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs,

Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. E. van Dijk

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl



KORT VOORAF

[Marjanne de Nijs]

Context

Laatst las ik over een onderzoek aan de Universiteit van Chicago. Metingen wezen uit dat wiskunde pijn kan doen: 'Als je bang bent voor cijfers, kan deze angst hersengebieden activeren die betrokken zijn bij het voelen van fysieke pijn.' Een paar dagen later kwamen mijn leerlingen met het betreffende artikel in de klas. Dat gaf wat hilariteit; we vermoeden dat het volgende deel van de bestsellerauteur E.L. James '50 tinten wiskunde' zal gaan heten... Bij verdere bestudering van het onderzoek bleek dat het slechts 28 proefpersonen betrof; dat gaf een mooi bruggetje voor een gesprek over statistiek. Was de context toch nog zinnig.

Een meer representatief onderzoek werd uitgevoerd door de makers van de *Wiskunde-brief* naar de mening van docenten over de rekentoets. Net voor de kerstvakantie kwam de uitslag: docenten zien niets in de rekentoets. Toevallig of niet, vrijwel gelijker tijd kwam het ministerie van OCW met het uitstellen van de zak/slaagregeling voor de rekentoets. Gelukkig hadden we de vakantie om ons voor te bereiden, want: 'Hoe vertel ik het de voorexamenjaarleerling?' In juni was al duidelijk dat de resultaten van de eerste pilots bedroevend waren en toch is er zo lang gewacht met deze uitspraak. Daar waar door veel collega's hard gewerkt is om leerlingen voor maart op niveau te krijgen komt er nu toch uitstel. Het doet pijn dat de politiek zo loopt te dralen over de hoofden van onze eindexamenkandidaten heen.

Bij de uitslag van de enquête van de *Wiskunde-brief* bleek dus dat 55% van de respondenten een aparte rekentoets overbodig vindt. Dat percentage verbaasde me niet, wel dat 79% minder of geen contexten in de rekentoets wil. Vanuit mijn perspectief zijn de contexten juist zo belangrijk omdat ik daarmee mijn leerlingen kan motiveren om voor deze toets te gaan. Natuurlijk wil je straks bij de bank niet bedot worden en ga je voor het goedkoopste abonnement bij de sportschool. Als ik bij wiskunde en rekenen laat zien wat het verband is met de 'gewone' wereld, ontstaat er ook een proces de andere kant op. Leerlingen kijken met een andere bril naar de zaken in hun dagelijks bestaan en stellen daar in de les vragen over. Het oproepen van die nieuwsgierigheid is nu juist wat ik zo graag wil.

Inhoud

In deze volle *Euclides* veel vertrouwde gezichten, met dank aan onze rubrieksauteurs die ons blad weer met mooie opgaven, belevenissen en wetenswaardigheden vullen. Ook vertrouwd zijn inmiddels de series die we aanbieden. Op didactisch gebied kunt u zich te goed doen aan verschillende samenwerkingsverbanden. Anne van Streun en Heiner Wind bespreken een hoofdstuk van het *Handboek wiskundendidactiek*. Voor het 'Klein vakdidactisch onderzoek' laat Ton Konings deze keer Elsmariken Jansen aan het woord over formules in vmbo-BB. En dan naar de andere kant van het vo voor het derde deel van de 'Lesson study': Nellie Verhoef en Mark Timmer informeren u over een lesontwerp waarbij de periodieke beweging centraal staat.

Bij 'Wiskunde en autisme' gaan Bram Arens en Danny Beckers in op de problemen die bij het begrip verbanden kunnen ontstaan. Ook gelukkig weer aandacht voor een Zebra: Rob van Oord zet *Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde* in de schijnwerpers. En in het tweede deel over de 'Tussendoelen' van Lambrecht Spijkerboer en Dédé de Haan krijgt u zicht op de opgaven die hiervoor ontwikkeld zijn en op welke wijze deze inzetbaar zijn. Opgaven van een andere categorie maakte Birgit van Dalen tijdens het Bartjens Rekendictee. Een jaarlijks terugkerend evenement waar Marjolein Kool hoogtepunten uit 2012 weer fantastisch wist te verwerken in rekensommen – over contexten gesproken.

Examens

Met nog slechts drie maanden voor de examens is het alvast tijd om wat puntjes op de i te zetten. Paul Drijvers en Kenneth Tjon Soei Sjoel doen dat door u te informeren over de (werk)woordomschrijvingen die nu een officiële status hebben gekregen voor de centrale examens. Op de correctievoorschriften van die examens laat Erik Korthof dan weer zijn visie los: is het niet zinvol om eens te herzien hoeveel punten gegeven moeten worden voor het toelichten van het GR-gebruik in plaats van voor de wiskundige toelichting?

En nog meer...

In de selectie voor IMO-2013 zit Jeroen Winkel, hij bedacht een opgave waar de dames van de recreatierubriek wel wat mee konden. Gedrieën dagen ze u uit. En ook graag aandacht voor een voormalige IMO-deelnemer: Jetze Zoethout schotelt u een opgave van IMO-2012 voor. Bij de *Special* over *Getallen* van vorig jaar serveert Kees Vugs nog een nagerecht: hij schrijft over slordige definities. En dan ons eigen toetje: zoals beloofd een impressie van de verenigingsdag november j.l. Met dank aan alle collega's die bereid waren een samenvatting te sturen van de workshop die ze bezochten.

Veel leesplezier!

INHOUD

157	Kort vooraf [Marjanne de Nijs]
158	Klein vakdidactisch onderzoek Algebra, deel 3 [Elsmariken Jansen, Ton Konings]
161	Mededeling / IMU-Net: MPE2013
162	(Werk)woorden in de centrale examens [Paul Drijvers, Kenneth Tjon Soei Sjoel]
165	Een toelichting is vereist [Erik Korthof]
167	Didactiek? Laat mij maar gewoon lesgeven! Deel 2 [Anne van Streun, Heiner Wind]
169	Tussendoelen havo/vwo-3, voor beeldopgaven [Dédé de Haan, Lambrecht Spijkerboer]
173	Lesson study, deel 3 [Nellie Verhoef, Mark Timmer]
177	Wiskunde en autisme, deel 3 [Bram Arens, Danny Beckers]
179	Getuigen [Danny Beckers]
180	Aankondiging
181	Uit de Zebra reeks, deel 3 [Rob van Oord]
184	Verschenen
185	Slordige definities [Kees Vugs]
187	Na IMO2011: IMO2012 opgave 6 [Jetze Zoethout]
190	Finale Bartjens Rekendictee 2012 [Birgit van Dalen]
191	Opgaven Bartjens Rekendictee 2012
193	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
194	Verschenen
195	Uitdagende problemen [Jacques Jansen]
198	Boekbespreking / Kansrekening (Alex van den Brandhof) [Rob Flohr]
200	Een goed begin is... [Erika Bakker]
201	Wiskunde digitaal [Lonneke Boels]
202	Impressie van de NVvW-dag 2012 [Joke Verbeek, Thomas van Berkel e.a.]
207	Recreatie [Wobien Doyer, Lieke de Rooij, Jeroen Winkel]
210	Waarom doen we als NVvW mee? [Bestuur NVvW]
211	Hoe kijk je een examen na? [Ab van der Roest]
212	Servicepagina

Klein vakdidactisch onderzoek Algebra

DEEL 3

[Elsmariken Jansen en Ton Konings]

Dit artikel is het derde artikel in een serie van zes over 'klein vakdidactisch onderzoek Algebra'. De artikelen zijn geschreven als afsluiting van een cursus Vakdidactiek Algebra^[1] aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen. De deeltijdstudenten, meestal beginnende docenten, schreven een artikel naar aanleiding van ervaringen in de klas. Aan de hand van de bestudeerde theorie analyseerden ze die ervaringen, ze maakten voornemens en konden die soms ook nog uitvoeren. In viertallen becommentarieerden ze elkaars werk. Vijf artikelen werden geselecteerd voor plaatsing in Euclides en werden daartoe in samenwerking met de docent, Ton Konings, nog grondig bewerkt. Daarover meer in het laatste artikel van de serie.

Formules in 1 vmbo-bb: 'Het gaat niet over rekenen maar over taal'

Probleemsituaties

Dit artikel beschrijft probleemsituaties in een eerste klas vmbo-basis. In deze klas zitten 14 leerlingen. Allen hebben een LWOO-indicatie, met veelal een achterstand in rekenen en taal. We gebruiken de methode *Moderne Wiskunde*^[2,3]. Met name de algebra in de hoofdstukken 'Regelmaat ontdekken' (hoofdstuk 7) en 'Formules' (hoofdstuk 11) wordt door de leerlingen als lastig ervaren. Eerst worden er een paar voorbeelden van de problemen gegeven.

Voorbeeld 1 – Al in de eerste paragraaf, 'Regels in woorden', ondervonden de leerlingen problemen bij de opgave *in figuur 1*.

De twee rekenopdrachten gaan goed. (a) 15 liter benzine keer 12 is 180 kilometer. (b) En 12 keer 40 liter benzine geeft 480 kilometer. (c) Het antwoord dat ik veel zag bij de laatste vraag: *Het aantal liters keer 40 is gelijk aan het aantal kilometers*. Of de opmerking: 'Mevrouw, ik weet toch al hoeveel één liter benzine kost? Dan kan ik toch ook uitrekenen hoeveel een rit kost, wat moet ik nu doen?'

Voorbeeld 2 – *Moderne Wiskunde* werkt in hoofdstuk 7 veel met rekenpijlen en pijlenkettingen.

Als ik bij opdracht T2 *in figuur 2* vraag: 'Hoeveel moet Jan betalen als hij 10

minuten belt?' volgt 'Ja mevrouw, dat is natuurlijk € 0,40'. Veelvuldig vergeten leerlingen bij dit soort opgaven om het getal van de tweede pijl erbij op te tellen. Bij een gesprekje over deze opgave merken leerlingen op: 'Maar wij hebben gewoon een abonnement van 45 euro en dan kunnen we zoveel bellen als we willen'.

Voorbeeld 3 – In hoofdstuk 11 moeten de leerlingen bij de opgave *in figuur 3* de pijlenketting omschrijven tot een formule met een gelijkteken.

De vraag die ik daarbij vaak kreeg: 'Wat is het aantal uren dan? Ik kan dan toch de formule niet opschrijven?'

Analyse vanuit vakdidactische literatuur

De voorbeelden lijken gemeenschappelijk te hebben dat het gaat over de vorm waarin formules geschreven worden en verder dat leerlingen soms niet weten wat ze moeten doen. Daarmee heb ik in het cursusboek^[1] houvast gezocht voor verdere probleemverheldering.

Over probleemsituaties en taal

Hoofdstuk 2 van het cursusboek biedt overzicht op het domein Algebra van de schoolwiskunde: het gaat om probleem-situaties die beschreven kunnen worden in de vorm van *Taal* (*Situatiebeschrijvingen*), *Grafieken*, *Tabellen* en *Formules* en de met name om de overgangen daartussen. Elke voorstellingsvorm heeft zijn eigen kwaliteiten:

- De *situatie* zorgt voor herkenbaarheid en koppeling aan ervaringen van leerlingen. Een regelmatig opgebouwde *tabel* kan een patroon zichtbaar maken. Je kunt

met een tabel tussenliggende waarden benaderen en een vermoeden uitspreken voor het gedrag 'heel ver weg'.

- De *grafiek* geeft overzicht. En als je eenmaal een grafiek hebt, kun je ook tussenliggende waarden aflezen.
- De *formule* geeft de informatie in een abstracte en compacte vorm.
- *Taal* is een probleem voor BB-leerlingen en die hebben dus meteen al een probleem met situatiebeschrijvingen. Daarnaast hebben ze moeite met vreemde en nieuwe woorden als 'formule'. De probleemsituaties in het boek zijn niet allemaal herkenbaar vanuit hun leefwereld. Tot slot is het bij veel situaties natuurlijker te beginnen met de 'vaste kosten' en daar dan 'de variabele kosten' bij te tellen, terwijl in de rekenpijl de vaste kosten er achteraf bij geteld worden.

Procesgerichtheid – Uit paragraaf 5.3.1 van het cursusboek:

De tekens +, ×, → en = hebben in de ogen van de leerling een actiekarakter en sporen aan tot het uitvoeren van berekeningen. Zo zijn leerlingen dat vanuit het rekenonderwijs gewend en ook als ze met verbanden in de vorm van 'machientjes' werken. Doel is altijd: iets uitrekenen. Leerlingen zijn vaak sterk gericht op 'wat moet ik doen'.

Vraag c in voorbeeld 1 (*zie figuur 1*) vraagt om bij een 'regel in woorden' een getal in te vullen. Het gaat om het begrijpen dat deze regel een manier is om het rekenwerk dat net gedaan is, algemeen in woorden weer te geven, en niet de vraag om een rekenactie uit te voeren. Daarnaast zijn op BB-niveau twee voorbeelden veelal onvoldoende om het algemene patroon in te zien.

Notaties: vormen van formules – Uit paragraaf 5.4.3:

Aan de ene kant heb je de 'situatietaal' aan de andere kant de 'wiskundetaal'. De woordformule bevindt zich ergens op de lijn die te maken is van situatietaal naar wiskunde:



Merk op dat het voor de aanduiding van een variabele al verschil maakt of je gebruikt:

Kosten of Kosten in euro's of Kosten (€) of
K of of Bedrag of of Aantal euro's of y

Het cursusboek trekt na diverse voorbeelden onder andere de volgende conclusies:

- Er zijn meerdere notaties (machientjes, visuele schema's, diverse afkortingen, wat staat links en wat rechts van het =-teken, met of zonder eenheden).
- Schoolmethoden verschillen in keuzen voor notaties.
- Overgangen tussen de diverse notaties dienen zorgvuldig gemaakt te worden.
- Veel overgangen in notaties gaan 'vanzelf', maar wees alert op leerlingen bij wie dat niet gebeurt.

De leerstof in hoofdstukken 7 en 11 van *Moderne Wiskunde* is een aaneenschakeling van vormen van verbanden:

Situatiebeschrijving, twee soorten tabellen (verticaal en horizontaal), regel in woorden, rekenpijl, pijlenketting, in-uit-tabel, grafiek, (woord)formule. Voor leerlingen is het overzien hiervan lastig.

Daarbij komt dat voor het oplossen van de probleemsituaties, zoals in de bovenstaande voorbeelden, deze leerstof niet noodzakelijk is – elke probleemstelling kan met alleen rekenwerk worden opgelost. Daar heb je geen pijlenkettingen of formules voor nodig.

Kern van het probleem

De kern van het probleem lijkt te zijn: in

de hoofdstukken worden overgangen van diverse vormen van formules gemaakt.

Het gaat niet zozeer om het oplossen van problemen en het uitrekenen van sommetjes, maar juist om het leren van een wiskundetaal waarin je die problemen weer kunt geven. Naarmate situaties complexer worden is dit handig, maar voor BB-leerlingen is het nut niet eenvoudig duidelijk te maken. BB-leerlingen hebben behoefte aan veel voorbeelden, passende en herkenbare voorbeeldsituaties, overzicht, en aan hulp bij taal.

In het vervolg worden een aantal suggesties afgeleid van enkele van de 21 aanwijzingen in paragraaf 5.5 (Didactisch handelen bij formules) van het cursusboek.

Suggesties voor didactisch handelen

Veel voorbeelden geven voordat de algemene regel wordt gevraagd.

- In de eerste plaats is in opgaven als bij voorbeeld 1 het aanvullen van de vragen a en b met meer voorbeelden van belang.
- Ik heb nog gezocht naar een definitie of uitleg van de term 'formule', maar dat maakt de zaak nog ingewikkelder. Ik heb bij voorbeeld 3 een extra oefenblad gemaakt, waarbij leerlingen bij een rij rekenpijlen en pijlenkettingen, de formule op moesten schrijven. De aanpak blijkt telkens hetzelfde te zijn. Dit geeft houvast voor de leerlingen.

Dat leidde bij hen tot de uitspraak: 'Eigenlijk is een formule bijna hetzelfde als een pijlenketting, alleen je laat de pijlen weg en zet er een = bij.'
Juist!

Herkenbare passende probleemsituaties

Ik heb gezocht naar twee voorbeeldige probleemsituaties (één voor een enkele rekenpijl en één bij een pijlenketting), die ik zou kunnen gebruiken ter oriëntatie, maar ook om op terug te vallen als steun bij het houden van overzicht. Het meest geschikt leken de situaties:

- (**figuur 4**) Tel het aantal seconden tussen flits en donder, deel dat door 3, dan weet je hoeveel km het onweer bij je vandaan is (uit: *Moderne Wiskunde*, instap op hoofdstuk 7).
- (**figuur 5**) Mila doet mee aan een sponsorloop. Haar moeder sponsort haar en betaalt € 1,50 per ronde. Haar oom geeft haar een vast bedrag van € 5,00. Hoeveel verdient Mila als ... (uit: *Moderne Wiskunde*, paragraaf 7-3).

Geschiktheid heeft te maken met herkenbaarheid, het gaat over geld, je kunt aan het bedrag bij 0 ronden nog een betekenis geven, evenals aan het achteraf erbij tellen van de € 5,00 (nog even ophalen bij de oom die het door de telefoon beloofd had voor het goede doel), de bewerking delen en de niet-gehele getallen vragen om enige systematiek (vermenigvuldigen met gehele getallen doe je te gemakkelijk uit het hoofd).

Overzicht vooraf, tussendoor en

achteraf – Bij de twee gekozen situaties is voor het digibord een overzicht gemaakt (zie weer figuur 4 en figuur 5) dat gedurende de lessen in stapjes

- 5 Karel gaat met de auto naar Spanje.
Met één liter benzine rijdt hij 12 km.
- a Bereken hoeveel kilometer hij kan rijden met 15 liter benzine.
b En hoeveel kilometer rijdt hij met 40 liter benzine?
c Vul het juiste getal in:
Het aantal liters keer ... is gelijk aan het aantal kilometers.



figuur 1

- T-2 Voor een telefoonaansluiting via de kabel betaal je met het abonnement 'Basisbellen' € 5,95 per maand. Voor elke minuut komt daar nog € 0,04 bij. Voor het berekenen van de maandelijkse kosten kun je de pijlenketting hierrunder gebruiken.

IN $\xrightarrow{\times 0,04} \dots \xrightarrow{+ 5,95}$ UIT
aantal minuten $\rightarrow$ totale kosten

figuur 2

- 15 Maak de formules bij de rekenpijlen en de pijlenkettingen.

- a aantal boeken $\xrightarrow{\times 3}$ prijs
b aantal glas $\xrightarrow{\times 1,50} \dots \xrightarrow{- 6}$ winst
c aantal reken $\xrightarrow{\times 40} \dots \xrightarrow{+ 70}$ bedrag
d aantal uren $\xrightarrow{\times 2,50}$ loon

figuur 3



1. De afstand van onweer:

Je kunt uitrekenen hoeveel km het onweer bij je vandaan is:
Tel het aantal seconden tussen flits en donder – deel dat aantal door 3
dan weet je hoeveel km het onweer bij je vandaan is.

2. Tabel (rechttop):

Aantal seconden	Afstand in km
0	
3	
6	
9	
12	
15	
30	

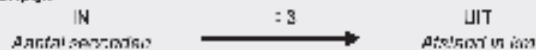
3. Tabel (liggend):

Aantal seconden	0	3	6	9	12
Afstand in km					

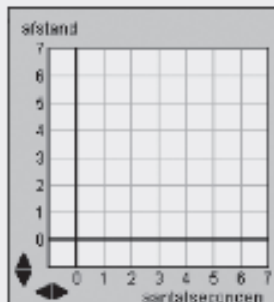
4. Regel in woorden:

Het aantal seconden gedeeld door ... is de afstand in km

5. Rekenpijl:



6. Grafiek:



figuur 4

1. Sponsorloop:

Mita doet mee aan een sponsorloop.
Haar moeder sponsoert haar en betaalt €7,50 per ronde.
Haar vader heeft haar door de telefoon een bedrag van €5 – voor 1 goede doel! betaald.
Hoeveel verdient Mita als ze ... rondes loopt?

2. Pijlenketting:



3. Berekening bij pijlenketting:

0	$\times 1,50$		$+ 5$	=
3	$\times 1,50$		$+ 5$	=
6	$\times 1,50$		$+ 5$	=
9				=

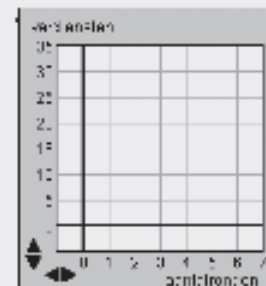
4. Tabel (rechttop):

Aantal ronden	Verdienden
0	
3	
6	
9	
12	
15	

5. IN-UIT-tabel:

IN	Aantal ronden	3	6	9	12
UIT	Verdienden				

6. Grafiek:



7. Formule:

$$\text{Aantal ronden} \times 1,50 + 5 = \text{Verdienden}$$

figuur 5

van boven naar beneden wordt 'onthuld' en geregeld wordt getoond, als steun bij het maken van andere opgaven. Aan het begin van hoofdstuk 7 kan in een onderwijsleergesprek het eerste schema van figuur 4 al bijna helemaal ontwikkeld worden. Met het tweede schema van figuur 5 wordt een paar lessen later begonnen en dit wordt afgemaakt bij het tweede hoofdstuk.

Hoewel *Moderne Wiskunde* pas in hoofdstuk 11 de grafiek laat tekenen, hebben we hem al in het schema bij hoofdstuk 7 opgevoerd, omdat met de grafiek handig allerlei tussenliggende waarden kunnen worden afgelezen. Daarmee wordt het nut van deze leerstof voor de eerstklassers enigszins duidelijk gemaakt. De vormen van verbanden zijn genummerd. Bij een te maken opgave kan ik dan vragen om welke nummers het gaat bij wat gegeven is en wat gevraagd wordt. Geregeld zeg ik tussendoor:

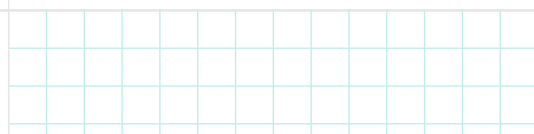
'Het gaat niet over (be)rekenen, maar over een handige taal om het verband weer te geven.'

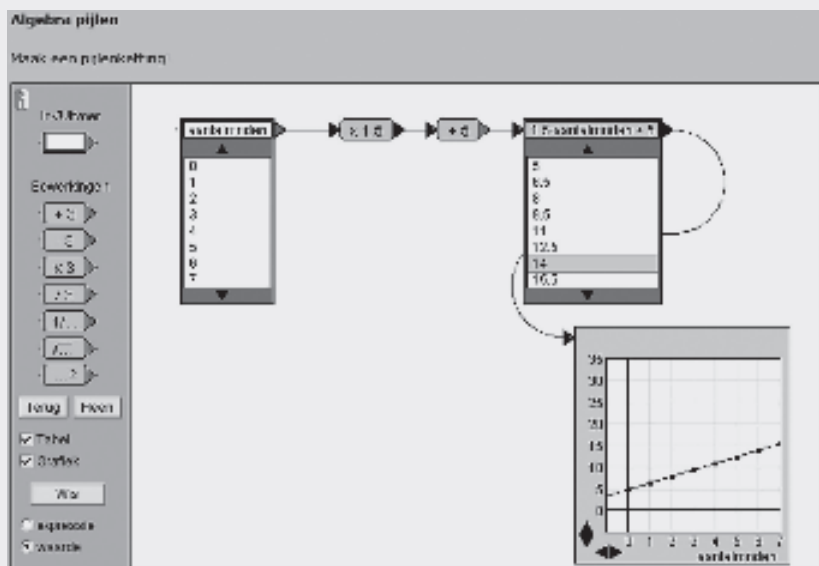
Het gebruik van ICT

Moderne Wiskunde heeft enkele computerparagrafen als alternatief voor gewone paragrafen. Daarbij wordt de WisWeb applet 'Algebrapijlen' ingezet. Ik laat leerlingen toch de gewone paragrafen maken, maar maak in mijn lessen op het digibord veelvuldig gebruik van deze applet. Leerlingen kun je voor het bord de pijlenketting laten maken. Voordeel is dat de applet het rekenwerk doet en je de nadruk kunt leggen op de vorm van pijlenketting, tabellen en grafieken. De leerlingen kregen er zelfs plezier in en gingen de paragrafen erna met iets meer zelfvertrouwen aan de slag. Hier volstaan we ter illustratie met een schermafbeelding *in figuur 6*.

Conclusie

De besproken hoofdstukken over formules zijn lastig voor BB-leerlingen. Na grondige bestudering ervan en van de vakdidactische literatuur kom ik tot de conclusie dat de oplossing van het probleem moet worden gezocht in veel voorbeelden, passende en herkenbare voorbeeldsituaties, het bieden van overzicht en de inzet van ICT. De grafiek zou een meer prominente plaats in deze leerstof mogen krijgen en 'de regel in woorden' kunnen we volgens mij en mijn leerlingen missen als kiespijn.





figuur 6

Noten

- [1] J. Faarts, e.a. (2012): *Algebra voor leerlingen van 12-16, voor de lerarenopleiding*. Utrecht: APS.
- [2] *Moderne Wiskunde, vmbo-basis*, deel 1A en 1B, editie 9. Groningen: Noordhoff, 2008.
- [3] <http://modernewiskunde.docentenpakket.nl>

Over de auteurs

Elsmariken Jansen ging na de pabo werken bij het Over Betuwe College, afdeling VMBO in Huissen, en is deeltijdstudent aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen.

E-mailadres: emjansen1@student.han.nl

Ton Konings is lerarenopleider aan het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen, en medeauteur van een serie vakdidactiekboeken voor de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde.

E-mailadres: Ton.Konings@han.nl



MEDEDELING / IMU-Net

Internationale lancering van Mathematics of Planet Earth 2013

Mathematics of Planet Earth 2013, **MPE2013**, is een bijzonder jaar voor wetenschappelijke en voorlichtende activiteiten.

Het wordt gesteund door de IMU (International Mathematical Union), onder auspiciën van de UNESCO.

2013 is begonnen, en MPE2013 verspreidt zich verder: er zijn nu al meer dan 100 deelnemende organisaties!

De internationale start van MPE2013 was op 7 december 2012 in Montreal (Canada).

Doelen van het MPE-project zijn:

1. stimuleren van vooruitgang bij het oplossen van problemen die gerelateerd zijn aan de planeet Aarde, door interdisciplinair onderzoek van wereldformaat;
2. vergroten van de bekendheid omtrent de unieke bijdragen van de wiskunde bij het oplossen van wereldwijde problemen;
3. leveren van educatief materiaal voor het belichten van de essentiële rol van de wiskunde, en van carrièremogelijkheden voor studenten die geïnteresseerd zijn in duurzaamheid en wereldwijde vraagstukken.

Website: www.mpe2013.org

IMU-Net is de elektronische nieuwsbrief van de IMU:

www.mathunion.org

Meer informatie over IMU-Net staat op:

www.mathunion.org/IMU-Net

Onder meer informatie over opname op mailinglijst van IMU-Net.

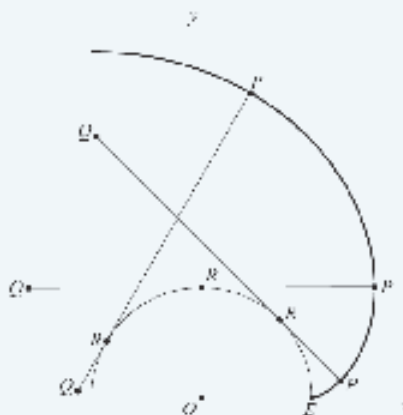
Redactie: Mireille Chaleyat-Maurel, Université Paris Descartes, Parijs.

woord ‘oplossen’ hoort het tweede kruisje onder vwo wiskunde B te staan, zoals hier onderstreept afgebeeld, en *niet* onder wiskunde C. Immers, ‘algebraïsch’ of ‘exact’ hebben bij wiskunde C ook geen kruisje. Deze opsomming van (werk)woorden die mogelijk op het centraal examen voorkomen, is natuurlijk niet uitputtend: er kunnen ook andere woorden worden gebruikt. Een woord uit deze lijst, waarbij geen kruisje bij het betreffende wiskundevak staat, kan ook in het examen worden gebruikt, maar dan wordt ter plekke aangegeven hoe het verstaan moet worden.

Als we de huidige lijst uit figuur 1 vergelijken met die van het NVvW-Nomenclatuurrapport, dan is een aantal verschillen niet zo ingrijpend; het gaat in de meeste gevallen om aanscherpingen van de omschrijvingen. Op de website van de *Wiskunde-brief*^[3] vindt u een overzicht van de verschillen. Toegevoegd is bijvoorbeeld het woord *herleiden*, dat moet worden opgevat als het herschrijven van een algebraïsche uitdrukking of formule in een gelijkwaardige vorm. Verdwenen is bijvoorbeeld de zinsnede ‘bij gebruik van de grafische rekenmachine moet(en) de gebruikte optie(s) vermeld worden’ bij de omschrijving van het woord *bepalen*, omdat dit valt onder ‘een toelichting is vereist’. Nu de grafische rekenmachine zo is ingeburgerd, is een specifieke vermelding hier overbodig.

Een belangrijk begrippenpaar vormen de woorden *aantonen* en *bewijzen*. In beide gevallen gaat het om ‘een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt’. Bij bewijzen wordt echter als aanvullende eis gesteld dat de eventueel voorkomende berekeningen exact moeten zijn. Daarmee wordt het woord ‘bewijzen’ dus minder sterk dan voorheen gekoppeld aan de synthetische meetkunde van wiskunde B van het vwo waarin zelden gerekend hoeft te worden, maar kan ‘bewijzen’ bijvoorbeeld ook bij opgaven in de analysedomeinen voorkomen. Tenzij expliciet gevraagd hoeven de berekeningen bij ‘aantonen’ niet exact te zijn (al mag dat natuurlijk wel), wat beter past bij contexten waarin de voorkomende getallen niet exact zijn. Denk aan modelmatige benaderingen of aan meetgegevens. Het blijft echter gaan om een sluitende redenering, waarin het voorkomende rekenwerk door het ontbreken van exacte gegevens niet exact kan zijn, of waarbij geen behoefte is aan exactheid. Verderop volgt een voorbeeld, waaruit tevens blijkt dat een controle met behulp van de grafische rekenmachine niet voldoet.

Voor de coördinaten van P geldt: $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + t \cdot \sin(t) \\ y(t) = \sin(t) - t \cdot \cos(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq \pi$.



De grootte van de snelheid in m/s van het punt P na t seconden noemen we $v(t)$. Er geldt: $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Hieruit volgt: $v(t) = t$.

Kp A Toon dit aan

figuur 3a Een buiteling (uit: CE wiskunde B1,2 vwo 2009, eerste tijdvak)

8 maximumscore 6

- $x'(t) = \sin(t) + 1 \cdot \sin(t) = t \cdot \cos(t) + \cos(t)$ en $y'(t) = \cos(t) - 1 \cdot \cos(t) - t \cdot \sin(t) = -t \cdot \sin(t)$ 3
- $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (t \cdot \cos(t) + \cos(t))^2 + (-t \cdot \sin(t))^2 = t^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = t^2$ 2
- $v(t) = \sqrt{t^2} = t$ (omdat $t \geq 0$) 1

figuur 3b Correctievoorschrift bij figuur 3a (gedeeltelijk)

Dit brengt ons op een tweede belangrijk begrippenpaar: de woorden *algebraïsch* en *exact*. Gemeenschappelijk in de beschrijving van deze woorden is ‘stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties en de grafische mogelijkheden van de grafische rekenmachine’. Met ‘specifieke opties’ wordt bedoeld op alles wat het gewone rekenwerk ontstijgt, zoals procedures om vergelijkingen op te lossen, nulpunten te zoeken of hellingen en oppervlakten te benaderen. Zulke GR-procedures kan de leerling wel gebruiken bij opdrachten als ‘bereken’ of ‘los op’, maar niet als hieraan een van de woorden algebraïsch of exact is toegevoegd. In plaats van deze specifieke GR-opties gaat het er bij algebraïsche en exacte methoden om dat vergelijkingen op papier worden opgelost, afgeleiden worden bepaald met differentiëren en oppervlaktes met primitiveren. Als bijvoorbeeld ‘toon aan’ wordt gevolgd door ‘op algebraïsche wijze’, zijn de specifieke GR-opties uitgesloten.

Het verschil tussen exact en algebraïsch betreft dus de afronding. Bij ‘exact’ vindt benadering of afronding van antwoorden *niet* plaats. Bij ‘algebraïsch’ kan dit wel voorkomen, zowel bij tussenantwoorden als bij het eindantwoord.

Bij een vraag van de vorm ‘Bereken op

algebraïsche wijze... en rond je antwoord af op één decimaal’; zie bijvoorbeeld vraag 4 van het examen havo wiskunde B (2012, 1e tijdvak) is het overigens nodig dat leerlingen anticiperen op die eindafronding door bij tussentijdse afrondingen voldoende extra decimalen mee te nemen. Dit geldt natuurlijk ook voor tussentijdse afrondingen bij berekeningen met de grafische rekenmachine.

Voorbeelden

Ter illustratie geven we drie voorbeelden. Het eerste betreft vraag 20 van het examen havo wiskunde A (2012, 2e tijdvak), over radioactieve stoffen. In *figuur 2a* staat een deel van de opgave en in *figuur 2b* het correctievoorschrift (CV). Met de nieuwe nomenclatuur had de vraag hier ook kunnen luiden: ‘Toon dit aan.’

Het tweede voorbeeld gaat eveneens over het woord *aantonen*, zoals het is gebruikt in vraag 8 van de opgave ‘Een buiteling’ van het centraal examen vwo wiskunde B12 (2009, 1e tijdvak). *Figuur 3a* laat een deel van deze opgave zien en *figuur 3b* het overeenkomstige correctievoorschrift. Zoals uit het CV blijkt, is de bedoeling van het aantonen hier dat er ‘echt’ wordt gedifferentieerd en vervolgens algebraïsch wordt gemanipuleerd tot de uitdrukking

voor $v(t)$ gelijk blijkt te zijn aan t . Een leerling die handig is met een grafische rekenmachine zou in principe de grafiek kunnen laten tekenen van de functie Y_1 met:

$$Y_1 = ((nDeriv(\cos(X) + X \cdot \sin(X), X, X)^2 + (nDeriv(\sin(X) - X \cdot \cos(X), X, X)^2)^{0.5}$$

En dan kunnen zien dat deze wel verdacht veel lijkt op die van $Y = X$. Deze werkwijze is niet de bedoeling van de opgave en wordt dan ook niet gehonoreerd. Om misverstanden hierover bij de leerling en bij de corrector te voorkomen, zal de formulering van een dergelijke vraag in de toekomst dan ook zijn 'Toon dit aan met algebra', 'Toon dit op algebraïsche wijze aan' of 'Bewijs dit'.

Het derde voorbeeld betreft het woord *exact*. Zoals u ziet in **figuur 4a** komt dit woord voor in vraag 5 van de opgave Onderzetter van het centraal examen vwo wiskunde B (2010, 1e tijdvak). Het CV in **figuur 4b** geeft aan wat de opgavenmakers hierbij voor ogen hebben. Indertijd schijnen er leerlingen geweest te zijn die $6\sin(\cos^{-1}(4/5))$ hebben geantwoord. Dit is natuurlijk wel exact, maar het is nog geen antwoord in de gebruikelijke zin, net zoals 'de oplossing van de vergelijking $x^2 = 3$ ' niet als eindantwoord beschouwd wordt op de vraag om $x^2 = 3$ op

te lossen. Kortom, van leerlingen wordt bij 'bereken exact' net als bij andere vragen van het examen een zo 'eenvoudig' mogelijke vorm van het antwoord gevraagd. Omdat niet altijd duidelijk is wat eenvoudig is, kan dit in de vraag worden geëxpliciteerd, bijvoorbeeld door daarin op te nemen dat er onder het wortelteken geen breuken mogen staan. Zo lang een dergelijke opmerking niet in de vraag is vermeld, wordt coulantie betracht en worden bijvoorbeeld antwoorden als $\sqrt{8}$ en $2\sqrt{2}$ als even correct beschouwd.

Wat betekent dit voor de examens van 2013?

Wat zijn de gevolgen van deze nieuwe nomenclatuur voor de centrale examens van 2013? De Septembermededeling meldt: 'Deze lijst... is als zodanig ook bruikbaar voor de centrale examens van 2013.' Dit betekent dat de nieuwe nomenclatuur in principe ook geldt voor de komende

examens. Het is dus goed uw leerlingen hierop te wijzen. Voor vwo-leerlingen met wiskunde B zal het bijvoorbeeld nuttig zijn te weten dat het woord 'bewijzen' ook buiten de meetkunde gebruikt kan worden en dat bij aantonen tussentijds mag worden afgerond, als 'exact' ten minste niet in de vraag voorkomt. Overigens is er het CvE bij de eerste toepassing van deze nomenclatuur natuurlijk veel aan gelegen om verwarring in de vraagstelling te voorkomen, bijvoorbeeld door extra verduidelijking te geven.

Tot slot

Naar wij hopen zal deze aangepaste nomenclatuur, die met zoveel draagvlak tot stand is gekomen en die een officiële status heeft, bijdragen aan een examenpraktijk waarin zowel leerlingen als docenten bij het voorbereiden op en het maken en corrigeren van het examen weten waar ze aan toe zijn.

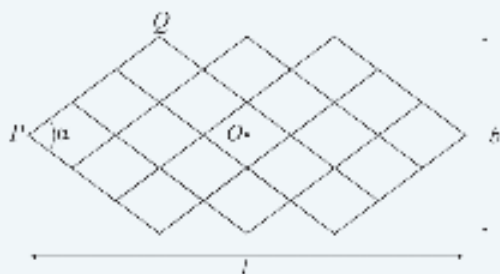
Noten

- [1] Zie: www.nvvw.nl/page.php?id=1778
- [2] Zie: www.examenblad.nl (en zoek met 'wiskunde 2014')
- [3] Zie: www.wiskundebrief.nl/examenwoorden.htm

Over de auteurs

Paul Drijvers is universitair hoofddocent bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Kenneth Tjon Soei Sjoie is docent wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Ze schreven dit artikel namens het College voor Examens en danken Agnes Verweij, Bert Zwaneveld, de toetsdeskundigen wiskunde van het Cito en de vakcommissie wiskunde B van het CvE voor hun commentaar op een eerdere versie.



We kiezen lengte 1 voor de zijde van een ruit.
De lengte l en de breedte h van het model zijn functies van α , waarbij $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Er geldt $l = 10 \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ en $h = 6 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$

3p 4 Toon aan dat de formules voor l en h juist zijn.

4p 5 Bereken exact de waarde van h als $l = 8$.

figuur 4a Onderzetter (uit: CE wiskunde B vwo 2010, eerste tijdvak)

5 maximumscore 4

- Als $l = 8$ dan $\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{4}{5}$ 1
- $\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = 1$ 1
- Hieruit volgt (omdat $0 \leq \frac{1}{2}\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$) $\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{3}{5}$ 1
- $h = 6 \cdot \frac{3}{5} = 3\frac{3}{5}$ 1

figuur 4b Correctievoorschrift bij figuur 4a

Een toelichting is vereist

[Erik Korthof]

Bij de eindexamens havo en vwo wordt van de leerlingen gevraagd om bij het inzetten van de GR ook verslag te doen van hoe ze de GR precies gebruiken. In de praktijk komt dit neer op het noemen van de gebruikte optie en de getallen die daarin ingevoerd zijn. Het is gebruikelijk dat het correctievoorschrift bij het examen deze verslaglegging ook met aparte punten waardeert. Erik Korthof plaatst in dit artikel zijn vraagtekens bij deze gang van zaken. Zeker in het licht van de verbeterde GR's, die het de gebruiker steeds makkelijker maken om de juiste dingen in te voeren, lijkt het zinvol om nog eens te herzien in hoeverre er punten gegeven moeten worden voor het toelichten van het GR-gebruik in plaats van voor de wiskundige toelichting.

In het Nomenclatuurrapport 2007 van de NVvW komt de zinsnede 'Bij gebruik van de GR moet(en) de gebruikte optie(s) vermeld worden' vier keer voor. Het College voor Examens (CvE) heeft een flink deel van dit nomenclatuurrapport inmiddels een officiële status gegeven in de zogenoemde *Examen(werk)woorden-lijst* ^[1], maar deze zinsnede komt daarin niet voor. Het correctievoorschrift (CV) bij de examens lijkt dat ook overbodig te maken omdat daarin de vakspecifieke regel 2 is opgenomen, waarin staat dat bij vragen waarbij de GR moet worden gebruikt, verslag gedaan moet worden van hoe dat gebeurt.

Ik vraag me af of we bij het examen eigenlijk niet zonder die regel kunnen, dus of we het zonder de eis van een beschrijving van de gebruikte GR-opties zouden kunnen stellen. Voegt het vermelden van dat knoppenverhaal namelijk echt iets toe als de wiskundige situatie waarin dat gebeurt al (op juiste wijze) beschreven wordt en het oplossingsmodel waarin de GR wordt toegepast, dus toch al op papier staat? Wat mij betreft: schaf het geven van een punt voor 'beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost' (citaat uit het CV) af! Vraag er wiskunde voor in de plaats en beloon dat.

Bijvoorbeeld – Het correctiemodel van vraag 5 in het examen havo wiskunde A 2012, tijdvak 1, geeft eerst een punt voor 'De vergelijking $16 \cdot 0,88^x = 4$ moet opgelost worden' en daarna een punt voor 'Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost'. Bij de examencorrectie ontstaat dan vaak de discussie of het eerste punt ook verdiend is als alleen de tweede stap correct beschreven is en impliciet zou blijken dat de leerling de juiste vergelijking opgelost heeft. Dus als

er alleen zoiets staat als ' $y_1 = 16 \cdot 0,88^x$ en $y_2 = 4$, intersect geeft $x = 10,644$ ', waarna het antwoord op de vraag volgt. Volgens mij wordt dan het kunstje in plaats van de wiskunde beloond, terwijl juist die vergelijking de wiskundige kern van de oplossingsstrategie vormt.

Inmiddels hebben veel grafische rekenmachines er trouwens ook andere mogelijkheden voor: via (*equation*) *solvers*, voorgeprogrammeerde *abc*-formules en dergelijke.

Hoe dit soort grepen in de trukendoos precies verantwoord moet worden door een leerling, daarvoor zijn geen duidelijke richtlijnen.

Het lijkt mij dat het in de toekomst een wiskundig beter begaanbare weg is als er geëist zou gaan worden dat de kandidaat in deze situaties wel de op te lossen vergelijking in correcte wiskundige taal noteert en daarna de oplossing en toepassing, maar dan zonder een GR-verantwoording en een punt daarvoor. Want als de oplossing juist is, dan heeft de kandidaat ongetwijfeld de juiste (routine) handelingen op z'n GR gepleegd en hoeft hij daar niet (soms meerdere malen in een examen voor hetzelfde riedeltje) voor beloond te worden. Als de oplossing fout is, wordt hij ook niet beloond voor een goed bedoelde maar verkeerd uitpakkende of toegepaste (meestal tamelijk beperkte) beschrijving van zijn GR-handelingen. Soms kun je niet eens nagaan wát de bedoeling was en wat dan fout gegaan zou kunnen zijn. Een essentiële handeling als het kiezen van het juiste venster hoeft bijvoorbeeld niet verantwoord te worden. En gehaspel met haakjes en exponenten leidt ook vaak tot mislukte manoeuvres, ondanks de goed bedoelde

GR-omschrijving.

De vaag om een toelichting bij de opdracht 'Bereken' kan, als het niet gaat om een exacte of algebraïsche berekening, dus beter slaan op een wiskundige verantwoording wat de kandidaat doet en niet op hoe hij dat met de GR doet. Dat 'wat' is dus bijvoorbeeld het correct opstellen van een vergelijking vanuit de context waarin de vraag aangeboden wordt, met de intentie die te willen oplossen. Het 'hoe', een meestal wat schimmig weergegeven verhaal dat meer op programmeren dan op rekenen lijkt, is toch minder belangrijk?

Wordt er, bij de B-vakken, aan de vraag 'algebraïsch' of 'exact' toegevoegd, dan is het natuurlijk wel de bedoeling, zowel volgens het Nomenclatuurrapport als de lijst Examen(werk)woorden, dat er stap voor stap gewerkt wordt (zonder GR) en in die gevallen is de beloning voor 'beschrijven hoe deze vergelijking wordt opgelost' terecht, omdat het het weergeven van een eigen denkproces is. Dan staan de stappen meestal in het antwoordmodel nader gepreciseerd en worden ze met punten gewaardeerd.

Het niet langer belonen van basis- en routinehandelingen met de GR zoals intersect, solve, of wat dan ook, voorkomt – overigens ook dat bij een verkeerde oplossingsrichting die op minder of meer gespannen, dan wel sterk vereenvoudigde, voet staat met context van de vraag – dat het omschrijven van het (dan niet bedoelde) GR-gebruik toch wordt beloond. Dat is een wat mij betreft ongewenst vorm van sprokkelen, die wel voor lijkt te komen.

Andere situaties waar de GR wordt ingezet zijn, bij de A-vakken, berekeningen met betrekking tot binomiale en normale

kansverdelingen.

Ook hier is het zo dat het CV vaak eerst een punt geeft voor de beschrijving van de aan de orde zijnde binomiale of normale verdeling, inclusief een expliciete vermelding van de parameters. Daarna wordt dan gevraagd om te beschrijven hoe met de GR de betreffende kans wordt uitgerekend. En dan is er ook hier weer het dilemma of je de punten moet geven voor bijvoorbeeld een notatie als $P(4,5 \leq X < 5,5 \mid \mu = 5,4; \sigma = 1,9)$ of dat voldaan is aan de vraag met de notatie $\text{normalcdf}(4.5, 5.5, 5.4, 1.9)$ (en bij deze optie vraagt mijn TI om lower, upper, μ en σ : een kind kan de was doen!).

Vergelijkbaar zijn in het CV van vraag 5 van het examen wiskunde havo A 2012, tijdvak 1, de met punten beloonde stappen 'het aantal hooikoortslijders X is binomiaal verdeeld met $n = 135$ en $p = 0,13$ ' en 'beschrijven hoe $P(X \leq 26 \mid n = 135, p = 0,13)$ berekend kan worden'. Leerlingen branden dan vaak meteen los met $\text{binomcdf}(135, 0.13, 26)$ waarin de eerste twee stappen van het CV impliciet voorkomen. Mijn TI vraagt hier keurig om de trials, p en x value, als je binomcdf aanklikt. Moet je zo'n invuloefening belonen?

Wat mij betreft leren we de kandidaten ook hier liever de zaken wiskundig formeel correct op te schrijven, dus aan te geven wat voor verdeling het is, met de bijbehorende parameters, en welke kans er berekend moet worden, zo mogelijk compleet met de P -notatie inclusief wat achter de $|$ moet komen te staan. Dát is de wiskunde. Verder voorkom je discussies om het gebruik van binompdf of normalpdf in plaats van binomcdf of normalcdf of rommelen met (on)gelijktekens toch een 'beetje goed' te vinden wegens de correcte coëfficiënten, zeker daar waar de gevraagde wiskundig beschreven bedoeling onduidelijk op papier staat of afwezig is. Een fout antwoord is gewoon fout. Als je, ter vergelijking, bij eenvoudige berekeningen met $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sin$, $\cos$, wortel of exponent et cetera een intikfout maakt, wordt die ook afgestraft en krijg je ook geen punt voor de goede bedoeling als je zou aangeven hoe je de rekenmachine wilde gebruiken. Laat dat in deze gevallen dan ook zo zijn, zeker nu het gebruik van de GR steeds verder versimpelt en trucmatig wordt dankzij de verfijningen

en vereenvoudigingen die de producenten aanbrengen.

Ik ben het examen havo A 2012, tijdvak 1, nog eens nagelopen op het gebruik van de GR. Dat komt tien keer voor (10 van de 84 punten), waarvan zo'n vijf keer een vergelijking moest worden opgelost, dus vijf keer dezelfde handeling wordt beloond. Of eigenlijk vaker, want bij vraag 16 is feitelijk de vergelijking $\text{normalcdf}(-10^{99}, x, 178,14) = 0.05$ aan de orde. Het oplossen met de GR kan met voorgeprogrammeerde solve-instellingen gereduceerd worden tot een invuloefening. Via de hier meer gebruikelijke invNorm -optie vraagt de TI bij mij om de oppervlakte (area), μ en σ ; dat kan dan toch al bijna niet fout gaan. En gaat het fout, dan komt dat meestal door verkeerd inzicht in de situatie, en is dan het noemen van de optie invNorm op zich nog puntwaardig?

Een normaalkromme met de juiste gegevens op de juiste plaats en/of het noteren van $P(X \leq x \mid \mu = 178, \sigma = 14) = 0.05$ lijkt me toch veel meer van inzicht te getuigen. En gaat er bij het GR-gebruik zelf dan iets fout: de wiskunde is beloond, het antwoord gaat de mist in, maar er is geen punt verdiend met iets wat zich in feite aan het oog van de corrector onttrekt.

Vermeldenswaard is nog dat het opstellen van een lineaire formule bij vraag 21 heel snel en eenvoudig kon met de optie LinReg en de groeifactor van vraag 11 met ExpReg . In het eerste geval werden er in het CV geen nadere eisen gesteld aan de berekening, in het tweede wordt de gebruikelijke berekening expliciet vermeld. Hoewel deze toepassingen van de GR niet de bedoeling van de vraagstellers waren, moest een beantwoording op deze wijze toch goed gerekend worden, zo heeft het CvE aangegeven.

Vraag 12 leende zich, gezien de discrete context, trouwens naast de intersect-aanpak ook (en misschien zelfs beter?) voor een oplossing via een tabel met gehele waarden voor de variabele. Dan verwachten we ook de context en het resultaat van de berekening: een tabelletje met de overgangswaarden met de conclusie. Kijk ik naar havo B, dan komt in het CV drie keer de opmerking 'beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden' voor (zonder de eis 'algebraïsch' of 'exact'). En inderdaad: het mag dan zonder GR

geprobeerd worden, maar het eventuele meerwerk wordt niet extra beloond.

Daarnaast telde ik zes vragen waarvan de oplossing exact of algebraïsch moest worden berekend. De te maken stappen, die in het CV expliciet vermeld staan, leveren dan ook navenant meerdere punten op.

Op het vwo speelt bij wiskunde B onder andere het gebruik van integraalopties van de GR een rol. Ook hier is het toepassen van deze opties dankzij zaken als *natural textbook display* vervallen tot een simpele invuloefening: het overnemen van de opgestelde integraal op je GR. Dat heeft geen toegevoegde waarde, als die integraal al op papier staat. Overigens, die *natural display* verkoopt stiekem exacte knollen voor benaderde citroenen door antwoorden in de vorm van breuken en/of wortels en zelfs in een vorm als $\frac{1}{6}\pi$ te geven.

Er zijn nog zo'n drie jaar te gaan voor de zaken in 2015 weer op de schop gaan. Misschien is het dus een punt van discussie om in de aanloop van de komende wijzigingen ons nog eens goed te bezinnen op de rol van de GR, maar met name ook op de beloning van de rol die de GR speelt bij het oplossen van wiskundige problemen. Gaat het ons nou om knoppenvaardigheid of om het tonen van wiskundig inzicht? De vraag is dus: verdient het weergeven van het wiskundige oplossingsmodel en de eventuele strategie de volle waardering, of telt het aangeven van de GR-procedures die in die model wordt toegepast, ook mee?

Noot (red.)

- [1] Zie het artikel 'Werkwoorden in de centrale examens' van Paul Drijvers en Kenneth Tjon Soei Sjoie in dit nummer; pp.162-164.

Over de auteur

Erik Korthof is als webmaster verbonden aan de website van de NVvW en was vóór zijn pensionering docent wiskunde aan het Bonhoeffer College te Enschede. E-mailadres: eskorthof.1@kpnmail.nl Reacties kunnen geplaatst worden in het forum 'Lezersreacties Euclides' op: www.nvww.nl/page.php?id=8729

Didactiek? Laat mij maar gewoon lesgeven!

DEEL 2

[Anne van Streun en Heiner Wind]

Ontwikkeling didactiek van de algebra in de praktijk

[Heiner Wind]

Toen...

Als beginnend docent, gepokt en gemazeld in het oplossen van eerstegraads en tweedegraads vergelijkingen, kun je je verbazen over de problemen die leerlingen daarmee hebben en welke, voor jou ongelooflijke, fouten ze daarbij maken. Uitleggen wat ze fout doen en stap voor stap voordoen, hoe het wel moet ('moet' of 'zou kunnen?') lukt nog wel. Vervolgens levert het oefenen van rijtjes met soortgelijke opgaven het gewenste resultaat. De toets over eerstegraads vergelijkingen wordt gemiddeld goed gemaakt. Dat levert blijheid alom: leerlingen blij, ouders blij, docent blij, schoolleiding blij – wat wil een mens nog meer? Doel bereikt.

Daar kun je als beginner dus tevreden op terugkijken, maar het begint al gauw te knagen als je ziet dat ze bij ook maar iets afwijkende opgaven praktisch niets van het geleerde herkennen of kunnen toepassen. Dus welk doel heb ik nou bereikt?

Weliswaar in het bezit van de vereiste bewijzen van didactische en pedagogische bekwaamheid, lijkt het me toch wel verstandig om een nascholing te bezoeken, waar het oplossen van vergelijkingen aan de orde zal komen. Eens kijken wat andere, oudere, meer ervaren collega's te melden hebben; daar kun je alleen maar wijzer van worden.

Er worden voorbeelden van tweedegraads vergelijkingen gegeven, waarbij oplossingsstrategieën ter sprake komen. Allemaal gelukkig herkenbaar, en ik was al blij dat het zo praktisch was. Geen theoretische beschouwingen, want daar zat ik nou niet direct op te wachten.

Opeens neemt een oudere collega het woord en zegt: 'Al die verschillende methoden, die ook wel in de leerboeken te vinden zijn, sla ik altijd over en ik vertel de leerlingen maar één ding: Vergeet alles wat daar staat maar, hier is een formule, de zogenaamde wortelformule, en daarmee kun je al die tweedegraads vergelijkingen

oplossen! Iets anders heb je niet nodig.' Ik dacht eerst: hij probeert de boel te provoceren om discussie uit te lokken, maar uit de manier waarop hij dit poneerde, bleek dat hij het bloedserieus meende en ook zo rigide in praktijk bracht. De schrik sloeg me enigszins om het hart: waar ben ik hier beland?

En nu...

Ongeveer 40 jaar, tientallen nascholingen, conferenties, studiereizen, wiskundedagen, onderwijsvernieuwingen en programmawijzigingen later beland ik tijdens een ELWLeR-conferentie in een werkgroep van auteurs van het nieuw te verschijnen *Handboek Wiskundedidactiek*^[1].

Als vingeroefening wordt er in groepjes gebrainstormd over het onderwerp variabelen en vergelijkingen aan de hand van een samenvatting van hoofdstuk 2 uit het *Handboek*. Na afloop wordt er alom enthousiast verslag uitgebracht, waarbij de begrippen *concept-objectdualiteit*, *symbol sense* enzovoort, niet van de lucht zijn.^[2] Nu ben ik toch niet meer helemaal een leek op dit gebied, maar toch...

De schrik sloeg me enigszins om het hart: waar ben ik hier beland?

Zowel toen als nu ligt het allemaal natuurlijk veel genuanceerder.

Toen was er gelukkig een ervaren discussieleider, die een en ander in goede banen leidde, zodat je gesterkt weer naar huis en school kon om verder te leren.

Nu is het *Handboek* verschenen, waarin te lezen is wat er allemaal aan die samenvatting vooraf gaat. Een tip van de sluier wordt hieronder opgelicht.

Deel 2

Variabelen en vergelijkingen. Foutenfestival?

[Anne van Streun, Heiner Wind]

Instampen zonder betekenis

Het foutenfestival begint natuurlijk al direct in de onderbouw. Leerlingen leren algebraregels en stampen die in hun hoofd door flink te oefenen met rijtjes analoge

sommen. Dit inoefenen zonder samenhang en zonder betekenis leidt wel tot succes op de korte termijn, maar is op de lange termijn contraproductief. Hoe een en ander in het langetermijngeheugen werkt, wordt in het *Handboek* toegelicht.

Natuurlijk moeten leerlingen bepaalde rekenprocedures op den duur paraat hebben, dat noemen we het *proces*-karakter van de algebra. Maar tegelijk moeten ze (blijven) weten waarom iets werkt en waar dat gereken toe leidt. Eerst op je handen gaan zitten en kijken naar die algebraïsche expressie: *Wat staat er nu eigenlijk?* Dat heet het *object*-karakter van de algebra. Natuurlijk begin je daar wel mee in de onderbouw. Elke kans grijp je aan om de betekenis te versterken.

Voorbeeld: een eenvoudige beginopgave van eerstegraads vergelijkingen:

Los op $2x - 3 = 11$.

Een koud kunstje: hup, '3 naar de andere kant', dus $2x = 14$, dus $x = 7$.

Maar waarom werkt dit zo?

Verwoord wat er met het getal x stap voor stap gebeurd is om als uitkomst 11 te krijgen en laat de leerling zelf uitleggen welke stappen er dus nodig zijn om x te berekenen. Maak gebruik van een pijlenketting, verwoorden en dan de pijlen omkeren.

En in je achterhoofd zit bij deze bespreking wellicht al de behandeling van samengestelde functies en hun inversen. Daar kun je nu al een voorschot op nemen, door deze stapsgewijze berekening en de omgekeerde volgorde te expliciteren.

Ook bij $3x + 7 = 5x - 1$ is de startvraag:

Waar wil je naar toe?

'Naar de andere kant brengen' leidt tot betekenisloze trucs, terwijl bij een aanpak als:

$$\begin{array}{r|l} 3x + 7 = 5x - 1 & +1 \\ 3x + 8 = 5x & -3x \\ 8 = 2x & :2 \\ 4 = x & \end{array}$$

uit de verf komt wat er precies gebeurt. Daarbij is het van belang dat je van leerlingen vraagt dit zo ook te noteren en hun oplossing te controleren.

Uw boodschap is dat leerlingen nu al moeten beseffen dat het niet alleen gaat om het produceren van een antwoord, maar ook om het kunnen uitlegen waarom ze iets doen. Open deuren? Zeker, maar kijkt u wel eens in de schriften van uw leerlingen of van de leerlingen van uw collega? En vraagt u op elke toets om met voorbeelden de methoden uit te leggen die ze kennen om een eerstegraads vergelijking op te lossen?

Vraagt u ook, zodra de gelegenheid zich voordoet, naar de relatie met de grafieken bij een vergelijking te kijken?

Conclusie – Zinvol algebraonderwijs begint in leerjaar 1, sectiebreed, met betekenisrijk oefenen en toetsen.

Overzicht: het goede gereedschap selecteren

De tweedegraads vergelijkingen en functies vormen het aangewezen gebied om leerlingen te leren hoe ze naar het object, de algebraïsche expressie, moeten gaan kijken. Eerst op je handen gaan zitten en je afvragen welk gereedschap je gaat selecteren om tot een oplossing of antwoord te komen. Wat staat er nu eigenlijk? Welke methoden heb je paraat? Wat doe je met:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$3(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$(3x + 1)^2 = (2x - 4)^2$$

Je moet er toch niet aan denken, dat je hier de wortelformule van stal haalt? De rampen die er – met name bij het laatste voorbeeld – gaan ontstaan, kunt u zelf wel verzinnen! In het *Handboek* en op de bijbehorende website van Epsilon Uitgaven (zie noot [1]) staat een samenhangend overzicht van allerlei typen vergelijkingen in de bovenbouw havo/vwo. In de loop van de jaren bouw je als leraar (nee, als sectie) met de leerlingen zo'n overzicht op, zodat de samenhang in hun langetermijngeheugen wordt versterkt en ze meer bewust het passende gereedschap kunnen kiezen. En weer gaat het erom dat leerlingen zelf die patronen moeten kennen en uitleggen. De gereedschapskist van methoden, gekoppeld aan opgaven, moeten leerlingen paraat hebben en leren gebruiken. Dat kan worden onderwezen en dan ook getoetst.

Het objectkarakter

Een voorbeeld uit eigen kring. Kleinzoorn A, een heel goede leerling in 4-vwo en gereed om de toets over tweedegraads functies en machtsfuncties te maken, leg ik de vergelijking $(x - 3)^2 + 15 = 10$ uit hoofdstuk 2 voor. Inderdaad hij gaat haakjes uitwerken en laat er tenslotte de *abc*-formule op los. Nee, geen oplossingen. We praten erover door en ja, hij heeft geen idee dat je ook eens met verstand naar zo'n vergelijking kunt kijken en daaruit direct conclusies kunt trekken. Je zou willen dat aan het einde van de onderbouw havo/vwo een leerling kan beredeneren dat de vergelijking geen oplossing heeft, omdat een kwadraat (altijd groter dan of gelijk aan 0) met nog 15 erbij nooit gelijk kan zijn aan 10. Of dat de grafische betekenis een dalparabool is die boven de lijn $y = 10$ ligt. In beide redeneringen gaat het om een combinatie van *Weten dat* en *Weten waarom*. En in beide redeneringen gaat het niet om het direct rekenen (het *proces*) maar om het met verstand kijken: 'Wat staat er eigenlijk?' (het *object*) met de mogelijke betekenissen (*symbol sense*). En voor deze heel goede leerling van 4-vwo was het volstrekt nieuw dat je ook op die manier naar een vergelijking kunt kijken (*Weten hoe*) en er mee kunt redeneren. Nog afgezien van het feit dat de kennis waarmee je redeneert (het *Weten dat*) – namelijk de eigenschap van een kwadraat en de grafische betekenis – niet paraat waren.

Wij denken dat wij in ons algebraonderwijs in het algemeen veel te weinig aandacht besteden aan het leren kijken naar en vragen stellen over de gegeven algebraïsche expressie. Waarom kun je de breuk $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$ natuurlijk niet vereenvoudigen tot $\frac{-x}{-2x + 1}$ of tot $\frac{1}{-x + 1}$, zoals ooit de meerderheid van de instromende eerstejaars studenten aan de TU Delft deden? Bij het oplossen van de vergelijking $-4 + x + \sqrt{x} = 0$ worden de meest gruwelijke fouten gemaakt, terwijl de eerste vraag zou moeten zijn: Wat staat er eigenlijk, en wat is het probleem hier? Enzovoort.

De wiskundeleraar is het rolmodel waar leerlingen van kunnen leren om eerst met verstand (geholpen door parate kennis) naar een vergelijking te kijken. En dat wordt dan ook getoetst.

Tot slot

Goed algebraonderwijs heeft alles te maken met het bevorderen van de juiste, vragende, *houding* van leerlingen, met het vasthouden aan de *betekenissen* van procedures, met het opbouwen van een *overzicht* op het gereedschap door de leerlingen, met het leren *selecteren* uit die gereedschapskist en niet in de laatste plaats met het leren *kijken* naar en *vragen stellen* over een vergelijking. Dat lukt nooit en te nimmer als leerlingen alleen maar sommen uit het boek maken en er amper interactie met de leraar is over deze aspecten. En het lukt het best als de gehele sectie in alle schooljaren aan deze leerstof overstijgende doelen werkt.

Aanvullend

Over 'Wat staat er nu eigenlijk' (symbol sense) is er in de *Nieuwe Wiskrant*, jaargang 31 nr. 3, een zeer lezenswaardig artikel verschenen van Paul Drijvers.

Noten (red.)

- [0] Deel 1 van deze artikelenreeks verscheen in *Euclides*, jaargang 88, nummer 3 (december 2012); pp. 131-132.
- [1] P. Drijvers, A. van Streun, B. Zwaneveld (2012): *Handboek Wiskundendidactiek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven. Deel 72, ISBN 978-90-5041-130-1
Zie ook: www.epsilon-uitgaven.nl/E72.php
- [2] H. Wind (2012): *Over ELWIEr*. In: *Euclides* 87(5); pp. 211-214.

Over de auteurs

Anne van Streun werkte 10 jaar als wiskundeleraar en was vervolgens wiskundendidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen. Vanaf 2001 tot zijn pensionering was hij daar hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.
E-mailadres: avstreun@euronet.nl
Heiner Wind is voorzitter van de redactie van *Euclides* en was docent wiskunde aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen tot hij op 1 januari 2008 met FPU ging.
E-mailadres: hwind@home.nl

Tussendoelen havo/vwo-3

VOORBEELDOPGAVEN

[Dédé de Haan en Lambrecht Spijkerboer]

Inleiding

In het *Euclides*-nummer van december 2012 (pp. 136-138) is informatie gegeven over de tussendoelen voor wiskunde havo/vwo klas 3. Om goed aan te geven wat de tussendoelen nu precies inhouden en om het niveau te bewaken zijn er voorbeeldopgaven bij deze tussendoelen gemaakt. Inmiddels is de opgavenbank gevuld met zo'n 150 opgaven waarmee een goede indruk verkregen kan worden van wat deze tussendoelen concreet inhouden. De databank is te vinden via de website van cTWO.^[1]

Elke opgave is in de klas (soms in een toets) uitgeprobeerd en op grond van die ervaringen bijgesteld. Daarvan geven we in dit artikel een indruk.

Wat leren we de leerlingen in de onderbouw?

De opgavenbank is gericht op de breedte van wat het vak in de onderbouw havo/vwo moet bevatten. Het wiskundecurriculum bevat onderwerpen waarmee leerlingen zich voorbereiden op de programma's wiskunde in de bovenbouw. Niet alleen wát aan de orde komt, maar ook op welke manier leerlingen met die leerstof aan de slag gaan, is wezenlijk om hun de aard van het vak te laten zien en hen te laten ontdekken wat ze met wiskunde eigenlijk leren.

De leeropbrengst van leerlingen bij wiskunde leren gaat over kennis én vaardigheden. Anders gezegd: het gaat om het in beeld brengen van de capaciteiten van de leerling door 'kennen en kunnen' in beeld te brengen.

Meestal beoordelen we leerlingen op basis van toetsen, met opgaven waarin de leerling kan laten zien: ik weet het, ik snap het en ik kan iets doen met wat ik weet en snap. Het gaat niet alleen om reproductief leren, maar ook om inzichtelijk leren.

Om in het leren van wiskunde onderscheid te maken gebruiken we daarvoor een eenvoudige leertheoretische onderbouwing met de leeractiviteiten Onthouden, Begrijpen, Integreren en Toepassen (OBIT).

Voor het OBIT-model *zie de kadertekst*

en het boek *Actief leren* van Sebo Ebbens en Simon Ettekovén^[2].

Onthouden en begrijpen zijn activiteiten die veelal in het kortetermijngeheugen terecht komen. Bij integreren en toepassen gaat het om activiteiten die veelal in het langetermijngeheugen terecht komen. Deze manier van leren vraagt om het leggen van verbanden, het koppelen van gegevens al dan niet in combinatie met een nieuwe onvoorspelbare context. Bij integreren en toepassen heeft de leeropbrengst een langere houdbaarheidsdatum en is de kans groter dat leerlingen deze stof op een later moment nog kunnen oproepen en/of gebruiken.

Voorbeeldopgaven bij de tussendoelen

Voorbeeld 1 – Bouwen

Van vierkanten kun je een bouwwerk maken, zie de bouwwerken *in figuur 1*. Daarin is n het nummer van het bouwwerk.

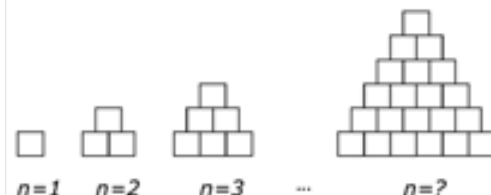
- Welk nummer heeft het rechter bouwwerk?
- Uit hoeveel vierkantjes bestaat het bouwwerk met $n = 9$?
- Welk soort verband is er tussen het nummer van het bouwwerk en het aantal vierkantjes? Verklaar je antwoord.
- Geef de formule van het verband. Neem A voor het aantal vierkantjes en n voor het nummer van het bouwwerk.

Kennis – Deze opgave hoort bij domein E: Verbanden en formules. De specifieke tussendoelen die hier aan bod komen zijn: 12.2 - Een geschikte vorm kiezen om een patroon of structuur te beschrijven (met tabel, woordformule of grafiek).

12.9 - Op grond van de structuur van grafiek, tabel of formule redeneren over het onderliggende verband: constant verband, wortelverband, omgekeerd evenredig verband, periodiek verband, machtsverband.

15.3 - De formule van een kwadratisch verband opstellen aan de hand van de eigenschappen (top, snijpunten assen) uit een gegeven grafiek of tabel (dit tussendoel is alleen voor 3-vwo).

16 - Regelmaat in (meetkundige) patronen



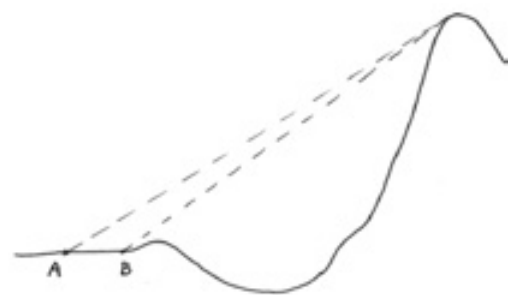
figuur 1

en tabellen herkennen, voortzetten en beschrijven.

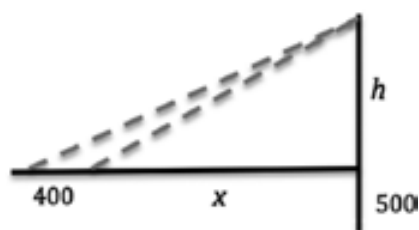
Wat gebeurt er in de klas? – Twee jongens van 3-vwo buigen zich over deze opgave. Zij rekenen netjes uit bij $n = 9$ zijn er $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ vierkantjes. Zij tikken de getallen achterelkaar in op de rekenmachine en zetten het antwoord op hun blaadje.

Op naar de volgende vraag, c) Welk soort verband ...? Die vraag begrijpen ze niet en ik kom erbij. Wat is de vraag? De jongens hebben niet het idee dat zij met verbanden bezig zijn, ze hebben een optelsom gemaakt. Ik vraag of dat niet slimmer kan, en: 'Stel je voor dat ze vragen naar het aantal vierkantjes bij $n = 99$. Ga je dan ook al die getallen netjes achterelkaar intypen? Dat gaat vast een keertje mis, en dan? Kan dat niet gemakkelijker en betrouwbaarder? Het is tenslotte ook geen rijtje willekeurige getallen, maar netjes op volgorde.'

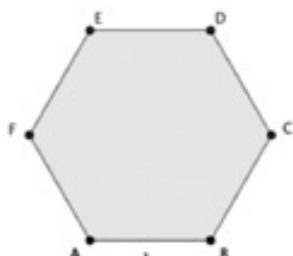
Dan leggen ze mij uit hoe ze dat moet zien: dezelfde figuur ondersteboven eraan tekenen, dan heb je telkens rijtjes met hetzelfde aantal vierkantjes en dan delen door twee. In het gesprek komen ze op een duidelijke strategie. Het verwoorden daarvan is tot daar aan toe, maar op papier zetten is lastig en in wiskundige taal, met een formule blijkt echt iets anders te zijn. Deze leerlingen kunnen best goed wiskundig redeneren, maar hebben nog niet gezien dat de formule dezelfde denkwijze verbeeldt als zij in hun hoofd hebben. Hulpvragen bij het bevorderen van het redeneren kunnen zijn: Hoeveel vierkantjes in elke rij? / Hoeveel rijtjes? / Waarom dan nog delen door 2? / Zie je in de formule die stappen precies terug?



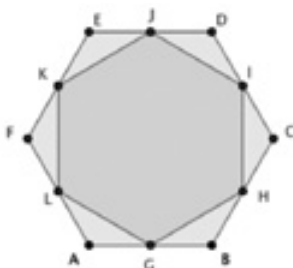
figuur 2a



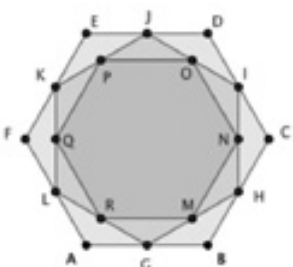
figuur 2b



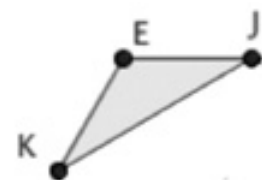
figuur 3a



figuur 3b



figuur 3c



figuur 3d

Zo leren ze naar de formule als object kijken.

Vaardigheden – Verbinden we wat hier gebeurt met het OBIT-model, dan zien we dat wanneer leerlingen alleen geleerd wordt hun leeractiviteit Begrijpen te tonen (hoe gaat deze som), maar te weinig uitgedaagd zijn om te Integreren (wat heeft de formule te maken met de manier waarop je hier het aantal vierkantjes handiger kunt uitrekenen?), dan blijft hun wiskundige resultaat achter, terwijl zij dit wel degelijk in huis hebben. Met deze opgave is een aanknopingspunt gevonden om het wiskundig denken te stimuleren en om met de leerlingen te spreken over waar wiskunde eigenlijk over gaat.

Voorbeeld 2 - Hoogteberekening

Tijdens een wandeling in bergachtig gebied wil Janneke de hoogte van een berg berekenen. Jip staat 400 m verder op. A en B liggen even hoog, beide 500 m boven de zeespiegel; **zie figuur 2a**.

Janneke doet de volgende metingen:

- De afstand AB is 400 m.
- De hoek tussen de horizontale grond in A en de zichtlijn naar de top van de berg is 33° .
- De hoek tussen de horizontale grond in B en de zichtlijn naar de top van de berg is 42° .

» Bereken hoeveel meter de top van de berg boven de zeespiegel ligt.

Kennis – Deze opgave hoort bij domein D1: Rekenen in de meetkunde. De specifieke tussendoelen die hier aan bod komen zijn:

- 10.4 - De grootte van hoeken berekenen met behulp van de verhouding van twee zijden van een rechthoekige driehoek;
- 11.4 - Passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het beschrijven en tekenen van en het redeneren met meetkundige figuren.

Wat gebeurt er in de klas? – In de opgave hierboven moeten leerlingen zelf een rechthoekige driehoek tekenen; **zie figuur 2b**. Het blijkt dat dat een onoverkomelijke blokkade is, want als de driehoek er eenmaal staat, is het een kwestie van tangens invullen met variabelen x en h (dat is lastig) en dan twee vergelijkingen met twee onbekenden oplossen, waarbij je eigenlijk alleen geïnteresseerd bent in h . De strategieën hebben zij gehad, dat is onderwezen en kunnen zij uitvoeren, maar als er geen driehoek staat, wat dan?

Tenslotte een addertje onder het gras: niet de hoogte h wordt gevraagd, maar de hoogte van de berg boven de zeespiegel, dus nog + 500 m.

Vaardigheden – Hierbij wordt duidelijk dat het *integreren* door leerlingen niet direct wordt gezien als iets dat je bij wiskunde leert, het moet een standaard situatie zijn, soms met een lastig addertje onder het gras. Als er een rechthoekige driehoek staat, dan is er iets te doen met tangens; dát is wel geleerd.

Voorbeeld 3 – Regelmatige zeshoeken

Elke regelmatige zeshoek is opgebouwd uit zes gelijkzijdige driehoeken. **In figuur 3a** zie je de regelmatige zeshoek ABCDEF met $AB = 1$. We noemen deze zeshoek nummer 0.

- a. Toon aan dat de oppervlakte van zeshoek nummer 0 gelijk is aan $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. De middens van de zijden van de zeshoek zijn G, H, I, J, K en L (**zie figuur 3b**). Door deze punten te verbinden ontstaat de regelmatige zeshoek GHIJKL. We noemen deze zeshoek nummer 1.
- b. Toon aan dat de oppervlakte van zeshoek nummer 1 gelijk is aan $\frac{9}{8}\sqrt{3}$.
- c. Laat zien dat de vergrotingsfactor van de oppervlakte gelijk is aan $\frac{3}{4}$.

De middens van de regelmatige zeshoek GHIJKL zijn M, N, O, P, Q en R (**zie figuur 3c**). Door deze middens te verbinden ontstaat zeshoek nummer 2. De vergrotingsfactor van de oppervlakte blijft gelijk aan $\frac{3}{4}$.

- d. Bereken exact de oppervlakte van zeshoek nummer 2.

De oppervlakte van zeshoek nummer n kan uitgedrukt worden in een formule:

$$O = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

- e. Bereken met behulp van inklemmen het nummer van de eerste zeshoek waarvoor geldt dat de oppervlakte kleiner is dan 0,5.

Kennis – Deze opgave hoort bij domein C: Verhoudingen, bij domein D1: Rekenen in de meetkunde en bij domein E6: Vergelijkingen en ongelijkheden. De specifieke tussendoelen die hier aan bod komen zijn:

- 9.5 - Verhoudingen toepassen bij het oplossen van problemen.
- 10.1 - Passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het rekenen in de meetkunde.
- 10.3 - Lengte van lijnstukken berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras en/of relevante formules.

17.5 - Exponentiële vergelijkingen van de vorm $ax = p$ oplossen door een numerieke benadering met bijvoorbeeld een tabel en/of grafiek.

Wat gebeurt er in de klas? – Bij bovenstaande opgave worden de leerlingen – om het niet te moeilijk te maken – door de docent aan de hand gevoerd richting de oplossing. Voor zeshoek nummer 0, eerst de oppervlakte uitrekenen van één driehoekje en dan vermenigvuldigen met 6. Oppervlakte driehoek is $\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$; dus de hoogte moet worden berekend. Dat gaat vlot met de stelling van Pythagoras. Daarna de zeshoek met nummer 1 op dezelfde manier. Leerlingen verdwalen al gauw in de tekening met de verschillende lijnstukjes en raken het zicht op de oplossing kwijt door de tussenberekeningen met alweer de stelling van Pythagoras.

Een tweetal leerlingen is een andere weg ingeslagen: voor zeshoek nummer 1 moet je van zeshoek nummer 0 er zes driehoekjes afknippen.

KJ heeft de lengte die al is berekend als hoogte van de driehoek van figuur 0. De afstand van *E* naar het centrum van de zeshoek is gemakkelijk, gelijk aan 1, dus alleen nog de hoogte op de basis *KJ* bepalen; *zie figuur 3d*. Ze zijn in druk overleg en hebben niet in de gaten dat de docent inmiddels op het bord bezig is met het bespreken van vraag c), de vergrotingsfactor voor de oppervlakte.

Vaardigheden – De leerlingen van klas 3-vwo laten zich graag bij de hand nemen, vooral als de docent het prima uitlegt en met mooie tekeningen op het digibord laat zien hoe deze opgave aangepakt moet worden, de leerlingen doen dan het laatste rekenwerk (Begrijpen), maar de docent heeft het eigenlijke denkwerk (Integreren) gedaan. Meer ruimte laten aan verschillende oplossingsstrategieën kan juist bij dit soort opgaven het wiskundig denken versterken. En dat blijkt ook wel te kunnen. Leerlingen die worden uitgedaagd, moeten zelf gaan nadenken en dat kunnen zij! Een prachtig voorbeeld van de nieuwe uitdaging voor het werken met wiskundige denkactiviteiten.

Voorbeeld 4 – IJsaangroei

Wij baseren onze ijsaangroei-voorspelling op een door Van Dalen Snow ontwikkelde methode. Deze methode houdt rekening met bijna alle weersomstandigheden. De uitkomsten van het toepassen van deze methode verwerken wij in een grafiek.

OBIT en wiskunde

Onthouden – Voor *onthouden* hoef je de stof niet te snappen. Je leert de stof door reproductie, door te memoriseren. Wanneer je echt routinematig een opgave oplost, kan dit vallen onder de categorie onthouden. Voorbeelden van onthoudvragen zijn: Wat is de naam van deze lijn? (zwaartelij) / Wat is de definitie van een parallellogram? / Schrijf uit het hoofd de kwadraten t/m 202 op.

Deze leeractiviteit komt niet veel in de toetsen bij wiskunde voor. In de opgavenbank vinden we van dit soort vragen weinig voorbeelden.

Begrijpen – De leeractiviteit *begrijpen* is te herkennen doordat het geleerde in eigen woorden uitgelegd wordt. Begrijpvragen bij wiskundeopgaven zijn (eenvoudige) sommen, die in de les vaak zijn geoefend, waarvan duidelijk is hoe je de opgave oplost zonder dat je veel denkstappen hoeft te combineren. Het niveau van dit soort begrijpvragen kan vrij sterk variëren.

Voorbeelden van begrijpvragen zijn: Los deze vergelijking op / Geef de vergelijking van de symmetrieas van deze parabool / Bereken de grootte van deze hoek.

In de opgaven bank komen we ook begripopgaven tegen, meestal als opstap voor de volgende vragen van de opgave.

Integreren – Bij de leeractiviteit *integreren* gaat het om het leggen van verbanden (door het koppelen van gegevens), en dat vraagt om inzichtelijke vaardigheden. Of een leerling inzicht heeft, begint hier zichtbaar te worden. Bij integreren is eigenlijk altijd sprake van het combineren van denkstappen. Deze denkstappen zijn echter wel gegeven of bekend (soms zelfs doordat er een handelingsvolgorde wordt aangegeven). Voorbeelden van integratievragen zijn: Welke formule hoort bij welke grafiek, en leg uit waarom? / Beschrijf het verband tussen deze twee variabelen (dat mag in een formule in woorden of met een toelichting) / Wat heeft de oplossing van a) te maken met de antwoorden van c). Geef een verklaring.

In de opgavenbank zijn veel voorbeelden van integratievragen te vinden. Het gaat er dan om dat leerlingen met het geleerde iets doen, iets toevoegen van hun eigen denken en niet alleen nadoen wat (letterlijk) is geleerd in de les. Dit onderdeel moet vooral de diagnostische waarde van wiskunde toetsen verhogen en zou daarom voor meer dan 50% in de toets voor moeten komen.

Toepassen – Bij de leeractiviteit *toepassen* gaat het om het gebruiken van wiskundige kennis en vaardigheden waarbij ook iets creatiefs van leerlingen gevraagd wordt: er is sprake van een ontwerpproces. Dat ontwerpproces wordt doorgaans eerder in gang gezet wanneer de leerling gevraagd wordt om te gaan met een nieuwe en/of onvoorspelbare context. Bij de leeractiviteit toepassen zijn meestal één of meer van de leeractiviteiten integreren, begrijpen en onthouden voorwaardelijk.

In de opgavenbank zijn de toepassingsvragen vaak als klassenactiviteit opgenomen. Het gaat dan om zelf oplossingen bedenken – meestal in samenwerking – en om het leggen van verbanden tussen wiskundekennis en de praktijk. In toetsen komt de leeractiviteit toepassen meestal niet of nauwelijks terug, maar veel meer in (praktische) opdrachten, zodat ook meerdere manieren van aanpak, meerdere oplossingen en het gebruik van verschillende

De grafiek is *in figuur 4* op pag. 172 te zien. Zowel verticaal als horizontaal zijn de verwachte ijsdiktes in centimeters aangegeven. Op sloten met een diepte van ongeveer 1 meter kan worden geschaatst bij een gemiddelde ijsdikte van 7 centimeter. Volgens de gegevens bij de horizontale as was het ijs op zaterdag 04-02 12,60 cm dik.

a. Kun je uit de figuur afleiden op welk moment van die dag de meting wordt gedaan?

Ga ervan uit dat dit diagram in de dagen voor vrijdag 3 februari even steil liep als na vrijdag 3 februari.

b. Bepaal op welke dag de ijsaangroei begonnen is.

In 2012 was er een vorstperiode met voortdurend temperaturen onder nul.

- c. Op welke dag was er voor het eerst in deze vorstperiode 30 cm ijs in de sloten van Haulerwijk?
- d. Het deel van het diagram van vrijdag 3 t/m maandag 6 februari is nagenoeg een rechte lijn. Geef een formule die bij deze lijn hoort.
- e. Op welke dag zou het ijs 30 cm dik zijn als de trend van vrijdag 3 t/m maandag 6 februari zich zou voort zetten?

Kennis – Deze opgave hoort bij domein E1: Grafieken, tabellen en formules, en bij domein E2: Lineaire verbanden. De



figuur 4 Bron: www.vandalenwebdesign.nl/snow

specifieke tussendoelen die hier aan bod komen zijn:

12.3 - Globale en lokale informatie uit een grafiek aflezen, interpreteren en beschrijven met passende terminologie.

12.4 - Passende vaktaal voor grafieken, tabellen en formules herkennen en gebruiken in een probleemsituatie.

12.7 - Interpoleren en extrapoleren in een grafiek door aflezen.

13.2 - Een formule in de vorm $y = ax + b$ opstellen bij een door situatie, tabel of grafiek gegeven lineair verband.

Wat gebeurt er in de klas? – Leerlingen zijn gewend de antwoorden te geven op vragen die een antwoord hebben in de vorm van een getal, eventueel met uitleg. Daarom is vraag a) verrassend. Hé, je kan hier eigenlijk niet weten op welk tijdstip de informatie over de ijsdikte wordt verkregen. De meting staat weliswaar op het midden van het datumvakje, maar betekent dit dan om 12.00 uur 's-middags?

Robin loopt vast bij c. Hij zegt: 'Je kunt niet voorspellen wanneer de ijsdikte 30 cm zal zijn, want ondanks de vorst kan de dikte langzamer aangroeien en misschien wel nooit 30 cm worden.' Robin wijst erop dat de trend al afzwakt en dat het nog maar de vraag is hoe de grafiek verder loopt. Hij tekent met zijn vinger een dal in de kromme en laat die daarna vóór -30 cm weer oplopen. Op grond hiervan wijzigt de docent de opgave in:

c. Robin zegt dat je niet kunt voorspellen wanneer het ijs 30 cm wordt. Geef één argument voor en één argument tegen zijn bewering.

Zo blijkt de klassenervaring gebruikt te worden om de opgave bij te stellen alvorens die in de opgavenbank op te nemen.

Vaardigheden – In het bovenstaande zien we Robin zijn leeractiviteit *toepassen* gebruiken. Hij ziet de beperkingen van

het wiskundige model in de praktijk en laat zich niet zondermeer verleiden door voor de hand liggende berekeningen te maken. Hij denkt na en wordt creatief en kritisch. Dat is toch precies wat leerlingen bij wiskundeonderwijs in de onderbouw kunnen leren: kritisch op de getalsmatige informatie en leren zelf na te denken.

Moelijkheidsgraad

In de opgavenbank zijn de opgaven in drie verschillende niveaus gecategoriseerd. Dit zijn:

- niveau I - Reproductie, definities, feiten, standaardprocedures.
- niveau II - Verbanden leggen, informatie combineren, eigen (wiskundig) gereedschap kiezen.
- niveau III - Modellen maken/gebruiken, redeneren, generaliseren, inzicht tonen.

De aangegeven moeilijkheidsgraden zijn voor eind klas 3 havo/vwo. Het is dus mogelijk dat in begin van klas 3 de leerlingen nog niet het vereiste niveau bezitten, maar dat heeft vooral ook te maken met het feit of de stof reeds is behandeld.

De bovenbouw wordt met het nieuwe cTWO-programma zwaarder en daarom moeten de leerlingen daarop in de onderbouw worden voorbereid. Het niveau van de opgaven is pittig, en daarmee worden de opgaven bij de nieuwe tussendoelen ook een goed streven voor betere aansluiting met de bovenbouw havo/vwo.

Slot

Met de opgaven proberen we te laten zien waar het naartoe gaat, niet alleen wat betreft de kennis die beheerst moet worden, maar ook het niveau, waarbij het meer stimuleren van het zelf denken door de leerlingen en het integreren en toepassen een belangrijke factor is.

We hopen dat bij gebruik van de opgaven de indeling via de tussendoelen zicht zal geven op waar de leerling staat met

betrekking tot de tussendoelen. Daarnaast bereidt een aantal opgaven voor op de verschillende soorten wiskunde die in de bovenbouw gegeven worden en bieden ze daarmee ook een goede mogelijkheid voor reflectie; waar gaat het bovenbouwwak wiskunde eigenlijk over en past mij dat? In die zin dus ook geschikt voor de determinatievraag in klas 3: Welk wiskundevak ga ik kiezen? Gelukkig zijn de opgaven zelf geen toets; ze zijn echt diagnostisch bedoeld en dus als zodanig te gebruiken. De ervaringen met deze opgaven geeft leerlingen vooral *feedback* en stof voor reflectie, zodat duidelijk is wat zij nog kunnen doen om beter beslagen ten ijs te komen in de bovenbouw havo/vwo. Uit de klassenervaringen blijkt dat daarvoor meer aandacht geschonken moet worden aan de leeractiviteiten *integreren* en *toepassen*. Bij veel wiskundelessen gaat het nu in hoofdzaak om de leeractiviteit *begrijpen* waarmee bepaalde standaardprocedures worden uitgelegd en ingeoefend; zo doe je dat! Leerlingen die goed opletten, kunnen die procedures dan met andere getallen, met andere vergelijkingen, met andere tekeningen herhalen, omdat dat 'op dezelfde manier' gaat. In de methoden staan veel opgaven waarvoor leerlingen de leeractiviteit *begrijpen* moeten inzetten. Docenten kunnen leerlingen helpen om met die leerstof zelf na te denken. En daarmee leerlingen uitdagen: laat hun zien wat zij met wiskunde kunnen. Dan bereidt de onderbouw beter voor op de bovenbouw en wordt het vak aantrekkelijker voor zowel leerling als docent.

Noten

- [1] Zie: www.fisme.science.uu.nl/ctwo/Onderbouw/onderwijs/welcome.php
- [2] S. Ebbens, S. Ettekoen (2000): *Actief Leren*. Groningen: Noordhoff Uitgevers B.V.

Over de auteurs

Dédé de Haan (e-mailadres: d.dehaan@uu.nl) is als projectleider bij het cTWO-project Onderbouw betrokken vanuit het Freudenthal Instituut.

Lambrecht Spijkerboer (e-mailadres: l.spijkerboer@aps.nl) is werkzaam bij het APS, onder andere als toetsexpert.

Lesson study - deel 3

ERVARINGEN BIJ DE INTRODUCTIE VAN PERIODIEKE BEWEGINGEN

[Nellie Verhoef en Mark Timmer]

Het eerste artikel in deze serie ging over 'lesson study' als methode om het vak van docent te leren of blijvend te verbeteren. Het tweede artikel beschreef de ervaringen met bewijzen in de meetkunde (zie de paragraaf Info). Dit derde artikel gaat in op lesontwerpen die gaan over de overgang van een meetkundige benadering van de (co)sinus naar de analytische benadering in de vorm van een periodieke beweging. Een onderwerp dat in 4-vwo aan de orde zou komen, en dat de docenten na aan het hart lag.

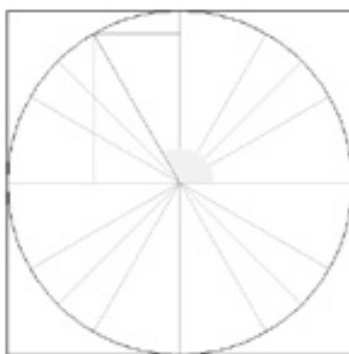
Inleiding

Het plan leek haalbaar: drie uitvoeringen van lessen op verschillende scholen voor de voorjaarsvakantie en drie uitvoeringen op drie andere scholen erna. Dat werd dan wel hard werken. Het uitgangspunt was een zoektocht naar een vloeiende overgang van de meetkundige representatie met rechthoekige driehoeken (in klas 3) en de definitie van de sinus als een verhouding (lengte overstaande zijde : lengte schuine zijde), naar een analytische representatie in de vorm van de grafiek van een functie afhankelijk van de hoek in radialen (in klas 4). Zo lagen er spontaan in de beginfase vier lesontwerpen op tafel, elk voor twee opeenvolgende lessen. Twee lesontwerpen leken op elkaar en op de aanpak van het boek. Besloten werd deze twee ontwerpen uit te werken en door drie koppels uit te laten voeren voor de vakantie. De andere – sterk van elkaar verschillende – ontwerpen zouden dan na de vakantie door de drie overgebleven koppels uitgevoerd kunnen worden.

De drie lesontwerpen

Het eerste lesontwerp is vooral procedureel van aard, vergelijkbaar met Alberink, e.a. (2011; zie [1]). De bekende sos-cas-toa-regel wordt gebruikt in de eenheidscirkel. Leerlingen worden in dit ontwerp uitgedaagd om te kijken naar een stomphoekige in plaats van een scherphoekige driehoek; *zie figuur 1*^[a]. Als je de GR gebruikt, vind je wel degelijk een antwoord als je de sinus van een stompe hoek opzoekt. Het idee is dat leerlingen het periodieke verloop, afhankelijk van de hoek, zelf ontdekken.

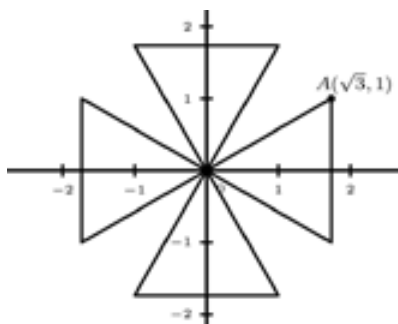
De variant op dit ontwerp lijkt wat op het voorgaande, alleen wordt hier meer met symmetrie in de eenheidscirkel gedaan. Dit ontwerp is geïnspireerd door het HEWET-pakket SINUS van het Freudenthal Instituut (1987). De docenten introduceren een soort 'molentje' om de



figuur 1 Een applet over de eenheidscirkel

symmetrie-eigenschappen te benadrukken (*zie figuur 2*). In dit ontwerp maken de docenten bewust geen gebruik van een applet; het redeneren (eerst zelf doen) staat centraal. Een reactie van een collega in de voorbereidende bijeenkomst: 'Ik zou gewoon zeggen: jongens, gewoon alles vergeten wat je in de derde klas hebt geleerd over de sinus en cosinus. We kijken nu naar periodieke bewegingen, ik kom er later wel op terug.' Dat idee haalde het niet...

Het tweede lesontwerp gaat uit van de tandrad(iaal)baan (*zie figuur 3*). In dit ontwerp staat de afstand – de lengte van de cirkelboog – centraal. Het idee is om leerlingen te laten nadenken over het aantal tanden in relatie tot de hoogte,



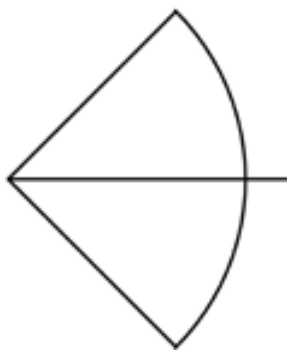
figuur 2 Een molentje



figuur 3 Een tandradbaan

overgaand in een relatie met de afgelegde afstand (booglengte). De radiaal is dan een vanzelfsprekende grootte geworden omdat er een direct verband is met de omtrek van een cirkel. Eigenlijk zijn de leerlingen in de eenheidscirkel aan het werk. Het plan is om later met Pythagoras aan de slag te gaan, waarbij dan geen hoeken, maar radialen worden gebruikt. Onderzoeksbevindingen geven aan dat leerlingen bij het denken over (co)sinussen maar moeilijk afkomen van een direct verband tussen een hoek en de lengtes van de zijden van een rechthoekige driehoek (zie [4]). Heck (2012; zie [3]) gaat zelfs nog verder en begint met opwindfuncties, eindigend in de sinusfunctie.

Het derde ontwerp is voor iedereen nieuw, maar of het uitvoerbaar is? Het idee is een aanpak vanuit een historisch perspectief: het *periodiek* draaien van de aarde om de zon. De cirkelbeweging wordt nu als uitgangspunt genomen. Immers, in een cirkel is de booglengte, en de overeenkomstige hoek dus ook, direct te koppelen aan de lengte van de bijbehorende koorde. Vervolgens gaat het om het meten van een hoek. De grootte van een hoek

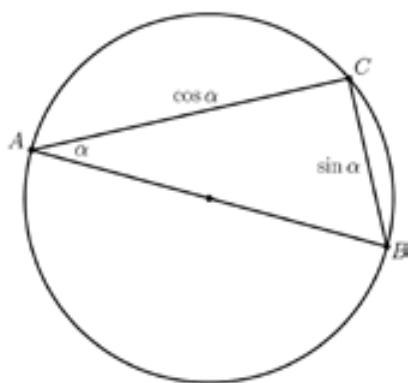


figuur 4 Pijl en boog

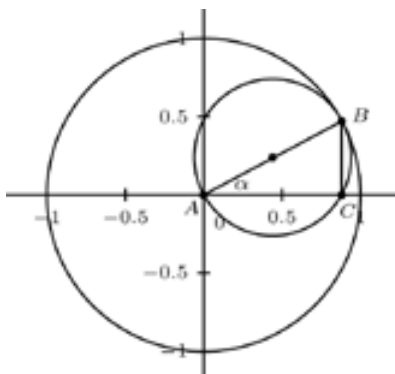
(in een cirkel) is afhankelijk van de lengte van de boog en de afstand van de boog tot het hoekpunt. De lengte van de boog is recht evenredig met de straal. Als we een of andere eenheid voor de straal van de cirkel nemen en de lengte van de boog in die eenheid meten, dan is het resultaat de hoek in *radialen*. Bijvoorbeeld, de straal is 1,2 cm en de lengte van de boog is 1,4 cm, dan is de grootte van de hoek in radialen: $1,4/1,2 = 1,01667$ rad. Je zou dit verband in een tabel kunnen weergeven. Op deze manier heb je een relatie gevonden tussen hoeken en radialen, kort samen te vatten in een figuur die op een pijl en boog lijkt (zie *figuur 4*).

Het begrip 'sinus' houdt van oorsprong verband met een cirkel. In een cirkel met middellijn 1 hoort bij boog α , de koorde $\sin \alpha$ (zie *figuur 5*). Wanneer we deze cirkel spiegelen, draaien en in een eenheidscirkel plaatsen, zien we direct het verband tussen de hoogte van een punt en de sinus van de bijbehorende hoek, en evenzo met de cosinus (zie *figuur 6*).

Deze drie lesontwerpen vormden de basis, waarop aan de hand van theorie werd gereflecteerd en bijgesteld.



figuur 5 Boog α en koorde $\sin \alpha$



figuur 6 Twee cirkels, de sinus en de cosinus

Theorie over het wiskundig denken

De lesontwerpen zijn in bijeenkomsten op de UT bekeken aan de hand van literatuur over de ontwikkeling in het denken. Specifiek is gekeken naar de door Bruner (1966; zie [2]) geïntroduceerde opeenvolgende stappen in de ontwikkeling van het denken, gebruikmakend van representaties: (1) het doen van activiteiten, (2) het gebruik van iconen en (3) het denken in symbolen. Het doen van activiteiten gaat over concrete handelingen tezamen met ervaringen die daar een gevolg van zijn. Door dingen te doen ontstaat inzicht en structuur. Bij het gebruik van iconen zijn er geen concrete handelingen meer nodig. De voorstelling van de werkelijkheid, niet de werkelijkheid zelf, is voldoende. Denk bijvoorbeeld aan het print-icoon op je computerscherm: het icoontje herinnert aan een printer. Het gebruik van iconen leidt tot herkenning, vergelijking en contrast. Het aansluitende denken in symbolen staat zelfs los van de werkelijkheid, die zich niet meer laat representeren en zich ontwikkelt in abstracties. Het gebruik van symbolen wordt door Bruner gezien als het belangrijkste middel om kennis te ontwikkelen.

Tall (2012; zie [5]) werkte deze ontwikkelingsgang in het denken uit naar het wiskundig denken en benadrukte activiteiten die leerlingen aanzetten tot wiskundige gedachte-experimenten. Binnen die activiteiten onderscheidde hij de fasen van *waarneming*, *bewerking* en *redenering*. Waarneming is de drijfveer die, gebaseerd op herkenning en ervaring, leidt tot de behoefte aan beschrijvingen en visualisaties die de handelingen onnodig maken. Hij karakteriseert deze waarnemingsfase, waarin enactieve (het doen) en iconische representaties worden gebruikt, als praktisch. De fase van waarneming wordt in de ogen van Tall gevolgd door een

theoretische fase van bewerkingen met symbolen en het redeneren aan de hand van die symbolen.

Op grond van deze literatuur werd aan de lesontwerpen geschaafd. Besloten werd om te beginnen met iets waarvan je veronderstelt dat de leerlingen daar intuïtief mee aan de gang kunnen op basis van herkenning en herinnering. De volgende stap is het gebruik van visualisaties (iconen), zoals een molenwiel (in de eenheidscirkel), de eenheidscirkel met raderen (cirkelbogen) en de pijl en boog. In de daaropvolgende stap komt het gebruik van getallen aan de orde zoals x - en y -coördinaten en verhoudingstabellen met radialen.

De eerste uitvoeringen – gebaseerd op de eerste twee lesontwerpen – zijn geobserveerd, direct daarna op school besproken en bijgesteld. De bijgestelde versie is op andere locaties uitgevoerd, geobserveerd, besproken en opnieuw bijgesteld. Het tandrad-idee is daarna tweemaal uitgevoerd, geobserveerd, besproken en bijgesteld. Het laatste idee (historisch perspectief) is alleen uitgevoerd. Vanwege allerlei roosterwijzigingen werd de les uiteindelijk op een tijdstip gegeven waarop niemand kon observeren (zo gaat dat!).

De uitvoering van de lesontwerpen

Het eerste lesontwerp – De eerste uitvoeringen waren eigenlijk teleurstellend (zowel met als zonder gebruik van applets). De molenwielen (bedoeld als icoon) met hoeken van 30 graden in een assenstelsel werden in opgaven verwerkt en uitgedeeld op werkbladen. Daarna werd een nieuw werkblad uitgedeeld met een eenheidscirkel met daarin een hoek van 20 graden en de waarden van de coördinaten. De opdracht was dat de leerlingen dan zelf de coördinaten van vergelijkbare hoeken in de drie andere kwadranten zouden vinden (symbolen). De lessen werden gekenmerkt door het routinematig werken met getallen – coördinaten invullen. Het wiskundig denken – het beschrijven van relaties met symmetrie – schoot erbij in. Bovendien duurde de laatste les maar een half uur, waardoor de spanning om toch alles af te krijgen extra groot was. Het had eigenlijk om het spiegelen en het draaien van de molen moeten gaan (de eigenschappen). Dat betekent dat het werken met getallen in het teken had moeten staan van het doel: de eigenschappen.

Het tweede lesontwerp – De tandrad-aanpak is een aanpak waarbij geprobeerd wordt de theorie in praktijk te brengen zonder in de val te trappen om veel te gaan werken met getallen omdat dat in ieder geval goed moet gaan. De docent deelt werkbladen uit om zo zicht te kunnen houden op wat de leerlingen doen en hoe ze denken. Zo gaat een aantal vragen over de relatie tussen het aantal tanden en hun hoogte (bewerken en redeneren); zie *figuur 7*.

Vervolgens wordt het aantal tanden omgezet in afstanden, uitgedrukt in radialen (bewerken); zie hiervoor *figuur 8*. Nu blijkt er iets fout te gaan! Er zijn leerlingen die, met gevoel voor getallen, de tabel op basis van veronderstelde regelmaat, gaan invullen. Er is ook een leerling die aan de buurman vraagt ‘Wat is π ?’ Het antwoord luidt ‘Nou, gewoon dit’, waarna het symbool π op tafel wordt geschetst. Daarnaast beseft de observant dat de ruimte tussen de raderen de bedoelde overeenkomst met een cirkel onduidelijk maakt. Het icoon werkt dus niet goed, het duidt niet één-op-één op een functiewaarde. Bovendien is een radiaal een hoekmaat, en geen lengtemaat. In de discussie hierover komt de vraag op tafel: wat is nu eigenlijk een radiaal? De discussie loopt ongeveer zo: ‘Het is een hoekmaat, een eenheid, die beslist geen afstand meet. 2π is de verhouding tussen diameter en omtrek van een cirkel. Een sinusfunctie is echter

- 12 □ We kunnen nu de tanden omrekenen in een afstand die afgelegd is. We nemen nu weer een tandrad met 36 tanden. Vul de onderstaande tabel in:

tanden	0	3	9	18	...	36	60
afstand	0	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$1\frac{1}{4}\pi$	...	...

figuur 8 De omzetting van tanden in radialen

een voorschrift, gedefinieerd op basis van getallen. De golfvorm ontstaat als grafiek van een functie, de sinusfunctie. Je zet dan getallen op de x -as en op de y -as. Wiskunde is nu juist abstract, je hoeft lang niet altijd de eenheden te vermelden, alleen als dat er in toepassingsgerichte situaties toe doet.’ Toch raar, als leerlingen met de GR werken, moeten ze die eerst op radialen zetten. Als huiswerk moeten de leerlingen (alweer) een tabel invullen waarin het gaat om tanden, afstanden en hoogtes. Al met al is er in de les te weinig interactie met leerlingen. In de daarop volgende les worden de onjuistheden eruit gehaald en wordt meteen een vervolgstap gezet naar de eigenschappen (bewerken en redeneren); zie *figuur 9* op pag. 176.

Het is inmiddels klip en klaar dat een radiaal een hoekmaat is. Ook het idee van tussenruimte wordt gecorrigeerd (het icoon wordt aangepast).

Het derde lesontwerp – Bij de uitvoering van het lesontwerp uitgaande van de historische betekenis was geen observator. Sterker nog, de les viel de dag voor de laatste plenaire bijeenkomst in juni op de UT. We moesten het dus doen met de beschrijving van de lesgever zelf. De les liep zoals hij in gedachten had (hiervoor besproken). De leerlingen konden het allemaal goed volgen en er was tijd genoeg. Nu moet er een vervolg komen, daar moet hij nog goed over nadenken. De docent belooft het voor ons op te schrijven, dan kunnen we achteraf meegenieten. De leerlingen vonden het leuk om op een alternatieve manier bezig te zijn en zelf aan het denken gezet te worden. Vooral het geschiedenisdeel viel erg in de smaak. In de discussie werd de vraag gesteld hoe je nu bij de sinusgrafiek terechtkomt. Nou ja, een tabel is een andere vorm van een grafiek, symmetrie-eigenschappen kun je ook uit een tabel halen...

Wat is nu de winst geweest?

Er is gezocht naar een toepassing van de ontwikkeling in het wiskundig denken, gebruikmakend van iconen, als tussenstap voor het gebruik van symbolen. Het icoon ‘molenwiek’ was goed gekozen, alleen niet voldoende tot zijn recht gekomen vanwege de te snelle overgang naar het invullen van coördinaten. Het icoon ‘tandrad’ werkte minder goed, vanwege de blokkade dat er een tussenruimte is. Daarnaast kan verwarring optreden met de eenheidscirkel, die een andere functie vervult. Van een waarnemingsfase was in het eerste ontwerp geen sprake. Bij de tandrad-aanpak kwam de waarnemingsfase aan de orde door de les te beginnen met gewoon eens te kijken naar de beweging. In de laatste aanpak staat interactie met leerlingen centraal. Er is een lange fase van waarneming, die moeiteloos overgaat in visualisatie uitmondend in een icoon ‘pijl-en-boog’.

- 8 □ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 72 tanden.



- 9 □ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 18 tanden.

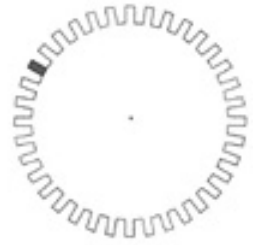


figuur 7 De relatie tussen aantal tanden en hoogte

In de vorige les hebben we gezien dat bij een rad van 36 tanden, na 3 tanden ongeveer de hoogte een $\frac{1}{2}$ bereikt wordt.

De afgelegde weg die hierbij hoort was $\frac{3}{36} \cdot 2\pi = \frac{1}{6}\pi$

- 5 ☐ Maar er is nog een tweede afstand waarbij de hoogte van een half bereikt wordt, bij welke afstand is dat?
- 6 ☐ Bij 21 tanden hoort een waarde voor de afgelegde weg van $1\frac{1}{6}\pi$ en een hoogte van ongeveer $-\frac{1}{2}$. Bij welke waarde van de afgelegde weg is er ook sprake van een hoogte van $-\frac{1}{2}$?



figuur 9 De vervolgstap: bewerken en redeneren

Info

Deel 1 van deze artikelenreeks verscheen in *Euclides* 87(3), pp. 111-113 en deel 2 in *Euclides* 87(4), pp. 144-147.

Noten en referenties

- [a] Bron: <http://mste.illinois.edu/users/pavell/java/unitcircle/>
- [1] M. Alberink, H. Muijlwijk, M. Timmer (2011): *De sinus / Van meetkundige definitie naar analytisch begrip*. In: *Euclides* 86(6); pp. 250-252.
- [2] J.S. Bruner (1966): *Towards a Theory of Instruction*. New York: Norton.
- [3] A. Heck (2012): *Perspectives on an Integrated Computer Learning Environment*. Proefschrift. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

- [4] N. Orhun (2012): *The gap between real numbers and trigonometric relations*. In: *Quaderni di Ricerca in Didattica*, n. 20. Palermo (Italië): G.R.I.M., University of Palermo.
- [5] D.O. Tall (2012): *Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof*. Plenary to be presented at Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. A Symposium in Honor of Ted Eisenberg, April 29-May 3, 2012. Beër Sjeva (Israël): Ben-Gurion University of the Negev.

Over de auteurs

Nellie Verhoef is onderzoeker en vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente.
E-mailadres: n.c.verhoef@utwente.nl

Mark Timmer is promovendus in de theoretische informatica aan de Universiteit Twente en docent wiskunde aan het Carmel College Salland te Raalte.
E-mailadres: m.timmer@alumnus.utwente.nl

GECIJFERD! VERNIEUWD

UITDAGEND TOT DE EINDSTREEP!



Succesvoller rekenen voor 2F en 3F!

Vraag een gratis demo van de nieuwe versie aan op www.gecijferd.nl

Wiskunde en autisme

DEEL 3, LEGGEN VAN VERBANDEN

[Bram Arens en Danny Beckers]

Leerlingen met ASS^[1] vinden steeds vaker hun weg naar het reguliere onderwijs. Aan veel van deze leerlingen merk je op het eerste gezicht weinig. Dat neemt niet weg dat ze tegen problemen aanlopen, zowel thuis als op school. Als docent wiskunde ziet u de leerling vaker, kunt u beter beoordelen wat zijn of haar prestaties waard zijn en heeft u meer mogelijkheden om de leerling te sturen dan een begeleider op afstand. Het vak wiskunde is vanwege de ondubbelzinnige vragen en antwoorden bij uitstek geschikt om het leerproces van een ASS-leerling te beïnvloeden. In deze serie geven Bram Arens en Danny Beckers een aantal handvatten om effectief vorm te geven aan passend onderwijs voor deze doelgroep.

Leggen van verbanden

Waar veel leerlingen met ASS moeite mee hebben is het leggen van verbanden. De leerling herkent geen oorzakelijke of temporele verbanden, waardoor gebeurtenissen in hun leven op zichzelf staande zaken blijven en er iedere keer opnieuw veel energie in gestoken moet worden om hier mee om te gaan. In het algemeen vormt dit een probleem in het dagelijks leven. Het kost in sommige gevallen bijvoorbeeld enige tijd om in te trainen dat je eerst het eten kookt, dan de tafel dekt, en daarna gaat eten. De wiskundeles is een goede start om leerlingen met ASS beter en vaker verbanden te laten leggen. Voor veel van deze leerlingen zijn de verbanden in de wiskunde namelijk gemakkelijker te begrijpen, met name omdat er geen uitzonderingen op bestaan.

Hoe te herkennen

Een ASS-leerling die moeite heeft met het leggen van verbanden, herkent u bijvoorbeeld in de les omdat hij niet reageert wanneer u instructie geeft. Opdrachten zoals 'Pak allemaal je boeken', 'Schrijf deze aantekening in je schrift' e.d. gaan langs de leerling heen. Vaak is hem wel aangeleerd om op te letten als hij direct wordt aangesproken, maar u moet hem nog leren dat het ook van hem wordt verwacht wanneer u klassikaal instructie geeft. Het feit dat u vraagt om de agenda te pakken, is voor deze leerling niet een signaal dat u ook verwacht dat hij zijn huiswerk daarin noteert. En als hij het huiswerk genoteerd heeft, is dat geen garantie dat het ook gemaakt wordt. Deze leerling zal ook vastlopen in de opdrachten die hij zelfstandig moet maken. Hij is in staat om een rijtje van precies

dezelfde opdrachten te maken, maar zodra u iets op een voor hem onverwachte wijze plaatst is er verwarring. De stelling van Pythagoras kan hij bijvoorbeeld goed toepassen wanneer de driehoek 'rechttop' staat en de rechte hoek goed te herkennen is, maar wanneer die driehoek 'liggt', dan is hij de rechte hoek kwijt. Ook is het goed mogelijk dat de leerling bij $(x+1)(x+1)$ de haakjes prima kan wegwerken, maar dat het bij $(x+1)^2$ niet lukt.

Bij proefwerken en huiswerkopgaven hebben veel ASS-leerlingen moeite met het leggen van verbanden tussen de onderdelen a, b en c van een opgave. Het ontgaat ze hierbij dat deze bedoeld zijn om elkaar te ondersteunen. Ze beginnen aan onderdeel b alsof a niet bestaat, en begrijpen niet hoe ze moeten beginnen omdat ze niet overzien

wat de bedoeling is. Als u hen attendeert op de betekenis van onderdeel a kunnen ze vaak al verder.

Oplossen is meer!

Verbanden komen binnen de wiskunde op het meest basale niveau terug bij het oplossen van vergelijkingen. De beweringen $2x+1=7$ en $x=3$ volgen uit elkaar. Op dit niveau is het verband duidelijk voor een leerling te zien en kan de equivalentie ook met deductiestappen inzichtelijk worden gemaakt. Bij het oplossen van eenvoudige typen vierkantsvergelijkingen wordt de stap van $x^2=9$ naar $x=3$ of $x=-3$ toegevoegd. Voor de ASS-leerling is het heel goed om te worden geconfronteerd met vergelijkbare beweringen die er heel anders uitzien: het kan voor hen de eerste stap zijn naar een ruimer begrip.

Wanneer leerlingen worden geconfronteerd met moeilijkere typen vergelijkingen, wordt het belangrijk dat ze zich ervan bewust worden dat ze er niet altijd uitkomen met alleen stappen die uit equivalenties bestaan.

Neem de vergelijking:

$$\sqrt{x^2+x} = -\sqrt{x+1}$$

Hierbij zal een leerling twee antwoorden vinden (namelijk $x=1$ en $x=-1$), maar één

Kadertekst 1 – Uitwerking

vergelijking	controle $x=1$	controle $x=-1$
$\sqrt{x^2+x} = -\sqrt{x+1}$	$\sqrt{1+1} = -\sqrt{1+1}$	$\sqrt{1-1} = -\sqrt{-1+1}$
$x^2+x=x+1$	$1+1=1+1$	$1-1=-1+1$
$x^2=1$		
$x=1$ of $x=-1$		

In de uitwerking hierboven is te zien dat er een oplossing bij komt na kwadrateren. Bij controle is de gevonden oplossing $x=1$ duidelijk onzinnig, maar met $x=-1$ is het ineens waar. Een mooie aanleiding om nogmaals te attenderen op het feit dat kwadrateren links en rechts van het gelijkteken geen equivalente beweringen oplevert, maar wél heel handig kan zijn om een vergelijking op te lossen.

Kadertekst 2

Een aardige variant voor de hogere leerjaren wiskunde-B zit in vergelijkingen als:

$$1 + \sqrt{12-x} = 2 + \sqrt{x+1}$$

Pas na tweemaal kwadrateren worden twee oplossingen gevonden. Beide vallen binnen het domein van de functies links en rechts, maar aan die functies is ook eenvoudig te zien dat er echt maar één oplossing kan zijn. Door wederom met de leerlingen de oplossingsstappen na te lopen met de ingevulde waarden ziet de leerling waar de 'valse' oplossing tevoorschijn komt.

daarvan blijkt helemaal niet te voldoen. Hier zijn de stappen die je zet niet allemaal equivalenties. Het is natuurlijk mooi als leerlingen het probleem bevatten op basis van overwegingen rond het bereik. Als hun dat lukt dan leggen ze verbanden tussen domein en bereik van functies en het oplossen van vergelijkingen. U kunt ze ook stap voor stap laten zien waar het misgaat in de oplossing door het rekenwerk met de gevonden oplossingen na te lopen. Een uitwerking treft u aan *in kadertekst 1*.

Door op verschillende manieren vergelijkingen aan te bieden zet het uw leerling aan het denken over vergelijkingen en welke verbanden er precies tussen de verschillende deductiestappen zitten. Dit is voor een ASS-leerling heel belangrijk. Een lastiger voorbeeld staat *in kadertekst 2*.

Koppelen van begrippen

Het tweede vlak waarop verbanden binnen de wiskunde belangrijk zijn, is wanneer een leerling begrippen moet koppelen. Deze leerling zal een paar aanknopingspunten proberen te vinden zonder in te zien of deze wel of niet relevant zijn. Neem bijvoorbeeld het geval waarin de leerling door middel van het volgende getallenvoorbeeld wordt uitgelegd hoe hij kan interpoleren:

x	1	2	3
y	150	...	450

Na een rekenvoorbeeld voor $x = 2$ kan het voorkomen dat de leerling met ASS als ezelsbruggetje onthoudt: 'Deel het verschil van de grote getallen door het verschil van de kleine getallen', waardoor het vanzelfsprekend mis zal gaan als de eerstvolgende opgave simpelweg vraagt om door interpoleren te bepalen wat de x -waarde is bij $y = 300$. Het is in een dergelijk geval in eerste instantie zinnig om te verifiëren of de leerling heeft begrepen wat hier essentieel is.

Om een eerste stap met de ASS-leerling te maken zal het hem helpen om de verbanden expliciet te benoemen. Denk hierbij aan begrippen die relatief eenvoudig aan elkaar kunnen worden gekoppeld:

- kwadraat (of derde macht) van een getal en oppervlakte vierkant (of inhoud kubus);
- breuken en delen (op de rekenmachine);

- lineaire vergelijkingen oplossen bij het rekenen aan gelijkvormige figuren.

Hoe meer je als docent de verbanden tussen de verschillende begrippen benoemt, des te meer zal de ASS-leerling er op bedacht zijn dat er verbanden aanwezig kunnen zijn binnen de wiskunde. Een vervolgstap zou zijn om de leerling de verbanden binnen een opgave te laten benoemen en dit uit te breiden naar de opgaven onderling. De leerling zal dan zelf actief op zoek moeten gaan naar de verbanden en zo geprikkeld raken om overeenkomsten te gaan zien. Het is voor de ASS-leerling essentieel dat hij leert verbanden te leggen, zowel voor de wiskunde als in de wereld daarbuiten. Helaas zal de leerling niet automatisch de transfer maken naar andere vakken en zullen ook hier deze verbanden moeten worden benoemd.

Koppelen van procedures

Vaak is het voor een leerling met ASS niet vanzelfsprekend dat oplossingsprocedures bij elkaar horen, op elkaar voortbouwen en elkaar aanvullen. De leerling die u vraagt om een lineaire vergelijking op te lossen in een hoofdstuk over tweedegraads vergelijkingen, kan bijvoorbeeld braaf de *abc*-formule gaan invullen. Dat heeft dan niet per se te maken met een verkeerd geautomatiseerd proces, maar het kan voortkomen uit de gedachte dat de wiskundeles bestaat uit verder niet aan elkaar gerelateerde opgaven. Het is voor deze leerling een vreemde gedachte dat een procedure uit een eerder hoofdstuk relevant zou kunnen zijn.

U helpt de leerling door er in de les voor te zorgen dat de aandacht regelmatig uitgaat naar probleemoplossend vermogen. Een eenvoudige manier om die aandacht daarop te richten, is uw leerlingen uit te dagen om van een grotere opgave, waarbij de onderdelen elkaar ondersteunen, alleen het laatste onderdeel te maken. De leerling dient de betreffende opgave dan wel goed uit te werken, dus niet alleen wat rekenwerk en een antwoord. Het eerste dat u daarmee bereikt, is dat uw leerlingen zich meer bewust worden van de samenhang in de opdrachten die ze maken. Dat is al aardig op zich, maar als het goed is levert het meer op.

Bedenk dat het voor leerlingen met ASS vaak wel mogelijk is om op een andere manier te gaan denken of werken, maar dat het hun soms op onverwachte punten moeite kost. Dat betekent meer tijd, maar als er tevoren goed is nagedacht over de wenselijkheid van de richting en de leerling zelf gemotiveerd is, dan levert het wel vaak prachtige resultaten op.

Info

Deel 1 van deze artikelenreeks verscheen in *Euclides* 88(2), pp. 76-77; deel 2 verscheen in *Euclides* 88(3), pp. 120-122.

Noot en literatuur

- [1] (Red.) Zie de website van Programmagroep Brein en Cognitie (van de Universiteit van Amsterdam): www.adhd-autisme.nl/watisass.htm
- [2] Tony Atwood (2007): *Hulpvragen Asperger-syndroom*. Amsterdam: Nieuwezijds.

Over de auteurs

Bram Arens (e-mailadres: b.aren@bureau-beckers.nl) en Danny Beckers (e-mailadres: d.beckers@bureau-beckers.nl) waren werkzaam als wiskundeleraar. Beiden zijn sinds een aantal jaren werkzaam bij Bureau Beckers te Nijmegen, hét expertisecentrum voor coaching van leerlingen en studenten met ASS of ADHD, en met een cognitieniveau vanaf havo.

Getuigen

[Danny Beckers]

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

In 1503 verscheen de *Margarita Philosophica* (Parels van de filosofie) voor het eerst in druk (**zie figuur 1**). Als manuscript circuleerde het boek al in de jaren '90 van de vijftiende eeuw. Met dertig pagina's index was het een zeer modern werk, dat studenten konden doornemen van A tot Z, maar waar ze daarna ook nog zaken snel in konden terugzoeken. De naam van Gregor Reisch (†1525) stond niet op het titelblad, maar uit de opdracht en de lofdichten die in het boek staan, was duidelijk dat deze kartuizer monnik de auteur was. Hij doceerde in de jaren '90 van de vijftiende eeuw aan de universiteit van Freiburg (Breisgau) en werd in 1501 in die stad tot prior beroepen. Hij was vooral theologisch actief en werkte onder andere samen met Erasmus van Rotterdam (†1536), die meermalen liet merken dat Reisch hooggeacht werd. Vanwege de status van zowel auteur als boek is de *Margarita Philosophica* exemplarisch te noemen voor het wiskundeonderwijs in de late Middeleeuwen. In een aantal opzichten laat het boek ons zien wat de late middeleeuwers van de wiskunde verwachtten.

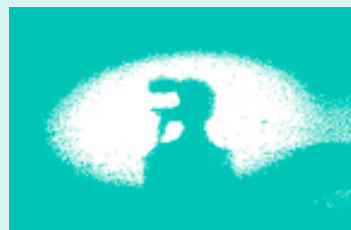
Op de eerste plaats toont het wat er aan wiskundige kennis was. Zo leren we in de aritmetica veel over eigenschappen van (rijen) getallen: even, oneven, driehoeksgetalen, vierkantsgetallen, veelhoeksgetalen, kubische getallen, piramidale getallen et cetera. Die eigenschappen worden niet afgeleid uit een definitie. Aan de hand van een voorbeeld wordt getoond dat de eigenschap 'waarheid bevat'. Zo beweert Reisch (met voorbeeld) dat de verschilrij van een meetkundige rij ook een meetkundige rij is. Wij zouden dit met een beetje rekenwerk illustreren:

$$a \times g^t - a \times g^{t-1} = a \times (g^t - g^{t-1}) = a \times (g - 1) \times g^{t-1}$$

Hij had dit met een ander argument ook kunnen aantonen, maar deed dat niet. Na al die getaleigenschappen werd het rekenen

zelf heel kort behandeld: de studenten van Reisch konden al rekenen. De meetkunde bestond voornamelijk uit definities van verschillende lijnen (rechte lijn, kromme lijn, golvende lijn, cirkelomtrek, cirkelsegment, spiraal et cetera) en figuren: zowel de driehoek, veelhoeken, cirkel als een aantal ruimtelijke figuren. De ruimtelijke figuren werden uitvoerig ingeleid met een verhandeling over de drie richtingen die Reisch definieerde aan de hand van het menselijk lichaam. Diverse ruimtelijke figuren werden beschreven, waaronder de vijf platonische lichamen. Een paar stellingen met betrekking tot boek 1 (evenwijdigheid, Pythagoras), boek 2 (oppervlaktes vergelijken) en boek 3 (cirkel van Euclides werden behandeld (**zie figuur 2**), maar veelal zonder bewijs. De lezer kreeg recepten voor het uitvoeren van afstandsmetingen, het meten van hoeken en het bepalen van oppervlaktes. Dan volgde een deel over in- en omgeschreven cirkels bij diverse figuren (deels boek 4 van Euclides) en tot slot bepaling van inhoudten, met name van wijnvaten. Dit laatste in verband met de belastingheffing.

Op de tweede plaats is uit het boek herkenbaar op welke manier die kennis werd overgedragen aan de volgende generatie. Het boek is in z'n geheel opgesteld in de vorm van een dialoog tussen een leermeester (Magister) en zijn student (discipel). De student vraagt en de leermeester beantwoordt alle vragen onder verwijzing naar Aristoteles en de kerkvaders – met Augustinus als grote favoriet. Sporadisch voegt de meester kritische noten toe: in het boek over de astrologie laat de leermeester doorschemeren dat hij op theologische gronden twijfelt aan astrologische gevolgtrekkingen en hij waarschuwt voor overhaaste conclusies. Tijdgenoten zouden zeggen dat Reisch gewoon niet zo goed was in astrologie – want het geloof in deze tak van kennis



figuur 1



figuur 2

was wel zo diep dat velen er tot in de zeventiende eeuw waarde aan hechtten – al was het maar omdat politieke heersers graag hun toekomst lieten lezen.

Op de derde plaats illustreert de *Margarita* wat het nut van wiskundige kennis was voor de laat middeleeuwse student. Goeddeels was dat begripskennis. De student moest getallenmystiek kunnen duiden en erover kunnen meepraten. De harmonische reeks werd in de aritmetica behandeld omdat die werd gebruikt in de muziek. Na de wiskundige boeken volgden nog vijf boeken waarin Reisch, gebruik makend van de wiskundetaal, tal van onderwerpen behandelde: van het ontstaan van de wereld tot en met moraal. Bijvoorbeeld zijn beschrijving van het oog in boek 10 gebruikte lichtstralen, terugkaatsing en breking. Zonder deze eigenschappen te kwantificeren, maar geheel in meetkundige termen als rechte lijn, hoek, enzovoort. Daarnaast werden wiskundige procedures ook behandeld omdat ze grensden aan het wonderlijke: de rekenregels voor het bepalen van afstanden met behulp van de Jacobsstaf waren wonderbaarlijk omdat ze iets leerden uitrekenen dat onbekend was. Uiteraard was het soms praktisch om afstanden te kunnen bepalen, zowel tot een bastion dat moest worden ingenomen, als ten behoeve van een kaart, maar dat waren geen handelingen die de studenten ooit zouden verrichten. De astronomie, meetkunde en rekenkunde werden ook behandeld vanwege de wonderbaarlijke trefzekerheid van de uitkomsten, vanwege de universele, eeuwige waarheden die in getallen en sterren opgeslagen lagen.

Op de vierde – en zeker niet laatste – plaats valt uit het boek ook veel af te lezen over de status van het vak wiskunde. Reisch behandelde de zeven vrije kunsten. Dat waren de vakken die als basiskennis golden voor elke universitaire studie, van oudsher opgedeeld in het trivium (de triviale vakken: retorica, dialectica en grammatica) en het quadrivium (de wiskundige vakken). De vijf toegevoegde boeken vielen onder de algemene filosofische kennis, maar alleen de zeven kunsten stonden op het titelblad. De wiskundige vakken beginnen in het midden met de rekenkunde, met abacus, gezeten aan de voeten van de engelen. De muziek staat rechts naast haar, met een harp

in de handen en een luit aan haar voeten; zij staat te keuvelen met de meetkunde, gerepresenteerd met een passer, en de rij wordt gesloten met de astronomie die een hemelglobe bewondert.

De prominent aanwezige engelen, alsmede de vier kerkvaders die bovenaan op het titelblad staan afgebeeld, zijn een statement. De regels die de wiskunde bood, waren niet minder dan religieuze wonderen, te nemen als Gods geschenk aan de mensheid. Wiskundige kennis was niet alleen gebaseerd op – en kon ook niet in tegenspraak worden gebracht met – de Goddelijke openbaring; ze diende vooral ook ter verheerlijking en bevestiging van de christelijke filosofie. De logische samenhang tussen de stellingen was van ondergeschikt belang.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

AANKONDIGING/ WISKUNDE DIALOG 2013 – NIJMEGEN

Op **maandag 13 mei 2013** vindt weer de WiskundeDialog plaats, de jaarlijkse nascholingsdag voor wiskundedocenten georganiseerd door het Radboud Pre-University College of Science en het Instituut Leraar en School (ILS). De hoofdthema's van deze dag zijn de nieuwe examenprogramma's wiskunde en ICT in de wiskunde. U kunt o.a. kiezen uit workshops over:

- Wiskunde A/C,
- Wiskunde B/D,
- Rekenvaardigheid,
- Wat is dyscalculie en hoe gaat je ermee om?
- Logisch redeneren,
- Ervaringen uit een laptopklas wiskunde,
- Gebruik van een smartboard in de wiskundeles.

Info

Meer informatie staat op:

www.ru.nl/pucofscience/

U kunt ook contact opnemen met Xandra Snoeker, coördinator van het steunpunt wiskunde van het Radboud PUC of Science, via e-mail (x.snoeker@science.ru.nl).

Uit de Zebrareeks

DEEL 3

[Rob van Oord]

De redactie van de Zebrareeks valt onder verantwoordelijkheid van de NVvW. Deze reeks is bij uitstek geschikt om te gebruiken als basis voor een keuzeonderwerp of als aanzet voor een praktische opdracht. Vanwege de grote diversiteit van de onderwerpen is er voor elk wat wils maar dat maakt het ook lastig kiezen. Om het u makkelijker te maken zetten we in de komende nummers van Euclides telkens een andere Zebra in de schijnwerpers. Wie weet zet het u aan tot een (nog) intensiever gebruik van deze unieke boekjes.

Boekje 21

Titel: Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde

Auteur: Iris van Gulik-Gulikers

Onderwerpen: vlakke meetkunde, bewijzen (met hoeken en met congruentie)

Benodigde voorkennis: congruentiegevallen van driehoeken



Waarover gaat het boekje en hoe zit het in elkaar?

Het boekje begint met de geschiedenis van de niet-euclidische meetkunde, gekoppeld aan het vijfde postulaat, het zogenoemde parallellenpostulaat, uit *De Elementen* van Euclides. Er wordt vervolgens aandacht besteed aan bewijzen uit het ongerijmde. Daarna wordt belicht hoe na verschillende mislukte pogingen om het parallellenpostulaat te bewijzen uit de eerste vier postulaten, er wiskundigen zijn die juist bewijzen dat het onmogelijk is om het parallellenpostulaat uit de eerste vier te bewijzen. Zij ontdekten daarmee andere meetkunde. Globaal gezegd valt de niet-euclidische meetkunde op te delen twee soorten. (1) De *elliptische* meetkunde

waarbij er geen enkele 'lijn' is door een punt P buiten lijn l die parallel loopt met l . (2) De *hyperbolische* meetkunde waarbij er door een punt P buiten een lijn l meerdere evenwijdige 'lijnen' te trekken zijn die evenwijdig lopen met l . Het boekje eindigt met constructies in de hyperbolische meetkunde op de Poincaré-schijf. De lezer moet met een speciale tool bij Cabri Geometry^[1] constructies maken van allerlei lijnen. Er worden hoeken en afstanden gemeten en daarmee wordt duidelijk dat er meerdere evenwijdige lijnen getrokken kunnen worden door een punt P buiten een 'lijn' l . In de onderzoeksopdrachten aan het eind van het boekje wordt de lezer uitgedaagd om elliptische vlakvullingen te maken, zoals Escher ook deed.

De behandelde stof in het kort

Het eerste hoofdstuk begint met de vijf axioma's waar de euclidische meetkunde vanuit gaat; dit zijn de vanzelfsprekende waarheden die je niet kunt bewijzen.

Kortweg:

(1-3) $A = C$ én $B = C$, dan $A = B$; $A = B$ én $C = D$, dan $A + C = B + D$; $A = B$ én $C = D$, dan $A - C = B - D$.

(4) Meetkundige figuren die na transformaties op elkaar passen, zijn gelijk.

(5) $A = B + C$, dan $A > B$ én $A > C$.

Dan gaat het verder over de vijf werkhypotheseën, de zogeheten postulaten, die de spelregels vormen van het redeneren. Dit zijn:

(1) Twee punten kun je verbinden door een rechte lijn (met liniaal tekenen).

(2) Een lijnstuk kun je verlengen tot een rechte lijn.

(3) Je kunt een cirkel tekenen met gegeven straal en middelpunt.

(4) Alle rechte hoeken zijn gelijk.

(5) Door een gegeven punt buiten een rechte lijn gaat precies één daaraan

evenwijdige rechte lijn.

Het laatste postulaat is een herformulering van de oorspronkelijke tekst die over het ontmoeten van twee rechte lijnen gaat, waarvan de som van de binnenhoeken aan dezelfde kant van een lijn die twee andere rechte lijnen snijdt, kleiner is dan twee rechte hoeken (180° dus). Er worden vervolgens verschillende stellingen (proposities) opgevoerd. Er is aandacht voor de structuur van een bewijs: formuleren van Gegevens, Te bewijzen en Bewijs, waarin elke stap moet worden verantwoord met reeds eerder bewezen stellingen. Er wordt ook duidelijk aangegeven welke stellingen je allemaal kunt bewijzen zonder gebruik te maken van het vijfde postulaat. Voor het bewijzen van de meeste stellingen is het vijfde postulaat niet nodig.

Maar om het omgekeerde van propositie 1.27 te bewijzen: *Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn (zie figuur 1), dan zijn de Z-hoeken gelijk*, dan heb je het parallellenpostulaat (voor het eerst) echt nodig.

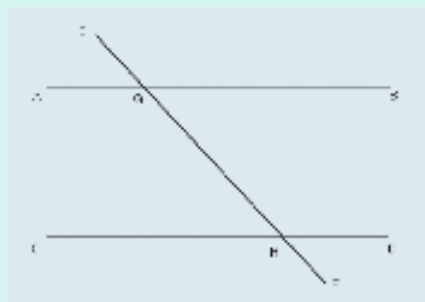
Het bewijs wordt gegeven met een 'bewijs uit het ongerijmde'. Eerst wordt uitgelegd wat een dergelijk bewijs inhoudt. Daarna wordt de lezer gevraagd dit bewijs (van propositie 1.29) zelf netjes op te schrijven. *Gegeven:* De lijnen AB en CD zijn evenwijdig en worden gesneden door lijn EF in de punten G en H .

Te bewijzen: $\angle AGH = \angle GHD$.

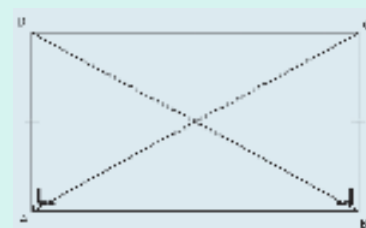
Bewijs: Stel $\angle AGH \neq \angle GHD$. Hiermee kom je tot een tegenspraak, namelijk dat de lijnen AB en CD elkaar wél snijden (vijfde postulaat). Dus moet wel gelden: $\angle AGH = \angle GHD$.

In feite is het parallellenpostulaat equivalent met de hoekensom van een driehoek.

Juist het vijfde postulaat (het parallellenpostulaat) gaf discussie onder



figuur 1



figuur 2 Een Saccheri-rechthoek

de wiskundigen. Daarover gaat het tweede hoofdstuk. Wallis formuleerde een alternatief postulaat. Dat blijkt gelijkwaardig met het postulaat van Euclides. Ook Saccheri slaagt er met zijn zogeheten Saccheri-vierhoeken (*zie figuur 2*) niet in om het vijfde postulaat van Euclides af te leiden uit de eerste vier. Hij wil bewijzen dat van rechthoek $ABCD$ met rechte hoeken A en B en even lange opstaande zijden AD en BC ook de hoeken C en D recht zijn.

In het derde hoofdstuk komen wiskundigen aan het woord die door het vijfde postulaat te ontkennen tot geheel nieuwe meetkundige werelden komen. Lobatsjevski en Bolyai onderzoeken de meetkunde die ontstaat met de eerste vier postulaten en de ontkenning van het vijfde. Later bleek dat Gauss er ook al een brief over geschreven had.

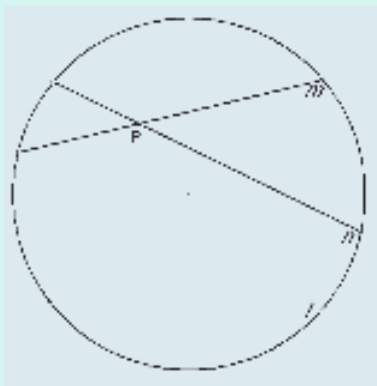
Beltrami, evenals Klein een paar jaar later, ontdekte als eerste een model voor de hyperbolische meetkunde (*zie figuur 3*). Neem als 'punten' de punten in het binnengebied van een cirkel. Neem als 'lijnen' de open koorden die punten op de cirkel met elkaar verbinden. Het is snel in te zien dat door een 'punt' dat niet op zo'n 'lijn' ligt heel veel lijnen gaan die de 'lijn' niet snijden.

In het vierde hoofdstuk wordt duidelijk gemaakt hoe de elliptische meetkunde, ontdekt door Riemann, in een model te gieten is. Neem als 'vlak' een bol. Een 'punt' in deze wereld is een antipodenpaar: twee punten aan de uiteinden van een middellijn van de bol. Een 'lijn' in deze wereld is een grootcirkel: een cirkel met het middelpunt van de bol als middelpunt. Een 'lijn' door twee punten is dan precies één grootcirkel.

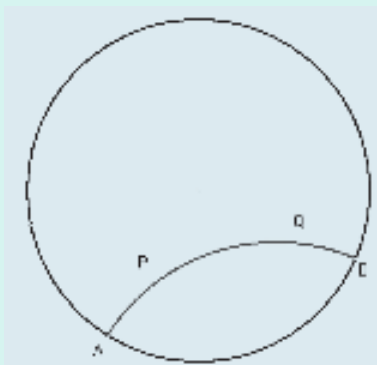
Het is al snel duidelijk dat er door een 'punt' (= antipodenpaar) buiten een 'lijn' (= grootcirkel) geen enkele lijn gaat die de 'lijn' niet snijdt. Een hoek tussen twee 'lijnen' is de hoek tussen de vlakken waarin de cirkels liggen. Grote bijzonderheid van de elliptische meetkunde is dat op deze manier de hoekensom van een driehoek altijd groter is dan 180° (en kleiner dan 360°).

In hoofdstuk vijf wordt de lezer gevraagd om met een speciale tool bij Cabri de wereld van de hyperbolische meetkunde te ontdekken, beschreven door Poincaré. Het is jammer dat Cabri niet meer gratis te krijgen is. Mocht je (school) in het bezit zijn van Cabri, dan kan het bij het boekje genoemde bestand *hyperbol.men* worden opgevraagd en geladen.

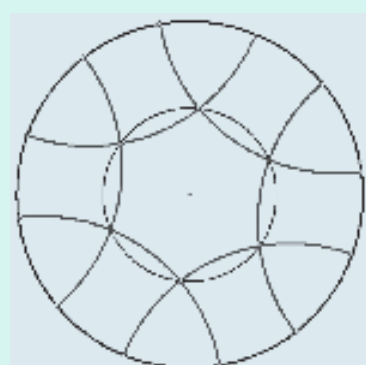
Voor Geogebra is een complete tool ontwikkeld die te vinden is op de site « www.geogebraTube.org/material/show/id/7005 ». Open de site en kies 'Go to the Student Worksheet'. Door dit bestand te openen worden aan de standaard werkbalk van Geogebra nieuwe knoppen toegevoegd. De meetkundewereld speelt zich af binnen een gegeven cirkel. Een 'punt' is een punt binnen deze cirkel. Het gaat er om dat door twee punten binnen een cirkel een boog getekend moet worden die de gegeven cirkel op de rand loodrecht snijdt. Zo'n cirkelboog is een 'lijn' in de hyperbolische wereld. Wat bij het experimenteren duidelijk wordt, is dat er door een punt (binnen de schijf) heel veel 'lijnen' zijn die parallel zijn aan een gegeven 'lijn'. Ook wordt niet verteld hoe je afstanden maakt in deze wereld. Maar de tool geeft desgewenst de afstand, zodat je met slepen van punten bijvoorbeeld gelijkbenige driehoeken kunt tekenen. Ook kun je de



figuur 3 Wereld van Beltrami-Klein: door P gaat meer dan één lijn 'parallel' aan 'lijn' l



figuur 4 $d(P, Q) = |\ln(AP/BP)| + |\ln(AQ/BQ)|$



figuur 5 Op de Poincaré-schijf gaan door een punt P buiten de lijn AB oneindig veel evenwijdige lijnen

hoek tussen twee 'lijnen' in beeld krijgen. Bij de hyperbolische meetkunde zijn de hoeken van een driehoek de hoeken tussen de raaklijnen van de 'zijden' van de driehoek. Daarmee kun je van driehoeken de hoekensom berekenen. Wat blijkt is dat in deze meetkunde de hoekensom altijd kleiner is dan 180° ; de som kan zelfs tot 0 naderen als je de hoekpunten van de driehoek vlak bij de cirkelrand kiest. Voor kleine driehoekjes vlak bij het middelpunt is de hoekensom wél bijna 180° .

Je kunt ook zelf een macro maken waarmee de 'lijnen' op de Poincaré-schijf – een gegeven cirkel met straal r – getekend kunnen worden.

In **figuur 4** staan de punten P en Q , en de bijbehorende cirkelboog AB door P en Q die loodrecht op de gegeven cirkelrand staat. In feite moet je de middelloodlijn hebben van een punt P binnen de cirkelschijf en het punt P' waarbij geldt dat $MP \cdot MP' = r^2$. Je kunt dan bewijzen dat elke cirkel door P en P' met middelpunt op deze middelloodlijn de oorspronkelijke cirkel, de Poincaré-schijf, loodrecht snijdt. Op zich een uitdaging om dit te bewijzen.

Voor de afstanden vond ik op internet een document^[2] – het werkt met logaritmen: $d(P, Q) = |\ln(AP/BP)| + |\ln(AQ/BQ)|$. De laatste knoppen van de tool stellen je in staat om loodlijnen op Poincaré-lijnen te tekenen, cirkels binnen de schijf en spiegelingen uit te voeren.

Met die knoppen kun je naar hartelust op zoek gaan naar elliptische vlakvullingen, zoals Escher er ook een aantal heeft gemaakt; **zie figuur 5**. Voor enkele figuren van Escher wordt verwezen naar [3].

Het boekje sluit af met onderzoekopdrachten en verwijzingen naar websites waarmee het onderzoek gestart kan worden.

Hoe is het voor de leerlingen?

Het boekje is vooral geschikt voor leerlingen met wiskunde D. Bij mij is er een B-leerling geweest die met succes het boekje heeft doorgewerkt. Vooral het bewijzen uit het ongerijmde vraagt veel abstractievermogen. Zeker als je bedenkt dat zelfs wiskundigen in de fout gingen bij hun bewijzen. De presentatie die ik van deze leerling gezien heb, was wervelend. Hij heeft Cabri gebruikt en alle tekeningen kunnen maken.

Het is voor leerlingen fascinerend om te ontdekken dat er driehoeken zijn in de meetkunde waarbij de hoekensom geen 180° is.

Enkele opmerkingen

Het gedeelte met de bewijzen, en de bewijzen uit het ongerijmde, is pittig. Maar met wat begeleiding komen de leerlingen er vast wel uit. Er worden ook heldere voorbeeldbewijzen gegeven. In het boekje wordt ervan uitgegaan dat leerlingen gebruik maken van Cabri. Maar de leerlingen kunnen met de tools op de eerder vermeldde site van Geogebra ook aan de slag. Het is prettig dat er bij de schrijfster van het boekje een docentenhandleiding met uitgewerkte antwoorden is op te vragen. Een klein foutje op pagina 15, in opdracht 1.7, de vierde regel van onder: ... Dit is in tegenspraak met het gegeven dat AB en CD evenwijdig zijn.

Grappig is dat bij de hyperbolische meetkunde de 'cirkels' ook echte cirkels zijn, weliswaar met een excentrisch middelpunt. Maar daarvoor zou je meer moeten weten over de afstand tussen punten in de Poincaré-schijf.

Noten en info

- [1] Cabri Geometry is een programma voor het interactief construeren van meetkundige figuren. Zie ook: www.cabri.com
- [2] http://members.home.nl/pascal.wissink/niet_euclidische_meetkunde/web/niet%20euclidische%20meetkunde_web.pdf
- [3] www.josleys.com/show_gallery.php?galid=325

Zie verder ook:

Iris van Gulik-Gulikers (2003): *Geschiedenis van de niet-euclidische meetkunde intrigeert leerlingen*. In: *Euclides* 78(8); pp. 346-351.

Over de auteur

Rob van Oord gebruikt elk jaar vele boekjes in zijn klassen. Hij is sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoop College te Waddinxveen. Voor vragen, suggesties en opmerkingen kunt u hem een e-mailbericht zenden. E-mailadres: robvanoord@tiscali.nl

PROTOCOL ERNSTIGE REKENWISKUNDE-PROBLEMEN EN DYSCALCULIE

MBO



Auteurs: Mieke van Groenestijn, Gerjan van Dijken, Dolf Janson

Uitgever: Koninklijke Van Gorcum, Assen (2012)

ISBN: 978 90 2324973 3

Prijs: € 29,95 (258 pagina's; paperback)

Van de achterflap

De Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) heeft het initiatief genomen om het onderwerp ernstige rekenwiskunde-problemen en dyscalculie op de onderwijsagenda te zetten en stappen te ondernemen om te komen tot landelijke eenduidigheid. In 2011 verscheen het landelijk protocol voor leerlingen van 4 tot 12 jaar met (Ernstige) RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie (Protocol ERWD1). Dit richt zich op het basisonderwijs, het speciaal basisonderwijs en het speciaal onderwijs.

Het ministerie van OCW heeft in 2010 NVORWO de opdracht verstrekt het Protocol voor het **middelbaar beroepsonderwijs** te ontwikkelen (Protocol ERWD3). Dit protocol is van groot belang nu centrale rekenexamens 2F en 3F in het mbo ingevoerd gaan worden. Rekenen staat duidelijk op de kaart. Het onderwijs zal alle zeilen moeten bijzetten om ook de

rekenzwakke student en de student met ernstige rekenproblemen tot het gewenste referentieniveau te brengen.

Het doel van rekenonderwijs is functionele gecijferdheid, afgestemd op de mogelijkheden van iedere individuele student. Dat reikt verder dan het behalen van een rekenexamen. Het gaat daarbij om adequaat handelen in functionele, dagelijkse situaties. Het Protocol ERWD3 geeft aanwijzingen om dit doel te bereiken, met name wanneer de rekenontwikkeling van een student niet optimaal verloopt.

Het Protocol ERWD3 beoogt een leidraad te zijn voor het ontwikkelen van rekenbeleid en het geven van goed rekenonderwijs. Goed rekenonderwijs staat of valt met de professionaliteit van docenten en leidt tot begeleiding van studenten die aansluit bij hun onderwijsbehoeften. Dit protocol is geschreven voor allen die zich, direct of indirect, bezighouden met het rekenonderwijs in en om de mbo-instellingen.

PROTOCOL ERNSTIGE REKENWISKUNDE-PROBLEMEN EN DYSCALCULIE

VO



Auteurs: Mieke van Groenestijn, Gerjan van Dijken, Dolf Janson

Uitgever: Koninklijke Van Gorcum, Assen (2012)

ISBN: 978 90 2324972 6

Prijs: € 29,95 (274 pagina's; paperback)

Van de achterflap

(...)

Het ministerie van OCW heeft in 2010 NVORWO de opdracht verstrekt het Protocol voor het **voortgezet onderwijs** en het **voortgezet speciaal onderwijs** te ontwikkelen (Protocol ERWD2). Dit protocol is van groot belang nu centrale rekentoetsen 2F en 3F in het vo ingevoerd gaan worden. Rekenen staat duidelijk op de kaart. Het onderwijs zal alle zeilen moeten bijzetten om ook de rekenzwakke leerling en de leerling met ernstige rekenproblemen tot het gewenste referentieniveau te brengen. (...)

Het doel van rekenonderwijs is functionele gecijferdheid, afgestemd op de mogelijkheden van iedere individuele leerling. Dat reikt verder dan het behalen

van een rekentoets. Het gaat daarbij om adequaat handelen in functionele, dagelijkse situaties. Het protocol geeft aanwijzingen om dit doel te bereiken, met name wanneer de rekenontwikkeling van een leerling niet optimaal verloopt.

Het Protocol ERWD2 beoogt een leidraad te zijn voor het ontwikkelen van rekenbeleid en het geven van goed rekenonderwijs. Goed rekenonderwijs staat of valt met de professionaliteit van leraren en leidt tot begeleiding van leerlingen die aansluit bij hun onderwijsbehoeften. Dit protocol is geschreven voor allen die zich, direct of indirect, bezighouden met het rekenonderwijs in en om de scholen voor voortgezet onderwijs. Daardoor bevat het Protocol ook nuttige informatie voor ouders.

Slordige definities

[Kees Vugs]

In Namibia

Anderhalf jaar geleden las ik onderstaand ‘problem’ in *The Namibian*. Het is gecomponeerd door een Indiase ‘lecturer’ werkzaam aan de University of Namibia, in Windhoek, Namibia. Na mijn pensionering heb ik nog ruim tien jaar in Swakopmund (Namibia) gewoond.

Identify the natural numbers, integers, rational and irrational numbers in the following list:

123, -245, 342/17, $\sqrt{21}$, π , 131, 0, 444, +231, 76/13, -15/49.

Twee weken later verscheen het antwoord en een nieuw vraagstuk in zijn rubriek die hij “Let’s do Math” noemde.

Natural numbers: 123, 131, 444, +231

Integers: 123, -245, 131, 444, +231

Rational numbers: 342/17, 76/13, -15/49, π

Irrational numbers: $\sqrt{21}$

Lezer denkt misschien dat ik π met opzet heb opgeschoven om het antwoord nog grappiger te maken, maar dat is niet het geval. Aanvankelijk heb ik nog wel eens op zijn problemen gereageerd, maar hij werd beschermd door collega’s, ambtenaren in het ministerie van onderwijs en een menigte van ‘maths educators’, opgetrommeld uit alle delen van de wereld, die hem regelmatig op hun veelvuldige congressen als expert uitnodigden. Hij beschouwde mij als een wiskundige van minder allooi of, in zijn eigen woorden, als iemand redelijk goed in elementaire getaltheorie, maar weinig wetend van de diepere achtergronden. Ik had wel altijd zeer goed contact met de ministers, waarvan velen oud-leerlingen waren, maar helaas geen wiskunde kenden. Na de beëindiging van Namstip (Namibian Maths and Science Teacher’s Improvement Program), een project geleid door de Vrije Universiteit Amsterdam, is vooral het onderwijs in wiskunde en natuurkunde achteruitgehold. Over scheikunde en biologie kan ik niet oordelen. Zo was bijvoorbeeld in 2010 het slaagpercentage voor ‘grade 10’ wiskunde (drie jaar na de lagere school) 40%. Gebrek aan competente leraren is de voornaamste oorzaak. Duidelijk is dat mijn Indiase lecturer problemen heeft met definities van getallenverzamelingen.

In Wikipedia

Terug in Nederland neus ik af en toe in Wikipedia en daar komt men ook genoeg slordige definities tegen.

Wikipedia over gehele getallen – Een geheel getal is een natuurlijk getal $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ of de negatieve vorm ervan $\{-1, -2, -3, \dots\}$. Akkoord. Het in- of uitsluiten van 0 leidt tot verhitte, maar onnodige discussies in middelbaar en lager universitair onderwijs (zie bijvoorbeeld het weglaten van 0 in het afrikaans probleem hierboven). Persoonlijk prefereer ik om over positieve gehele getallen en niet-negatieve gehele getallen te praten.

Wikipedia over delers – Een geheel getal a is een deler of factor van een geheel getal b als er een geheel getal k bestaat waarvoor geldt $k \cdot a = b$. De bewering ‘ a is een deler van b ’ wordt in de wiskunde meestal genoteerd als $a \mid b$.

Akkoord, maar we noteren dat -2 een deler van 6 is, immers $-3 \cdot -2 = 6$ en -3 is een geheel getal. Omdat met a ook $-a$ een deler van een geheel getal is, laat men in veel gevallen negatieve delers weg en schrijft men $\{x \mid x \text{ is deler van } 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$ en niet $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$.

Wikipedia over even getallen – Een even getal is een geheel getal dat deelbaar is door 2 ... Toch is de verzameling van even getallen een echte deelverzameling van de natuurlijke getallen.

Fout. De verzameling even getallen vormt een ondergroep van de optelgroep der gehele getallen. Een goede weergave zou zijn: $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ of korter $2\mathbb{Z}$.

In de Special 2012

Een en ander kwam bij mij op bij het lezen van het artikel van Daaf Spijker in *Euclides Special 2012*: Rationale rechthoekige driehoeken. Op bladzijde 23 lezen we:

Zijn p , q en r de lengtes van de zijden van een rechthoekige driehoek dan geldt uiteraard $p^2 + q^2 = r^2$ (r is de lengte van de schuine zijde).

Het geordende rijtje getallen (p, q, r) is een pythagoreïsche drierij, in dit artikel afgekort tot prij. Zijn p , q en r natuurlijke getallen waarvan de ggd gelijk is aan 1, dan spreken we van een primitieve prij, afgekort tot prijprij.

Bekende voorbeelden van prijprijen zijn: (3, 4, 5), (5, 12, 13) en (7, 24, 25).

Overigens de ordening van (p, q, r) heeft

eigenlijk alleen betrekking op de positie van de component r in het rijtje, omdat uit de ‘hoofdeigenschap’ volgt dat $(p, q, r) = (q, p, r)$.

Wikipedia vertelde daarentegen: Een pythagorees drietal (a, b, c) bestaat uit drie positieve gehele getallen a , b en c met $a < b < c$ waarvoor geldt $a^2 + b^2 = c^2$. (...) Een pythagorees drietal wordt primitief genoemd als a , b en c geen gemene deler hebben.

Wikipedia vertelde, want ondertussen is het laatste zinsdeel veranderd in ‘geen deler anders dan 1 gemeen hebben’.

Strikt genomen is volgens de definitie (3, 4, 5) een primitief pythagoreïsch drietal en (4, 3, 5) niet. Bovendien bij de karakterisering even verderop wordt $a = 2mn$ en dat is een even getal en moet men concluderen $a < b$ of $a > b$. De definitie van Daaf is goed voorbereid in zijn artikel met interessante historische aantekeningen. Mijn bezwaar is dat hij begint met geordende getallen en daar later weer van afziet. Dat $(p, q, r) = (q, p, r)$ volgt uit de definitie van een primitief pythagoreïsch drietal en zeker niet alleen uit de ‘hoofdeigenschap’, zoals ik verder op graag wil aantonen. Hoewel ik een grote liefhebber van prei ben ga ik liever voor een internationale naamgeving en de volgende:

Definitie – Het ongeordende drietal (a, b, c) is een primitief pythagoreïsch drietal (PPD) als a , b en c positieve gehele getallen zijn, $\text{ggd}(a, b, c) = 1$ en $a^2 + b^2 = c^2$.

Eigenschappen

Hier volgen enkele eigenschappen van een PPD.

» a en b kunnen niet beide even zijn, immers dan is ook c^2 en c even en $\text{ggd}(a, b, c) \geq 2$. Tegenspraak.

» a en b kunnen niet beide oneven zijn, immers dan is:

$$c^2 = (2d-1)^2 + (2e-1)^2 = 4d^2 + 4e^2 - 4d - 4e + 2 = 2 \cdot (2d^2 + 2e^2 - 2d - 2e + 1)$$

Nu is dit 2 maal een oneven getal. Er volgt dat $2 \mid c^2$, dus $2 \mid c$ en $4 \mid c^2$. Maar dit is in tegenspraak met de schrijfwijze c^2 is 2 maal een oneven getal.

Resumerend: a en b zijn van tegengestelde pariteit. Omdat a en b verwisselbaar zijn in zowel $a^2 + b^2 = c^2$ als in $\text{ggd}(a, b, c) = 1$, nemen we verder a even en b oneven en dus ook c oneven en natuurlijk $c > a$ en $c > b$.

Een handige substitutie

We nemen twee positieve gehele getallen m en n van tegengestelde pariteit, $m > n$ en $\text{ggd}(m, n) = 1$ en bewijzen dat $\{2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2\}$ een PPD is. Omdat $m > n$ is, zijn $2mn$, $m^2 - n^2$ en $m^2 + n^2$ positieve gehele getallen.

Ook geldt vanzelfsprekend de eigenschap $(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2$.

Hamvraag: geldt ook $\text{ggd}(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2) = 1$?

Eerstens, $\text{ggd}(m, n) = 1$ zodat $\text{ggd}(m^2, n^2) = 1$. De ontbindingen van m en n in priemfactoren zijn uniek op volgorde na en hebben geen enkele priemfactor gemeen. Dan hebben de ontbindingen van m^2 en n^2 ook geen enkele factor gemeen en is derhalve ook $\text{ggd}(m^2, n^2) = 1$.

Tweedens, $\text{ggd}(m^2, n^2) = 1$ zodat $\text{ggd}(m^2 - n^2, m^2 + n^2) = 1$. Immers, stel $g \mid (m^2 - n^2)$ en $g \mid (m^2 + n^2)$ en $g > 1$, dan is $g \mid (m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2$ en ook $g \mid 2m^2$. Verder merken we op dat wegens tegengestelde pariteit van m en n zowel $m^2 - n^2$ als $m^2 + n^2$ beide oneven zijn. Dus is ook g oneven en aangezien $g \mid 2n^2$ en $g \mid 2m^2$ is $g \mid n^2$ én $g \mid m^2$ en dus is $\text{ggd}(m^2, n^2) \geq g$. Dit is een tegenspraak.

Derdens, $\text{ggd}(m^2 - n^2, m^2 + n^2) = 1$ zodat $\text{ggd}(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2) = 1$. Triviaal.

Laten we nu kijken naar de definitie van de getallen m en n van Daaf Spijker op bladzijde 24 van *Special 2012*:

Kiezen we natuurlijke getallen m en n en stellen we:

(*)... $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$

dan is:

$$a^2 + b^2 = 4m^2n^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2 = c^2$$

Het getal a is per 'definitie' een even getal.

Hebben m en n dezelfde pariteit (d.w.z.

beide getallen zijn even óf beide zijn

oneven), dan is dat ook het geval met

m^2 en n^2 , zodat b en c in dit geval even

getallen zijn met als gevolg dat a , b en c een gemeenschappelijke deler 2 hebben.

Hebben m en n verschillende (of

tegengestelde) pariteit, dan is dat ook het

geval met m^2 en n^2 zodat nu b en c beide

oneven zijn. Is dan ook $\text{ggd}(m, n) = 1$ dan is

$\text{ggd}(a, b, c) = 1$ en is (a, b, c) een prijprij.

Met natuurlijke getallen m en n die

verschillende pariteit hebben en waarvoor

$\text{ggd}(m, n) = 1$, kunnen we met de formules

(*) de prijprijen (en primitieve rechthoekige driehoeken) genereren.

Dit is inderdaad een slordige definitie, waarin hij midden in de definitie bewijst dat $\text{ggd}(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2) = 1$,

impliceert dat m en n van tegengestelde pariteit zijn en dat $\text{ggd}(m, n) = 1$. Feitelijk moet hij bewijzen: als $m > n$, m en n van tegengestelde pariteit en $\text{ggd}(m, n) = 1$, dan geldt $\text{ggd}(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2) = 1$. (Zie boven.)

Een lijst van PPD's

Omdat m en n van tegengestelde pariteit zijn, is $m + n$ oneven. We laten $m + n = 2p + 1$ de oneven positieve gehele oneven getallen 3, 5, 7, ... doorlopen. Bij gegeven $m + n = 2p + 1$ splitsen we $m + n$ in twee gehele parten als volgt:

$(2p, 1), (2p - 1, 2), \dots, (p + 2, p - 1), (p + 1, p)$

Dit kan op p manieren. Van de paren in het rijtje $(2p, 1), \dots$ noemen we de eerste coördinaat m en de tweede coördinaat n . Is $m + n$ een priemgetal dan kunnen alle splitsingen genomen worden. Is $m + n$ een samengesteld getal dan moeten die splitsingen geschrapt worden waarbij $\text{ggd}(m, n) \neq 1$. Dus:

i	$m + n$	(m, n)	PPD(i)		
			a	b	c
1	3	(2, 1)	4	3	5
2	5	(4, 1)	8	15	17
3	5	(3, 2)	12	5	13
4	7	(6, 1)	12	35	37
5	7	(5, 2)	20	21	29
6	7	(4, 3)	24	7	25
7	9	(8, 1)	16	63	65
8	9	(7, 2)	28	45	53
9	9	(6, 3)			
9	9	(5, 4)	40	9	41
10	11	(10, 1)	20	99	101

Het recept van Daaf Spijker is ook correct. Hij laat m de getallen de rij 2, 3, 4, ... doorlopen, vormt paren (m, n) met $m > n$ en schrapt de paren waarin m en n van dezelfde pariteit zijn alsook de paren met $\text{ggd}(m, n) \neq 1$. Hij moet wel wat meer schrappen dan in bovenstaande lijst. Programmeurs moeten maar uitvinden welk recept het snelst is.

Interessante opgaven

Leraren die over deze lijsten beschikken kunnen aan de hand daarvan interessante opgaven construeren. Hierna staan enkele voorbeelden.

1/ Wat is het rangnummer i in

bovenstaande lijst van een van de oudste Babylonische PPD's, namelijk $\{120, 119, 169\}$?

2/ Vind PPD(25).

3/ Bepaal alle primitieve pythagoreïsche driehoeken met een rechthoekzijde van 60.

Deze en verdere opgaven kunnen zonder kennis van de lijst opgelost worden, maar, voor zover ik het zie, is kennis van de m, n -substitutie wel noodzakelijk.

4/ Bewijs dat er geen primitieve pythagoreïsche driehoek bestaat met een rechthoekzijde van 18.

5/ Vind een primitieve pythagoreïsche driehoek met een rechthoekzijde van 27.

6/ Bepaal een primitieve pythagoreïsche driehoek met een schuine zijde van 25.

7/ Bepaal een primitieve pythagoreïsche driehoek met een omtrek van 330.

8/ Bepaal een primitieve pythagoreïsche driehoek met een oppervlakte van 1320.

9/ Bepaal een primitieve pythagoreïsche driehoek met een oppervlakte van 2340.

10/ Bewijs dat er geen primitieve pythagoreïsche driehoek bestaat met een oppervlakte van 100.

Naschrift

Ik weet niet of een behandeling van de m, n -substitutie in een Nederlandse middelbare school of zelfs op Nederlandse olympiades aanvaard zou worden. Een groot deel van mijn leven heb ik gewerkt onder de Cambridge Syllabus en daar zou het zeker – zelfs in hun I.B.-programma^[1] – niet zijn opgenomen en als formalistisch gepriegel zijn verworpen.

Aan deze primitieve pythagoreïsche drietallen moet eigenlijk een grondige algebraïsche (met letters) behandeling van de ggd voorafgaan en moet bijvoorbeeld het feit dat de ontbinding in priemfactoren uniek is, bewezen worden.

Ik wil sluiten met een opmerking van prof. Freudenthal in zijn collegedictaat (1962): 'Het feit, dat twee getallen zoiets als een ggd bezitten, is al niet triviaal en vereist een bewijs.'

Noot (red.)

[1] I.B. staat voor International Baccalaureate.

Over de auteur

Kees Vugs was achtereenvolgens *principal* van een missieschool in Namibia, leraar wiskunde in Etten-Leur, lerarenopleider in Mozambique, in-service trainer in Swaziland, part-time wiskundedocent en oesterzwamtelier in Namibia. Hij is gerepatriëerd, woont in Moergestel en stelt belang in *problem solving*.
E-mailadres : cuvugs@ziggo.nl

Na IMO2011: IMO2012

opgave 6

[Jetze Zoethout]

Bij de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) strijden elk jaar zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen door hun tanden te zetten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluit hebben. In de serie 'Op weg naar IMO2011' in 'Euclides', jaargangen 85, 86 en 87, heeft u een aantal van deze opgaven langs zien komen. In dit artikel weer een volgende opgave, nu van IMO2012, besproken door goudenmedaillewinnaar Jetze Zoethout.

Deze zomer werd de 53e International Mathematical Olympiad gehouden in Argentinië. Vaak zijn de opgaven die de deelnemers voorgeschoteld krijgen, niet op te lossen met alleen wiskunde die op de middelbare school wordt onderwezen. Er bestaan echter ook ontzettend moeilijke opgaven waarvoor *geen* speciale kennis is vereist. Een voorbeeld daarvan zagen we tijdens deze IMO.

IMO 2012, opgave 6

Vind alle gehele getallen $n > 0$ waarvoor er gehele getallen $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ bestaan zodanig dat:

$$(1) \dots \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$

Op naar een oplossing

Een goede manier om een gevoel voor de opgave te krijgen is het bekijken van kleine waarden van n . We beginnen bij $n = 1$. De vraag is of er een geheel getal $a_1 \geq 0$ bestaat zodat:

$$\frac{1}{2^{a_1}} = \frac{1}{3^{a_1}} = 1$$

Het blijkt dat $a_1 = 0$ voldoet. Voor $n = 2$ is de vraag of er gehele getallen $a_1, a_2 \geq 0$ bestaan zodat:

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} = 1$$

Hier blijkt $a_1 = a_2 = 1$ een oplossing. Als we vervolgens verder gaan naar $n = 3$, wordt het opeens veel moeilijker. We proberen gehele getallen $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ te vinden zodat:

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \frac{1}{2^{a_3}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \frac{3}{3^{a_3}} = 1$$

Maar dat lukt ons niet. Ook bij $n = 4$ lijken er geen oplossingen te zijn van (1). Als we de moed dan al bijna opgegeven hebben, blijkt er voor $n = 5$ wél weer zo'n oplossing te zijn:

$a_1 = a_2 = a_3 = 2$ en $a_4 = a_5 = 3$ is een oplossing van (1).

Vergelijking (1) bestaat eigenlijk uit twee delen, namelijk:

$$(2) \dots \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = 1$$

en

$$(3) \dots \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$

De breuken maken het lastig met deze vergelijkingen te werken. Gelukkig kunnen we van deze breuken afkomen. Door links en rechts met 3^s te vermenigvuldigen, waarbij $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, gaat (3) over in:

$$(4) \dots 3^{s-a_1} + 2 \cdot 3^{s-a_2} + \dots + n \cdot 3^{s-a_n} = 3^s$$

Alle driemachten die hier staan, zijn oneven. Omdat nu de rechterkant van (4) oneven is, moet er links een oneven aantal oneven termen staan. Dit betekent dat het aantal oneven getallen onder $1, 2, \dots, n$ zelf oneven moet zijn. Stel nu dat n van de vorm $4k - 1$ of $4k$ is. Dan zijn er $2k$ oneven getallen onder $1, 2, \dots, n$, namelijk $1 = 2 \cdot 1 - 1, 3 = 2 \cdot 2 - 1, \dots, 4k - 1 = 2 \cdot (2k) - 1$. Maar $2k$ is even: tegenspraak.

Dus weten we nu dat, als voor zekere n uitdrukking (1) een oplossing heeft, n van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$ moet zijn. Dit verklaart waarom we voor $n = 3$ en $n = 4$ geen oplossingen konden vinden.

We hadden al een oplossing gevonden voor $n = 1, n = 2$ en $n = 5$. Hoe zit het voor $n = 6, n = 9$ en $n = 10$? Ook voor deze n kunnen we een oplossing vinden.

Daardoor krijgen we het vermoeden dat er voor iedere n van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$ een oplossing van (1) bestaat. Om dit aan te tonen zullen we voor al deze n een oplossing $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ moeten construeren.

Het vinden van een directe formule voor de $a_1, a_2, \dots, a_n$ in termen van n blijkt echter nog niet zo makkelijk... Daarom gaan we proberen een oplossing voor n te construeren uit oplossingen voor kleinere waarden van n .

Algemeen

Stel dat we getallen $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ hebben die voldoen aan (2). Bij deze vergelijking maakt de volgorde van deze getallen niet uit. We bekijken de term $\frac{1}{2^{a_i}}$, waarbij i een geheel getal met $1 \leq i \leq n - 1$ is. Om nu een oplossing te vinden voor n kunnen we deze term als volgt opsplitsen:

$$\frac{1}{2^{a_i}} = \frac{2}{2^{a_i+1}} = \frac{1}{2^{a_i+1}} + \frac{1}{2^{a_i+1}}$$

Dus als we in de rij getallen $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ het getal a_i vervangen door (het tweetal) a_{i+1}, a_{i+1} , hebben we een oplossing van (2) voor het geval n .

Nu willen we bij vergelijking (3) een soortgelijke constructie uitvoeren. We lopen echter meteen al tegen een moeilijkheid aan. Waren in (2) nog alle tellers gelijk aan 1, dit gemak hebben we niet bij (3). Laten we daarom een algemenere versie van deze vergelijking bekijken. We gaan voor willekeurige gehele $b_1, \dots, b_n > 0$ oplossingen $a_1, \dots, a_n \geq 0$ construeren van:

$$(5) \dots \frac{b_1}{3^{a_1}} + \frac{b_2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{b_n}{3^{a_n}} = 1$$

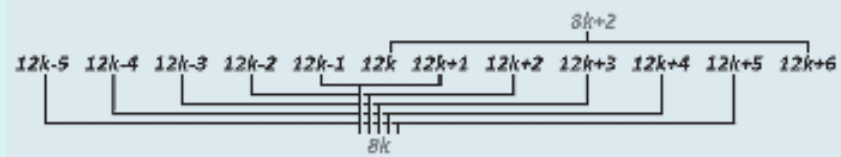
Stel opnieuw dat we een oplossing van (5) hebben voor $n - 1$. We gaan net als bij (2) proberen de i -de term op te splitsen, namelijk:

$$\frac{b_i}{3^{a_i}} = \frac{3b_i}{3^{a_i+1}}$$

Er is hier geen unieke manier om de teller op te gaan splitsen, maar dit geeft ons juist heel veel vrijheid. We hebben:

$$\frac{b_i}{3^{a_i}} = \frac{3b_i}{3^{a_i+1}} = \frac{u}{3^{a_i+1}} + \frac{v}{3^{a_i+1}}$$

waarbij $u + v = 3b_i$. Als we in onze oplossing voor het geval $n - 1$ en $b_1, \dots, b_{n-1}$ dus a_i vervangen door a_{i+1}, a_{i+1} , vinden we een oplossing voor het geval n waarbij b_i is vervangen door u en v . We zien dat er met de a_i nu precies hetzelfde is gebeurd als bij onze constructiestap bij vergelijking (2).



figuur 1

Ook van (1) als geheel kunnen we zo'n algemenere versie bekijken. We noemen nu een rijtje $b_1, \dots, b_n$ *oplosbaar* als er een oplossing $a_1, \dots, a_n$ bestaat van (2) en (5):

$$(6) \dots \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{b_1}{3^{a_1}} + \frac{b_2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{b_n}{3^{a_n}} = 1$$

Om ons vermoeden te bewijzen moeten we dus aantonen dat het rijtje 1, 2, ..., n oplosbaar is voor alle n van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$.

Hierboven hebben we gezien: als het rijtje $b_1, \dots, b_{n-1}$ oplosbaar is, dan is dit rijtje waarbij b_i is vervangen door u en v ook oplosbaar, waarbij dan $u + v = 3b_i$. Als we dus omgekeerd van een rijtje met de getallen u en v willen weten of het oplosbaar is, is het voldoende om te laten zien dat datzelfde rijtje waarbij u en v vervangen zijn door $\frac{u+v}{3}$ oplosbaar is. Hierbij moet $u + v$ natuurlijk deelbaar zijn door 3.

We zullen deze stap weergeven als:

$$\{u, v\} \mapsto \frac{u+v}{3}$$

Nemen we in het bijzonder $u = m$ en $v = 2m$, dan vinden we dat, als we van een rijtje met de getallen m en $2m$ willen weten of het oplosbaar is, het voldoende is om te laten zien dat datzelfde rijtje waarbij m en $2m$ vervangen zijn door $\frac{m+2m}{3} = m$, oplosbaar is.

Concreet betekent dit dat we in een rijtje waarin m en $2m$ voorkomen, het getal $2m$ meteen kunnen negeren.

Om te concluderen dat er een oplossing van (1) bestaat voor $n = 5$, hadden we het geval $n = 5$ als volgt kunnen construeren uit het geval $n = 2$. Daarvoor moeten we het rijtje 1, 2, 3, 4, 5 reduceren tot het rijtje 1, 2. Dit kan via de stappen:

$$\{4, 5\} \mapsto 3, \{3, 3\} \mapsto 2, \{1, 2\} \mapsto 1$$

Merk op dat deze laatste stap in feite het negeren van de 2 is. Deze stappen leveren achtereenvolgens de b_i -rijtjes 1, 2, 3, 4, 5, dan 1, 2, 3, 3, dan 1, 2, 2 en dan 1, 2. Precies wat we wilden.

De constructie van de rij a_i gaat de andere kant op: omdat 1, 2 oplosbaar is (met a -rij 1, 1), is 1, 2, 2 ook oplosbaar (met a -rij 2, 2, 1), dus ook 1, 2, 3, 3 (met a -rij 2, 2, 2, 2), dus ook 1, 2, 3, 4, 5 (met a -rij 2, 2, 2, 3, 3).

Ons doel is nu om alle n van de vorm $n = 4k + 1$ en $n = 4k + 2$ op deze manier te 'reduceren' tot eerdere gevallen.

Doordat we deze algemenere versie bekijken, hoeven we niet noodzakelijk n te reduceren tot $n - 1$. Dat is maar goed ook, want dat had ook nooit kunnen lukken (waarom?). Een reductie van n naar $n - 4$ zou wel kunnen slagen.

Stel dat n van de vorm $n = 4k + 2$ is. Het zou mooi zijn als we het rijtje 1, 2, ..., $(4k + 2)$ kunnen reduceren tot 1, 2, ..., $(4k - 2)$ door de getallen $4k - 1, 4k, 4k + 1$ en $4k + 2$ weg te werken. Om onze stappen uit te kunnen voeren, moeten we echter weten wat er met onze getallen gebeurt bij deling door 3. Daarom schrijven we $n = 12k + r$ en proberen we dit geval meteen te reduceren tot $n = 12(k - 1) + r$. We gaan dus over van een reductie met 4 stappen op een reductie met 12 stappen.

Laten we dit bijvoorbeeld eens proberen voor n van de vorm $n = 12k + 6$. Dan moeten we proberen de getallen $12k - 5, 12k - 4, \dots, 12k + 6$ weg te werken. We zullen nu 12 stappen moeten zetten. Om de constructie overzichtelijk te houden, proberen we stappen uit te voeren die een even getal opleveren, dat we vervolgens meteen kunnen negeren.

Het zou ook het makkelijkst zijn als dit even getal steeds hetzelfde was. Dit kunnen we doen door om het getal $12k$ 'heen te bouwen'. Dit betekent dat we beginnen met de stap $\{12k - 1, 12k + 1\} \mapsto 8k$. Vervolgens doen we $\{12k - 2, 12k + 2\} \mapsto 8k$ en hiermee gaan we door tot $\{12k - 5, 12k + 5\} \mapsto 8k$. Deze stappen kunnen we in één keer weergeven door:

$$\{12k - i, 12k + i\} \mapsto 8k \text{ voor } 1 \leq i \leq 5$$

Nu hebben we $12k + 6$ en $12k$ nog over, waarmee we de stap $\{12k, 12k + 6\} \mapsto 8k + 2$ uitvoeren. Dit proces is weergegeven in **figuur 1**.

Tot slot moeten we nog controleren of we $8k$ en $8k + 2$ echt mogen negeren. Hiervoor moeten $4k$ en $4k + 1$ beide voorkomen in de rij 1, 2, ..., $(12k - 6)$. Er moet dus gelden dat $4k + 1 \leq 12k - 6$, oftewel dat $8k \geq 7$. Aangezien k geheel moet zijn, volgt hieruit dat k minstens 1 moet zijn.

Nu kunnen we ook de algemene constructie uitvoeren. We schrijven $n = 12k + r$ met k, r geheel en $0 \leq r \leq 11$. Als $6 \leq r \leq 11$, komen $12k$ en $12k + 6$ beide voor in de rij $(12k + r - 11), \dots, (12k + r)$ die we weg moeten werken. Nu moeten we niet alleen om $12k$ heen bouwen, maar ook om $12k + 6$. De lezer kan zelf controleren dat dit de volgende stappen oplevert:

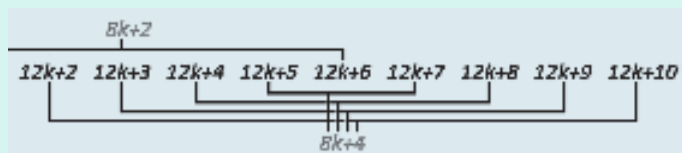
$$\begin{aligned} \{12k - i, 12k + i\} &\mapsto 8k && \text{voor } 0 \leq i \leq r \\ \{12k + 6 - j, 12k + 6 + j\} &\mapsto 8k + 4 && \text{voor } 0 \leq j \leq 5 - r \\ \{12k + 6, 12k\} &\mapsto 8k + 2 \end{aligned}$$

en dat we de resulterende getallen inderdaad kunnen negeren voor $k \geq 1$.

De stappen voor $r = 10$ staan weergegeven in **figuur 2**. Hier zien we ook dat onze overgang naar stappen van 12 belangrijk was: hoewel $12k + 6$ en $12k + 10$ verschil 4 hebben, gaat de reductie heel anders.

Voor $0 \leq r \leq 5$ moeten we om $12k - 6$ en $12k$ heen bouwen. Ik laat het aan de lezer over om de bijbehorende stappen te bedenken en te controleren dat we de resulterende getallen kunnen negeren, maar nu voor $k \geq 2$. Ook hier helpt het om een schema te tekenen als in de figuren 1 en 2. Hiermee hebben we het geval n gereduceerd tot het geval $n - 12$ voor alle $n \geq 18$. Zo kunnen we alle gevallen $n \geq 18$ van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$ reduceren tot een geval $n < 18$, ook van deze vorm, door een aantal keer deze algemene reductie uit te voeren. Dit betekent dat we alle $n < 18$ van deze vorm nog moeten onderzoeken. We zouden voor al deze n een oplossing van (1) kunnen zoeken, maar dit kan lang duren. We kunnen onze reduceerstap ook gebruiken om al deze n terug te brengen tot een lagere n . Zo herleiden we uiteindelijk alle gevallen tot het geval $n = 1$.

We kunnen bijvoorbeeld het geval $n = 17$ herleiden tot $n = 13$ door de stappen: $\{9, 15\} \mapsto 8, \{4, 8\} \mapsto 4, \{10, 17\} \mapsto 9, \{14, 16\} \mapsto 10$. Ook $n = 14$ kan gereduceerd worden tot $n = 13$, door de 14 te negeren. We zagen ook al hoe $n = 5$ kan worden gereduceerd tot $n = 2$ en vervolgens tot $n = 1$. Wat hier tussenin gebeurt, kan de lezer zelf onderzoeken. Als we alle gevallen hebben gereduceerd tot het geval $n = 1$, hebben we de opgave opgelost!



figuur 2

Antwoord

Het antwoord op deze opgave is dus:
precies alle gehele $n > 0$ van de vorm $n = 4k$
+ 1 en van de vorm $n = 4k + 2$.

Zoals aan het begin gezegd, hebben we geen wiskunde nodig gehad die niet op de middelbare school gegeven wordt. Dat betekent echter zeker niet dat deze opgave eenvoudig is. Een aantal cruciale stappen uit het bewijs zijn niet makkelijk te bedenken. Het wegwerken van de breuken, het construeren van oplossingen uit oplossingen van kleinere gevallen, het bedenken van de reduceerstap, het algemener maken van de opgave en het overstappen op een reductie met 12 stappen zijn de belangrijkste voorbeelden.

Ikzelf ben bij het werken aan deze opgave vooral bezig geweest met het construeren, maar kreeg daar helaas geen punten voor. Een ander Nederlands teamlid vond dat n in ieder geval van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$ moet zijn en kreeg daar 1 punt voor. De statistieken spreken ook boekdelen. Van de 548 deelnemers aan de IMO haalden er slechts 35 meer dan 1 punt en voor slechts 10 deelnemers waren de volledige 7 punten weggelegd.

Ook met 'simpele' wiskunde bestaan er ontzettend moeilijke opgaven.

Over de auteur

Jetze Zoethout deed twee keer mee aan de Internationale Wiskunde Olympiade en behaalde achtereenvolgens een bronzen medaille (Nederland, 2011) en een gouden medaille (Argentinië, 2012). Hij studeert nu wijsbegeerte en wiskunde aan de Universiteit Utrecht.

E-mailadres: jetzezoethout@hotmail.com



BEVOEGDHEID TE GRAAD HALEN?

Bij Hogeschool Utrecht kunt u doorstuderen voor een Master of Education Wiskunde.

Kom naar een van de open dagen of kijk op www.master.hu.nl voor meer informatie.

ER VALT NOG GENOEG TE LEREN

**INSTITUUT
ARCHIMEDES
HOGESCHOOL
UTRECHT**



Finale Bartjens Rekendictee 2012

[Birgit van Dalen]

Eén van de grootste jaarlijkse rekenfeesten is de finale van het Bartjens Rekendictee. Op vrijdagavond 23 november jl. vond alweer de negende editie plaats. Zo'n 150 deelnemers, geselecteerd via diverse voorrondes, namen plaats in de sporthal van Windesheim in Zwolle en zwoegden op veertien pittige opgaven. Wilt u zelf ook een poging wagen? Na een kort verslag vindt u alle opgaven.

De bijna 150 deelnemers aan de finale van het Bartjens Rekendictee 2012 vormden een bont gezelschap: scholieren die door de voorronde op school heen waren gekomen, pabo-studenten die zich ook via een eigen voorronde hadden gekwalificeerd, vertegenwoordigers van sponsors (van krantenmedewerkers tot hogeschooldocenten), prominenten zoals de burgemeester van Zwolle, en dan nog de grote groep van deelnemers die via de internetvoorronde was doorgedrongen tot de finale. Bij die laatste groep zaten ook weer een paar scholieren, maar net zo goed ook flink wat wiskundedocenten en nog allerlei mensen met andere beroepen die gewoon rekenliefhebber zijn. Al die rekenfanaten kregen een gevarieerd rekendictee voorgelegd door Marjolein Kool, die dit rekenfeest voor negende keer presenteerde en dat weer fantastisch deed. Ze wisselde de opgaven af met anekdotes en leuke filmpjes, waarmee naast de deelnemers ook het publiek vermaakt werd. Het Bartjens Rekendictee was overigens voor het eerst ook live op internet te volgen. De jury van het Rekendictee stond dit jaar onder leiding van Thom de Graaf, welbekend als voormalig Tweede-Kamerlid, voormalig burgemeester en nu voorzitter van de HBO-raad.

De winnaars van het Bartjens Rekendictee werden dezelfde avond nog bekend gemaakt:

- Categorie scholieren: Max Michiels van het Gymnasium Beekvluit uit Sint-Michielsgestel met 120 punten.
- Categorie pabo-studenten: Wesley Rood van de Hogeschool Edith Stein uit Hengelo met 150 punten.
- Categorie sponsors: Douwe Jan Douwes van de Stenden Hogeschool met 155 punten.
- Categorie prominenten: Epi van Winsen met 185 punten (hij was eerder winnaar in 2007 en 2011).

Rekendictee en rekentoets

Een voor de hand liggende vraag is of het Bartjens Rekendictee overeenkomsten heeft met de rekentoets waaraan in maart van dit jaar voorexamenklassen uit het hele land onderworpen worden. Nu is de finale van het Bartjens Rekendictee bedoeld voor de 150 beste rekenaars uit Nederland en ook daarvan maakt een groot deel maar weinig opgaven goed (zoals dat hoort bij een echte wedstrijd). Dus gelukkig voor alle scholieren zijn de vragen bij de rekentoets wel wat makkelijker. Wat wel een overeenkomst is, is de tijdsdruk: bij de Bartjens-finale was er voor de meeste vragen 1,5 of 2 minuten beschikbaar; de rekentoets zal gaan bestaan uit 60 vragen in twee uur, dus ook 2 minuten per vraag.

En neemt u maar van mij aan dat die tijdsdruk een enorme stressfactor is; dus het is goed om uw leerlingen daar ook een beetje op voor te bereiden.

Ook al is het niveau van het Bartjens rekendictee heel hoog, het soort opgaven en de strategieën die je ervoor nodig hebt, zijn wel vergelijkbaar met die bij de rekentoets. Zo had ik kort voor de Bartjens-finale nog met mijn 5-vwo'ers het omrekenen van volumematen doorgenomen (kubieke meters naar deciliter, dat soort dingen). Mede daardoor aarzelde ik geen seconde bij vraag 9 over de te volgen strategie: alles naar decimeters, kubieke decimeters en liters omrekenen. En andersom zou deze vraag dus geen gekke oefenopgave voor de rekentoets zijn, zolang de leerlingen er iets langer de tijd voor krijgen dan bij de Bartjens-finale. De vaardigheden die een leerling nodig heeft om deze opgave op te lossen, heeft hij allemaal ook nodig voor de rekentoets.

- Categorie internetwinnaars: Roel Bakker uit Ede met **200** punten.

Roel Bakker maakte geen enkele fout en mocht daarom het felbegeerde Glazen Telraam naar huis gaan. Zijn achtergrond? Wiskundedocent misschien, of op z'n minst wel wiskunde gestudeerd? Nee hoor, hij is eigenaar van een zorgboerderij. En daarnaast dus een fantastische rekenaar.

Fotografie

Eva Posthuma

Over de auteur

Birgit van Dalen is adjunct-hoofdredacteur van *Euclides*. Verder is zij docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag en betrokken bij de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade. E-mailadres: bevandalen@gmail.com



foto 1 De winnaars van het Bartjens Rekendictee, v.l.n.r. Roel Bakker (met het glazen telraam), Epi van Winsen, Douwe Jan Douwes, Wesley Rood, Max Michiels



foto 2 Presentatrice Marjolein Kool, juryvoorzitter Thom de Graaf en winnaar Roel Bakker

Opgaven

FINALE BARTJENS REKENDICTEE 2012

Na de titel van de vraag staat tussen haakjes het aantal te behalen punten.

De antwoorden zijn te vinden op *www.bartjensrekendictee.nl*.

1. Eurocrisis (10) – Premier Samaras van Griekenland maakt een vergissing. Hij vermenigvuldigt een getal met 7, terwijl hij het had moeten delen door 7. Hij krijgt als uitkomst 4361.
Wat had de goede uitkomst moeten zijn?

2. Ranomi Kromowidjojo (10) – Ranomi traint in een rechthoekig zwembad met een omtrek van 160 meter. De zijden verhouden zich als 2 : 3.
Wat is de lengte van dat zwembad?

3. Schrikkeljaar (20) – Sonja Barend is op 29 februari 1940 geboren. Ze viert haar verjaardag uitsluitend in de schrikkeljaren. Op woensdag 29 februari jl. was het dus feest in huize Barend.
Hoe vaak in totaal heeft Sonja tot op de dag van vandaag haar verjaardag op een woensdag gevierd?

4. Wc-pot werpen (15) – Op Koninginnedag deden drie prinsen mee aan wc-potwerpen. Constantijn gooide 1 cm meer dan hun gemiddelde afstand. Maurits gooide 53 cm minder dan hun gemiddelde afstand. Willem-Alexander won met een worp van 602 cm.
Over hoeveel decimeter gooiden de prinsen hun wc-pot gemiddeld?

5. Vijftig tinten grijs (15) – Als Patty Brard elke dag 20 bladzijden leest in ‘Vijftig tinten grijs’, kan ze zeven dagen langer van het boek genieten dan wanneer ze elke dag 30 bladzijden leest.
Hoeveel bladzijden heeft het boek? Deel dit aantal door 10.

6. Sportzomer (15) – Usain Bolt en Churandy Martina zijn op vliegveld Heathrow. Daar ligt een horizontale rollooppband die 100 meter lang is. De band heeft een snelheid van 4 km/uur. Bolt en Martina stappen er tegelijk op. Bolt staat stil op de band, Martina loopt met een snelheid van 6 km/uur.
Hoeveel meter moet Bolt nog afleggen op de band, als Martina aan het eind van de band is?

7. Felix Baumgartner (25) – Felix Baumgartner sprong op 39 km hoogte uit een heliumballon. Hij liet zich eerst vrij vallen. Later trok hij zijn parachute open. Zijn gemiddelde snelheid in de vrije val was 562,5 km/uur. Zijn gemiddelde snelheid aan de parachute was 22,5 km/uur. Zijn vrije val duurde net zo lang als zijn val aan de parachute.
Hoeveel minuten duurde de totale val van Baumgartner?

8. Estelle Cruijff (10) – Estelle Cruijff wil een paar schoenen met stilettohak kopen. De winkelier vermoedt een dikke creditcard en verhoogt de prijs snel met 40%. Maar dan komt Badr Hari de hoek om. De winkelier trekt wit weg en verlaagt het bedrag dat hij zojuist noemde snel met 40%. Estelle koopt de schoenen.
Hoeveel procent korting ten opzichte van de oorspronkelijke prijs heeft ze gekregen?

9. Bram Moszkowicz (10) – Bram Moszkowicz moet voortaan zelf met een emmer van 10 liter zijn jacuzzi vullen. Het bad heeft een grillige vorm, maar de wanden zijn recht en er ligt niets in. Het bodemoppervlak is 6 m². Hij gooit er 540 emmers water in.
Hoeveel centimeter water staat er dan in zijn jacuzzi?

10. Kaal (15) – Welk cijfer staat er op de plaats van de honderdtallen bij de vermenigvuldiging 347786×540985 ?

11. Minister van defensie (15) – Minister Jeanine Antoinette Hennis-Plasschaert laat de tank van een gevechtstank volgooien. Daar moet ze 1080 euro voor betalen. Thuis heeft ze een schaalmodel van die tank, schaal 1 : 30.
Hoeveel eurocent moet ze betalen als ze de tank van dat schaalmodel met dezelfde brandstof zou laten vullen?

12. De badkuip (20) – Carl André wil in het Stedelijk Museum een vloer maken van 18,63 m bij 13,23 m. Hij gebruikt hiervoor vierkante tegels. De tegels worden zo groot mogelijk gekozen, zonder voeg gelegd en ze moeten heel blijven.
Hoeveel centimeter is één zijde van zo’n vierkante tegel?

13. Epke Zonderland (10) – Op het moment dat Epke Zonderland goud wint, is $\frac{13}{20}$ deel van de Nederlandse bevolking niet in staat om naar de televisie te kijken. Van de overige Nederlanders zit $\frac{3}{7}$ deel aan de buis gekluisterd.
Hoeveel procent van de Nederlanders zag Epke goud winnen?

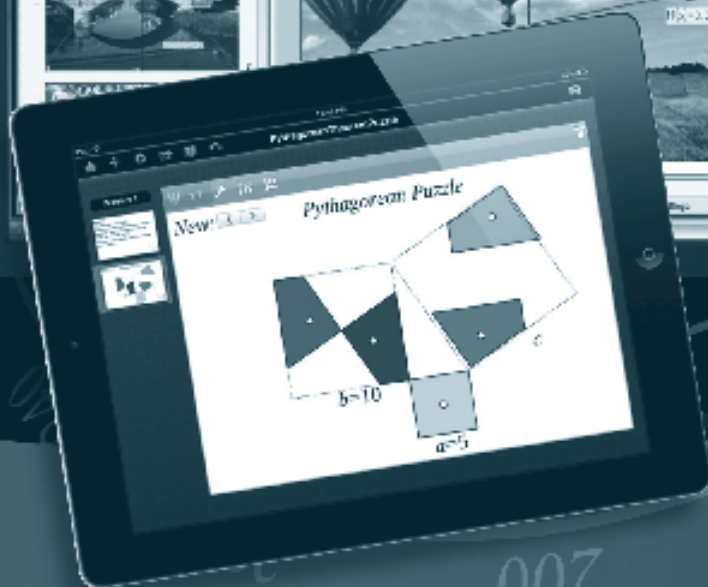
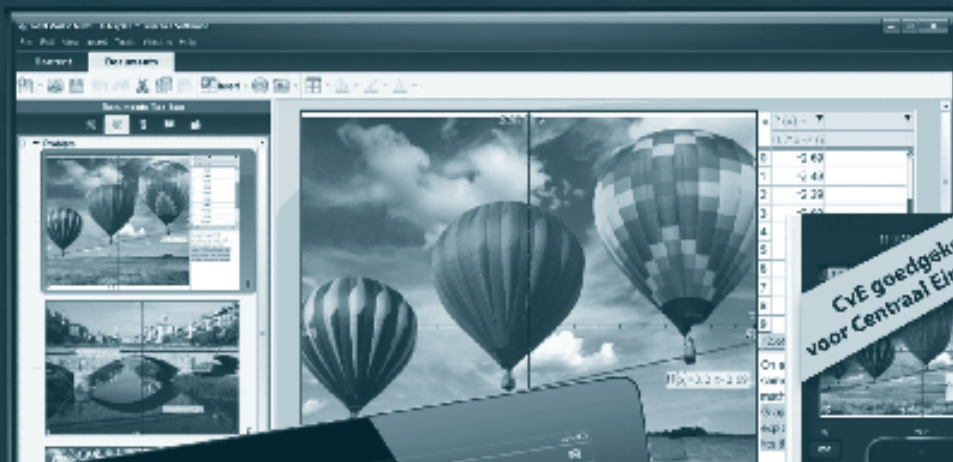
14. André Kuipers (10) – Vlak vóór zijn vertrek naar de ruimte geeft een weegschaal aan dat André Kuipers 81 kg weegt en zijn ruimtepak 30 kg. Tijdens zijn reis naar het ruimtestation ISS verandert dit. Op een gegeven moment geeft de weegschaal 37 kg aan voor Kuipers en zijn pak gezamenlijk. Wat zou de weegschaal op dat moment voor zijn pak afzonderlijk aangeven?

TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Rekenmachine, computer en nu iPad... wie volgt?

U kunt vanaf nu met TI-Nspire naar uw eigen keuze werken op de rekenmachine, op een computer in het schoolnetwerk, op uw eigen laptop, de leerling thuis op de computer, via internet met de Player, en nu met de iPad-app.

Voor een demonstratie of meer informatie, stuur een mail aan Jurgen Schepers, educatief consultant j-schepers@ti.com



CvE goedgekeurd voor Centraal Eindexamen



Vanuit de oude doos

A^o 1929

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.

Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer weer een echt pittige analytische opgave uit 1929.

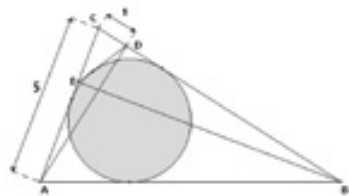
Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.

Verderop treft u mijn uitwerking aan.

De opgave

Van een scherphoekige driehoek ABC is gegeven $\angle C = \arccos \frac{1}{5}$. AD en BE zijn hoogtelijnen.

Bereken de hoeken A en B als verder gegeven is, dat ook in vierhoek $ABDE$ een cirkel kan worden beschreven.



figuur 1

In figuur 1 staat een situatieschets. Lukt het u verder?

Enkele mogelijke handvatten zijn:

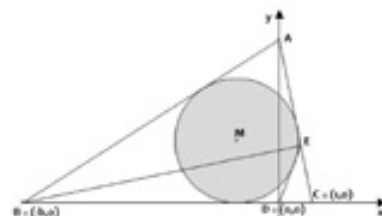
- $ABDE$ is een koordenvierhoek (omgekeerde stelling van Thales); vandaar het woordje 'ook' in de opgave: $ABDE$ is dus ook een zogeheten *raaklijnvierhoek*.
- de driehoeken CDE en CAB zijn gelijkvormig (ED is in driehoek ABC antiparallel aan AB).

Een mogelijke aanpak

Alhoewel vaak bij opgaven van dit type een meetkundige aanpak elegant is, kan ook worden gekozen voor een analytische aanpak. Kies een geschikt assenstelsel, voer voor een van de onbekenden (lengte van een lijnstuk of grootte van een hoek) een parameter in en druk geschikte andere hoeken en lijnstukken uit in deze parameter.

Omdat van driehoek ACD de zijden bekend zijn – namelijk 1, 5 en $\sqrt{24}$ – kies ik ervoor BC als horizontale as (x -as) en AD als verticale as (y -as) te gebruiken.

Stel $BD = b$; zie figuur 2.



figuur 2

Plan van aanpak

- De coördinaten van A , B , C en D zijn bekend.
- Stel een vergelijking op van de lijnen AB , AC en BC .
- Stel een vergelijking op van BE , en bereken de coördinaten van E , waarna een vergelijking van DE kan worden opgesteld
- Stel een vergelijking op van de deellijnen van de hoeken B en C ; Voor het opstellen van een vergelijking van een hoekdeellijn is een formule eerder in deze rubriek beschreven.
- Bepaal het snijpunt M van deze deellijnen.
- De y -coördinaat van M is gelijk aan de afstand van M tot DE . Hiermee kan uiteindelijk de waarde van b worden bepaald, waarmee het probleem is opgelost.

Mijn oplossing

Vergelijking van AB : $y = \frac{\sqrt{24}}{b}(x + b)$ of:
 $\sqrt{24} \cdot x - by + \sqrt{24} \cdot b = 0$

Vergelijking van AC : $y = -\sqrt{24} \cdot (x - 1)$ of:
 $\sqrt{24} \cdot x + y - \sqrt{24} = 0$

Vergelijking van BC : $y = 0$

De lijnen BE en AC staan loodrecht op elkaar. Dan is het product van de rico's van die lijnen gelijk aan -1 , zodat:

vergelijking van BE : $y = \frac{1}{\sqrt{24}}(x + b)$

Stel de vergelijkingen van AC en BE aan elkaar gelijk:

$$-\sqrt{24} \cdot (x - 1) = \frac{1}{\sqrt{24}}(x + b)$$

waaruit volgt dat $x_E = \frac{25-b}{25}$.

Substitutie daarvan in AC of BE geeft

$$y_E = \frac{\sqrt{24}}{25}(1 + b), \text{ zodat:}$$

$$E = \left(\frac{25-b}{25}; \frac{\sqrt{24}}{25}(1 + b) \right)$$

Hiermee kan een vergelijking van DE worden opgesteld. Na enig gestoei vind ik:
 $\sqrt{24} \cdot (1 + b)x + (b - 24)y = 0$

In deze rubriek stond vijf afleveringen geleden hoe de bissectrices van een lijnenpaar kunnen worden opgesteld. Dat toegepast op de hoeken bij B en C levert (na flinke algebra) op voor vergelijkingen van de lijnen BM en CM :

$$BM: y = \frac{\sqrt{24} \cdot (x + b)}{b + \sqrt{24 + b^2}} \text{ en}$$

$$CM: y = \frac{\sqrt{6}}{3}(1 - x)$$

Het snijpunt van deze lijnen, na enige algebra, is dan:

$$M = \left(\frac{-5b + \sqrt{24 + b^2}}{b + 6 + \sqrt{24 + b^2}}; \frac{\sqrt{24}(b + 1)}{b + 6 + \sqrt{24 + b^2}} \right)$$

Gebruik nu de afstandsformule van punt tot lijn, die na enige vereenvoudiging resulteert in:

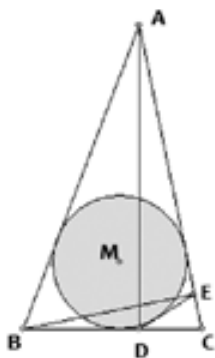
$$d(M, DE) = \frac{|\sqrt{24} \cdot (1 + b)(-4b - 24 + \sqrt{24 + b^2})|}{(b + 6 + \sqrt{24 + b^2}) \cdot 5\sqrt{24 + b^2}}$$

Gelijk stellen aan y_M geeft uiteindelijk:

$$\frac{|-4b - 24 + \sqrt{24 + b^2}|}{5\sqrt{24 + b^2}} = 1$$

Deze vergelijking kan worden herleid tot:
 $5b^2 - 48b + 72 = 0$

$$\text{Dus: } b = \frac{48 \pm \sqrt{864}}{10} = \frac{24 \pm 6\sqrt{6}}{5}$$



figuur 3

Dit resulteert in $\tan \beta = \frac{5\sqrt{24}}{24 \pm 3\sqrt{24}}$, waaruit volgt:

$$\beta \approx 32,33353^\circ \approx 32^\circ 20' 1'' \text{ of } \beta \approx 69,20343^\circ \approx 69^\circ 12' 12''$$

De grootte van $\angle C$ is (impliciet) gegeven, dus dan is ook $\angle A$ bekend.

De eerste oplossing is hierboven al getekend (figuur 2). De tweede oplossing staat in figuur 3.

Mijn uitwerking is fors, pas na weglating van veel algebra ontstond bovenstaande compacte uitwerking.

Ik daag u uit een uitwerking te maken die flink eenvoudiger is, wellicht een meetkundige? Ik ben benieuwd!

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: alecluse@casema.nl

VERSCHENEN / WISKUNDE, DAT KUN JE BEGRIJPEN!



Auteurs: Martin Kindt, Ed de Moor
Uitgever: Bert Bakker, Amsterdam (2012)
ISBN: 978 90 351 3805 6
Prijs: 19,95 (270 pagina's; paperback)

Van de achterflap

Duizenden jaren geleden begon de wiskunde door streepjes in botten te kerven. Millennia verder is dit vak uitgegroeid tot een veelomvattende wetenschap. Zonder wiskunde zou er geen ruimtevaart, internet, gsm of mri-scan bestaan.

Hoewel de wiskunde zich in de loop der eeuwen heeft vertakt tot een systeem van velerlei specialismen, blijven enkele fundamentele begrippen, stellingen en

theorieën de vaste basis voor iedereen die zich met wiskunde bezighoudt. In *Wiskunde, dat kun je begrijpen!* Wordt een aantal van deze wiskundige kernideeën op heldere en anschouwelijke wijze uiteengezet. Daarbij baseren de auteurs zich ook op de historische ontwikkeling van het vak dat voor velen een formeel denkspel is, maar dat van oorsprong vooral praktisch was.

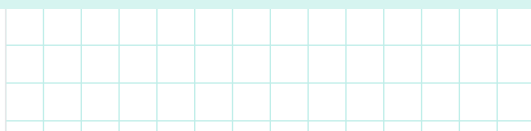
In deze gereviseerde en sterk uitgebreide uitgave van het succesvolle boek *Wiskunde in een notendop*^[1] is de tekst van de oorspronkelijke hoofdstukken verdiept en aangevuld. Bovendien zijn er drie nieuwe hoofdstukken toegevoegd en is in elk hoofdstuk een aantal uitdagende vraagstukken voor de lezer opgenomen.

Martin Kindt (1937) en dr. Ed W.A. de Moor (1933) hebben beiden hun sporen verdiend als docent in het voortgezet en hoger onderwijs, maar ook als onderzoekers en ontwikkelaars van wiskundeonderwijs bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Beiden publiceren regelmatig over reken- en wiskundededidactiek en de historische aspecten daarvan.

Over *Wiskunde in een notendop* (in NWT): 'Helder, zakelijk, met af en toe een wat langere uitleg en een anekdote om de stof goed verteerbaar te houden, wordt de kern van het gedachtegoed van een paar duizend jaar voor de lezer uitgesteld.'

Noot

[1] Zie *Euclides* 84(3), pag. 108 voor een boekbespreking.



Uitdagende problemen

INTERNATIONALE PI-DAG, STRABRECHT COLLEGE

[Jacques Jansen]

Zin om op jouw school een wiskunde-happening te organiseren? Bijvoorbeeld pi-dag of misschien wel een E(uler)-dag of totaal iets anders, maar wel met de focus op een wiskundig event?

Lees in dit artikel hoe dat in maart 2012 op het Strabrecht College in Geldrop verliep.



foto 1

Eva, o liefje zoete hartedief Uw blauwe oogen zijn wreed bedrogen.

Zo begon het

Ineens zat ik eraan vast. De organisatie van pi-dag, 14 maart 2012, op het Strabrecht College in Geldrop. In *Confetti*, een wekelijks nieuwsbulletin van het Strabrecht College, had ik begin maart aandacht gevraagd voor een gedicht van de Poolse dichteres Wislawa Szymborska, die net in februari overleden was. Maar ik verwees ook naar de Britse zangeres Kate Bush die op haar cd *Aerial* (2005) in het liedje 'Pi' op schaamteloos romantische wijze 112 decimalen van het getal π bezingt zonder compleet belachelijk te klinken. Na het uitkomen van *Confetti* werd het artikel in de pauze besproken. In een mum van tijd was het vuur ontstoken, werd er gebrainstormd en barstten de plannen los. De centrale directie gooide ook nog wat olie op het vuur. Want laat nu net de vice-rector op 14 maart jarig zijn; hij was dus de Pias. De centrale directie kwam bovendien

zelf op het idee om de Pi-as te gaan vormen van een door leerlingen gevormde cirkel; **zie foto 2.**

Een week later werd duidelijk dat ik de wiskunde C-dag, waarvoor ik me had ingeschreven, aan mij voorbij zou laten gaan. Ik kon mijn collega's niet in de steek laten. Sterker nog, in een week tijd bombardeerde ik ze met vier journaals.

Aan de slag

Veel brainstormen dus met collega's, niet alleen van de sectie wiskunde maar ook van de sectie lo, de gymdocenten dus. Eén gymdocent komt op het idee om op de grasmat met rode pionnen een aantal vierkanten uit te zetten. In elk vierkant komt een docent met zijn klas te staan (zie de paragraaf Programma). We schakelen de ICT-afdeling in en niet geheel onbelangrijk de PR-medewerkster. We bestellen bij onze catering een π -taart en bij de lokale drukkerij een aantal T- π -shirts. Immers, op π -dag moet je als begeleider herkenbaar zijn.

In de kadertekst staat een verkorte versie van het artikel in *Confetti*.

Programma

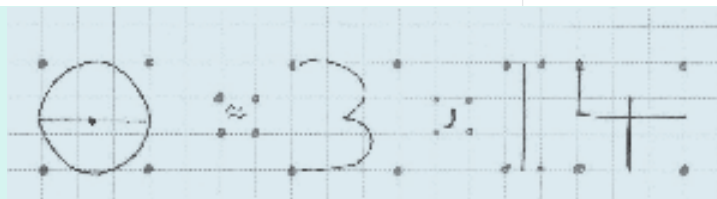
Na een week overleggen, e-mailen en whatsappen ontstaat het volgende programma waarbij twaalf collega's inclusief centrale directie betrokken zijn bij de uitvoering op het sportveld.

Programma van π -happening: drie onderdelen (statisch – dynamisch – extra dynamisch)

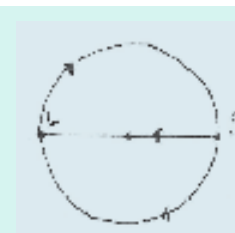
- Leerlingen verzamelen zich met hun docenten na eerste pauze om 11:25 uur op het veld naast het schoolplein.
- **Fase 1** – Zij vormen met de rector en vice-rector **figuur 1**.
- Hier worden foto's van gemaakt door tekendocent Maud. Gastvrouw wiskundecollega Elke, herkenbaar aan T- π -shirt, overhandigt het verjaardagscadeau (π -taart) aan vice-rector Peter.
- **Fase 2** – Vervolgens wordt de cirkel vergroot met meer leerlingen en gaat de menselijke cirkel draaien met de wijzers van de klok mee. Rector Leenderd (L) neemt op tijdstip $t = 0$ de west-positie in van de middellijn. Peter (P) belooft aan de oost-positie (diametraal tegenover Leenderd) de middellijn van rechts naar links, van links naar rechts en van rechts naar links; **zie figuur 2**. Als ze ongeveer de zelfde loopsnelheid hebben, ontmoeten ze elkaar aan de westkant. Dit wordt gefilmd door wiskundecollega Peter Jan.
- **Fase 3** – Groepen leerlingen proberen



foto 2



figuur 1



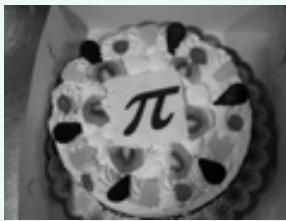
figuur 2

menselijke cirkels te maken die bewegen van links naar rechts waarbij de cirkelomtrek één keer wordt afgewenteld, zodat een rechte lijn ter lengte van de omtrek van de cirkel overblijft. Leerlingen maken gebruik van springtouwen. Eén leerling heeft de *ventielrol*. Een leerling heeft de *middelpuntrol*.

- Ook dit wordt op film vastgelegd.
- Traktaties worden uitgedeeld aan de leerlingen: Droste(-effect) ronde chocola pastilles.

Pi-dag

Het is weer bijna zover, 14 maart is het π -dag.
Wat is er zo leuk (interessant) aan het getal π ?
Wat doe je op een π -dag?



Het getal π kennen we als het verhoudingsgetal van de omtrek van een cirkel met de diameter. Afgerond op twee decimalen is π gelijk aan 3,14. Overigens kennen we π ook als de zestiende letter van het Griekse alfabet. 14 maart noteren wij als 14-03 maar de Amerikanen schrijven 3-14. Vandaar.
De Poolse dichteres Wislawa Szymborska is onlangs overleden. 89 jaar is zij geworden. Zij liet ons een schitterend gedicht na over het getal π ; ze won de Nobelprijs voor de Literatuur in 1996.



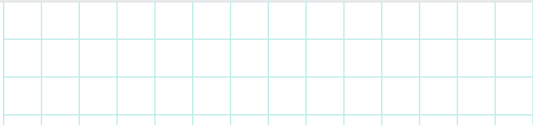
Wislawa Szymborska, Bnin (Kórnik), 2 juli 1923-Krakau, 1 februari 2012

In 1997 kocht ik van haar de prachtige bundel 'Uitzicht met zandkorrel'.
Wikipedia: 'Haar werk kenmerkt zich door een tedere kijk op alledaagse dingen. De gedichten van Szymborska worden vaak omschreven met termen als speels, ironisch en verrassend.'
Of dit echt zo is, kun je nagaan in haar gedicht over 'Het getal pi'.

Het getal pi is bewonderenswaardig
drie komma een vier een.
Alle verdere cijfers zijn ook begincijfers,
vijf negen twee omdat het nooit eindigt.
Het laat zich *zes vijf drie vijf* niet vangen in één blik,
noch *acht negen* door enige berekening,
of *zeven negen* door enige verbeelding,
en zelfs *drie twee drie acht* niet door de lach of vergelijking
vier zes met wat ook maar
twee zes vier drie ter wereld.

Rolverdeling	
aanvang	na eerste pauze – 11:25 uur
locatie	grasveld achter gymzaal 1 naast schoolplein
looproute	via hoofdlocatie naar hal, schoolplein en pi-veld
tijdsduur	ongeveer half uur
leading lady	wiskundecollega Elke; gastvrouw
regie & choreografie	lo-docent Cristiaan: fysieke uitvoeringen ondersteund door wiskunde-docenten Paul, Tis, Harrie en Martijn
PR	Liesbeth; de PR-medewerkster zorgt voor een persbericht
deelnemers	centrale directie en leerlingen van klassen H1b, H1c, V4a, T4c en V1a
deelregie van figuren	Paul (cirkel), Harry (3), Tis (4), Martijn (1, komma en -ongeveer-), Jacques (aanvulling)
fotografie	Maud en fotograaf van Eindhovens Dagblad (ED)
film	wiskundedocent Peter Jan
regie π -dag	Jacques
ED	journalist – stagiaire: Evy
catering	Van Tongerlo
facilitaire dienst	Ruud

tabel 1



Terugblik op de Pi-dag

Voor mijn collega's schrijf ik voor ons wekelijks bulletin *Confetti* de volgende (ingekorte) terugblik.

Met genoeg kijk ik terug op π -dag, 14 maart jongstleden. Wederom omgevingsgericht onderwijs en dat op onze ontlukende groene grasmat. Hieronder zien jullie in fase 1 hoe onze beroepsfotograaf Maud vanaf het dak, ook met inzet van haar klasje, een op haar eigen wijze panorama-foto heeft gemaakt.



foto 3

Eigenlijk is het in het begin van de dag best spannend. Tijdens het tweede lesuur wordt er aan mij meegedeeld dat de visitatiecommissie op bezoek komt en of ik wel weet of mijn deelnemende vijf klassen niet bezocht gaan worden tijdens het vierde lesuur. Ik denk: "Dat komt mooi uit. De netjes opgeleide dames en heren kunnen dan mooi de π -happening gadeslaan." In het zojuist verschenen rapport blijkt ook dat "het leren in een voor de leerlingen betekenisvolle context' een 4,8 scoort. Jammer dat de commissie geen luchtje gaat scheppen; het scheelt toch gauw pi punten.

*How I want a drink, alcoholic of course,
after the heavy lectures involving quantum
mechanics!*

Pi blijft in het nieuws

Er zijn altijd wel weer nieuwe π -nieuwttjes te vinden. Zo las ik in het *Algemeen Dagblad* van 17 augustus j.l. het volgende bericht. Misschien inspiratie voor een volgende π -happening bij u op school?

De Amerikaanse bevolking heeft gisteren de omvang van 314.159.265 inwoners bereikt. Reden voor een feestje bij het bureau dat in de Verenigde Staten de bevolkingsstatistieken bijhoudt: het is precies 100 miljoen keer pi. Rond 14.29 uur gistermiddag (20.29 uur Nederlandse tijd) was het volgens de rekenaars zover. De medewerkers van het Census Bureau vinden de mijlpaal zo bijzonder, dat ze de bevolking vroegen er even bij stil te staan door de deur uit te gaan en het te vieren.

YouTube en links

Een filmpje over π -dag op het Strabrecht College is te vinden op YouTube. Zoek op 'pi-dag 14 maart 2012 Strabrecht College. Van alles en nog wat over π : www.joyoffpi.com/pilinks.html

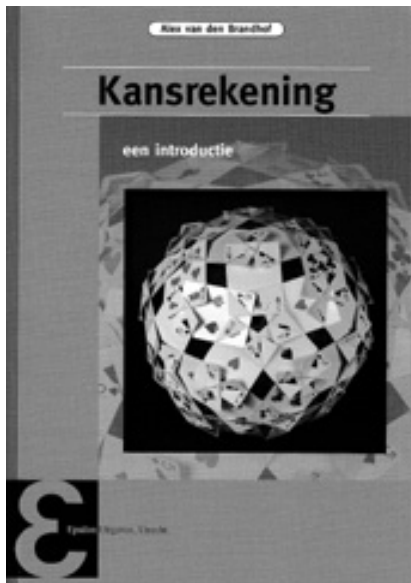
Over het onthouden van decimalen van π : <http://stepanov.lk.net/mnemo/tomoyoe.html>

Over de auteur

Jacques Jansen is docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop.
E-mailadres: j.jansen@strabrecht.nl

KANSREKENING – EEN INTRODUCTIE

[Rob Flohr]



Auteur: Alex van den Brandhof
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2012)
ISBN: 978-90-5041-128-8
Prijs: € 17,00 (140 pagina's; paperback)

"Probability is the very guide of life" in Bishop Butler's famous phrase. He does not mean, of course, that calculations about dice are the guide of life but that real decision making involves an essential element of reasoning with uncertainty.

Zo begint het voorwoord van James Franklin's *The Science of Conjecture*.^[1]

Het moge duidelijk zijn: kansen en kansrekening zijn niet weg te denken uit de hedendaagse samenleving. Daarom is het altijd weer verheugend wanneer een auteur een poging waagt om dit voor velen lastige onderwerp uit de doeken te doen.

Alex van den Brandhof is wiskundige en sinds 2001 docent wiskunde. Daarnaast is hij vanaf 2001 eindredacteur van *Pythagoras* en sedert 2006 vakredacteur wiskunde van Kennislink.

Kansrekening is blijkens het voorwoord geschreven voor middelbare scholieren met wiskunde-B in het vakkenpakket maar kan volgens de auteur ook gebruikt worden in bijvoorbeeld het hoger beroepsonderwijs. Op de achterkant van het boek wordt vermeld dat in vele, niet alleen exacte, vervolgstudies kansrekening een vaste plaats in het curriculum heeft. Ik vraag me wel af welke studies de auteur in gedachten heeft.

Of worden kansrekening en statistiek hier in één adem genoemd? Deze opmerkingen deden bij mij al vanaf het begin de vraag rijzen welk lezerspubliek de auteur feitelijk voor ogen heeft. Ik kom daar nog op terug.

Over de inhoud

Het boek bevat een achttal hoofdstukken. Het begint met een korte herhaling van de combinatoriek waarna de begrippen kans, voorwaardelijke kans en stochastische variabele in afzonderlijke hoofdstukken uitgebreid aan de orde komen. Daarna volgen hoofdstukken over discrete en continue verdelingen en het boek sluit af met een hoofdstuk over limietstellingen waarin onder meer de Centrale Limietstelling besproken wordt. In elk hoofdstuk worden de betreffende begrippen en formules eerst kort uitgelegd en daarna aan de hand van voorbeelden met uitvoerige uitwerkingen nader toegelicht. De leerstof wordt op die manier inzichtelijk gemaakt. Een ander vanuit didactisch oogpunt sterk punt van het boek is de rijke verzameling opgaven (waaronder relatief veel examenopgaven vwo B1), en het feit dat achterin het boek in veel gevallen niet alleen de antwoorden maar ook de uitwerkingen staan. De lezer krijgt zo ruim de gelegenheid om na te gaan of hij de aangereikte theorie onder de knie heeft. De historische uitstapjes die over de tekst zijn verspreid en in een kader zijn geplaatst, verlevendigen het geheel. Aan het eind van het boek is er een appendix met onder andere een overzicht van veel gebruikte eerste afgeleiden en primitieve functies en een korte samenvatting van de verzamelingenleer. Tot slot is er interessante informatie te vinden op de website die bij het boek hoort: www.kansrekening.nl.

Zelf vond ik met name het laatste hoofdstuk over limietstellingen een mooi hoofdstuk. In kort bestek worden de empirische en wiskundige wetten van grote aantallen, de zwakke en sterke wet van grote aantallen en uiteraard de Centrale Limietstelling in onderlinge samenhang besproken. Maar ook de overige hoofdstukken zijn zeer de moeite waard. Zo komen in de hoofdstukken 6 (Discrete verdelingen) en 7 (Continue verdelingen) verscheidene specifieke kansverdelingen

aan bod zoals onder meer de binomiale, de hypergeometrische en de normale verdeling. Jammer dat er blijkbaar geen ruimte meer was voor een bespreking van de Poisson-verdeling die voor economische en bedrijfskundige studies van belang is. Al met al een naar mijn mening zeer geslaagde uitgave voor het onderwijs ten aanzien van het onderwerp kansrekening.

Over de doelgroep

Niettemin wil ik ook een aantal kanttekeningen bij dit boek plaatsen. Als hbo-docent is mijn insteek vooral de bruikbaarheid van het boek binnen deze onderwijssector. Ik kan me goed voorstellen dat het boek bruikbaar is voor bijvoorbeeld een lerarenopleiding wiskunde, een opleiding als bedrijfswiskunde en voor diverse technische opleidingen, kortom voor opleidingen waar relatief veel aandacht geschonken wordt aan het vak wiskunde. Als het gaat om de niet-exacte opleidingen, zoals bijvoorbeeld de vele soorten economische opleidingen, ben ik toch wat sceptischer. Als wiskundige kiest de auteur voor een tamelijk wiskundige invalshoek en dat is uiteraard zijn goed recht. Bovendien komt het de consistentie in de uitleg zeker ten goede. De keerzijde is dat het boek naar mijn mening minder toegankelijk is voor die studenten die over weinig wiskundige ondergrond beschikken. Zo wordt in hoofdstuk 1, getiteld 'Voorkennis', aardig wat theoretische kennis omtrent de combinatoriek bekend verondersteld. Ik vermoed dat verreweg de meeste studenten van niet-exacte studierichtingen hier zullen afhaken. In paragraaf 2.2, 'Een wiskundig model', is de uitwerking van sommige voorbeelden en opgaven tamelijk formeel. Dit geldt ook voor de bespreking van het begrip voorwaardelijke kans in hoofdstuk 3, 'Voorwaardelijke kans en onafhankelijkheid'. Ik wil mijn punt toelichten aan de hand van voorbeeld 5, onderdeel b, pp. 18-19.

Het betreft het volgende vraagstuk:

In een vaas zitten vijf rode, vier blauwe en drie gele ballen.
 Piet trekt na elkaar, maar zonder teruglegging, vier ballen uit de vaas en let daarbij op de volgorde...

Bereken de kans dat hij twee rode en twee blauwe ballen trekt.

Uitwerking – Vat de vaas op als de verzameling $V = \{R_1, \dots, R_5, B_1, \dots, B_4, G_1, G_2, G_3\}$. De uitkomstenruimte Ω is de verzameling van alle geordende viertallen (a, b, c, d) waarbij a, b, c , en d verschillende elementen uit V zijn. Er geldt $\#\Omega = 12P4 = 11880$. Verder is B de verzameling van alle geordende viertallen (a, b, c, d) bestaande uit twee verschillende elementen R_i en twee verschillende elementen B_j . Er geldt: $\#B = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} = 1440$. De gevraagde kans is dus $P(B) = \frac{1440}{11880} = \frac{4}{33}$.

Een uitwerking die naar mijn mening begrijpelijker zou zijn voor studenten van niet-exacte studierichtingen, zou bijvoorbeeld als volgt kunnen gaan. Een mogelijke uitkomst is RRBB. Omdat het gaat om trekking zonder teruglegging is de kans om RRBB te krijgen, $P(\text{RRBB})$, gelijk aan $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{240}{11880}$. Omdat er $\binom{4}{2} = 6$ manieren zijn om 2 rode en 2 blauwe ballen te ordenen (permuteren), geldt: $P(2R, 2B) = \frac{240}{11880} \cdot 6 = \frac{4}{33}$ (somregel!).

Wanneer je de twee uitwerkingen naast elkaar zet is de overeenkomst zichtbaar. Maar de manier van denken is wel verschillend. De tweede manier vergt minder abstract denkvermogen. In feite wordt in het hele boek een beroep gedaan op een bepaalde mate van abstract denken en ik vermoed dat dit voor een grote groep (hbo-)studenten toch te hoog gegrepen is.

Suggesties ter verbetering

- Op een aantal plaatsen worden symbolen, uitdrukkingen en begrippen geïntroduceerd zonder de betekenis aan te geven. Dit geldt voor pag. 17 (het symbool #; in de appendix wordt dit wel uitgelegd, een verwijzing naar pag. 118 kan dus volstaan), pag. 63 (het begrip parameter) en pag. 73 (het begrip kansmassa).
- Op pag. 10 na ‘... soms genoteerd als nPr’ toevoegen ‘zo betekent bijvoorbeeld $5P4: 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ en $12P4: 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$ ’.
- Op pag. 37, in het kader over Thomas Bayes, worden ‘de regel van Bayes’ en het begrip Bayesiaanse statistiek min of

meer in een adem genoemd. Bayesiaanse statistiek is natuurlijk wel gebaseerd op de regel van Bayes, maar omvat tegelijkertijd veel meer dat.^[2]

- Op pag. 90, bij de voorbeelden 10 en 11, worden de parameters van een normale verdeling gevonden met behulp van een grafisch-numerieke oplossing van de betreffende vergelijking. Hier zou ook de oplossing met behulp van de standaardnormale verdeling vermeld kunnen worden op basis van een z-tabel (die via het internet beschikbaar is). Dit is namelijk een gebruikelijke weg voor veel hbo-studenten.

Neem voorbeeld 11 – Een stochast X is normaal verdeeld met $\sigma = 4$. Bereken μ in één decimaal nauwkeurig, indien gegeven is dat $P(X < 18) = 0,55$.

Uitwerking – Uit de z-tabel volgt dat de z-waarde ongeveer 0,125 is. Dus geldt: $(18 - \mu)/\sigma = 0,125 \Rightarrow \mu \approx 17,5$

Samengevat

Alex van den Brandhof heeft naar mijn mening een mooi boek over kansrekening geschreven maar ik twijfel aan de bruikbaarheid ervan voor niet-exacte opleidingen binnen het hbo.

Noten

- [1] James Franklin (2001): *The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal*. Baltimore (Maryland): The Johns Hopkins University Press.
- [2] Zie bijvoorbeeld: Rob Flohr (2012): *De Bayesiaanse benadering. Basisprincipes en -technieken van de Bayesiaanse statistiek*. Den Haag: Academic Service.

Over de auteur

Rob Flohr is docent statistiek, wiskunde en wetenschapsfilosofie bij het Honours programma van Stenden Hogeschool Leeuwarden en auteur van o.a. *Basiswiskunde voor Statistiek* (Academic Service, Den Haag: 2007) en *De Bayesiaanse benadering* (zie noot [2]). E-mailadres: rob.flohr@stenden.com

Een goed begin is...

SAMENWERKEND LEREN

[Erika Bakker]

Erika Bakker is dit schooljaar gestart met haar LIO-stage wiskunde, als onderdeel van haar Educatieve Master en deelt haar belevenissen met u. In dit nummer de derde aflevering van haar rubriek.

Parallel

Een LIO-contract bestaat uit maximaal zes lesuren. Vanuit de universiteit wordt het een beetje afgeraden om als LIO meer uren te geven. Je moet natuurlijk wel tijd overhouden voor alle opdrachten. Meestal houd ik me netjes aan de regels en adviezen van de opleiding. Toen ik voor de zomervakantie hoorde dat ik een havo-4 klas (wiskunde-B) van drie lesuren per week en een brugklas van vier lesuren per week zou krijgen, vond ik dat dan ook prima. Al snel bleek dat er op school nog een klas over was, een brugklas. Hiermee ontstond voor mij de mogelijkheid om in twee parallelklassen les te geven. Ik heb toen laten vallen dat dit mij wel erg leuk leek en uiteindelijk is er besloten dat ik een extra klas kreeg.

Nu heb ik dus drie klassen en elf lesuren. Als ik aan anderen vertel dat ik twee parallelklassen heb, krijg ik vaak de reactie: dat scheelt wel in je lesvoorbereidingen. Dit is wel een beetje waar, maar ik kan mijn lesvoorbereidingen van de ene brugklas niet zomaar kopiëren naar de andere brugklas. Doordat er in elke brugklas twee andere lessen uit de lessenserie op één dag vallen, denk ik hier altijd nog weer over na. Het lesgeven aan een extra klas kost me dus echt extra tijd, nog afgezien van de extra lesuren. Maar het heeft ook enorm veel voordelen. Zo kan ik iets dat niet zo goed ging in de ene klas, in de andere klas op een andere manier doen. Iets dat wel goed ging, kan ik verder ontwikkelen.



De twee brugklassen zijn erg verschillend. Voor vakdidactiek moest ik in een van mijn lessen de leerlingen laten werken aan een werkvorm die in het teken stond van *samenwerkend leren*. Deze opdracht heb ik in een van mijn brugklassen uitgevoerd. De klas was goed en rustig aan het werk en ik hoefde niet veel vragen te beantwoorden. In mijn andere brugklas durf ik zoiets op dit moment echt niet te proberen. Dan wordt het, denk ik, een enorme chaos. De lessen in deze klas zie ik op dit moment echt als een uitdaging.

Een paar weken geleden was dat precies omgedraaid. Het begon allemaal met het teruggeven van een SO. Het SO was in beide klassen niet zo goed gemaakt. Dit kwam onder meer doordat sommige leerlingen helemaal geen berekeningen hadden opgeschreven. Hieraan had ik tijdens mijn uitleg en tijdens de schriftcontroles heel veel tijd besteed. Tot sommige leerlingen was het nog niet doorgedrongen dat ik inderdaad punten gaf voor de berekening. En dat dit betekende dat, als ze geen berekening hadden opgeschreven, ze deze punten ook niet kregen. In de klas, die nu zo goed en rustig samenwerkt, waren de lage cijfers reden voor een verhitte onderlinge discussie. Een aantal jongetjes rekende zelfs uit wat het gemiddelde in hun rij was. Dat dit gemiddelde een stuk lager was dan het gemiddelde van de klas, drong niet tot ze door. Hun conclusie was dat hun slechte resultaten niet aan henzelf konden liggen met zo'n laag gemiddelde. Dat het aan mij lag, zeiden ze gelukkig nog net niet. Maar het was wel een heel gedoe, waaraan zelfs de mentor van de klas nog even te pas is gekomen. De leerlingen uit de andere klas waren het wel met mijn beoordeling eens en gingen na de bespreking van het SO rustig verder met hun huiswerk. Bij het proefwerk scoorde de klas die zo in opstand was gekomen, gemiddeld een punt hoger dan de andere klas. Alle leerlingen hadden netjes de berekeningen

opgeschreven. Een van de boze jongetjes van het SO nam het zelfs voor mij op door meerdere keren tegen een andere leerling te zeggen: 'Dat heeft ze echt gezegd hoor.' Sindsdien zijn de lessen in die klas weer een stuk prettiger.

Misschien is alles binnenkort wel weer omgedraaid, maar daarom is het juist zo fijn om drie klassen te hebben. Op de drie dagen dat ik lesgeef, heb ik nu steeds drie of vier lessen. Zo is er elke dag wel een les die het slechtste ging, maar ook altijd een les waaraan ik wel een tevreden gevoel overhoud.

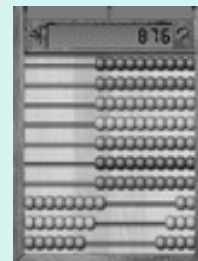
Over de auteur

Erika Bakker studeert aan de Rijksuniversiteit Groningen. In 2010 rondde ze haar Bachelor Wiskunde af. Nu doorloopt ze in het kader van haar Educatieve Master een LIO-traject. E-mailadres: h.b.bakker.1@student.rug.nl

Wiskunde digitaal

FACTOR SAMURAI

[Lonneke Boels]



Geschied voor iPad 2 en iPad 3



Het doel van dit spel is om getallen te scheiden in hun priemgetallen. Bij de opstart van het spel kun je kiezen uit *grasshopper*, *apprentice* en *master*. Het is verstandig om met *grasshopper* te beginnen. Het spel lijkt wel een beetje op het populaire 'Fruit Ninja'.

Het begint eenvoudig met getallen als 2, 4, 5 en 9. Het getal 8 wordt gedeeld in 4 en 2. De 4 moet dus nogmaals worden gescheiden in 2 en 2. Voor elke correcte scheiding krijg je een punt. Als je een fout maakt en een priemgetal wilt scheiden, gaat er een leven af. Je begint met drie levens. Bij twintig punten krijg je er een leven bij (een oranje zwaard). Er zijn ook andere kleuren zwaarden te verdienen zoals geel en groen. Het vierkantje doet een keer alle splitsingen voor je.



Pluspunten

- Het spel is leuk en lijkt op een populair spel dat leerlingen al kennen (Fruit

Ninja).

- Het eenvoudige niveau is langzaam genoeg voor beginners.
- Het is geschikt voor 1e en 2e klas havo/vwo, 2e en 3e klas mavo en voor vmbo klas 3 en 4.
- Er zijn meerdere moeilijkheidsgraden waarop je kunt beginnen (*grasshopper*, *apprentice* en *master*).
- Het oefent echte wiskunde in een echt spel.
- Het is geschikt om met twee of drie leerlingen te spelen. De een doet dan het spel en de andere kijken toe en proberen te begrijpen wat er gebeurt (punten erbij want goede scheiding; leven eraf want het was een priemgetal).
- Doordat er steeds opnieuw onverwachte dingen gebeuren (extra zwaarden, andere voorwerpen), blijft het uitdagen – zit er nog meer in het spel?

Minpunten

- De afbeelding bij *grasshopper* suggereert dat je dan een baby bent, terwijl je om meer dan 20 punten te halen het concept van priemgetallen goed moet snappen en je bovendien de tafels goed paraat moet hebben. Beslist geen babykennis dus!
- Je kunt niet pauzeren.
- Mede hierdoor is het spel ongeschikt voor vmbo klas 1 en 2.
- Het getal 1 verschijnt ook maar is geen priemgetal.
- De uitleg is in het Engels. Dat is geen groot minpunt want leerlingen snappen het spel zo ook wel.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: € 2,69

Meer informatie over het spel:

- www.thirdrailgames.com/project/factor-samurai/
- <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.jgundersen.android.factorsamurai>

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

Impressies

VAN DE NVvW-DAG 2012

Plenaire lezingen

Goed in rekenen, slecht in talen of andersom

Peter Wisse

[Joke Verbeek]

Aanleiding – Na de openingslezing van de voorzitter was het Pieter Wisse, docent van het jaar in de provincie Zeeland, die de grote zaal in snel tempo deelgenoot maakte van zijn onderzoek naar leerlingen die goed zijn in exacte vakken maar slecht in talen, of andersom. Aanleiding tot het doen van het onderzoek was een onderzoek van het Cito naar eenzijdig getalenteerde leerlingen, waarbij hun conclusie was dat eind groep 8 de jongens het beter doen dan de meisjes, maar dat dat eind vwo 6 juist omgedraaid was.

Wisse had zich afgevraagd hoe dat kwam. Mogelijke oorzaak zou de talige onderbouw kunnen zijn, want jongen zijn meestal degenen met een knobbel voor exact. Omdat er in de onderbouw een nadruk ligt op talen zou het kunnen dat die jongens, met onvoldoendes voor de talen, afstromen naar een lager niveau.

Hij deed een onderzoek op zijn eigen school – het CS Walcheren in Middelburg – en stelde vast dat van de talige leerlingen 38% onvertraagd in het vwo belandde, maar van de rekenaars slechts 15%. Dat is een significant verschil.

De diepte in – Wisse ondervroeg daarop aan aantal eenzijdig getalenteerde (oud) leerlingen, met name over hoe zij de selectieprocedure hadden ervaren. De jongelui vertelden ook op videofilmpjes hoe het hun verder was vergaan.

Hoewel Wisse zich realiseert dat hij slechts een kleine groep heeft bekeken, heeft hij toch een aantal conclusies getrokken.

1. Doorstromen naar een lager niveau is geen oplossing voor eenzijdig getalenteerde leerlingen.
2. Eenzijdig getalenteerde leerlingen beheersen van de vakken waarvoor zij het talent missen, zelfs de meest elementaire vaardigheden niet.
3. Eenzijdig getalenteerde leerlingen ontwikkelen de talenten waarover zij wel beschikken, niet op het hoogste niveau.

Vooraf de tweede conclusie was voor hem een eye-opener geweest: hij had zich tot

dan toe niet gerealiseerd hoe weinig een rekenzwakke leerling wist en daarmee hoe weinig die van zijn uitleg kon begrijpen. Een voorbeeld op de video was een rekenzwakke havo-5 leerling die vertelde dat ze in haar winkelbijbaantje in het begin niet wist hoe om te gaan met het wisselgeld.

Het resultaat – Deze conclusies brachten hem tot een tweetal stellingen:

- Het Nederlands onderwijsstelsel is nadelig voor eenzijdig getalenteerde leerlingen, en,
- Maatschappelijk gezien is het zonde dat talenten niet geheel benut worden.

Uit de zaal komt de vraag om een oplossing, maar die heeft Wisse niet. 'Ik ben een onderzoeker', zegt hij, 'Het is aan anderen oplossingen te bedenken.' Wel was hem duidelijk dat het voor leerlingen met talenten vaak wel mogelijk was in het buitenland te excelleren.

Gezien de reacties uit de zaal heeft Wisse met zijn conclusies wel een aantal collega's aan het denken gezet. Wie weet komt een van hen een volgende keer met een oplossing.

Zandstrooisels

Tom Goris

[Joke Verbeek]

De afsluitende presentatie werd verzorgd door Tom Goris. Hij koppelde zijn hobby's: Iran, zand en muziek aan zijn werk, wiskunde. In Iran zag hij een zandkunstenaar mooie patronen strooien waar hij wiskundige vormen in zag. Als de zandstrooisels af waren, werden de toeschouwers uitgenodigd om ze kapot te dansen. Tom richtte een stichting op, Zayandeh, bedoeld om de kunstenaars, maar ook anderen in Iran, te ondersteunen. Deze stichting heeft inmiddels de Fontys Onderwijsprijs gewonnen. Van de website van Fontys:

Door zijn voortdurende professionele aandacht in dit project (Stichting Zayandeh, web-editor) heeft Tom het vak wiskunde uit een isolement gehaald en verbindingen met verrassende combinaties op het terrein van de Islamitische kunst gelegd. Het project heeft grote onderwijskundige, culturele en maatschappelijke waarde.

De presentatie werd ondersteund met prachtige beeldmateriaal en afgesloten met

een oproep om vooral lid te worden van Zayandeh.

Werkgroepen

A2 – De OnderbouwWiskundeDag

Vincent Jonker, Monica Wijers

[Thomas van Berkel]

De OnderbouwWiskundeDag wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut voor leerlingen van 3-havo en 3-vwo en is vergelijkbaar met de wiskunde Olympiade en wiskunde B-dag. De leerlingen worden uitgedaagd om, in een groepje van drie of vier, te werken aan een open probleem en mogen dit tijdens een hele dag proberen op te lossen. Bij deze opdracht zijn meerdere antwoorden mogelijk, en de laden van de wiskundige gereedschapskist kunnen allemaal worden geopend. Het eindresultaat wordt door de leerlingen verwerkt tot een werkstuk. Het beste werkstuk van de school kan worden ingezonden en uit de inzendingen wordt een winnaar gekozen die een mooie prijs wint.

Tijdens de workshop, verzorgd door Vincent Jonkers en Monica Wijers, werd duidelijk wat de reden van deze extra wiskunde-dag is: de leerlingen leren veel wiskunde in het derde jaar, maar passen dit te weinig gecombineerd toe. Tijdens de wiskunde-dag krijgen de leerlingen inzicht in het kiezen van wiskundige vaardigheden in verschillende situaties.

De OnderbouwWiskundeDag staat nog in de kinderschoenen en is vorig schooljaar met een pilot gestart. De resultaten van deze pilot werden gedeeld tijdens de workshop en er werd een inzicht verschaft in de totstandkoming van de opdrachten. Docenten die meededen met de pilot, gaven aan dat de beginopdrachten een goede instap waren naar de mooie open opdracht en dat de omvang van de opdracht aansloot bij de geplande tijd. Op wiskundig niveau valt er nog terrein te winnen; de opdracht was te meetkundig en had nog uitdagender gekund. De enthousiaste feedback van de leerlingen en de zin 'best te doen, een hele dag wiskunde' waren goed om te horen. De leerlingen gaven aan moeite te hebben met het schrijven van een verslag aan het einde van de opdracht; een goede reden om extra te oefenen.

Om te zien hoe een opdracht ontstaat,

werd er gevraagd of er een opdracht verzonden kon worden bij vier wiskundige voorbeelden. Twee van de vier voorbeelden waren de Pythagoras-boom en de medailliespiegel van de afgelopen Olympische Spelen. Een geschikte opdracht hierbij verzinnen bleek een lastig karwei, waaruit bleek dat de mensen van het Freudenthal Instituut knap werk verrichten. Een workshop die het enthousiasme over de OnderbouwWiskundeDag, maar ook over de A-ympiade en de Wiskunde B-dag, opriep.

A3 – Prooi-roofdierenmodellen

Sjoerd Andringa, Philip van Egmond

[Zwaantje Warmelink]

Het Junior College Utrecht (JCU) is een samenwerkingsverband tussen de Universiteit Utrecht en 25 scholen uit de regio. Het JCU is bedoeld voor in de bèta-vakken getalenteerde, gemotiveerde leerlingen uit klas 5 en 6 vwo. Eén dag per week komen deze leerlingen naar Utrecht voor een verdieping en verrijking van hun exacte vakken.

Sjoerd Andringa en Philip van Egmond hebben ons in de werkgroep een voorbeeld laten zien van een vakoverstijgende module van het JCU: populatiedynamica. Deze module beslaat 8 studielasturen. In de presentatie kregen we een beschrijving, en tussendoor konden we zelf een aantal onderdelen uitproberen.

In de module onderzoeken de leerlingen hoe een populatie schapen en wolven zich ontwikkelt, eerst door geen randvoorwaarden te geven, maar gaandeweg door steeds verder de realiteit te benaderen. De module eindigt met een aantal verdiepingsmogelijkheden.

Werken met prooi-roofdiermodellen deed en doe ik binnen de vwo-wiskundelessen al: in het A12-programma besteedde ik er aandacht aan bij het behandelen van differentievergelijkingen en ook nu, bij het onderwerp matrices voor wiskunde C, bestuderen mijn leerlingen met behulp van Excel een konijnenpopulatie, die door vossen belaagd wordt.

Het interessante van de module van het JCU vind ik, dat er veel verschillende aspecten aan de orde komen: niet alleen de wiskunde, maar ook werken met Excel, en modelvorming vanuit de biologie. Mooi vind ik om te zien dat leerlingen zelf, door goed te kijken, hun model op biologische gronden steeds verder verfijnen en aanpassen.

Zoals altijd op een studiedag, heb ik in deze werkgroep weer inspiratie (en materiaal) gekregen om mijn lessen uitdagender te

maken. Ik ga er zeker wat van gebruiken. Het lesmateriaal is te vinden op: « www.betadifferentiatie.nl/excellentie ».

A5 - Hoe schiet je op (met) een zebra?

Peter Kop, Marjan Botke, Rob van Oord

[Erika Bakker]

Voordat ik naar deze workshop ging, had ik niet veel ervaring met Zebra-boekjes. Zelf heb ik, toen ik op de middelbare school zat, mijn profielwerkstuk over Wiskunde en Muziek gemaakt met het boekje 'De juiste toon'. Dat was in 2006. Nu heb ik als LIO in mijn lessen eigenlijk geen tijd om een Zebra-boekje met de leerlingen door te werken.

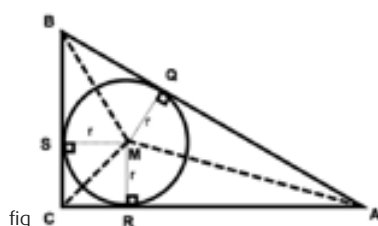
In de workshop hebben we een aantal voorbeelden bekeken, waarbij een Zebra-boekje als basis voor een les wordt gebruikt. De workshopleiders hadden bij een aantal boekjes één à twee A4'tjes met tekst en opdrachten gemaakt. In groepjes hebben we een aantal van de werkbladen doorgewerkt en tenslotte besproken. Ik heb bij deze workshop geleerd dat je een Zebra-boekje niet in z'n geheel hoeft door te werken, maar dat je door er een bepaald aspect uit te lichten ook een verrassende les kunt geven.

A6 - Legoman haalt het beste uit leerlingen

Desiree van den Boogaart

[Joke Verbeek]

Desiree, 10 jaar ervaring in het vo-onderwijs, nu docente op de Hogeschool Amsterdam, wilde een werkvorm van samenwerkend leren die in te zetten is bij een wiskundeles, verduidelijken. De inspiratie voor deze werkvorm haalde ze uit een opdracht die zijzelf ooit kreeg, waarbij aan een groep van vier gevraagd werd om een mannetje van legosteentjes zo snel mogelijk na te bouwen. Dat mannetje bevond zich in een andere ruimte dan de deelnemers en de groepsleden mochten allemaal één keer gaan kijken hoe hij eruitzag. Daarmee voldeed de opdracht aan de voorwaarden van een groepsoopdracht: afhankelijk zijn van elkaar, de noodzaak tot communicatie en het wedstrijdelement. Deze werkvorm heeft zij toegepast op wiskundelessen, en met succes.



Zelf aan de slag – De werkgroepleden ondervonden aan den lijve de motiverende werking die uit kan gaan van een goedgekozen samenwerkingsopdracht. Elk groepje van vier kreeg een kaartje met daarop een rechthoekige driehoek met bissectrices, ingeschreven cirkel en loodlijnen (*zie figuur 1*).

Oopdracht was om met elkaar het bij dat plaatje behorend bewijs voor de stelling van Pythagoras te vinden. Een willekeurig gekozen deelnemer zou dat gevonden bewijs na 30 minuten aan de werkgroepleden gaan presenteren.

Op de gang hingen aanwijzingen die zouden kunnen helpen het bewijs te vinden. Ieder groepslid mocht één keer gaan kijken.

Elke groep ging behoorlijk fanatiek aan de slag en probeerde zonder te gaan kijken een bewijs te vinden. De 'juf' beperkte zich tot het bijhouden van de tijd en het aanbevelen om wél op de gang te gaan kijken, al was het maar om je eigen idee te toetsen. De 30 minuten waren hard nodig voor het vinden van het bewijs en te zorgen dat elk groepslid het zou kunnen reproduceren. Uit diverse groepjes klonk een zucht van verlichting als dat gelukt was.

Inzetten in de les – Aan het uitleggen van het bewijs hebben de werkgroepbezoekers zich niet gewaagd, wel aan het nabespreken van de samenwerkingsvorm. Desiree legde uit dat er in een klas een veilige situatie moet blijven: de willekeurig gekozen leerling die de beurt krijgt om de opdracht voor het bord uit te leggen, moet weten dat hij hulp kan vragen aan zijn groepsgenoten, of dat een ander het van hem gaat overnemen als hij er niet uitkomt. Ook de keuze van de opdracht moet goed zijn; de leerlingen moeten het idee krijgen dat ze het wel kunnen, alleen dan zijn ze gemotiveerd.

De werkvorm is heel geschikt om te gebruiken in een klas waar een bewijs moet worden doorgenomen. Deelnemers zagen meteen ook andere mogelijkheden, zoals het samen laten maken van een proeftoets waarbij de uitwerkingen op de gang hangen.

A7 - Wiskundige denkactiviteiten

Piet Versnel

[Bert Wikkerink]

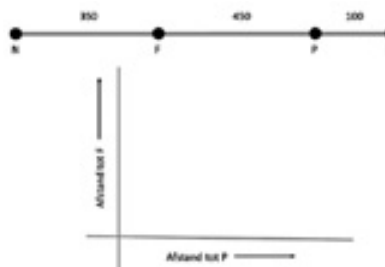
De belangstelling is vrij groot: ongeveer dertig deelnemers volgen deze workshop. Piet Versnel begint met een inleiding waarin hij iets vertelt over het nieuwe vwo-examenprogramma wiskunde A en C. Hij geeft zelf les aan een van de pilotscholen

voor dit programma.

Wiskundige denkactiviteiten zijn een onderdeel van het nieuwe examenprogramma.

Aan de hand van een groot aantal voorbeelden maken we kennis met denkopgaven variërend van niveau. Een daarvan was de volgende.

Iemand legt het traject N-F-P-H af (*zie figuur 2*).



figuur 2

» Teken nu een grafiek waarin verticaal de afstand tot F en horizontaal de afstand tot P wordt uitgezet.

In het huidige programma worden ingewikkelde opgaven vaak opgesplitst in deelopdrachten die je in de aangeboden volgorde moet maken. Dezelfde opgave kan veranderen in een denkactiviteit als de deelopdrachten worden weggelaten en alleen de eindvraag wordt gesteld.

In het tweede deel van de workshop gingen we in groepjes zelf aan de slag. Voor verschillende situaties konden we vragen verzinnen voor leuke denkactiviteiten. Dat leverde geanimeerde discussies op. Tot slot werden nog de uitkomsten van de groepjes met elkaar besproken.

Al met al een boeiende workshop waarin een duidelijk beeld werd gegeven van wat we onder wiskundige denkactiviteiten moeten verstaan.

B3 - Basiskennis toekomstige wiskunde-docenten getoetst

Nelly Michon

[Harm Bakker]

Enige tijd geleden hebben de tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde hun minimumeisen vastgelegd in de Kennisbasis Wiskunde. Zowel vakdidactische als vakinhoudelijke zaken zijn hierin opgenomen.

Een van de onderdelen waarmee studenten moeten laten zien dat ze aan de eisen voldoen, is een kennistoets over alle wiskundestof die in de opleiding wordt

aangeboden. Op dit moment wordt een pilot uitgevoerd met deze toetsen, die op alle opleidingen worden afgenomen.

In de workshop wordt de organisatie rond deze toetsen uiteengezet en kijken we naar een aantal opgaven. De toets bestaat uit 60 vragen die in twee klokuren moeten worden afgewerkt. Doordat alleen basiskennis wordt getoetst en een deel van de vragen meerkeuze is en de rest een enkel antwoord vraagt, lijkt de beschikbare tijd niet een echte belemmering te zijn.

De deelnemers aan de workshop zetten vraagtekens bij het niveau van de opdrachten. Mevrouw Michon benadrukt dat het hier gaat om parate kennis over stof uit alle leerjaren. Bovendien betreft het studenten die op het vmbo en in de onderbouw havo/vwo les zullen gaan geven. Beheersing van wiskunde op een hoog niveau heeft voor deze doelgroep geen prioriteit.

Meer discussie ontstaat over de cesuur. In de pilot is die gelegd bij 50% van de opgaven. De mening van de deelnemers is dat dit wel erg laag is: studenten kunnen slagen voor deze toets, ook al hebben ze van een aantal deelgebieden van de wiskunde geen enkele vraag correct beantwoord.

Hoe in de toekomst de kennisbasis en in het bijzonder de kennistoets zal functioneren, zal moeten blijken. De opleidingen hopen dat ze op deze wijze de dreiging van centraal vastgestelde domeintoetsen kunnen afwenden, zodat elke opleiding zijn eigen accenten kan blijven leggen.

C1 - Rekenen in andere vakken

Mieke Abels

[Erika Bakker]

Bij mij op school moet een groot deel van de leerlingen een oefen-rekentoets maken. Leerlingen die deze toets niet goed genoeg maken, krijgen extra rekenles. Ik was daarom benieuwd hoe er bij andere vakken dan wiskunde, aandacht aan rekenen wordt besteed.

De workshop begon met een aantal opdrachten. Hiervan moesten we bedenken voor wie de opdrachten bedoeld waren en of het voor de doelgroep moeilijke opdrachten waren. Dit viel nog niet mee.

Daarna hebben we aan de hand van een aantal opgaven uit verschillende vakken bekeken welke rekenstrategieën er bij

verschillende vakken worden gebruikt. Zo is bij wiskunde een verhoudingstabel een veelgebruikt methode en kun je bij economie niet zonder: 'nieuw min oud gedeeld door oud'. Er zijn nog meer strategieën. Zo kan een dubbele getallenlijn gebruikt worden in plaats van een verhoudingstabel.

Ik heb bij deze workshop geleerd dat er bij verschillende vakken verschillende oplossingsstrategieën worden aangeleerd. Daarom is het goed om af en toe ook te verwijzen naar strategieën uit andere vakken, zodat leerlingen het verband tussen de vakken zien.

C5 - Oefening baart kunst!

Marcel Voorhoeve, Peter Kop

[Joke Verbeek]

Beide werkgroepleiders zijn lid van de Werkgroep HAVO/VWO. Zij gaan in op de vraag hoe we in de rol van wiskundeleraar een bijdrage kunnen leveren aan de resultaten van de rekentoets. Om goed rekenles te kunnen geven is het belangrijk dat je je als docent realiseert dat het beheersen van een vaardigheid – bijvoorbeeld het kennen van de tafels van vermenigvuldiging – verschillende niveaus kent. Het formele niveau, het snel kunnen beantwoorden van een vraag als $6 \times 8 = \dots$, is slechts het topje van de ijsberg. Dat topje haalt zijn drijfvermogen uit de onderste lagen: het concrete niveau en het model- of schemaniveau.

Het is goed om in te schatten op welk niveau de leerlingen zich bevinden. Uiteraard zal dat niet voor elke leerling hetzelfde niveau zijn, dus maatwerk leveren is belangrijk. En het is goed je te realiseren dat voor de rekentoets niet altijd het formele niveau nodig is. Als een leerling is 'blijven steken' in het modelniveau, of zelfs in het concrete niveau, kan hij vaak evengoed de problemen oplossen.

De deelnemers aan de werkgroep waren geïnteresseerd in elkaars ervaringen met rekenlessen en de gebruikte rekenmethodes. Die ervaringen werden uitgewisseld. Een aanrader was volgens bijna iedereen de site « *rekenbeter.nl* », die elke dag via een e-mailbericht vier opgaven geeft.

C6 - Rekentoetsen 2F en 3F

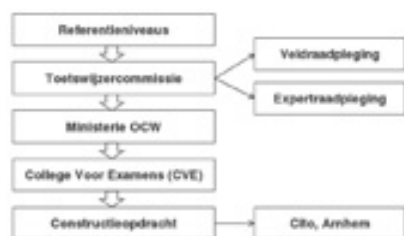
Ernie Schouten, Harco Weemink

[Gerhard Riphagen]

De belangstelling voor deze werkgroep was erg groot. Dat geeft wel aan hoezeer het

onderwerp leeft. Het gaat erom spannen. Ernie Schouten en Harco Weemink, beiden werkzaam als toetsontwikkelaar op het Cito, doen in deze werkgroep uit de doeken hoe het traject is geweest in de richting van de rekentoets. Het is nadrukkelijk niet de bedoeling dat daar nog eens over gediscussieerd gaat worden.

Er wordt uitgelegd hoe men bij het Cito via de referentieniveaus, de Toetswijzercommissie, het College voor Examens (CvE) tot een set opgaven komt voor het 3F- en 2F-niveau, waarbij onderweg ook nog een moment van veldraadpleging en expertraadpleging is geweest; *zie figuur 3*. Er is op dit moment een voorbeeldtoets bekend van zowel het 2F- als 3F-niveau.



figuur 3

In 2012 is er een eerste afname geweest, waarbij de percentages voldoende als volgt waren: BB 16%, KB 44%, TL 72%, havo 28% en vwo 68%. Daarbij moet aangetekend worden dat er voor de leerlingen op dit moment nog niets van afhing. Voor wat betreft de inhoud van de opgaven is het zo, dat er contextloze opgaven zijn (zonder rekenmachine), 20%, en contextopgaven (met rekenmachine), 80%. Verder komen de opgaven – zoals bekend – uit de volgende vier domeinen: *Getallen, Verhoudingen, Meten en meetkunde en Verbanden*.

Tot slot werd ons een twaalfstal opgaven voorgelegd die we moesten maken. Daarbij moesten we ons afvragen: is het een 2F- of 3F-opgave? Maak een schatting: hoeveel van de leerlingen hebben deze vraag goed beantwoord. De resultaten waren soms verrassend, soms verhelderend.

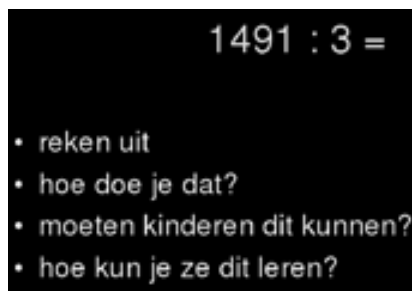
C7 - Samen delen

Willem Uittenboogaard

[Gerhard Riphagen]

'Ze kunnen geen staartdeling meer maken' – dat is een veel gehoorde verzuchting die moet aangeven dat het met het rekenonderwijs op de basisscholen niet best gesteld is. Willem Uittenboogaard,

gepensioneerd pabo-docent en medewerker van het Freudenthal Instituut, laat in deze workshop zien dat daar wel wat genuanceerder naar gekeken kan worden.



figuur 4

De staartdeling, die er bij ons vroeger ingestampt is, kennen wij dan wel, maar als je een YouTube-filmpje ziet waarin een wiskundedocent de staartdeling voor leerlingen van nu nog eens uit de doeken doet (voordoet), kun je je heel goed voorstellen dat ze daar niet veel van begrijpen. Het blijft nog steeds tamelijk lastig en het is niet erg inzichtelijk. Op de basisscholen wordt de staartdeling niet meer geleerd. Is dat erg? Dat valt nog te bezien. Tegenwoordig wordt een deling uitgevoerd door middel van herhaald aftrekken (de hapjesmethode). Dat kan een lange berekening opleveren, maar als het efficiënt gebeurt (en het is de bedoeling dat leerlingen daar handig in worden), is het een korte berekening die niet zoveel afwijkt van de staartdeling, maar voor leerlingen veel inzichtelijker is.

Willem Uittenboogaard heeft als deel van een onderzoek een aantal delingen (die wij vroeger als staartdeling zouden uitvoeren) voorgelegd aan de leerlingen van twee verschillende basisscholen met de opdracht om de sommen te maken op een manier die hun goed leek en zoals zij dat gewend waren (er was geen uitleg vooraf). De resultaten waren verrassend. Geen staartdelingen (uiteraard), maar wel veel (netjes genoteerde) herhaalde aftrekkingen. Sommige vrij lang, maar ook korte, efficiënte. Ook waren er een paar heel eigen originele manieren die tot het juiste antwoord leidden.

Missen we de staartdeling en moeten we die de leerlingen van het voortgezet onderwijs alsnog weer krampachtig aanleren? Uit dit onderzoekje blijkt dat niet. De meeste leerlingen redden zich prima, kunnen met hun berekening aangeven hoe ze tot het antwoord gekomen zijn. En fouten, die er natuurlijk wel tussen zaten, zouden niet voorkomen zijn, wanneer deze leerlingen met een staartdeling zouden moeten werken.

D4 – Het eerste pilotexamen vwo Wiskunde B

Gerard Stroomer, Theo van den Bogaart

[Mieke Thijsseling]

De eerste pilot is geweest, en vastgesteld is dat we beginnen in het schooljaar 2015-2016 in klas 4. Dat geeft ons nog ruim de tijd om aan de vernieuwingen te wennen. De meningen in de zaal zijn verdeeld over dit tempo, sommige zeggen: dat betekent dat de huidige 1e klassers dit examen moeten doen; lopen we al niet een half jaar achter? Anderen melden: waarom wachten tot 2015; kunnen we niet meteen komend jaar in klas 4 starten?

Wat behelst de verandering eigenlijk?

Nieuw zijn de inverse functies, het asymptotisch en limietgedrag van functies. Natuurlijk ook wat kleinere aanpassingen. Grootste aanpassingen zitten bij de meetkunde. Het bewijzen gaat naar wiskunde D, en de vectormeetkunde komt uit D naar B.

Het wordt pas echt leuk als we in de workshop een paar opdrachten krijgen om op te lossen. Dan blijkt dat de meeste docenten gewend zijn om problemen op een standaard manier op te lossen en dat er echt wel alternatieve aanpakken voorhanden zijn.

Ervaringen uit de pilotscholen: er is meer samenhang, maar het geheel is ook beperkter. Het komt niet over als echt revolutionair. Liggen de idealen nu lager of juist hoger? We komen niet tot een eenstemmig oordeel.

Een workshop met veel informatie en zelf doen, precies waarom je naar de jaarvergadering gaat.

Info (red.)

Op de website van de NVvW zijn presentaties, handouts e.d. te vinden. Zie: www.nvww.nl/page.php?id=9138



'De master heeft mijn blik verbreed en ik voel mij beter. Dat heeft een positief effect op de leerlingen.'

Word 1^e-graads docent Wiskunde bij de HAN!

Ontwikkel u op masterniveau tot zelfstandig docent in de bovenbouw havo/vwo en verdiep uw vakspecifieke kennis. Leer vernieuwingen binnen het wiskunde-onderwijs concreet te ontwerpen en in te voeren. Als 2^e-graads docent Wiskunde kunt u in september bij de HAN van start met de Master Wiskunde. Een master bij de HAN, meer dan een goed plan.

**MAAK
GEBRUIK VAN
DE LERAREN-
BEURS!**

**KIJK VOOR DE OPEN DAGEN
OP ONZE WEBSITE**

Programma

- Uitbreiding vakkennis op basis van de landelijke kennisbasis
- Vakdidactische vernieuwingen in het V.O. per 2015
- Praktijkgericht onderzoek
- Masterproject: vernieuwing van leerarrangementen bovenbouw havo/vwo

► HAN

www.han.nl/masters

MASTERPROGRAMMA'S

HAN Masteropleidingen zijn door de NVAO geaccrediteerd

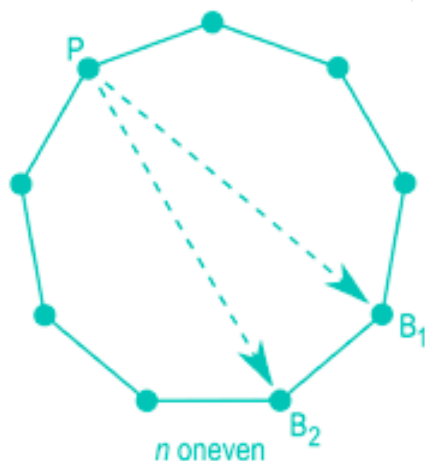
[Wobien Doyer, Lieke de Rooij en Jeroen Winkel]

Deze puzzel is naar een idee van Jeroen Winkel. Jeroen is leerling 5-vwo van het Stedelijk Gymnasium Nijmegen en zit in de selectie voor de IMO-2013. Hij bedacht een opgave waarbij het betreffende jaartal een grote rol speelt, zoals dat wel vaker het geval is bij IMO-opgaven. We hebben er nog enkele variaties aan toegevoegd.

Er zijn wel verwante opgaven bekend. In *Pythagoras* (september 2008: Problemen) stond het probleem van de Heksenkring: De getallen 1 t/m n moeten in een kring worden geplaatst, zodat elk getal een deler is van het verschil van de kwadraten van $z'n$ directe burenen.

Een andere welbekende opgave is: n kinderen staan in een kring en de leeftijd van elk kind is het gemiddelde van de leeftijd van $z'n$ directe burenen. Bewijs dat alle kinderen even oud zijn.

Voor deze puzzel 88-4 bespieden we de overburen. We plaatsen de getallen 1, 2, 3, ..., n op de hoekpunten van een regelmatige n -hoek, zodanig dat elk getal een deler is van de som van twee overburen. Voor n oneven zijn dat voor elk punt P de twee punten (B_1 en B_2) die het verst afliggen van P . Voor n even zijn dat de twee punten (B_1 en B_2) met de op een na grootste afstand tot P . Dat zijn dus de echte burenen van de enige echte overbuur van P ; zie *figuur 1*.



figuur 1

Opgave 1

Bepaal alle op spiegelingen en rotaties na verschillende oplossingen voor $n = 4, 5, 6, 7, 8$ en 9 .

Opgave 2, de opgave van Jeroen

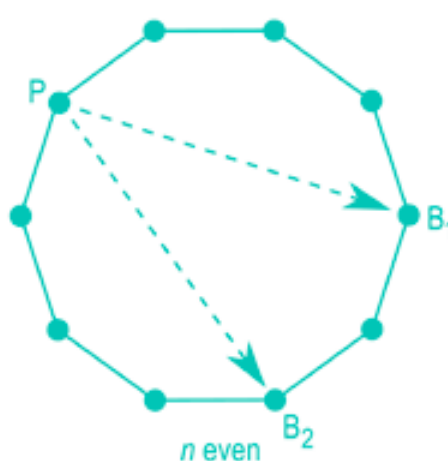
a. Toon aan dat er een oplossing is voor $n = 2013$.

b. Bewijs of weerleg dat er een oplossing is als je *niet* de getallen 1 t/m 2013 op de 2013-hoek plaatst, maar de getallen 2 t/m 2014.

Opgave 3

Onderzoek en bewijs uw resultaten over het minimaal aantal (of als dat kan, het exacte aantal) op spiegelingen en rotaties na verschillende oplossingen voor $n \equiv 0 \pmod{4}$, $1 \pmod{4}$, $2 \pmod{4}$ en $3 \pmod{4}$, weer met de getallen 1 t/m n .

Dit geeft u dan ook antwoord op de vraag of en hoeveel oplossingen er zijn voor vorig jaar en komende jaren: 2012, 2014 en 2015.



Inzenden oplossingen

Oplossingen kunt u mailen naar liekewobien@hotmail.nl of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen en u kunt weer extra punten verdienen door bruikbare ideeën voor een nieuwe puzzel in te sturen.

De persoon die het hoogst op de ladder staat, ontvang een boekenbon ter waarde van 20 euro.

De deadline is **5 maart a.s.** Veel plezier.

Kruisjes zetten en stroken kleuren

Puzzel 88-2 ging over het zetten van kruisjes op een strook papier. We beginnen met ergens op de strook een kruisje te zetten. Dan verdelen we de strook achtereenvolgens in 2, 3, 4, ... gelijke stukken. Elke keer zetten we er een kruisje bij op de strook. De kunst is om dat zo te doen dat steeds nadat we het n -de kruisje hebben gezet, er in elk van de n gelijke stukken precies één kruisje staat.

Dat klinkt eenvoudig, maar valt nog lang niet mee! In de literatuur is dit probleem bekend als het 18-Point Problem^[1], omdat 18 kruisjes niet lukt! Het is bewezen dat 17 echt het maximum is.^[2,3] Voor een mooi plaatje^[4] van een oplossing voor $N = 17$ zie **figuur 2**.

Wij hebben in de opgaven die naam expres niet genoemd, om te voorkomen dat u een oplossing voor 17 punten op internet zou vinden. Verder hebben we er een paar variaties op gemaakt, die niet op internet te vinden zijn. In de rubriek stond ook nog een wiskundige formulering van het probleem, waarin helaas bij het ter perse gaan van *Euclides* een n veranderd is in een N .

De puzzel werd, gezien het kleine aantal inzenders (slechts 6), en ook gezien opmerkingen die de inzenders maakten, moeilijk en vooral bewerkelijk gevonden. Het bleek lastig om het overzicht niet te verliezen. Bij een klein aantal kruisjes valt het nog wel mee, maar de inzenders waren behoorlijk ambitieus als het om het aantal te zetten kruisjes ging. Daarom wat tips hoe het overzichtelijk te houden.

Als je de stroken op schaal tekent, dan komen voor wat grotere waarden van N de grenzen van de gelijke stukken op sommige plaatsen erg dicht op elkaar te staan. Je kan het overzichtelijker maken door voor een bepaalde waarde van N de Farey-rij F_N van alle vereenvoudigde breuken met noemer $\leq N$ in oplopende volgorde te gebruiken en de getallen uit die rij op gelijke afstanden te zetten op ruitjespapier. Als je die rij voor een bepaalde waarde van N hebt, kan je

gemakkelijk de rij voor $N + 1$ vinden: steeds als in de oude rij de breuken a/b en c/d naast elkaar staan en er geldt dat $b + d = N + 1$, moet je daartussen een breuk $(a + c)/(N + 1)$ invoegen. Voor de theorie hierachter kunt u zoeken op internet onder *Farey sequence*.

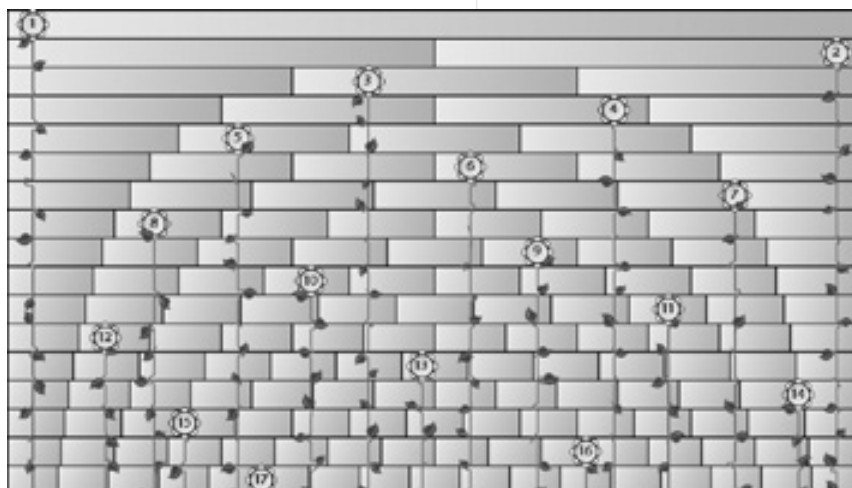
Dit is handig omdat voor de eisen die we stellen alleen van belang is tussen welke twee breuken uit deze rij een kruisje gezet wordt.

Onder de lijst met breuken (je kan ook volstaan met alleen de noemers) kan je lijnen tekenen, voor elk kruisje één, en op die lijnen zet je streepjes, op de tweede bij noemer 2, op de derde bij noemers 3, op de n -de bij noemers n of delers van n . Zo heb je een schema waarin je verschillende mogelijkheden voor de kruisjes x_1 t/m x_n kunt uitproberen, tot het niet meer lukt. **Gerhard Riphagen** deed dat door pepernoten te gebruiken voor zijn kruisjes, zodat hij ze gemakkelijk kon verschuiven.

Het is niet zo moeilijk te bewijzen dat in elke oplossing de punten zodanig verwisseld kunnen worden dat x_1 helemaal vooraan komt, in het interval $(0, 1/N)$, en x_2

helemaal achteraan in het interval $((N - 1)/N, 1)$. Dat scheelt alweer twee kruisjes waarover je verder niet hoeft na te denken.

Opgave 1 – Hier geldt de extra eis dat de oneven kruisjes in de linkerhelft van de strook gezet moeten worden en de even kruisjes in de rechterhelft. De opdracht was om zoveel mogelijk kruisjes te zetten. Die extra eis beperkt het aantal mogelijkheden. Dat blijkt tot gevolg te hebben dat het maximum dat gehaald kan worden nu niet 17 is, maar ‘slechts’ 13. Het puzzelen wordt door die extra eis ook overzichtelijker. Je kan het probleem daardoor apart oplossen voor de linker en voor de rechter helft van de strook. Links heb je alleen te maken met de oneven kruisjes, en je moet die zo zetten, dat na het zetten van x_n niet alleen in elk n -de deel in de linker helft precies één kruisje staat, maar ook in elk $(n + 1)$ -de deel. De vraag waar in het rechter deel de even kruisjes komen is daarbij nog niet aan de orde. Op vergelijkbare manier kan je een oplossing zoeken voor het rechter deel zonder te hoeven weten waar de kruisjes in het linker deel staan. Vier inzenders slaagden erin om het maximum van 13 kruisjes te halen.



figuur 2

[Wobien Doyer en Lieke de Rooij]

Een voorbeeld van een oplossing:

x_1 in $(0, 1/13)$, x_2 in $(12/13, 1)$, x_3 in $(6/13, 1/2)$, x_4 in $(8/11, 3/4)$, x_5 in $(2/9, 3/13)$,
 x_6 in $(4/7, 7/12)$, x_7 in $(4/11, 3/8)$, x_8 in $(9/11, 5/6)$, x_9 in $(1/9, 2/13)$, x_{10} in $(7/11, 2/3)$,
 x_{11} in $(3/11, 4/13)$, x_{12} in $(11/13, 11/12)$ en x_{13} in $(5/13, 6/13)$

Opgave 2 – Hier lieten we de extra eis weer vallen. Het ging om oplossingen voor $N = 6$ en $N = 7$. Je kan als je een oplossing hebt de kruisjes nog een klein beetje heen en weer schuiven zonder de voorwaarden te schenden. Je kan de delen van de strook kleuren waarover de kruisjes kunnen schuiven (begrensd door de getallen uit de Farey-rij F_N). De opdracht was om voor $N = 6$ en $N = 7$ de oplossing te zoeken zodat het gekleurde deel zo groot mogelijk is.

Hier is het juist weer wel handig om een tekening op schaal te maken. Je kan dan beter inschatten hoe groot de intervallen zijn. Het is hier, door de relatief lage waarde van N , ook geen groot probleem om een goede tekening te maken.

Bij $N = 6$ is het maximum voor het gekleurde deel $49/60$; dit wordt bijvoorbeeld gehaald bij de oplossing:

x_1 in $(0, 1/6)$, x_2 in $(5/6, 1)$, x_3 in $(2/5, 1/2)$, x_4 in $(2/3, 3/4)$, x_5 in $(1/5, 1/3)$ en x_6 in $(1/2, 2/3)$

Bij $N = 7$ is het maximum $27/35$; dit wordt bijvoorbeeld gehaald met de oplossing:

x_1 in $(0, 1/7)$, x_2 in $(6/7, 1)$, x_3 in $(3/7, 1/2)$, x_4 in $(3/5, 2/3)$, x_5 in $(1/5, 2/7)$,
 x_6 in $(5/7, 5/6)$ en x_7 in $(2/7, 3/7)$

Bijna alle inzenders wisten deze maxima te vinden.

Opgave 3 – Dit was het ‘echte’ 18-Point Problem. Zonder extra voorwaarden moesten zoveel mogelijk kruisjes gezet worden. Er blijken maar liefst 1536 (768 afgezien van symmetrie) verschillende oplossingen te zijn. Gerhard Riphagen slaagde er als enige in met de hand het maximum van 17 kruisjes te halen. Twee andere inzenders vonden dat maximum door een computerprogramma te schrijven dat het zoekwerk deed. Dat is natuurlijk altijd een toegestaan hulpmiddel. Overigens, het schrijven van dat programma valt nog lang niet mee!

Diverse inzenders vroegen zich af of het zoekwerk nog vereenvoudigd kan worden door meer systematiek in het probleem te vinden. Wij hebben daar natuurlijk ook naar gezocht en ook het een en ander gevonden. Het lukt niet om dat binnen de grenzen van deze pagina te behandelen. We verwijzen voor de liefhebbers daarom naar een uitvoerigere bespreking die geplaatst zal worden op de website van de NVvW (zie noot 5).

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

K. van der Straaten 80

J. Verbakel 73

H. Bakker 70

L. Pos 59

G. Riphagen 58

T. Kool 57

J. Remijn 49

K. Verhoeven 44

W. van den Camp 43

H.J. Braskamp 36

De ladderprijs is gewonnen door Kees van der Straaten. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

Noten

- [1] H. Steinhaus (1964): *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. Mineola (NY): Courier Dover Publications.
 Ons probleem heet daarin: Distribution of numbers.
- [2] E.R. Berlekamp, R.L. Graham (1970): *Irregularities in the distributions of finite sequences*. In: *Journal of Number Theory* 2; pp. 152-161.
 Het artikel is als pdf te downloaden via: www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022314X76900020
- [3] M. Warmus (1976): *A supplementary note on the irregularities of distributions*. In: *Journal of Number Theory* 8; pp. 260-263.
 Het artikel is als pdf te downloaden op: www.sciencedirect.com/science/journal/0022314X/8/3
- [4] Bron: Irregularity of distributions (op Wikipedia, user Timwi): http://en.wikipedia.org/wiki/Irregularity_of_distributions
- [5] Het bestand is te downloaden via: www.nvvw.nl/media/files/werkgroepen/euclides/recr884.pdf



Waaraan doen we als NVvW mee?

In haar jaarrede 2012^[1] zei Marian Kollenveld onder (veel) meer: 'Het is de gewoonte om u in deze rede mee te nemen langs een aantal activiteiten. Het leek ons dit jaar wel aardig om u nu eens een min of meer totaal overzicht te geven. U vindt het in het begin van het programmaboekje.' Onderstaand vindt u hetzelfde overzicht.

Vertegenwoordigend, extern

activiteit	bestuurslid/contactpersoon
1. CvE	bindende voordracht
2. cTWO	Christiaan Boudri, lid
	Marian Kollenveld, dagelijks bestuur
	in elke commissie leraren op voordracht
3. Syllabuscommissie 2015+	in elke commissie leraren op voordracht
4. Platform Bèta-vernieuwing (SLO)	Henk van der Kooij
5. SLO	Kees Lagerwaard
6. Redactie Zebra-boekjes	Peter Kop, voorzitter
7. Bestuur Stichting Epsilon (uitgever)	Gert de Kleuver, Henk Rozenhart
8. Taakgroep Nationale PR-medewerker wiskunde	opgegaan in PWN (zie 11)
9. Programmacommissie Vakantiecursus	Marian Kollenveld, voorzitter
10. WiVa en Registerleraar.nl	Marianne Lambriex
11. PWN	Marian Kollenveld, Paul Drijvers, bestuursleden
12. PWN-OCW, onderwijscommissie van PWN	Gerard Jeurnink, voorzitter
13. Overleg NVON	Kees Lagerwaard, secretaris
14. Contact NVORWO	Marian Kollenveld
15. Contacten FIsmc, APS, SLO	Marian Kollenveld
16. Contacten OCW en politiek	Marian Kollenveld
17. Platform VVVO	Henk Rozenhart
18. Rekencommissies	leden op voordracht
19. KWG	Kees Lagerwaard
20. Vakbond FvOv	Henk Rozenhart, Dick Ottenbros
21. Tweedegraads lerarenopleiders	Douwe van der Kooij
22. Vadiwulo	Douwe van der Kooij
23. Resonansgroep Nationale Kennisbank Vaardigheden (afgerond)	Henk Rozenhart
24. Resonansgroep Rekenlijn (afgerond)	Marianne Lambriex
25. RekenVOort (afgerond)	Gert de Kleuver
26. Veldlegitimering Kennisbasis voor lerarenopleidingen (afgerond)	Marianne Lambriex, Henk van de Kooij
27. Jury WiskundeScholenPrijzen	afgerond, maar wellicht komt er een vervolg
28. Pilot Open leermiddelenbank, project van de VO-raad samen met OCW	afgerond; nader te bepalen rol in het vervolg

Eigen zaken, intern

activiteit
1. Bestuursvergadering
2. Van de bestuurstafel (Euclides)
3. Dagelijks bestuur (db)
4. Administratie, boekhouding
5. 'Winkeltje' e.d.
6. Werkgroep HBO
7. Werkgroep VMBO
8. Werkgroep HAVO/VWO
9. Werkgroep GRWO (historie)
10. Werkgroep MTO
11. Werkgroep jaarvergadering
12. Examenbesprekingen
13. Website
14. Restyling Euclides
15. Twitter/PR
16. Euclides
17. PR-commissie
18. Wereldwiskunde Fonds
19. Werkgroep didactiek
20. Bovenbouwwerkgroep NVON
21. Nomenclatuurcommissie
22. Wisbase/Wisclass
23. VVWL
24. Veldonderzoeksaanvragen (o.a. SLO)
25. Olympiade en Kangoeroe
26. Raad van Wijzen
27. Webmastersoverleg
28. Te plannen activiteiten e.d.
29. Werkgroep lustrum



Hoe kijk je een examen na?

[Ab van der Roest]

Een prangende vraag voor menig wiskundedocent. Docenten met veel of met weinig ervaring worstelen hiermee. Om hen te ondersteunen organiseert de NVvW jaarlijks de examenbesprekingen. Na een centrale bijeenkomst worden er regionale bijeenkomsten belegd waar docenten elkaar ontmoeten en het examen bespreken, elkaar vragen voorleggend hoe een bepaalde opgave nagekeken moet of kan worden. Alternatieven worden besproken en met elkaar gewogen. Menig jonge collega is op zo'n bijeenkomst gevormd als het gaat om het nakijken van examens.

Dit jaar zullen er **geen regionale examenbesprekingen** zijn.

De wiskunde-examens zijn op twee dagen geconcentreerd (havo op vrijdag 17 mei; vwo en vmbo-KB/GL/TL op woensdag 22 mei) en voor de correctie is tijd nodig. Omdat veel docenten meerdere soorten wiskunde geven, is de verwachting dat er geen tijd is om een regionale bespreking te bezoeken.

Om toch te voorzien in de behoefte om collega's te ondersteunen bij het soms lastige werk van examens corrigeren, organiseert de NVvW een drietal **regionale cursussen** op donderdag 11 april 2013.

Ervaren en minder ervaren collega's bekijken samen een aantal oude examenopgaven (wiskunde A en B, havo en vwo) en het bijbehorende correctievoorschrift. Alternatieve oplossingen worden gezocht en gewogen, en valkuilen worden besproken. Ervaringen van correctoren met tweede correctoren worden gedeeld, om zo in mei goed voorbereid aan de opdracht van de correctie te beginnen.

De cursussen worden georganiseerd in Amsterdam, Eindhoven en Veenendaal. Nadere gegevens volgen in het volgende nummer van *Euclides* en op de NVvW-site. Om zicht te krijgen of we voldoen in een behoefte wordt je verzocht een **vooraanmelding** te doen.

Verzend daartoe een e-mailbericht aan de contactpersoon, Ab van der Roest:

a.b.vanderroest@gmail.com

Vermeld daarin je naam, het aantal jaren ervaring in corrigeren van examens en de plaats waar je de cursus wilt volgen.

wie
allen
om de beurt
Marian Kollenveld (vz), Kees Lagerwaard (sec),
Gert de Kleuver (pen)
Elly van Bommel, Pim van Bommel
Elly van Bommel, Pim van Bommel
Christiaan Boudri, Henk van der Kooij
Gert de Kleuver, Wim Kuipers, Henk Bijleveld
Henk Rozenhart, Rob van Oord
Christiaan Boudri, Harm Jan Smid
Gert de Kleuver
Marianne Lambriex, Henk van der Kooij
Grada Fokkens, Conny Gaykema
Johan Gademan
Johan Gademan
Johan Gademan
Henk Bijleveld, Gert de Kleuver
Johan Gademan
Wim Kuipers
Douwe van der Kooij
Henk van der Kooij
Marianne Lambriex
Marian Kollenveld, Gert de Kleuver
db
Kees Lagerwaard, Henk van der Kooij
Marianne Lambriex
oproepbaar bij problemen
Johan Gademan, Lennart de Jonge, Erik Korthof
db/secretaris
db/secretaris

Noot

[1] Marian Kollenveld (2012): *Jaarrede 2012*. In: *Euclides* 88(3); pp. 148-151.



22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook www.wruw.nl/page.php?id=7451
en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

In de kalender kunnen alle voor wiskundelaren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (dklingens@gmail.com). Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	26 maart 2013	29 jan 2013
6	14 mei 2013	19 mrt 2013
7	25 juni 2013	29 apr 2013

maandag 11 maart, Utrecht
 Studiemiddag: Rekenproblemen
 Organisatie APS

vrijdag 15 maart, regionaal
2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie Stichting NWO

donderdag 21 maart, op de scholen
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

vrijdag 5 april, RU – Nijmegen
49e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en Radboud Universiteit

donderdag 11 april, regionaal
Correctie cursus
Organisatie NVvW
Zie pag. 211 in dit nummer.

vrijdag 12 april, UvA – Amsterdam
Congres: Leve de wiskunde!
Organisatie KdVI en ILLC

woensdag 17 april, op de scholen
Grote Rekendag
Organisatie FIsmc

zaterdag 20 april, Utrecht (?)
Symposium XIX: Allemaal aansluiten, graag!
Organisatie Werkgroep Geschiedenis
van het Reken- en WiskundeOnderwijs
(voorheen HKRWO)

**vr. 26 en za. 27 april, midden van
het land**
Cursus: Wiskundendidactiek in de praktijk
Organisatie APS

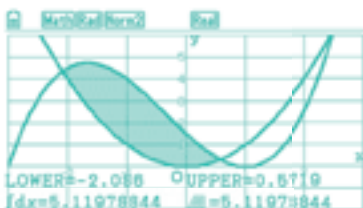
maandag 13 mei, Nijmegen
Nascholing: WiskundeDialog 2013
Organisatie ILS en Radboud PUC of
Science. Zie pag. 180 in dit nummer.

vrijdag 17 mei, op de scholen
CE havo wiskunde A, B (13:30-16:30u)
Organisatie CvE

woensdag 22 mei, op de scholen
CE vmbo-KB/GL/TL wiskunde
(13:30-15:30u)
CE vwo wiskunde A, B en C
(13:30-16:30u)
Organisatie CvE

vrijdag 24 mei, op de scholen
CE vmbo-BB wiskunde (9:00-10:30u)
Organisatie CvE

za. 27 t/m wo. 31 juli, Enschede
Bridges 2013: Mathematics, Music, Art,
Architecture, Culture
Organisatie Universiteit Twente, Saxion
Hogeschool e.a.



Uitdaging:

Kiest u voor de workshop of ontdekt u de *fx-CG20* zelf?

Ontdek de eenvoud van de *fx-CG20* in een professionele Casio Workshop, die op afspraak én bij u op locatie kosteloos zal worden gegeven. Casio Educatief Consulent David Kropveld zorgt er voor dat u zich de werking van de *fx-CG20* in korte tijd eigen maakt. Vele collega's gingen u voor.

- Supersnel resultaat in berekening én weergave.
- Menustructuur op basis van iconen navigatie.
- Hogeresolutie LCD-kleurenscherm 65.000 kleuren.
- Haarscherpe grafieken: weergave als in een studieboek.
- Software voor projectie en presentatie in de klas.

Test u de *fx-CG20* of een andere Casio rekenmachine liever zélf? Maak dan gebruik van een speciaal geprijsd docentenexemplaar.

Kijk in kleur op
www.casio-educatie.nl



3 jaar
garantie

Informeer naar de Casio *fx-CG20* Workshop of bestel uw speciaal geprijsde docentenexemplaar via e-mail: educatie@casio.nl



CASIO *fx-9860GII*

Rekengemak: de grafische rekenmachine *fx-9860GII* met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB groot Flash-ROM-geheugen.



CASIO *fx-82ES PLUS*

Geniale oplossing: de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx-82ES Plus*, met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie. Het puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl

Bent u al voorbereid op de rekentoets?

Rekenen van Moderne Wiskunde is dé uitkomst!



Noordhoff Uitgevers

Met de nieuwe Oefenboeken en Digitrainers Rekenen van *Moderne Wiskunde* brengt en houdt u het rekenniveau van uw leerlingen op peil.

Moderne Wiskunde biedt u volledige doorlopende leerlijnen voor alle leerjaren en alle niveaus. De nieuwe editie voor havo/vwo is reeds verschenen. De nieuwe edities voor vmbo basis en vmbo kader & gt verschijnen begin 2013.

Vijf redenen om te kiezen voor *Moderne Wiskunde Rekenen*:

- Perfecte aansluiting op de rekentoetsen;
- Er zijn aparte delen voor vmbo basis met een lager instapniveau;
- Er is materiaal beschikbaar vanaf klas 1;
- De *Moderne Wiskunde* didactiek wordt in de rekenboeken voortgezet;
- Er is geen overlap met wiskunde.

Wilt u meer informatie over *Moderne Wiskunde Rekenen*? Ga dan naar www.modernewiskunde.noordhoff.nl en vraag een presentatie op school of een beoordelingsexemplaar aan.

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent



Vraag nu een
beoordelings-
exemplaar
aan!

**MODERNE
WISKUNDE**