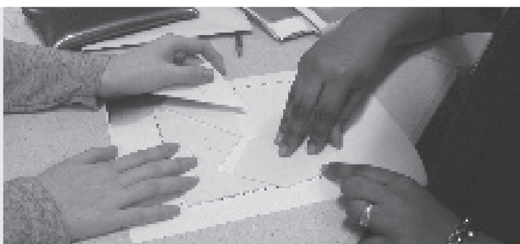
EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 88

nr 2

oktober 2012



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 88

nr 2

oktober

2012

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. E. van Dijk

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

Voornemens

Met de zomer als vage herinnering schrijf ik dit kort vooraf terwijl de herfstbuien over het land trekken. Voor mij een moment om te evalueren of mijn goede voornemens bij de start van het schooljaar wat hebben opgeleverd. Ik zou bijna altijd de fiets naar school nemen – dat was het idee. De eerste drie weken was 'bijna altijd' prima haalbaar. Maar met de omslag van het weer waren er opeens allerlei valide redenen om toch in de auto te stappen. Dat ik dan toevallig ook droog aan kom, is natuurlijk een mooie meevaller… Andere intenties liepen gelukkig iets beter af. Toetsen nakijken lukt binnen een week, collega's die me een berichtje sturen, krijgen 'bijna altijd' per kerende post antwoord en de klassenadministratie zit overzichtelijk in een mapje. En dan had ik er ook nog één uit de categorie activerende didactiek. Mijn repertoire aan interessante werkvormen mocht wel eens afgestoft worden en uit de kast komen. Zo geschiedde. Elke klas heeft minstens één keer theorie/opgaven geoefend buiten het boek. Voor 5-havo stond er een wedstrijd op het programma – met dank aan het artikel van Rob van Oord in dit nummer. Op het moment dat ik de klas binnenstap met mijn opgaven en een zak spekkies, vraag ik me nog even af of dit wel aanslaat, maar binnen een paar minuten is de twijfel weg. Een collega zegt later: 'Ik heb met plezier een tijdje door het raam staan kijken omdat er zo hard gewerkt werd'. Gewoon doen dus.

Inhoud

In deze *Euclides* veel aandacht voor het onderwijs in de onderbouw. Op didactisch gebied kunt u deze hele jaargang bijdragen verwachten van Ton Konings. Artikelen van zijn studenten voor de cursus vakdidactiek Algebra bewerkte hij zodat ze voor een brede lezersgroep aantrekkelijk zijn. In het eerste deel gaat het over het samennemen van gelijksoortige termen; Robert Verheijen zette er zijn ervaringen over op papier. Vol didactische ideeën zit ook Yvonne Killian; Thomas Colignatus interviewde haar zodat u er uw voordeel mee kunt doen. Visueel aan de slag met de stelling van Pythagoras? Joeri van Ast, Inge Verbree en Harrie Broekman laten zien dat getallen en plaatjes prima samengaan om deze eeuwenoude stelling bij leerlingen aan te leren. Op ICT-gebied is er weer een mooie bijdrage van Marc de Hoog. Leerlingen laat hij opdrachten uitvoeren met Google Maps en hij gebruikt de elektronische leeromgeving (ELO) voor de onderlinge communicatie.
Van een heel andere strekking is het eerste deel in de serie *Wiskunde en autisme* van Bram Ahrens en Danny Beckers. Zij laten in de komende nummers zien dat u met deze bijzondere kinderen in de wiskundeles veel kunt bereiken door hun specifieke problemen te leren herkennen en daar op de juiste wijze op in te spelen.

Rubrieken

Met veel plezier kan ik u vertellend dat we er een aantal rubrieken bij hebben. Erica Bakker begon na de zomer met haar LIO-stage en deelt haar belevenissen en ervaringen in *Een goed begin*. En zoals u in het vorige nummer al heeft kunnen zien: we hebben weer een historische rubriek, met dank aan Danny Beckers. Deze keer schrijft hij in *Getuigen* over Isaac Asimov, een geweldige sciencefiction auteur.
Mocht u net als ik toch regelmatig 'buiten het boek' willen werken of op zoek zijn naar een inspirerende praktische opdracht dan kan ik u de nieuwe rubriek van Jacques Jansen aanbevelen. Hij brengt enthousiast *Uitdagende problemen* voor het voetlicht die direct met leerlingen uit te voeren zijn. De aftrap doet hij door een patatzak centraal te stellen – als dat de doelgroep niet aanspreekt...

Tot slot

Nu het buiten kouder wordt, is er wellicht meer tijd en zin om te lezen. U vindt in dit nummer drie boekbesprekingen die uw keuze kunnen beïnvloeden. Mocht u een reden zoeken om de prachtige special van 2012 nog eens door te bladeren, dan geeft Hessel Pot een aanleiding: hij reageert op de 'torentjes'-voorrang waar Dick Klingens indertijd in die special over schreef. Ook de puzzelrubriek doet er alles aan om u binnen te houden; u kunt direct beginnen want het ruitjespapier is al toegevoegd.
Pen en papier is ook nodig bij het vraagstuk van Ton Lecluse; hij geeft echter wél een oplossing voor het geval dat het even niet lukt. En positiever dan die buien is dat in de herfst ook de studiedag in de agenda verschijnt. De stukken voor de vergadering staan op de verenigingspagina's. Er ligt een zeer aantrekkelijk programma klaar, want zoals de organisatie schrijft 'Wiskunde is weer stevig in beeld als een belangrijk schoolvak'.
We hopen u allemaal te zien op zaterdag 3 november in Veenendaal.

Inhoud

Klein vakdidactisch onderzoek Algebra

DEEL 1

[Ton Konings en Robert Verheijen]

Dit artikel is het eerste in een serie van 6 artikelen over 'klein vakdidactisch onderzoek Algebra'. De artikelen zijn geschreven als afsluiting van een cursus Vakdidactiek Algebra [1] aan de 2e graads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen. De deeltijdstudenten, meestal beginnende docenten, schreven een artikel naar aanleiding van ervaringen in de klas. Met de bestudeerde theorie analyseerden ze die ervaringen, maakten voornemens en konden die soms ook nog uitvoeren. In viertallen becommentarieerden ze elkaars werk. Vijf artikelen werden geselecteerd voor plaatsing in Euclides en werden daartoe in samenwerking met de docent, Ton Konings, nog grondig bewerkt. Daarover meer in het laatste artikel van de serie.

Samennemen van gelijksoortige termen in 2-vmbo-t/havo

Welke fouten maken leerlingen? Waarom? Wat te doen?

Probleemsituatie

De 58 leerlingen van klassen 2TH (tweede klas combinatie vmbo-t/havo) hebben het hoofdstuk Lineaire Formules (*Moderne Wiskunde* 2a vmbo-gt/havo, 2004) [2], afgerond met een proefwerk. Dit proefwerk bevat 6 vragen met betrekking tot het samennemen van gelijksoortige termen.
De tabel ***in figuur 1*** bevat de vragen en de antwoorden van leerlingen. De resultaten waren zo bedroevend dat dit een goed uitgangspunt was voor een grondige analyse. In de tabel staan de 6 vragen met betrekking tot het samennemen van termen. Indien een leerling een antwoord heeft gegeven, is dit antwoord verwerkt in de tabel. In de tweede kolom staan de juiste antwoorden. De onderstreepte antwoorden zijn antwoorden van leerlingen, die ik van te voren verwacht had. Onder ieder gegeven antwoord staat hoe vaak dit specifieke antwoord gegeven is en in de tweede kolom met antwoorden het percentage van de juiste antwoorden. Hierbij dient opgemerkt te worden dat tijdens de uitleg in de voorafgaande lessen duidelijk is gezegd dat '1a' niet als goed beoordeeld zou worden, maar dat dit geschreven moet worden als 'a'.

Eerste analyse van het probleem

Gezien de lage score rijst de vraag, waarom leerlingen zo slecht presteren en wat de gedachtegang van de leerling is geweest bij het oplossen van de opgaven. Gelukkig heeft een aantal leerlingen de gedachtengang bij de opgaven opgeschreven, waardoor het duidelijker wordt hoe leerlingen aan de antwoorden komen. Voor twee opgaven wordt dat ***in figuur 2 en 3*** getoond.

Toelichtingen bij het antwoord $3x^2$:

- $x + x = x^2$ en $x^2 + 3 = 3x^2$
- $3xx = 3x^2$
- $3x^2$ omdat x en x samen x^2 is
- $0 + 3 = 3$ en $x + x = x^2$ dus $3x^2$
- $x + x = 2$ keer x en dit makkelijk om te schrijven naar $3x^2$

Toelichtingen bij het antwoord $3x$:

- $3 + x = 3x$ en $3x + x = 3x$
- $x + x = x$ en dan de 3 ervoor zetten $= 3x$
- $3x$ omdat je het bij elkaar optelt, als het × was, was het $3x^2$
- Ik denk $3x$ want $x + x = x$ en dan nog +3 $= 3x$
- $x + 3x$ hebben de x gemeen en dus wordt het $3x$

figuur 1

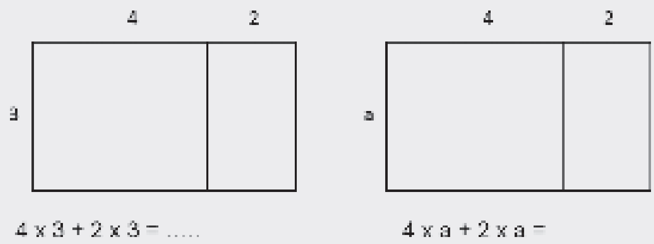
Termen	Door leerlingen gegeven oplossingen									
$x+3x$	$\underline{4x}$	geen	$\underline{3x^2}$	$3x$	x^2+3					
	6 (10 %)	16	18	17	1					
$6b-5b$	$\underline{b}$		$\underline{1b}$	$\underline{1b^2}$	$\underline{b^2}$	$\underline{1}$	b^2-10b	$-1b$	$11b^2$	$-11b^2$	$6-5b^2$
	27 (46 %)	0	16	5	2	3	1	1	1	1	1
$-t+8t$	$\underline{7t}$		$\underline{8}$	$\underline{-8t^2}$	$-8t$	t	$8t$	$-t^2+8$	$8t^2$	$-7t$	
	7 (12 %)	16	5	8	12	1	5	2	1	1	
$8x-9x+2x$	$\underline{x}$		$\underline{1x}$	$\underline{1x^3}$	x^2	$-3x$	$3x^3$	$-19x^3$	$3x$		
	14 (24 %)	19	16	2	1	1	1	2	2		
$10a-2a-9a$	$\underline{-a}$		$\underline{-1a}$	$\underline{-1a^3}$	a	$1a^3$	$-21a^3$	$21a^3$	-1	$1a$	
	12 (20 %)	19	19	1	2	1	1	1	1	1	
$5b-4b$	$\underline{b}$		$\underline{1b}$	$\underline{1b^2}$	$\underline{1}$	$-2b$	$-2b^2$	$-9b^2$	$-1b$	$5-4b^2$	
	15 (25 %)	16	14	3	3	2	1	2	1	1	

$x + 3x$	$\underline{4x}$	$\underline{3x^2}$	$3x$	$x^2 + 3$
	6 (14 %)	18	17	1

figuur 2

$10a - 2a - 9a$	$\underline{-a}$	$\underline{-1a}$	$\underline{-1a^3}$	a	$1a^3$	$-21a^3$	$21a^3$	-1	$1a$
	12 (31 %)	19	1	2	1	1	1	1	1

figuur3



figuur 4

Toelichting bij het antwoord $x^2 + 3$:
- $x + x = x^2$ en er nog de 3 erbij optellen $x^2 + 3$

Toelichtingen bij het antwoord $-1a$:
- $10a - 2a = 8a - 9a = -1a$
- $10a - 8a = 8a - 9a = -1a$
- $10 - 2 - 9 = -1a$
- $10a - 2a = 8 - 9a = -1a$

Toelichting bij het antwoord $-1a^3$:
- $10a - 2a = 8a^2$, $8a^2 - 9a = -1a^3$

Toelichtingen bij het antwoord a :
- $1a = a$ $(10 - 2 = 8,\ 8 - 9 = -1)$
- $10a - 2a = 8a - 9a = -1a$ ook wel a

Toelichting bij het antwoord $1a^3$:
- $+1a^3$ $(10a + -2a + -9a)$

Toelichting bij het antwoord $1a$:
- $10a - 2a = 8 - 9a = 1a$

Het is overduidelijk dat deze leerlingen allerlei onbegrepen handelingen uitvoeren. Die laten zich samenvatten in:
- Het verschil niet weten tussen $x + x$ en $2x$ aan de ene kant en x^2 aan de andere kant. Dus $x + x = 2x = x^2$ evenals $3x = x^3$.
- Bij drietermen wordt er 'gebreid'; bij de eerste toelichting ***van figuur 3*** geldt natuurlijk niet dat 10a – 2a = -1a.
- Afspraken als 1a = a en -1a = -a hebben voor hen blijkbaar geen betekenis gekregen.
- Getallen voor de variabelen worden van elkaar afgehaald, dus de variabelen kunnen ook van elkaar afgehaald worden: $6x - 4x$ wordt samengenomen met $6 - 4 = 2$ en en $x - x = 0$, en deze twee uitkomsten worden bij elkaar opgeteld.

Het is duidelijk dat leerlingen het samennemen van gelijksoortige termen allesbehalve onder de knie hebben. Hoe kan dit toch ?

Analyse vanuit vakdidactische literatuur

Het cursusboek [1] levert een viertal aanknopingspunten om te begrijpen wat er aan de hand is. In de eerste plaats de verklaring voor het 'breien'.

Leerlingen hebben jarenlang op de basisschool rekenen en wiskunde gedaan uit boekjes met rijtjes sommen als 4 × 4,1= … . Daarmee lijkt het redelijk te veronderstellen dat het gelijkteken voor hen het karakter heeft van een opdracht (bereken de uitkomst) en niet van 'is gelijk aan'. Dit laatste is wel nodig voor het begrijpen van wat vergelijkingen zijn: *objecten* die je aan elkaar gelijk stelt. Het gelijkheidsteken staat niet voor 'en dat geeft dan als uitkomst' maar voor 'is equivalent met'. Dat leerlingen dit toch zo opschrijven heeft vermoedelijk ook een relatie met de '='-knop bij het gebruik van de rekenmachine.

In de praktijk leidt dat vaak – en ook hier – niet tot fouten in het antwoord. Dit is ook de reden dat breien in het vmbo-examen niet bestraft mag worden. Niettemin is het van belang bij leerlingen goede gewoonten te ontwikkelen. Dat gaat in de eerste plaats door met ze te bespreken, dat het begrijpelijk is wat ze doen.

Een tweede verklaring van fouten is, dat leerlingen *reageren op de visuele kenmerken van symbolen* in uitdrukkingen. Bijvoorbeeld, een opgave als $-t + 8t$ wordt opgelost, door de letter t van de term $8t$ af te halen en dan houdt de leerling een 8 over. Of, een opgave als $x + 3x$ wordt beantwoord met $3xx = 3x^2$, want getallen moeten nu eenmaal vooraan en twee keer x geeft een kwadraat.

Een derde en de belangrijkste verklaring van fouten zit in het *variabelenbegrip* van leerlingen.

Het cursusboek bespreekt in paragraaf 5.4.2 'soorten van variabelen' en start daarbij met *twee foutieve vormen* van variabelenbegrip: 'Negeren van de letter' en 'De letter als ding'.

Negeren van de letter – De leerling geeft geen betekenis aan de letter, doet net of 'ie er niet is, en soms leidt dat tot een goede uitkomst.

Bij de opgave:

Als $a + b = 43$ *, wat geldt dan voor* $a + b + 2 =$ *… ?*

kun je zien dat de tweede vergelijking links 2 meer is. Leerlingen die bij deze opgave een goed antwoord 45 geven, kunnen de mist in gaan bij een opgave als:

Als $e + f = 8$*, wat geldt dan voor* $e + f + g =$ *… ?*

Met foutieve antwoorden als: 15 , 12 , $8g$, 9.

Dit lijkt op 'het raadsel van de kapitein': Een kapitein heeft aan boord 12 koeien, 8 varkens, 2 geiten en 26 kippen; hoe oud is de kapitein? Veel leerlingen geven het antwoord: 48.

Bij een opgave als $x + 3x$ staat voor de eerste x geen getal. Dus zal er wel een 0 staan, en dan wordt de uitkomst $3x$. Zo ook $x + x$. Dat zijn twee termen die bij elkaar horen, want ze lijken op elkaar; dus wordt dat gewoon x.

De letter als ding – De opgave $2a + 5a =$ … kan worden opgelost met: 2 appels en 3 appels geeft 5 appels.

Echter bij de vragen als Vereenvoudig: $3a - b + a =$ … of Vereenvoudig: $(a - b) + b =$ … gaat deze strategie niet meer op.

Het onderscheid tussen de objecten (als wagens, potloden, gewicht e.d.) en hun aantal is voor leerlingen vaak moeilijk. Inderdaad kun je op korte termijn bij het samennemen van gelijksoortige termen als in $a + 2p + 3a + 6p + 7a = \dots$ succes hebben. Echter: als a appel betekent, wat is dan $3a + 4$, $a + p$, $(a)^2$? Dus 'a is appel' geeft een foutieve betekenis aan de variabele a. Deze interpretatie leidt op iets langere termijn tot problemen. Dus a is niet 'appel', maar hooguit 'het aantal appels in een zak'
De opgaven $6b - 5b = \dots$ en $5b - 4b = \dots$ en ook $8x - 9x + 2x = \dots$ hebben meer goede antwoorden dan $x + 4x = \dots$, omdat het laatste meer begrip van variabelen vereist.
In het cursusboek worden vervolgens de verschillende soorten van variabele begrip besproken: Plaatshouder, Onbekende, Veranderlijke, Onbepaalde en Parameter. De laatste twee soorten van variabelen zijn het meest abstract. Bij het samennemen van gelijksoortige termen is er sprake van het vierde soort van variabele. Daarover staat er dan:

De onbepaalde of het gegeneraliseerd getal
Voorbeelden
- Voor alle onbepaalden (willekeurige getallen) a, b en c geldt: $a(b + c) = ab + ac$
- Denk een getal, verdubbel het, tel er 10 bij op, neem er de helft van, trek het gedachte getal eraf, wat komt eruit? Probeer het nog eens met een ander getal. Hoe kan dat? (Ofwel : voor een willekeurige x geldt: $\frac{1}{2}(2x + 10) - x = 5$).

Deze letter staat voor een gegeneraliseerd of willekeurig getal, ze kan meerdere waarden aannemen.
Als leerlingen in de lagere klassen bij $2a + 3a$ denken: twee appels en drie appels , leidt dat gemakkelijk tot een goed antwoord. Een kenmerkend probleem is dan wel dat ze vervolgens in $3(a + 4)$ of met $1a = a$ geen raad weten.
Dus het is beter voor $2a + 3a$ te nemen: 2 keer een getal + 3 keer datzelfde getal, of concreter; $2 \times 4 + 3 \times 4$, $2 \times 12 + 3 \times 12$, … Wat geldt nu in het algemeen?

Verder biedt het cursusboek als vierde aanknopingspunt een didactische volgorde voor het leren van abstracte zaken: *eerste concreet , dan schematisch en dan abstract*, waarbij steeds teruggegrepen kan worden op concretiseringen. *Moderne Wiskunde* geeft dan ook oppervlaktemodellen en getallenvoorbeelden, maar dat gaat wel erg snel, en dan heb ik de opgaven vervolgens alleen maar in abstracte vorm besproken. Achteraf bezien is het dus niet vreemd dat er zo weinig begrip bij mijn leerlingen is gerezen. Dit leidt tot de volgende probleemstelling.

Probleemstelling en conclusies

Hoe kan het onderwerp 'samennemen van gelijksoortige termen' behandeld worden in een 2vmbo-t/havo klas?
Op basis van voorgaande, en een nadere bestudering van de vmbo-t/havo delen de 8e en de 9e editie [3], van de methode *Moderne Wiskunde* formuleer ik een aantal conclusies met betrekking tot behandeling van het onderwerp in het volgende schooljaar. Vervolgens geef ik een paar concrete voornemens.
- Het onderwerp 'samennemen van gelijksoortige termen' is met betrekking tot het vmbo-t-programma eigenlijk niet nodig. Zelfs voor de 'balansmethode', waar je wel twee gelijksoortige termen bij elkaar optelt of aftrekt, hoeft dit niet geformaliseerd te worden als aparte methode.
- Voor de 2-havo-stroom is het samennemen van gelijksoortige termen alleen van belang in relatie tot het uitwerken van formules als $(x + \dots)(x + \dots) = \dots$, en kan dus beperkt blijven tot twee termen.
- Algebra vraagt veel oefening, maar alleen abstracte oefening met kale sommen leidt tot onbegrepen trucs en heeft dus een averechts effect.
- Ik zou bij de behandeling van de stof en de bespreking van opgaven voortdurend teruggrijpen op concretiseringen.

Voornemens voor een volgende keer

Als de stof weer behandeld wordt, zal ik meer aandacht schenken aan begripsmatige manieren, en daarop ook voortdurend teruggrijpen:
- Eerst met oppervlakteplaatjes (met eventueel afmetingen in meters); ***zie figuur 4***.
- Algebra is een veralgemenisering van regels voor het rekenen, dus begin met opgaven met getallen in plaats van x, zoals:
  Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen:
  $9 \times 3 - 7 \times 3 = \dots \times 3$ en $7 \times 3 - 9 \times 3 = \dots \times 3$
  $9 \times 88 - 7 \times 88 = \dots \times \dots$ en $7 \times 88 - 9 \times 88 = \dots \times \dots$
  $9x - 7x = \dots$ en $7x - 9x = \dots$
- Over $1x = x$. Ook eerst met getallen: $7 \times 88 - 6 \times 88 = 1 \times 88 = 88$; dus $7x - 6x = 1x = x$. En voorlopig is het natuurlijk niet fout om $1x$ te laten staan.
- Juist van het bespreken van foute uitwerkingen kunnen leerlingen veel leren. Die kan ik verzamelen, maar ook krijg je ze als je meerdere leerlingen tegelijk uitwerkingen op het bord laat schrijven.

Noten

[1] Bij de cursus werd gebruik gemaakt van een conceptversie van: J. Faarts, e.a. (2012): *Algebra voor leerlingen van 12-16, voor de lerarenopleiding*. Utrecht: APS.
[2] *Moderne Wiskunde* 2a en 2b vmbo-gt/havo, editie 8. Groningen: Noordhoff, 2004.
[3] *Moderne Wiskunde* 2a en 2b vmbo-gt/havo, editie 9. Groningen: Noordhoff, 2009.

Over de auteurs

Robert Verheijen was in cursusjaar 2011-2012 eerstejaars deeltijdstudent aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor leraar en School van de HAN in Nijmegen en beginnend docent wiskunde aan het Mondial College te Nijmegen. Hij vervolgt deze baan in 2012-2013.
E-mailadres: *robert.verheijen@mondialcollege.nl*
Ton Konings is lerarenopleider aan het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen, en medeauteur van een serie vakdidactiekboeken voor de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde.
Emailadres: *Ton.Konings@han.nl*

ICT in de wiskundeles

GOOGLE MAPS – DEEL 1

[Marc de Hoog]

In de brugklas komt het onderwerp plaatsbepaling en coördinaten aan de orde. Er werd door collega's al jaren een practicum gegeven waarin aan de hand van een papieren plattegrond vragen beantwoord moesten worden. Als onderdeel van mijn afstudeerwerk (Wiskunde@ELO, 2009, lerarenopleiding Hogeschool Rotterdam) heb ik gezocht naar een praktischer en modernere invulling. Google Maps(het 'kaarten-programma' van Google, *http://maps.google.nl*) werd bekend en ik bedacht dat dit geschikt zou zijn. Ter ondersteuning van het proces heb ik de elektronische leer-omgeving ingezet. Niet enkel voor het aanbieden van de opdrachten en het laten inleveren van de antwoorden, maar ook om leerlingen eigen producties (zoals speurtochten) met elkaar te laten delen. Dit biedt extra mogelijkheden om het leerproces te verlevendigen en (daarmee) het leerrendement te verhogen. In dit artikel beschrijf ik hoe een en ander destijds is verlopen, zodat u deze opdrachten ook kunt laten uitvoeren.

Een eerste stap

Voordat de leerlingen wiskunde kunnen bedrijven met behulp van Google Maps, moeten zij leren werken met dit programma. Ik heb daarom een korte uitleg geschreven met daarbij enkele vragen. De elektronische leeromgeving geeft feedback op de gegeven antwoorden, zodat de leerlingen zelfstandig kunnen werken. Dit geeft mij de mogelijkheid rond te lopen.

Een eerste toepassing – Na de uitleg over de werking van het programma volgt een eerste wiskundige toepassing. De leerlingen moeten uitzoeken op welke locatie een foto is gemaakt. Ze moeten zo duidelijk mogelijk beschrijven waar de plek is; ***zie figuur 1***. De opdracht is bewust open om leerlingen te laten bedenken hoe een en ander eenduidig beschreven kan worden (lange-termijndoel). Sommige leerlingen noemden straten in de omgeving. Andere leerlingen noemden kenmerkende locaties in de omgeving en gaven daarbij een routebeschrijving naar de gezochte locatie. Er was ook een leerling die gebruik heeft gemaakt van coördinaten.

figuur 1

Een routebeschrijving – De leerlingen moeten een routebeschrijving maken van de ene schoollocatie naar de andere. Ze moeten daarbij gebruikmaken van de functie 'routebeschrijving' in Google Maps. Ik stel vragen over de routebeschrijving om na te gaan of leerlingen de functie op een goede manier gebruiken. De leeromgeving geeft feedback; ***zie figuur 2*** (op pag. 74).

Jij of de computer…? – De leerlingen krijgen de opdracht de route van huis naar school op twee manieren te (laten) beschrijven en deze beschrijvingen vergelijken. Eerst moeten ze de route beschrijven die ze zelf fietsen. Daarna moeten ze met behulp van Google Maps een routebeschrijving maken. Ze moeten aangeven of de routes verschillen en tenslotte moeten ze deze verschillen verklaren; ***zie figuur 3***.

Nu volgt een kleine opsomming van antwoorden die leerlingen geven op de vragen. De antwoorden zijn niet altijd even volledig en correct, maar ze geven een goed beeld van de verscheidenheid aan verklaringen die leerlingen geven.

Jari's eigen beschrijving – Ik rijdt rechtdoor gaat op de rontonde en rijdt de Taets van Amerongenstraat in. Dan ga ik linksaf de Molenstraat in. Dan blijf ik rechtdoor rijden tot ik bij stoplichten komt. Bij de stoplichten ga ik Rechtsaf de Molenweg in. Ik rijd daar rechtdoor. Ik ga dan Linksaf de Madeweg in. Dan ben ik er.

Routebeschrijving Google Maps – Vertrek in noordoostelijke richting op de Larixlaan naar Jasmijnstraat: 0,1 km / Neem op de rotonde de 1ste afslag naar Taets van Amerongenstraat: 64 m

Sla linksaf bij Molenstraat: 0,5 km / Sla rechtsaf bij Molenweg: 0,2 km / Sla linksaf bij Madeweg: 80 m

Verschillen – Ik zeg ook wanneer je rechtdoor moet en dat je tot de stoplichten moet. Zo gedetailleerd is Google Maps niet'

Aranka's eigen beschrijving – Bergeend 37, (linksaf) . En dan het fietspad op, dan kom je bij de rijnweg. Dan ga je de hele tijd rechtdoor en neem je de rondtonde rechtdoor! Dan ga je de hele tijd naar links (Molenstraat). Dan kom je bij het stoplicht. Dan ga je naar rechts. En dan rechtdoor. En dan de linksaf oversteken! En dan Ben je er!

Routebeschrijving Google Maps – Bergeend 37, (naar rechts) de Laan van Delfland op. Dan volg je de hele tijd gewoon de Hoofdweg. Dan ga je een berg op en dan weer af. Dan kom je op de Molenweg. Dan ga je rechtdoor tot het stoplicht. Dan blijf je nog steeds rechtdoor gaan. En dan naar Links oversteken. En dan ben je er !

Verschillen – Mijn Weg is veel korter. Omdat: ik het fietspad neem, en de routebeschrijven rekent op een auto.En daarom nemen ze de hoofdweg.'

Jessica's eigen beschrijving – 'ik rijd de larixlaan uit richting de goudenregenstraat op een gegeven moment moet je rechtsaf de goudenregenstraat in, dan rechtsaf de molenstraat in, die rijd je uit tot de molenweg dan ga je rechts af en dan bij de madeweg ga je linksaf en dan ben je er!

Routebeschrijving Google Maps – larixlaan, rechtsaf teatsvanomeringstraat in,linksaf molenstraat in helemaal door rijden naar einden van de weg, rechtsaf molenweg in linksaf madeweg

Verschillen – Ja ik rijd veiliger naar school dan de route beschrijving'

Speurtocht – Het is de bedoeling dat

- Klik op 'routebeschrijving'
- Vul bij van in: 's Gravenzande, Gasthuislaan
- vul bij **naar** in: Monster, Madeweg
- selecteer 'lopen'

- Vraag: Hoeveel kilometer moet je lopen van de Gasthuislaan naar de Madeweg?
- Vraag: Hoelang doe je daarover?

- Selecteer 'auto'
- Vraag: Hoeveel kilometer moet je rijden van de Gasthuislaan naar de Madeweg?
- Vraag: Hoelang doe je daarover?

- Vragen: Vergelijk beide routes (lopen en auto). Zijn er verschillen? Zo ja welke? Verklaar de verschillen.

figuur 2

Woon je heel dicht bij school (minder dan 5 minuten lopen of fietsen)?
Neem dan de Larixlaan als vertrekpunt.

- Maak zelf een routebeschrijving van huis naar school. Je moet de route beschrijven die jij elke ochtend fietst. Je mag daarbij niet de optie 'routebeschrijving' gebruiken.
- Bepaal nu de route met de optie 'routebeschrijving'.
- Vragen: Verschillen de routes? Verklaar de verschillen. Kijk goed!

figuur 3

leerlingen een route volgen en zo achter de locatie komen waar ik me verstopt heb; ***zie figuur 4***. Bij deze opdracht liep een aantal leerlingen vast, omdat niet duidelijk was dat links soms rechts is en andersom. Nadat ik had verteld dat ze de route als het ware zelf moeten fietsen, werd duidelijk dat je soms 'op z'n kop' moet kijken. Het was erg grappig om te zien dat sommige leerlingen echt hun hoofd gingen draaien. Waarschijnlijk moet bij hen het ruimtelijk inzicht zich nog verder ontwikkelen. Deze opdracht is een aanzet daartoe.

Speurtocht maken en speurtocht volgen
De laatste opdracht is het maken van een speurtocht. Nadat de speurtocht is gemaakt, is deze direct beschikbaar voor medeleerlingen. Na het maken van een speurtocht kiest de leerling een speurtocht van een klasgenoot uit. Deze speurtocht gaat hij doen. Hij geeft ook feedback op de speurtocht (Wat is onduidelijk? Waar gaat het fout? Wat is heel leuk? Et cetera.) Deze feedback kan door de maker van de speurtocht worden verwerkt. Op die manier helpen ze elkaar met het maken van een goede speurtocht.

Een terugblik
Deze manier van lesgeven is bij ons op school een uitzondering. De leeromgeving is veelal een verzamelplaats van documenten. Hoewel ik zelf al ervaring had met het lesgeven via de elektronische leeromgeving, was dit de eerste module waarin ik een hele klas heb laten werken aan opdrachten zonder van tevoren uitleg te geven. Dit vergroot de noodzaak tot reflectie. In het reflectieproces betrek ik altijd feedback die ik van leerlingen vraag. Uit ervaring weet ik dat zij met zaken komen waar geen volwassene aan denkt. Daarbij moet wel de volgende kanttekening worden gemaakt. Als ik leerlingen iets zinvols wil laten zeggen over het leerproces, dan moeten zij hiermee ervaring opdoen. Op het moment van het geven van de opdracht (enkele weken na het begin van het schooljaar) wil ik leerlingen laten wennen aan dergelijke vragen. Daarom stel ik enkele open vragen, zoals: Wat vond je van de les? Noem het leukste en het minst leuke onderdeel? Leg je antwoord uit. Wat heb je geleerd? Noem drie zaken.Noem een onderdeel van Google Maps dat niet aan bod is gekomen. Stel dat je meer hierover wilt leren. Hoe wil je dat bereiken? Heb je suggesties, ideeën? Zouden andere leerlingen deze opdrachten ook moeten maken? Waarom wel of waarom niet?

Het is, gezien het moment, niet verbazingwekkend dat veel leerlingen korte antwoorden geven. Er zijn leerlingen die nadruk leggen op het gevoelsmatige (het was erg leuk, het was gezellig) en leerlingen die ingaan op het technische aspect (Is het mogelijk onderaan de pagina 'vorige' en 'volgende' te plaatsen?). In mijn ogen is dat niet erg. Integendeel. In de eerste plaats heb ik na bestudering van de antwoorden enig idee van het niveau waarop ik vervolgvragen kan stellen. Veel belangrijker is dat de antwoorden aanknopingspunten bieden voor discussie. Naar aanleiding van deze discussie kunnen we gezamenlijk uitgebreidere antwoorden formuleren. Kortom, het is een eerste aanzet om leerlingen te laten nadenken over de les en het leerproces en om hen te laten formuleren. Dit zijn langetermijndoelen die in mijn ogen ook tijdens de wiskundelessen aan bod moeten komen. De impliciete feedback die tijdens een les gegeven wordt, is zo mogelijk nog interessanter. Met enige regelmaat zijn er momenten waarop ik geen vragen beantwoord, maar enkel rondkijk. Het is interessant te zien hoe leerlingen zelfstandig en gezamenlijk problemen oplossen. Hieruit kan ik afleiden welk gedeelte van de opdracht revisie behoeft. Sommige problemen wil ik in het vervolg voorkomen (bijvoorbeeld, een onvindbaar plaatje) en sommige problemen laat ik bestaan, omdat dit aanknopingspunten biedt om verder te praten (bijvoorbeeld, de onmogelijkheid om een locatie eenduidig te beschrijven).

Blik op het leerproces

Een elektronische leeromgeving biedt, mits goed ingesteld, de mogelijkheid op later moment het proces dat de leerlingen hebben doorlopen in beeld te brengen. Hierdoor wordt het voor mij eenvoudiger na te gaan of didactische keuzen goed hebben uitgepakt. Daarnaast is het interessant na te gaan waar ik tijdens de voorbereidingen geen rekening mee heb gehouden, zodat ik daar alsnog op kan inspelen. Ten slotte is het interessant na te gaan hoe literatuur en praktijk zich tot elkaar verhouden. Helaas is de ruimte te beperkt om uitgebreid in te gaan op de didactische keuzen, maar het moge duidelijk zijn dat hierover genoeg gezegd kan worden. Daarbij denk ik niet enkel aan hetgeen de leerlingen 'direct na de les' geleerd moeten hebben en de manier waarop dat zou moeten gebeuren, maar ook aan allerlei lange-termijndoelen die de revue passeren, zoals het vergelijken van situaties, het leveren van een correcte redenering, het geven van een verklaring (daarbij gebruikmakend van verschillende gegevens), het omgaan met open opdrachten waarbij de oplossingsmethode niet gegeven is of niet direct uit de situatie afgeleid kan worden (bijv. de opdracht om te beschrijven waar een gebouw staat), het met elkaar in verband brengen van verschillende grootheden (bijv. tijd en afstand bij een routebeschrijving), optimalisatie (de kortste route), etc.

Hoewel korte- en lange-termijndoelen niet de enige zaken zijn waarover nagedacht moet worden, maakt de opsomming mijns inziens duidelijk dat deze opdracht voldoende aanknopingspunten biedt om delen van de wiskunde te belichten.

Van cursus naar game

Voor de *onderwijsvernieuwingscooperatie.nl* heb ik in 2009 een bewerking van de cursus Google Maps geschreven die vrij toegankelijk is via Wikiwijs en via *http://ovc.lesbank.nl* .

Volgende aflevering

In de volgende aflevering leg ik uit hoe gebruikt gemaakt kan worden van enkele andere mogelijkheden die Google Maps biedt, zoals de lagen verkeer, weer en fietsen en uiteraard *streetview*.

figuur 4

Waar ben ik?

- Volg de route.
  - Zoek: *Monster, Madeweg 1*
  - Ga rechtsaf de Molenweg op.
  - Ga de tweede straat links.
  - Ga rechtdoor tot de rotonde.
  - Ga rechtsaf.
  - Ga rechtdoor tot aan de Rijnweg.
  - Ga de Rijnweg op.
  - Ga de derde straat links.
  - Ga de eerste straat links.
  - Ga de eerste straat rechts.
- Vraag: Waar ben ik?

Over de auteur

Marc de Hoog is docent wiskunde, rekenen en informatiekunde aan de Interconfessionele Scholengroep Westland. Daarnaast is hij auteur ICT bij *Moderne Wiskunde*. Hij volgt een studie informatica aan de Open Universiteit.
E-mailadres: *hgm@isw.info*

Wiskunde en autisme

DEEL 1 – VERWOORDINGSPROBLEMEN

[Bram Arens, Danny Beckers]

Leerlingen met autismespectrumstoornis (ASS) [1] vinden steeds vaker hun weg naar het reguliere onderwijs. Aan veel van deze leerlingen merk je op het eerste gezicht weinig. Dat neemt niet weg dat ze tegen problemen aanlopen, zowel thuis als op school.Als docent wiskunde ziet u de leerling vaker, kunt u beter beoordelen wat zijn of haar prestaties waard zijn en heeft u meer mogelijkheden om de leerling te sturen dan een begeleider op afstand. Het vak wiskunde is vanwege de ondubbelzinnige vragen en antwoorden bij uitstek geschikt om het leerproces van een ASS-leerling te beïnvloeden. In deze serie geven Bram Arens en Danny Beckers een aantal handvatten om effectief vorm te geven aan passend onderwijs voor deze doelgroep.

Verwoordingsproblemen

We beginnen met een casus uit onze praktijk. Albert zit in de brugklas en 'ziet' de oplossingen van de opgaven die zijn wiskundedocent hem voorlegt. Hij is niet in staat om meer op papier te krijgen dan alleen het antwoord. Omdat hij daar ook nog af en toe een foutje in maakt, scoort hij alleen maar diepe onvoldoendes. Het probleem is veel breder dan de wiskundeles alleen. Albert heeft moeite met verwoorden bij alle schoolvakken, geeft vaak antwoorden van één woord, waar een alinea tekst wordt verwacht, en hij heeft ook moeite om op school of thuis te vertellen over wat hij voor problemen ervaart. Het probleem waarmee Albert worstelt komt voort uit het gegeven dat hij niet door heeft dat zijn gedachten of zijn oplossingsstrategie dient te worden uitgesproken. Voor hem spreekt het vanzelf wat hij doet en hij gaat er stilzwijgend vanuit dat dat voor ieder ander ook geldt.

Met Albert is een traject begonnen waarin de docent wiskunde hem liet zien dat er verschillende manieren zijn waarop hij de opgave kon aanpakken. Door de opgaven expliciet op verschillende manieren uit te werken kon Albert in eerste instantie aangeven welke methode hij had gekozen. Vervolgens liet de docent Albert een keuze maken uit oplossingsstrategieën die Albert *niet* had gebruikt: een omslachtige aanpak of een manier die Albert eerder al eens had verworpen. Daardoor werd Albert gestimuleerd om zelf zijn methode onder woorden te brengen.

Zodra Albert bij wiskunde in staat was om zijn aanpak onder woorden te brengen, ging de docent wiskunde hem erop attenderen dat hetzelfde probleem bij andere vakken ook speelde. Door de bewustwording van dit probleem en de ervaring dat het bij wiskunde ook kon worden aangepakt, kon Albert ook bij andere vakken verder.

Herkennen van verwoordingsproblemen

U herkent een leerling met verwoordingsproblemen aan de lege proefwerkblaadjes en lege schriften; ze gebruiken vaak zelfs geen kladpapier om dingen uit te proberen. Alles speelt zich in hun hoofd af, en u krijgt daarvan hooguit een antwoord te zien. Een verbaasde opmerking als 'maar het is toch goed?' valt u ten deel wanneer u ernaar informeert. Als u bij een leerling observeert dat er weinig of niets op papier staat, dan gaat u in eerste instantie in gesprek. Is de opdracht begrepen? Is de leerling gewoon lui geweest? Laat de leerling mondeling toelichten hoe hij tot het resultaat is gekomen.
Een ideaal onderwerp om problemen met verwoording te herkennen is het oplossen van lineaire vergelijkingen. Bij een vergelijking als $5x + 2 = 7x - 2$ zullen veel leerlingen de oplossing zien. Er zijn leerlingen die de standaard strategie niet gebruiken omdat die hun onhandig lijkt en ze er het voordeel niet van inzien. Zij hebben in hun hoofd, al dan niet systematisch, een aantal waarden geprobeerd en hebben geconstateerd dat $x = 2$ de oplossing is. U zou de leerling kunnen vragen waarom $x = 2$ volgens hem de *enige* oplossing is. De leerling met een beetje inzicht en zonder verwoordingsproblemen zal u na enig nadenken (of na een hint) kunnen uitleggen dat het verschil van $5x + 2$ en $7x - 2$ groter (kleiner) wordt als je een waarde kiest voor x die kleiner (groter) is dan 2, en dat x dus een unieke oplossing is. Of de leerling herinnert zich dat hij de formules kan representeren door rechte lijnen en komt met een vergelijkbare redenering over het aantal snijpunten van twee rechte lijnen.
Er zijn óók leerlingen die de standaard strategie wel hanteren, maar die niet op papier zetten. Dat zijn de leerlingen met verwoordingsproblemen. Door de leerling te bevragen komt u er als docent snel genoeg achter of dit het geval is. Twijfelt u of de leerling de stap naar variabelen wel gemaakt heeft, dan kunt u ook een meer elementair onderwerp als rekenen met procenten kiezen en kijken of de leerling daarbij uit zijn woorden komt.

Soorten verwoordingsproblemen

Er kunnen verschillende gedachtenpatronen ten grondslag liggen aan verwoordingsproblemen. De leerling is veelal zelf niet in staat om die gedachtenpatronen te herkennen of onder woorden te brengen (!). Dus u moet als docent eerst achterhalen wat er speelt. Het meest voorkomende is dat de leerling niet door heeft dat u van hem verwacht dat er uitleg wordt gegeven. Elke opdracht is voor de leerling nieuw en verwarrend en zijn aandacht gaat vooral uit naar de oplossing. U herkent deze leerling aan het gegeven dat hij mondeling, wanneer u doorvraagt, beter scoort dan schriftelijk. Daarnaast komt het vaak voor dat de ASS-leerling het overzicht mist. De leerling ziet heel veel stappen en kan niet filteren. Een dergelijke leerling zal blokkeren en veel te weinig opschrijven, of juist veel te veel gaan opschrijven. Ook mondeling komt er weinig verandering in zijn prestatie. Bij sommige ASS-leerlingen ligt de kern van het probleem in hun perfectionisme. Ze durven geen antwoord te geven alvorens ze er zeker van zijn dat het helemaal goed is. En ook zijn er leerlingen die niet beseffen dat er stappen worden gezet. Zij zien de opmerkingen die u maakt als losse beweringen en beseffen niet dat er een causaal verband bestaat tussen de stappen die u wilt zien. Deze leerlingen hebben moeite met het leggen van verbanden. Dat is een ander probleem waar we in een latere aflevering op terug komen.

Handvat verwoordingsprobleem

Hoe kunt u de leerling nu helpen om deze problemen op te lossen? In elk geval: benoem het probleem. De leerling in kwestie heeft zelf namelijk vaak niet door dat er een probleem speelt. De leerling heeft het gevoel dat hij wel tot antwoorden komt of meent dat hij dat toch niet kan, omdat hij nu eenmaal autistisch is. Als de leerling wel eens een fout maakt in zijn rekenwerk maar op zich goed begrijpt wat u van hem vraagt, dan is dat een ideaal breekijzer om de leerling te overtuigen van het nut van zijn ideeën uitschrijven.
Komt de leerling mondeling tot een uitleg, dan is een oplossing om de mp4-speler van de leerling te gebruiken om het mondelinge antwoord op te nemen en terug te luisteren. Soms volstaat het dan om dat op papier te zetten; soms komt er dan teveel op papier en moet u er nog verder aan schaven.
Komt er echter mondeling ook weinig uit de leerling, dan kunt u beginnen met ja/nee-vragen aan de leerling voor te leggen. Op die manier komt u er in elk geval achter welke strategie de leerling gebruikt heeft en in hoeverre die compleet is ('heb je eerst een getal geprobeerd?'; 'heb je eerst links en rechts 2 ervan af getrokken?' et cetera).
Onbewust volgt de leerling natuurlijk wel een redenering om tot een antwoord te komen. Door een voorbeeld van een redenering stap voor stap uit te schrijven wordt de leerling zich bewust van de opties.
Bij een leerling die last heeft van perfectionisme is de problematiek het hardnekkigste. U kunt het probleem voor de leerling benoemen en hem blijven stimuleren om toch dingen uit te schrijven. Wat kan helpen is de leerling op het hart te drukken dat de enige manier om het fout te doen, is het *niet* te doen: leerlingen die gevoelig zijn voor logische redenering, kunt u de consequenties van hun handelwijze doen inzien.

Heeft de leerling eenmaal door wat er van hem wordt verwacht, dan moet hij dit enige tijd zonder tijdsdruk oefenen. Gaat het opschrijven van de stappen te traag, dan zal de leerling op een proefwerk onder tijdsdruk liever niet deze omschakeling maken maar kan dit wel al in de les of thuis doen. We zullen in een later deel in deze serie opties geven die u kunt gebruiken om die tijdsdruk te verlichten.
Op het moment dat de leerling de oplossing van standaard opdrachten goed onder woorden kan brengen, moet er een stap verder worden gezet, zeker als de leerling op havo of vwo niveau wil gaan functioneren. In de prachtige collectie van de Kangoeroewedstrijden vindt u genoeg opgaven om daarmee aan de slag te gaan. *Bijvoorbeeld* [2]
– In een meer leven 6-, 7- en 8-armige inktvissen. De 7-armige inktvissen liegen altijd, de 6-armige en 8-armige spreken altijd de waarheid. Op het strand liggen vier inktvissen bij elkaar, een blauwe, een groene, een gele en een rode. De blauwe inktvis zegt: 'We hebben samen we 28 armen'. De groene zegt: 'We hebben samen 27 armen'. De gele zegt: 'We hebben samen 26 armen' en de rode zegt: 'We hebben samen 25 armen'. Welke kleur heeft de inktvis die de waarheid spreekt?

Succes of mislukking

Het is zaak om voor uzelf helder te krijgen wanneer een leerling kans maakt op vooruitgang. Speelt het verwoordingsprobleem alleen bij wiskunde, dan beperkt het zijn toekomst maar hoeft dat niet per sé dramatische gevolgen te hebben. Veelal zal het probleem bij leerlingen met ASS wel breder spelen en zijn de gevolgen wel ingrijpend. In dat geval kunt u als wiskundeleraar aan het begin van een ontwikkeling staan.
Bij de meeste leerlingen zal een kleine extra tijdsinvestering direct positief effect hebben. Een positief effect in de wiskundeles kan vervolgens een thuisbegeleider helpen om ook op andere vlakken met de leerling vooruitgang te boeken. Voor de leerlingen met ASS kan de tijdsinvestering van de kant van de docent de doorslag geven tussen wel of geen toekomst. Wiskunde in de leerlingbegeleiding kan op deze manier een verrijking betekenen voor zowel de docent als de ASS-leerling. Bij twijfel: doen!

Info

Een uitgebreide versie van dit artikel is te vinden op « *www.bureau-beckers.nl/onderzoek/* ».

Noten en literatuur

[1] (Red.) Zie de website van Programmagroep Brein en Cognitie (van de Universiteit van Amsterdam): *www.adhd-autisme.nl/watisass.htm*

[2] Bron: *www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/2010/opgaven/wizsmart.2010.pdf*

[3] Daniel Tammet (2006): *Op een blauwe dag geboren – Een geschiedenis*, Amsterdam: Nieuwezijds.

[4] Herman Jansen, Betty Rombout (2011): *Autipower! – Succesvol leven en werken met een vorm van autisme.* Eindhoven: Pepijn.

Over de auteurs

Bram Arens (e-mailadres: *b.arens@bureaubeckers.nl*) en Danny Beckers (e-mailadres: *d.beckers@bureaubeckers.nl*) zijn wiskundedocent. Beiden zijn sinds een aantal jaren werkzaam bij Bureau Beckers te Nijmegen, hét expertisecentrum voor coaching van leerlingen en studenten met ASS of ADHD, en met een cognitieniveau vanaf havo.

Een kleine didactiek

Houd eens een wiskundewedstrijd(je)

[Rob van Oord]

Waarom een wedstrijd?
Leerlingen zijn gevoelig voor beloningen. Ook in de hogere klassen. Niet alleen met hoge cijfers maar ook met een prijsje, iets lekkers. Dat gegeven gebruik ik regelmatig in mijn lessen.
De eenvoudigste beloning geef ik als een leerling een fout in het boek of in het antwoordenboekje vindt: een dropje. Het komt ook voor dat ik iets lekkers uitdeel bij een wedstrijd die ik inlas aan het eind van een stuk stof, als ik wil vastleggen wat ik precies van ze verwacht. Een overhoring is niet altijd geschikt. Ze weten dan nog niet precies wat ze moeten leren en ze hebben ook nog niet het gewenste verwerkings- en toepassingsniveau. Op dat moment kies ik er voor om een flink aantal vaardigheidsopgaven te laten maken in groepjes van vier, afgerond met groepjes van drie als de klas geen viervoud aan leerlingen heeft. Het liefst zorg ik ervoor dat er in een groepje zowel zwakke-als sterke leerlingen terecht komen. Een antwoord mag pas worden opgeschreven op het officiële antwoordblad als elk groepslid de opgave ook echt snapt en zelf kan uitleggen. Op die manier helpen de leerlingen elkaar om op het goede niveau te komen. In een van de lessen na de wedstrijd volgt meestal een echte overhoring over dat onderwerp, maar dan weten ze welke vragen ze kunnen verwachten.
De onderwerpen die ik op deze manier in een wedstrijd breng: rekenen met machten en exponenten; rekenen met groeifactoren en exponenten; rekenen met logaritmen; regels van differentiëren en integreren; vergelijkingen oplossen. Collega's met fantasie kunnen vast zelf nog onderwerpen toevoegen: rekenen met negatieve getallen, rekenen met letters, symmetrische figuren, telproblemen, kansen enzovoort.

Hoe maak je groepjes in de klas?

Belangrijk is dat dit niet te lang gaat duren.
- Laat ze zelf kiezen. Nadeel is dat leerlingen die normaal bij elkaar zitten dat nu ook doen. Dit kun je oplossen door te zeggen dat ze nu eens bij iemand moeten gaan zitten waar ze dat anders nooit doen. Kans is wel dat er dan altijd een paar (minder populaire) leerlingen overblijven.
- Geef bij binnenkomst de leerling een briefje met een getal uit de stapel 1 t/m 32 (die je natuurlijk standaard in je lokaal hebt). Je deelt bijvoorbeeld uit van 1 t/m 25, dan worden dat zeven groepjes: 1, 8, 15, 22 & 2, 9, 16, 23 & 3, 10, 11, 24 enzovoort. Vier groepjes van 4 en drie van 3; dat schrijf je op het bord.
- Zorg voor voldoende aantal kwartetten, door ansichtkaarten of plaatjes (of zelf g emaakte tekeningen) in vieren te knippen in de vorm van puzzelstukjes; of door van een kaartspel een aantal keer vier dezelfde uit te zoeken: vier boeren, vier heren enzovoort. Deze week heb ik telkens viertallen smileys gemaakt in verschillende kleuren ☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺; tel van te voren het aantal puzzelstukjes van de kwartetten af die je nodig hebt afhankelijk van het aantal leerlingen in de klas; bij binnenkomst krijgen ze willekeurig puzzelstukjes, de drie of vier die bij elkaar passen vormen een groepje.
- Deel zelf in, waarbij je de zwakkere leerlingen bij de slimmere indeelt; of jongens en meisjes bij elkaar of juist gemixt. Als je genoeg varieert dan doen de leerlingen er ook niet moeilijk over.

Uitgangspunten
- De wedstrijd duurt 1 lesuur.
- Het onderwerp is net behandeld, maar het verwerkingsniveau ligt nog niet vast.
- Er zijn (meer dan) voldoende opgaven, niet te lang, en het antwoord is een getal of uitdrukking (snel na te kijken).
- Aan het eind van de les moet de winnaar bekend zijn, en ontvangt het winnende groepje haar beloning (twix, mars, milkyway, bros, paasei enzovoort).

De voorbereiding
Het begint met het samenstellen van een serie opgaven die de vaardigheden toetst in opklimmende graad van moeilijkheid. In de les(sen) voorafgaande aan de wedstrijd wordt deze aangekondigd. "Zorg ervoor dat je de stof goed leert, want anders benadeel je de groep waarmee je de wedstrijd moet doen." Om het geheel goed te laten verlopen is het nodig dat de tafels in viertallen bij elkaar staan en dat meteen bij het begin van de les de groepjes worden gemaakt; ***zie***

kadertekst. Er moeten voldoende opgavenbladen zijn, voor elke leerling eentje. Er moet voor elk groepje een officieel antwoordenblad zijn. Er moeten blaadjes klaar liggen waarop de sommen gemaakt en aan elkaar uitgelegd kunnen worden. Een variant die ik ook wel gebruik is dat ik in het midden van elk groepje tafels een whiteboard leg, met vier stiften en uitveegdoekjes. Die moeten dan wel klaar staan en schoon zijn. En de stiften moeten gecontroleerd zijn op inkt.
Maar ook niet onbelangrijk is dat ik zelf een scoreblad van de hele klas heb. Dus alle opgavennummers met antwoorden bovenaan en daaronder de ruimte om van 7, max 8 groepjes de scores te kunnen invullen. Soms is het antwoord niet goed en mogen ze voor een half punt nog een tweede poging wagen.

De wedstrijdles / de uitvoering

Bij binnenkomst worden de groepjes ingedeeld en elk groepje krijgt een nummer. Elk groepje stelt een ‘schrijver’ aan die de namen van de groepsleden en – als het zo ver is – de antwoorden moet noteren. Een antwoord mag pas op het officiële antwoordblad van het groepje gezet worden als elk groepslid het antwoord snapt en ook kan navertellen. Steekproefsgewijs controleer ik of dit zo is door aan enkele (bij voorkeur de zwakke) leerlingen te vragen of hij/zij kan vertellen hoe ze aan het antwoord zijn gekomen. Als deze leerling het niet weet gaat het punt er weer af! Op die manier hebben ze al gauw door dat ze elkaar echt goed moeten uitleggen hoe het zit. Dat werkt prima. Ik loop tijdens de les de groepjes een voor een af en noteer welke antwoorden goed zijn met 1 punt, bij fouten zet ik een x. In enkele gevallen wordt een tweede poging toegestaan, dan voor een half punt. Halverwege de les geef ik meestal een tussenstand aan. Na een hectisch begin is er na een halve les wel tijd om de tot dan toe behaalde punten op te tellen en achter een streep op het scoreblad te zetten. Drie minuten voor het eind van de les is het “stop”. Er kunnen nog snel wat gevonden antwoorden worden gecontroleerd, maar dan moet daarna de eindscore van alle groepjes bekend worden gemaakt en krijgen de winnaars een beloning.

Een variant op dit soort wedstrijdjes is een estafettevorm. De vragen worden nu een voor een uitgedeeld. Zodra een antwoord op een opgave gevonden is kan gescoord worden (ik schrijf op goed = 1 punt of fout = 0 punten, soms een tweede poging voor ½ punt). De schrijver rent naar me toe, laat het antwoord zien en neemt de volgende opgave mee of gaat voor een tweede poging. Deze vorm van wedstrijdjes vraagt meer organisatie, want voor elk groepje moeten de opgaven klaar liggen, op volgorde. Je moet ook snel kunnen noteren welke antwoorden goed/fout zijn. Ook het checken of elk lid van het groepje het snapt is nu moeilijker uit te voeren.

Enkele voorbeeldopgaven

Voor 4-vwo wiskunde B:
Schrijf als macht van 2: $\frac{16\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}$

Schrijf als één breuk: $1\frac{1}{2}\cdot 3^{-2}\cdot(\sqrt{2})^{0}$
Schrijf anders, vereenvoudig, schrijf zonder negatieve exponenten, zonder wortel in de noemer enzovoort: $(\frac{1}{a})^{-2} = \ldots$

Voor 5-vwo wiskunde B:
$^{2}\log\sqrt{8} = \ldots$, want ...
$^{\sqrt{5}}\log 25\sqrt[3]{5} = \ldots$, want ...
Met behulp van een rekenmachine is berekend dat $^{5}\log 3 \approx 0{,}683$. Benader nu $^{5}\log(25\sqrt{3}) = \ldots$

Voor 5-havo wiskunde A:
Neem aan dat het aantal inwoners van een stad exponentieel is gegroeid.
In de tabel ***van figuur 1*** zie je van enkele jaren het aantal inwoners.
a. Met hoeveel procent groeide het aantal inwoners per 5 jaar?
b. Wat mag je niet doen als je het groeipercentage per jaar wil berekenen?
c. Bereken met hoeveel procent per jaar het inwonertal groeide.
d. Bereken het aantal (ongeveer) in 2011.
e. Wat mag je niet doen bij terugrekenen?
f. Hoeveel inwoners had de stad (ongeveer) in 1953?

Voor 6-vwo wiskunde A:
Bereken de afgeleide functie van
$h(t) = -0{,}03t^{2} + \frac{t}{4}$
Differentieer $f(x) = 2x^{3}\sqrt{x}$
Voorbeeldopgave van de estafettevariant

4-vwo wiskunde B:
Los de volgende vergelijkingen exact op:
a. $x^2 - 5x - 24 = 0$
b. $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
c. $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$

Werkt het?

Mijn ervaringen met deze manier van werken zijn zeer positief. Vaak willen de leerlingen na afloop de goede antwoorden op de vragen die ze fout hadden nog weten. Ze krijgen het opgavenblad mee naar huis om het te bestuderen en als ze willen nog verder af te maken. In een volgende les kunnen ze dan nog bij me komen om antwoorden en uitleg te vragen.
Vaak is de eerste versie van de serie vragen die je maakt nog niet ideaal. Het is dus belangrijk dat je ook bij je zelf te rade gaat en de opgaven naderhand mogelijk aanpast voor een volgend jaar. Tijdens het rondlopen mag je best eens een tip geven of ze een beetje op weg helpen. Het gaat er tenslotte om dat ze met plezier aan het onderwerp bezig zijn. De wedstrijd is niet het doel van de les, maar het samen werken aan het eigen maken van een stukje wiskunde.
Wil je een voorbeeld van een wedstrijd?
Heb je zelf ook leuke ervaringen?
Mail me gerust: *robvanoord@tiscali.nl*.

Info

Voor een voorbeeld van een wedstrijd zie: *www.nvvw.nl/media/downloads/eucl(882)wedstrijd.pdf*

figuur 1

jaar	1953	1990	1995	2011
aantal inwoners	..	275000	318800	..

Over de auteur

Rob van Oord is wiskundedocent aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen, en ook voorzitter van de werkgroep havo-vwo van de NVvW.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Getuigen

[Danny Beckers]

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs.
In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

Sciencefiction was vanaf de jaren '30 van de twintigste eeuw tot eind jaren '60 een waanzinnig populair genre met een bloeiende (sub)cultuur. Er waren sciencefiction schrijvers voor die tijd; en na die tijd zijn er nog vele boeken en films in het genre gemaakt. Maar de naoorlogse crisisjaren en de decennia daarna – inclusief de tweede wereldoorlog – boden een voedingsbodem van ongebreideld wetenschappelijk optimisme die een ongekende hoeveelheid sciencefiction auteurs heeft voortgebracht. De meeste sciencefiction-auteurs maakten geen gebruik van wiskunde. Allerlei soorten wetenschap deden het heel goed in sciencefiction, maar de verhalen werden toch vooral gedomineerd door ingenieurs, chemici en fysici; wiskunde speelde nauwelijks een rol. Een van de weinige sciencefiction-auteurs die wiskunde een thema maakte van een van zijn beroemde boeken, was Isaac Asimov (1920-1992). Asimov was de zoon van een Russisch-Joodse emigrant die zich begin twintigste eeuw in de Verenigde Staten had gevestigd en daar een keten van snoepwinkels was begonnen. In die winkels werden ook de populaire tijdschriften verkocht, met titels als *Astounding stories*, en het was langs die weg dat Asimov voor het eerst met het genre in contact kwam. Het inspireerde hem tot het schrijven van sciencefiction-verhalen én tot het volgen van een carrière als wetenschapper.

Asimov studeerde hard en werd uiteindelijk hoogleraar in de biochemie aan de universiteit van Boston. Als hoogleraar schreef hij veel wetenschappelijke en populair-wetenschappelijke bijdragen, maar hij is vooral bekend gebleven vanwege zijn robot-serie, waarin hij speelt met de consequenties van logische wetten en de rol daarvan in kunstmatige intelligentie; en vanwege de *Foundation*-trilogie (***zie figuur 2***).

figuur 1 Isaac Asimov (1920-1992)

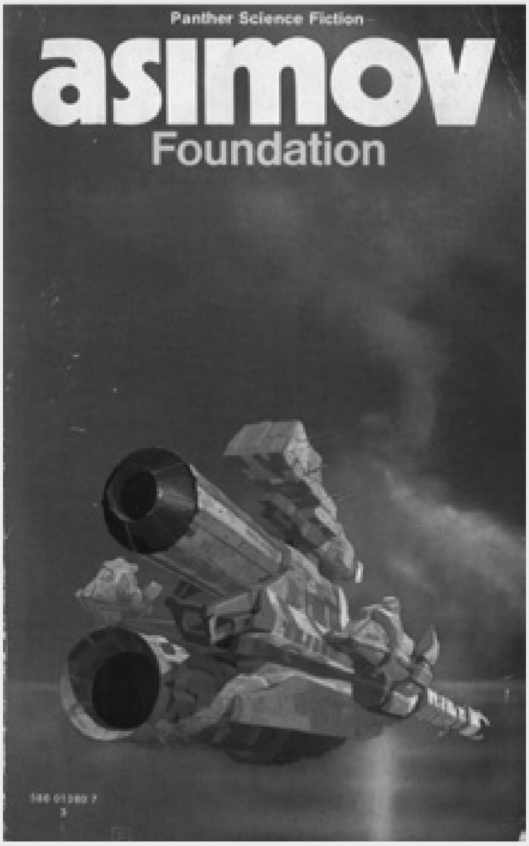
In het eerste deel van die trilogie, *Foundation* (1942), beschrijft Asimov een tak van wetenschap die ons in een verre toekomst in staat zou stellen om de toekomst te voorspellen: de psychohistorie. De psychohistorie is – in weerwil van de naam – een tak van wiskunde die op basis van statistische berekeningen voorspellingen kan doen over groepen mensen die groot genoeg zijn en zich niet bewust zijn van het feit dat ze worden blootgesteld aan psychohistorische analyse. Het verhaal begint bij de jonge wiskundige Gaal Dornick, die is uitgenodigd voor een sollicitatiegesprek bij Harry Seldon, de bedenker van de theorie van de psychohistorie. Met zijn theorie heeft deze grote wiskundige zich echter in de nesten gewerkt: hij heeft berekend dat het twaalfduizend jaar oude keizerrijk ten onder zal gaan en dat een lange periode van chaos zal volgen. Hij heeft een plan om de periode van chaos tot een minimum te beperken. Vanwege zijn voorspellingen en zijn plannen wordt hij door de gevestigde orde echter gewantrouwd. De jonge Gaal is getuige van een ondervraging van Seldon: er ontspint zich een dialoog tussen de ondervrager (Q) en de wiskundige (A):

Q. You do not consider your statement a disloyal one?
A. No, sir. Scienitific truth is beyond loyalty and disloyalty.
Q. You are sure that your statement represents scientific truth?
A. I am.
Q. On what basis?
A. On the basis of the mathematics of psychohistory.
Q. Can you prove that this mathematics is valid?
A. Only to another mathematician.
Q. (with a smile) Your claim then, is that your truth is of so esoteric a nature that it is beyond the understanding of a plain man. It seems to me that truth should be clearer than that, less mysterious, more open to the mind.
A. It presents no difficulties to some minds. The physics of energy transfer, which we know as thermodynamics, has been clear and true through all the history of man since the mythical ages, yet there may be people present who would find it impossible to design a power engine. People of high intelligence, too. I doubt if the learned Commissioners –

Asimov maakt hiermee duidelijk dat de afstand tussen wetenschap en het publiek dusdanige vormen aannam dat voor velen geen onderscheid meer bestond tussen wetenschap en geloof. Het is een van de drijfveren achter zijn populair-wetenschappelijke werk, want hij herkende de kloof tussen publiek en wetenschappers al in zijn tijd. In de *Foundation* speelt hij zelfs met de gedachte dat wetenschap zich ook als geloof kan 'verkopen'. Daarnaast laat hij in de laatste alinea zien dat ook voor wetenschappers langzaamaan een probleem opdoemt: hoog opgeleide mensen zijn niet langer in staat om de gehele wetenschap te overzien. Ook zij moeten op bepaalde aspecten, vertrouwen stellen in collegae die wel in staat zijn om bepaalde dingen uit te rekenen.

Wat zegt een dergelijke roman nu over het wiskundeonderwijs? Op de eerste plaats illustreert het boek dat Asimov in de VS van de jaren'30 tijdens zijn wetenschappelijke opleiding – hij studeerde af in scheikunde en promoveerde ook in die richting – een goed beeld kon krijgen van wiskunde en de mogelijkheden die het vak bood. Goed genoeg om een adequate (oppervlakkige) beschrijving te geven van een fictief vakgebied, dat qua wetten in veel opzichten lijkt op de hydrodynamica. Hoewel hij zelf geen wiskunde studeerde, had hij toch voldoende meegekregen om een geloofwaardige wiskundige gemeenschap te schetsen. De groeiende afstand tussen de wetenschappen die hij constateert was in zijn tijd dus nog niet zo groot als heden ten dage – dankzij zijn docenten!
Op de tweede plaats illustreert de gretige afname van de boeken van Asimov ook dat er een (leken?)publiek bestond dat zich interesseerde voor wiskunde; een groep die de rol die de wiskunde speelde in de thermo-, vloeistof- en aerodynamica weliswaar inhoudelijk niet bevatte, maar de verrijkende consequenties ervan begreep.
Een groep bovendien, die geloof hechtte in wiskunde als een manier om meer grip te krijgen op onze samenleving. Dit rotsvaste vertrouwen vond zijn oorsprong natuurlijk in de technische/wetenschappelijke vooruitgang van de twintigste eeuw, maar werd ook gevoed door talloze wiskundeleraren die erin slaagden een deel van die ontwikkelingen op te eisen voor hun vakgebied – terwijl juist die delen van de wiskunde nauwelijks voor leerlingen toegankelijk waren.
De uitdaging is duidelijk: wie schrijft er een sciencefiction-roman over wiskunde?

figuur 2 Voorblad van Asimov's Foundation



Over de auteur
Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

Een goed begin is ...

[Erika Bakker]

Mijn naam is Erika en ik ben 23 jaar. Komend jaar ga ik mijn LIO-stage wiskunde lopen en zal ik in elk nummer van Euclides een stukje te schrijven waarin ik mijn belevenissen met jullie deel. Nog voordat mijn stage is begonnen, heb ik al genoeg meegemaakt om over te vertellen, maar eerst nog heel kort iets over mijn studie.
In 2007 begon ik met mijn Bachelor wiskunde in Groningen. Tijdens de Bachelor heb ik de Educatieve Minor gedaan. Een half jaar lang liep ik toen drie dagen in de week stage. In het eerste jaar van mijn Educatieve Master heb ik ook stage gelopen als voorbereiding op het LIO-jaar. Mede dankzij deze stages heb ik enorm veel zin in het komende schooljaar.
Half juni kreeg ik een telefoontje van mijn vakdidacticus. Zij had LIO-plaatsen beschikbaar, meer dan één zelfs. Wat een luxe: ik mocht dus zelf een school uitkiezen. Na even thuis overlegd te hebben en de voor- en nadelen afgewogen te hebben, heb ik een school uitgekozen. Ik had er meteen al zin in: lekker op de fiets naar school, net als in de tijd dat ik zelf nog op de middelbare school zat, alleen nu iets verder.
Al de volgende dag kwam de bevestiging dat ik inderdaad op die school geplaatst werd. Ik was heel erg blij en stuurde direct een e-mailbericht naar de school om een afspraak te maken voor het kennismakingsgesprek. Een week hoorde ik niets, maar omdat scholen het zo vlak voor de vakantie ook druk hebben, maakte ik me nog niet ongerust. Toen werd ik eindelijk gebeld door iemand van school. Weliswaar was dat niet degene met wie ik een kennismakingsgesprek zou kunnen afspreken, maar het was wel een gezellig telefoongesprek en hij verzekerde me dat de juiste persoon nog contact met me op zou nemen voor het gesprek. Geen vuiltje aan de lucht dus.
Op een dinsdagmiddag, eind juni, kwam er een mailtje van de universiteit: mijn nieuwe stageschool had plotseling alle stageplaatsen teruggetrokken. Ik had dit bericht totaal niet verwacht en de tranen sprongen me dan ook in de ogen. Het was twee weken voor de zomervakantie en ik dacht dat ik een goede stageplaats had. Nu moest ik plotseling op zoek naar een nieuwe stageschool, maar welke school zou er op zo korte termijn nog een plekje voor mij hebben?
Twee dagen later bood de universiteit me een nieuwe plek aan, maar op een school die wat betreft locatie voor mij erg lastig te bereiken was; dus dat was eigenlijk geen optie. Misschien was er ook nog een plek op een school vlak bij mijn woonplaats, maar dat was nog onduidelijk. Ik heb toen maar meteen zelf actie ondernomen: één telefoontje verder had ik een e-mailadres van de school en daar heb ik onmiddellijk mijn hele verhaal naartoe gemaild. Deze nieuwe school reageerde supersnel: mijn mailtje van vrijdag werd in het weekend beantwoord en op maandag om half elf maakte ik al kennis met de schoolopleider. Zij had ook al een afspraak met mijn vakcoach wiskunde voor mij gemaakt. Een uur later liep ik heel blij de school weer uit. Het enthousiaste gevoel dat ik had voordat mijn eerste stageplek werd ingetrokken, was nog niet helemaal terug, maar het begon wel weer te komen.
Een week later was ik weer op school, waar ik van mijn vakcoach boeken en planners kreeg, zodat ik me in de vakantie al vast een beetje kon voorbereiden op al het nieuws in het nieuwe schooljaar. Vervolgens kwam ik in de gang mijn schoolopleider tegen, die me uitnodigde voor het personeelsuitje die avond. Een beetje overdonderd was ik wel, maar ik besloot om er gewoon heen te gaan. Toen ik in het restaurant kwam, was mijn coach er al, dus ik kon naast hem gaan zitten. Het eerste kwartiertje was alles wel een beetje onwennig. Maar toen we aan tafel gingen, zaten we in kleinere groepjes en was het gemakkelijker om met anderen te praten. Ik heb meteen al een paar namen geleerd. Het werd uiteindelijk een heel gezellige avond en toen ik naar huis reed, was mijn enthousiasme weer helemaal terug.

Ik begin vol goede moed aan het schooljaar en heb er heel veel zin in.

Errata Euclides 88(1)

Op pagina 54 in nummer 1 van jaargang 88 moeten de onderschriften bij de illustraties luiden:
figuur 2 Minerva bestuur eind 19e eeuw (Bron: Beeldbank Groningen)
en
figuur 3 Minerva lesruimte, gravure naar een schilderij uit 1836 (Bron: Beeldbank Groningen)

Pas je uitleg aan

INTERVIEW MET YVONNE KILLIAN

[Thomas Colignatus]

Op het ELWIER-symposium van 8 juni 2012 waar het *Handboek wiskundeonderwijs* ten doop werd gehouden, ontmoette ik Yvonne Killian, leraar wiskunde op het ECL in Haarlem en bekend van een aantal publicaties in *Euclides* [1] Bij drankjes en nootjes bleek het handboek allerlei didactische handvatten te bieden, met een accent op vwo/havo, maar bleek ook Yvonne vol didactische ideeën te zitten. Gebaseerd op haar ervaringen op vwo/havo maar ook met een interessant accent voor vmbo.

Waar het *Handboek* een breed didactisch fundament legt en vrijelijk uitgaat van zeven geheugenplaatsen, heeft Killian de veel praktischer vraag: 'Hoe krijg ik dit specifieke punt in hun ≤ 7 geheugenplaatsen?' Peter Kop noemt dit ook wel de *kleine didactiek*.

'Bij combinatoriek heb ik besloten om, tegen de gewoonte in, eerst de combinaties en daarna pas de permutaties te bespreken. Groepjes maken en deze pas *daarna* sorteren is een praktischer scenario dan rijtjes maken en die daarna weer ongedaan maken. In de uitleg hoe je van het ene naar het andere gaat, en wat dus permutaties zijn, wordt zo vermenigvuldigd in plaats van gedeeld, en dat vinden ze gemakkelijker. Aantallen mogelijke combinaties presenteer ik eerst met een paar voorbeelden van het aantal mogelijke groepjes van twee elementen, daarna komt de "truc" met het nCr-knopje voor grotere groepen. Uitleggen wat dit knopje doet, doe ik pas na de permutaties - die ik in eerste instantie als nCr × r! laat berekenen. Daarmee voorkom ik ook dat ze, zoals anders veel gebeurt, nCr en nPr met elkaar verwarren.'

Mijn tegenwerping ligt voor de hand: 'Maar analytisch zijn permutaties het startpunt en daarna volgen combinaties.'

'Gangbaar wel. Maar je doel is toch dat de leerlingen je verhaal kunnen volgen? Dat ze inzien wat combinaties en permutaties zijn en wat het verband ertussen is, en dan alles ook nog eens kunnen onthouden? Ook na het proefwerk? En dat doel is toch veel belangrijker dan dat je als leraar een keurige wiskundig-analytische volgorde aanhoudt? Wanneer ik eerst combinaties bespreek en daarna het aantal combinaties vermenigvuldig met het aantal mogelijke rijtjes voor zo'n combinatie, dan snappen ze dat een stuk sneller en beter dan wanneer ik het in de gebruikelijke volgorde uitleg. Eerst nCr op de rekenmachine, daarna verder vermenigvuldigen. Het is een wereld van verschil. Pas je uitleg dus aan.'

We zien hier natuurlijk ook de leerstijlen van Kolb: abstract/concreet en actief/passief. Wanneer je als leerling niet abstract bent aangelegd dan geeft een abstracte uitlegstructuur weinig ankers. Dan moet je als leraar inderdaad aansluiten bij wat concreet gedaan moet worden om, via oefenen en met succes toepassen en het resultaat zien, begrip te krijgen voor wat het, praktisch, betekent.

'Zet haakjes, vertel ik de leerlingen,' zegt ze. 'Een breuk presenteer en beschrijf ik als een *deling tussen haakjes*: ½ wordt (1 : 2) en 2½ wordt (5 : 2) of (2 + 1 : 2). Dan worden ze niet verrast wanneer ze ergens voor *x* een breuk in moeten vullen of behalve die breuk nog meer getallen moeten intikken op de rekenmachine. Je vereenvoudigt de breuk maar haalt de helen er niet uit. Het blijft 5/2 in plaats van 2½. Voor de plaats op de getallenlijn kun je immers ook naar de decimale uitkomst op de rekenmachine kijken.

Ook om een getal of letter met een exponent zet ik steeds vaker haakjes, zodat een negatief getal op de juiste manier aangepakt wordt. Voor getrainde wiskundigen staan die haakjes daar al in gedachten, maar voor mijn leerlingen kan ik die beter uitschrijven.'

We zitten inmiddels bij een Indiaas restaurant. Dat ik niet met open mond luister, komt door de etiquette en een goede kok. Wie is Yvonne Killian ? Ze heeft de jaren '70 meegemaakt en heeft een dochter die de middelbare school aan het verlaten is. Na een gymnasium-bèta deed ze diverse opleidingen, maar er kwam altijd wat tussen. 'Na mijn eindexamen en een jaartje buitenland, begon ik aan de toen nog TH Delft met een studie bouwkunde, maar ik stapte over naar wiskunde, en daarna naar informatica. Om financiële redenen ging ik uiteindelijk werken naast mijn studie, waardoor ik het afmaken van de studie uitstelde en tenslotte afstelde - helaas. Ik werd specialist in SQL, gebaseerd op de relationele wiskunde, bij Oracle, gaf er les aan klanten en ontdekte dat lesgeven het leukste vak is dat er is. Ik werd leraar informatica op de Hogeschool Holland en weer daarna werd het wiskunde, in het voortgezet onderwijs. Ik koos, omdat iedereen me dat adviseerde, voor de lerarenopleiding, in plaats van verder te gaan met de universiteit.' Ze stuurde me ten behoeve van dit interview haar aparte maar interessante cv. Met haar gymnasium zou een eerstegraadsopleiding voor de hand liggen en die wil ze inderdaad graag gaan doen.

'De houding ten opzichte van het vmbo klopt vaak niet,' stelt ze. 'Regelmatig wordt er beweerd dat de leerlingen het verschil toch niet zien tussen een goede definitie en eentje die er een slag naar slaat, en het ook niet merken als een som niet klopt. Daar ben ik het niet mee eens. Zelfs als dit waar zou zijn, is dit geen reden om vmbo-leerlingen niet serieus te nemen en ze niet precies te vertellen hoe alles zit. Ik vertel ze dus ook dat er fouten in hun boeken staan. Dat geeft nogal eens heftige discussies. Dat is hun manier om daarmee om te gaan. Niet ieder in zijn eigen koppie, maar allemaal samen als een groep. Als docent kun je dan aangeven waar het om gaat.'

'Voor oppervlakte kun je dezelfde formule geven voor driehoek, rechthoek, vierkant, parallellogram en trapezium, namelijk hoogte maal gemiddelde breedte. Dat is veel gemakkelijker dan allemaal verschillende formules.' Dat schreef ze al eerder in *Euclides*. Sommigen kunnen hierin meegaan, en het zelfs mooi vinden, maar er is het bezwaar van Steven Wepster dat de oppervlakte van een driehoek analytisch fundamenteler is en ten grondslag ligt aan de algemene formule.[2] 'Dat is wel zo', erkent Yvonne, maar ze houdt liever rekening met wat leerlingen moeten en kunnen onthouden, zoals ze al vertelde toen we het over permutaties hadden. 'Leerlingen op het gymnasium kunnen de aparte formules en de analytische relaties ertussen misschien waarderen. Maar voor de meeste vo-ers is dat niet aan de orde en is het nuttiger en logischer om één formule te onthouden, waarvoor ze alleen maar het gemiddelde van twee getallen hoeven te kunnen berekenen, en inzien dat je een driehoek kunt zien als een trapezium met een bovenzijde met lengte 0. Natuurlijk, je kunt laten zien dat een trapezium is opgebouwd uit twee driehoeken, zodat driehoeken in zekere zin fundamenteler zijn, maar samen geven ze toch weer dat gemiddelde, en dat is precies wat ik ze uit laat rekenen. Uiteraard vertel ik dat je andere veelhoeken zoals vliegers kunt opdelen in driehoeken.'

'Ik houd ook niet van halve verhalen vertellen. Als je begint met machten, waarom zou je dan zwijgen over 0 en de negatieve exponenten? Als ze daar later iets mee moeten gaan, doen is het prettig als ze het al een keer eerder hebben gezien. Wat mij betreft kappen we met de *n*-de machtswortels. Laten we deze vanaf het begin vervangen door gebroken exponenten. Het is immers precies hetzelfde, en wat is de meerwaarde van het wortelteken? De leerlingen moeten dan wel vanaf het begin leren goed haakjes te zetten, daar ligt een struikelblok. Maar ik heb ze al geleerd dat een breuk een deling tussen haakjes is, dus die haakjes zetten ze vanzelf al, zeker als ik deze definitie nog een keertje herhaal.'

We zijn weer terug aan het begin. Er zit een systeem in, zo klein is die didactiek niet. Van die *n*-de machtswortel heeft ze me meteen overtuigd, ik herken mijn eigen gedachten hier.
Later stuurt ze dit bericht: 'Eindelijk een goed en duidelijk voorbeeld bedacht, ook nog eens makkelijk te onthouden, voor $x^a \cdot x^b$ versus $(x^a)^b$, want dat *blijft* maar fout gaan, ofwel: gokwerk …' Haar aanpak is leerlingen deze strategie te geven:

Gebruik het volgende ezelsbruggetje (maar zet zo'n 1 nooit in je uitkomst):
$x^1 \cdot x^1 = x^2$
$(x^1)^1 = x^1$
Zet dit bijvoorbeeld in een hoekje bovenaan je proefwerkblaadje.'

Het is mooi, een collega op zo'n manier met de leerlingen en de stof bezig te zien. Voor belangstellenden geeft ze haar e-mailadres: *ykillian@planet.nl* .

Noten

[1] In: *Euclides*, 2006(5), pag. 247, *Formules onthouden voor cirkel en bol*; in: *Euclides* 2006(7), pag. 338, *De stelling van Pythagoras voor de brugklas of groep 8*; in: *Euclides* 2009(8), pag. 296, *Grenslengte*; in: *Euclides* 2010(4), pag. 168, *Oppervlakteformules*. Zie ook reacties van lezers op het Forum.
[2] Zie: *www.nvvw.nl/page.php?id=8091&rid=578&topicID=1469&view=list_posts&page=1*

Over de auteur

Thomas Colignatus is econometrist en leraar wiskunde.
E-mailadres: *cool@dataweb.nl*
Website: *www.dataweb.nl/~cool*

Uitdagende problemen

ZIN IN EEN PORTIE FRITES?

[Jacques Jansen]

In verschillende leerjaren kan onderstaand materiaal ingezet worden. Eerst wordt de uitslag van een kartonnen puntzak frites bekeken en onderzocht hoe je (zelfs exact) de oppervlakte ervan kunt berekenen.
Daarna wordt onderzocht hoe je uit een cirkelvormig stuk karton een puntzak kunt maken zodanig dat er zoveel mogelijk frites in kan. Er wordt dus gezocht naar de maximale inhoud. De docent kan een of zelfs meerdere lessen hiervoor uittrekken. Het is handig om puntzakken beschikbaar te hebben.

Elk jaar organiseert mijn sectie een studiedag. Allerlei onderwerpen kunnen dan op de agenda geplaatst worden waar we in de loop van het jaar niet aan toe komen. Zo werd ik op 8 mei uitgenodigd om een presentatie te houden over *uitdagende problemen*. Ik voelde me uitgedaagd maar ik hield het wel in de opa-sfeer. Immers ik was net op 30 april voor het eerst opa geworden. Ik begon mijn presentatie met het geboortegewicht van mijn kleindochter. In een volgend artikel daar meer over. Via mijn PowerPoint liet ik mijn collega's weten dat kleindochter al gek is op frites. Beetje overdreven na een week, maar goed ik was een kersverse trotse opa.

foto 1

foto 2

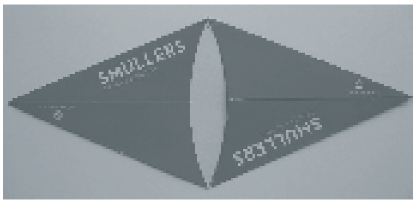


foto 3


foto 4

Uitslag puntzak

Frites zitten vaak in een bakje of zak. Vaak is de verpakking uit licht karton gemaakt. Op een station kocht ik een tijdje geleden frites in de volgende verpakking (***zie foto 1***). Al snel trekt de vormgeving van het friteszakje mijn aandacht. Het friteszakje is kegelvormig maar aan de voorkant is een deel weggenomen. Waarschijnlijk om het de consument makkelijker te maken de frites te pakken. De snackbar noemt overigens het friteszakje een puntzak.
Het is zonde om de puntzak open te scheuren dus vraag ik aan de man van de snackbar een nieuw schoon exemplaar. Meteen krijg ik een nieuwe puntzak. Thuis gekomen leg ik de platte puntzakken tegen elkaar en tot mijn verbazing passen de puntzakken precies in een rechte hoek van een vierkant (***zie foto 2***). Hoe toevallig is dat eigenlijk?
Bij de tweede puntzak knip ik het witte deel, afgegrensd door cirkelbogen, weg. Ik denk al gauw aan een kwadratisch verband in verband met mijn ontwikkelwerk voor wiskunde C [1]. Vandaar het volgende: Veronderstel dat de afmetingen van het vierkant karton niet precies bekend zijn. Een zijde van het vierkante stuk karton stellen we gelijk aan x cm.
Voor de oppervlakte van de uitslag geldt:
$O = a \cdot x^2$
De volgende vraag kan dan gesteld worden: Leg uit waarom a een getal is dat tussen 0,5 en 1 in ligt.
Interessant is om de volgende vraag te stellen: Schat welk percentage de uitslag van het stuk karton in beslag neemt. De antwoorden van mijn collega's tijdens de presentatie varieerden van 65% tot en met 80 %. Later blijkt dat de leerlingen ongeveer hetzelfde schatten.
De vraag is natuurlijk: *hoe kun je de oppervlakte berekenen van de uitslag van de puntzak? En kan het ook exact?*
In ***foto 3*** kun je zien dat van de uitslag een ruit te maken is waarvan de oppervlakte te berekenen is. Er zijn in die ruit vier congruente rechthoekige driehoeken aan te wijzen. Neen, we doen het even niet met de diagonaalformule. We doen het als volgt: Twee overstaande hoeken van de ruit zijn elk 45 graden.

$$\begin{aligned}\text{Opp(ruit)} &= 4 \cdot \tfrac{1}{2}\sin(22{,}5^\circ) \cdot x \cdot \cos(22{,}5^\circ) \cdot x \\ &= 2 \cdot \sin(22{,}5^\circ) \cdot x \cdot \cos(22{,}5^\circ) \cdot x\end{aligned}$$

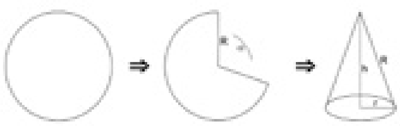
Met behulp van de dubbelformule $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ geeft dat exact $\sin(45^\circ) \cdot x^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x^2$.
Ongeveer 71 procent van een vierkant van x bij x cm wordt in beslag genomen door de uitslag. Vervolgens kun je weer kijken naar eerder gemaakte schattingen.

Inhoud puntzak

Bij het demonstreren van een puntzak kan aan de leerlingen gevraagd worden hoe je een dergelijke puntzak maakt. Knip de puntzak maar open van rand naar punt(top). Bij een aantal even grote cirkelvormige stukken papier kunnen happen(segmenten dus) weg worden geknipt. Zorg dus dat er een voorraad aanwezig is.
Bij een stuk of vijf pogingen kan geschat worden welke de grootste inhoud oplevert. De vraag is natuurlijk waar je op moet letten bij het wegknippen van een segment. Er ontstaat vast een moment waarop de

(halve) tophoek kan worden geïntroduceerd (zie ***figuur 1***). Puntzak staat nu op zijn kop (puntmuts). Handig bij het maken van schetsen.
Vraag aan de leerlingen: Kun je nu uitrekenen hoe groot je het uitgeknipte segment moet kiezen om een zo'n groot mogelijke inhoud te krijgen? En hoe groot moet de tophoek zijn?
Elke keer als je uit het cirkelvormig papier een hap (een segment met hoek α) wegneemt krijg je een andere oppervlakte maar ook een andere inhoud. Dus is het raadzaam om naar de verhouding te kijken van inhoud en oppervlakte. Leerlingen kunnen bij deze vijf pogingen een tabel maken waarbij oppervlakte en inhoud met elkaar worden vergeleken. Dit kost wat tijd maar het is wel een goede oefening.

We willen eigenlijk niet de formule van de verhouding uit de lucht laten vallen. Zie hiervoor ook het mooie artikel van de wiskundemeisjes van 7 juli 2012 in de Volkskrant[3] over Timothy Gowers, een vooraanstaande Britse wiskundige. Gowers pleit ervoor om de leerlingen de formules zelf te laten ontdekken. Zo nodig met enige hulp. Hieronder toch maar stapsgewijs de afleiding:
Voor het gemak kiezen we voor de straal van het cirkelvormig papier een eenheid: $R = 1$. We besteden even geen aandacht aan plakstrookjes en kijken alleen naar de volledige kegel.
Oppervlakte papieren kegelmantel = oppervlakte cirkelvormig papier – oppervlakte weggenomen hap = $\pi - (\frac{\alpha}{360}) \cdot \pi$; zie ***figuur 1***.
Inhoud kegel = $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$



figuur 1 Schematische voorstelling van het maken van een puntzak [2]

Voor de verhouding introduceren we de letter *V*. We leiden voor de leerlingen zo nodig de formule af met een **uitlegmatrix**; zie ***figuur 2***:
Om een puntzak te verkrijgen waar zoveel mogelijk frites in kan gaan we de verhouding *V* maximaliseren. Dat kan door een benadering of zelfs exact.

Uit	volgt	Leg uit waarom
inhoud $= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$ opp $= \pi - (\frac{\alpha}{360}) \cdot \pi$	$V = \frac{\frac{1}{3} r^2 \cdot h}{1 - \frac{\alpha}{360}}$	
lengte overgebleven boog $= 2\pi - (\frac{\alpha}{360}) \cdot 2\pi$ omtrek grondcirkel kegel $= 2\pi \cdot r$ $r = 1 - \frac{\alpha}{360}$	$r = 1 - \frac{\alpha}{360}$ $V = \frac{1}{3} \cdot r \cdot h$	
h en r kun je met elkaar in verband brengen		
$h^2 + r^2 = 1$	$h = \sqrt{1 - r^2}$	
$h = \sqrt{1 - r^2}$	$V = \frac{1}{3} \cdot r\sqrt{1 - r^2}$	

figuur 2

Benadering
De grafische rekenmachine geeft:

figuur 3

Het is verstandig om even stil te staan bij het instellen van het scherm.

Exact
Maar bij de exacte berekening gebruiken we weer de uitlegmatrix. Er moet nu gedifferentieerd worden. Een combinatie van product- en de kettingregel ligt voor de hand. We kunnen ook alleen gebruik maken van de kettingregel; zie ***figuur 4.***

Uit	volgt	Leg uit waarom
$V = \frac{1}{3} \cdot r\sqrt{1 - r^2}$	$h = \frac{1}{3}\sqrt{r^2 - r^4}$	
$h = \frac{1}{3}\sqrt{r^2 - r^4}$	$V' = \frac{\frac{1}{6}(2r - 4r^3)}{\sqrt{r^2 - r^4}}$	
$V' = \frac{\frac{1}{6}(2r - 4r^3)}{\sqrt{r^2 - r^4}} = 0$	$r^2 = \frac{1}{2}$	
$r^2 = \frac{1}{2}$ en figuur 1.	$r = h$ dus halve tophoek is 45 graden	

figuur 4

Van groot belang is de formule $r = 1 - \frac{\alpha}{360}$ in verband met de volgende vraag: Bereken α, de hoek van het uitgeknipte segment (zie ***figuur 1***).
Met formule $r = 1 - \frac{\alpha}{360}$ kunnen we bepalen hoeveel we uit het cirkelvormig stuk papier moeten wegknippen.
Met behulp van $r^2 = \frac{1}{2}$ vinden we $\alpha = 105{,}44°$.

Tenslotte
De vraag is natuurlijk waar een uitdagend probleem aan moet voldoen. Het is aardig als je met een schatting kunt beginnen maar dat kan natuurlijk niet altijd.

- Nieuwsgierigheid opwekken;
- Aansluiten bij beleveniswereld van leerling;
- Zinvol zijn om op te lossen;
- ...

In het geval van het friteszakje kun je natuurlijk kijken hoeveel er van een vierkant stuk karton overblijft of van een cirkelvormig stuk karton. Je kunt verder onderzoeken hoe je het afval nog meer kunt beperken.
Je kunt ook fritesbakjes bekijken met of zonder plakranden en ook kijken naar nog andere vormgeving. Nog meer zin in frites samen met uw leerlingen? In ieder geval: Smakelijk!

Noten
[1] Workshop wiskunde C op studiedag 15 maart 2011 over 'rijen' van auteur van dit artikel.
[2] Zie: *www.davdata.nl/puntzak*
[3] Zie: *www.wiskundemeisjes.nl*

Over auteur
Jacques Jansen is docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

Vanuit de oude doos

A° 1929

[Ton Lecluse]

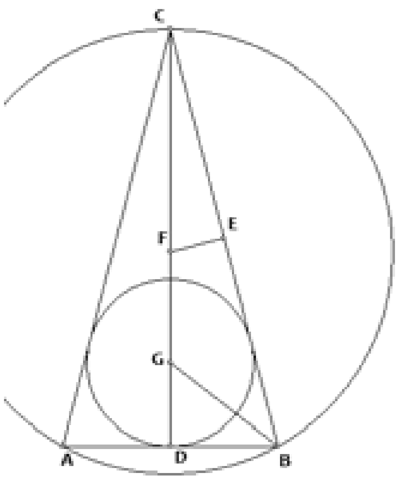
In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.
Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer weer een redelijk pittige analytische opgave uit 1929.
Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Verderop treft u mijn uitwerking aan.

De opgave

Van een gelijkbenige driehoek is de verhouding van de straal van de ingeschreven cirkel tot die van de omgeschreven cirkel als 3 : 8.
Bereken de hoeken.

Een situatieschets



figuur 1

Lukt het u verder?
Enige handvatten, waarbij *F* en *G* de middelpunten van de cirkels zijn:

- $AC = BC$;
- *EF* is middelloodlijn van *BC* en *CD* is middelloodlijn van *AB*;
- *BG* is deellijn van *B*;
- $DG : CF = 3 : 8$.

Een mogelijke aanpak

Hoe kan de gegeven verhouding worden gebruikt?
Hint – De opgave stond in een examen analytische meetkunde.

Mijn oplossing

Er kan worden gekozen voor een analytische aanpak.
We kiezen eerst een geschikt assenstelsel: *AB* als horizontale en *DC* als verticale as, met *D* als oorsprong.
Stel $B = (1, 0)$ en $C = (0, c)$.
Dan is een vectorvoorstelling van de lijn:

$$EF: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}.$$

F heeft *x*-coördinaat 0, dus $\frac{1}{2} + \lambda \cdot c = 0$, dus: $\lambda = -\frac{1}{2c}$.

Hieruit volgt: $F = (0, \frac{1}{2}c - \frac{1}{2c}) = (0, \frac{c^2-1}{2c})$

Dus: $CF = c - \frac{c^2-1}{2c} = \frac{c^2+1}{2c}$ ~ (8)
Nu op zoek naar *G*. Stel nu $DG = h$, zodat $G = (0, h)$.
Gebruik nu (of 'google' even) de afstandsformule van punt tot lijn:

$$d(G, BC) = \frac{|h-c|}{\sqrt{(c^2+1)}}$$

Gelijk stellen aan *DG* levert $h = \frac{|h-c|}{\sqrt{(c^2+1)}}$,

waaruit *h* kan worden vrijgemaakt:

$$DG = h = \frac{-1+\sqrt{(c^2+1)}}{c} \quad \text{~ (3)}$$

Gebruik nu de gegeven verhouding 3 : 8;
dus $8 \cdot DG = 3 \cdot CF$, of:
$8 \cdot h = 3 \cdot CF$

Dan is: $\frac{-8+8\sqrt{(c^2+1)}}{c} = 3 \cdot \frac{c^2+1}{2c}$, waaruit de wortel kan worden vrijgemaakt:
$16\sqrt{(c^2+1)} = 3c^2 + 19$
Na kwadrateren en op 0 herleiden krijgen we $9c^4 - 142c^2 + 105 = 0$, met als exacte oplossingen: $c^2 = 15$ of $c^2 = \frac{7}{9}$
c is positief, dus: $c = \sqrt{15}$ of $c = \frac{1}{3}\sqrt{7}$.

Omdat $c = \tan(\angle A) = \tan(\angle B)$, vinden we:
$\angle A = \angle B \approx 75{,}52248781° \approx 75°31'21"$ of:
$\angle A = \angle B \approx 41{,}40962211° \approx 41°24'35"$
En $\angle C$ mag u zelf doen.
De tekening bevat nog een aantal aardige eigenschappen. Geocadabra verklapt onder andere:

- *AE* staat loodrecht op *BG*;
- vierhoek *ACEG* is een koordenvierhoek;
- $CG : AF = DG : FE = 3 : 2$;
- $AB = BE$;
- driehoek *GBE* is gelijkbenig.

En ook hiermee kunt u zich prima amuseren!

Bron
Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur
Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

De ‘torentjes’-voorrang verklaard

[Hessel Pot]

In de ‘Special 2012’ van Euclides schreef Dick Klingens op pagina 65-66 over de torentjes-voorrang. Hessel Pot bekijkt die zaak hier nog van een andere kant.

$g^{2^3} = g^{(2^3)}$ want $g^{2+3} = g^{(2+3)}$

De haakjesloze stapel-expressie g^{2^3} wordt door iedereen gebruikt voor $g^{(2^3)} = g^8$ en dus *niet* voor $(g^2)^3 = g^6$.
Waarom eigenlijk? Op het eerste gezicht lijkt dat misschien weinig consequent.
Want met expressies als:
$g - 2 - 3$ en $g : 2 : 3$
wordt algemeen een voorrang in de leesrichting bedoeld (van links naar rechts):
$(g - 2) - 3$ en $(g : 2) : 3$
En iemand die voor de machtsverheffing het teken ‘^’ gebruikt in plaats van een hoger geschreven exponent, zal met g ^ 2 ^ 3 waarschijnlijk (g ^ 2) ^ 3 = g ^ 6 bedoelen.
Echter, als de machtsverheffing op de gewone manier wordt aangeduid, dan liggen de zaken net even anders. Die traditionele manier houdt in dat we na de notatie van het grondtal overgaan op een wat hogere schrijfregel voor de expressie die de exponent aanduidt. (En – als het technisch éven kan – gebruiken we voor de exponent ook nog een kleiner symbool-formaat.)
De essentiële vraag is nu: hoe is te zien op welk punt de exponent-expressie *eindigt*?
Degene die de vorm heeft opgeschreven, zal daar géén sluithaakje gezet hebben, want er staat aan het begin van de exponent-vorm ook geen openingshaakje.
Maar …, omdat het *begin* van de exponent-vorm samenvalt met een *verlating* van de grondtal-schrijfregel, zal het *eind* ervan samenvallen met de *terugkeer* naar de schrijfregel voor het voorafgaande grondtal.
In veel gevallen zal die terugkeer naar de eerdere schrijfregel samenvallen met het einde van de algehele expressie.
Het tijdelijk afwijken van de voor het grondtal gebruikte schrijfregel (en evenzo: het tijdelijk afwijken van het voor het grondtal gebruikte symbool-formaat) heeft precies dezelfde functie als een haakjes-paar. En ook dezelfde functie als de vroeger veelgebruikte dekstreep boven een expressie-gedeelte.
Zo staat g^{2n+1} voor g^(2n+1), g^{2^n+1} voor g^(2^n+1), g^{1+2^n} voor g^(1+2^n) en *niet* voor (g^(1+2))^n, en g^{2n} voor g^(2n), hetgeen *niet* strijdig is met de gewoonte dat machtsverheffen vóór vermenigvuldigen gaat (want de exponent bij grondtal g wordt aangeduid door álles wat op g volgt tot waar de schrijfregel terugkeert naar de hoogte bij g).
En ten slotte staat dus ook g^{2^n} voor g^(2^n) en *niet* voor (g^2)^n = g^(2n).
De enigszins contra-intuïtieve torentjes-voorrang berust dus niet op een (helaas wat vreemd gekozen) conventie, maar heeft mijns inziens wel degelijk een goed verklaarbare achtergrond.

In de ‘Special 2012’ van *Euclides* probeerde Dick Klingens op pagina 65-66 om de torentjes-voorrang nog op een geheel andere manier te beredeneren.

Over de auteur
Hessel Pot (1942) is werkzaam geweest als wiskundeleraar en als hoofdredacteur van *Pythagoras*. Hij is grootverzamelaar van oude schoolboeken wiskunde en rekenen; boeken die hij gebruikt bij het zoeken naar antwoorden op vragen van het soort als in dit artikel. Een catalogus van die collectie is te vinden op internet.
E-mailadres: *h.n.pot@hetnet.nl*

PYTHAGORAS

GETALLEN EN/OF PLAATJES?

[Joeri van Ast, Inge Verbree, Harrie Broekman]

Bij het aanleren van de stelling van Pythagoras kunnen we de leerlingen voornamelijk in getallen laten denken (de Babylonische benadering). Het is ook mogelijk ze in plaatjes te laten denken (zoals de Oude Grieken deden) door de meetkundige achtergrond te accentueren. Wij proberen deze gescheiden werelden van 'rekenkundig/algebraïsch' respectievelijk 'visueel' voor onze leerlingen te laten samenkomen in een 'puzzel plus getalsmatige onderbouwing'. Dus: zowel plaatjes als getallen, om onze leerlingen meer te laten 'beleven' dan het genoegen om te weten dat $a^2 + b^2 = c^2$ en dat in standaard schoolsommetjes te gebruiken.

figuur 1

Vooraf

In de beginjaren van onze school (Open Schoolgemeenschap Bijlmer = OSB) werd er niet vanuit een boek gewerkt, maar vooral aan de hand van inspirerende problemen en eigen materiaal. De verhalen hierover hebben ons, Joeri en Inge, geïnspireerd om met hulp van Harrie naast het boek heel voorzichtig iets te doen met het motto van de school: 'het gaat in ons onderwijs om *hoofd, hart* en *handen*'.

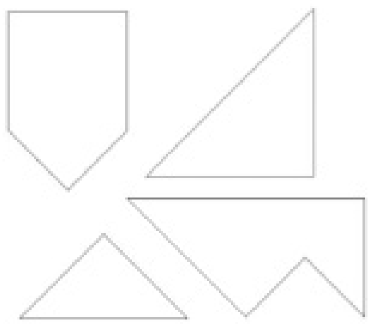
Lesplan

Behalve de tekst en opgaven uit het boek *Moderne Wiskunde* deel 2B vmbo-gt/havo hebben we bij het hoofdstuk Pythagoras gekozen voor de volgende extra 'blokken' A, B, en C. We realiseren ons dat we daarmee wel veel verwachten van onze leerlingen (heterogene tweede klas vmbo-basis t/m vwo) in een heel kort tijdsbestek.

Kort samengevat komen die extra blokken op het volgende neer:

A/ *De vierkanten-puzzel* : Eerst met 4 stukjes een vierkant vormen, daarna met 5 stukjes bestaande uit de eerste 4 stukjes (het eerste vierkant) en een extra stukje een nieuw vierkant vormen.
Dit levert de vraag of je altijd 2 vierkanten kunt optellen. We kiezen voor het geven van het extra vijfde stukje om te benadrukken dat er iets bij komt, dus dat er een groter vierkant ontstaat. Als docent zullen we de formulering vierkant + vierkant = vierkant moeten uitlokken.

figuur 2 Voeg deze puzzelstukjes samen tot een vierkant



figuur 3

B/ *Vierkantjes leggen* : Aan de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek, daarna ze samen aan de schuine zijde leggen. Gaat dat altijd op? Dit als de stap naar de in het boek gebruikte rekenkundig/algebraïsche formulering.
C/ *Vierkanten 'optellen' door verknippen*: Maak 2 vierkanten en probeer deze zo te verknippen dat de stukjes samen een vierkant vormen. Het gaat hier met name om een onderzoekende houding; een aantal leerlingen zal een rechthoekige driehoek gebruiken op zoek naar de grootte van het te vormen vierkant.

Dit artikel geeft een beschrijving van de legpuzzel (blok A), de wijze waarop deze gebruikt is, reacties van de leerlingen en enkele achtergrondgedachten. Daarnaast komen kort de andere 'doe-opdrachten' aan bod, evenals enkele afsluitende conclusies.

De les met plaatjes

Voor de plaatjesles hebben we als start gekozen de vermoedelijk bij veel van de lezers bekende 'twee-vierkanten-één-vierkant' puzzel; ***zie figuur 2.***
Nadat alle leerlingen – in kleine groepjes – een vierkant gevormd hebben wordt het extra vierkantje uitgedeeld met de woorden: 'Vervelend we hebben een (vierkant) stukje vergeten. Wil je dat er bij doen?
Dus een vierkant maken van vijf stukjes!'; ***zie figuur 3***.

Er is een duidelijke overgang waar te nemen van 'naar de stukjes kijken en ongericht proberen' naar 'een vorm van redeneren m.b.v. eigenschappen van de diverse figuren'. Het aantal eigenschappen van de puzzelstukjes is weliswaar beperkt - grootte van hoeken en lengtes van zijden- maar de diverse vormen spelen toch ook een rol. De bewuste keuze om zich te richten op een van deze eigenschappen is lastig, ook omdat de leerlingen tegelijkertijd het geheel (een te vormen vierkant) in het oog dienen te houden. Veel leerlingen blijven 'gewoon proberen' zonder te kunnen expliciteren wat ze aan het doen zijn.
Wel is er vaak verzet tegen het blijven proberen en wordt daardoor een discussie uitgelokt.

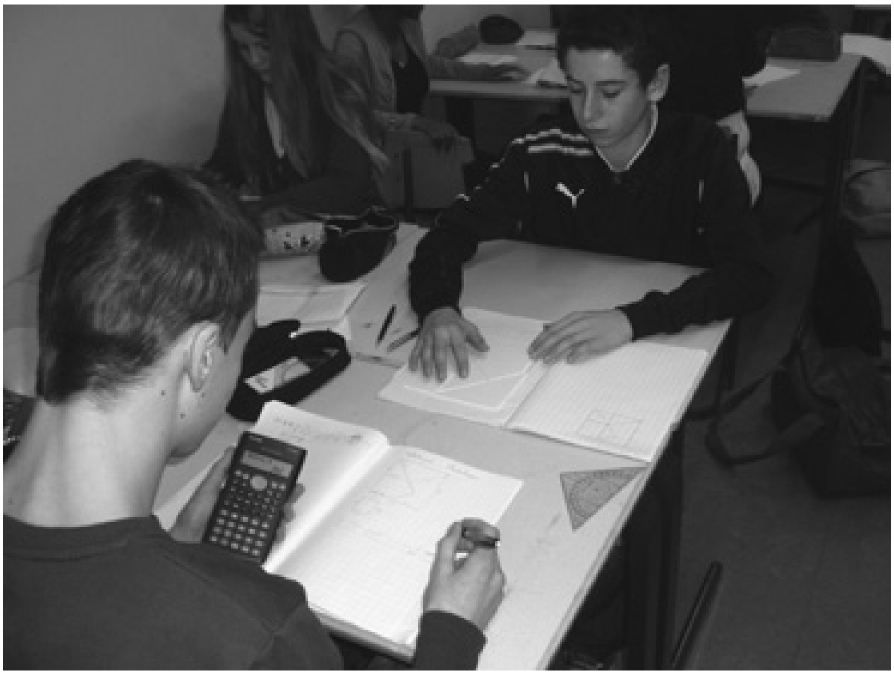
1. Leerlingen: Ik geloof niet dat het kan.
2. Leerling: Misschien denk je wel te moeilijk.
3. Nee hoor, het klopt gewoon niet.
4. Kijk, zonder dit kleine vierkant is het al zo! Dus het kan niet.
5. Dit is toch te breed? Waarom? Nou, dat zie je!

Na enige tijd verklaren enkele leerlingen: 'het is wiskundeles dus dan moet er wel een of andere regel zijn' en 'we wilden graag dat het ons lukte' (naar succesbeleving).

Voor ons docenten is er een bekend *dilemma* in dit soort lessen: we niet inbreken in het inhoudelijke gesprek van de leerlingen, maar wel sturen d.m.v. met een gerichte vraag/hint. Die vraag/hint moet dan hun aandacht richten: op de lengtes van de zijden en/of de grootte van de hoeken. Dat is extra lastig als de leerlingen enthousiast met puzzelstukjes schuiven en 'geen inmenging dulden'[1].

Het vervolg van de legpuzzelles

Blok B, vierkanten 'aan rechthoekige driehoek' – Na zo'n 30 à 40 minuten hadden alle groepjes de twee vierkanten samengevoegd tot een groter vierkant zonder dit echter te verwoorden.[2]
We hadden daar ook niet expliciet op aangestuurd, maar lokten het wel uit in de nabespreking door centraal de resultaten op een tafel te leggen; ***zie figuur 4***.
Alhoewel de startopdracht (de puzzel) in alle klassen gelijk was is de vervolgopdracht verschillend gebruikt. In de meeste gevallen als volgt: alle leerlingen moesten een 3 bij 4 rechthoekige driehoek tekenen en



figuur 4

uitknippen, evenals 25 vierkantjes van 1 bij 1. Met deze vierkantjes moesten ze aan de rechthoekszijden een vierkant leggen. Hun aandacht moest daarbij expliciet gericht worden op de 'bedoeling'. (Volgende keer toch maar eerst samen een 3,4,5-driehoek en daarna zelf enkele andere rechthoekige driehoeken met gehele zijden.)
Het resultaat is als afsluiting nog gezamenlijk verwoord als $a^2 + b^2 = c^2$.
Na deze les werd een aantal lessen besteed aan het hoofdstuk Pythagoras uit het boek *Moderne Wiskunde* zonder expliciet de koppeling te leggen met de legpuzzelles. Aansluitend bij de behoefte van veel van onze leerlingen om iets met hun handen te doen hebben we de mogelijkheid benut om de eerste 5 opgaven van paragraaf 7.2 te vervangen door de paragraaf met doe-opdrachten.

De afsluitende les – Opnieuw de legpuzzel. Als *warming up* werd de legpuzzel opnieuw gemaakt zonder bij het geven van de opdracht expliciet te verwijzen naar Pythagoras.
Een aantal leerlingen probeerde in hun geheugen te zoeken naar de 'oplossing', meerderen gingen weer gewoon aan het puzzelen. Slechts een enkeling riep na enige tijd: 'Dit is toch Pythagoras!?'
Tijdens de korte tussendoor bespreking werd benadrukt dat degene die aan Pythagoras dacht dat ook slim had kunnen gebruiken. Een enkele leerling: 'Ja want dan weet je al hoe groot het nieuwe vierkant moet worden en dan is het makkelijker.'

De slotopdracht

Maak 2 vierkanten en probeer die zo te verknippen dat de stukjes samen een 'groot' vierkant vormen.
Alle groepjes waren geconcentreerd op één van de volgende manieren bezig.

- Strookjes van één vierkant knippen en deze langs het andere vierkant leggen.
- Handige maten kiezen voor de twee vierkanten (zijden 3 resp. 4).
- Beide vierkanten in rechthoekige stroken verdelen.
- Vierkanten kiezen en die precies als de puzzel verdelen!
- Het grootste vierkant precies als het puzzel vierkant verdelen.
- De verdeling van het puzzelvierkant op schaal overnemen.
- Eerst een pasvorm voor het 'somvierkant' maken.
- Niets doen en/of proberen in het hoofd 'iets' te doen.

Na bespreking van de diverse aanpakken van de leerlingen (***zie figuur 5***) werd in overleg één van de vele mogelijke verdelingen getoond zoals die op internet te vinden zijn. Ze wilden wel eens zien hoe iemand dit knipprobleem opgelost had.

Doel bereikt?

In de eerste les werd een tweetal doelen nagestreefd die beide te maken hebben met 'gewaar worden' of 'bewust worden'.

1. Bij de puzzelstukjes kun je je aandacht richten op het geheel (vierkant) maar ook op kenmerken zoals grootte van de hoeken en lengte van de zijden. (onderkennen van reeds bekende begrippen). Dit doel lijkt gedurende het puzzelen bereikt.
2. Er geldt dat twee vierkanten 'opgeteld' kunnen worden tot een som-vierkant. Hiervoor was het ene voorbeeld, de 3-4-5-driehoek, te weinig; daarvoor is meer tijd nodig. Het was beter geweest ook bij de getallenparen 5, 12 en 7, 24 te vragen naar de vierkanten met deze zijden en vervolgens om een vierkant te tekenen met de som van die oppervlakten.

In de slotles is het doel 'onderkennen dat de legpuzzel in feite een Pythagoras puzzel was' (grote vierkant via rechthoekige driehoek vormen) nauwelijks bereikt. Meer sturing is hierbij voor veel leerlingen gewenst om deze warming-up als zodanig te laten functioneren.

Het doel 'onderzoekend bezig zijn' met het optellen van twee vierkanten is zeker bereikt. Het was niet de verwachting dat veel leerlingen zelf een verdeling van de vierkanten zouden vinden, maar wel dat ze het lef zouden hebben om beredeneerd te gaan proberen. Dit laatste gebeurde beslist, evenals het enthousiast deelnemen aan de bespreking van de diverse voorstellen.

Conclusies

1. De aanpak lijkt zinvol, dus is het waard om herhaald te worden.
2. De ervaring heeft ons geleerd dat blok C erg veel vraagt van met name de zwakke leerlingen, ook al doen die enthousiast hun best. We laten het dus een volgende keer van de leerlingen afhangen of we C aan alle leerlingen geven of alleen als keuze voor 'liefhebbers'. Misschien kunnen we dan ook de suggestie van een referent volgen en als extra in een van de groepen uitgaan van drie vierkanten en dan te laten beredeneren wanneer de stelling van Pythagoras erbij past.
3. Ook de komende jaren zullen we de blokken A, B, en C zeker weer gebruiken, want een ding is duidelijk geworden: de leerlingen hebben veel hulp nodig om de veelal gescheiden werelden van 'meetkundig visueel' en 'rekenkundig/algebraïsch' bij elkaar te laten komen.

Voor ons blijft daarbij de vraag urgent: hoeveel inhoudelijke richting moeten we geven opdat de leerlingen niet 'verdwalen', maar tegelijk leren zelf op inhoudelijk gebied inbreng te hebben?

Noten

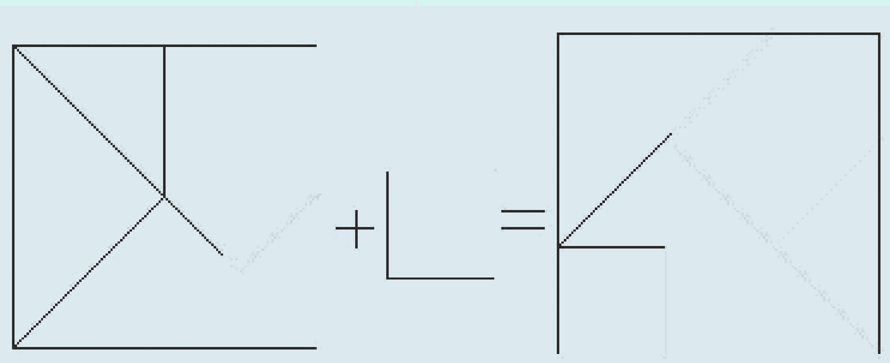
[1] Het was soms een op de lippen bijten om niet 'voor te zeggen', maar uiteindelijk bleken de leerlingen niet veel meer moeite met de puzzel (*two squares, one square*) te hebben dan wij toen we hem voor de eerste keer maakten.

[2] Vierkant + vierkant = vierkant

Over de auteurs

Inge Verbree en Joeri van Ast zijn docenten aan de OSB in Amsterdam-Zuidoost.
Op deze school brengt Harrie Broekman, tot zijn pensionering lerarenopleider en vakdidacticus aan de Universiteit Utrecht, de nodige inspirerende invalshoeken voor wiskundelessen aan heterogene groepen.
E-mailadressen: *ingeverbree@openschoolgemeenschapbijlmer.nl* , *joerivanast@hotmail.com* en *h.g.b.broekman@uu.nl*

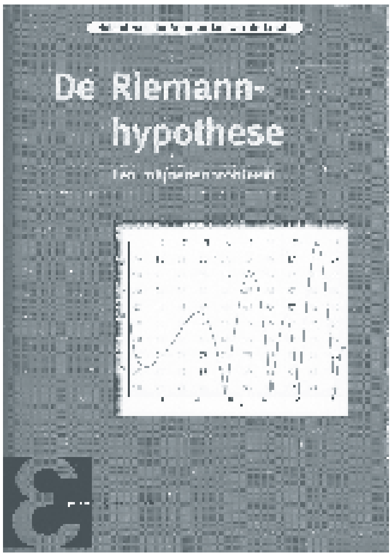
figuur 3



BOEKBESPREKING /

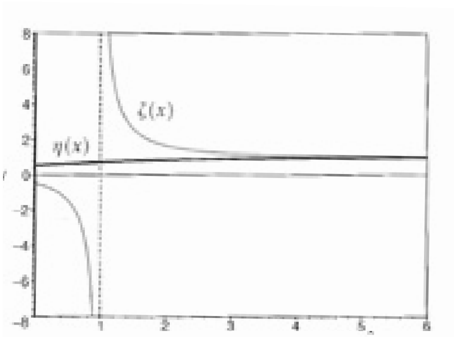
De Riemann-hypothese

[Harm Bakker]



Ondertitel: Een miljoenenprobleem
Auteurs: Roland van der Veen, Jan van de Craats
Uitgever: Epsilon Uitgaven (nr. 69), 2011
ISBN 978-90-5041-126-4
Prijs: € 19,00 (102 bladzijden, paperback)

Een boekje over de Riemann-hypothese, met name bestemd voor middelbare scholieren. Maar is dat niet veel te moeilijk voor deze doelgroep? Aan het eind van deze bespreking komen we op deze vraag terug.
In de periode 2006-2010 is aan de Universiteit van Amsterdam vier maal een webklas over de Riemann-hypothese georganiseerd voor vwo-leerlingen. Het boekje bestaat uit bewerkingen van de lesteksten, aangevuld met verdiepingsopgaven en uitwerkingen van alle opgaven.
Hoofdstuk 1 gaat over priemgetallen, in het bijzonder over de priemtelfunctie: $\pi(x)$ = (aantal priemen $\leq x$). De bedoeling is een goede benaderingsformule voor $\pi(x)$ te vinden. Aan de hand van computerexperimenten wordt ontdekt dat machtsfuncties x^a voor $a > 1$ te snel stijgen en voor $0 < a < 1$ te langzaam. Op die manier wordt de priemgetallenstelling geïntroduceerd: $\pi(x) \backsimeq x/\ln(x)$ (Hadamard, De la Vallée Poussin).
Verder wordt de logaritmische priemmacht-telfunctie ψ bekeken en wordt (zonder verdere inleiding) een expliciete formule voor ψ gepresenteerd. Hierin spelen de nulpunten van Riemann's zèta-functie een belangrijke rol.
Hoofdstuk 2 gaat dan ook over de zèta-functie. Omdat deze functie wordt gedefinieerd als een oneindige som, wordt er even stilgestaan bij convergentie van reeksen, in het bijzonder van de meetkundige reeks. De reeksontwikkelingen van een aantal bekende functies worden zonder afleiding gegeven. Meer in detail wordt gekeken naar het verband tussen nulpunten en reeksontwikkelingen van functies.
Het hoofdstuk wordt afgesloten met een formule van Euler, waarin de zèta-functie wordt geschreven als een oneindig product met voor elk priemgetal een factor.
Hoofdstuk 3 opent met de afleiding van de productformule van Euler. Daarna wordt de functie $\zeta(x)$ geïntroduceerd; ***zie figuur 3.1***. Nadat is geponeerd dat deze functie convergeert voor elke $x > 0$, geeft dit de mogelijkheid om het domein van de zèta-functie uit te breiden, een eerste stap om verderop het domein uit te breiden tot (nagenoeg) het hele complexe vlak.
Daarvoor is er eerst een korte behandeling van complexe getallen en complexe functies nodig. Vervolgens wordt verteld dat Riemann in staat is geweest de zèta-functie te definiëren voor elke complexe $z \neq 1$, waarna de aandacht zich richt op de nulpunten van deze functie. Nu is ook de Riemann-hypothese te formuleren: *alle niet-triviale nulpunten van de zèta-functie hebben reëel deel ½*.
Het laatste hoofdstuk start met de presentatie (zonder toelichting) van een formule die het verband geeft tussen $\zeta(-z)$ en $\zeta(z+1)$. Hieruit zijn de triviale nulpunten (negatief even) eenvoudig af te lezen.
Verder wordt afgeleid dat andere nulpunten moeten liggen in de strook $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$.
De expliciete formule voor de logaritmische priemmacht-telfunctie ψ wordt opnieuw bekeken en deels herschreven. Er wordt globaal aangegeven hoe uit deze vorm de priemgetallenstelling kan worden afgeleid, maar de auteurs geven aan dat de details te ver gaan voor dit boekje.
Na de reguliere hoofdstukken volgt eerst een paragraaf over het gebruik van Wolfram Alpha, een computeralgebrapakket dat via een website vrij toegankelijk is. Daarna is er een kort artikel opgenomen over het nut van grote priemgetallen. Een paragraaf met uitwerkingen van alle opgaven sluit het boekje af.



Figuur 3.1: *Een grafiek van $\zeta(x)$ voor $x > 0$. Let op de verticale asymptoot bij $x = 1$. Het punt $x = 1$ heet een pool van de functie. In dezelfde figuur de grafiek van $\eta(x)$.*

Aan het eind gekomen overheerst de indruk dat dit onderwerp te moeilijk lijkt voor middelbare scholieren, ook voor de liefhebbers met wiskunde D. Op veel punten moet de lezer op grond van computerexperimenten of op gezag van de auteurs zaken aannemen en dat betreft niet alleen details die intuïtief wel duidelijk zijn. Maar als je dat voor lief neemt, dan valt er veel plezier te beleven aan dit boekje. Met name de opgaven tussen de tekst en zeker de verdiepingsopgaven aan het eind van elk hoofdstuk bieden voldoende uitdaging. Naast de steun van de uitwerkingen zal ook nog wel wat hulp van de docent nodig zijn om alles tot een goed einde te brengen.

Over de recensent
Harm Bakker is leraar wiskunde aan de CSG Liudger in Drachten en is verder betrokken bij de educatieve masteropleiding wiskunde van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden.

BOEKBESPREKING /

De Pythagoras Profetie

[Christiaan Boudri]

Auteur: Arwout van Loon
Uitgeverij: ASPEKt, Soesterberg (2012)
ISBN-13: 978-94-6153-161-2
Prijs: €17,95 (191 pagina's; paperback)

Pythagoras was een profeet en Oom Ad zijn boodschapper

Pythagoras als profeet

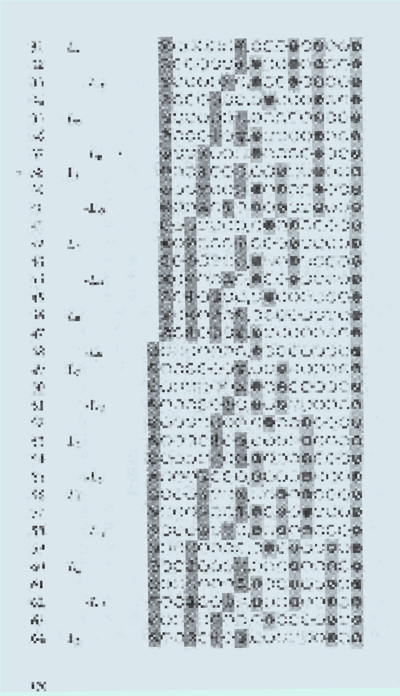
't Is een bijzonder kind – dat is ie! Lezend in het boek *De Pythagoras profetie* van Van Loon viel ik van de ene verbazing in de andere. Op het eerste gezicht lijkt het een jeugdroman rondom Pythagoras, dat als doel heeft de wiskunde te populariseren. Zo klinkt de titel ook: De *Pythagoras profetie*. Maar anders dan de jeugdboeken *Het mysterie van Pythagoras*[1], en *Pythagoras en de rechtvaardige rechters*[2], is hier geen sprake van een fantasieverhaal rondom Pythagoras, waar de wiskunde te pas en te onpas bij wordt gesleept, maar draait de plot om een wiskundig vraagstuk, en speelt Pythagoras de rol van (afwezige) profeet. Dit boekje pretendeert iets nieuws te ontsluieren, en doet dat op een heel bijzondere manier.

De roman

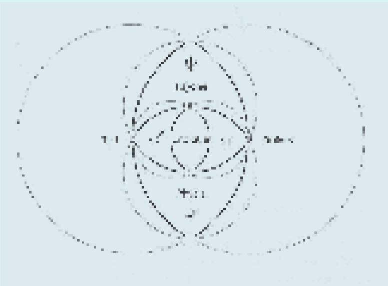
Het boek begint als een roman. Toevallig of niet, het verhaal speelt zich net als *De Avonden* van Gerard Reve af in de laatste 10 dagen van het jaar. De hoofdpersonen zijn alterego's van de schrijver, met een Leon die, net als de auteur vroeger, geodesie studeert en geboeid wordt door de thriller *De Da Vinci Code* van Dan Brown. Samen met zijn vriend Chris en diens wel heel intelligente zusje Çois, ziet hij zich in de kerstvakantie gesteld voor een aantal raadsels rondom de Gulden Snede, het schriftje van een overleden oom met geheimzinnige aantekeningen, een boekje van Pythagoras, een mysterieuze inbraak en de al even mysterieuze Rozenkruizers-sekte. En daarbij ontluikt er een prille liefde tussen Leon en Çois. Mooie ingrediënten voor een spannend winterverhaal.
Anderzijds blijkt het boek zich steeds meer te ontpoppen tot een wiskundig en esoterisch betoog, waarin de avonturen van de drie jonge mensen leiden tot de onthulling van de opbouw van het heelal in de lijn van de kosmologie van Pythagoras, maar nu met het Gulden-Snedegetal $\varphi\ (=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))$ als basis. Het is dus eigenlijk een 'ontdekkingsroman', of liever nog 'romanbetoog'.
Het boekje is uitdrukkelijk geschreven met het oog op een groot publiek, en de formules zijn om die reden dan ook grotendeels in een appendix geplaatst (Uit het schriftje van Oom Ad). Ik heb het verhaal daarom eerst gelezen zonder die appendix, om beter na te gaan hoe succesvol dit recept is. Het verhaal is spannend, al is de stijl hier en daar wat houterig. De hoofdpersonen worden levendig neergezet. Dit deel van het verhaal zal met name de categorie 15-18 jarigen aanspreken, door dingen als het directe taalgebruik, de lineaire vertelstijl, de broer-zus verwikkelingen, en de prille verliefdheid.
Wel wordt er veel uitgelegd, en dat is gezien het onderwerp ook niet zo vreemd, maar het gaat wel storen op het moment dat de zogenaamde Lucaslijnen worden geïntroduceerd (pag. 91). We zitten dan op ⅔ van de roman (exclusief bijlagen). Ik lees hoe Leon, Chris en Çois deze Lucaslijnen en de betekenis ervan doorgronden, maar mij is Van Loon op dat moment even kwijt. De rest van het verhaal gaat vooral over de opbouw van de wereld als een verdere ontwikkeling van de Pythagoreïsche filosofie, maar nu met het getal φ als basis in plaats van het getal 1. En dat is wel wel boeiend in wiskundig en filosofisch opzicht, maar het aanvankelijk spannende verhaal zelf raakt op de achtergrond en leidt zelfs tot een teleurstellende ontknoping als het dreigende gevaar van de Rozenkruizers-sekte op pagina 100 inbeelding blijkt. Weliswaar wordt de prille liefde tussen Leon en Çois subtiel en met veel gevoel voor kleine gebaren beschreven, maar dit verhindert niet dat het verhaal rustig naar het eind voortkabbelt. De slotzin is een wel heel oubollige: 'Het was het begin van een gezellige en onvergetelijke oudejaarsavond'.

Het betoog

Bovendien is daar nog de andere kant: het betoog. Van Loon wil op basis van het getal φ (de Gulden Snede), een kosmische visie ontwikkelen in het verlengde van de getalsmystiek van Pythagoras. In de roman laat hij deze orde door de drie jongeren ontdekken (waarbij de *Da Vinci Code* van Dan Brown een inspirerende rol speelt). Vorm en inhoud bijten elkaar hier. Binnen de verhaalvorm is de wiskunde achtergrond en is het een jeugdverhaal , binnen de inhoud is de wiskunde en een spirituele wereldvisie hoofdzaak en richt het boek zich op getalsmystiek.
Van Loon heeft deze orde eigenlijk zelf ontwikkeld, op basis van een patroon dat hij heeft ontdekt in het *phinaire getallenstelsel*. Op de achterflap staat het zo: '[hij] leidt (…) de lezer naar een belangrijk nog niet eerder aangetoond feit in ons bestaan'. Wiskundige gezien is dat phinaire getallenstelsel best interessant, maar de kosmologische visie komt nogal geforceerd over.
Voor dat wiskundig-mystieke betoog, zal de lezer de appendix (Het schriftje van Oom Ad) tot zich moeten nemen. Dit schriftje vorm natuurlijk het wiskundige betoog van Van Loon zelf. Hij bespreekt de rij van Fibonacci, $\{f_n\}$ = {0, 1, 1,2 ,3, 5, 8, …} en de rij van Lucas, $\{l_n\}$ = {2, 1, 3, 4, 7, …} als twee bijzondere vormen van Lucasrijen (elke rij waarbij elke term de som van de



figuur 1 De A-form van het phinaire getalstelsel. In de opeenvolging van 1-tjes is de rij van Lucas te herkennen (pag. 170).



figuur 2 Illustratie van de ordening van de kosmos op basis van de Gulden Snede (pag. 133).

twee voorafgaande termen is). De rijen zijn ook in de negatieve richting voort te zetten.

De directe termen zijn $f_n = \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi}$, en $l_n = \dfrac{\phi^n + \psi^n}{\phi + \psi}$ waarbij $\psi = -\dfrac{1}{\phi}$. Hij laat ook zien dat van alle lineair recurrente betrekkingen ($x_n = ax_{n-1} + bx_n$) alleen de rij van Fibonacci en de rij van Lucas in absolute zin symmetrisch zijn rond de nulde positie (dit wil zeggen: $|f_n| = |f_{-n}|$ en $|l_n| = |l_{-n}|$. Althans: hij bewijst dat ze als enige Lucasrijen dat kúnnen zijn, want het blijft bij een vermoeden.
Vervolgens ontwikkelt hij een nieuw getalstelsel op basis van φ. Allereerst laat hij zien dat een natuurlijk getal kan worden geschreven als som van machten van φ, waarbij elke macht hooguit één keer in de som voorkomt.

Bijvoorbeeld: $1 = \varphi^0$; $2 = \varphi^1 + \varphi^{-2}$; $3 = \varphi^2 + \varphi^{-2}$; $4 = \varphi^2 + \varphi^0 + \varphi^{-2}$. Laten we nu elke macht van φ corresponderen met een positie, dan resulteert een phinair getalstelsel, analoog aan het binaire getalstelsel.

$1 = \varphi^0 = 1.0_\varphi$
$2 = \varphi^1 + \varphi^{-2} = 10.01_\varphi$
$3 = \varphi^2 + \varphi^{-2} = 100.01_\varphi$
etc.

Opvallend is, dat het systeem meerduidig is. Immers: $100.0_\varphi = 11.0_\varphi$, want $\varphi^2 = \varphi + 1 = \varphi^1 + \varphi^0$. Werken we echter alle naast elkaar voorkomende 1–tjes weg (omdat altijd geldt: $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$), dan krijgen we de Standaard-vorm (om de een of andere reden schrijft Van Loon deze term in het Engels: *Standard Form*).
Van Loon bewijst echter niet dat deze schrijfwijze voor alle natuurlijke getallen mogelijk is. Moeilijk is dit bewijs niet, maar het is kenmerkend voor Van Loon dat een vermoeden voor hem afdoende is. Hij klaagt in het boek dan ook geregeld, dat wiskundigen altijd bewijzen nodig hebben.
Vervolgens ontwikkelt Van Loon een alternatieve notatie, waarbij het scheidingsteken niet achter, maar vóór φ^0 staat, en waarbij de bovengenoemde meerduidigheid wordt gebruikt om, indien mogelijk, 1-tjes op de 1e en de 0e positie te hebben staan. Hij noemt dit de A-Form (opnieuw de vraag: waarom in het Engels?).
In figuur 1 zien we de A-Form in de derde kolom.

De sleutel tot de kosmos

En dan komt de clou van het betoog, het 'nieuwe feit' volgens de achterflap. Als de natuurlijke getallen in de schrijfwijze van de A-Form onder elkaar worden geplaatst, is hierin een patroon te herkennen waarin de rij van Lucas een centrale rol speelt (***zie figuur 1***). Dit patroon is vrij gecompliceerd, maar met enige moeite goed te herkennen. Het is mij overigens onbekend of dit patroon door Van Loon is ontdekt. Op de achterflap wordt dit wel gesuggereerd. Van Loon vertelde dit bovendien in een mondelinge toelichting, maar in het boekje zelf wordt hier niets over gezegd.
Het mag echter duidelijk zijn, dat het opnieuw een vermoeden betreft en dat er geen bewijs wordt gegeven voor de voortzetting van het patroon. Niet getreurd, het patroon is interessant genoeg. Niet alleen voor de cryptografie (al vermeldt Van Loon deze toepassing niet), maar vooral om zijn getalsmystieke visie te ontwikkelen . Dit doet Van Loon echter niet in de bijlage, waarmee jammer genoeg de opzet van de roman geweld wordt aangedaan (de bijlagen waren immers de inhoud van Het schriftje van Oom Ad). In de roman wordt het patroon echter gebruikt om de opbouw van de kosmos te ontrafelen. De kosmos wordt geïnterpreteerd als een structuur, een wiskundig bouwwerk, waarin φ en zijn tegenhanger ψ de basis vormen van de natuurlijke getallen, en waarin de rij van Fibonacci de psyche en het mannelijke representeert, en de rij van Lucas de physis (natuur) en het vrouwelijke. Een en ander is weergegeven in ***figuur 2***.
Aan het slot van het boek verzucht Leon, dat het niet mee zal vallen om deze theorie te publiceren. "Voor wiskundigen ontbreekt de strikte bewijsvoering" (pag. 135). Men besluit om dan maar oudjaar te gaan vieren, maar de verzuchting is in werkelijkheid ook de verzuchting van de auteur. Was het eerder zo dat hij zijn verzuchting eerder sloeg op wiskundige bewijsvoering, nu gaat het hij om het verschil tussen getalsmystiek en wiskunde, of wetenschap. Er is echter in wiskundige zin niets bewijsbaar aan een dergelijke 'theorie', omdat die gaat over de wereld buiten de wiskunde. Wetenschappelijk kun je de theorie evenmin noemen, alleen al omdat ze niet falsificeerbaar is. Hooguit levert het een interessant perspectief op de wereld en ons bestaan op. Maar ik ben bang dat de conclusies die een dergelijk perspectief getrokken zullen worden, elke kant op kunnen bewegen, al naar gelang de persoonlijke overtuiging van de profeet.

Noten

[1] Jan Helmer (2007): *Het mysterie van Pythagoras*. Venlo: eigen beheer.
[2] Jan Helmer (2010): *Pythagoras en de rechtvaardige rechters*. Venlo: eigen beheer.

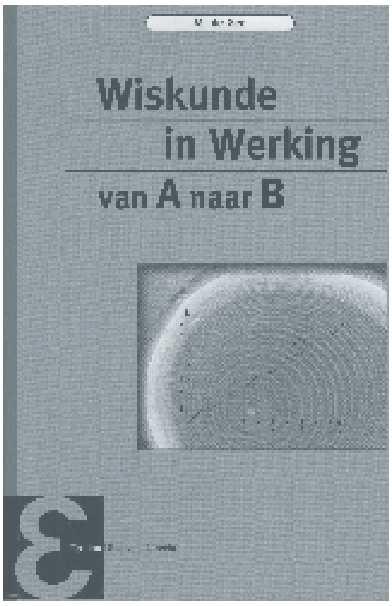
Over de recensent

Christiaan Boudri is docent wiskunde aan de opleiding werktuigbouwkunde (Hogeschool van Arnhem en Nijmegen) en voorzitter van de Landelijke Werkgroep HBO-wiskunde.
E-mailadres: *christiaan.boudri@han.nl*

BOEKBESPREKING /

WISKUNDE IN WERKING VAN A NAAR B

[Peter van der Velden]



Auteur: M. de Gee
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2011)
ISBN: 978 90 5041 127 1
Prijs: € 34,00 (480 pagina's; paperback)

Dit wiskundeboek is bedoeld voor eerstejaars studenten in het hoger onderwijs. Opvallend in dit studieboek is het grote aantal toepassingsvoorbeelden op allerlei vakgebieden (36 in totaal, waaronder bedrijfskunde, sociologie, werktuigbouw, bodemkunde, geneeskunde enzovoort). Het betreffend vakgebied is bij elk voorbeeld aangeduid met een logo. Opleidingen met een brede propedeuse zullen het meest hiervan kunnen profiteren.

Geweldig dat veel toepassingen uit de praktijk komen en redelijk op niveau zijn. Jammer dat de bijbehorende vragen steeds kleine deelvragen zijn (de bekende a, b, c, d-vragen) in plaats van echte onderzoeksvragen. Per slot van rekening dienen studenten in het hoger onderwijs te leren een gesteld probleem te analyseren, op te lossen en de resultaten te verantwoorden (in dat geval hadden er dan ook uitgewerkte voorbeelden moeten zijn waarmee een probleemaanpak of methodiek wordt gedemonstreerd).

Elk (deel van een) hoofdstuk begint met één of twee praktische voorbeelden als introductie. Dit is didactisch zeer verantwoord. Helaas mis ik in veel paragrafen daarna een opbouw van concreet naar abstract, zoals leerlingen die gewend zijn. Soms ontbreekt zelfs enige link met de praktische voorbeelden waarmee het nieuwe onderwerp werd ingeleid.

Behandeld worden: machts- en exponentiële functies en grafieken, differentiëren, goniometrische functies en integreren. Volgens de auteur is het ingangsniveau vwo-wiskunde A. Qua onderwerpen is dat juist. Ik verwacht echter wel problemen voor wiskunde A-leerlingen omdat de wiskunde, met name in de latere hoofdstukken, tamelijk abstract wordt behandeld. Ik weet dat die abstractie op veel universiteiten gemeengoed is. Die abstracte behandeling past iets beter bij wiskunde B-leerlingen en dan geven al die toepassingen in dit boek een zinvolle aanvulling daarop. Ook denk ik dat het boek – vanwege al snel abstracte behandeling – minder geschikt is voor hbo-studenten. De vele toepassingsopgaven zijn ook voor hen zeer geschikt.

Gelukkig gaat de auteur er van uit dat de studenten gebruik maken van een grafische rekenmachine.

En geeft daar – waar het gaat om algebraïsch herleiden of hoofdrekenen – met een symbool aan dat het gebruik ervan juist niet de bedoeling is. Achterin zit een antwoordenlijst voor álle opgaven, een (niet-uitneembare) formulekaart, een nuttige *Index van wiskundige begrippen* en een *Index van toepassingen*. Die laatste doet het boek geen recht omdat die lijst veel beperkter is dan de veelheid aan toepassingen.

Tot slot. Wiskundedocenten die wiskunde-onderwijs verzorgen bij een specifieke studierichting of beroepsopleiding kunnen dit boek voor al die relevante voorbeelden goed gebruiken.

figuur 1 Voorbeeld van een toepassingsopgave

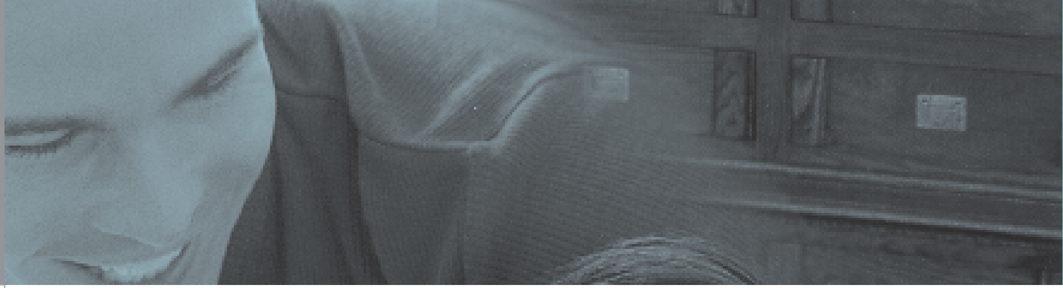
Toepassing 4 (demografie, economie en landbouwwetenschappen): de Malthus-catastrofe. Veel biologische populaties hebben een natuurlijke neiging te groeien. Bijvoorbeeld, als 90% van een volk een gezin vormt, en er per gezin gemiddeld 3 kinderen zijn, dan leidt dat tot een groeifactor van 1.35 per generatie. Thomas Malthus voorzag in 1798 dat deze groei op den duur groter is dan die van de voedselproductie van de landbouw. (*"I say, that the power of population is indefinitely greater than the power in the earth to produce subsistence for man."*)

Opgave 2.48.

a. Verklaar hoe je aan de groeifactor van 1.35 per generatie komt.
b. Neem aan dat een gemiddelde generatieduur 25 jaar is. Wat is dan de groeifactor per jaar, bij een groeifactor van 1.35 per generatie?
c. Met welk percentage moet de voedselproductie jaarlijks blijven groeien om de Malthuscatastrofe te ontlopen?

Over de recensent

Ir. Peter van der Velden heeft jarenlang wiskundeonderwijs verzorgd in het vo en hbo. Tegenwoordig geeft Peter trainingen en adviezen aan docenten: www.ActiverendOnderwijs.nl.
E-mailadres: *p.vd.velden@compaqnet.nl*



Inhoud van de 87e jaargang

2011/2012

Bijdragen

Goedgekeurd door CvE voor het Centraal Eindexamen

TI-nspire™ TECHNOLOGIE

Een nieuwe visie vanuit meerdere wiskundige invalshoeken

Sinds 2007, de introductie van Nspire is er veel veranderd in het digitale onderwijs, en TI-Nspire is meegegaan in die ontwikkelingen. Een softwarenetwerk voor school en zelfs draadloos netwerk in de klas, en TI-Nspire online via internet.
Voor de gebruiker lesmateriaal in elk hoofdstuk van de 2e fase boeken van Getal en Ruimte en Moderne Wiskunde (nieuwe editie). Ook voor uw collega's van exacte vakken zijn er grote mogelijkheden met meten, gegevens verwerken en modelleren.
Voor meer informatie of schoolbezoek mail naar: **j-schepers@ti.com** .

TI-Nspire™ CX kleuren handheld + software voor slechts € 59,-
Mail voor de aanbieding naar: j-schepers@ti.com
(docentenaanbieding, 1 per docent)

NU MET KLEURENSCHERM, EIGEN PLAATJES DOWNLOADEN EN OPLAADBARE BATTERIJ

www.education.ti.com/nederland

TEXAS INSTRUMENTS

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

Jaarverslag Euclides

JAARGANG 87 (2011/2012)

[Marjanne de Nijs]

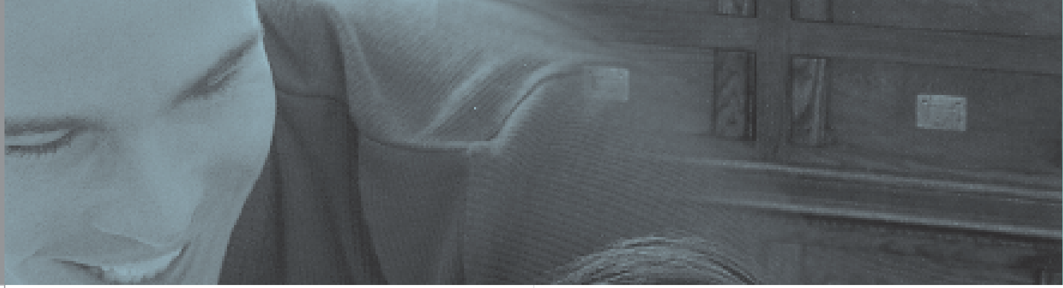
In dit jaarverslag wordt een beknopt overzicht gegeven van de werkzaamheden van de redactie in de periode van 1 augustus 2011 tot en met 31 juli 2012.

Redactie

De redactie van *Euclides* bestond het afgelopen jaar uit acht personen, ieder met een eigen aandachtsgebied en/of eigen taak op het gebied van het becommentariëren en genereren van artikelen: Michel van Ast (ict), Rob Bosch (wiskundige artikelen), Wim Laaper (havo/vwo), Ernst Lambeck (boekbesprekingen), Joke Verbeek (vmbo), Heiner Wind (redactievoorzitter), Dick Klingens (eindredactie) en Marjanne de Nijs (hoofdredactie). Enkele redactieleden waren door privé-omstandigheden niet in de gelegenheid om veel tijd te investeren in *Euclides*. Mede daardoor werd duidelijk dat het goed is om de redactie uit redelijk veel mensen te laten bestaan, zodat dergelijke situaties opgevangen kunnen worden.
De redactie kwam driemaal plenair ter vergadering bijeen. De kernredactie (die bestaat uit de voorzitter, eindredacteur en hoofdredacteur) kwam buiten die plenaire bijeenkomsten ook nog enkele malen bij elkaar. In juni is er een overleg geweest met de producent, De Kleuver bedrijfscommunicatie bv. Daarnaast is er enige malen overleg geweest tussen kernredactieleden en bestuursleden van de NVvW. Punt van aandacht was daarbij een eventuele vernieuwing van *Euclides* op basis van de in het voorjaar van 2011 uitgevoerde enquête onder leden van de NVvW. Komend jaar gaat we verder met dit vernieuwingsproces.
Aan het einde van het seizoen is de redactie met twee leden versterkt: Birgit van Dalen is aangetreden als adjunct-hoofdredacteur en Thomas van Berkel zal als Leraar in Opleiding de startende docent vertegenwoordigen.

Inhoud

Euclides is gewijd aan het Nederlandse wiskundeonderwijs. De artikelen hebben een vakinhoudelijke, informerende, didactische, opiniërende en/of actueel-journalistieke inhoud. De redactie streeft naar een breed aanbod in artikelen zodat alle lezersdoelgroepen zich herkennen in het blad. Bijdragen worden voor een deel spontaan ingezonden en voor een ander deel op uitnodiging geschreven.
De kopijlijst telde gedurende de hier beschreven periode 135 inzendingen: concept-artikelen, boek- software en filmbesprekingen, interviews, verslagen van prijsuitreikingen en conferenties, redactionele kopij, aankondigingen en mededelingen, en daarnaast NVvW-bestuursbijdragen voor de Verenigingspagina's. Buiten deze inzendingen ontving de redactie een groot aantal persberichten.
Euclides kende het afgelopen jaar een aantal vaste – en inmiddels bekende – rubrieken. Harm Jan Smid verzorgde vier afleveringen van zijn rubriek *Geheugen* en liet parallellen zien tussen discussies uit het wiskundeonderwijs van vroeger en nu. Elk nummer bevatte een aflevering *Vanuit de oude doos*, verzorgd door Ton Lecluse: hij ging op zoek naar oude examenopgaven, niet meer alleen meetkundig, maar ook analytisch en getaltheoretisch. Van de column *Differentialen en diepvriespizza's* van Dorien Lugt, verschenen in deze jaargang twee afleveringen. Nieuw was de invulling van de puzzelrubriek: Sieb Kemme daagde de lezers uit met doordenkers in *Meet je Rekenkracht met Rekenbeter!* Andere rubrieken die dit jaar het levenslicht zagen zijn *Wiskunde Digitaal* waarin Lonneke Boels de lezer informeert over *Apps* die op de markt zijn, en *Uit de Zebrareeks….*, een serie bijdragen van Rob van Oord die telkens een ander zebraboekje onder de loep neemt en u daarmee hoopt aan te zetten tot een intensiever gebruik van deze boekjes.
Elk nummer werd voorzien van een hoofdredactionele inleiding door Marjanne de Nijs, met daarin soms actuele kwesties, andere keren bestemd als leeswijzer.
In jaargang 87 vond u twee series artikelen. Allereerst het staartje van de IMO-serie. In jaargang 86 kregen lezers leuke opgaven met de bijbehorende uitleg voorgeschoteld als smaakmaker voor de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) die in juli 2011 plaatsvond in Amsterdam. In jaargang 87 sloot de serie af met twee delen waarin teruggekeken werd op dit fantastische evenement. Daarnaast zijn we gestart met *Een jaar lang W4Kangoeroe* waarin we een jaar lang een blik achter de schermen mogen werpen van de Kangoeroewedstrijd.
Er was ook nog een auteur die diverse artikelen instuurde en zijn eigen serie maakte: Frans Ballering met korte 'overdenkingen' over de wiskundedidactiek. Frans Ballering schreef ook een artikel voor een speciaal nummer dit jaar: *Euclides* nummer 6 werd grotendeels gevuld met artikelen die geschreven zijn in samenwerking met *Volgens Bartjens.* Met het oog op de komende rekentoetsen in vo en



mbo was het belangrijk om onze lezers daar goed over te informeren. *Volgens Bartjens* heeft een lange historie als het tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en was daarom voor ons een voor de hand liggende partner.

Omvang

Euclides heeft in principe een vaste omvang van 40 pagina's per nummer; we kunnen hier iets in variëren, met een maximum aantal pagina's van 320 per jaargang. In het afgelopen jaar telden de nummers van *Euclides* achtereenvolgens 56, 36, 44, 48, 44, 52 en 52 pagina's. De steunkleur was roze. De opmaak van *Euclides* werd verzorgd door 'De Kleuver Bedrijfscommunicatie bv' in Veenendaal.

Special

Buiten de reguliere *Euclides* om verscheen er in het voorjaar een 208 pagina's tellende speciale uitgave van *Euclides* met als thema *Getallen*. Deze special stond onder redactie van Klaske Blom en Dick Klingens. Bijna 30 auteurs leverden naar aanleiding van het gekozen thema een bijdrage. De special werd mogelijk dankzij een extra financiële ondersteuning van het bestuur van de NVvW en is gedrukt in een oplage van 3500 stuks. De productie is eveneens verzorgd door De Kleuver bedrijfscommunicatie bv.

Publicatieprocedure

Ingezonden bijdragen worden in eerste instantie beoordeeld (dat wil zeggen geaccepteerd of afgewezen) door de (adjunct-)hoofdredacteur. In geval van acceptatie wordt de inzending van commentaar voorzien door de (adjunct-) hoofdredacteur en enkele andere redactieleden; de auteur krijgt vervolgens de gelegenheid zijn/haar artikel op basis van dit commentaar bij te stellen.
Voor becommentariëring wordt incidenteel ook een beroep gedaan op personen buiten de redactie. De namen van deze referenten worden vermeld op de eerste pagina van het nummer waarvan zij een bijdrage becommentarieerden. Nadere informatie over de publicatieprocedure en een aantal richtlijnen voor de aanlevering van bijdragen voor *Euclides* staan vermeld op *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

Euclides als Verenigingsorgaan

Euclides is 'vakblad voor de wiskundeleraar', maar tegelijkertijd 'orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren'. Als Verenigingsorgaan kent het tijdschrift daarom een aantal geoormerkte pagina´s ten behoeve van het *Verenigingsnieuws*. Het bestuur van de NVvW kan deze Verenigingspagina's, zonder inhoudelijke bemoeienis en buiten verantwoordelijkheid van de redactie, vrijelijk gebruiken om zich tot de leden te richten. Dit gebeurde onder meer in de vorm van *Bestuurstafels*, waarin het bestuur van de NVvW de leden informeert over lopende kwesties en besluiten. Daarnaast hebben diverse bestuursleden het afgelopen jaar verslag gedaan van hun werkzaamheden voor de Vereniging op de pagina's *Verenigingsnieuws*.

Voor en door wiskundedocenten

Wiskundedocenten en andere betrokkenen bij het Nederlandse wiskundeonderwijs vormen een brede en tamelijk heterogene doelgroep, ondanks hun gemeenschappelijke affiniteit. Uiteraard streeft de redactie van *Euclides* ernaar een ieder uit deze groep een ruime sortering aansprekende, informatieve en lezenswaardige artikelen aan te bieden. Feedback van u als lezer is daarom voor de redactie van groot belang, en ook uw inhoudelijke inbreng (in de vorm van een artikel voor collega's in het land) wordt met veel belangstelling door de redactie tegemoet gezien. Stuur daarom uw opmerkingen en bijdragen naar *redactie-euclides@nvvw.nl* .

Over de auteur
Marjanne de Nijs is hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *Marjanne.de.Nijs@gmail.com* of *redactie-euclides@nvvw.nl*

Notulen van de NVvW-jaarvergadering

ZATERDAG 5 NOVEMBER 2011, VEENENDAAL

[Kees Lagerwaard]

Opening
Voorzitter Marian Kollenveld opent de vergadering. Ze heet allen van harte welkom op deze fraaie nieuwe locatie. Een speciaal welkom is er voor ereleden van onze vereniging en vertegenwoordigers van PWN en NVON, resp. Wil Schilders en Henk de Graaf.

Jaarrede
De voorzitter spreekt de jaarrede uit. De volledige tekst van de jaarrede is terug te lezen in *Euclides* nummer 3 jaargang 87.

Notulen
De notulen van de jaarvergadering 2010 worden zonder vragen of opmerkingen vastgesteld.

Jaarverslagen
Over het NVvW-jaarverslag van verenigingsjaar 2010-2011 wenst geen der aanwezigen het woord. Ook het jaarverslag *Euclides* jaargang 86 lokt geen vragen of opmerkingen uit.
De twee jaarverslagen worden vastgesteld onder dankzegging aan de auteurs Klaske Blom en Kees Lagerwaard.

Financieel beheer
Penningmeester Frank van den Heuvel licht de rondgedeelde exploitatierekening over boekjaar 2010-2011 en de balans per 31 juli 2011 toe. De financiële positie van de Vereniging is dermate solide dat er geen aanleiding is de contributie te verhogen.
Hij dankt Pim en Elly van Bemmel voor het vele en goede werk.
Ook de kascommissie bestaande uit mevrouw Aukema-Schepel en de heer Keemink wordt bedankt. Zij hebben de boeken in orde bevonden.
Er zijn vanuit de zaal geen vragen of opmerkingen.
De penningmeester wordt gedechargeerd.

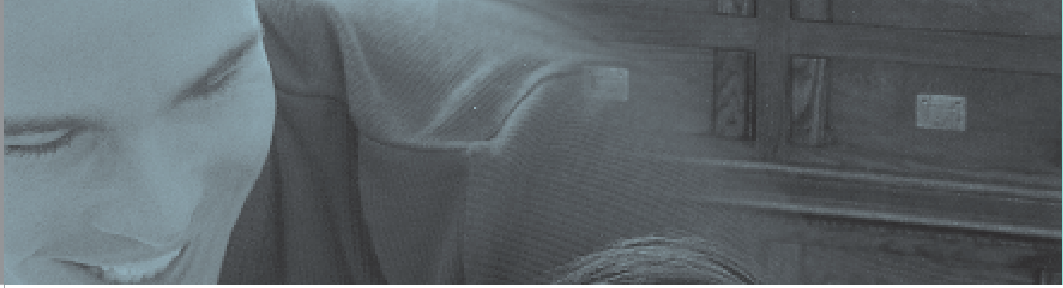
Bestuursverkiezing
De bestuursleden F. van den Heuvel, D. van der Kooi en C. Lagerwaard zijn aftredend. Er zijn geen tegenkandidaten voorgedragen. Derhalve zijn ze allen herkozen.
De voorzitter roept leden op zich beschikbaar te stellen voor een plaats in het bestuur.

Federatie Onderwijsbonden
Pim van Bemmel beëindigt zijn werkzaamheden als vertegenwoordiger van de NVvW bij de Federatie Onderwijsbonden. Henk Rozenhart dankt Pim voor zijn inzet en waardevolle bijdragen en laat deze woorden gepaard gaan met een cadeau en bloemen. Een warm applaus vanuit de zaal onderstreept de waardering voor zijn inzet.

Het Register
Marianne Lambriex praat de vergadering bij over de ontwikkelingen rond het lerarenregister. Haar powerpoint-presentatie is te vinden op de NVvW-site.

Rondvraag
Hiervan wordt geen gebruik gemaakt.

Sluiting
De voorzitter sluit de jaarvergadering en geeft het woord aan de organisatoren van de studiedag.



Verslag van het verenigingsjaar

1 AUGUSTUS 2011 – 31 JULI 2012

[Kees Lagerwaard]

Bestuur

Het bestuur bestond dit verenigingsjaar uit voorzitter Marian Kollenveld, secretaris Kees Lagerwaard, penningmeester Frank van den Heuvel en de leden Marianne Lambriex, Henk Bijleveld, Christiaan Boudri, Johan Gademan, Douwe van der Kooi, Henk van der Kooij en Henk Rozenhart.
Het dagelijks bestuur werd gevormd door de voorzitter, de secretaris en de penningmeester.
Net voor de zomervakantie heeft Frank van den Heuvel zijn bestuurstaken neergelegd. Het dagelijks bestuur bestond daarna uit de twee overblijvende personen.
Er waren dit jaar zeven bestuursvergaderingen. In de tussenliggende periodes kwam het dagelijks bestuur negen keer bijeen. Het bestuur is actief op zoek gegaan naar kandidaten voor een bestuursfunctie, niet alleen om aftredende bestuursleden op te volgen maar ook om het bestuur uit te breiden. We vinden dat deze zoektocht succesvol is verlopen.

Algemeen

De Vereniging heeft ongeveer 2700 leden. De ledenadministratie is nog steeds in de vertrouwde handen van Elly van Bemmel.
Het bestuur heeft zich uitgesproken tegen een verplichte invoering van het vak wiskunde C in het havo-profiel C&M. Een verplicht examenvak van 320 slu (dezelfde omvang als havo wiskunde A) samen met een verplichte rekentoets 3f zal in de ogen van het bestuur voor veel C&M-leerlingen een onneembare hindernis vormen.
Omdat enkele eindexamens net voor Hemelvaartsdag en Pinksteren werden afgenomen, bleek het onmogelijk om voor die vakken regionale examenbesprekingen te organiseren. Voor vmbo is er al jarenlang alleen maar een centrale examenbespreking. Het bestuur streeft ernaar de regionale examenbesprekingen in stand te houden. Het examenforum op de website maakt een uitwisseling van meningen en ervaringen in een examenbespreking niet overbodig.

Platform Wiskunde Nederland

Het Platform Wiskunde Nederland (PWN) opereert onder de koepel van NVvW en KWG en beoogt een betere behartiging van de belangen van de wiskunde, zowel voor het eigen veld als daarbuiten. Onze voorzitter zit in het bestuur van PWN en de NVvW is met name sterk vertegenwoordigd in de commissie Onderwijs.

FvOv

Als vakinhoudelijke vereniging is de NVvW lid van de Federatie van Onderwijsvakorganisaties (FvOv). Dit is de nieuwe naam van de Federatie Onderwijsbonden. De FvOv is aangesloten bij de CMHF (Centrale voor Middelbare en Hogere Functionarissen) teneinde aan de CAO-onderhandelingstafels te komen. Een van de belangrijke taken is immers het afsluiten van CAO's. Voor de Vereniging zijn, gezien de samenstelling van het ledenbestand, de CAO-VO, CAO-BVE en CAO-HBO van belang.
Binnen de Federatie trekken we vaak samen op met de NVON. Het afgelopen jaar zijn de onderhandelingen over een nieuwe CAO stroef verlopen en lijken vooralsnog aardig vast te zitten. Als er nieuws is worden de leden via de website op hoogte gebracht.
Het afgelopen jaar werd de NVvW in de Federatie vertegenwoordigd door Dick Ottenbros. Dick heeft zich inmiddels goed ingewerkt en zal ook het komende jaar ons vertegenwoordigen. Dick heeft regelmatig overleg over lopende zaken met de bestuursverantwoordelijke Henk Rozenhart.
Het bestuur heeft in overleg met bovengenoemden besloten een resonansgroep op te starten zodat in voorkomende gevallen makkelijk een peiling te houden is onder een deel van de leden. Verder zal natuurlijk altijd de mogelijkheid blijven bestaan om individueel te reageren op zaken aangaande de vakbond.
Als één van de partners is de FvOv nauw betrokken bij de inrichting van de Onderwijscoöperatie. Een belangrijk onderdeel van deze Onderwijscoöperatie wordt het lerarenregister. Om dit lerarenregister bekendheid te geven onder de leraren, gaat Monica Woldinga (NVvW-lid) namens de FvOv zitting nemen in een groep die hier het komend schooljaar aan gaat werken.
Een aantal individuele leden met problemen inzake rechtspositie en andere arbeidszaken heeft gebruik gemaakt van het NVvW Rechtspositie Adviesbureau.

PVVVO

Ook dit jaar heeft de NVvW weer deel uitgemaakt van het Platform VVVO.

Bij dit Platform voor Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs spreken vertegenwoordigers van deze verenigingen met elkaar en met derden over ontwikkelingen binnen het onderwijs. Het bestuur van het platform heeft regelmatig overleg met o.a. het ministerie, de VO-raad, SLO, inspectie en anderen. De deelname van de NVvW in dit platform is dus van groot belang om onze visie over vakinhoud onder de aandacht van deze instanties te brengen.
Het PVVVO is ook één van de partners in de Onderwijscoöperatie. Hierin zal de PVVVO de verantwoordelijkheid krijgen voor het lerarenregister voor het middelbaar onderwijs.
Afgelopen jaar is het PVVVO in zwaar weer terecht gekomen doordat het ministerie per 2013 de subsidie voor PVVVO heeft afgeschaft. In overleg vinden de meeste vakinhoudelijke verenigingen het Platform dermate belangrijk dat geprobeerd wordt om het voortbestaan te garanderen via lidmaatschapsgeld per vereniging. Het bestuur van NVvW heeft inmiddels besloten om in 2013 lid te blijven van het PVVVO.
De leden van PVVVO zullen komend jaar nadenken over herstructurering van de werkzaamheden van het Platform. Namens PVVVO is Marianne Lambriex (bestuur NVvW) heel druk met de inrichting van het lerarenregister en de herijking van de daarbij behorende bekwaamheidseisen.
Verder heeft Henk Rozenhart (bestuur NVvW) namens PVVVO zitting genomen in de lerarenadviesraad van de Onderwijscoöperatie.

Herijking Bekwaamheidseisen

De herijking van de zeven competenties van het SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren) is gestart in augustus 2011 en door de Onderwijscoöperatie uitgevoerd. In samenwerking met PWN heeft de NVvW meedenkers geleverd voor de LAR, Leraren Advies Raad, en de Resonansgroep. Het project heeft zich voornamelijk bezig gehouden met het vaststellen van de fundamenten van de zeven SBL competenties: vakinhoudelijk, vakdidactisch en pedagogisch bekwaam.
Na de brede consultatie vonden vanaf 22 november 2011 weer discussierondes plaats in de drie geledingen van de resonansgroep. In deze bijeenkomsten werden de opbrengsten van de brede consultatie besproken. De opbrengsten van de discussierondes werden verwerkt in een conceptvoorstel. In januari 2012 discussieerden de geledingen van de resonansgroep over dit concept. Ook de overleggroep werd in januari 2012 over dit concept geconsulteerd. De opbrengsten hiervan zijn verwerkt in een definitief voorstel met de beschrijving van het beroep en de bekwaamheidseisen. In februari 2012 is het voorstel vastgesteld op een plenaire slotbijeenkomst van de Resonansgroep en daarna overhandigd aan het bestuur van de Onderwijscoöperatie. In april 2012 heeft het bestuur van de Onderwijscoöperatie het voorstel vastgesteld voor de herijking van de bekwaamheidseisen en adviseert op basis daarvan de Minister van OCW.
Juni 2012 was de officiële afsluiting van het traject met de verantwoording van het project met acht aanbevelingen aan de minister.

Registerleraar.nl

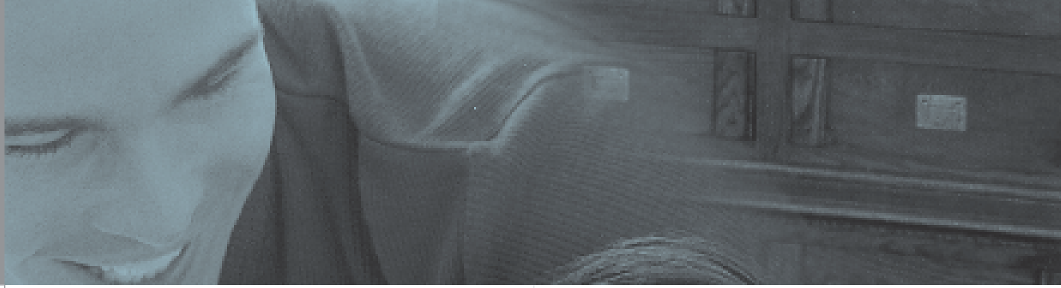
Ook dit jaar heeft de NVvW samen met PWN gewerkt aan de invulling van een LerarenRegister. Dat harde werk van vele jaren heeft dit jaar eindelijk een officieel register opgeleverd, waarvan de officiële opening door de minister op 15 februari plaats vond. Toen ging de site Registerleraar.nl in de lucht en binnen enkele maanden waren er al een paar duizend registraties.
Dit jaar zijn er meer dan 20 bijeenkomsten op allerlei overlegniveaus geweest, de LAR, de RC (Register Commissie) en de stuurgroep. Met elke keer inbreng van de NVvW. Er is een reglement opgesteld, er zijn afspraken gemaakt over bekwaamheidsonderhoud, er zijn FAQ's opgesteld en de site wordt aangepast. Er is voortdurend politieke spanning over het eigenaarschap en het minister geeft een voorlopige bekostiging.
Intussen zijn er voortrekkers en ambassadeurs aangesteld om het register meer bekendheid te geven.

Jaarvergadering/studiedag

De jaarvergadering/studiedag van 5 november 2011 vond voor de eerste maal plaats in het Ichthus College in Veenendaal. De nieuwe locatie bleek een voltreffer: de zaal voor het plenaire gedeelte was voldoende groot en ook de andere ruimtes voldeden ruimschoots aan de verwachtingen.
De jaarrede van de voorzitter kunt u nalezen in *Euclides* nummer 3 van jaargang 88.
De notulen van de jaarvergadering vindt u elders in dit nummer van *Euclides*.
Het studiedagthema 'Wiskunde werkt, reken maar!' bleek een buitengewoon rijke en diverse verzameling lezingen en workshops te herbergen waarin zowel wiskunde als rekenen volop aan bod kwamen. Gezien de grote opkomst en de positieve reacties een succesvolle invulling.
Ook dit jaar was er weer een speciaal programma opgezet voor studenten aan lerarenopleidingen, met name LIO-ers. Voor hen was er een eigen ochtendprogramma en daarna namen ze deel aan 'onze' studiedag.
Het bestuur had, net als vorig jaar, nieuwe leden uitgenodigd voor een lunch. Zo konden bestuursleden kennismaken met enkele tientallen nieuwe leden.

Website

De webmasters Lennart de Jonge en Erik Korthof houden onze website steeds actueel en informatief. Op de achtergrond is ook Dick Klingens nog actief.
De site is wel aan een grondige herziening toe waardoor het navigeren eenvoudiger en sneller zal gaan, en er een koppeling met de ledenadministratie gerealiseerd kan worden die het ook mogelijk maakt specifieke



groepen leden te selecteren en te benaderen. Het examenforum bleek weer in een behoefte te voorzien. Er werd weer uitgebreid gediscussieerd over de inhoud en de correctie van de eindexamens.

Euclides

De nieuwe hoofdredacteur Marjanne de Nijs slaagde er, samen met de redactie onder voorzitterschap van Heiner Wind, weer in om zeven nummers te vullen met nieuws, informatie en artikelen die geen enkele wiskundeleraar zou mogen missen. Ook verscheen er voorjaar 2012 een prachtige *Euclides*-special, 'Getallen', mede dankzij de medewerking van oud-hoofdredacteur Klaske Blom.
Er worden plannen ontwikkeld voor een restyling van *Euclides*. Dit in samenhang met andere communicatiemiddelen waarover de Vereniging beschikt, zoals de website en Twitter, en een mogelijk te starten digitale nieuwsbrief.

Rekenen

De NVvW is betrokken bij het door OCW gefinancierde project 'Rekenen over de vakken heen'. Ook zijn we vertegenwoordigd in de rekentoetswijzercommissie 3S die een rekentoets beschrijft die mogelijk in vwo de rekentoets 3F zal gaan vervangen (een rekentoetswijzer is vergelijkbaar met een syllabus bij een eindexamenprogramma).
De NVvW heeft een lid mogen voordragen voor elk van de vaststellingscommissies 2F en 3F.
Daarnaast blijft het bestuur in gesprek met OCW over problemen en knelpunten bij de invoering van deze rekentoetsen. Hoewel rekenen een zelfstandig vak is, hebben we als wiskundedocenten hier toch veel affiniteit mee en zien we dat er op scholen bij de vormgeving van rekenonderwijs heel vaak een beroep wordt gedaan op de wiskundesectie.

Hbo

De LWHW (Landelijke Werkgroep HBO-Wiskunde) houdt zich bezig met de (bedreigde) plaats van wiskunde als zelfstandig vak in het brede scala van hbo-studies. Daarbij gaat veel aandacht uit naar de technische studies, maar ook de economische studies krijgen aandacht, en dit is gelukkig terug te zien in de samenstelling van de werkgroep. Daarnaast besteedt de werkgroep aandacht aan de aansluitingsproblematiek bij de overgang van vo en mbo naar hbo. Voor het schooljaar 2012-2013 is de werkgroep daarom uitgebreid met een vertegenwoordiger vanuit het mbo.
Het andere belangrijke aandachtsgebied heeft betrekking op de verwachtingen en behoeften op wiskundegebied vanuit het beroepenveld.
Een van de successen in het afgelopen jaar is dat de kennisbasis wiskunde (voluit: Handreiking voor instroomniveaus wiskunde van mbo'ers die technische hbo-studies willen volgen) is overgenomen door het Sectoraal Adviescollege Techniek van de HBO-raad.
Dit jaar is de meeste energie gaan zitten in het voorbereiden van de conferentie op 19 april 2012: 'Wiskunde 2.0, wat willen we met wiskunde op het HBO'. Op die conferentie stond de beroepspraktijk centraal. Vooraf heeft Roel van Asselt een veldonderzoek verricht bij grotere technische bedrijven, om te inventariseren wat de betekenis is van wiskunde in de beroepspraktijk van de beginnende HBO-ingenieur. In de workshopronde is vervolgens voor de verschillende beroepenvelden (techniek, ICT, economie, landbouw, lerarenopleidingen) besproken wat er op wiskundegebied van het HBO wordt verwacht en zijn aanbevelingen geformuleerd voor het hbo curriculum. Om de discussie daarover te kunnen voortzetten is op de site van de NVvW een forum geopend.

Havo-vwo

De werkgroep is vier keer bijeen geweest. Het aantal leden groeit. De rekentoets die eraan komt voor alle leerlingen, stond elke keer op de agenda.
Via de pilottoetsen die afgelopen jaar zijn afgenomen kregen we een beeld van wat de leerlingen te wachten staat. De resultaten geven aanleiding tot veel zorg.
Waar nodig gaven we het bestuur advies, of legden we bij hen vragen met betrekking tot die toetsen voor.
Van een van onze leden verschijnt in *Euclides* een artikel over rekenbeleid op school. We zijn tot de conclusie gekomen dat elke wiskundesectie zich actief moet inzetten voor een goed rekenbeleid op school. Verder hebben we geconstateerd dat er nog veel onduidelijkheden zijn over de soorten rekenopgaven en het gebruik van de rekenmachine. De werkgroep havo-vwo presenteert op de komende studiedag van de vereniging een workshop over het rekenbeleid op school en welke rol de wiskundesectie daarin kan hebben.
Een ander punt dat in de werkgroep op elke agenda stond was de kleine didactiek. Wat werkt in een les? Hoe motiveer je leerlingen? Hoe krijg je kleine didactieken van ervaren docenten op papier? Het zou mooi zijn als na de pensionering van de huidige generatie oudere docenten wat van hun ideeën bewaard kan blijven. Maar ook interessante lesideeën van jongere collega's willen we in kaart brengen. Ook over dit onderwerp is in *Euclides* gepubliceerd. En er is een oproep geplaatst in de *WiskundEbrief* om ideeën in te sturen.
In de werkgroep kwamen ook allerlei actuele zaken aan bod, bijvoorbeeld het nieuw ontwikkelde programma wiskunde C voor havo.

Vmbo

De werkgroep vmbo heeft zich het afgelopen jaar beziggehouden met de vraag of de al zo lang onveranderde eindexamenprogramma's voor de niveaus BB, KB en GL/TL aan vernieuwing toe zijn. Door de invoering van verplichte rekentoetsen en de verdere opmars van digitale eindexamens lijkt het gewenst de programma's eens goed tegen het licht te houden. Een andere reden daarvoor is dat de doorstroming van vmbo naar havo door de niet goed op elkaar aansluitende

wiskundeprogramma's vaak heel moeizaam verloopt.
In de werkgroep is ook gesproken over de (on)haalbaarheid van de rekentoets 2F voor leerlingen op BB-niveau.

ICT-ontwikkeling
De NVvW is betrokken bij de pilot Open Leermiddelenbank Wiskunde.
Ook is de NVvW (via PWN) betrokken bij het project ONBETWIST dat maart 2011 is gestart. In dit project wordt verder gewerkt aan een betere aansluiting vo-ho. Het project duurt tot maart 2013.
Het bestuur continueert de financiële ondersteuning van de projecten WisBase en WisClass en heeft ook een bedrag geschonken ter ondersteuning van de website Rekenbeter.nl.

WwF
Meer dan 50% van de leden voegde aan de contributie een bijdrage aan het Wereld Wiskunde Fonds toe. Daarnaast waren er inkomsten uit twee internet boekenveilingen en een boekenverkoop op de jaarvergadering/studiedag. Ook ontving het WwF enkele donaties.
In het afgelopen jaar is een verzending van Engelstalige boeken (Numbers and Space) naar Zimbabwe gefinancierd en zijn er voor een middelbare school in Kenia boeken aangeschaft voor het wiskundeonderwijs.

Vakantiecursus
Ook in augustus 2011 was er weer een Vakantiecursus in Amsterdam en Eindhoven, de 65e, georganiseerd door CWI in samenwerking met de NVvW.

HKRWO
De Historische Kring Reken-Wiskunde Onderwijs wordt een werkgroep van de NVvW, de Permanente Werkgroep Geschiedenis van het Reken-Wiskunde Onderwijs.

Tot slot
Artikel 2 van de statuten zegt dat het doel van de Vereniging is *aan de leden de gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen betreffende het wiskundeonderwijs en voorts het behartigen van de belangen van dit onderwijs.*
Het bestuur nodigt de leden van harte uit bij te dragen aan die gedachtewisseling. Dat kan op de jaarvergadering/studiedag of bij de examenbesprekingen. Dat kan middels bijdragen aan *Euclides* of een forum op de website. En het kan door mee te praten in een van de werkgroepen. In vele gevallen levert u dan meteen een bijdrage aan het andere doel: het behartigen van de belangen van het wiskundeonderwijs.
Dat kan ook door zitting te nemen in het bestuur of door het bestuur/de vereniging te vertegenwoordigen in diverse overkoepelende organisaties.
Wij vragen leden die met ons willen meepraten, meedenken of meedoen, dit aan ons kenbaar te maken. Neem daartoe contact op met een van de bestuursleden, bijvoorbeeld via *secretaris@nvvw.nl*.

Rectificatie van het persbericht

OP PAGINA 52 IN EUCLIDES 88(1)

[Red.] Van het CvE ontvingen we een bericht dat de informatie die door het ANP verstrekt is, berust op een verkeerde interpretatie van het persbericht dat door de CvE is uitgegeven op 18 juli 2012.
We laten daarom hieronder het gehele CvE-persbericht volgen, waarbij we opmerken dat een en ander dus niet van toepassing is op de computerexamens wiskunde BB en KB.
Voor verdere informatie zie ook (Aanbod digitale centrale examens 2013, 12 juli 2012): www.examenblad.nl/9336000/1/j9vvhinitagymgn_m7mvi7dmy3fq6u9/vj14kcvfrtvs

Voorlopig geen digitale centrale examens op een vast moment
Flexibele digitale examens blijven wel gewoon bestaan

De digitale examens met een *vast afnametijdstip* in het vmbo-GL/TL en havo en vwo worden tot nader order vervangen door een papieren examen, zo nodig vergezeld van cd-rom of audio-cd. Alle digitale flexibele examens in het vmbo BB en KB blijven gewoon bestaan. Dat heeft het CvE vorige week per brief aan de scholen laten weten.

Afnames vast moment
De afname van alle centraal examenvakken op vmbo-GL/TL en havo en vwo vinden plaats op een vast moment. Dit betekent dat alle kandidaten in het land op hetzelfde tijdstip hun centraal examen afleggen. Het overgrote deel van deze examens werd altijd al afgenomen op papier en zal ook in de toekomst nog steeds worden afgenomen op papier. Een beperkt aantal examens op een vast moment werd afgelopen jaren digitaal aangeboden. Dit waren de examens kunst en muziek havo/vwo en de examens muziek, dans en drama op vmbo GL/TL. Op een beperkt aantal scholen werden daarnaast ook aardrijkskunde havo, biologie GL/TL en nask1 GL/TL digitaal aangeboden. Al deze digitale examens op een vast moment worden tot nader order vervangen door een papieren examen [1].
De belangrijkste reden voor dit besluit is dat kandidaten bij de digitale examens op een vast afnametijdstip in geval van storingen op het moment van afname weinig uitwijkmogelijkheden hebben.[2]

Flexibele digitale afnames
Bij vmbo BB en KB worden alle algemene vakken flexibel digitaal aangeboden.
De school ontvangt hiervoor een aantal varianten van het examen en kan zelf het rooster voor de kandidaten samenstellen.
Bij deze flexibele examens is er daarom altijd wel een passende uitwijkmogelijkheid in geval van storingen op het moment van afname. Deze examens blijven in deze vorm gewoon bestaan.

Nieuw computerexamensysteem
De koers die het CvE heeft uitgezet voor de verdere ontwikkeling van de digitale examens verandert niet. Met de komst van het nieuwe computerexamensysteem zal het CvE de draad voor de nu tijdelijk stopgezette digitale examens op een vast moment, weer oppakken. De ontwikkeling van dit nieuwe computerexamensysteem verloopt volgens plan. Het is de bedoeling dit systeem met ingang van 2014-2015 voor alle scholen in bedrijf te hebben.

Noten
[1] Bij de centrale examens kunst algemeen, muziek, dans en drama wordt het uitgangsmateriaal nog wel met behulp van de computer aangeboden.
[2] In 2012 heeft de inspectie op ongeveer twintig scholen een digitale afname geheel of gedeeltelijk ongeldig moeten verklaren. In totaal trof dit ongeveer 200 kandidaten. In totaal hebben rond de 206.000 kandidaten examens afgelegd.

PUZZEL 88-2

Kruisjes zetten en stroken kleuren

[Wobien Doyer en Lieke de Rooij]

Voor deze puzzel is weinig wiskundige kennis nodig, hoewel enige vaardigheid met breuken wel helpt, maar die breuken kunt u ook vouwen.
De opdracht is om een aantal (N) kruisjes op een rechthoekige strook papier te zetten. Het eerste kruisje mag u zetten waar u wilt, maar het tweede kruisje mag niet in dezelfde helft van uw strook worden gezet. Na het plaatsen van het derde kruisje moeten ze alle drie in een verschillend derde deel van de strook staan. Of dat lukt hangt natuurlijk af van de plaatsen waar u uw eerste twee kruisjes heeft gezet. De eerste vier kruisjes moeten elk in een verschillend vierde deel terecht komen, de eerste vijf elk in een verschillend vijfde deel, enz. De grenzen zijn daarbij steeds evenwijdig met de korte zijden van de strook.
Om te weten hoe het proces is verlopen, zullen we de kruisjes nummeren van 1 tot en met N. De plaatsen van die kruisjes zijn dan de getallen $x_1, x_2, \ldots, x_N$.
Wiskundig uitgelegd voor een strook van lengte 1: Bepaal voor een gegeven waarde van N de getallen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ zodanig dat voor elke n in $\{1, 2, \ldots, N\}$ en elke k in $\{1, 2, \ldots, N\}$ er een i in $\{1, 2, \ldots, n\}$ bestaat waarvoor geldt: $\frac{k-1}{n} < x_i < \frac{k}{n}$.
De vraag is natuurlijk: hoeveel kruisjes kunt u zo zetten?
Figuur 1 geeft een voorbeeld voor $N = 4$. Hier kan echter geen kruisje meer bij, want dan komen kruisje 3 en 4 in eenzelfde vijfde deel terecht.
We maken het ietsje makkelijker met een *extra* voorwaarde: Alle oneven kruisjes moeten in de linker helft van de strook worden geplaatst en alle even kruisjes in de rechter helft.

Opgave 1
Probeer onder deze voorwaarden om zoveel mogelijk kruisjes te zetten. Uw antwoord kan een tekening zijn met genummerde kruisjes op uw strook of een lijst met de plaatsen van de genummerde kruisjes.
Voor de volgende opgaven laten we die extra voorwaarde weer varen. Het aantal mogelijkheden wordt nu aanzienlijk groter. Als u een aantal kruisjes heeft gezet kunt u ze nog een klein beetje heen en weer schuiven zonder de voorwaarden te schenden. U mag nu de delen van de strook waar de kruisjes kunnen staan kleuren.
Een gedeelte van de strook zal dan meestal ongekleurd blijven.
Ter informatie: De grenzen van de gekleurde delen zijn dan getallen uit de Farey-rij F_N, de rij vereenvoudigde breuken van 0 tot en met 1 met noemers kleiner of gelijk N.

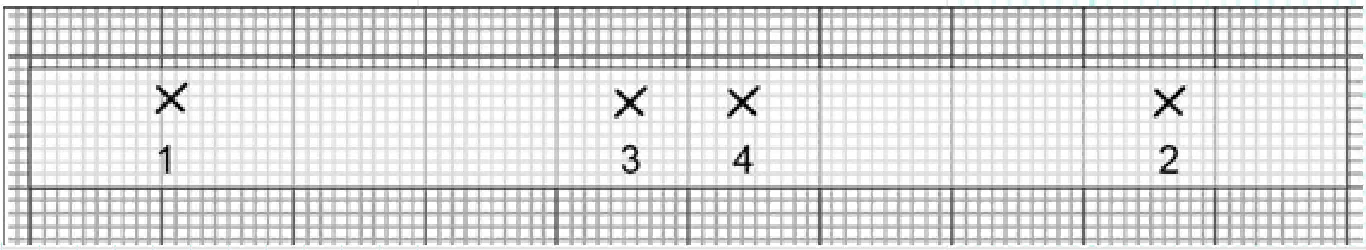
Opgave 2
Bepaal voor $N = 6$ en ook voor $N = 7$ een manier om de kruisjes zo te plaatsen dat u een zo groot mogelijk deel van de strook kunt kleuren, en bepaal de totale grootte van het gekleurde deel van de strook.

Het is geen garantie dat oplossingen van opgave 2 ook een goede start zijn voor opgave 3.

Opgave 3
Dezelfde vraag als opgave 1, maar weer zonder de extra voorwaarde. Probeer hoever u komt en beschrijf kort hoe u het heeft aangepakt.

Inzenden oplossingen
Oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of per gewone post opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen. U kunt echter extra punten verdienen door bruikbare ideeën voor een nieuwe puzzel in te sturen. De deadline is **20 november a.s.**
Veel plezier.

figuur 1



SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie:
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren

Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*).
Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 88

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	18 december 2012	23 okt 2012
4	8 februari 2013	4 dec 2012
5	26 maart 2013	29 jan 2013
6	14 mei 2013	19 mrt 2013
7	25 juni 2013	29 apr 2013

zaterdag 3 november, Veenendaal
NVvW-jaarvergadering en studiedag
Organisatie NVvW
Zie ook pag. 99-105 in dit nummer.

maandag 12 november, Utrecht
Cursus: Hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles
Organisatie APS

zaterdag 17 november, Nijmegen
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis i.s.m. FNWI van de Radboud Universiteit

dinsdag 20 november, Utrecht
Cursus: Leidinggeven aan de wiskundesectie
Organisatie APS

woensdag 21 november, Nieuwegein
Conferentie: Alledaags rekenen
Organisatie Steunpunt Taal & rekenen mbo

vrijdag 23 november, Utrecht
ELWIeR-conferentie
Organisatie ELWIeR, Panama, SLW, Vadiwulo

dinsdag 27 november, Utrecht
Conferentie: Rekenbewust vakonderwijs in het vo
Organisatie APS

vrijdag 7 december, Utrecht
Studiemiddag: Rekenproblemen
Organisatie APS

2013

zaterdag 5 januari, Utrecht
KWG Wintersymposium: Wiskunde met natuurkunde
Organisatie KWG

maandag 28 januari, Utrecht
De 11e APS-wiskundeconferentie
Organisatie APS

vr 1 en za 2 feb, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme