

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 88

n r **1**

september 2012

**Centrale examens
2012**

**Examenbesprekingen
en Examenforum**

'Over' de examens

IMO 2012: dubbel goud

**zaterdag
3 november 2012**

**NVvW-dag
Wiskunde: kernvak!**

Vernieuwd: Recreatie

 **proniks delen** 



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 88

nr 1

september
2012

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofdredacteur

Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur

Dick Klingens, eindredacteur

Thomas van Berkel

Rob Bosch

Wim Laaper

Ernst Lambeck

Joke Verbeek, secretaris

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs,

Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. E. van Dijk

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl



KORT VOORAF

[Marjanne de Nijs]

Examens

Met een nieuw schooljaar voor u starten we deze jaargang van *Euclides* vertrouwd met een examennummer. Hierin kijken we terug op de landelijke examens waarop in het afgelopen voorjaar ruim 200.000 kandidaten hebben gezweet. Inmiddels is duidelijk dat de impact van de extra exameneis (minimaal 5,5 gemiddeld voor het CE) meeviel – de verwachting dat de slagingspercentages veel lager zouden uitvallen, is gelukkig niet uitgekomen. Persoonlijk vond ik het wel even slikken dat ik op 14 juni een vwo-leerling moest meedelen dat hij gezakt was op een gemiddeld CE-cijfer van 5,49 terwijl op zijn eindcijferlijst geen enkele onvoldoende te bekennen was. Gelukkig is er dan een herkansing en liep het toch nog goed af. We kunnen u laten terugblikken op de examens dankzij de inzet van veel collega's die tijd namen om hun ervaringen op papier te zetten waar u uw voordeel mee kunt doen. De Cito-medewerkers leveren zoals elk jaar een volledige analyse van de examens. Met alle pilot-examens was dat een forse klus en het geeft u een compleet en informatief overzicht. Aansluitend op het Cito-verslag krijgt u van Erik Korthof de reacties uit het veld zoals hij ze verzamelde uit de verslagen van de regionale bijeenkomsten en op de examenfora. Mariken Barents vertelt over 'haar' vwo-B examen en betovert u en passant met een TRUC. Ton Lecluse zoomt in op de meetkunde van dit examen, hij evalueert en geeft alternatieven. Over het vwo-A/C examen geeft Gerard Koolstra zijn visie, met name over de (on)mogelijkheid van het beoordelen van opgaven. Beide heren verwoorden op een prettige manier de problematiek die collega's op de examenfora en tijdens de regionale bijeenkomsten bezighield.

Denkactiviteiten

Bent u benieuwd hoe de 'denkactiviteiten' in de vernieuwde programma's getoetst gaan worden? De pilot-examens laten een wisselend beeld zien. Hielke Peereboom had een lantaarn nodig om ze te vinden in het havo-B examen, terwijl het bij vwo-B best wat minder had gemogen volgens Ilone Dekkers. Erik van Barneveld en Peter Kop pleiten in hun artikel voor meer lesmateriaal rond de denkactiviteiten. Zij schrijven over hun ervaringen met het pilot vwo-A examen en laten zien hoe ze hun leerlingen daarop hebben voorbereid.

Digitale toetsing

Half juli kwam het persbericht dat het CvE tijdelijk stopt met het digitaal toetsen van een aantal examens. Het gaat om de examens die centraal getoetst worden op een van te voren aangegeven tijdstip zoals het vmbo-GL/TL examen. Blijkbaar zijn er veel technische problemen opgetreden. Klaske Blom schrijft over het vmbo-GL/TL examen en ook over de digitale versie ervan. Op haar school geen technische storingen maar wel andere praktische en ook inhoudelijke aspecten die aandacht verdienen. Wellicht kunnen de examenmakers hun voordeel doen met haar ervaringen.

Redactie

Met ingang van een nieuwe jaargang veranderen we de steunkleur van *Euclides* – hopelijk houdt u van groen. Maar ook de samenstelling van de redactie is veranderd. We streven er naar om artikelen aan te bieden voor de hele breedte van onze doelgroep. Als verenigingsblad willen we u op de hoogte houden van de actuele ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs in al zijn facetten en ook ideeën geven voor de dagelijkse lespraktijk. Daarvoor hebben we een heterogeen samengestelde redactie nodig en we zijn dan ook blij met twee nieuwe collega's. Als adjunct-hoofdredacteur zal Birgit van Dalen ons komen versterken; u kent haar wellicht als bestuurslid en organisator van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Daarnaast heeft Thomas van Berkel enthousiast gereageerd op de oproep van Rob Bosch vorig jaar voor een leraar-in-opleiding. Thomas studeert aan de Hogeschool van Amsterdam. We heten ze allebei van harte welkom.

Puzzelrubriek

Een wisseling van de wacht heeft plaatsgevonden bij de puzzelrubriek. Sieb Kemme heeft ons laten rekenen met *Rekenbeter.nl* en daarnaast uitgedaagd met telkens weer verrassende doordenkers. Dat dit zeer gewaardeerd werd ziet u ook weer aan de laatste bloemlezingen van de ingezonden oplossingen. Hij stopt er mee en we danken hem zeer voor al zijn bijdragen. Het verheugt ons dat Wobien Doyer en Lieke de Rooij – bekende namen voor de verstokte puzzelaars – de draad oppakken. We wensen u veel puzzelplezier.

Studiedag 3 november

Deze *Euclides* bevat naast examenartikelen nog meer mooie bijdragen net zoals we u de rest van het jaar weer hopen aan te bieden. Informatief, onderhoudend en als het even kan: inspirerend. Over inspirerend gesproken... Graag uw aandacht voor de verenigingsdag op zaterdag 3 november. Het thema van deze dag is *Kernvak!*, zie de oproep van Marianne Lambriex. Inschrijvingen graag vóór 13 oktober.

Dat het maar een mooi schooljaar mag worden!

INHOUD

1	Kort vooraf [Marjanne de Nijs]
2	Examens wiskunde 2012, 1e tijdvak [Ger Limpens e.a.]
22	Te veel nullen, te veel 'Leg uit', ... [Erik Korthof]
30	Redeneren in en rond het eindexamen vwo A/C [Gerard Koolstra]
32	Aankondiging
33	VWO – wiskunde A pilot [Erik van Barneveld, Peter Kop]
37	VWO – wiskunde B [Mariken Barents]
41	VWO B – meetkunde [Ton Lecluse]
43	VWO – wiskunde B pilot [Ilone Dekkers]
47	HAVO – wiskunde B [Hielke Peereboom]
49	VMBO [Klaske Blom]
52	Persbericht
53	Getuigen [Danny Beckers]
55	Wiskunde digitaal [Lonneke Boels]
56	ICT in de wiskundeles, deel 2 [Marc de Hoog]
59	In memoriam Rudolf Troelstra [Wim Groen]
61	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
62	Jaarvergadering/Studiedag 2012 [Marianne Lambriex]
65	Mededeling / Van de bestuurstaafel [Kees Lagerwaard]
66	Recreatie [Lieke de Rooij, Wobien Doyer]
67	Recreatie [Sieb Kemme]
68	Servicepagina

Examens wiskunde 2012

1e tijdvak

VMBO KB EN GL/TL, HAVO A EN B, VWO A, B EN C

[Ger Limpens, Jos Remijn, Melanie Steentjes, Ruud Stolwijk]

Woord vooraf

[Ger Limpens]

In dit artikel kijken we terug op de recente examenperiode van vorig cursusjaar. Nagenoeg alle wiskunde-examens^[1] passeren hierbij de revue. Het is ons streven als examenmakers daarbij zo volledig mogelijk te zijn. Jammer genoeg kunnen we ook dit jaar geen inzicht geven in de examens wiskunde BB behalve dan wat summere gegevens rond gemiddelde, percentage onvoldoende en gehanteerde N-termen. Dat heeft, zoals langzamerhand genoegzaam bekend, natuurlijk alles te maken met de digitalisering van die examens. Slechts een heel beperkt aantal BB-kandidaten deed nog op papier examen, meer dan 99% van deze leerlingen maakte een digitale toetsvariant, zo kunnen we op grond van de tabel met leerlingenaantallen^[2] concluderen; **zie tabel 1** [Leerlingenaantallen 2012] – de tabellen staan **op pag. 20 en 21**. Deze tabel, gecombineerd met gegevens van eerdere jaren, levert ook de informatie voor **figuur 1**. We zien hierin dat het totaal aantal kandidaten dat wiskunde-examen doet, ook dit jaar weer licht gedaald.

Van de overige wiskundevakken doen we, zoals gezegd, zo volledig mogelijk verslag. We geven daarbij aandacht aan de vernieuwingen zoals die zich op alle onderwijsfronten van het middelbaar onderwijs voordoen voorzover die uiteraard relevant zijn met betrekking tot centrale examinering. Bij vmbo KB zijn er ook computerexamens en gelukkig kunnen we daar wel verslag van doen en wel over een tweetal relevante aspecten: het gebruik van de digitale rekenmachine en de inzet van de digitale toolbox, een applicatie die de mogelijkheden van de digitale rekenmachine veruit ontstijgt. Uiteraard is er binnen het vmbo ook ruimschoots aandacht voor de papieren examens, zowel op KB- als GL/TL-niveau. Binnen het onderwijstype havo is er, behalve voor de examens wiskunde A en B, ook aandacht voor de pilotexamens volgens het cTWO-programma^[3]. U kunt in diverse bijdragen lezen in hoeverre de zachte landing die dit experiment vorig jaar op havo-niveau

gemaakt heeft, zich dit jaar consolideert. En vervolgens is dan de vraag hoe ditzelfde experiment dat zich ook afspeelt binnen het vwo, zich aldaar voor de eerste keer op centraal examenniveau manifesteert. En ook daar geven we een verdere analyse van hetgeen er binnen de reguliere examens is gebeurd, daarbij de verschillende vormen van overlap niet vergetend.

Dit alles is mogelijk omdat we tegenwoordig via WOLF^[4] over een behoorlijk grote hoeveelheid gegevens beschikken. Onze toets- en itemanalyses zijn weliswaar nog steeds gebaseerd op een steekproef, maar het moment dat de scores van bijna alle kandidaten in die rekenpartij worden opgenomen, is misschien niet ver meer. Om een voorbeeld te geven: de analyse voor wiskunde havo-A is gebaseerd op de gegevens van 31019 kandidaten waar we enkele jaren geleden circa 2500 kandidaten in de steekproef telden. Het totaal aantal examenkandidaten voor havo-A is 40034 (**zie ook tabel 1**). Hoe een en ander ook zij, we zijn blij met al die gegevens want ze verschaffen ons de noodzakelijke informatie om te komen tot een evaluatie van die examens. Uiteraard spelen ze ook een cruciale rol bij de bepaling van de N-termen die weer leiden tot de aantallen onvoldoendes en de gemiddelde cijfers bij de verschillende vakken. Voor een overzicht daarvan **zie tabel 2** [Verzamelde N-termen 2012]. Die tabel zou overigens naast vergelijkbare tabellen van andere examenjaren gelegd kunnen worden. Daarmee zou de lichte prestatieverbetering die volgens het persbericht dat direct na de vaststelling van de N-termen van het eerste tijdvak 2012 door het CvE^[5] werd gemeld, geadstrueerd kunnen worden. Of die prestatieverbetering overigens een gevolg is van de veranderde zak/slaagregeling, is een vraag waar we hier geen uitspraak met zekerheid over kunnen doen.

Ook de *quick scans* die tegenwoordig in WOLF zijn opgenomen (waarbij docenten zich via de beantwoording van vier vragen over moeilijkheid, examenlengte, aansluiting op het onderwijs en de waardering van het examen kunnen uiten over het betreffende

examen), voorzien voor ons in een daadwerkelijke behoefte. Direct na de examens willen we op een gecoördineerde wijze een beeld krijgen van de manier waarop onze examens in het land ervaren werden. Uiteraard levert het forum van de NVvW ons een onmiddellijke indicator maar die kan nog wel eens heftig fluctueren en is erg ‘individueel-probleem’-gestuurd. Nog los van het feit dat die forumpagina’s toch steeds meer de positie krijgen die ze waarschijnlijk moeten hebben: een heel direct overlegorgaan op collegiaal niveau over zaken die deze of gene kwijt wil. En dat zijn lang niet altijd genuanceerde en generieke visies op een examen. Die algemenere aspecten kwamen in het verleden op een adequate wijze in beeld met behulp van de enquêtes van de regionale examenvergaderingen. Die regionale vergaderingen lijken echter op niet al te lange termijn een achterhaald station: de NVvW heeft dit examenjaar alleen dergelijke bijeenkomsten uitgeschreven voor havo-A, vwo-A en vwo-C. En ook bij deze bijeenkomsten was te constateren dat de opkomst maar mondjesmaat is. Bovendien zou men zich kunnen afvragen in hoeverre deze bijeenkomsten een aselechte steekproef van de docentenpopulatie vormen. Neemt niet weg dat we blij zijn met de informatie die we ook op deze basis weten te vergaren.

Na deze inleidende woorden ook nog even wat zaken van praktische aard: in de diverse volgende paragrafen en in de verschillende tabellen die dit artikel vergezellen, wordt voortdurend melding gemaakt van de p'-waarde. De p'-waarde is de gemiddelde waargenomen score, uitgedrukt als percentage van de maximale score. Uiteraard beschikken we als Cito-medewerkers over een veelheid aan andere gegevens op basis van de WOLF-informatie. Denk daarbij aan relatieve scores waarbij de opbouw op basis van deelscores in percentages van het deelnemersaantal uitgedrukt wordt. Of gegevens over de mate waarin de verschillende kwartielen van een leerlingenpopulatie, samengesteld op basis van met het examen

gemeten vaardigheid, bijdroegen aan de hoeveelheid overgeslagen leerlingenantwoorden bij een bepaald item. Veel van deze gegevens gebruiken we bij het schrijven van dit artikel, maar lang niet alles brengen we in de vorm van tabellen naar buiten. Dat zou dit artikel nog veel langer maken dan het nu al is. Rest nog slechts een dankwoord aan de redactie van *Euclides* die ons de gelegenheid biedt een en ander voor het voetlicht te krijgen. Voor ons erg belangrijk en voor u hopelijk erg interessant. Veel leesplezier.

VMBO KB-GL/TL

[Melanie Steentjes]

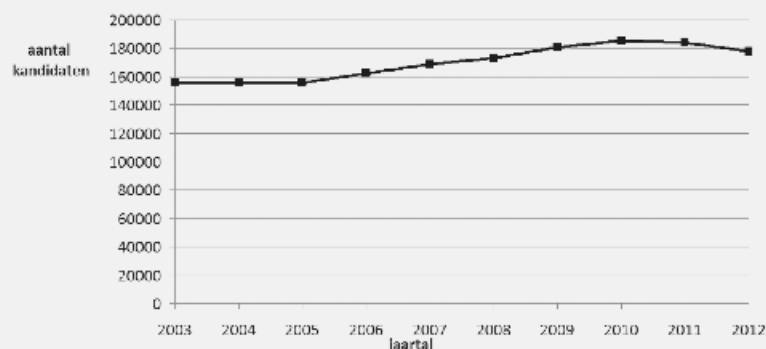
Dit jaar waren er veel verschillende examens wiskunde voor vmbo. Naast de 'gewone' papieren examens voor vmbo kaderberoeps (KB) en gemengde leerweg/theoretische leerweg (GL/TL) waren er ook dit jaar computerexamens voor KB. De meeste leerlingen die aan de computerexamens meededen, kregen een computerexamen met de computerrekenmachine voorgeschoteld. Er waren echter ook 52 scholen die meededen aan een pilot: zij kregen een computerexamen met de toolbox. Hierover later in dit artikel meer. Deze ontwikkelingen hebben tot gevolg dat steeds minder scholen de papieren examens KB afnemen. Bij de examenbespreking in Utrecht was slechts één docent aanwezig die het papieren examen had afgenomen. Helaas is er geen examenbespreking voor de digitale examens mogelijk, omdat de digitale examens nog tot eind juni kunnen worden afgenomen. Dit alles heeft tot gevolg dat de examenmakers relatief weinig feedback over de KB-examens krijgen.

In het vervolg van dit stuk bekijken we de twee papieren examens en de overlap tussen beide examens. We besteden ook aandacht aan één variant van het KB-computerexamen en de pilot toolbox.

Omdat het GL/TL-examen door de meeste leerlingen is gemaakt, beginnen we daarmee.

GL / TL

Bij het GL/TL-examen is net als voorgaande jaren een quick scan afgenomen. Docenten



figuur 1 Aantal kandidaten wiskunde in 2003-2012

Lopen op een trap met een grote optrede of een kleine aantrede is niet gemakkelijk. De Franse architect François Blondel (1617-1686) heeft in 1683 een nuttige formule bedacht voor het maken van trappen. Deze formule wordt nog steeds gebruikt door architecten, timmermannen en fabrikanten van trappen.

De formule van Blondel is

$$2 \times O + A = 62$$

Hierin is O de optrede in cm en A de aantrede in cm

Volgens de bouwvoorschriften moet de aantrede minimaal 18,5 cm zijn.

- 21 Een trap heeft een optrede van 21,5 cm. De trap is gemaakt volgens de formule van Blondel.
→ Ga met een berekening na of de aantrede voldoet aan de bouwvoorschriften. Schrijf je berekening op.

figuur 2 Uit: VMBO GL/TL (Formule van Blondel)

die de resultaten van hun leerlingen via WOLF hadden ingevoerd, kregen een korte vragenlijst van vier vragen. De 1413 docenten die de vragenlijst hadden ingevuld, waren behoorlijk positief over het examen. Ze gaven een gemiddeld cijfer van 6,88. Het grootste deel van de docenten (66%) vond de moeilijkheidsgraad van het examen in orde, 18% van de docenten vond het examen moeilijk tegenover 14% van de docenten die aangaf het examen juist makkelijk te vinden. De lengte van het examen vond men over het algemeen genomen goed en de inhoudelijke aansluiting voldoende tot goed.

Het examen bestond uit 23 vragen waarvoor maximaal 75 scorepunten te behalen waren. Van de 32000 leerlingen van wie we de gegevens via WOLF hebben, waren er vier leerlingen die de maximale score wisten te behalen. In tabel 3 [VMBO GL/TL 2012], is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden.

Tijdens de examenbespreking kwam naar voren dat men niet helemaal tevreden was met de openingscontext *Lucifers*. Leerlingen vonden het geen gemakkelijke context om mee te beginnen en waren er lang mee bezig. De context scoorde met een gemiddelde p'-waarde van 66 ook lager dan bijvoorbeeld

Gif in het meer. De examenmakers wilden echter niet met een context over exponentiële groei beginnen. Gezien de behaalde p'-waarden konden de leerlingen hiermee echter prima uit de voeten en was dat wellicht een betere openingscontext geweest. De eerste twee vragen van *Lucifers* waren overlap met KB en scoorden goed. Bij de laatste twee vragen (geen overlap) moest gerekend worden met grote getallen. Bij vraag 3 moest het aantal lucifers op duizendtallen worden afgerond. Veel leerlingen lieten dat laatste puntje liggen waardoor uiteindelijk maar 19% van de leerlingen de volle 3 punten voor deze vraag scoorde. Tijdens de examenbespreking gaf een aantal docenten aan dat er naar hun idee in dit examen (te) veel moest worden afgerond. In totaal moest er bij zeven vragen worden afgerond en dat is inderdaad aan de hoge kant. Bij vraag 4 moest de lengte van een lucifer worden berekend. 30% van de leerlingen wist niet hoe dit aangepakt moest worden en scoorde 0 punten. Vraag 3 en 4 discrimineerden echter prima: leerlingen die goed scoorden op deze vragen, scoorden ook goed op het hele examen.

De tweede context, *Verfblikken*, werd een stuk lastiger gevonden. De eerste vraag waarin de inhoud van een cilindervormig verfblik moest worden berekend, ging prima

- 15 Je ziet in tekening 1 dat bij de vlieger door het touw een gelijkbenige driehoek ontstaat. Deze driehoek staat ook in de tekening hiernaast. De gelijke benen AC en BC zijn 90 cm lang. CD is de symmetrie-as van de driehoek. CD verdeelt hoek C in twee hoeken van 10° .
- Bereken hoeveel cm de lengte van AB is. Schrijf je berekening op en rond af op één decimaal.



figuur 3 Uit: VMBO KB 2012 (Vlieger)

met een p'-waarde van 81. Veel leerlingen (30%) lieten 1 punt liggen bij deze vraag. Wellicht vergeten af te ronden op een geheel getal? Bij vraag 6 moest de uitslag van een verblik (cilinder) op schaal getekend worden. Dit was de op één na lastigste vraag van het examen. Maar liefst 42% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt. Bij vraag 7 moest geredeneerd worden over de inhoud als de straal verdubbelt en de hoogte hetzelfde blijft. Dat leerden prima uit de voeten kunnen met deze theoretische vraag bleek uit de p'-waarde van 84. In de laatste vraag moest door middel van inklemmen de straal en hoogte van een blik berekend worden. Een mooi discriminerende vraag, maar aan de lastige kant.

Dat leerlingen goed uit de voeten konden met exponentiële formules bleek, zoals hierboven al vermeld, uit de scores die gehaald werden bij de derde context, *Gif in het meer*. De eerste vraag was een laat-zien-vraag waarin met de formule gerekend moest worden. Dit was de makkelijkste vraag van het examen met een p'-waarde van 93. Ook vraag 10 waarbij de grafiek die bij de formule hoort, moest worden getekend, ging goed. De meeste moeite hadden de leerlingen met de laatste vraag van deze context, vraag 12. Daar moest beredeneerd worden of de hoeveelheid gif met $24 \times 1,5 = 36\%$ afneemt per dag als de hoeveelheid gif met 1,5% per uur afneemt. 32% van de leerlingen scoorde geen enkel punt.

De eerste drie vragen van *Brug van Millau* waren overlap met het KB-examen. In vraag 13 moest aan de hand van de schaal de lengte van een pilaar worden geschat. Er waren leerlingen die ervan uit gingen dat de pilaar tot aan de onderkant van het wegdek liep. Zij misten daardoor 1 punt. Bij vraag 14 moest de lengte van een staalkabel van de brug in hele meters berekend worden

met behulp van de stelling van Pythagoras. Dit ging de leerlingen uitstekend af, gezien de p'-waarde van 83. Er was ook hier weer een relatief hoog percentage (19%) dat 1 punt liet liggen, wellicht het afrondingspuntje. Docenten gaven aan dat een maximum score van 4 punten voor deze vraag wel erg riant was. Ook met het berekenen van een hoek met behulp van de tangens hadden weinig leerlingen moeite: 60% scoorde alle punten en de vraag had een p'-waarde van 72. De scores bij vraag 14 en 15 zijn hoog in vergelijking met vergelijkbare examens uit voorgaande jaren. In 2010 scoorde een vergelijkbare vraag met de tangens bijvoorbeeld een p'-waarde van 52. Bij de laatste vraag van deze context (geen overlap) moest het hoogteverschil tussen Béziers en Clermont-Ferrand berekend worden aan de hand van de hellingshoek van de brug. Wellicht leverde het vertalen vanuit de context hier problemen op: 39% van de leerlingen haalde geen enkel punt. Van de leerlingen die begrepen hoe ze moesten beginnen, haalden de meesten alle punten. Halveren bleek de lastigste context van het examen te zijn. Leerlingen hadden moeite met de definitie van de variabelen f en O (figuurnummer en oppervlakte). Boven vraag 18 staat wel uitgelegd waarvoor deze variabelen staan, maar dit was voor een aantal leerlingen te kort door de bocht. De laatste vraag van deze context, vraag 19, was de moeilijkste vraag van het examen met een p'-waarde van 26. Maar 6% van de leerlingen scoorde hier alle punten. Tijdens de examenbespreking bleken er ook leerlingen te zijn die de gevraagde lengte berekend hadden met behulp van de schaaltekening uit vraag 17. Omdat niet expliciet vermeld stond dat dit niet de bedoeling was, moesten aan een dergelijke oplossing ook punten worden toegekend. Omdat de uitkomst

minder nauwkeurig is dan de gevraagde, kon een leerling met een dergelijke oplossingsmethode maximaal 4 punten halen.

Verschillende docenten gaven aan 6 punten voor deze vraag wel erg veel te vinden. Aangezien we echter elke stap van een leerling willen belonen en deze vraag uit veel stappen bestond, vonden de examenmakers de 6 punten voor deze vraag gerechtvaardigd.

Het examen sloot af met *Formule van Blondel* (overlap met het examen KB). Bij vraag 20 moest, net als bij vraag 15, met behulp van de tangens een hoek berekend worden. Deze vraag scoorde een even hoge p'-waarde als vraag 15, namelijk 72. Meer moeite hadden de leerlingen met vraag 21, *zie figuur 2*, waarbij gerekend moest worden met de formule van Blondel. Uit de examenbespreking en het forum bleek dat veel leerlingen niet alleen voor O de waarde 21,5 invulden, maar ook voor A de waarde 18,5. Ze kregen dan geen 62 uit de optelling, maar 61,5 en wisten vervolgens niet wat te concluderen. Hiervoor kon alleen 1 punt voor het invullen worden toegekend. Bij vraag 22 moesten leerlingen laten zien dat een trap uit 50 treden moest bestaan als aan de formule van Blondel werd voldaan. Dit was een alles-of-niets-vraag. Leerlingen scoorden of geen enkel punt (44%) of alle punten (ook 44%). Het examen sloot af met het berekenen van het aantal tussenbordessen bij de genoemde trap. Veel leerlingen lieten hier 1 punt liggen, maar het was geen onprettige afsluiter met een p'-waarde van 63.

Het CvE besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 1,0. Dat resulteerde in een examen met 27,3% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,3.

KB papier

Het KB-examen bestond uit 25 vragen waarvoor in totaal 75 punten te behalen waren. Van de 5818 leerlingen waarvan we de gegevens via WOLF hebben doorgekregen, wisten vier leerlingen 73 punten te halen. In *tabel 4* [VMBO KB 2012] is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden. Net als bij het GL/TL-examen begon het KB-examen met de context *Lucifers*. Ook bij dit examen was deze context met een gemiddelde p'-waarde van 61 niet de makkelijkste context van het examen. De eerste vraag, waarbij het aantal luciferdoosjes dat gevuld kan worden met het hout van één populier, moest worden berekend was met een p'-waarde van 92 echter wel de best

gemaakte vraag van het examen en een prettige binnenkomer. De twee volgende vragen waren overlap met het GL/TL-examen en de KB-leerlingen scoorden bij deze twee vragen beduidend minder goed dan de GL/TL-leerlingen. Er waren veel leerlingen (respectievelijk 39% en 34%) die geen enkel punt wisten te scoren bij deze vragen. Bij de laatste vraag van deze context waarin de lengte van een rij lucifers moest worden berekend, scoorden de meeste leerlingen wel een punt, maar liet 57% het laatste punt, liggen. Wellicht struikelden de leerlingen over de omrekening van cm naar km, waarin omgerekend moest worden van cm naar km, liggen.

Bij de context *Fietsframe* moest gerekend worden met vuistregels over beenlengte en framemaat. Met een gemiddelde p'-waarde van 77,9 was dit de best gemaakte context van het examen. Bij de eerste twee vragen, vraag 6 en vraag 7, lieten wederom veel leerlingen 1 punt (wellicht het afrondingspunt) liggen. Met uitzondering van vraag 7 discrimineerden de vragen van deze context niet echt goed. Dat wil zeggen dat de correlatie tussen de score op deze vragen en de score op het gehele examen niet hoog was. Een verklaring daarvoor hebben we niet.

De drie vragen van *Brug van Millau* waren overlap met het GL/TL-examen. In tegenstelling tot de context *Fietsframe* discrimineerden deze vragen heel goed. Het berekenen van de lengte van een kabel met behulp van de Stelling van Pythagoras ging ook bij de KB-leerlingen goed met een p'-waarde van 62. En ook het berekenen van een hoek met behulp van de tangens scoorde een acceptabele p'-waarde van 48. In het verleden is op soortgelijke vragen beduidend lager gescoord.

Ook de context *Vlieger* was meetkundig van aard. De gemiddelde p'-waarde van 40 laat zien dat het een lastige context was. Achteraf gezien had deze vraag ook niet misstaan in het GL/TL-examen. Het tekenen van de opgevouwen vlieger ging nog redelijk goed met een p'-waarde van 58. Wel 38% van de leerlingen wist hier alle punten te halen. Op het forum kwamen meldingen binnen van leerlingen die de rechthoek niet hadden getekend, omdat ze bijvoorbeeld uitgegaan waren van hun ruitjespapier of de rechthoek later hadden uitgegumd. Als zo'n leerling vervolgens alles goed had gedaan, mocht het volledig aantal punten worden toegekend. Het berekenen van de oppervlakte van de vlieger werd lastig gevonden. Bijna de helft

van de leerlingen scoorde geen enkel punt. Slechts 18% van de leerlingen wist hier alle punten binnen te halen. Bij vraag 15 moest de lengte van een zijde in een gelijkbenige driehoek berekend worden; *zie figuur 3*. Dit bleek een brug te ver voor veel leerlingen. Maar liefst 66% scoort geen enkel punt en de vraag was met een p'-waarde van 24 de lastigste vraag van het examen.

Formule van Blondel was volledig overlap met het GL/TL-examen. Ook bij de KB-leerlingen ging de berekening van de hoek met behulp van de tangens (vraag 16) goed met een p'-waarde van 52. Het was een mooi discriminerende vraag. Het rekenen met de formule van Blondel werd ook bij KB lastig gevonden. Vooral vraag 18 scoorde laag met een p'-waarde van 29. Het is een alles-of-niets-vraag. Maar liefst 66% van de leerlingen scoorde geen enkel punt en 23% wist alle punten te halen. Bij vraag 19 was het verschil tussen de p'-waarde van KB en GL/TL maar klein. Net als bij GL/TL lieten veel leerlingen (50%) het laatste punt liggen. Bij de context *Draaimolen* moest gerekend worden met percentages. Bij vraag 20 moest het winstpercentage worden omgerekend naar euro's. Dat ging heel goed, 77% van de leerlingen haalde alle punten. Bij de laatste vraag lieten veel leerlingen het laatste punt liggen. Hier moest vanwege de context naar beneden worden afgerond en waarschijnlijk ging dat vaak fout.

Het examen sloot af met *Knikers stapelen*. De eerste twee vragen waarin gerekend moest worden met regelmaat en de formule gingen goed. Opvallend is dat de laatste vraag, waarin ingeklemd moest worden, slecht ging met een p'-waarde van 37. Deze vraag werd door 8,9% van de leerlingen overgeslagen. Wellicht dat hier tijdnood ook een rol speelde.

CvE besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 1,1. Dat resulteerde in een examen met 32,9% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,2.

Overlap KB en GL/TL

In totaal waren er 9 vragen die zowel in het KB-examen als het GL/TL-examen zaten. Er waren in totaal 26 punten te halen voor deze vragen; voor details *zie tabel 5* [VMBO overlap KB–GL/TL 2012]. De KB-leerlingen scoorden op de overlap een gemiddelde p'-waarde van 49. Voor het deel van het examen dat specifiek voor KB was, scoorden ze een gemiddelde p'-waarde van 60. De

KB-leerlingen scoorden dus beter op het KB-specifieke deel dan op het overlapgedeelte. Dit is wat de examenmakers beoogden. De GL/TL-leerlingen scoorden een gemiddelde p'-waarde van 69 op het overlapgedeelte. Op het GL/TL-specifieke deel scoorden de GL/TL-leerlingen een gemiddelde p'-waarde van 54. De GL/TL-leerlingen scoorden dus minder goed op het GL/TL-specifieke deel dan op het overlapgedeelte. Ook dit was volgens plan.

KB computerexamens

In 2010 en 2011 zijn pilots uitgevoerd met flexibele digitale examens voor alle algemene vakken bij vmbo-KB. Op grond van de resultaten van deze pilots werd besloten om in 2012 alle KB-scholen de gelegenheid te bieden de examens in de algemene vakken flexibel en digitaal af te nemen. Uiteindelijk hebben er 375 KB-scholen meegedaan aan de digitale examens. Bij de meeste scholen moesten de leerlingen bij het examen wiskunde werken met de computerrekenmachine. De computerrekenmachine is een speciaal voor het computerexamen ontwikkelde rekenmachine waarmee leerlingen hun berekeningen kunnen opslaan in een uitvoerveld. In een eerder stuk in *Euclides* (nummer 86-3) is deze computerrekenmachine uitgebreid besproken. Docenten konden de computerrekenmachine vanaf december downloaden van de Cito-site en er zo in de klas mee oefenen.

Naast deze computerrekenmachine waren er 52 scholen die meededen aan een aparte pilot bij wiskunde. De leerlingen moesten niet werken met de computerrekenmachine, maar met een zogenaamde toolbox. We zullen hier verderop in dit artikel bij stilstaan. We bespreken eerst het examen waarin gebruik is gemaakt van de computerrekenmachine.

Computerexamen 2012

Er zijn verschillende varianten van het computerexamen. In dit artikel bespreken we één variant die door 2086 leerlingen is gemaakt. Het examen bestond uit 25 vragen waarvoor in totaal 69 punten behaald konden worden. *In tabel 6* [VMBO KB crm 2012] is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden.

Het examen startte met een filmpje waarin te zien was hoe de Amerikaan Bryan Berg het Capitool in Washington nabouwde met speelkaarten. In de context *Kaartenhuis* moest voornamelijk gerekend worden met

aantallen speelkaarten. De eerste vraag was een automatisch scorebare vraag, waarin het aantal verdiepingen van een kaartentoren moest worden berekend. Met een p'-waarde van 58 was dit niet de meest vriendelijke binnenkomer, maar de vraag discrimineerde wel heel goed. Bij de tweede vraag moest de lengte van een rij kaarten in km berekend worden. Hier laat 51% van de leerlingen 1 punt liggen. Wellicht was dat het omschrijven van cm naar km. De laatste vraag van deze context werd het slechtst gemaakt (p'-waarde van 41). Hier moest de hoogte van een gelijkbenige driehoek berekend worden met de Stelling van Pythagoras. 47% van de leerlingen scoorde geen enkel punt en 29% van de leerlingen slaagde er in alle punten binnen te halen.

Bij de context *Plansee* werden vragen gesteld over de schaatstocht van Roel. Met een gemiddelde p'-waarde van 50 was dit de lastigste context van het examen. Vraag 6 ging echter heel goed. Dit was een automatisch scorebare vraag waarin moest worden afgelezen uit de grafiek hoeveel minuten Roel over de eerste ronde had gedaan. Met een p'-waarde van 91 bleek dit de makkelijkste vraag van het examen te zijn. Vraag 8 was de slechtst gemaakte vraag van dit examen. Aan de hand van de grafiek moest de gemiddelde snelheid van Roel berekend worden. Maar liefst 51% van de leerlingen scoorde geen enkel punt en slechts 13% van de leerlingen wist alle punten te halen. In de laatste vraag van deze context (*zie figuur 4*) moest een grafiek getekend worden die hoorde bij de schaatstocht van een andere schaatser. Er was een speciale flash applicatie ontwikkeld waarmee leerlingen deze grafiek (die bestond uit verschillende lijnstukken) konden tekenen. De leerlingen scoorden een p'-waarde van 49 en opvallend is dat de vraag goed discrimineerde. Dat betekent dat de score op deze vraag in hoge mate correleerde met de score op het hele examen. Dat is erg prettig bij dit soort vragen met een redelijk ingewikkelde flash-applicatie. Als examenmaker wil je natuurlijk wiskunde toetsen in een examen wiskunde. Maar het zou kunnen zijn dat een flash-applicatie zo ingewikkeld is dat je geen wiskunde toetst maar bijvoorbeeld ict-vaardigheid. Dat moet zoveel mogelijk voorkomen worden. Doordat deze vraag goed discrimineerde, leek er inderdaad wiskunde getoetst te worden met deze vraag en niet iets anders.

Bij de context *Rhönrad* maakten de leerlingen

door middel van een filmpje kennis met dit object dat gebruikt wordt bij turnen. Bij dit soort contexten komt een voordeel van een digitaal examen duidelijk naar voren: het bewegende beeld zorgde ervoor dat leerlingen, zonder al te veel tekst te hoeven lezen, snel begrepen wat een Rhönrad was. Bij vraag 11 moest de omtrek van het rad berekend worden in hele meters. Opvallend is dat 20% van de leerlingen hier 1 punt liet liggen. Wellicht is dat die afronding in hele meters waar overheen gelezen werd. Bij vraag 12 moest de diagonaal van de zaal berekend worden met de Stelling van Pythagoras. Dit was een alles-of-niets-vraag; 38% van de leerlingen haalde geen enkel punt en 45% van de leerlingen wist alle punten binnen te halen. Bij vraag 13 moest een hoek bepaald worden met behulp van de sinus. Deze vraag ging heel goed met een p'-waarde van 60. Maar liefst 50% van de leerlingen wist hier alle punten te halen.

Wat kost een hond startte met een vraag waarin moest worden berekend met hoeveel procent de prijs verlaagd was van een pak hondenvoer; *zie figuur 5*. Niet echt een heel lastige vraag, maar toch had deze vraag een p'-waarde van 48. Wel 31% van de leerlingen haalde geen enkel punt, terwijl je zou zeggen dat het uitrekenen van het prijsverschil niet echt een hele grote stap was en daar was al een punt mee te verdienen. Ook bij vraag 16 moest worden gerekend met procenten. Daar moest uitgerekend worden hoeveel euro betaald moest worden voor de ziektekostenverzekering inclusief 7,5% belasting. Deze vraag ging echter een stuk beter dan vraag 14 met een p'-waarde van 76. Veel leerlingen lieten hier 1 punt liggen. Het zou kunnen dat dit kwam door slecht lezen: de premie was gegeven per maand en de premie inclusief belasting moest berekend worden per jaar.

In *Medaillewinnaars* konden leerlingen alvast in de stemming komen voor de Olympische Spelen. De vragen gingen over de geldprijzen die Nederlandse sporters in 2008 in Beijing gehaald hebben. Deze geldprijzen zijn namelijk te berekenen met behulp van een wortel-formule. Bij de eerste vraag moest berekend worden hoeveel euro een roeier kreeg na het behalen van de gouden medaille. Opvallend is dat 40% van de leerlingen het laatste punt liet liggen. Waarschijnlijk vergat men hier vaak om af te ronden op hele euro's wat aangegeven was in de context. Bij vraag 20 moest een lineaire formule opgesteld worden

aan de hand van een gegeven grafiek. Dit was de lastigste vraag van deze context met een p'-waarde van 40. Ongeveer 40% van de leerlingen wist hier geen enkel punt te scoren. *Match 4* ging over een driedimensionaal vier-op-een-rij spel. Deze hele context werd zeer goed gemaakt met een p'-waarde van 84,1. Er werden vragen gesteld aan de hand van verschillende aanzichten van het spel. Vraag 25 was met een p'-waarde van 78 de lastigste vraag van deze context. Hier moest met behulp van drie aanzichten een bovenaanzicht geconstrueerd worden. Ook bij deze vraag kwamen voordelen van een digitaal examen naar boven. Dergelijke vragen hadden in een papieren examen niet gesteld kunnen worden omdat de verschillende kleuren kralen niet van elkaar te onderscheiden zouden zijn. Ook konden leerlingen in het bovenaanzicht eenvoudig rode en blauwe kralen toevoegen en verwijderen. Dat zou op papier een stuk lastiger zijn. Het CvE besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 1,0. Dat resulteerde in een examen met 26,4% onvoldoende en een gemiddeld cijfer van 6,4.

Pilot toolbox

Zoals eerder gezegd, hebben 52 scholen deelgenomen aan een pilot waarin leerlingen niet werkten met de computerrekenmachine, maar met de toolbox. De toolbox ziet eruit als een leeg scherm met daarboven tien functieknoppen; *zie figuur 6*. Van links naar rechts stellen de knoppen het volgende voor: 1/ Een in de toolbox geïntegreerde rekenmachine waarmee ook berekeningen kunnen worden opgeslagen in het uitvoerveld van de toolbox.

2/ Een formulekaart met de formules die normaal gesproken op de tweede pagina van het papieren examen staan. Als een leerling op een formule klikt, komt die formule in het uitvoerveld van de toolbox te staan en is het voor de docent duidelijk dat de leerling met deze formule heeft gewerkt.

3/ Een symbolenbakje waaruit symbolen gehaald kunnen worden (gradienteken, hoekteken, etcetera).

4/ Rekenpijlen waarmee leerlingen omgekeerde berekeningen kunnen uitvoeren.

5/ Een tabel. Als een leerling op deze knop klikt, verschijnt een 2x2-tabel. Het aantal kolommen of rijen kan eenvoudig worden uitgebreid als leerlingen er bijvoorbeeld een verhoudingstabel of een Pythagoras-tabel van willen maken.

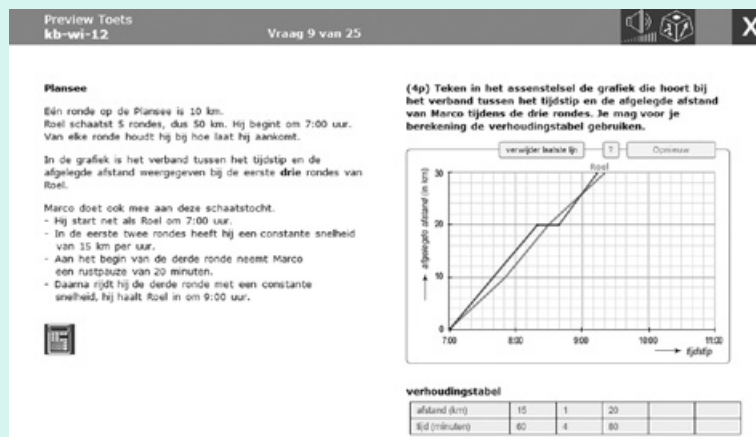
6/ Een driehoek. Hiermee kan een eenvoudige schets van een driehoek gemaakt worden als bijvoorbeeld met de Stelling van Pythagoras gerekend moet worden.
 7, 8 en 9/ Formule-editorknoppen waarmee respectievelijk breuken, wortels en machten kunnen worden ingevoerd.
 10/ Een enter-knop die gebruikt moet worden om op de volgende regel te komen. In Examentester werkt de gewone enter-knop namelijk niet.

De toolbox is in juni en september vorig jaar getest bij een tiental scholen. Daaruit bleek dat leerlingen er, na enige instructie, goed mee uit de voeten konden. Toen is besloten de toolbox ook in een examen-situatie uit te testen bij zo'n 50 scholen. In oktober is de toolbox aan in de pilot geïnteresseerde docenten gedemonstreerd. Vervolgens konden docenten zich inschrijven voor de pilot. Omdat er meer dan 50 aanmeldingen waren, is er geloot. Uiteindelijk deden 52 scholen mee aan de pilot. De toolbox is vervolgens, net als de computerrekenmachine, in december aan de deelnemende scholen ter beschikking gesteld. Docenten konden hun leerlingen op deze manier laten oefenen met de losse applicatie.

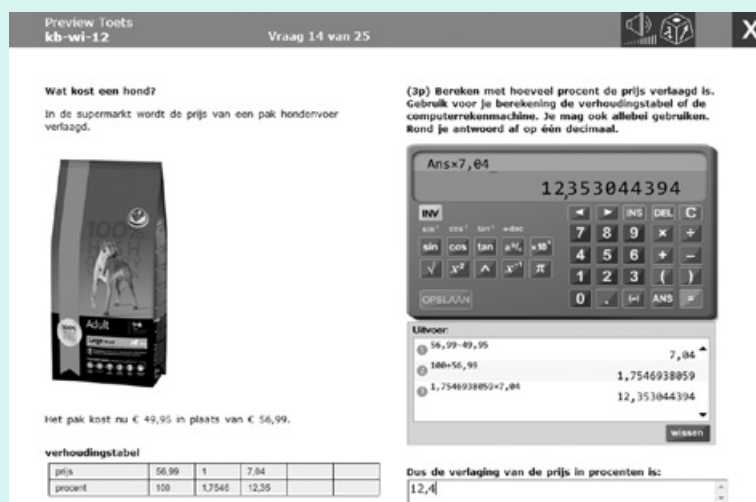
Technisch gezien kwam de pilot goed uit de bus. De antwoorden van de leerlingen werden goed bewaard. Inhoudelijk gezien bleek de toolbox een grote stap voorwaarts in het digitaal examineren. Leerlingen konden hun oplossingswijze beter kwijt in de toolbox dan dat zij voorheen konden bij de computerrekenmachine.

Omdat leerlingen die meededen aan het toolbox-examen dezelfde vragen kregen voorgeschoteld als de leerlingen die meededen aan het computerrekenmachine-examen, kon achteraf goed vergeleken worden in hoeverre de score op een vraag afhankelijk was van het gebruikte gereedschap (toolbox of computerrekenmachine). Over het geheel genomen middelden de scores aardig uit. Bij een klein aantal vragen bleken leerlingen die met de toolbox werkten beter te scoren dan de leerlingen met de computerrekenmachine en bij een klein aantal vragen bleek juist het omgekeerde; zie tabel 7 [VMBO KB tb 2012] voor de p-waarden per vraag.

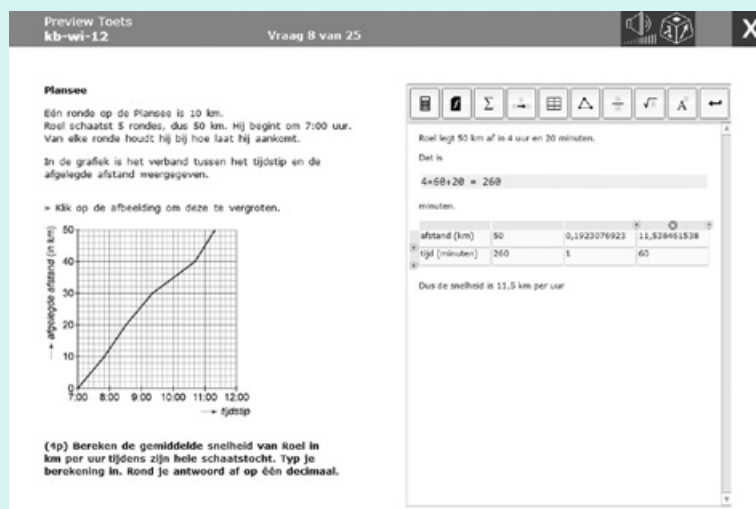
Als we naar variant 1a kijken, werd vraag 8 (Plansee) waarin aan de hand van de grafiek de gemiddelde snelheid van Roel berekend moest worden, een stuk beter gemaakt met



figuur 4 Uit: VMBO KB crm 2012 (Plansee)



figuur 5 Uit: VMBO KB crm 2012 (Wat kost een hond?)



figuur 6 Uit: VMBO KB crm 2012 – Toolbox

De gewichtstoename T van Morgan op een bepaalde dag hangt af van zijn energiebehoefte E_b op die dag. Er geldt:

$$T = 0,000128 \cdot (5000 - E_b)$$

Hierin is T de gewichtstoename in kg per dag.

Wanneer deze formule gecombineerd wordt met de formule $E_b = 33,6 \cdot G$, ontstaat een formule van T uitgedrukt in G .

Deze nieuwe formule is te herleiden tot de vorm $T = a \cdot G + b$.

- 3 Bereken a en b .

figuur 7 Uit: HAVO A 2012 (Supersize me)

Vanaf de leeftijd van 30 jaar neemt de gemiddelde reactietijd toe, oudere mensen reageren gemiddeld genomen trager dan jonge mensen. In sommige situaties kan dat tot problemen leiden. Om bijvoorbeeld veilig te kunnen deelnemen aan het verkeer moet je niet al te traag reageren.

Niet alleen de gemiddelde reactietijd neemt toe, ook de standaardafwijking verandert. Zie tabel 3. Hierin is t de leeftijd in jaren met $t > 30$.

tabel 3 reactietijd (milliseconden)

	gemiddelde	standaardafwijking
mannen	$m = 178 + 1,2 \cdot (t - 30)$	$s = 14 + 0,3 \cdot (t - 30)$

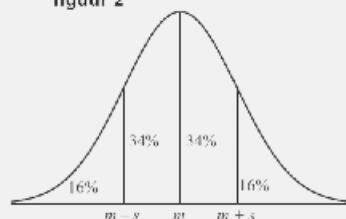
Uit de gegevens van tabel 3 volgt dat $m + s = 147 + 1,5 \cdot t$.

- 18 Laat dit met een berekening zien.

De uitdrukking $m + s$ speelt een rol bij een vuistregel van de normale verdeling. Zie figuur 2. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat tussen de grenzen $m - s$ en $m + s$ 68% ligt.

- 19 Bereken vanaf welke leeftijd 16% van de mannen een reactietijd heeft van meer dan 250 milliseconden.

figuur 2



figuur 8 Uit: HAVO A 2012 (Reactiesnelheid)

men gebruikt worden. Er zullen informatiebijeenkomsten gehouden worden voor docenten over het gebruik van de toolbox. Ook zal de toolbox, net als dit jaar voor de bij de pilot aangemelde scholen, downloadbaar zijn voor los gebruik in de klas.

HAVO A

[Jos Remijn]

Het examen havo wiskunde A werd dit jaar positief ontvangen. Leuke herkenbare contexten, met vragen die goed aansloten bij het gegeven onderwijs. De 949 docenten die de quick scan in WOLF invulden, waren in grote mate tevreden over het niveau van de vragen en de lengte van het examen. De landelijke examenbespreking en de regionale bijeenkomsten van de NVvW leverden hetzelfde beeld. De reacties op het forum op de website van de NVvW gingen hoofdzakelijk over het op de juiste wijze toepassen van het correctievoorschrift.

Een korte bespreking van de opgaven. Het examen telde 22 vragen, verdeeld over vijf opgaven; zie tabel 8 [HAVO A 2012] voor de gedetailleerde resultaten. In de startopgave *Supersize me* moesten de kandidaten zich goed inleven in de situatie van de hoofdpersoon van de gelijknamige film. Er moest ook zorgvuldig worden gelezen. De laatste regel van het correctievoorschrift van vraag 1 luidt: 'Het antwoord: $149 - 85 = 64$ (kg) (of nauwkeuriger)'. De toevoeging 'of nauwkeuriger' wordt vanaf dit jaar in correctievoorschriften van alle havo- en vwo-examens wiskunde gebruikt. Hiermee wordt aangegeven dat naast het gegeven antwoord, gegeven in de minimaal vereiste nauwkeurigheid, ook een nauwkeuriger, correct afgerond antwoord moet worden goed gerekend. Goed begrip van de term 'dagelijkse energiebehoefte' speelde in vraag 2 een belangrijke rol. In vraag 3 (zie figuur 7) speelden algebraïsche vaardigheden een rol. Deze vraag had de laagste p'-waarde van alle examenvragen. Twee gegeven formules moesten worden gecombineerd tot een lineaire formule. Dit bleek een lastige kwestie voor veel kandidaten: de p'-waarde was 23 en 57% van de kandidaten scoorde hier geen enkel punt. Docenten merkten terecht op dat de waarden van a en b ook zonder de herleiding gevonden konden worden. De opgave eindigde met twee vragen over een exponentiële formule. Deze vragen waren opvallend goed gemaakt. Het examen ver-

de toolbox dan met de computerrekenmachine. Er waren vooral meer leerlingen die 0 punten scoorden bij de computerrekenmachine (51% ten opzichte van 36% bij de toolbox). Er moest aardig wat informatie verzameld worden voordat er daadwerkelijk gerekend kon worden. Leerlingen konden deze verzamelde informatie kwijt in de toolbox, maar niet in de computerrekenmachine. Dit zou het verschil in score kunnen verklaren. Ook bij vraag 15 (*Wat kost een hond?*) scoorden de leerlingen met de toolbox hoger dan de leerlingen met de computerrekenmachine. Ook hier moest aardig wat informatie verzameld worden voor er daadwerkelijk gerekend kon worden. Uit deze twee vragen blijkt de waarde van de toolbox. De stappen die een leerling zet, kunnen beter gehonoreerd worden. Bij vraag 18 (*Medaillewinnaars*) scoorden daarentegen de leerlingen met de compu-

terrekenmachine beter. Dit was een vraag waarbij ingeklemd moest worden. Opvallend is dat ook bij de andere varianten de inklemvragen beter gemaakt werden door leerlingen met de computerrekenmachine! Ook hier lag het verschil in het percentage leerlingen dat 0 punten scoorde: leerlingen met de toolbox scoorde vaker 0 punten dan leerlingen met de computerrekenmachine. Wellicht zorgde de computerrekenmachine ervoor dat de leerlingen direct aan het proberen sloegen met het invullen van verschillende waarden terwijl leerlingen met de toolbox minder snel op dat idee kwamen. Het blijft echter gissen naar de werkelijke reden. Het CvE besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 0,8. Dat resulteerde in een examen met 25,2% onvoldoende en een gemiddeld cijfer van 6,4. Omdat de pilot toolbox goed verlopen is, zal in plaats van de computerrekenmachine volgend jaar de toolbox in het computerexa-

volgde met een opgave over het dobbelspel *Tai Sai*. De vragen hierbij leverden weinig bijzonderheden. Het valt op dat de vragen waarin de binomiale kansverdeling wordt gebruikt, dit jaar erg goed gemaakt werden. Waarschijnlijk door specifieke training hierop. De opgave *Bloeiperiode* ging over de toename van de lengte van de bloeiperiode van paddenstoelen. Hoewel van sommige biologiedocenten de reactie 'Paddenstoelen bloeien niet!' kwam, leken de kandidaten hierdoor niet in de war te zijn gebracht. In de opgave *Reactiesnelheid* moesten de kandidaten op een voorgeschreven manier met lineair interpoleren in een tabel een reactietijd berekenen. Kandidaten die de stappen in de methode omdraaiden, kregen hetzelfde antwoord. Dit was niet toevallig zo. Docenten op het forum hadden liever gezien dat de getallen anders waren gekozen, zodat dit niet het geval was geweest. Veel kandidaten interpreteerden een snellere reactietijd als een grotere tijd. Dit kostte in de vragen 15, 16 en 17 telkens één scorepunt. In vraag 18 (*zie figuur 8*) moeten twee lineaire formules worden opgeteld. Ook deze algebraïsche activiteit leverde problemen op, al was de p'-waarde met 42 zeer behoorlijk. In de daarop volgende vraag 19 kon worden verder gerekend met de formule voor $m + s$, of worden gerekend met de normaleverdelingsfunctie van de GR. Deze vraag leverde bij veel kandidaten problemen op. De overgang van de algebraïsche denkwereld van de formule naar een probleem met de normale verdeling bleek voor velen te groot. Het examen eindigde met een korte opgave *Vogeltek*. In vraag 21 werd gevraagd een lineaire formule op te stellen aan de hand van een stukje tekst. Dit leverde matige resultaten op, 35% van de kandidaten haalde hier geen punten voor.

Het CvE bepaalde de N-term op 1,1. Dit leidde tot een gemiddeld cijfer van 6,4 met 25,1% onvoldoendes. Dit was een iets beter resultaat dan vorig jaar. Een verklaring hiervoor kan worden gevonden in het feit dat de kandidaten op een aantal 'standaardopgaven' beter hebben gepresteerd dan in voorgaande jaren. Dit jaar koos zo'n 68% van alle havo-kandidaten het vak wiskunde A; dit is iets meer dan vorig jaar. Voor de C&M-kandidaten (in de steekproef zo'n 10% van de kandidaten) blijft het vak wiskunde A lastig; zij kregen net als vorig jaar een gemiddeld cijfer van slechts 5,7 met 42% onvoldoendes.

HAVO A pilot

[Jos Remijn]

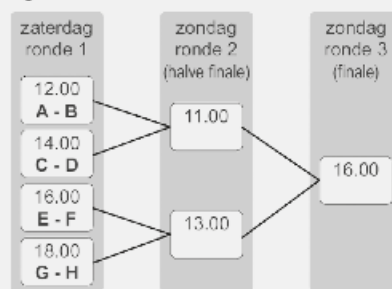
Dit jaar was het tweede jaar waarin het pilotexamen havo wiskunde A volgens het cTWO-programma werd afgenomen. Dit pilotexamen werd door in totaal bijna 200 leerlingen op drie scholen gemaakt. Het nieuwe programma zal in het najaar van 2012 worden geëvalueerd. De definitieve invoering hiervan in de vierde klassen van havo en vwo zal in 2015 zijn. Ter herinnering: in de centrale examens havo wiskunde A volgens het nieuwe programma mogen geen vragen worden gesteld uit de domeinen Kansrekening en Statistiek. Verder zijn er geen grote wijzigingen in het programma. Er zal in het programma een iets grotere rol voor algebraïsche vaardigheden zijn. En in het programma moeten 'denkactiviteiten' een rol gaan spelen.

In tabel 9 [HAVO A pilot 2012] zijn de detailscores bij dit examen te zien. Het pilotexamen kende een forse overlap van circa 50% met het reguliere examen. Deze overlap betrof de opgaven *Supersize me*, *Bloeiperiode* en *Vogeltek*. Deze vragen betroffen de domeinen Algebra, Verbanden en Verandering. De pilotkandidaten scoorden op deze overlapvragen aanzienlijk beter dan de reguliere kandidaten. De opgave *Knock-out* zat niet in het regulier examen. In deze opgave kwam

het speelschema van een tennistoernooi aan de orde. Vraag 8 (*zie figuur 9*) leverde veel problemen voor de kandidaten. De combinatoriek die hiervoor nodig was, was voor velen te hoog gegrepen. Met een p'-waarde van 15 was dit bijna de laagst scorende vraag van het pilotexamen. De eerste vraag van de opgave *Reactietijd* zat ook in de overlap met het regulier examen. Daarna vervolgde de opgave met vragen waarin algebraïsche vaardigheden en werken met formules een rol spelen. Er werd redelijk gescoord op de algebravragen. In de laatste vraag van deze lange opgave werd een interpretatie van een situatie, beschreven door twee formules, gevraagd. Deze vraag was met een p'-waarde van 4 de moeilijkste vraag van het pilotexamen. De pilotkandidaten scoorden bij de laatste vraag van de overlapopgave *Vogeltek* met een p'-waarde van 40 veel beter dan de reguliere kandidaten ($p' = 28$). Deze vraag zou vanwege de complexiteit als 'denkactief' kunnen worden geduid. Het is de pilotdocenten kennelijk gelukt de prestaties op dit type vragen bij de kandidaten te verbeteren. De korte onderzoeksopgave, waarmee het pilotexamen zoals gebruikelijk werd besloten, was getiteld *Gewichtloosheid ervaren*. Bij deze opgave wordt slechts één vraag gesteld, waarbij de kandidaat veel zaken zelf moet organiseren om tot een oplossing te komen.

Bij een klein tennistoernooi in Zwolle doen acht spelers mee. Ze zijn aangegeven met de letters A tot en met H. In de figuur is een mogelijke invulling gegeven van het wedstrijdschema aan het begin van het toernooi. In dit schema wordt de eerste wedstrijd door de spelers A en B gespeeld. Er zijn echter heel veel manieren om ronde 1 van het schema in te vullen. Ga ervan uit dat de wedstrijden A - B en B - A in het schema niet verschillend zijn.

figuur



- 8 Bereken op hoeveel verschillende manieren ronde 1 van het schema ingevuld kan worden

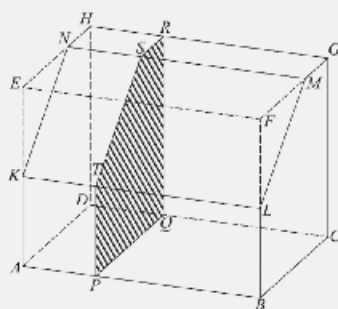
figuur 9 Uit: HAVO A pilot 2012 (Knock-out)

Het prisma wordt doorsneden door het vlak $PQRST$. Dit vlak is evenwijdig aan $ADINK$ en verdeelt prisma $ADINK.BCGML$ in twee delen. Zie figuur 2.

De lengte van AP is zo gekozen dat de inhoud van het deel $ADHNK.PQRST$ een kwart is van de inhoud van balk $ABCD.EFGH$.

5 Bereken de lengte van AP .

figuur 2



figuur 10 Uit: HAVO B 2012 (Prisma)

De pilotkandidaten leverden hier een behoorlijke prestatie. Een p' -waarde van 42 voor deze toch vrij lastige vraag van 6 punten, was goed te noemen. De pilot-docenten gaven aan tevreden te zijn met dit pilotexamen. De algebravragen waren ten opzichte van vorig jaar ook beter gemaakt. Het CvE stelde voor dit pilotexamen de N-term vast op 1,5. Dit leverde een gemiddelde op van 6,8 met slechts 9% onvoldoendes. Een verklaring voor deze goede resultaten kan worden gevonden in het feit dat de pilotkandidaten erg goed hebben gescoord op bijna alle overlapvragen.

HAVO B

[Ruud Stolwijk]

Net als vorig jaar is ook dit jaar het examen havo wiskunde B positief ontvangen. Voorheen gaf de enquête door de NVvW bij de regionale normenbesprekingen gehouden een aardig beeld van wat de betrokken docenten van het examen vonden. Tegenwoordig is de quick scan (in WOLF) een goede graadmeter hoe het examen geland is. De 426 docenten (en dat zijn er heel wat meer dan op de verenigingsbesprekingen kwamen) die de quick scan hebben ingevuld, waardeerden het examen havo wiskunde B met een gemiddeld cijfer van 7,0. Zij vonden het examen van de juiste moeilijkheidsgraad en van een goede lengte en de aansluiting van het examen met het gegeven onderwijs werd als voldoende tot goed ervaren. Mooie cijfers dus, en dat gold gelukkig ook voor de leerlingen, die gemiddeld een 6,3 scoorden (bij een N-term van 1,2 en met 28,2% onvoldoende).

Het examen opende met een opgave over *Vliegende parkieten*. Na enige verkennende vragen (die voor de leerlingen goed te doen waren; zie tabel 10 [HAVO B 2012]) werd in deze opgave uiteindelijk met behulp van de afgeleide de snelheid van parkieten berekend waarbij het energieverbruik minimaal

was. Ondanks dat de afgeleide gegeven was, werd dit laatste slechts door ongeveer een derde deel van de leerlingen foutloos gedaan. De gevraagde afronding (bij deze vraag op één decimaal) werd niet altijd goed uitgevoerd, en dat kostte een punt. In totaal werd er in dit examen zeven keer expliciet om een afronding gevraagd. Volgens sommigen was dat wel erg vaak, maar als een dergelijke toevoeging niet in de vraag staat, ligt de discussie hoe nauwkeurig het antwoord gegeven moet worden op de loer. Om deze reden is in het (recente) verleden door docenten juist herhaaldelijk gevraagd om de afronding voor te schrijven...

De tweede opgave begon met het afmaken van een uitslag van een *Prisma*. Met een p' -waarde van 81 bleek dit de best scorende vraag van het hele examen. Dat deze vraag, waarbij netjes en nauwkeurig gewerkt moest worden, redelijk in het begin van het examen zat, zal daar ongetwijfeld aan hebben bijgedragen. De tweede vraag van deze opgave, waarbij een lengte moest worden berekend (zie figuur 10), was duidelijk lastiger - en tevens meer onderscheidend: een kwart van de leerlingen scoorde hier 0 punten, iets meer dan een kwart wist hier alle punten te behalen. De volgende opgave (CO_2) was een echte contextopgave, met de CO_2 -concentratie in de atmosfeer als onderwerp. Bij vraag 7 moest door te tekenen op de uitwerkbijlage het antwoord gevonden worden, wat wel als een originele activiteit werd beoordeeld. Opvallend was dat vraag 8 (zie figuur 11), waarin met exponentiële groei toch een redelijk standaardonderwerp aan de orde kwam, met een p' -waarde van 38 bij de vier slechtst scorende vragen van dit examen hoorde. Een kwart van de leerlingen wist hier zelfs geen enkel punt te behalen. Bij de opgave *Wortelfunctie* vond men dat bij vraag 11 wel erg nadrukkelijk en uitvoerig werd verteld wat evenwijdigheid inhoudt. Dat had inderdaad wel iets korter gekund...

In de pilotversie was de (iets anders geformuleerde) vraag met wat minder toelichting gesteld, en het resultaat was vergelijkbaar. Bij deze zelfde vraag was overigens discussie over het aantal punten dat een leerling nog kan verdienen als de kettingregel foutief (of zelfs helemaal niet) wordt gebruikt. Volgens sommigen 'moet dit een punt kosten', volgens anderen 'mist het begrip en dat kost twee punten'. Je kunt je afvragen of een opmerking in het correctievoorschrift over dergelijke zaken op zijn plaats zou zijn... De vraag over transformaties (vraag 12) werd als lastig ervaren, maar het werd (in ieder geval door docenten) zeker gewaardeerd dat dit onderwerp in het examen aan de orde kwam. Vervolgens moest in de contextopgave *Satellieten* vooral gerekend worden, waarbij de formule voor de omtrek van de cirkel noodzakelijk was. Het (volgens sommigen vele) leeswerk bleek voor de leerlingen geen beletsel de drie vragen bovengemiddeld te maken: met een p' -waarde van 65 voor deze opgave als geheel lag deze behoorlijk boven de gemiddelde p' -waarde van 56 voor het hele examen.

Dat goniometrie altijd een lastig onderwerp voor havo-B-leerlingen is, bleek wel weer uit de prestaties bij de opgave *Sinusoidale*. Bij beide vragen wist zo'n 40% van de kandidaten geen enkel punt te scoren, terwijl dit onderwerp toch eigenlijk altijd wel in het examen terug te vinden is; zie figuur 12. Jammer. De slotopgave had *Ei* als onderwerp. Bij vraag 18 werd gevraagd een exacte verhouding aan te tonen, en dat dit dan ook exact moet gebeuren, daar was blijkens diverse opmerkingen niet iedereen van overtuigd. Dat ten slotte bij een cilindervormige eirol de verhouding tussen eigeel en eiwit zowel in inhoud als in oppervlakte gelijk is, bezorgde een enkele docent wel wat hoofdbrekens. Maar het is toch echt zo!

HAVO B pilot

[Ruud Stolwijk]

De acht pilotdocenten die hun in totaal 135 leerlingen naar het pilotexamen havo wiskunde B hebben begeleid, waren na afloop heel tevreden. Met name de meetkundeopgaven in het examen werden positief ontvangen. Niveau, lengte en aansluiting op het gegeven onderwijs werden allemaal goed beoordeeld, wat natuurlijk niet alleen voor de examenmakers prettig is, maar zeker en vooral ook voor de betrokken leerlingen. Zij bleken op basis van de overlap met het

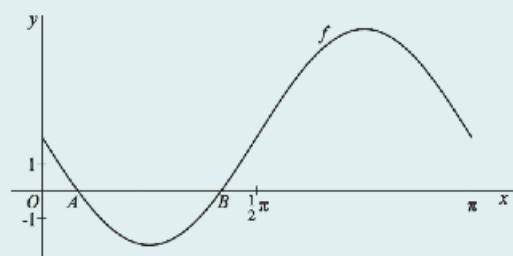
In 1930 bedroeg de CO_2 -concentratie 300 ppm. Hiervan was 285 ppm het natuurlijke niveau en 15 ppm de menselijke component. In 2000 was de CO_2 -concentratie gestegen tot 370 ppm. Met behulp van deze gegevens kun je berekenen met hoeveel procent de menselijke component elke 10 jaar volgens het model toeneemt.

- 8 Bereken deze procentuele toename per 10 jaar. Rond je antwoord af op een geheel aantal procenten.

figuur 11 Uit: HAVO B 2012 (CO_2)

Op het domein $[0, \pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 - 4 \sin(2x)$. De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B . Zie de figuur.

figuur

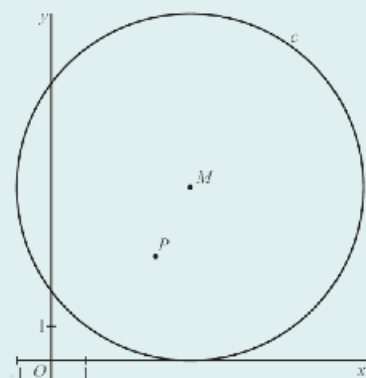


- 16 Bereken exact de x -coördinaten van de punten A en B .

figuur 12 Uit: HAVO B 2012 (Sinusoïde)

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$ en het punt $P(3, 3)$. M is het middelpunt van c . Zie figuur 1.

figuur 1



- 7 Bereken de exacte afstand van punt P tot cirkel c .

figuur 13 Uit: HAVO B pilot 2012 (Een punt binnen een cirkel)

In de figuur zijn in een assenstelsel twee cirkels getekend. De linker cirkel heeft middelpunt M en straal r . Punt M ligt op de y -as. De cirkel raakt de x -as in de oorsprong O . De rechter cirkel heeft middelpunt N en straal s . Deze cirkel raakt de x -as in punt Q . Er geldt: $r > s$. De cirkels raken elkaar in punt R .

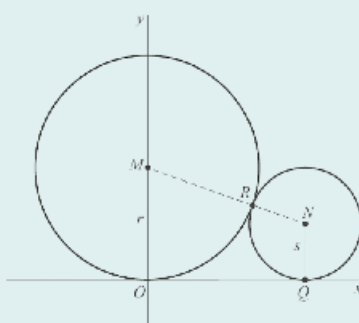
Er geldt: $OQ = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2}$.

- 17 Toon dit aan.

Dovenstaande formule is te herleiden tot een formule van de vorm $OQ = a\sqrt{rs}$.

- 18 Bereken de waarde van a .

figuur



figuur 14 Uit: HAVO B pilot 2012 (Rakende cirkels)

reguliere examens wat vaardiger te zijn dan de reguliere kandidaten – **zie tabel 11** [HAVO B pilot 2012] – en mede daarom is het logisch dat het gemiddeld cijfer van de pilotleerlingen ook wat hoger was dan dat van de reguliere. Net als bij het reguliere examen was de eerste opgave *Vliegende parkieten*. Omdat van de pilotleerlingen volgens het nieuwe programma net iets meer denkactiviteit wordt verwacht, waren de reguliere vragen 3 en 4 gecombineerd tot één vraag – voor 7 punten. Ongeveer een kwart van de leerlingen deed dit foutloos, de overige leerlingen hadden duidelijk meer moeite met het overzien en uitvoeren van alle benodigde stappen.

Over de tweede opgave, *Wortelfunctie*, is bij de bespreking van het reguliere havo-B-examen al voldoende gezegd. De volgende twee opgaven betroffen de invulling van het nieuwe meetkundedomein. De opgave *Een punt binnen een cirkel* was ‘kaal’, puur wiskundig, met (zoals de titel al doet vermoeden) een cirkel als onderwerp; **zie figuur 13**. De leerlingen bleken dit heel aardig te kunnen. In de opgave *Schaatshouding* kwam de ‘nieuwe meetkunde’ in een context aan de orde, waarbij de sinusregel en de cosinusregel moesten worden ingezet. Deze opgave werd door de pilotdocenten zeer gewaardeerd, en aan de p'-waarden te zien, konden de leerlingen goed met deze context uit de voeten. Evenals voor de reguliere kandidaten blijkt goniometrie ook voor de pilotleerlingen een lastig onderwerp. Vraag 12 was identiek aan vraag 16 uit het reguliere examen, maar vanwege de vervolgvraag was het domein van de functie in de pilotversie iets groter genomen. Die vervolgvraag vereiste overigens van de leerling wel weer het doen van wat meer stappen, en de p'-waarde bij deze vraag was vergelijkbaar met de p'-waarde bij vraag 3, waar een vergelijkbare ‘bredere blik’ werd gevraagd. In het pilotprogramma kunnen leerlingen blijkbaar toch wel met dit soort vragen uit de voeten, en dat is mooi. De opgave CO_2 was precies gelijk aan de reguliere versie, zie aldaar. Aan de prestaties bij deze opgave is te zien dat de pilotleerlingen het hier beter deden dan de reguliere kandidaten.

Tenslotte was er nog een derde meetkunde-opgave, *Rakende cirkels*; **zie figuur 14**. De meetkunde is immers gezichtsbepalend voor de vernieuwing in het pilotprogramma. Sommige leerlingen raakten wat in de war door de hoeveelheid letters in deze opgave,

Volgens de Faunabeheereenheid Veluwe is er op de Veluwe plaats en voedsel voor 835 wilde zwijnen. Dit streefgetal is door de minister van Landbouw overgenomen. Jagers krijgen daarom jaarlijks toestemming om een bepaald aantal wilde zwijnen af te schieten.

In 2008 was dit aantal af te schieten wilde zwijnen 1915.

- 5 Bereken hoeveel procent wilde zwijnen er toen te veel waren.



De formule $S = \frac{500 + G^2}{3,9}$ kan worden herschreven tot een formule van de vorm

$$S = a + b \cdot G^2.$$

- 8 Bereken a en b in twee decimalen nauwkeurig.

figuur 15 Uit: VWO C 2012 (Wild)

met name bij vraag 17. Bovendien is en blijft het herschrijven van een formule voor veel leerlingen een abstracte, lastige bezigheid, die echter wel binnen het programma past. Bovendien bleek uit de analyse van de gegevens dat een aantal kandidaten wat weinig tijd voor de laatste opgave over had, wat de prestaties bij de laatste vragen ongetwijfeld negatief heeft beïnvloed. Maar ondanks dat kijken in ieder geval zowel de pilotdocenten als de examenmakers (en, gezien de gehoorde geluiden, vermoedelijk ook de leerlingen) tevreden terug op dit tweede pilotexamen havo wiskunde B volgens het cTWO-programma.

VWO C

[Ger Limpens]

Het vwo-examen wiskunde C had een maximale score van 81 en bevatte 21 items, beide niet ongebruikelijk voor dit examen.

De gemiddelde p' -waarde van dit examen bleek na afloop 58. De erbij horende N -term was 1,1. Dit leverde voor de populatie C-leerlingen een gemiddeld cijfer van 6,3 en 25,0% onvoldoende op. Ook deze getallen zijn niet ongebruikelijk. Wel kan geconstateerd worden dat het onvoldoendepercentage relatief laag is ten opzichte van hetgeen in recente voorgaande jaren werd waargenomen: in 2010 was dit percentage 26,3 en vorig jaar, in 2011 dus, luidde het 27,3%. Op basis van diverse vergelijkingen met andere examenjaren is door het CvE vastgesteld dat de populatie 2012 gemiddeld iets vaardiger was dan voorgaande lichtingen, zeer waarschijnlijk een stijging die samenhangt met de verzwaarde eisen van de huidige zak/slaagregeling. Uitgaande van die gestegen vaardigheid is het dalen van het percentage

onvoldoende niet zo opvallend meer. Maar daarom nog niet minder aangenaam. Of het examen wiskunde C zelf zo aangenaam was voor iedereen valt uiteraard te betwijfelen. De eerste context *I Tjing* viel in dat opzicht meteen wat tegen. Zoals **tabel 12** [VWO C 2012] laat zien, waren de openingsvragen met p' -waarden van 43 en 59 geen open deuren voor veel kandidaten. Combinatoriek (vraag 1) en het bepalen van een verwachtingswaarde (vraag 2) blijken lastig. Voor de eerste vraag kon zelfs geconstateerd worden dat 43% van de kandidaten geen enkel punt voor deze vraag scoorde. Pas bij vraag 3 en vraag 4 (met p' -waarden 70 respectievelijk 73) slaagde meer dan 55% van de kandidaten er in alle punten te behalen. Bij de volgende context *Wild* was er niet zozeer bij leerlingen misbaar te constateren: de eerste drie vragen van deze opgave deden het aardig met p' -waarden van 62, 78 en 61. Wel werd door een enkele docent vrij nerveus op de eerste vraag, vraag 5, gereageerd. Bij vraag 5 werd een percentage 'veel' aan wilde zwijnen gevraagd met als gegeven het streefgetal 835 en het afschot ter grootte van 1915. Het voorbeeld van de lift met een maximum toegestaan aantal van 8 personen zoals op het forum van de NVvW aangetroffen kon worden, illustreerde in al zijn eenvoud heel fraai hoe het probleem in elkaar zat: bij een vraag als deze, naar een teveel, is het uitgangspunt (de '100%' dus) vanzelfsprekend het streefgetal. Jammer dat niet iedereen dat na bestudering van het voorbeeld kon beamen. Het valt alleen te hopen dat deze of gene collega daar zijn leerlingen in de toekomst wel adequaat op voorbereidt. De laatste vraag van deze opgave, vraag 8, was de vraag met de laagste

p' -waarde van dit examen, te weten 28.

Hierbij diende de formule van de vorm

$$S = \frac{500 + G^2}{3,9}$$

de vorm $S = a + b \cdot G^2$. Bedoeling was dus a en b te berekenen. Uit de analyse bleek dat 62% van de C-leerlingen 0 punten voor deze vraag scoorde. De gestegen vaardigheid waar hierboven melding van gemaakt werd, heeft zich – zo laat zich inschatten – dus niet gemanifesteerd in de vorm van algebraïsche vaardigheid... Hoewel algebra sinds enkele jaren iets prominenter op de agenda van, ook, de C-leerlingen dient te staan, maakt een dergelijke score duidelijk dat hier nog een wereld te winnen lijkt te zijn.

Vermoedelijk mogen veel C-leerlingen zich gelukkig prijzen dat de algebra zich in dit examen ook op andere wijze dan 'klassiek' voordeed; **zie figuur 15**.

De derde opgave *Waardepunten* ging uit van de voor velen vertrouwde waardepunten van Douwe Egberts. Dat er wel mee gerekend kon worden maar vervolgens het opstellen van een bijbehorende lineaire formule toch nog wel eens als veel lastiger ervaren kon worden, bleek uit de p' -waarden van de eerste twee vragen: 74 en 47. Het aantonen van de lineaire formule op basis van de DE-puntenregeling was niet eenvoudig; meer dan een kwart van de leerlingen verdiende hier geen punt. Aardiger bleek de score bij de laatste vraag van deze opgave waarbij een exponentiële variant van dit spaarsysteem doorgelicht moest worden. Bijbehorende p' -waarde was 55 en de relatieve score-opbouw was 17-12-24-31-17, een score-opbouw die heel regelmatig is en aangeeft dat steeds een ongeveer even groot deel van de populatie een van de mogelijke totaalscores bij deze vraag binnenhaalde.

Vervolgens kwam *Selectief cijferen*, een context die volledig gelijk was aan de opgave met dezelfde naam bij vwo-A. In tegenstelling echter tot het A-examen was er hier, bij wiskunde C, meteen een probleem bij de eerste vraag waarbij gemiddelde en standaardafwijking van een gegeven dataset berekend dienden te worden. Het probleem was, voorzover valt waar te nemen, overigens niet zozeer een probleem bij kandidaten maar – zonder het te willen bagatelliseren – voornamelijk een (terecht) probleem in de ogen van docenten: deze vraag had niet gesteld mogen worden omdat het subdomein waarin deze vraag moet worden ondergebracht niet tot de centrale-examenstof

behoort. Terecht dat het CvE de vraag al snel via een aanvulling op het correctievoorschrift liet voorzien van de opmerking dat alle kandidaten hier alle (4) punten dienden te krijgen; vandaar natuurlijk de p' -waarde van 100 in de tabel. Naar het zich laat aanzien overigens hebben kandidaten hier veelal zelf geen last van gehad: de kennis voor het schoolexamen verlies je niet onmiddellijk als je naar het centraal examen gaat. De rest van de opgave bestond uit vragen rond normale verdelingen die van een gemiddelde moeilijkheidsgraad waren.

Het examen vwo-C besloot met de context *Behendigheid*, een context gebaseerd op een onderzoek rond pokeren van Borm en Van der Genugten. De onderzoekers maakten op grond van, wat zij noemden, toevalseffect en leereffect, een onderscheid tussen kans- en behendigheidsspel. Beide genoemde effecten werden in een formule voor het behendighedsniveau ondergebracht en met die formule moest binnen deze context op verschillende wijzen geopereerd worden: er moest 'redeneeralgebra' mee bedreven worden zowel als mee gerekend worden. Het echte rekenen hierbij viel nog wel mee, gezien de p' -waarden van 63 en 60 bij de vragen 20 en 21. De redeneeralgebra bij de vragen 17 en 19 viel de kandidaten een stuk zwaarder maar toch laten de respectievelijke p' -waarden 41 en 36 zien dat leerlingen hier ietwat minder onwennig tegenover staan dan tegenover hetgeen er in vraag 8 van hun gevraagd werd. Beide algebraïsche invalshoeken blijven echter gewoon tot de examenstof van vwo-C horen.

Uit de quick scan kan geconcludeerd worden dat het met de moeilijkheidsgraad wel redelijk zat en de lengte als goed ervaren werd. Bij de enquête van de NVvW tijdens de regiovergaderingen werd echter het niveau van dit examen door de helft van de aanwezigen (in totaal 20 collega's ...) als te hoog ervaren. Uit een andere vraag aldaar gesteld kunnen we zien dat men in meerderheid van mening is dat dit examen een te gering niveauverschil met wiskunde A zou bevatten.

Tot slot nog een opmerking over het verschil tussen jongens en meisjes. In de steekproef van 1840 kandidaten op grond waarvan Cito de analyses maakt, valt te constateren dat de 332 jongens in deze steekproef een gemiddelde p' -waarde scoorden van 60,2. De andere 1508 kandidaten, meisjes dus, behaalden een p' -waarde van 57,7.

Opvallend is wellicht niet zozeer dat er veel

meer meisjes in de steekproefpopulatie zitten, alswel dat de grotere groep meisjes het toch echt een beetje minder goed doet dan de kleinere groep jongens.

VWO A

[Ger Limpens]

Volgens de quick scan ($n = 623$) was voor vwo-A eveneens de moeilijkheidsgraad redelijk en de lengte goed. Men was minder te spreken over de inhoudelijke aansluiting. Dat laatste kon ook teruggelezen worden in de enquête van de regionale vergaderingen (met in totaal 35 bezoekers). Daar werd dit examen ervaren als een examen met een slechte spreiding en waren velen van mening (echter geen meerderheid) dat het niveau lager was dan dat van vorig jaar en iets minder mensen vonden het niveau zelfs te laag. Natuurlijk vertoonde het examen vwo-A een redelijke mate van overlap met vwo-C. De openingsopgave *Schroefas* was echter vakspecifiek. Deze context was een vriendelijke binnenkomer: zie daarvoor **tabel 13** [VWO A 2012]. Vraag 1, waarbij een aflezing binnen een drie-assig nomogram moest plaatsvinden, was met $p' = 91$ meteen de hoogst scorende vraag van het hele examen samen met vraag 3 van dezelfde context waar met behulp van een formule met een derde-machtswortel en drie variabelen bij gegeven waarden van twee van de drie, de derde berekend diende te worden. Ook de laatste vraag van deze opgave waarbij diezelfde formule, met daarin een van de drie variabelen van een vaste waarde voorzien, op algebraïsche wijze omschreven moest worden, deed het zeker niet slecht met een p' -waarde van 70.

Vervolgens kwam de context *Hooikoorts* aan de orde, in eerste instantie via een binomiaal verdelingsvraagje ($p' = 86$) en in tweede instantie met een tweetal vragen rond formules die de concentratie van een hooikoortsmedicijn modelleerden. Bij deze beide vragen werd er expliciet aandacht gevraagd voor kennis/vaardigheid rond differentiëren: bij de ene vraag werd nagegaan in hoeverre kandidaten bij machte waren een gegeven gebroken rationale functie te differentiëren en vervolgens met behulp daarvan een maximum te bepalen, en bij de andere vraag moest de betekenis van een afgeleide van een andere formule geïnterpreteerd worden om een vergelijking tussen twee maxima te kunnen trekken. Het is aangenaam om te zien dat deze kandidaten dit er redelijk van af

brachten met p' -waarden van 68 en 51.

De opgave *Waardepunten* figureerde ook in het vwo-C examen maar niet in precies dezelfde vorm als bij A. Was de slotvraag bij C een vraag over een nieuw exponentieel georiënteerd spaarsysteem, bij A culmineerde de context in een hypothesetoets maar niet geheel standaard: er diende nagegaan te worden bij welke waarde van de binomiaalkans p een steekproef net niet significant afwijkend aangemerkt zou worden. Ook van de bijbehorende p' -waarde hier (59) hoeven we niet neerslachtig te worden: dit is, zoals gemeld, zeker niet de standaard hypothesetoetsvraag. En die laatste doet het gemiddeld zeker niet zo goed als de betreffende vraag van dit examen.

Ook hier kwam de context *Selectief cijferen* aan de orde, zoals elders gemeld, exact gelijk aan de versie in het vwo C-examen. Hier was de aanvulling op het correctievoorschrift niet aan de orde: we zien dan ook een realistische p' -waarde in de tabel staan van 67, een beetje tegenvallend voor iets dat als pure reproductievraag moet worden aangemerkt en erg 'leerbaar' zou moeten zijn. De rest van de opgave 'gedroeg' zich redelijk prettig gezien de p' -waarden van 52, 66 en 70. Wellicht past hier wel nog een opmerking naar aanleiding van het kennelijke feit dat collega's hun verbazing uitten over de eerste opmerking in het correctievoorschrift bij vraag 14 waar impliciet aangegeven werd dat het niet geheel en al vanzelfsprekend was dat bij deze context de cumulatieve frequenties boven de rechter klassengrenzen getekend werden: de context bij deze vraag vermeldt alleen de gehele cijfers en het is nergens duidelijk of die cijfers al dan niet in decimalen gegeven worden. Als de cijfers echt als integers gegenereerd worden dan zouden ze toch op normaal waarschijnlijkheidspapier recht boven de gehele waarden op de horizontale as weergegeven moeten worden.

Als slotopgave ook hier de materie rond *Behendigheid*, echter niet geheel gelijk aan de opgave in vwo C. De tweede vraag bij deze context was profielspecifiek en was, wat je zou kunnen noemen, weer klassieke algebra.

De formule $B = \frac{LE}{LE + TE}$ moest worden

herschreven tot $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$, een

activiteit die redelijk eenvoudig genoemd mag worden vanuit algebraïsch perspectief; zie **figuur 16**. Wij als examenmakers

hadden ingeschat dat de leerlingen hier met gemiddeld $p' = 50$ naar huis zouden gaan maar dat bleek tegen te vallen: de geconstateerde p' -waarde was 6. Gelukkig herpakte men zich en slaagde men bij de volgende vragen er toch weer in de behoorlijk positieve draad die dit examen bleek te bevatten weer op te pakken gezien de erop volgende serie van p' -waarden: 67, 42, 50 en 73. Vraag 20, de een-na-laatste vraag van dit examen had, zo kon geconstateerd worden, daarbij wel een duidelijk alles-of-niets karakter: de relatieve score-opbouw van deze driepuntsvraag was 35-15-16-34, misschien ook niet verbazingwekkend gezien het karakter van de vraag waarbij de geoperationaliseerde definitie van *TE* gebruikt moest worden om toe te lichten waarom toenemend toeval en toenemende waarde van *TE* direct met elkaar samenhangen.

Samenvattend leidde dit examen tot een N-term van 0,6, een gemiddelde van 6,4 en onvoldoendepercentage van 22,8. Al met al lijkt ook hier de conclusie gerechtvaardigd – en dat werd wel gestaafd door bevindingen ‘in de loop van het examen’ (zie boven dus) – dat deze populatie net iets vaardiger was dan vergelijkbare lichten van eerdere jaren. Tot slot ook hier een opmerking betreffende de vaardigheid van jongens en meisjes: in tegenstelling tot bij vwo-C wordt hier zo’n vaardigheidsverschil niet waargenomen. Van de 13297 kandidaten in de steekproef bleken de 5487 jongens met een p' -waarde van 63,6 naar huis te gaan en de 7810 meisjes 64,1 als p' -waarde te hebben.

Overlap VWO C / VWO A

[Ger Limpens]

In tabel 14 [VWO overlap C–A 2012] zien we de vragen die in beide examens figureerden. Bij nagenoeg alle vragen scoorde de A-leerling wat hoger dan de C-leerling, niet verwonderlijk natuurlijk. Alleen vraag 11 uit het C-examen (10 van A) leverde vreemd genoeg een omgekeerd patroon: 51 voor C en 45 voor A. Bij deze vraag van de context *Waardepunten* moest van een gegeven tabel aangetoond worden dat er een exponentieel verband was en vervolgens de bijbehorende groeifactor uitgerekend worden. Men kan alleen maar gissen waarom deze vraag zo uitpakt. We zien dit verschijnsel ook terug in de relatieve score-opbouw: bij A scoorde 29% van de leerlingen 0 punten terwijl bij C 21% van de kandidaten in de categorie score 0 viel. Uit de analyses blijkt overigens wel dat

de p' -waarde van de relatief beter scorende jongens bij C hier wat tegenviel en onder de p' -waarde van de meisjes bleef.

Bij alle andere overlapvragen was, zoals gezegd, het verschil tussen C en A zoals verwacht, variërend van 7 (bij vraag 14C/13A) tot 16 (bij vraag 10C/9A). Gemiddeld over de hele overlap scoorde C een p' -waarde van 60 en A een p' -waarde 51. Dit is behoorlijk conform het patroon van de afgelopen jaren.

VWO C pilot

[Ger Limpens]

Dit jaar werden de pilot-wiskundeprogramma's, ook wel de cTWO-programma's, voor het eerst op vwo-niveau van centrale examens voorzien. Bij de totstandkoming van die examens hebben we ons als examenmakers mede laten leiden door de syllabi, de voorbeeldexamenopgaven en de voorbeeldexamens zoals die op de site van het CvE aangetroffen worden (zie daarvoor www.cve.nl, doorklikken via Onderwerpen/Centrale examens/Vakvernieuwingen). Dit experimentele programma wordt, naar alle waarschijnlijkheid, in september 2015 in het vierde leerjaar ingevoerd als het dan reguliere programma. Bij wiskunde C–cTWO is er het een en ander verdwenen uit het centrale examen: eigenlijk alles wat met statistiek en kansrekening te maken heeft, behoudens – zo men wil – de combinatoriek. Niet dat dit uit het programma van dit vak verdwenen is maar deze materie wordt slechts, en anders dan gebruikelijk bij het reguliere programma wiskunde C, in het schoolexamen aan de orde gesteld. Er is ook het een en ander nieuw aan te treffen in het centraal examen van dit vak. De meest in het oog springende nieuwe domeinen zijn Vorm en Ruimte respectievelijk Logisch Redeneren. Verder is bij de constructie van dit examen, conform het CvE-uitgangspunt, het reguliere wiskunde C-examen leidend geweest: het C-pilot-examen bestaat daarmee uit een deel dat ook in het reguliere C-examen zit, een deel dat een variant vormt van vragen uit het C-examen en een echt pilot-specifiek deel. Alle vragen uit de statistiek/kansrekeningsdomeinen van het reguliere examen C ontbreken dus, en in het pilot-specifieke deel treft men de nieuwe domeinen aan. De pilotpopulatie wiskunde vwo-C bestond dit eerste jaar uit 47 leerlingen waarmee de gegevens waarover Cito beschikte, geen steekproef zijn maar een compleet overzicht:

in tabel 15 [VWO C pilot 2012] zien we de p' -waarden op itemniveau en de bijbehorende maximum scores van al deze kandidaten. In tabel 16 [VWO overlap C–C pilot 2012] treft men de overlapitems en bijbehorende p' -waarden aan.

De openingsopgave *Wild* maakt deel uit van de overlap en we zien dat ook de pilotpopulatie forse problemen had met de laatste vraag van deze context: $p' = 16$. Duidelijk dat deze leerlingen (het waren er in totaal 47) op algebraïsch gebied nog wel wat extra aandacht zouden kunnen gebruiken. Ook de opgave *Waardepunten* vormde een deel van de overlap tussen C en C pilot, maar hier kan opgemerkt worden dat er tevens een pilot-specifieke vraag in deze context terecht is gekomen: een telvraag waarbij leerlingen verschillende combinaties met een gegeven puntentotaal moesten bepalen. Deze activiteit bleek de eenvoudigste van dit examen met een p' -waarde van 81. Op de twee andere vragen van deze context scoorde de pilotpopulatie weer wat lager dan de reguliere populatie.

De derde opgave werd weer gevormd door de context *Behendigheids*, nagenoeg gelijk aan de opgave uit het C-regulier-examen. Hier deden de pilotleerlingen het op de overlap voor de verandering wat tot behoorlijk beter dan de reguliere leerlingen. Het kan zijn dat de redeneeralgebra-activiteiten – waar deze opgave toch sterk op leunt – wat meer passen in de verhoogde aandacht voor ‘denk-activiteiten’ zoals dat in de documenten van cTWO genoemd wordt. Al met al komen de p' -waarden voor de C-regulier-populatie en de C-pilot-populatie voor de overlap behoorlijk met elkaar overeen: beide $p' = 54$. De vierde opgave was de opgave *De Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland te Minsk*. Deze opgave gaf vorm aan een van de nieuwe domeinen, te weten Vorm en Ruimte. Er diende onder andere een horizon op een gegeven foto geconstrueerd te worden op basis van verdwijnpunten, een oppervlakte van een achthoek met gegeven afmetingen berekend te worden en een perspectief-tekening gemaakt te worden van diezelfde achthoek uitgaande van een gegeven beginvierkant; zie figuur 17. En tussendoor moest er ook nog met Pythagoras een afmeting uitgerekend worden. Die laatste vraag, vraag 13, deed 't het slechtst binnen deze opgave met een p' -waarde van 29. Maar liefst 86% van deze populatie (32 leerlingen van de 47 dus) scoorde hier geen enkel punt. De

andere drie vragen scoorden alle een p'-waarde groter dan 50.

Vijfde opgave was de context *Halvering van vlakken*, een context die hopelijk goed viel binnen deze doelgroep qua context: het betrof een kunstwerk waarbij regelmaat en rijen een grote rol speelden. Vraag 18 was voor velen echter een brug te ver. Bij deze vraag moest op basis van een reeds in vier even grote rechthoeken verdeeld vierkant en een verder gegeven opdeelproces nagegaan worden hoeveel verschillende plaatjes na twee deelstappen kunnen ontstaan. Een ongetwijfeld veel gemaakte fout is het bij dit deelproces niet onderkennen van de overeenkomst van twee ogenschijnlijk verschillende verdelingen. Maar dat zal vast en zeker niet het enige probleem zijn geweest; bij deze vraag, met een p'-waarde van 12, scoorde 81% van de kandidaten geen enkel punt. De laatste opgave was de opgave *Schaatskunst*, overduidelijk gericht op het domein Logisch Redeneren. Vier vragen, gebaseerd op een artikel uit *NRC Handelsblad*, kwamen aan de orde. Kennis van Venn-diagrammen en 'als-dan'-redeneringen bleek noodzakelijk om met deze vragen uit de voeten te kunnen. En dat viel niet tegen: de leerlingen scoorden alleen bij vraag 21 een p'-waarde lager dan 50. En vraag 22 bleek de hoogst scorende vraag van dit examen: p' = 95.

Ook de docentengelden uit het pilotveld leverden geen onrustbarende mededelingen. De voorlopige conclusie lijkt dat moeilijkheidsgraad en invalshoeken van dit pilotexamen niet als onverwacht gezien werd. Met een N-term van 1,8, een gemiddelde van 6,5 en een onvoldoendepercentage 21,3 ziet het er naar uit dat ook de leerlingen niet ontevreden hoeven te zijn.

VWO A pilot [Ger Limpens]

Ook bij de vwo-A pilot (landbrede invoering in – vermoedelijk – 2015 in het vierde leerjaar) werd als uitgangsmateriaal de verzameling opgaven van het reguliere vwo A-examen gehanteerd. En ook hier speelde uiteraard het feit dat er voor de pilotpopulatie geen vragen over de thema's statistiek en kansrekening op het centraal examen gesteld mogen worden. Voor de pilot-A-populatie was er minder vernieuwing wat betreft de verzameling wiskundige domeinen; dat wil zeggen, er zijn in wezen geen compleet nieuwe domeinen aan het A-regulierprogramma toegevoegd. Dat wil echter niet

Hoe die getallen *TE* en *LE* bepaald worden, komt verderop in deze opgave aan de orde. Eerst kijken we naar een formule die Borm en Van der Genugten gemaakt hebben met die twee begrippen. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$B = \frac{LE}{LE + TE}$$

Het getal *B* dat met deze formule wordt berekend, noemen de onderzoekers het **behendighedsniveau**. Ook al weten we nu nog niet hoe *TE* en *LE* bepaald worden, toch kunnen we wel iets zeggen over de mogelijke waarde van het getal *B*.

1. *B* is nooit negatief;
2. *B* is ten hoogste 1;
3. Als twee spelen hetzelfde positieve leereffect hebben, is *B* groter bij het spel met het kleinere toevalseffect;
4. Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is *B* groter bij het spel met het grotere leereffect.

- 16 Laat met behulp van de formule en de omschrijvingen van *TE* en *LE* zien dat de bovenstaande beweringen 1, 2 en 3 juist zijn.

De bovenstaande formule voor *B* is ook te schrijven als $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$.

- 17 Toon aan dat deze formule ook geschreven kan worden als $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$.

figuur 16 Uit: VWO A 2012 (Behendigheid)

foto 2



figuur 1

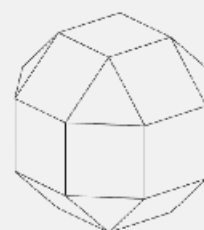


Foto 2 staat ook op de uitwerkbijlage. Om er achter te komen op welke hoogte de lens van het fototoestel zich bevond bij het nemen van deze foto kan men de horizon tekenen.

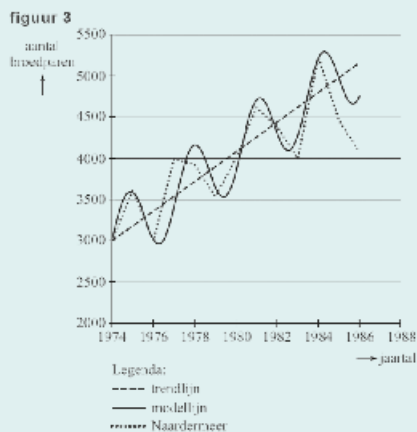
- 12 Teken de horizon in de foto op de uitwerkbijlage.

figuur 17 Uit: VWO C pilot 2012 (De Nationale Bibliotheek van Minsk)

zeggen dat er geen vernieuwing zou zijn. Zaken als aandacht voor e-machten, natuurlijke logaritmen en goniometrische functies horen voor A-pilot-leerlingen geen onbekende onderwerpen te zijn en dat deze materie terug kon komen in het eerste A-pilot-examen, lag daarmee voor de hand. Ook hier gold weer dat syllabus en voorbeeldmateriaal op de site van het CvE (zie elders in dit examenartikel) als illustratief gezien dienen te worden en van harte ter lezing aanbevolen worden voor eenieder die zich wil verdiepen in de gevolgen van de voorstellen van de vernieuwingscommissie cTWO voor de examens. Een ander novum voor de vwo-A-pilot-populatie is de zogenoemde korte onderzoeksopgave. De havo-A-pilotpopulatie

kon daar vorig jaar al kennis mee maken. Citerend uit een van de CvE-documenten: 'Die vraag is, dat is althans het streven, een vraag die direct uit de context voortvloeit maar niet onmiddellijk beantwoord kan worden. Een leerling zal, om tot beantwoording te komen, de context moeten analyseren in het licht van de vraagstelling, soms moeten overgaan tot modellering of abstrahering, soms moeten kiezen voor een logische redenering. Er moet kortgezegd een zelfstandige onderzoeksactiviteit plaatsvinden. De bijbehorende maximumscore is daarmee ook redelijk hoog te noemen. Denk daarbij aan een maximumscore van 6 à 9 scorepunten.' Al met al vermoedelijk toch wel voldoende voor het pilotveld om ook dit pilotexamen

De kolonie bij het Naardermeer bestaat al langer. In de periode van 1974 tot en met 1985 is hier ook een schommeling van de aantallen te zien. Bovendien nemen de aantallen langzaam toe. In figuur 3 is de ontwikkeling van de aantallen benaderd met een modellijn. Figuur 3 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.



Bij de modellijn kan men een formule opstellen van de vorm:

$$N = p + q \cdot t + a \cdot \sin(b \cdot t)$$

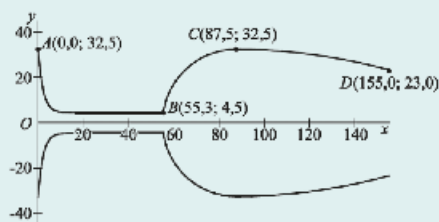
Hierin is t in jaren met $t = 0$ in 1974.

Het gedeelte $p + q \cdot t$ betekent dat de evenwichtsstand niet constant is, maar stijgt volgens een rechte lijn, de trendlijn. De waarden van p , q , a en b in deze formule kan men met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage berekenen.

18 Bereken de waarden van p , q , a en b .

figuur 18 Uit: VWO A pilot 2012 (Aalscholvers)

figuur 2



Kromme AB is de grafiek van de functie f met $f(x) = 4,5 + 28,0 \cdot e^{-0,452x}$ op het domein $[0, 0; 55, 3]$; hierbij zijn $f(x)$ en x in mm. Door kromme AB te wentelen om de x -as ontstaan de buitenkant van de voet en de steel van het wijnglas. De voet en de steel zijn massief.

3 Bereken het volume van de voet en de steel samen. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^3 .

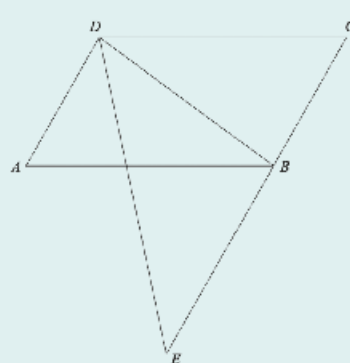
figuur 19 Uit: VWO B 2012 (Het standaard proefglas)

Gegeven is een parallellogram $ABCD$. De bisectrice van hoek ADB snijdt het verlengde van CB in het punt E . Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

Driehoek BDE is gelijkbenig.

6 Bewijs dit.

figuur 1



figuur 20 Uit: VWO B 2012 (Vanuit een parallellogram)

met spanning tegemoet te zien.

De eerste vier contexten weken hier en daar af van de opgaven met dezelfde namen in het reguliere vwo-A-opgaven, zijnde *Schroefas*, *Hooikoorts*, *Waardepunten* en *Behendigheid*. Voor de p -waarden van de pilotpopulatie zie **tabel 17** [VWO A pilot 2012] inclusief de bijbehorende maximum scores. **In tabel 18** [VWO overlap A-A pilot 2012] treft men de overlapitems en ter onderlinge vergelijking de bijbehorende p -waarden aan. Ook hierin zijn weer de gegevens van alle pilotkandidaten vwo-A, tw weten 244, verwerkt. Bij de compleet overlappende opgave *Schroefas* is nauwelijks verschil in vaardigheid tussen de reguliere en de pilotkandidaten, hoewel het wellicht als opvallend ervaren kan worden dat het kleine beetje verschil dat er is, voortdurend in het voordeel van de A-pilot-kandidaat wijst. Dat er niet of nauwelijks verschil is, is misschien ook niet zo verwonderlijk want het verschil in inhoud van de programma's A-regulier en A-pilot is op dit stukje wiskundig terrein ook niet of nauwelijks zichtbaar.

Hoewel de context *Hooikoorts* ook in A-regulier voorkomt, zien we hier meteen al een tweetal pilotspecifieke activiteiten: de vragen 6 en 7 waarbij het hooikoortsmedicijnmodel van een andere formule (in dit geval gebaseerd op een e-macht) voorzien was. De p -waarden van beide vragen vertellen ons dat de kandidaten hier redelijk op voorbereid bleken: 50 respectievelijk 46,26% van de pilotkandidaten slaagde er in om alle 6 scorepunten bij vraag 7 te behalen. Bij *Waardepunten* is de 'toegevoegde' vraag over het bepalen van de combinaties bij gegeven puntental, die ook al in vwo C pilot te vinden was, aan te treffen. Het verschil in p -waarde tussen de C-pilot en de A-pilot populatie past volstrekt in het 'normale' verschil: $p = 74$ bij C-pilot en $p = 82$ bij A-pilot. De andere twee vragen van deze context treffen we verder ook aan bij C- en A-regulier. De beide A-populaties leveren hier wel wat opmerkelijke verschillen: vraag 9 van A-pilot (vraag 8 van A-regulier) wordt door de reguliere leerlingen wat beter gemaakt, maar het verschil bij de volgende vraag 10 in beide examens is toch onverwacht fors in het voordeel van de pilot-leerlingen. Het betreft de vraag waarbij het exponentiële verloop moet worden nagegaan en een groeifactor berekend dient te worden. Deze activiteit lijkt op geen enkele wijze wat betreft programma op 'voordeel' voor de

pilotleerlingen te duiden maar toch: het verschil is onmiskenbaar: $p' = 57$ versus $p' = 45$. Tot slot in de overlap de context *Behendigheid*, exact gelijk aan de opgave uit het reguliere A-examen. Ook hier zien we bij de meeste vragen een verschil in het voordeel van de pilotpopulatie. Hier zou wellicht als verklaring kunnen gelden dat er in het pilotprogramma, gezien het streven van cTWO en vervolgens waarschijnlijk ook in het onderwijs, meer expliciete aandacht gegeven is aan 'denkactiviteiten'. De redeneeralgebra die hier aan de orde gesteld wordt, kan de gelegenheid bieden om dit zichtbaar te maken. De vijfde context, *Aalscholvers*, is pilotspecifiek. Dat geldt nog niet zozeer voor de wiskundige activiteit die in de eerste vraag van deze opgave aan de orde gesteld wordt. Hier wordt, op basis van een grafiek, de gemiddelde jaarlijkse groei van twee populaties aalscholvers vergeleken en gevraagd om aan te geven hoe dit grafisch bevestigd wordt door de figuur. Die vraag zou niet misstaan hebben in het reguliere programma. De twee vervolgvragen echter gaan over het modeleren van groeiprocessen met behulp van sinusfuncties. Voor regulier is dit al sinds jaar en dag geen onderdeel van het Centraal Examen. De pilotleerlingen moesten bij vraag 17 een 'gewone' sinusgrafiek van een formule voorzien en bij vraag 18 een sinusformule in combinatie met een lineaire formule koppelen aan een verstrekte grafiek; **zie figuur 18**. Dat laatste is zeker niet voor de hand liggend en ongetwijfeld niet standaard geoefend in het klaslokaal. De scores bij deze vragen vallen in het geheel niet tegen: 52, 79 respectievelijk 44 duiden op een behoorlijk gemiddelde vaardigheid hier.

De slotopgave was de hierboven al aangekondigde korte onderzoekopgave *Topjaar voor appel en peer*. Op basis van CBS-gegevens over appel- en perenopgaven en opbrengsten per hectare vanaf 1992 werd gevraagd – lineaire trends veronderstellend – na te gaan in welk jaar de totale perenopbrengst de totale appelopbrengst voor het eerst zal overtreffen. Niet zozeer moeilijk, alswel bewerkelijk. Hoe pak je dat aan? Daar ben je als leerling vrij in, uitgaande uiteraard van de randvoorwaarden, en dat maakt het misschien ook wel lastig. Je kunt hier met formules aan de gang maar je kunt ook tabellen opstellen. Er zijn wellicht ook wel kandidaten geweest die met het nauwkeurig tekenen van grafieken heel aardig op weg raakten. Wel was van belang dat het inzicht er was dat oppervlaktegege-

vens met opbrengst per hectare vermenigvuldigd diende te worden om uitspraken te doen over totale opbrengst. Eerlijk gezegd is het aantal kandidaten dat er in slaagde om deze opgave tot een goed einde te brengen wat tegenvallend: slechts 2% van de leerlingen haalde alle 8 punten. En het aantal kandidaten dat helemaal geen punt verdiende, was behoorlijk groot: 42. Met name dat laatste leidde, in combinatie met de ook door pilotdocenten gepleegde observatie, tot het vermoeden dat hier wel eens sprake kan zijn van een te lang examen. Jammer als dat het geval is. Wij, als examenmakers, zullen nog eens goed nadenken over de mogelijke lengteconsequenties van een korte onderzoekopgave met relatief veel scorepunten. Toch kan gesteld worden dat dit pilotexamen in zijn algemeenheid goed geland is. Uit de toets- en itemanalyse werd geconcludeerd dat dit pilotexamen moeilijker was dan het reguliere. En de conclusie dat deze A-pilotpopulatie iets vaardiger is dan zijn reguliere pendant lijkt ook wel getrokken te kunnen worden, gezien onvoldoendepercentage 14,3 en gemiddelde cijfer 6,8 bij een vastgestelde N-term van 1,4.

VWO B

[Ruud Stolwijk]

Het examen vwo wiskunde B is dit jaar over het algemeen positief ontvangen. Inhoudelijk zijn er geen wezenlijke commentaren te bespeuren geweest, alleen aan de lengte werden wel enige opmerkingen gewijd – maar is er ooit een examen vwo wiskunde B geweest waar dit niet het geval was? De 555 docenten die in WOLF de quick scan hebben ingevuld, bevestigen dit beeld: het examen was volgens hen niet te makkelijk, wel wat te lang, het sloot netjes aan bij het gegeven onderwijs en verdient een voldoende.

De eerste opgave van het examen was (zoals wel vaker) een analyse-opgave met de titel *Onafhankelijk van a*. Als startopgave bleek dit geen slechte keus: de eerste vraag was de hoogst scorende uit het hele examen, en de tweede deed het (ook al was het een 'Toon aan'-vraag) ook lang niet slecht; **zie tabel 19** [VWO B 2012]. Dat bij de opdracht 'Toon aan' niet met een enkel voorbeeld gewerkt mag worden, is blijkbaar bij zowel docenten als leerlingen wel duidelijk.

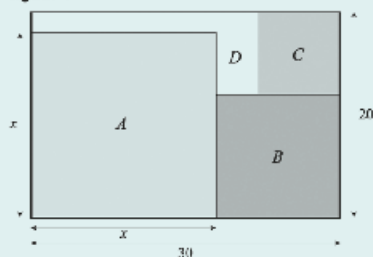
De tweede opgave ging over een model van een zogeheten *Standaard proefglas*. De eerste vraag, waar een volume moest worden berekend waarbij de GR mocht worden

ingezet, bleek goed te doen, maar zeker niet zo eenvoudig als sommige mensen wel eens denken; **zie figuur 19**. Blijkbaar moet je als leerling voor een juist gebruik van de GR toch wel degelijk iets kunnen – 'slechts' de helft van de leerlingen deed dit foutloos. Het opstellen van een formule bij een parabooldeel was wat minder eenvoudig, al kwam dat volgens sommigen door de wel erg uitvoerige formulering van de gegeven informatie. In de pilotversie was de informatie overigens vrijwel geheel weggelaten – met duidelijk slechter resultaat. Blijkbaar was toch enige richting nodig voor de leerlingen, maar misschien had het wel wat korter gekund. Bij de slotvraag van deze opgave moest geïmmitiveerd worden. Wel moest 50 ml worden omgezet in 50000 mm^3 – maar dat zou voor vwo-leerlingen toch eigenlijk geen probleem mogen zijn. Opvallend bij deze vraag is dat de scores 0 tot en met 6 allemaal ongeveer even vaak voorkwamen – met een p' -waarde van 52 als logisch gevolg.

In zowel de derde (**zie figuur 20**) als de laatste opgave (**zie figuur 8** op pag. 28) kwam de meetkunde aan bod. Gezien het sinds het verdwijnen van wiskunde B1,2 drastisch ingeperkte programma voor dit domein is het voor de examenmakers soms lastig om steeds weer met originele meetkundeopgaven te komen. Voor de kandidaten blijft het echter lastig genoeg, zo blijkt uit de p' -waarden die voor dit domein een gewogen gemiddelde van 44 opleveren. Dat verder het vermelden van gebruikte stellingen volgens het programma verplicht is, wordt blijkbaar nog steeds door sommigen slechts morrend aanvaard. Het zij zo, de verplichting is er nu eenmaal, dus mogen scorepunten pas worden toegekend als de kandidaat ze conform het correctievoorschrift vermeld heeft. De euclidische meetkunde is immers ook een middel om het nauwkeurig en volgens gemaakte afspraken opschrijven van een redenering (en dat is zeker een wiskundige vaardigheid) te toetsen. Dat de al eerder genoemde tijdnood voor een groot deel zijn oorzaak vindt in de meetkunde vragen, lijkt een open deur: zolang de leerling het gevraagde bewijs niet heeft, zal hij of zij blijven kijken, proberen en zoeken...

De goniometrie was het onderwerp in de vierde opgave, met als titel *Tussen twee sinusgrafieken*. Ook hier moest met behulp van een primitieve een oppervlakte worden gevonden, waarbij de symmetrie van de figuur eventueel gebruikt kon worden – mits

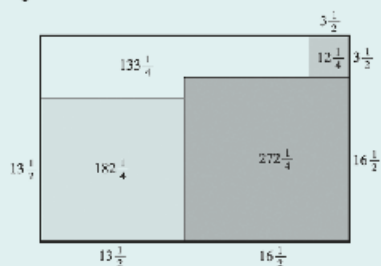
figuur 1



Als de lengte van de zijde van vierkant A gekozen is, liggen de afmetingen van de delen B , C en D vast.

De lengte van de zijde van vierkant A noemen we x . In figuur 2 is voor $x = 13\frac{1}{2}$ van elk deel de oppervlakte aangegeven.

figuur 2



Er is een waarde van x waarvoor de oppervlakte van D maximaal is.

- 10 Bereken exact deze waarde van x .

figuur 21 Uit: VWO B 2012 (Drie vierkanten in een rechthoek)

De functie f_b wordt gegeven door: $f_b(x) = \frac{x-b}{x^2-b^2}$ met $x \neq -b$ en $x \neq b$.

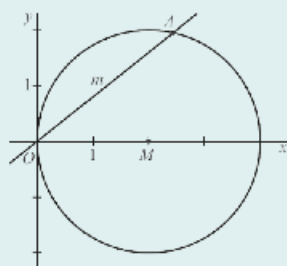
Voor elke waarde van $b \neq 0$ heeft de grafiek van f_b een perforatie.

- 12 Bereken exact de waarde(n) van b waarvoor deze perforatie op de lijn met vergelijking $y = 4x + 1$ ligt.

figuur 22 Uit: VWO B pilot 2012 (Lijn door perforatie)

De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p > 0$ snijdt de cirkel behalve in O in een punt A , zodanig dat $OA = 3$. Zie figuur 2.

figuur 2



- 7 Bereken exact de waarde van p .

figuur 23 Uit: VWO B pilot 2012 (Lijn en cirkel)

onderbouwd. Bij de tweede vraag (vraag 9) leek een enkeling van mening dat de gevraagde exacte waarde van a als $\cos(\frac{1}{6})$ mocht worden geschreven. Je kunt je afvragen of dit iets is wat een docent in een schoolexamen-toets ook zou overwegen ...

Ook in de zesde opgave kwam de goniometrie aan bod, maar nu in bewegende vorm. Met p'-waarden rond de 50 voor beide vragen scoorde deze opgave wat slechter dan gehoopt. Gelukkig maar dat bij vraag 11 niet werd vereist dat het exact moest gebeuren, want al hadden sommigen dit graag gezien, het zou dan waarschijnlijk niet beter zijn gegaan.

De opgave *Drie vierkanten in een rechthoek* was wiskundig misschien niet zo moeilijk, maar ook hier was nauwkeurigheid van groot belang om tot het juiste antwoord te komen – en 38% van de leerlingen slaagde hier foutloos in. Wat x moest zijn was door de examenmakers voorgeschreven, om de kandidaten op weg te helpen; **zie figuur 21**. In de pilotversie was deze aanwijzing overigens weggelaten, maar dat had zo op het oog geen enkele consequentie: de p'-waarde was in beide versies precies gelijk.

In de opgave *Verschoven platen* werd een bestaand kunstwerk als uitgangspunt genomen voor wiskundige activiteiten. Opmerkelijk bij deze opgave is wel dat de vragen een steeds grotere p'-waarde opleverden.

Blijkbaar lieten de kandidaten zich niet afschrikken als een onderdeel niet helemaal naar wens verliep.

Uiteindelijk besloot CvE mede op grond van de statistische analyses van de resultaten van 15 047 in WOLF ingevoerde kandidaten tot een N-term van 1,5. Dit leverde een gemiddeld cijfer op van 6,5 en 27,3% onvoldoende. Ter vergelijking: de afgelopen twee jaar was het gemiddeld cijfer 6,4 met een percentage onvoldoende van 30. Of daar conclusies aan verbonden kunnen worden zal de toekomst wellicht duidelijk maken.

VWO B pilot [Ruud Stolwijk]

Dit jaar werd het eerste pilotexamen vwo wiskunde B volgens het nieuwe programma van cTWO afgenomen. In dit examen werden de 243 leerlingen getoetst die zijn opgeleid volgens de pilotversie van het programma dat naar verwachting in 2015 landelijk in de vierde klas zal worden ingevoerd. De komende jaren is er dus alle

tijd om goed in de eisen die dit nieuwe programma met zich meebrengt, thuis te raken. Dat dit nuttig is, bleek al vrij snel na afname van het examen: de commotie onder de pilotdocenten en hun leerlingen was groot! Op zoek naar redenen hoe het zo heeft kunnen lopen, zijn de besprekingen door de pilotdocenten uitermate zinvol gebleken. Zowel vanuit het CvE als vanuit de examenmakers is men bij deze besprekingen aangeschoven, en het resultaat van deze besprekingen zal voor de komende jaren vast zorgen dat de commotie de komende jaren kleiner zal zijn. De fundamentele oorzaak van de commotie lag in het feit dat de examenmakers het examen vanuit de syllabus hebben geconstrueerd, terwijl de leerlingen onderwijs hebben gehad vanuit het beschikbare pilotlesmateriaal. Verwarrend? De syllabus (en daarmee het examen) zette net als cTWO nogal hoog in op ‘denkactiviteiten’, terwijl die in het lesmateriaal wat minder nadrukkelijk aandacht hebben gekregen. Wat de analyse betreft, is het al helemaal helder: er is niet of nauwelijks specifiek ‘denkactief’ analysemateriaal beschikbaar. Dit gevoegd bij een aantal wat ongelukkig uitgepakte keuzes van de examenmakers leidde begrijpelijkerwijs tot een sterk negatief gevoel bij de betrokken docenten. Volgens de quick scan vonden zij het pilotexamen te moeilijk, te lang, sloot het niet aan bij het gegeven onderwijs en verdiende het een dikke onvoldoende. Een beeld dat bij de eerder genoemde besprekingen al duidelijk was geworden en dus niet als een verrassing kwam. Wel was men overigens van mening dat de opgaven op zichzelf ‘mooi waren, maar niet allemaal in hetzelfde examen hadden moeten zitten’: wat al te ambitieus ingezet dus door de examenmakers. Op basis van deze besprekingen, gecombineerd met een analyse van de door de leerlingen behaalde puntenaantallen, heeft CvE besloten om de pijn voor de leerlingen te verzachten door drie vragen weg te geven: voor vraag 6, vraag 9 en vraag 12 (*zie figuur 22*) kreeg iedere pilotleerling, ongeacht wat er was opgeschreven, alle scorepunten toegekend. Mede door deze maatregel kreeg het examen uiteindelijk een N-term van 1,0 toegekend, wat (in lijn met het reguliere examen) een gemiddeld cijfer van 6,5 en 23,9% onvoldoenden opleverde. Nu maar eens wat preciezer kijken, waarbij hier en daar uiteraard vergeleken wordt met en verwezen wordt naar het deel van het

artikel over het reguliere examen VWO-B. De eerste opgave van het examen had net als bij het reguliere examen de titel ‘Onafhankelijk van a' ’. De opgave was in vergelijking met de reguliere versie echter behoorlijk anders, met de bedoeling de opgave ‘denkactiever’ te maken. Dit bleek achteraf zeker voor een startopgave helaas een ongelukkige keus; *zie tabel 20* [VWO B pilot 2012]. De tweede opgave, *Het standaard proefglas*, was grotendeels identiek aan zijn reguliere tegenhanger - het verschil zat in de hoeveelheid informatie bij de tweede vraag (zie regulier). Interessant is wel dat de pilotleerlingen het op de twee echte overlapvragen in deze opgave in ieder geval niet beter doen dan de reguliere kandidaten. Dan de meetkunde. De plaats van de euclidische meetkunde is in het pilotprogramma ingenomen door analytische meetkunde. Deze meetkunde kwam met name in de opgave *Lijn en cirkel* aan de orde. Opvallend genoeg werden beide vragen door de leerlingen slecht gemaakt, terwijl volgens sommigen in ieder geval vraag 7 voor leerlingen in de havo-pilot niet onhaalbaar lijkt; *zie figuur 23*. Verder kwamen op twee plekken in het examen vectoren voor: eerst in vraag 4, maar daar kon je ook zonder. In de opgave *Lus* speelden de (in dit geval snelheids-) vectoren een grotere rol. Ook hier viel het resultaat (een p'-waarde van 39) tegen. Een voorzichtige conclusie zou kunnen zijn dat het wennen aan dit soort meetkunde misschien toch een kwestie van langere adem is dan gedacht. Binnen het domein goniometrie heeft de pilotkandidaat niet standaard de beschikking over de Simpson-formules. Dit zou de reden kunnen zijn dat de prestaties bij vraag 9 onder de maat bleven, hoewel de vraag ook prima zonder deze formules beantwoord kan worden. Opvallend is wel dat vraag 8 (een overlapvraag) door de pilotleerlingen net iets beter wordt gemaakt dan de reguliere. Ook in de zesde opgave kwam de goniometrie aan bod, maar nu in bewegende vorm. Met p'-waarden rond de 50 voor beide vragen scoorde deze vraag wat slechter dan gehoopt. Gelukkig maar dat bij vraag 11 niet werd vereist dat het exact moest gebeuren, want – al hadden sommigen dit graag gezien – de p'-waarde zou dan waarschijnlijk niet hoger zijn geweest dan de 39 die het nu geworden is. Het slot van het examen werd gevormd door de opgaven *Drie vierkanten in een rechthoek*

en *Verschoven platen* – hiervoor verwijs ik de lezer naar het artikeldeel over het reguliere examen.

Noten

- [1] Alle papieren centrale examens (opgaven, correctievoorschriften en bijlages) kunnen worden gedownload via de website van het Cito (www.cito.nl).
- [2] Deze aantallen zijn ook dit jaar weer gebaseerd op de door scholen vermelde leerlingenaantallen bij hun examenbestellingen. Het is bekend dat veel scholen hierbij altijd een zekere veiligheidsmarge hanteren; dus de hier vermelde aantallen zijn waarschijnlijk licht gechargeerd.
- [3] cTWO staat voor Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs, de commissie die vanaf 2004 o.a. de vernieuwing van het wiskundeonderwijs voorbereidt.
- [4] WOLF is een acroniem dat staat voor Windows Optisch Leesbaar Formulier.
- [5] CvE staat voor College voor Examens, het zelfstandig bestuursorgaan dat in 2009 de Cevo is opgevolgd.

Over de auteurs

Ger Limpens, Jos Remijn, Melanie Steentjes en Ruud Stolwijk zijn wiskundemedewerkers en toetsdeskundigen van Cito te Arnhem (website: www.cito.nl).
E-mailadressen: ger.limpens@cito.nl / jos.remijn@cito.nl / melanie.steentjes@cito.nl / ruud.stolwijk@cito.nl

Tabel 1 – Leerlingenaantallen 2012

VMBO		HAVO		VWO	
wiskunde BB digitaal	10646	wiskunde A	40034	wiskunde A	19977
wiskunde BB papier	57	wiskunde A pilot	185	wiskunde A pilot	289
wiskunde KB digitaal	16143	wiskunde B	14076	wiskunde B	19055
wiskunde KB papier	6487	wiskunde B pilot	143	wiskunde B pilot	261
wiskunde GL/TL	47876	totaal	54438	wiskunde C	2612
totaal	81209			wiskunde C pilot	46
				totaal	42240
totaal generaal		177887			

Tabel 2 – Verzamelde N-termen 2012

1e tijdvak	VMBO						HAVO				VWO					
	BB *	BB papier	KB digitaal crm	KB digitaal tb	KB papier	GL/TL	A	A pilot	B	B pilot	C	C pilot	A	A pilot	B	B pilot
N-term	0,9 t/m 2,2	1,5	1,0 t/m 2,3	0,8 t/m 2,3	1,1	1,0	1,1	1,5	1,2	1,3	1,1	1,8	0,6	1,4	1,5	1,0
gemiddelde	6,7	6,6	6,2	6,2	6,2	6,3	6,4	6,8	6,3	6,5	6,3	6,5	6,4	6,8	6,5	6,5
% onvoldoende	20,1	25,4	31,6	29,8	32,9	27,3	25,1	8,9	28,2	25,2	25,0	21,3	22,8	14,3	27,3	23,9

(*) diverse varianten

Tabel 3 – VMBO GL/TL 2012

opgave	Lucifers				Verfblikken				Gif in het meer				Brug van Millau				Halveren			Formule van Blondel			
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
max. score	3	2	3	3	3	5	3	4	2	3	4	3	3	4	3	4	3	3	6	3	3	3	2
p'-waarde	80	83	56	49	81	34	84	45	93	86	56	51	57	83	72	52	53	46	26	72	55	51	63

Tabel 4 – VMBO KB 2012

opgave	Lucifers					Fietsframe					Brug van Millau					Vlieger					Formule van Blondel					Draaimolen					Knikkers stapelen				
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25										
max. score	2	3	2	4	2	2	4	2	2	3	4	3	5	4	4	3	3	3	2	3	4	3	2	2	4										
p'-waarde	92	52	59	55	58	79	74	76	85	43	62	48	58	32	24	52	44	29	58	85	53	74	70	77	37										

Tabel 5 VMBO overlap KB – GL/TL 2012

	opgave		Lucifers				Brug van Millau				Formule van Blondel			
	max. score		3	2	3	4	3	3	3	2	3	3	3	2
GL/TL	vraagnr.		1	2	13	14	15	20	21	22	23			
	p'-waarde		80	83	57	83	72	72	55	51	63			
KB	vraagnr.		2	3	10	11	12	16	17	18	19			
	p'-waarde		52	59	43	62	48	52	44	29	58			
	verschil in p'-waarden		28	24	14	21	24	20	11	22	5			

Tabel 6 – VMBO KB crm 2012

opgave	Kaartenhuis					Plansee				Rhönrad				Wat kost een hond?			Medaillewinnaars					Match 4				
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
max. score	2	2	3	3	4	1	2	4	4	1	3	4	3	3	4	4	3	2	3	3	2	2	3	1	3	
p'-waarde	58	63	59	58	41	91	74	28	49	84	60	55	60	48	50	76	77	74	59	40	63	83	89	90	78	

Tabel 7 – VMBO KB tb 2012

opgave	Kaartenhuis					Plansee				Rhönrad				Wat kost een hond?			Medaillewinnaars					Match 4				
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
max. score	2	2	3	3	4	1	2	4	4	1	3	4	3	3	4	4	3	2	3	3	2	2	3	1	3	
p'-waarde	59	63	62	59	42	91	75	39	53	84	61	58	61	53	59	78	74	66	58	34	64	83	90	90	79	

Tabel 8 – HAVO A 2012

opgave	Supersize me					Tai Sai					Bloeiperiode					Reactiesnelheid					Vogel trek				
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22			
max. score	3	4	4	3	4	4	4	3	5	5	4	3	3	4	4	6	5	3	3	3	3	3	4		
p'-waarde	94	51	23	94	85	66	52	74	51	43	44	78	61	71	80	57	53	42	39	86	49	28			

Tabel 9 – HAVO A pilot 2012

opgave	Supersize me					Knock-out					Bloeiperiode			Reactiesnelheid					Vogeltrek			Gewichtloosheid ervaren	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
max. score	3	4	4	3	4	3	3	4	3	4	4	3	3	4	3	3	4	4	3	3	3	4	6
p'-waarde	93	59	28	96	89	89	82	15	47	92	46	78	78	79	30	67	49	43	4	86	47	40	42

Tabel 10 – HAVO B 2012

opgave	Vliegende parkieten				Prisma		CO ₂			Wortelfunctie			Satellieten			Sinusoïde			Ei	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
max. score	4	4	3	4	4	5	3	4	4	5	7	3	3	5	3	4	6	4	5	
p'-waarde	78	69	70	53	81	50	79	38	73	63	48	36	73	63	62	37	33	52	40	

Tabel 11 – HAVO B pilot 2012

opgave	Vliegende parkieten			Wortelfunctie			Een punt binnen een cirkel		Schaatshouding			Sinusoïde		CO ₂			Rakende cirkels		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
max. score	4	4	7	5	7	3	3	6	3	4	4	4	6	3	4	4	4	3	4
p'-waarde	81	68	54	69	50	30	65	57	68	56	77	35	55	87	41	79	39	38	52
regulier	78	69		63	48*	36	-	-	-	-	-	37*	-	79	38	73	-	-	-

(*) Bij vraag 5 en 12 is het verschil tussen de pilot- en de reguliere versie van de vraag vrijwel nihil.

Tabel 12 – VWO C 2012

opgave	I Tjing				Wild				Waardepunten				Selectief cijferen				Behendigheid				
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
max. score	3	4	4	4	3	5	4	3	4	4	4	4	4	4	6	3	3	4	3	5	3
p'-waarde	43	59	70	73	62	78	61	28	74	47	51	55	100	45	57	57	41	35	36	63	60

Tabel 13 – VWO A 2012

opgave	Schroefas				Hooikoorts			Waardepunten				Selectief cijferen				Behendigheid					
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
max. score	3	3	4	4	5	6	4	4	4	4	7	4	4	6	3	33	3	3	4	3	3
p'-waarde	91	79	91	70	86	68	51	82	63	45	59	67	52	66	70	56	6	67	42	50	73

Tabel 14 – VWO overlap C – A 2012

	opgave	Waardepunten				Selectief cijferen				Behendigheid			
	max. score	4	4	4	4	6	3	3	4	3	3		
C	vraagnr.	9	10	11	14	15	16	17	18	19	21		
	p'-waarde	74	47	51	45	57	57	41	35	36	60		
A	vraagnr.	8	9	10	13	14	15	16	19	20	21		
	p'-waarde	82	63	45	52	66	70	56	42	50	73		

Tabel 15 – VWO C pilot 2012

opgave	Wild				Waardepunten			Behendigheid				Nationale Bibliotheek te Minsk				Halvering van vlakken				Schaatskunst			
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
max. score	3	5	4	3	4	4	4	3	4	3	3	3	5	3	5	3	4	4	3	2	2	2	3
p'-waarde	60	72	56	16	81	67	42	57	42	43	71	54	29	67	61	42	39	12	42	79	37	95	60

Tabel 16 – VWO overlap C – C pilot 2012

	opgave	Wild				Waardepunten				Behendigheid			
	max. score	3	5	4	3	4	4	3	4	3	3		
C pilot	vraagnr.	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11		
	p'-waarde	60	72	56	16	67	42	57	42	43	71		
C	vraagnr.	5	6	7	8	9	10	17	18	19	21		
	p'-waarde	62	78	61	28	74	47	41	35	36	60		

Tabel 17 – VWO A pilot 2012

opgave	Schroefas				Hooikoorts			Waardepunten			Behendigheid					Aalscholvers			Topjaar appel peer
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
max. score	3	3	4	4	5	6	4	4	4	7	33	3	3	4	3	3	3	4	4
p'-waarde	92	80	93	72	71	50	46	82	78	57	69	10	67	55	79	52	79	44	24

Tabel 18 – VWO overlap A – A pilot 2012

	opgave	Schroefas				Hooikoorts				Waardepunten				Behendigheid			
	max. score	3	3	4	4	6		4	4	3	3	3	3	3			
A pilot	vraagnr.	1	2	3	4	5		9	10	11	12	13	14	15			
	p'-waarde	92	80	93	72	71		78	57	69	10	67	55	79			
A	vraagnr.	1	2	3	4	5		9	10	11	12	13	14	15			
	p'-waarde	91	79	91	70	68		82	45	56	6	67	50	73			

Tabel 19 – VWO B 2012

opgave	Onafhankelijk van a			Het standaard proefglas			Vanuit een parallellogram		Tussen twee sinusgrafieken		Drie vierkanten in een rechthoek		Een W		Verschoven platen			Evenwijdige lijnen en een rechthoek	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17		
max. score	3	5	4	5	6	3	4	4	4	8	5	5	4	4	6	4	4		
p'-waarde	86	69	75	52	52	62	38	75	43	67	48	51	41	53	60	46	33		

Tabel 20 – VWO B pilot 2012

opgave	Onafhankelijk van a			Het standaard proefglas			Lijn en cirkel		Tussen twee sinusgrafieken		Drie vierkanten in een rechthoek		Lus	Lijn door perforatie	Verschoven platen
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
max. score	5	5	4	5	6	6	8	4	4	9	6	7	4	4	6
p'-waarde	52	32	71	40	49	100	35	79	100	67	39	100	44	51	54
regulier	-	-	75	52*	52	-	-	75	43*	67*	-	-	41	53	60

(*) Bij vraag 4 en 10 is er een (klein) verschil tussen de pilot- en de reguliere versie van de vraag. Voor vraag 9 zijn in de pilotversie alle punten toegekend ongeacht het gegeven antwoord.

Te veel nullen, te veel 'Leg uit', te veel wild, te veel ...

VERSLAG VAN DE EXAMENBESPREKINGEN EN HET EXAMENFORUM

[Erik Korthof]

Dit jaar gooiden Hemelvaart en Pinksteren weer eens roet in het eten om voor alle vakken regionale bijeenkomsten te kunnen houden. Voor vmbo wordt het houden van alleen centrale examenbesprekingen al bijna een traditie, voor havo-B en vwo-B moest deze noodgreep dit jaar in principe eenmalig toegepast worden, want het is geen voorbode van een nieuw beleid. Toch lijkt er een beetje de klad te komen in de regionale besprekingen. Het aantal bezoekers loopt gestaag terug, voor havo-A en vwo-A/C lukte het voorts niet meer om voor elke plaats waar de besprekingen traditioneel gehouden worden, een gespreksleider te vinden en verder lijkt het dat het examenforum een belangrijke functie van de besprekingen overneemt. Er wordt echter nog altijd reikhalzend uitgekeken naar de verslagen van de centrale besprekingen, voor veel collega's blijft dat een steun in de rug bij het doorhakken van knopen bij het beoordelen van antwoorden die niet passen in het model van het correctievoorschrift.

Iets dat opviel in het examenrooster was, dat alle examens op precies dezelfde dag en in dezelfde volgorde werden afgenomen als vorig jaar, op havo-B na. Dat examen schoof nu naar achteren in het rijtje. En wat betreft Hemelvaart en Pinksteren, gelet op de aanhoudende drukte tijdens die dagen in het forum ging het corrigeren, ondanks ook het zomerse weer met Pinksteren, onverdroten voort. En weer zaten dit jaar collega's nog diep in de nacht met de handen in het haar gebogen over wat hun pupillen er nu weer van gebrouwen hadden. Er was zelfs een post in het forum van 04:50 uur, wat een collega deed verzuchten: 'Jeetje, u bent om tien voor vijf 's nachts nog aan het werk!?' Antwoord: 'U weet niet of ik nog werk of al weer werk.'

VMBO: pilaren meten

Er ware dus alleen maar centrale besprekingen van de vmbo-examens KB en GL/TL.

Van het 'papieren' KB-examen is er verder erg weinig te melden, omdat de meeste scholen dit examen digitaal afnemen. Ook van het forum is er nauwelijks gebruik gemaakt, zij het iets meer dan vorig jaar. De N-term was 1,5.

In het examenforum GL/TL meldden zich dit jaar meer collega's. Er waren weinig klachten over inhoud en lengte van het examen, men toonde zich daarover tevreden. De N-termen 1,1 en 1,0 weerspiegelen dit.

Bij de meeste forumvragen die gesteld werden, ging het om een collegiale beoordeling van een antwoord waar wel wat goeds in zat, maar ook foute stappen, en dan was na een aanwijzing of advies van een collega de kous vaak ook wel af. Maar KB-vraag 10 (GT-vraag 13) bij de opgave *Brug van Millau* (zie **figuur 1**), waarin met te meten gegevens in een tekening op schaal via een verhoudingstabel de lengte van een pilaar moest worden berekend, leverde wat meer stof tot vragen en discussie op.

Allereerst vroeg een collega zich af hoe de zaken geregeld waren bij leerlingen met dyslexie, die een vergroting van het examen gebruiken, waardoor de gegevens in de opgave niet meer kloppen. Zij krijgen voor zulke situaties ook het origineel en worden verwezen naar de tekeningen daarin, de vergroting is enkel om te lezen. Verder bleek het begrip 'pilaar' voor tweeërlei uitleg vatbaar. Sommige leerlingen maten de pilaar tot aan het brugdek, andere beschouwden ook het deel boven het brugdek als onderdeel van de pilaar. Dat laatste was de bedoeling, alhoewel

een collega de moeite nam om het begrip 'pilaar' op te zoeken in een woordenboek: 'een pilaar is een stenen zuil waarop een hoger deel van een gebouw rust'. Daar werd tegenin gebracht: 'Het is een hangconstructie. De weg hangt aan en rust niet op de pilaren.'

Bij KB-vraag 12 (GT-vraag 15) moest een hoek berekend worden; het cv geeft zonder verder commentaar het antwoord in hele graden. Moet er dan afgerond worden of mag het antwoord ook in één of meer decimalen? Een collega die dan 1 punt wilde aftrekken, vond het merendeel van de collega's op zijn weg.

HAVO-A: 'leuk'

Er waren dit jaar op slechts vier plaatsen regionale besprekingen, waarvan drie van de vier gemiddeld 7 docenten trokken; uitschieter was Den Haag met 12 collega's. Hun oordeel over het examen was over het algemeen 'goed', alleen de leesbaarheid scoorde 'voldoende'.

De respons in het forum havo-A is ongeveer gelijk aan die van vorig jaar.

Er waren ook in het forum eigenlijk geen klachten over dit, niet te moeilijke, examen. De betiteling 'leuk' kwam een paar keer voor, zelfs 'zo leuk was het in jaren niet'. De N-term 1,1 was ook 'leuk'.

Dyscalculie en formulekaart – Eén van de collega's stelde in het forum het lot van dyscalculie-leerlingen aan de orde, met als één van de overigens weinige reacties: er worden bij wiskunde geen uitzonderingen voor deze leerlingen gemaakt, alleen krijgen ze een half uur langer de tijd.

Landelijk was er meer ophef: de Commissie Gelijke Behandeling oordeelde dat een dyscalculische havo-leerling, die tijdens de toetsen voor het SE van zijn school de

beschikking kreeg over een formulekaart, die kaart ook zou moeten kunnen gebruiken tijdens het centraal examen, maar het College voor Examens staat dat niet toe. Het examen zou bij gebruik van een formulekaart ongeldig verklaard kunnen worden.

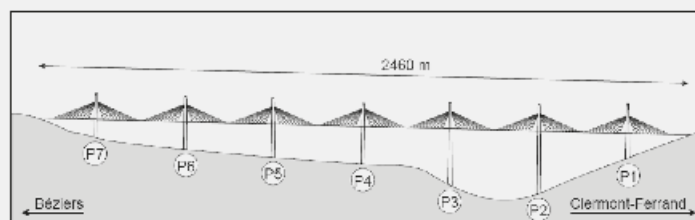
Hierbij zijn twee opmerkingen te maken: vmbo- en vwo-leerlingen beschikken tijdens het examen wél over een overzicht van formules, bij vmbo zijn het formules voor omtrek, oppervlakte en inhoud en bij vwo-A/C is het een substantiële lijst met formules voor differentiëren, logaritmen en kansrekening. Bij vwo-B is het slechts een set lastige gonio-formules met verder nog een opsomming van verwijzingen naar stellingen die bij meetkundebewijzen gebruikt kunnen worden.

Qua 'gelijke behandeling' zouden dan toch ook alle havo-leerlingen recht op een overzicht van voor hen relevante formules moeten hebben. Aan de andere kant is er sprake van ongelijke behandeling als elke school op zich z'n eigen formulekaart bij het schoolexamen zou gaan samenstellen. En de ene school wel en de andere niet zou toch helemaal ondenkbaar moeten zijn.

Groter (dan) en kleiner (dan) – Een bekend probleem komt bij vraag 9 van *Tai Sai* om de hoek kijken. Er moet een binomiale kans $P(X \geq 13)$ uitgerekend worden via de complementregel; dus wordt het $1 - P(X \leq 12)$, maar leerlingen vallen dan vaak met de deur in huis door meteen *binomcdf*(25, 107/216, 12) op te schrijven en dat uit te rekenen. Het cv vraagt dan wat meer uitleg. Verder zijn er dan natuurlijk de nodige misstappen in de berekening wat betreft het ongelijkteken en de grenswaarden 13 en 12, tot zelfs 12,5 toe, en zijn er natuurlijk leerlingen die met *binompdf* willen rekenen. Hoe verdeel je in al die verschillende gevallen de 5 punten? Er zijn enkele pagina's examenforum mee te vullen.

Een liniaal vangen – In vraag 14 (zie *figuur 2*) gaat het over *Reactiesnelheid* die bepaald wordt met het vangen van een liniaal. Henry rekt na vijf tests zijn gemiddelde vangafstand uit (16,6) en bepaalt daarna uit een tabel met behulp van lineair interpoleren zijn reactietijd. 'Laat zien dat Henry zo op ongeveer 184 uitkomt.' Leerlingen

Op de foto hiernaast zie je een deel van de enorme brug die bij de Franse plaats Millau over het dal van de rivier de Tarn is gebouwd. Hieronder zie je een tekening van die brug. De zeven pilaren zijn aangegeven met P1 tot en met P7



- 10 De totale lengte van de brug is 2460 m. In de tekening is die lengte 13,9 cm. De tekening is op schaal.
→ Hoeveel meter is de totale lengte van pilaar P2? Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

figuur 1 Uit: VMBO KB 2012 (Brug van Millau)

Het themanummer van het blad *Psychologie Magazine* was in 2008 geheel gewijd aan De Man. Het nummer bevatte verschillende testjes waarmee je kon bepalen hoe mannelijk of vrouwelijk je bent. Een van de testjes ging over reactiesnelheid, een punt waarop mannen en vrouwen nogal verschillen.

figuur 1

gemiddelde vangafstand (cm)	reactietijd (milli-seconden)	gemiddelde vangafstand (cm)	reactietijd (milli-seconden)
0	0	18	181
2	84	18	192
4	90	20	202
6	111	22	212
8	128	24	221
10	143	26	230
12	156	28	239
14	168	30	247

Voor deze test zijn twee personen nodig en één liniaal. Persoon 1 houdt de liniaal bovenaan vast en persoon 2 houdt duim en wijsvinger rond het 0-streepje (niet vastpakken). Persoon 1 laat de liniaal los en persoon 2 pakt de liniaal zo snel mogelijk met duim en wijsvinger. Zie *figuur 1*. Het afgelezen aantal cm op de liniaal wordt de vangafstand genoemd. Na vijf pogingen wordt de **gemiddelde vangafstand** berekend. In tabel 1 is deze gemiddelde vangafstand omgerekend naar **reactietijd**.

De 18-jarige Henry doet de test en haalt de volgende resultaten: 16,2 cm, 17,2 cm, 16,1 cm, 16,7 cm en 16,8 cm. Hij berekent zijn gemiddelde vangafstand en bepaalt daarna met behulp van lineair interpoleren in tabel 1 zijn reactietijd.

- 14 Laat zien dat Henry zo op een reactietijd van ongeveer 184 milliseconden uitkomt.

figuur 2 Uit: HAVO A 2012 (Reactiesnelheid)

4 maximumscore 4

- $\frac{dD}{dt} = 0$ geeft $12,0 + 0,00100v^4 = 0$ (of $0,00100v = \frac{12,0}{v^3}$) 1
- Hieruit volgt $v^4 = 12000$ 1
- Dus $v = \sqrt[4]{12000}$ 1
- De kruissnelheid van parkieten is 10,5 (m/s) 1

figuur 3 Uit: Correctievoorschrift HAVO B 2012 (Vliegende parkieten)

18 maximumscore 4

- De inhoud van het eigeel is $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^3 = 4\frac{1}{2}\pi$ (cm³) 1
- De inhoud van het ei is $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 16\pi$ (cm³) 1
- De inhoud van het eiwit is $16\pi - 4\frac{1}{2}\pi = 11\frac{1}{2}\pi$ (cm³) 1
- De verhouding inhoud eiwit:inhoud eigeel is $11\frac{1}{2}\pi : 4\frac{1}{2}\pi = 23:9$ 1

figuur 4 Uit: Correctievoorschrift HAVO B 2012 (Ei)

bleken de werkvolgorde om te keren: ze interpoleerden eerst de 5 meetresultaten en middelden die daarna. Hoewel dat hetzelfde antwoord oplevert, is dat dus niet zoals Henry het gedaan heeft. De centrale examenvergadering adviseerde in dit geval 0 punten, maar veel collega's vonden dat dan de vier punten ook verdiend waren. De discussie spitste zich hierbij toe op de vraag in hoeverre Algemene regel 3.1 (antwoord (...) op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten (...) juist) en of de vraag zelf voor tweeërlei uitleg vatbaar is: moet je Henry's berekening controleren óf moet je laten zien dat zijn antwoord 184 klopt? Dus moet je 'Laat zien dat ... zo ...' lezen als 'Laat zo zien ...', of niet? Voor het interpoleren tussen 16 en 18 (de reactietijd loopt op van 181 naar 192) moet je kijken hoever je boven de 16 zit, wat volgens het cv dan wordt:

$$181 + 0,6 \times 5,5$$

Henry's gemiddelde kan bijvoorbeeld genoteerd worden als:

$$16 + \frac{0,2 + 1,2 + 0,1 + 0,7 + 0,8}{5}$$

Het lineair interpoleren geeft dan:

$$181 + \frac{0,2 + 1,3 + 0,1 + 0,7 + 0,8}{5} \times 5,5$$

Ga je eerst de 5 meetresultaten interpoleren, dan komt de berekening neer op:

$$\frac{5 \times 181 + 0,2 \times 5,5 + 1,2 \times 5,5 + \dots + 0,8 \times 5,5}{5}$$

en dat is rekenkundig hetzelfde.

De mensen van de centrale vergadering hebben dus wat uit te leggen met hun opmerking 'helemaal fout' en 'toevallig hetzelfde' voor het eerst interpoleren en dan middelen.

Er zat in deze opgave nog een raar addertje onder het gras: een snellere reactietijd is natuurlijk geen hogere reactietijd, maar die verwarring bleek er bij leerlingen wel te zijn.

En natuurlijk was er in het forum weer discussie over stapelen, sprokkelen, afronden en continu of discreet op te vatten variabelen, dat laatste bijvoorbeeld als het op het bepalen van leeftijden en jaartallen aankomt.

Maar grosso modo waren er bij dit examen eigenlijk weinig echte uitglijdende of bottlenecks in de opgaven of het correctievoorschrift. Het bleef 'leuk'.

HAVO-B

Hoewel de reacties op het examen tijdens de centrale bespreking varieerden was het gemiddelde commentaar toch positief: 'Dit havo-examen is een verademing vergeleken met de vwo-examens van dit jaar.'

Er waren geen regionale besprekingen, maar de deelname aan het examenforum bleef ondanks dat en ook vergeleken met vorig jaar redelijk beperkt. Het ging voornamelijk over het verdelen van de punten en minder om de inhoud. Ook dat geeft aan dat er

weinig daadwerkelijke problemen, kritiek of ontevredenheid was.

De N-term was 1,2 en dat geeft toch aan dat het examen niet erg gemakkelijk was.

Tussentijds afronden – In vraag 1 ging het om het bepalen van twee waarden met een formule waarmee een toenamepercentage moest worden uitgerekend. Waar de meeste docenten hun leerlingen leren om via het geheugen van de GR met onafgeronde waarden door te rekenen, noemde het cv de tussenwaarden $\approx 0,0807$ en $\approx 0,1062$, om daarna het te berekenen percentage in gehelen te geven. Je merkt wel vaker dat de examenschrijvers wat spastisch rekening houden met wat met de GR mogelijk is en wat de leerlingen er mee zouden kunnen.

Ook het haspelen met antwoorden als 'vanaf 7,6 tot en met 14,4' waar dan 'van 7,6 tot 14,4' of $7,6 \leq v \leq 14,4$ (maar weer niet $7,7 < v < 14,4$) ook goed mochten worden gerekend (bij vraag 2) helpt docenten, en vooral wat ze hun leerlingen (moeten) leren, niet echt.

Onnodige nullen? – In de formules bij de opgave *Vliegende parkieten* valt het voorkomen van coëfficiënten 6,0 en 0,00050 en zelfs 0,00100 op. Over de (on)zin van die nullen op het eind werd er in het forum gerefereerd aan het gebruik van significante cijfers in vakken als natuurkunde waar men werkt met meetwaarden, meetfouten en nauwkeurighedsintervallen. Dit tegenover de betekenis en het gebruik van exacte en benaderde waarden in de wiskunde. Een discussie over het verschil in omgaan met getallen in beide vakken zou de moeite waard zijn, zeker waar het gaat om de spagaat waarin B-leerlingen in dit opzicht soms zitten.

Bereken algebraïsch / exact ... – En dan komt onvermijdelijk de discussie over een vraag als bij 4: 'Bereken op algebraïsche wijze... en rond daarna je antwoord af op één decimaal.' In het forum blijkt dat de interpretatie daarvan onder docenten lang niet eenduidig is. Vanaf welk moment mag dan de GR ingezet worden? De tussenstap $v = \sqrt[4]{12000}$ was voor een aantal collega's overbodig, maar het cv eiste er wel een punt voor op; **zie figuur 3**.

Natuurlijk levert dan ook vraag 11: 'Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van b' (in de formule van een

raaklijn $y = 2x + b$ 'onenigheid' op over wat er dan precies te doen staat. Is 'Bereken exact' wat anders dan 'Bereken de exacte waarde'? Mag je na het differentiëren de vergelijking oplossen met de GR om dan weer exact door te rekenen? Die oplossing komt met de GR namelijk 'mooi exact' op $3\frac{1}{4}$ uit. Loopt degene die dan de tussenstap $\sqrt{4x - 12} = 1$ aan de GR 'overlaat', daardoor een punt mis? Die waarde $3\frac{1}{4}$ daarna invullen in de gegeven functie levert ook met de GR keurig $-5\frac{1}{2}$ op. Die 'exactheid' volgens de nomenclatuur is moeilijk meer te controleren!

In vraag 18, bij de opgave Ei, wordt het nog 'lastiger': er moet worden aangetoond dat de verhouding van twee inhouds exact $23 : 9$ is (zie figuur 4). Let wel, de inleiding spreekt over 'exact', de vraag is echter niet 'Toon dit exact aan', en dan levert het nakijken dilemma's op: mag je de benodigde inhouds tot op zekere hoogte afronden of moet je doorrekenen met de exacte waarden? De inhoud van het bolletje eigeel is $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1\frac{1}{2})^3$ en voor $\frac{4}{3} \cdot (1\frac{1}{2})^2$ pakt menige B-leerling z'n GR: 4,5 en met 'natural display' zelfs $4\frac{1}{2}$. Maar $4\frac{1}{2}$ p staat in het cv tussen haakjes, dus hoeft dus helemaal niet vermeld te worden. Er wordt verderop in de uitwerking echter wel weer mee verder gerekend...

Uiteindelijk moet de leerling, als de tussenwaarden niet zouden worden uitgewerkt, de verhouding

$(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1\frac{1}{2})^3) : \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1\frac{1}{2})^3$ uitrekenen. En je GR vertelt je dat dat 'exact' $23 : 9$ is ...

Tot slot – Ik wist uit mijn hoofd niet dat de verhouding van de oppervlaktes van een cilinder met hoogte h en een bol met dezelfde straal als de cilinder zich verhouden als $h : d$ (met $d = 2r$ uiteraard) of liever, ik verwacht niet dat een leerling zoiets even uit zijn mouw schudt, maar blijkbaar is het voorgekomen, bij vraag 15 (Satellieten). Of zou dat toeval zijn geweest?

VWO-A/C

Omdat een aantal vragen in de examens vwo A en C hetzelfde zijn, zijn de examenfora voor de beide vakken dit jaar gecombineerd, ook al omdat vaak docenten beide examengroepen lesgeven, soms zelfs gelijktijdig.

Er is dan ook zeer uitgebreid gebruik gemaakt van dit forum, ondanks het feit dat

er ook (niet erg druk bezochte) regionale examenbesprekingen waren.

De centrale bespreking leverde slechts een erg summier overzicht met correctieaanwijzingen op, waarin de gebruikelijke 'recensie' van het examen achterwege bleef, misschien om de regio-enquêtes niet te beïnvloeden.

Het aantal posts in het forum was ruim meer dan die van de beide afzonderlijk fora van vorig jaar samen. Dat duidt wellicht ook op de nodige onvrede met het examen en onduidelijkheid in het cv.

Die onvrede kwam meteen bij WA-vraag 2 al aan het licht: te veel 'Leg uit...', een vaardigheid waarmee een vijfde van de punten te verdienen was. Enerzijds hadden docenten meer andere vaardigheden verwacht, anderzijds was deze 'Leg uit'-trend al zichtbaar in de afgelopen examens en hadden docenten hun leerlingen er al extra op getraind via die examens, want boeken blijken leerlingen hier niet altijd adequaat op voor te bereiden. Het nakijken van 'Leg uit'-vragen geeft trouwens vaak de nodige problemen omdat leerlingen regelmatig in feite de vraag herhalen in plaats van een echte cv-waardige verklaring te geven.

Uit de WA-N-term van 0,6 blijkt dat dit examen toch weinig scoreproblemen opleverde; ook de WC-N-term 1,1 geeft aan dat het examen voldeed aan de verwachtingen van de makers.

Ook bij WA-vraag 4 – het komt steeds terug – waren er weer de nodige vraagtekens bij het afronden (zie figuur 5). De gegeven formule had een coëfficiënt in 2 decimalen, het cv rekent bij het herschrijven van de formule door met 3 decimalen (maar geeft aan dat bij forser afronden geen punten mogen worden afgetrokken) en geeft in alle gevallen ook een eindcoëfficiënt in 3 decimalen. Dan denk je: leerlingen kunnen dankzij het geheugen van de GR toch prima doorrekenen zonder tussentijdse afrondingen? En ook: wat is de relevantie van die 3 decimalen nog, zeker na 'forser afronden'? Er was dan ook consensus dat de eindcoëfficiënt in 2 decimalen ook goed gerekend kan worden.

Regelmatig komt het voor dat leerlingen, bijvoorbeeld bij het gebruik van *intersect* niet de vergelijking die ze oplossen vermelden of bijvoorbeeld bij *binomcdf* niet aangeven dat de gebruikte toevalsvariabele X binomiaal verdeeld is met zekere n en p . Een aantal collega's geeft de punt, die het cv hiervoor geeft, in dat geval wel omdat die stap impliciet wel aanwezig is, maar anderen vinden dat te snel door de bocht. Dit blijft een probleem tussen eerste en tweede corrector; het zou fijn zijn als in het correctievoorschrift een uitspraak opgenomen wordt over dit dilemma.

4 maximumscore 4

- $30 = 79,78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$ 1
- $0,376 = \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$ 1
- $\frac{P}{R} = 0,053$ 1
- $P = 0,053R$ 1

Opmerkingen

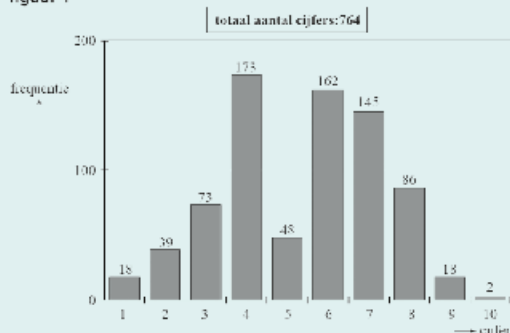
Als $P = \left(\frac{30}{79,78}\right)^3 \cdot R$ als eindantwoord gegeven wordt, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

- Als door tussentijds forser afronden $P = 0,055R$ als eindantwoord gegeven wordt, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.
- In plaats van de waarde 0,053 in het eindantwoord mag (natuurlijk) ook een nauwkeurigere waarde vermeld worden.

figuur 5 Uit: Correctievoorschrift VWO A 2012 (Schroefas)

In januari 2008 verscheen er in de NRC een artikel over de becijfering van een tentamen. Recht. In figuur 1 zie je de verdeling van de cijfers voor dat tentamen.

figuur 1



Uit de gegevens in figuur 1 volgt dat het gemiddelde van de tentamencijfers 5,4 was en de standaardafwijking 1,9.

- 12 Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurigheid.

De schrijvers van het artikel waren erg kritisch. Zij waren van mening dat er opvallend weinig cijfers 5 waren uitgedeeld en beargumenteerden dit op de volgende manier.

Bij cergelijke toetsen verwacht men meestal dat de cijfers bij benadering normaal verdeeld zijn. Hier was dit echter duidelijk niet het geval. Wanneer de tentamencijfers wel normaal verdeeld zouden zijn met gemiddelde 5,4 en standaardafwijking 1,9, dan zouden veel meer dan 48 studenten het cijfer 5 gekregen hebben.

- 13 Bereken met behulp van die normale verdeling hoeveel studenten in dat geval het cijfer 5 gekregen zouden hebben.

figuur 6 Uit: VWO A 2012 (Selectief cijferen)

In figuur 4 zijn opnieuw de drie grafieken en hun spiegelbeelden in de x -as getekend. Voor het proeven van wijn wordt een glas bij voorkeur met 50 ml wijn gevuld. Daarom wil de tekenaar in figuur 4 het punt aangeven tot waar het standaard proefglas gevuld moet worden om 50 ml wijn te bevatten. Dit punt P ligt op kromme BC .

Kromme BC is de grafiek van de functie g met $g(x) = \sqrt{x^2 + 175x - 6600}$ op het domein $[55,3; 87,5]$; hierbij zijn $g(x)$ en x in mm. In figuur 4 is het vlakdeel V grijs gemaakt dat wordt begrensd door de verticale lijnen door B en door P , de x -as en kromme BP .

Als V wordt gewenteld om de x -as, heeft het omwentelingslichaam dus een inhoud die overeenkomt met 50 ml. Hierbij wordt de dikte van het glas verwaarloosd.

- 5 Bereken met behulp van primitiveren de x -coördinaat van P . Rond je antwoord af op een geheel getal.

figuur 7 Uit: VWO B 2012 (Het standaard proefglas)

Statistiek met hobbels – De opgave

Selectief cijferen werd geïllustreerd met een staafdiagram waarin de frequenties van de cijfers 1 t/m 10 voor een tentamen werden weergegeven. Het is dus geen histogram met frequenties van opeenvolgende aansluitende klassen met klassenmiddens 1 t/m 10. Dat verschil gaf bij de beantwoording en beoordeling van de vragen bij deze opgave de nodige misverstanden; zie figuur 6. De syllabus kent de term ‘histogram’ overigens niet: daar wordt in Fa2–17.4 alleen gesproken over ‘staafdiagram (ook met ongelijke klassenbreedte)’...

Bij WA-vraag 14 (WC-vraag 15) moesten bijvoorbeeld relatieve frequenties getekend worden op normaal waarschijnlijkheidspapier. Dat kon dus niet boven de rechter klassengrens, omdat er geen klassenindeling aan de orde was, maar de meeste leerlingen (en ook collega's) deden dat – na training in vele opgaven in het boek waar wel sprake was van een klassenindeling – toch maar wel. Gelukkig maakte het cv daar geen probleem van. Bij WA-vraag 13 (WC-vraag 12) ging het om het bereken van het aantal studenten dat een 5 zou krijgen als de cijfers voldeden aan een normale verdeling met $\mu = 5,4$ en $\sigma = 1,9$. Dat zou dan via continuïteitscorrectie moeten worden berekend, door overstap van de discrete werkelijkheid die niet normaal verdeeld is, naar het model van de continue verdeling, met *normalcdf*(4.5, 5.5, 5.4, 1.9).

Over deze vraag is veel gediscussieerd in het forum, allereerst over het interval dat gekozen moet worden rond die 5, maar vooral ook over de toelaatbaarheid van het eventuele gebruik van *normalpdf*; de kansdichtheid. Hoewel leerlingen in hun boeken niets over *normalpdf* vinden, in feite de kansdichtheidsfunctie van de normale verdeling – de handleiding van de TI vertelt er bijvoorbeeld niet meer over dan dat de normaalkromme er mee getekend kan worden – (b)leek dat *normalpdf*(5, 5.4, 1.9) ook dicht bij de gevraagde kans uit kwam. Het zou dan vakinhoudelijk aannemelijk gemaakt kunnen worden dat de vraag ook met *normalpdf* beantwoord zou kunnen worden. Misschien zien we daarover iets in een volgend nummer van *Euclides* terug? Overigens, WA-vraag 12 was gelijk aan WC-vraag 13: ‘Bereken het gemiddelde en standaardafwijking ...’, maar voor WC-

leerlingen was dit een brug te ver: dat soort berekeningen valt bij hen onder het SE. Zij kregen de 4 punten voor deze vraag cadeau.

‘Toeval bestaat niet en geluk dwing je af’

– Bij de opgave *Behendigheid* was WA-vraag 17 (WC-vraag 17) mikpunt van veel kritiek en teleurstelling. Kritiek omdat de vraagstelling veel leerlingen niet op weg hielp naar het bedoelde antwoord en daardoor teleurstelling, omdat de vraag bijna altijd 0 punten scoorde. Het ging hier om het herleiden, ‘ook te schrijven als’ van een gegeven gebroken formule. Omdat de vraag gesteld werd als ‘Toon aan ...’ gingen veel leerlingen redeneren in plaats van herschrijven en kwamen er dan niet uit.

En dan WA-vraag 20 (WC-vraag 19), weer een moeilijk na te kijken, een ‘Leg uit’-vraag. Het antwoord uit het cv bleek zelfs voor docenten lastig te doorgronden: men vroeg elkaar in het forum om de juiste uitleg. Wordt het toevalseffect *TE*, volgens de context eerst omschreven als ‘de mate waarin het toeval een rol speelt bij het poken’ en later gedefinieerd als ‘*TE* = winst van de fictieve speler – de winst van de ervaren speler’ groter naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel? De fictieve speler is hier gedefinieerd als een ervaren speler, die niet alleen veel ervaring met het spel heeft (zijn winst wordt bepaald door geluk en kunde), maar bovendien nog informatie heeft over toevalselementen in het spel, bijvoorbeeld welke kaarten andere spelers hebben en welke kaarten er op tafel liggen (zijn winst wordt door geluk, kunde en informatie bepaald). Die informatie is andere spelers onbekend. De fictieve speler bestond alleen in een experiment rond het nagaan of poker een kans- of behendigheidsspel is. Het gegoochel met de begrippen *toeval*, *toevalseffect* en *toevalselementen* kwam een duidelijke beantwoording door leerlingen niet ten goede. Reacties als ‘Geluk = toeval!’ en ‘Ongeluk = ook toeval’, maar ‘Geluk = niet ongeluk’ maken het er niet duidelijker op.

Misschien is de redenering ‘Het toevalseffect is (...) de mate waarin het toeval een rol speelt bij het spel: het toevalseffect is groot als het toeval een grotere rol speelt’ wel de beste.

In het vernieuwde vak wiskunde-C vanaf 2015 zal het onderdeel logisch redenen een rol gaan spelen, maar dit lijkt er al een

aardig, alhoewel minder geslaagd, voorschot op! ‘Leuk bedacht maar niet geschikt als examenopgave’, zo stelde een collega.

De opgave was gebaseerd op een methode die twee onderzoekers hadden ontwikkeld om onderscheid te maken tussen een kansspel en behendigheidsspel en die indertijd de nodige aandacht in de pers trok. Enkele collega’s namen de moeite om op internet naar verduidelijking rond dit experiment te zoeken om beter zicht te krijgen op de context. Er is trouwens een boek over verschenen, Van der Genugten, Das, Borm: *Behendig gokken in en rond het casino* (Academic Service; ISBN 90 395 1571 9).

Hoeveel procent van wát? – Opvallend was het feit dat men het niet eens kon worden over WC-vraag 5 (*Wild*): Hoeveel procent wilden zwijnen waren er te veel; (*zie figuur 15* op pag. 12). Hoeveel procent van welk aantal? Te veel ten opzichte van het gewenste aantal of te veel ten opzichte van het aanwezige aantal? De in 2008 af te schieten 1915 wilde zwijnen waren er te veel, maar volgens het vervolg van de opgave was het afschieten niet de enige doodsoorzaak waardoor het ‘te veel’ zal worden geëlimineerd; dus kan $1915 + 835 = 2750$ niet het totaal zijn. Het cv wilde $1915 : 835 \times 100\% \approx 231\%$, maar veel collega’s wilden $1915 : 2750 \times 100\% \approx 70\%$ ook goed rekenen. Zelfs het College voor Examens werd geraadpleegd; dat vond de vraag eenduidig genoeg en het cv dus bindend, maar overtuigd was men daarmee in het forum niet.

Er waren niet veel collega’s aanwezig op de regionale besprekingen, maar de aanwezigen stellen dit overleg toch zeer op prijs. Voor zover de enquête bij wiskunde-A representatief is, levert deze een iets negatief maar geen al te desastreus beeld op van het examen. Het niveau had hoger en de spreiding beter gekund. In het forum werd er ook beperkt negatief over het examen geoordeeld. Te veel geredeneer, te weinig kansrekening, $\sqrt{n}$ -wet en logaritme. De meeste kritiek kwam in de bespreking van de vragen zelf naar voren, waarbij vooral de reeks vragen rond *Behendigheid* en de manier waarop die gesteld werden het ontgelden moesten.

Bij wiskunde-C was het oordeel negatiever,

vooral ook gezien de lappen tekst die doorgeworsteld moesten worden; niet fijn voor dyslectische leerlingen.

Er werd in het forum dan ook op gewezen dat de kernvakkenregeling voor hen een extra handicap betekent, omdat ze zowel bij Nederlands als wiskunde op taal worden ‘afgerekend’.

Men betreunde de dubbele vraagstelling in WC-vraag 2 en vraag 6.

De overgang van het combi-examens WC/WA1-bezem, die qua stof gebaseerd waren op de grootste gemene deler van beide vakken (en dus minder stof betroffen), naar het ‘eigen’ examen wiskunde-C over de hele stof bleef ook niet onbesproken: een voorbeeldexamen was wel prettig geweest.

VWO-B

Ook van vwo-B was er alleen een centrale bespreking. Daar werd geconstateerd dat het examen te lang was, iets wat ook uitdrukkelijk in het forum vastgesteld werd. Dat wreekte zich in de laatste, niet erg lastige, opgaven, die vaak werden afgeraffeld. Er waren geen echt moeilijke opgaven; wiskundig gezien was het examen misschien wel te gemakkelijk. Maar aan de andere kant vormden de (te) vele contexten en daarmee formules met onmogelijke coëfficiënten, waardoor de GR noodzakelijk voorrang kreeg boven exacte berekeningen, een ontsierend en tijdrovend element. ‘Begrijpend lezen en tekstverklaren horen bij het vak Nederlands’ en ‘Dit was wiskunde-A met B-onderwerpen’ zo werd instemmend verzucht in het forum: wiskunde-B vraagt om een abstractere vraagstelling. Hoe dan ook, de N-term 1,5 geeft aan dat het examen niet helemaal aansloot bij wat de examenmakers ermee hadden bedoeld. Een rondvraag onder WB-examinatoren in het forum leverde als resultaat op dat er, met een gemiddelde score van rond 45, een N-term van 1,2 werd verwacht. Achteraf blijkt dat de hoge N-term een aantal collega’s ‘in verlegenheid’ kan brengen, omdat de CE-resultaten daardoor bij hen flink hoger uit vallen dan de SE-cijfers.

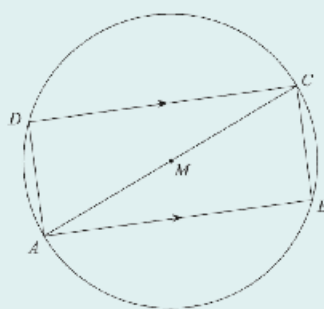
Geen regionale besprekingen dus, het forum was de enige overlegmogelijkheid en daar werd meer dan vorig jaar van gebruik gemaakt. Er waren wat minder topics, maar sommige leverden een lawine van reacties op.

Te veel knoppenwiskunde? – De context van de opgave *Het standaard proefglas* leverde qua coëfficiënten weinig abstracte formules op, waarmee helaas ook niet erg algebraïsch gerekend kon worden; **zie figuur 19** op pag. 16 en **figuur 7**. Er moest dus noodzakelijkerwijs met de GR worden gewerkt. Dat leverde bij vraag 5 een in te voeren vergelijking op, waarvan het linkerlid uit zo'n kleine 60 toetsaanslagen (!) bestond. Het rechterlid vormde kennelijk ook een probleem: er moest van 50 ml omgerekend worden naar 50 000 mm³, 'maar waar staat dat leerlingen inhoudsmaten moeten kunnen omrekenen?' De vraag was in die zin ook nog tweeslachtig, want de berekening moest met behulp van primitiveren (geen term uit de syllabus...) dus algebraïsch, maar het antwoord moest worden afgerond op een heel getal, weer numeriek.

Verwijzingen ... – De opgaven *Vanuit een parallellogram* en *Evenwijdige lijnen en een rechthoek* waren weer van die vlakke meetkundeopgaven, waarbij de leerling gebruik dienden te maken van de bekende (cursieve) verwijzingen van het formuleblad. Steeds weer treedt dan het probleem op dat het gebruik van een stelling zo vanzelfsprekend is – en impliciet eigenlijk al genoemd is – dat die verwijzing achterwege blijft. Daarnaast blijkt ook elk jaar dat het nakijken van dergelijke bewijzen een hele toer is: 'Indien de kandidaat meer dan twaalf regels heeft gebruikt om tot het juiste antwoord te komen voor deze vraag, geen scorepunten toekennen', zo werd als toevoeging aan het cv voorgesteld. Dat cv kreeg aardig wat kritiek bij het bewijs van opgave 16 (**zie figuur 8a en figuur 8b**). Vier pagina's reacties laten veel – soms betrekkelijk snelle en eenvoudige – bewijzen zien die meer voor de hand lijken te liggen dan die in het cv. Aan de andere kant: de vraag lijkt zo eenvoudig, dat leerlingen zich, te kort door de bocht gaand, in het bewijs vergalopperen of een beroep doen op niet toegestane, soms evidente, stellingen (als een lijn één van twee evenwijdige lijnen loodrecht snijdt, dan snijdt hij ook de andere loodrecht) die dus eerst zelf bewezen zouden moeten worden (deze via *F-hoeken* en *gestrekte hoek*). Ook is het niet 'vanzelfsprekend' dat als drie hoeken van een vierhoek 90° zijn, het dan een rechthoek is. Maar er zijn ook leerlingen die in de

Op een cirkel met middelpunt M liggen de punten A , B , C en D zo dat AC een middellijn is en de lijnstukken AB en CD evenwijdig zijn. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage

figuur 1



16 Bewijs dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.

figuur 8a Uit: VWO B 2012 (Evenwijdige lijnen en een rechthoek)

16 maximumscore 4

- $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$; *Thales* 1
- $\angle BAC = \angle ACD$; *Z-hoeken*, dus driehoek ABC en driehoek CDA zijn congruent; *ZIII* (of: $\angle BAC = \angle ACD$; *Z-hoeken*, en $\angle ACB = 90^\circ - \angle BAC$ en $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACD$; *hoekensom driehoek*) 1
- Hieruit volgt $\angle CAD = \angle ACB$, dus $AD \parallel BC$; *Z-hoeken* 1
- $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ en $\angle ABC = 90^\circ$, dus vierhoek $ABCD$ is een rechthoek; (*parallellogram*), *rechthoek* 1
- of
- $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$; *Thales* 1
- $\angle BAC = \angle ACD$; *Z-hoeken*, dus driehoek ABC en driehoek CDA zijn congruent; *ZHH* (of: $\angle BAC = \angle ACD$; *Z-hoeken*, en $\angle ACB = 90^\circ - \angle BAC$ en $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACD$; *hoekensom driehoek*) 1
- Hieruit volgt $\angle CAD = \angle ACB$, dus $\angle BAD = \angle BCD$ 1
- $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, dus $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, dus vierhoek $ABCD$ is een rechthoek; *koorden vierhoek*, *rechthoek* 1

figuur 8b Uit: Correctievoorschrift VWO B 2012 (Evenwijdige lijnen en een rechthoek)

gegeven situatie er allerlei niet ter zake doende stellingen bij slepen en daarmee als katten op de hete brei blijven draaien zonder dat er toegehaapt wordt. Dat kost je als docent veel correctietijd en ook bestaat het gevaar dat je gaat 'sprokkelen' omdat de te gebruiken stellingen toch genoemd worden, maar dan helaas niet op de bedoelde manier toegepast. Die (vele) correctietijd werd dan ook één van de topics: er werden per leerling correctietijden gemeld variërend van een half tot twee uur.

Exact of exact? – En bij vraag 9 was-ie er weer: 'Is $\cos(\frac{1}{6}\pi)$ ook een exacte waarde? Of vinden we dat er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ moet staan?' Met de nieuwste GR's is het onthouden van de goniometrische verhoudingen niet meer nodig, ze tonen die onmiddellijk 'exact' in de 'natural display' en ook bij het terugrekenen met bijvoorbeeld $\cos^{-1}$ krijg je dan een 'exact' antwoord.

Bij *Drie vierkanten in een rechthoek* leverde opgave 10 maar liefst 8 punten op, meer dan een tiende van het totaal. De leerlingen werden op weg geholpen bij het vinden van de formule die ze moesten optimaliseren door in de tekening een zijde alvast x te noemen. Bij het pilotexamen, waar de vraag verder hetzelfde was, ontbrak die aanwijzing. Blijkbaar zullen we dergelijke optimaliseringsproblemen in de toekomst dus terugzien.

De figuren bij de opgave *Een Wen* en de opgave *Tussen twee sinusgrafieken* vertoonden een duidelijke symmetrie, waar leerlingen dan graag gebruik van willen maken, maar zich dan weer niet bekommeren om een onderbouwing. Niet iedere collega is het er dan mee eens om daarvoor punten in mindering te brengen. De opgave *Verschoven platen* over een kunstwerk leek meer op z'n plaats in een C-examen. Daarnaast leverden de context

(één hele pagina), de onduidelijke foto's en vraagstelling nogal kritiek op, maar los van die context, als abstract probleem gezien, leverde het aardige B-wiskunde op, weer met modelleren als start.

Tot slot

De pilotexamens zijn geen onderwerp voor dit artikel. In het examenforum was geen specifieke plaats voor deze examens ingeruimd en de betrokken collega's hielden gezamenlijk onderling hun examenbesprekingen en schrijven er elders in dit nummer over.

Wel stond er enige informatie over de overlap en de verschillen tussen de reguliere en pilotexamens in het forum. Heel aardig was hierbij dat een collega het integrale commentaar van één van zijn leerlingen, die het pilotexamen vwo-B gemaakt had en ook vergeleken met het reguliere examen, in het examenforum plaatste. Deze leerling had weinig goede woorden over voor het pilotexamen (en het experiment) en had een klacht bij het LAKS gedeponerd.

Overigens, vooral voor collega's die op het vwo wiskunde-C geven is het interessant, en raadzaam, om het pilotexamen te bekijken. Daarin worden totaal andere onderwerpen afgevraagd dan welke nu in het programma staan, terwijl tevens het formule overzicht ontbreekt. Of dit pilotexamen geslaagd was kun je je afvragen bij een N-term van 1,8. En schrijvende over het examenforum mag niet onvermeld blijven dat er zich zo gaandeweg een kleine vaste groep van respondenten heeft gevormd, die – naast dat ze hun eigen vraagtekens bij afwijkende antwoorden van leerlingen hebben en die melden – regelmatig reageren op vragen en opmerkingen van collega's en hun kennis, mening, inzicht, visie en kritiek geven op het cv of op de vraagstelling in het examen, dan wel aangedragen alternatieve antwoorden en verder ook soms even wat dieper in de stof, het programma en de syllabus duiken om hun kijk op vragen en problemen te verduidelijken. 'Zo helpen wij elkaar!'

Info

De examenopgaven zijn te downloaden op: www.nvvw.nl/page.php?id=8808 (en via www.cito.nl)

Het examenforum is na inloggen te vinden op: www.nvvw.nl/page.php?id=8872

Over de auteur

Erik Korthof is als webmaster verbonden aan de website van de NVvW en was vóór zijn fpu docent wiskunde Tweede Fase aan het Bonhoeffer College te Enschede. E-mailadres: eskorthof.1@kpnmail.nl
Reacties kunnen geplaatst worden in het forum 'Lezersreactie EUCLIDES' op de NVvW-website (www.nvvw.nl).

APS-Exact

Regionale studiemiddag: De Rekentoets halen in 2012/2013!!

In het schooljaar 2012/2013 kunnen leerlingen in voor-examenklassen (3 vmbo, 4 havo, 5 vwo) meedoen aan de pilot-rekentoets 2F en 3F in maart 2013. Halen ze de toets, dan hebben ze aan de examenverplichting voldaan!

In september en oktober 2012 organiseert APS regionale studiemiddagen. U krijgt een compleet overzicht waar de rekentoets precies over gaat en wat er van de leerling wordt verwacht. Daarnaast worden er verschillende stappenplannen gepresenteerd om de leerlingen in voor-examenklassen zo effectief mogelijk voor te bereiden op de rekentoets. De studiemiddag is bedoeld voor docenten die er direct mee aan de slag willen in een voor-examenklas.

U kunt zich aanmelden via onze site
www.aps.nl/exact > Activiteitenagenda

Bel of schrijf voor meer informatie:
APS-Exact
Postbus 85475
3508 AL Utrecht
Telefoon: 030 - 28 56 722
E-mail: voortgezetonderwijs@aps.nl
www.aps.nl/exact



leren
inspireren

Redeneren in en rond het eindexamen vwo A/C

[Gerard Koolstra]

Het centraal examen (CE) is mede door de recente maatregelen nog belangrijker geworden. Mede door de 'CE voldoende regel', de nadruk op ongewenste verschillen tussen SE- en CE-cijfer en de manier waarop scholen daarop afgerekend worden, is het CE bepalender dan ooit. Dit geldt zeker ook voor de kernvakken wiskunde. Tegelijkertijd zijn er met name bij wiskunde C en A (en vooral op het vwo) een aantal problemen die een correcte (inhoudelijk juiste en overal toegepaste) beoordeling bemoeilijken, zo niet onmogelijk maken. Sommige van deze problemen zijn eerder signaleerd, andere zijn relatief nieuw en hebben te maken met de introductie van een relatief nieuw soort vragen op het gebied van het (algebraïsch) redeneren.

Veel problemen hebben te maken met taal. Op de examenfora van de NVvW werd ook verzucht dat de meeste discussie gingen over taal in plaats van wiskunde. De taligheid van de opgaven is ook menig docent een doorn in het oog, maar mijn indruk is dat dit vooral speelt bij B-varianten van wiskunde. Bij wiskunde C en A is de taligheid wat minder omstreken, maar juist daar geven formuleringen soms ernstige problemen. De eerste opgave van het pilot examen wiskunde C (vraag 5 van het reguliere) is daarvan een 'mooi' voorbeeld. Na een korte introductie volgt:

Volgens de Faunabeheereenheid Veluwe is er op de Veluwe plaats en voedsel voor 835 wilde zwijnen. Dit streefgetal is door de minister van Landbouw overgenomen. Jagers krijgen daarom jaarlijks toestemming om een bepaald aantal wilde zwijnen af te schieten. In 2008 was dit aantal af te schieten wilde zwijnen 1915.
» Bereken hoeveel procent wilde zwijnen er toen te veel waren.

Volgens het correctievoorschrift moest het aantal 1915 gerelateerd worden aan het streefgetal 835, maar veel leerlingen relateerden het aan het totale aantal (2750). Een kwestie van niet goed lezen, of is de

vraagstelling onduidelijk? Volgens het CvE en veel collega's het eerste, volgens anderen het tweede. Als je uitgaat van de situatie in de zomer (op het moment dat de zwijnen geteld worden) zijn er 2750 zwijnen (althans volgens de opgave – in feite veel meer, als je de biggetjes meetelt). Het gewenste aantal is 835, dus de rest (1915 zwijnen) is te veel en moet worden afgeschoten. Hoeveel procent? Vanuit deze gedachtegang is het logisch dat je uitgaat van 2750 als 100%. Ik begrijp ook de andere gedachtegang – die me van CvE-zijde nog eens persoonlijk is uiteengezet – alleen betekent dit niet dat het 'dus niet anders (kan) worden geïnterpreteerd'. Het doet mij denken aan de discussie over de vraag of het begrip 'tussen' dubbelzinnig is of niet. Alleen al de discussie over dubbelzinnigheid zelf is een aanwijzing daarvoor.

Naar mijn mening is het onacceptabel dat in een examen dubbelzinnigheden zitten:

1. Je doet leerlingen tekort (vaak 1 punt, maar elk punt telt).
2. Je zadelt docenten op met lastige discussies over taal.
3. Je legt een extra druk op het overleg tussen 1e en 2e corrector.

Een ander voorbeeld van een mogelijk misverstand biedt de eerste vraag over *Waardepunten* (deze kwam in alle A- en C-examens voor).

Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

Voorbeeld

Kop en schotel (...) kosten samen € 5,-.

Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,- of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,- bijbetalen.

Bij DE kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50. Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk bijbetalen.

» Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

De vraagstelling suggereert wellicht dat het gaat om een heel aantal euro's, maar dit aspect gaf in de praktijk weinig problemen. Meer problemen gaf de informatie over de eerste honderd punten. Er staat duidelijk *per artikel*, dus wanneer slechts één keer met dit gegeven wordt gewerkt, is dat een fout van de kandidaat. Wel is het voorbeeld van kop en schotel wat ongelukkig, want het is niet helder of het om één of twee artikelen gaat. Ook wanneer iemand 6 bordjes en een plateau aanschaft, wordt 100 punten per artikel dubbelzinnig. Volgens *Van Dale* is een artikel een *product dat verhandeld wordt*. Zo gezien kun je 6 bordjes als 1 artikel zien waarvan er 6 stuks worden gekocht. Je ziet bij online winkels ook dat een bestelling van 6 exemplaren van het zelfde product de soms een bestelling van 1 artikel wordt genoemd en soms als bestelling van 6 artikelen.

Volgens de gangbare mores lijkt het voor de individuele docent die zich de andere interpretatie kan voorstellen alleen mogelijk om zich al dan niet mokkend neer te leggen bij het correctievoorschrift. Uiteraard is er artikel 3.3 van de Algemene regels: '*indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel*'; maar wat is *vakinhoudelijk* in dit verband, en wat is *in de geest van* het antwoordmodel, dat (uiteraard) van de veronderstelling uitgaat dat de vraagstelling ondubbelzinnig is. Daar komt bij dat artikel 7 zegt: '*Indien de examinerator of de gecommiteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit,*

beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. (...)’

Je kan als examiner/tweede corrector die naar eer en geweten zijn werk probeert te doen, aardig klem komen te zitten. Dat geldt niet alleen voor taalkundige problemen.

Bij het thema *Selectief cijferen* werd gevraagd (A-vraag 13; C-vraag 14) hoeveel leerlingen een 5 zouden hebben gekregen wanneer de tentamencijfers normaal verdeeld zouden zijn. De standaard aanpak (ook in het correctievoorschrift beschreven) is de kans $P(X = 5)$ met discrete stochast X te herleiden tot $P(4,5 < Y < 5,5)$ met normaal verdeelde continue variabele Y . Met behulp van de GR is dit eenvoudig uit te rekenen. Hiervoor wordt uiteraard de bekende cumulatieve normale verdeling gebruikt, die ik kortheidshalve aanduid met Ncd. Sommige leerlingen hadden echter de kansdichtheidsfunctie gebruikt (Npd). Deze gaf in dit geval een ander antwoord; bij wat fijnere verdelingen (geen cijfers 1 t/m 10, maar bijvoorbeeld scores 0 t/m 80) zijn de verschillen verwaarloosbaar. Maar kleine of grote verschillen: is de aanpak juist? In de discussie kwamen diverse argumenten naar voren, die mijns inziens niet valide zijn – bij het beoordelen van eindexamen (schoolexamen is een ander verhaal): *Weet de leerling wat hij/zij doet? Is de aanpak aan de orde geweest?* Naar mijn oordeel moeten de examiner en tweede corrector allereerst antwoord geven op de vraag of de aanpak inhoudelijk als (gedeeltelijk) juist kan worden gekwalificeerd. Helaas bleek er weinig animo voor een vakinhoudelijke discussie. Je kunt je ook afvragen in hoeverre leraren vo – maar ook examenmakers – voldoende zijn toegerust om met kennis van zaken over de vaak ingewikkelde, en niet zelden ook onder deskundigen controversiële, problemen in de statistische wetenschap te oordelen. Vraagstellingen en uitwerkingen op het CE waren in het verleden al vaker onderwerp van kritiek uit wetenschappelijk hoek, en je kunt er niet omheen dat er verschillende stromingen zijn, die ieder hun eigen aanpak hebben. De leerling die braaf doet wat hij/zij geleerd heeft, en niet teveel nadenkt over de grenzen (als het zou

gaan om cijfers die eerst in één decimaal worden uitgerekend, en pas later op een heel getal afgerond, zoals bij sommige eindexamencijfers op het vo, krijg je net wat andere intervallen) wordt beloond. Afwijkende gedachten worden afgestraft, zo lijkt het. Een ultiem voorbeeld van belonen van ‘braaf’ gedrag is het werken met normaal waarschijnlijkheidspapier. Ik heb daar vaker over geschreven, maar dat heeft blijkbaar weinig geholpen.

De laatste tijd is er in de examens meer aandacht voor redeneren. In het examennummer van twee jaar geleden werd in het stuk van Cito-medewerkers ook nadrukkelijk aandacht besteed aan ‘redeneren rond een algebraïsche uitdrukking’ bij wiskunde A/C. Dit aspect kwam bij deze examens voluit aan de orde. Bij het onderdeel *Behendigheid* waren er maar liefst 5 (wis-C) à 6 (wis-A) redeneervragen. Het ging over het *Leereffect* (LE) en het *Toevalseffect* (TE) bij kans- en behendigheidsspelen, en met name het *behendighedsniveau* B gedefinieerd als $\frac{LE}{LE+TE}$.

Achtereenvolgens moest aangetoond worden dat:

1. B nooit negatief is (gegeven was dat LE en TE nooit negatief zijn en nooit samen 0);
 2. B hoogstens 1 is;
 3. B groter is bij een kleiner toevalseffect (en gelijk leereffect);
 4. (wis-A) Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is B groter bij het spel met het grotere leereffect;
 5. Bij een behendighedsniveau van 0,20 de verhouding tussen het leereffect en het toevalseffect altijd gelijk is aan 1 : 4.
- Na precieze definities van LE en TE moest ook nog worden aangetoond:
6. dat TE groter is naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel.

De eerste vier vragen beogen – vermoed ik – te toetsen in hoeverre de definitie van B ten volle wordt begrepen. Het zijn aardige vragen voor een discussie in een klas, maar als examenvraag vereist het duidelijke afspraken (en training) over de vereiste precisie van de redeneringen. Volgens het correctievoorschrift moet bij vraag 1 uitdrukkelijk genoemd worden dat $LE + TE$ niet negatief is (en niet alleen niet 0). Bij vraag 2 wordt in het correctievoorschrift

gebruik gemaakt van de ongelijkheid $LE + TE$ waarbij het (links en rechts) delen door de rechterkant niet hoefde te worden toegelicht (met de opmerking dat $LE + TE > 0$).

Bij vraag 3 ging de redenering via TE is kleiner, dus $LE + TE$ is kleiner.

Bij vraag 4 kregen de leerlingen een gelijkwaardige versie van de formule:

$$B = 1 - \frac{TE}{LE+TE}$$

(Die gelijkwaardigheid moest wel eerst worden aangetoond.) De redenering die verwacht werd, liep via: als TE gelijk blijft en LE stijgt, wordt $LE + TE$ groter; de breuk dus kleiner en B dus groter.

Bij vraag 5 verwachtte het correctievoorschrift een vertaling van

$$\frac{LE}{LE+TE} = \frac{1}{5} \text{ in } LE = 0,2 \cdot LE + 0,2 \cdot TE.$$

En via $0,8 \cdot LE = 0,2 \cdot TE$ is dan de verhouding $LE : TE = 1 : 4$.

Het vraagt weinig fantasie om te bedenken dat de antwoorden van de kandidaten vaak heel anders waren. De antwoordmodellen waren ook voor mij vaak verrassend, en, denkend aan de C-leerlingen, niet altijd passend bij de doelgroep. Daarbij komt dat er weinig oefenmateriaal voor handen is. In oude examens en de gangbare boeken komen dit soort vragen nauwelijks aan de orde. Veel leerlingen hebben – om grip op dit soort vragen te krijgen – gebruik gemaakt van getallen. In het correctievoorschrift werd daarover het een en andere gezegd. Hierbij kon aan een getallenvoorbeeld 1 punt gegeven worden (en aan 2 voorbeelden zelfs 2), maar andere keren leverde een getallenvoorbeeld niets op.

Maar wat is een getallenvoorbeeld? Als je de verdubbelingstijd bij een gegeven groeipercentage moet uitrekenen, werk je dan met een getallenvoorbeeld wanneer als starthoeveelheid 1 neemt, of 100? Het behendighedsniveau is gedefinieerd als de verhouding tussen LE en $(LE + TE)$; dat impliceert eigenlijk dat je LE (of TE) gelijk aan 1 (of een andere getal) mag stellen, net zoals het begrip verdubbelingstijd impliceert dat de je startwaarde zelf mag kiezen. Ik heb het sterke vermoeden dat hier door diverse collega’s heel verschillend mee is omgegaan.

In bovenstaand voorbeeld was er nog sprake van ofwel enige algebraïsche manipulatie, ofwel algebraïsch redeneren. De volgende

vraag (A-vraag 20; C-vraag 19) hoort volgens velen niet in een wiskunde-examen thuis.

Met behulp hiervan definieerden Borm en Van der Genugten *TE* en *LE*:

TE = winst van de fictieve speler – winst van de ervaren speler

LE = winst van de ervaren speler – winst van de beginner

» Leg uit dat *TE* groter is naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel.

(De begrippen *beginner*, *ervaren* en *fictieve* speler waren eerder toegelicht.)

Het modelantwoord bevatte een driestaps redenering, waarin eerst uit de tekst gehaald moest worden dat het verschil tussen fictieve en ervaren speler zit in (extra) informatie over toevalselementen in het spel, en dat als toeval een grotere rol speelt de fictieve speler meer wint, en dus het verschil groter wordt. De discussie tussen collega's over dit onderwerp was soms nauwelijks te volgen; wat te denken van beoordelen van het leerlingen werk? Is dit niet meer het werk van een collega Nederlands die gewend is betogen te corrigeren?

Deze opgave zat in alle vier de examens A en C – pilot en regulier – en zou dus uitgebreid door diverse instanties en personen op waarde geschat moeten zijn. Om misverstanden te voorkomen, ik besef hoe makkelijk het is om vragen af te kraken, en hoe moeilijk het is om goede examenvragen te bedenken. Ik vind dat de examenmakers een compliment verdienen voor de wijze waarop ze erin slagen om steeds weer nieuwe contexten op te sporen en te gebruiken. Maar hoe waardevol de genoemde thema's en wellicht ook een deel van de vragen kunnen zijn voor het wiskundeonderwijs, veel vragen zijn minder geschikt als examenvragen, deels ook doordat ze bijna niet te corrigeren zijn. Juist nu de CE-cijfers nog belangrijker worden (evenals de eindcijfers wiskunde) zou daar nog eens heel kritisch naar gekeken moeten worden

Over de auteur

Gerard Koolstra is docent wiskunde aan het St. Michaelcollege in Zaandam.
E-mailadres: g.koolstra@chello.nl

Rekenbewust Vakonderwijs

AANKONDIGING / CONFERENTIE

Rekenbewust Vakonderwijs in het vo / Rekenen vanuit de vakken

Rekenen staat volop in de aandacht. Niet alleen omdat het een verplicht onderdeel wordt van het examen, maar ook omdat rekenen in de examens bij verschillende vakken steeds meer van leerlingen vraagt. Elke vakdocent loopt ertegenaan dat leerlingen eenvoudige basisvaardigheden rekenen op verschillende manieren hebben geleerd. En dat ze die vaardigheden ook snel weer vergeten als die niet op een goede manier onderhouden worden.

Herkent u dit? Komt u dan op **dinsdag 27 november a.s.** naar de conferentie *Rekenbewust Vakonderwijs in het vo*. Deze werkconferentie is bestemd voor alle vakdocenten die lesgeven in het voortgezet onderwijs; vooral die docenten die zich verantwoordelijk voelen voor het op peil brengen en houden van het rekenniveau van hun leerlingen.

De conferentie wil vakdocenten met elkaar in contact brengen over waar zij in hun dagelijkse praktijk tegenaan lopen als het gaat om het beheersen van rekenvaardigheden. U leert van elkaar en elkaars ervaringen en wordt bovendien 'gevoed' met nieuwe kennis door rekenexperts. Daarnaast levert de conferentie aanbevelingen op voor een schoolbrede aanpak voor rekenen, waardoor leerlingen uiteindelijk met meer succes hun examens zullen maken.

Programma

Het programma bestaat uit drie onderdelen. In de *eerste* ronde wordt u in de gelegenheid gesteld ervaringen uit te wisselen met collega-vakdocenten. Aan de hand van voorbeeldopgaven uit recente examens gaat u met elkaar in gesprek over de wijze waarop u leerlingen ondersteunt bij het toepassen van een geschikte aanpak voor een rekenprobleem.

In het *tweede* programmaonderdeel werkt u met een expert aan specifieke rekenonderwerpen. Die rekenonderwerpen zijn bijvoorbeeld: schatten en meten, tabellen-grafieken-formules, rekenen met verhoudingen, procenten. U leert hoe u een rekenvaardigheid kunt onderwijzen en ervoor kunt zorgen dat die aanpak beklijft. De uitkomsten van dit onderdeel worden gebundeld en na afloop aan de deelnemers toegestuurd.

In de *derde* ronde gaat het erom hoe u, samen met uw collega's, in uw school het rekenniveau kunt verhogen. Maar ook hoe u ervoor kunt zorgen dat leerlingen de geleerde rekenvaardigheid met meer betekenis kunnen toepassen in verschillende vakken.

Kortom. Wilt u beter toegerust zijn om vanuit uw eigen vak uw leerlingen te begeleiden bij het aanleren en onderhouden van hun rekenvaardigheden? Komt u dan naar deze conferentie! U kunt zich inschrijven via de website van APS (www.aps.nl). Wij zien uit naar uw komst.

Praktische informatie

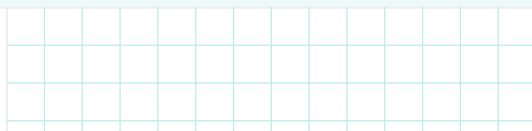
De conferentie vindt plaats op dinsdag 27 november 2012 van 15:00 tot 19:30 uur (inclusief een buffet).

Locatie: Vergadercentrum Domstad, Koningsbergerstraat 9 te Utrecht.

Kosten: € 75,00 per persoon.

U kunt zich online inschrijven via « www.aps.nl/rekenbewust-vakonderwijs ».

De conferentie wordt georganiseerd met bijdragen van de vakverenigingen NVON, KNAG en VECON, de stichting Platforms vmbo en de overkoepelende VVVO en door APS, Freudenthal Instituut, SLO, CPS, KPC Groep en Steunpunt taal en rekenen vo. Voor meer informatie kunt u contact opnemen met Martin van Reeuwijk (e-mailadres: m.vanreeuwijk@aps.nl).



VWO – wiskunde A

PILOT EXAMEN

[Erik van Barneveld en Peter Kop]

De minister van Onderwijs heeft besloten vernieuwde wiskundeprogramma's in 2015 landelijk in te voeren in het vierde leerjaar van de havo en het vwo. In het schooljaar 2009/2010 is een beperkt aantal scholen de programma's vernieuwde wiskunde gaan volgen (zie [1]). Deze vernieuwde programma's worden afgesloten met aparte eindexamens. In mei jl. is voor het eerst een centraal eindexamen voor het vernieuwde programma vwo-A afgenomen. In dit artikel gaan wij eerst in op de inhoud van dit nieuwe vwo A- programma en enkele randvoorwaarden waarbinnen de pilotscholen dit nieuwe programma konden uitvoeren. Daarna beschrijven wij het programma zoals we dat bij ons op school met onze leerlingen hebben doorlopen in de afgelopen drie schooljaren. Vervolgens bespreken we de inhoud van het afgenomen examen en vergelijken dit met het reguliere examen vwo-A. Tot slot trekken wij onze conclusies en benoemen wij enkele aandachtspunten voor de toekomst.

Vernieuwde wiskunde A op het vwo

Specifiek bij de ontwikkeling van het vwo-programma wiskunde A zijn onder meer de volgende uitgangspunten gehanteerd (zie: www.ctwo.nl):

- De doelgroep voor dit vak wordt gevormd door leerlingen die het profiel EM en NG volgen en leerlingen in het profiel CM die wiskunde A kiezen in plaats van wiskunde C.
- Wiskunde A bereidt voor op universitaire vervolgoopleidingen in de economische en biomedische wetenschappen.
- Binnen wiskunde A is veel aandacht voor toepassingen; wiskundige concepten worden opgebouwd vanuit concrete toepassingen in de sociale wetenschappen, economie en biologie.
- Een belangrijke accentverschuiving vindt plaats in de extra aandacht voor algebraïsche vaardigheden.
- De onderwerpen statistiek en kansrekening worden op een meer realistische en probleemgeoriënteerde manier benaderd (zie [2]).

Het nieuwe programma vwo wiskunde A kent de volgende opbouw:

vwo wiskunde A	slu	CE	SE
domein A. Vaardigheden	0	ja	ja
domein B. Algebra en Tellen	60	ja	mag
domein C. Verbanden	140	ja	mag
domein D. Verandering	120	ja	mag
domein E. Statistiek en kansrekening	160	nee	ja
domein F. Keuzeonderwerpen	40	nee	ja
totaal	520		

De belangrijkste verschillen met het huidige programma zijn:

- Statistiek en kansrekening kent een andere opzet en wordt niet meer in het centraal examen getoetst.
- Het getal e en de natuurlijke logaritme vormen onderdeel van het nieuwe programma.
- De onderwerpen rijen en periodieke functies worden in het centraal examen getoetst.

Een uitgebreide vergelijking tussen de vernieuwde programma's en de huidige examenprogramma's kan gevonden op « www.ctwo.nl ».

Eén van de speerpunten van cTWO betreft het stimuleren van wiskundige denkactiviteiten. Hieronder verstaat men:

- wiskundige denkactiviteiten;
- modelleren en algebraïseren;
- ordenen en structureren;
- analytisch denken en probleem oplossen;
- formules manipuleren;
- abstraheren;
- logisch redeneren en bewijzen.

Voor een uitgebreidere beschrijving van de wiskundige denkactiviteiten zie weer « www.ctwo.nl ».

Onder de vlag van cTWO is nieuw lesmateriaal geschreven. Dit nieuwe lesmateriaal kan worden gedownload van via de website van cTWO.

Specifiek voor vwo wiskunde A gaat het om de onderstaande modules:

- *Domein C*: Verbanden 1, Verbanden 2
- *Domein D*: Veranderingen 1, Veranderingen 2
- *Domein E*: Verschillen, Verdelingen, Discrete verdelingen, Normale verdeling, Onderzoek en Hypothese toetsen

Het College voor Examens (CvE) heeft syllabi gemaakt voor de vernieuwde examenprogramma's. Deze zijn te vinden op « www.cve.nl ». Op dezelfde site heeft het CvE ook voorbeeldexamens gepubliceerd. Er is een collectie voorbeeldopgaven gemaakt die een beeld moeten geven van de bedoelingen van cTWO met de vernieuwde programma's. In deze voorbeeldopgaven komen we ook enkele zogeheten 'korte onderzoekopgaven' tegen. Deze opgaven doen een beroep op (verschillende) wiskundige denkactiviteiten. Het centraal examen zal een als zodanig herkenbare korte onderzoekopgave bevatten.

Het programma bij ons op school

Lessen – Voor het reguliere programma vwo-A stonden bij ons op school in het 4e, 5e en 6e leerjaar 3 lessen van 45 minuten op de lessentabel. Voor het vernieuwde programma hebben wij de afgelopen drie jaren steeds met 3½ lesuur van 45 minuten gewerkt. **In tabel 1** staat hoe wij de lesstof hebben verdeeld over de drie leerjaren. In die tabel staat domein B 'Algebra en Tellen' niet expliciet vermeld. De algebra-paragraaf van de syllabus geeft aan dat er zowel domeinspecifieke als algemene vaardigheden aan bod moeten komen. In elk leerjaar probeerden wij zowel in de lessen als in de toetsen beide aspecten aan bod te laten komen. Een belangrijk aandachtspunt voor ons als pilotdocent was het selecteren van kernopgaven in het nieuwe lesmateriaal.

Mede door het opeenvolgend verschijnen van het nieuwe materiaal was niet altijd een duidelijke leerlijn zichtbaar in de verschillende domeinen van het programma. Door het selecteren van kernopgaven hebben wij getracht dit te ondervangen.

PTA – In ons PTA stonden drie schriftelijke toetsen.

	leerjaar 5	leerjaar 6
november		toets 2 (gewicht 2)
maart	toets 1 (gewicht 3)	toets 3 (gewicht 3)

De eerste toets ging over alle behandelde stof vanaf leerjaar 4. De tweede toets bestond uit twee delen: een deel over alle behandelde stof tot dan toe en een individuele computeropdracht met VUStat over domein E. De derde toets ging over alle eindexamenstof.

In de voorbereiding van de schoolexamens in maart in leerjaar 5 en leerjaar 6 hielden we een korte voorbereiding met speciale aandacht voor:

- Basisbegrippen en basisvaardigheden die onderdeel zouden moeten zijn van de parate kennis van de leerlingen.
- Het herkennen van standaardopgaven die met behulp van basisvaardigheden kunnen worden opgelost.
- Het bedenken van een stappenplan om niet-standaard opgaven op te lossen.
- Het aanbrengen van overzicht over de stof bij de leerlingen.

De voorbereiding op de schoolexamens is hiermee aanzienlijk intensiever geweest dan de voorbereiding die we zouden doen binnen het reguliere programma.

In ons PTA stonden naast de schriftelijke toetsen ook drie praktische opdrachten. Deze praktische opdrachten kwamen in grote lijnen overeen met praktische opdrachten zoals we die binnen het reguliere programma zouden geven. Onze schriftelijke schoolexamens, de computeropdracht met VUStat evenals de afgenomen repetities in leerjaar 5 kunnen worden gedownload van WisBase (www.wisbase.nl),

Het centrale examen

Overlap – Voor het reguliere examen konden 84 punten worden behaald en voor het nieuwe examen 81. In totaal was

	leerjaar 4	leerjaar 5	leerjaar 6
domein C	Verbanden 1	Verbanden 2, Periodieke functies (*)	
domein D		Veranderingen 1, Rijen (*)	Veranderingen 2
domein E	Verschillen	Verdelingen, Discrete verdelingen, Normale verdeling	Normale verdeling, Onderzoek, Hypothese toetsen

(*) aan de hand van eigen lesmateriaal

tabel 1 Verdeling lesstof

er – zoals afgesproken – ongeveer 60% overlap tussen het vernieuwde examen en het reguliere examen. **In tabel 2** wordt die overlap nader toegelicht.

De opgave *Behendigheid* viel op omdat die nadrukkelijk een beroep deed op algemene vaardigheden. Onze leerlingen waren gewend aan dit soort opgaven en de redeneringen die zij moesten geven. Zij liepen daardoor relatief weinig in de valkuil van getallenvoorbeelden.

Verschillen – In het reguliere examen vinden we gebruikelijke onderdelen uit het domein statistiek en kansrekening, bijvoorbeeld binomiale kansverdeling (*Hooikoorts*, onderdeel 5), de normale verdeling (*Selectief cijferen*) en het toetsen van hypothesen (*Waardepunten*, onderdeel 11).

Daar tegenover vinden we in het vernieuwde examen een opgave waarin periodieke functies aan de orde komen (*Aalscholvers*, onderdeel 17 en 18), een onderdeel waarin leerlingen een redenering moeten geven aan de hand van een formule (*Hooikoorts*, onderdeel 6) en een korte onderzoekopgave (*Topjaar voor appel en peer*). Wij typeren deze opgaven als volgt:

- *Aalscholvers*, onderdeel 17 is een standaardopgave die de leerlingen met hun basisvaardigheden moeten kunnen maken;
- *Aalscholvers*, onderdeel 18 is een voorbeeld van een niet-standaard opgave. Leerlingen worden geacht in te zien dat de evenwichtsstand van een periodieke functie een stijgende lijn kan zijn.
- *Hooikoorts*, onderdeel 6 is een goed voorbeeld van een opgave waar de leerlingen (kwalitatief) moeten redeneren met een formule.

- De opgave *Topjaar voor appel en peer* is een goed voorbeeld van een korte onderzoekopgave waarbij verschillende wiskunde denkactiviteiten nodig zijn om hem op te lossen.

Door de goede mix van herkenbare, geoefende opgaven en opgaven waarbij op een redelijk niveau wiskundige denkactiviteiten ingezet moesten worden, ontstond een zeer maakbaar examen voor onze leerlingen. Uit enquêtes van de SLO was tijdens het examenjaar gebleken dat onze leerlingen kritisch waren ten aanzien van delen van het nieuwe lesmateriaal, maar dat ze vol vertrouwen naar het examen gingen. Mede door een N-term van 1,4 waren de resultaten van onze leerlingen verrassend hoog (gemiddelde 7,7).

De N-term van het reguliere examen was met 0,6 aanzienlijk lager dan de N-term van het vernieuwde examen. Vermoedelijk hebben de pilotleerlingen beter gescoord op de overlappende onderdelen van beide examens.

Conclusie en discussie

In het afgenomen vernieuwde examen wiskunde A op het vwo komt de beoogde vernieuwing voorzichtig maar duidelijk naar voren.

Wij denken dat voor een succesvolle landelijke invoering het aanbeveling verdient in de nabije toekomst nadere aandacht te besteden aan de onderstaande drie aandachtspunten:

- de afbakening van het programma;
- het nieuwe lesmateriaal;
- de positie van statistiek en kansrekening.

De afbakening van het programma

Het nieuwe programma kenmerkt zich eerder door de breedte dan door de diepte. Zo maken bijvoorbeeld wel alle differentieerregels (waaronder product-, quotiënt- en kettingregel) deel uit van het programma, maar is het hoogstwaarschijnlijk niet de bedoeling dat

	aantal onderdelen	aantal te behalen punten
Schreefas	4	14
Hoofkoots	2	12 resp. 10
Waardepunten	2	8
Behoudigheid	5	15
totale overlap	13	49 resp. 47

tabel 2 Overlap regulier en nieuw examen

leerlingen deze ook in allerlei ingewikkelde combinaties ervan kunnen toepassen. Het woordje *hoogstwaarschijnlijk* geeft aan dat er behoefte bij docenten zal bestaan aan een nadere concretisering van wat leerlingen nu wel geacht worden te kennen/kunnen en wat niet. Wij beseffen dat niet alles wat dit betreft ondervangen kan worden door de eindtermen, maar wij denken dat het goed is wanneer cTWO en CvE zich in dit licht nog eens buigen over de precieze tekst van de eindtermen.

Het nieuwe lesmateriaal

Het nieuwe lesmateriaal voor statistiek en kansrekening bevat zinvolle contexten en mooie voorbeelden van statistiek op grote gegevensbestanden. Het is echter niet eenvoudig in dit materiaal een duidelijke leerlijn te herkennen. Het verdient daarom aanbeveling om dit materiaal te voorzien van een uitgebreide handleiding voor docenten. Daarnaast zouden wij graag zien dat het materiaal nog een revisie ondergaat met als doel de leerlijn duidelijker te laten doorklinken in het materiaal. Het verdient aanbeveling het lesmateriaal voor statistiek en kansrekening aan te vullen op het gebied van datamanipulatie, zoals het gebruik van filters, het hercoderen van variabelen en het aanmaken van nieuwe variabelen. Dit belangrijke aspect van het werken met grote gegevensbestanden is in het experimentele lesmateriaal onderbelicht gebleven.

Wanneer we kijken naar het nieuwe lesmateriaal voor de domeinen Verbanden en Veranderingen, dan zijn wij van mening dat dit veel opgaven bevat die zich lenen voor wiskundige denkactiviteiten in de les. Gezien de nadruk die cTWO legt op wiskundige denkactiviteiten, is het echter opvallend dat er geen nieuw lesmateriaal is ontwikkeld dat zich specifiek richt op korte onderzoekopgaven. Het als docent zelf bedenken van dit soort opgaven is een tijdrovende zaak waardoor het risico bestaat

dat dit erbij inschiet. Daarom verdient het aanbeveling dat vanuit cTWO op het gebied van korte onderzoekopgaven alsnog een handreiking wordt gedaan aan docenten in de vorm van nieuw lesmateriaal.

De positie van statistiek en kansrekening

Wij zijn van mening dat er een sterke wissel wordt getrokken op de beschikbaarheid van computers en de affiniteit van docenten met toepassingen van statistiek op grote databestanden. Gezien de ervaringen van de pilotscholen mag niet verwacht worden dat op alle scholen voldoende ICT-faciliteiten beschikbaar zijn voor de wiskundelessen. Tevens zal er bij de scholen behoefte bestaan te beschikken over voldoende verschillende grote databestanden met bijbehorende opdrachten voor zowel lessen als toetsen.

Op grond van bovenstaande overwegingen en omdat statistiek en kansrekening niet in het centraal examen wordt getoetst, denken wij dat het er een reëel gevaar bestaat dat statistiek en kansrekening de sluitpost van het vernieuwde programma wordt. Daarom verdient het aanbeveling dat cTWO bij de politiek aandringt op een heroverweging van de keuze om statistiek en kansrekening niet in het centraal examen te toetsen.

Noten

- [1] P. Drijvers (2009): *Op weg naar 2014. Stand van zaken rond de nieuwe examenprogramma's havo/vwo*. In: *Euclides* 84(7); pp. 261-264. Zie « www.fisme.science.uu.nl/ctwo/publicaties » (onder Artikel in Euclides) om dit artikel te downloaden.
- [2] A. van Streun, C. van de Giessen (2007): *Een vernieuwd statistiekprogramma*. Deel 1 – *Statistiek leren met data-analyse*. In: *Euclides* 82(5); pp. 176-179. Deel 2 – *Data-analyse, een mogelijke opzet*. In: *Euclides* 82(6); pp. 217-221. Zie « www.fisme.science.uu.nl/ctwo/WiskundeA » (onder Examenprogramma's) om deze artikelen te downloaden.

Over de auteurs

Erik van Barneveld (e-mailadres: E.vanBarneveld@gsgleovroman.nl) en Peter Kop (e-mailadres: p.kop@gsgleovroman.nl) zijn als docent werkzaam bij de GSG Leo Vroman in Gouda en hadden als pilotdocent allebei een examengroep voor de vernieuwde wiskunde A op het vwo. Peter Kop is lid van de cTWO commissie maar schrijft dit artikel op persoonlijke titel.

VWO – wiskunde B

EEN ANALYSE VAN HET CE

[Mariken Barents]

Wat er aan vooraf ging – Vorig jaar heb ik u mijn analyse gegeven van het B-examen vwo van 2011. Er is voor mij ondertussen veel veranderd: een andere school, een andere methode, een ander PTA. Dit heeft geleid tot veel leerpunten.

De voorbereiding

Naast de gebruikelijke aandacht voor de examenstof, en dit jaar vooral ook het aanleren van nieuwe wiskundige vaardigheden, heb ik twee nieuwe aspecten ingevoerd.

1/ T.R.U.C. – T voor Tekenen, R voor Route bepalen (welke aanpak kies je), U voor Uitwerken/uitrekenen en de C voor Controle.

De reactie ‘Er is al een tekening in de opgave’ is vele docenten bekend. Het zelf tekenen zorgt voor verdieping in de situatie. Helaas waren er veel tekeningen die direct weergaven waar het om ging, zodat juist de T (waaraan ik héél veel aandacht besteed heb) niet relevant leek.

Dit jaar heb ik ook veel aandacht besteed – vooral bij Bewijzen is dat erg nuttig – aan de verschillende routes die je kan bewandelen om van de vraagstelling naar de oplossing te komen. Hierbij maak ik graag een tekeningetje (zie *figuur 1*).

2/ Evaluatie van het SE aan de hand van vaardigheden

Na jaren gewerkt te hebben met een ‘simpel’ evaluatieformulier ontstond de behoefte om een evaluatieformulier op vaardigheden te ontwikkelen. Hiermee slaan we twee vliegen in één klap: leerlingen worden bewust van wat er van ze verwacht wordt, en ze gaan inzien op welke vaardigheden ze tekort schieten. Vervolgens kunnen ze daarop focussen bij de voorbereiding op een volgend examen. Dit wil ik volgend jaar in klas 4 introduceren.

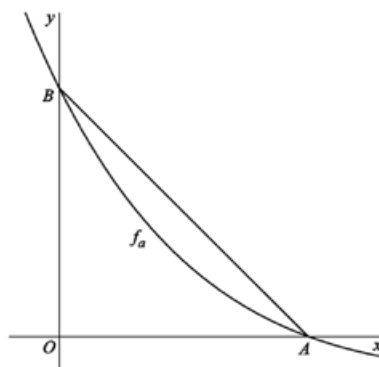
Op deze school hebben we een examentraining wiskunde B aangeboden. De vrijdag voor de meivakantie een proefexamen, met een serieuze examenbespreking. Na de meivakantie hebben we op vrijdag een dag van 10:00 tot 16:00 uur georganiseerd waarop minstens één wiskundeleraar aanwezig was. De opkomst was goed: het wordt zeer gewaardeerd. Ook deze keer ontbrak een flesje water en een appel niet! We zorgen graag goed voor examenleerlingen!

Het examen

Bij het analyseren van het examen heb ik naast het examen zelf, gebruik gemaakt van de scores van WOLF die mij toegestuurd zijn. De scores van 15047 leerlingen zijn hierbij betrokken. Hiervan zijn 22 leerlingen uit mijn groep.

Het gemiddelde aantal punten van deze leerlingen is 43,7 punten; mijn groep heeft evenzo gescoord. Mijn doel is om beter te scoren dan gemiddeld en het liefst met een aanzienlijke marge, maar is dat reëel te wensen in zo’n schooljaar. Gezien hun beginniveau in klas 6 denk ik dat ik wel wat bereikt heb met de groep.

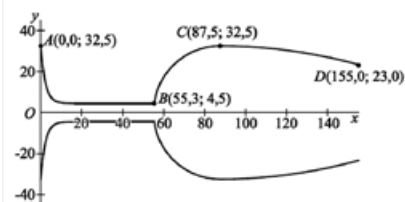
Onafhankelijk van a



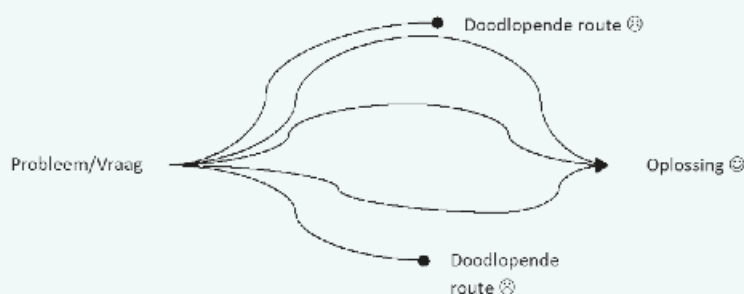
Een goede opgave om het examen mee te beginnen. Een combinatie van een

lineaire en een exponentiële functie, met een constante a erin verwerkt. Dat alles bij elkaar kan voor problemen zorgen, maar dit wordt weggelaten door de ‘Toon aan’ opgave. Het inzicht dat de afgeleide van de primitieve functie genomen mag worden, moet bekend zijn en dan is het makkelijk punten scoren. Deze vraag wordt gevolgd door een interessante vraag over een verhouding tussen oppervlakten. Hierbij wordt de gegeven primitieve functie gebruikt, dus een begin is altijd te maken. Ook al zijn beide soort opgaven meerdere keren naar voren gekomen in mijn groep, ze hebben lager gescoord dan gemiddeld: 5,8 versus 6,1.

Het standaard proefglas

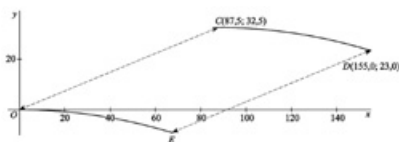


En daar was direct de contextvolle opgave met meerdere soorten formules. Bij de eerste blik was ik blij verrast: wat een leuk onderwerp! Deze blijde stemming werd al vrij snel omgezet in wat teleurstelling. Het berekenen van de inhoud..., wentelen om

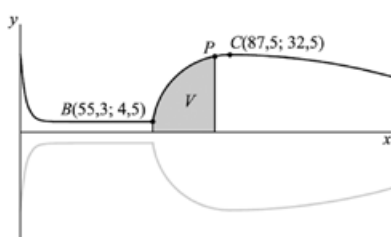


figuur 1

de x -as, met een exponentiële functie. De grenzen zijn gegeven, in het plaatje staat alles wat je nodig hebt; het lastige is om dit ooit goed in je rekenmachine te krijgen. Dus wat wordt hier getoetst? In mijn ogen vooral het juiste aantal haakjes op de juiste plekken invoeren in de rekenmachine.



Van een exponentiële functie gaan we over naar een kwadratische formule. Gegeven en al. Weer een plaatje met kommagetallen. Met het gebruik van alleen de gegevens zijn al wat punten te verdienen. Een duidelijke plek om transformaties naar voren te laten komen. Met op de juiste plek de gegevens invullen is minstens de helft van de punten te verdienen.

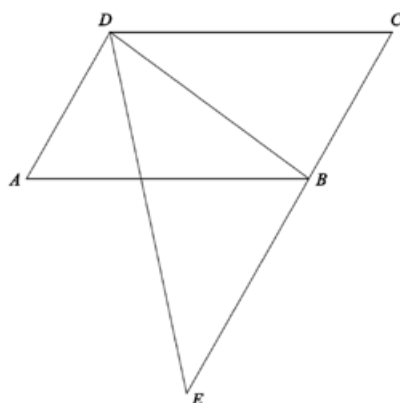


Het proefglas wordt afgesloten door een machtsformule. Weer een integreropgave, weer wentelen om de x -as. Wel even de primitieve laten zien, maar het mag weer met de rekenmachine uitgerekend worden.

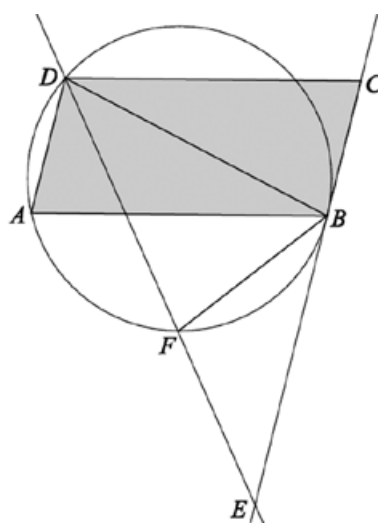
Zelf ben ik niet zo dol op kommagetallen; ik was blij met de meer algebraïsche verwachtingen. Context is leuk, maar de uiteindelijk gevraagde vaardigheden zijn niet spannend. Weinig ruimte voor puzzelen en onderzoeksvaardigheden, die juist contextrijke opgaven zouden mogen aanspreken.

Mijn groep is heel goed met de rekenmachine, dus heeft de groep gemiddeld 8,9 punten van de 15 punten binnengehaald, tegenover een groepsgemiddelde van 8,7.

Vanuit een parallellogram



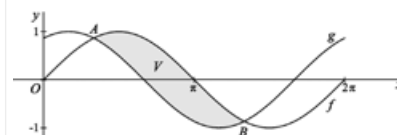
Dit jaar keek ik extra uit naar de bewijsopgaven. Misschien een herkenbaar gevoel van een vertrouwen dat het behandelen van dit onderwerp steeds beter gaat. Deze opgave bestaat uit twee deelopgaven. De eerste volledig in de driehoeken en parallellogrammen. Bij dit soort opgaven vinden leerlingen vaak het onduidelijk wat wel en wat niet als bekend verondersteld mag worden. Maar met wat woorden erbij zoals Z -hoeken, komen ze al ver. Het leuke hiervan is dat er veel Z - en F -hoeken te vinden zijn, en na het kiezen van de juiste is de oplossing snel gevonden. En het gebruikelijke 'gebruik alles wat gegeven is in de tekst' zat hem in de duidelijk aanwezige 'bissectrice'.



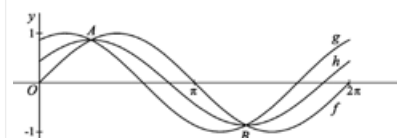
De tweede deelopgave bevat een cirkel. Dat stemt me vrolijk. Een leuk bewijsvraagstuk. De lijn raakt; dus twee stellingen om uit te kiezen en eentje valt af.

Een tegenvallende 3,2 punten gemiddeld van mijn groep tegenover een tevens teleurstellende 3,4 punten van de 7 die er te behalen zijn. Het opschrijven van bewijzen is niet zo triviaal als wij zouden willen dat leerlingen dat vinden/kunnen.

Tussen twee sinus-grafieken



De basisformule van de sinus en een translatie ervan. Het lijken zeer simpele formules van de goniometrie. De eerste opdracht is het berekenen van een oppervlakte. Deze is blijkbaar heel simpel, maar doordat er boven en onder de x -as een deel van het oppervlakte is, zou je kunnen denken aan opsplitsen. Symmetrie kan gebruikt worden. Ook hier worden de grenzen gegeven, helaas. Dan zijn vier punten makkelijk te verdienen.

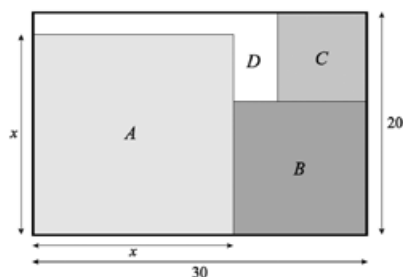


De tweede deelvraag betreft een herleidopdracht. Opschrijven van de som van twee formules naar één formule. In dit geval is het snel duidelijk welke omschrijfformules gebruikt moeten worden. Daarnaast kan het zelfs zonder omschrijven, als de coördinaten van punt A goed onderbouwd wordt.

Mijn groep scoort weer lager dan gemiddeld: 4,5 versus 4,7 punten gemiddeld over alle leerlingen, maar niet significant volgens de analyse van WOLF.

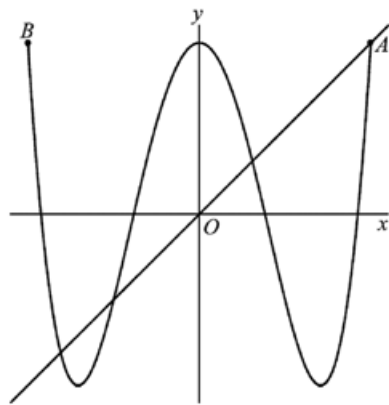
Drie vierkanten in een rechthoek

Dit soort opgaven zijn mijn favoriet. Ook al wordt er veel weggegeven door de twee plaatjes, waarbij de tweede voor sommige leerlingen zelfs een nadeel is geweest. Van mij had de tweede figuur er niet bij hoeven staan. Er wordt op deze manier veel weggegeven: een onderzoeksstap minder.



Het idee is een formule opstellen voor ieder vierkant, zodat duidelijk wordt wat de oppervlakteformule wordt van het overgebleven vlakdeel. Vervolgens moet deze gemaximaliseerd worden. De machtsformule die eruit volgt, moet gedifferentieerd worden en gelijk gesteld worden aan 0. Klassieke opgave dus. Op deze opgave scoort mijn groep wel beter: 5,8 punten versus de 5,4 voor de grote groep. Weer toeval? Ik vind de opgave leuk, de leerlingen scoren relatief goed.

Een w

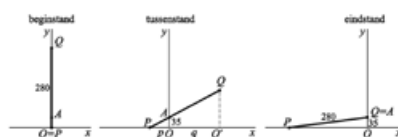


Een Lissajous-figuur zit er trouw in. Heel prettig en leuk dat er weer een letter in te zien is. De vragen lijken niet moeilijker of meer bijzonder dan gebruikelijk. Toch lijkt het voor de gemiddelde leerling een lastige opgave. Alle gegevens voor het punt B worden gratis weggegeven. Voor leerlingen een lastiger opgave: twee basisgoniometrische formules aan elkaar gelijk stellen; maar er hoeft niets omgeschreven te worden. Vervolgens de snelheid. Lezen is zo belangrijk. Hoeveel leerlingen zijn er met de wortel aan de slag gegaan. Uiteindelijk levert dat natuurlijk in dit geval dezelfde

absolute waarde op, mits alles goed uitgewerkt. Maar je wil toch graag dat je leerlingen de opgave goed lezen en slechts antwoord geven op de vraag. Differentiëren met een 'kleine' kettingregel, en invullen van het tijdstip dat P de y -as passeert. Het vinden van $t = 7,5$ leidt nogal tot discussie heb ik gemerkt. Of beter: de mate waarin de leerling goed moet aangeven waarom t gelijk is aan 7,5. Het lijkt hier vanzelfsprekend, zo op de helft van een symmetrische figuur

Een dergelijke opgave hebben mijn leerlingen meerdere keren gehad. Juist doordat dit onderwerp zowel in het tweede als in het derde SE tot de stof behoorde. Ik had verwacht dat op dit onderdeel mijn leerlingen goed zouden scoren. Een schamele 4,9 punten versus 5,0 voor de grote groep.

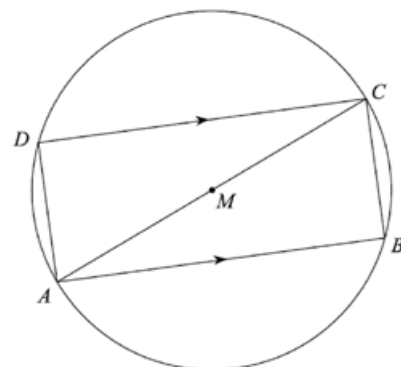
Verschoven platen



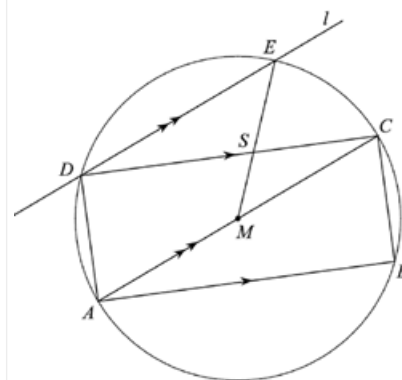
Op het eerste gezicht een uitnodigend onderwerp, met veel tekst. Uiteindelijk is er weer veel gegeven en moet een formule afgeleid worden uit de gegevens. Wat altijd mooi is om te zien is dat de leerlingen een veelbelovend begin maken, vervolgens vast lopen en gaan goochelen om op de juiste formule te komen. De 'Toon aan' opgave van de oorspronkelijke formule wordt gevolgd door de een zelfde opgave voor de gegeven afgeleide van de formule. Dan ben je als docent geneigd te denken dat dit punten zijn om te pakken. En dan volgt een opgave waarbij gevraagd wordt het maximum exact te berekenen. Afgeleide gratis gekregen, gelijk stellen aan 0 en netjes oplossen. Helaas is in de resultaten niet terug te zien dat de leerlingen dit ook zo makkelijk oppakken.

Ook hier scoort mijn groep lager dan de gemiddelde lijn van 7,4 punten, namelijk gemiddeld 7 punten van de 14 punten in totaal.

Evenwijdige lijnen en een rechthoek



Het examen wordt afgesloten door een bewijsopgave. Op het oog is de eerste deelvraag geen moeilijke. Een middellijn, dus Thales. De kunst blijft natuurlijk wel om een netjes en volledig uitgeschreven bewijs te geven.



De allerlaatste opgave van het examen was wat minder evident. Maar zodra er iets in voorkomt met de ene hoek is een aantal keer groter dan een andere hoek, mogen we aan de stelling van de middelpuntshoek denken. Alleen is dat nog niet zo triviaal voor vwo-leerlingen.

Op deze opgave scoort mijn groep aanzienlijk beter met 3,6 punten dan de gemiddelde score van 3,1 punten van de 8 punten die er te scoren zijn.

Vorig jaar was het ook het geval dat mijn groep de laatste opgave beter had gemaakt dan de hele groep. Ook in mijn groep heb ik erop gehamerd om eerst het examen door te bladeren en de opgaven te maken waar je vertrouwen in hebt dat je ze kan maken.

Relatief objectieve analyse

Een statistische blik op het examen levert enkele plaatjes op. Hierbij moet opgemerkt worden dat ik zelf de verdeling heb gemaakt in de verschillende onderdelen.

Er wordt vanuit drie invalshoeken naar de puntenverdeling gekeken. Het eerste cirkeldiagram (*zie diagram 1*) is ontstaan door de punten te verdelen over de onderwerpen Meetkunde, Machtsfuncties, Exponentiële (en logaritmische) functies en Goniometrie.

Ook vond ik het dit jaar de moeite waard om ook de meetkunde onder te verdelen, al is dat slechts in twee aandachtsgebieden: driehoeken en cirkels (*zie diagram 2*). Een andere interessante kijk op de verdeling van de punten is naar vaardigheden op het gebied van 'Functies en formules' (*zie diagram 3*). Hierbij is de verdeling: herleiden, vergelijkingen oplossen, differentiëren, integreren en formule of functie opstellen c.q. het bewust zijn van een domein. Graag had ik ook onderzoeksvaardigheden benoemd, maar dat is toch een aardig abstract begrip. Alles wat niet onder de andere vier vaardigheden (herleiden, vergelijking oplossen, differentiëren of integreren) valt, heb ik onder de noemer 'Formule ...' gevat. De oplettende lezer ziet dat de laatste twee diagrammen samen het hele examen beslaan.

Persoonlijk analyse

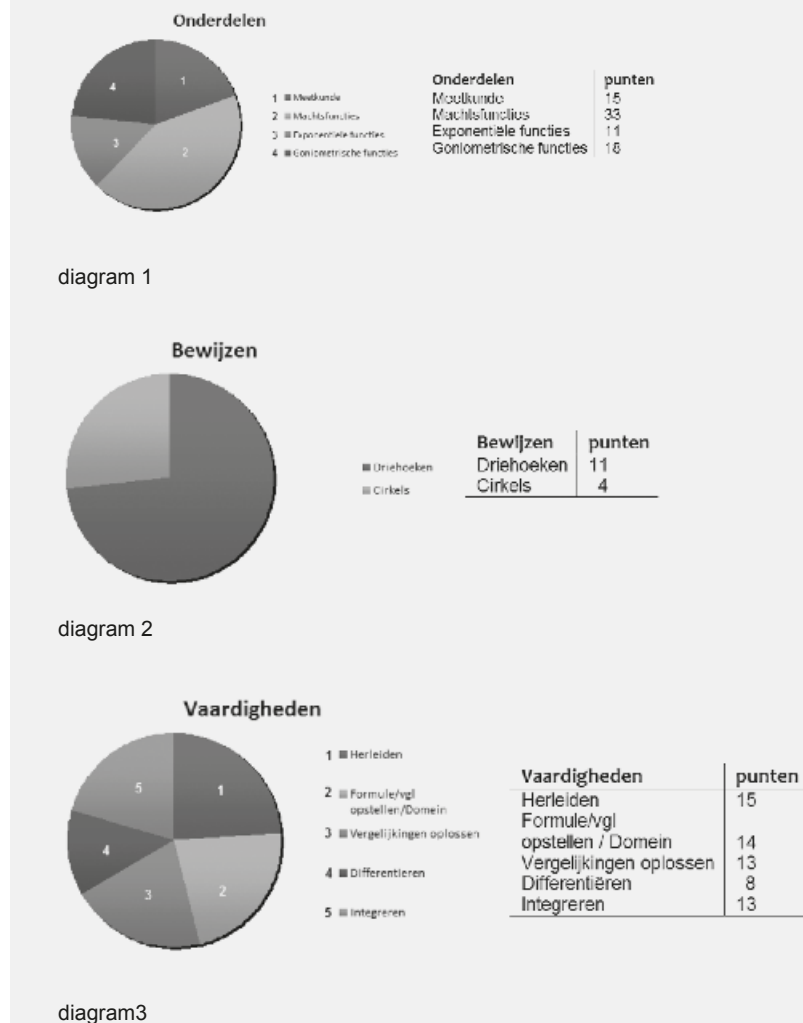
Opvallend was het aantal verschillende opgaven, zeven in totaal deze keer. Waarbij drie opgaven echt goed gelezen moest worden. Het rendement van de investering was vervolgens laag omdat alles gegeven was wat nodig was om de vraag te beantwoorden zonder het lezen van de context. Vandaar dat de norm misschien naar 1,5 is gegaan. Ik vond een norm 1,0 ook prima. Mijn groep zou bij een norm van 1,0 op 6,04 gemiddeld uitkomen. Precies wat ik ook vind passen bij de groep. Als ik de individuele scores bekijk, zouden de meesten ook komen op een cijfer wat past bij het niveau.

Bij het analyseren van de resultaten van mijn groep vallen weer twee dingen op:

- Drie vierkanten in een rechthoek wordt goed gemaakt; mijn favoriete soort opgave.
- De laatste (bewijs)opgave: volgens het 'bepaal je eigen volgorde'-principe.

Toeval?

Daarnaast is bij mij de volgende vraag gaan leven: willen we dat de leerlingen weten hoe ze het aan moeten pakken, of hoe ze het op moeten schrijven? Natuurlijk willen



we allebei. Maar bij een opgave waarvoor 8 punten te halen zijn – en in de opgave is duidelijk terug te vinden dat de leerling de juiste aanpak heeft, maar hij heeft het niet correct genoeg opgeschreven – verdient de leerling 6 punten.

Conclusies

De conclusies die uit de analyse te halen vallen, zijn te verdelen naar conclusies over dit examen, de voorbereiding en volgend jaar.

Het examen

- Het examen bevat weer veel machtsfuncties.
- In het examen komt weer een uitdrukking voor die lastig in de GR te zetten is.
- Bij bewijzen waren vooral de stellingen over driehoeken nodig.

De voorbereiding

- De voorbereiding heeft zich gericht op het aanleren van nieuwe stof. Dit is terug te zien in de resultaten van de leerlingen. Goniometrie wordt relatief

slechter gemaakt, en ook de opgaven met exponentiële functies.

- De tip (maak de opgaven die je 'makkelijk' vindt, beperk je niet tot de volgorde van de opgaven in het examen) lijkt ook dit jaar vruchten te hebben afgeworpen.

Volgend jaar

Volgend jaar ben ik werkzaam op een andere school, en zal ik de ervaringen van de laatste twee jaren inzetten bij de voorbereiding op het dan volgende examen. Op deze school wordt schoolbreed examentraining georganiseerd; in het PTA zijn voor leerjaren 4, 5 en 6 schoolexamens opgenomen. Het maakt me nieuwsgierig naar de uitvoering en uitwerking ervan.

Over de auteur

Mariken Barents is docente wiskunde, afgelopen jaar aan het R.S.G. Brokdele te Breukelen. Vanaf 1 augustus 2012 geeft ze les aan het Goois Lyceum te Bussum. E-mailadres: mbarents@gl.gsf.nl

Goedgekeurd door CvE voor
het Centraal Eindexamen

TI-*nspire* TECHNOLOGIE

Kom naar de TI-Nspire dag op het APS op 3 oktober a.s.

Sinds 2007, de introductie van Nspire is er veel veranderd in het digitale onderwijs, en TI-Nspire is meegegaan in de ontwikkelingen. Voor gebruikers een welkome up-date van de mogelijkheden, zoals softwarenetwerk voor school en zelfs draadloos netwerk in de klas, en TI-Nspire online via internet. Voor geïnteresseerde niet-gebruikers een oriëntatie op de mogelijkheden, met voorbeelden uit de praktijk. Ook kunt u zelf aan de slag met lesmateriaal van van collega's, dat ook uitgewisseld wordt.

Voor meer informatie mail naar:
m-dehiep@ti.com.

**Kom 3 oktober a.s.
naar de TI-Nspire dag
op het APS!**

**NU MET
KLEURENSCHERM,
EIGEN PLAATJES
DOWNLOADEN
EN OPLAADBARE
BATTERIJ**

**Noteer in uw agenda:
3 Oktober 2012
Infodag TI-Nspire
Meer nieuws volgt**

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.



VWO B – eerste tijdvak

EENZIJDIGE MEETKUNDE

[Ton Lecluse]

A^o 2012

Ik was niet helemaal gelukkig met het eindexamen dit jaar. De meetkunde vond ik toch wel erg eenzijdig.

Ik houd niet van een opgave waarin gegevens staan die niet ter zake doen. Zeker is dit zo bij bewijsmeetkunde, waar juist de schoonheid van een opgave rust op het geven van een minimaal model. Het slim tekenen van een hulplijntje is dan soms onvermijdbaar, maar vaak maakt een overbodig gegeven punt of lijnstuk een opgave vele malen moeilijker. Zo ook in dit examen.

Ik zal de opgaven 6 (*zie figuur 20* op pag. 16), 7 en 17 dan ook zo herformuleren dat slechts de noodzakelijke gegevens aanwezig zijn.

Opgave 6 – herzien

De lijn door B , evenwijdig met AC in driehoek ABC snijdt de deellijn van hoek in D . *Zie figuur 1.*

(Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.)

Bewijs dat driehoek BCD gelijkbenig is.

CV:

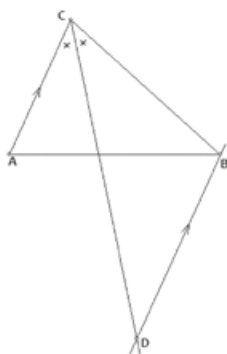
1p $\angle ACD = \angle CDB$; *Z-hoeken* ($AC \parallel BD$; gegeven)

1p $\angle ACD = \angle BCD$; *bissectrice* (gegeven)

1p Dus $\angle BCD = \angle CDB$, dus is driehoek BCD gelijkbenig

Deze redenering is een deel van het bewijs van de bissectricestelling (uit de gelijke hoeken volgt een gelijkvormigheid waaruit de bissectricestelling meteen volgt).

Leerlingen scoren voor deze opgave in de klas 99%, op dit eindexamen niet. Daar zijn twee overbodige lijnen, een overbodig snijpunt én een overbodige evenwijdigheid.



figuur 1

Geocadabra 'scoort' bij bovenstaande tekening *complexiteitsgetal* 9; dit is het aantal bijzonderheden dat in deze tekening is verborgen.

De examenopgave zelf scoort complexiteit 23; er zijn meer gelijke hoeken, gelijke lijnstukken, congruente en gelijkvormige driehoeken.

Het grappige is dat bij zo'n opgave die gekenmerkt wordt door redundantie, ook in het CV een aantal verschillende bewijzen wordt gegeven. Dat is echter *niet* het geval bij bovenstaande, strakke opgave.

Opgave 7 – herzien

Op een cirkel liggen de punten A en B . Op de raaklijn aan de gegeven cirkel in A ligt punt C , zó dat $AB = AC$. D is het snijpunt van BC met de gegeven cirkel; *zie figuur 2.* (Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.)

Bewijs dat $\angle ADB = 2 \cdot \angle ACB$.

CV:

1p $\angle CAD = \angle ABD$; *koorde en raaklijn*

1p $\angle ACD = \angle ABD$; *gelijkbenige driehoek* ($AB = AC$)

1p $\angle BDA = \angle CAD + \angle ACD = 2 \cdot \angle ACD$; *buitenhoek driehoek*

Complexiteit = 10

De betreffende examenopgave zelf heeft complexiteit = 31, mede veroorzaakt door een flink aantal overbodige gelijke hoeken – *Z-hoeken*, (omtreks)hoeken – en een overbodige gelijkvormigheid.

Opgave 17 – herzien

AB is een koord van de cirkel met middelpunt M . Een halve lijn vanuit M , evenwijdig met AB , snijdt de cirkel in C . S is het snijpunt van MB en AC ; *zie figuur 3.* (Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.)

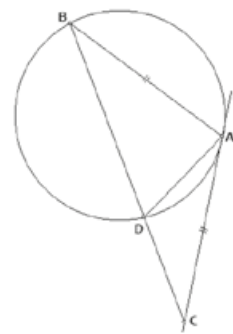
Bewijs dat $\angle CSB = 3 \cdot \angle CAB$.

CV:

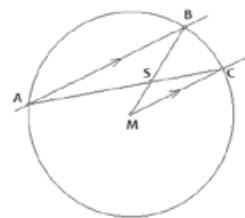
1p $\angle CAB = \angle ACM = x$; *Z-hoeken*; $AB \parallel MC$ (gegeven)

1p $\angle CMB = 2 \cdot \angle CAB = 2x$; *omtrekshoek*

1p $\angle CSB = \angle CMS + \angle MCS = 2x + x = 3x = 3 \cdot \angle CAB$; *buitenhoek driehoek*



figuur 2



figuur 3

Complexiteit = 11

De examenopgave heeft complexiteit = 98; geëxplodeerd! Wellicht herkent u dit bij uw leerlingen: een aantal zal verzuipen in het opsommen van wat zoal waar is. En dat kan goed: van die 98 eigenschappen kun je er zomaar 94 opschrijven zonder ook maar één stap te hebben gemaakt die tot het bewijs zelf leidt!

Mijn mening is dat de door mij gepresenteerde opgaven de examenkandidaten een eerlijker kans geven om de opgave tot een goed einde te brengen. De kandidaat kan niet verzanden in overvloedige extra eigenschappen van het gegeven model!

Opvallend is de grote overlap in deze drie opgaven. Wanneer we ook nog eens opgave 16 (*Evenwijdige lijnen en een rechthoek*) erbij betrekken (*zie figuur 8a* op pag. 28), komt in de bewijzen de *gelijkbenige driehoek* twee keer langs, evenals de *buitenhoek* van de driehoek, en *Z-hoeken* zelfs drie keer. De vraag is of dit wenselijk is.

Opvallend is ook dat twee items van het meetkunde-bewijsgereedschap ook een rol spelen in een modelgestuurde *analytische* opgave: bij opgave 13 (*Verschoven platen*) wordt in het CV het gelijkvormigheidsgeval

hh gebruikt en de stelling van Pythagoras. Wat daarbij ook opvalt is dat in die opgave 13 de verwijzingen naar de meetkunde-gereedschapskist tussen haakjes staan (*zie figuur 4*), dus aldaar niet verplicht zijn, maar bij de meetkunde-bewijsopgaven is het juist essentieel dat betreffende verwijzing erbij staat. Willekeur?

En dan het nakijken, een valkuil is hierbij het volgende

Het werk wordt bij veel leerlingen gekenmerkt door een (genummerde) opsomming van eigenschappen in de gegeven tekening. En wanneer er dan

13 maximumscore 4

- Driehoek POA is gelijkvormig met driehoek $P'Q'Q$ ($;$ hh) 1
- $\frac{PQ'}{PQ} = \frac{PO}{PA}$ en $PA = \sqrt{p^2 + 35^2}$ ($;$ *Pythagoras*) geeft $\frac{p+q}{280} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1225}}$ 2
- Hieruit volgt $p + q = \frac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}}$, dus $q = \frac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$ 1

figuur 4 Uit: Correctievoorschrift VWO B 2012 (Verschoven platen)

een regel bij zit die ook ergens in een van de CV-bewijzen voorkomt, moet je als examinerator/gecommitteerde niet zomaar de punten toekennen.

Dat een leerling een opsomming maakt, oké; dat daarbij overvloedige opmerkingen staan, oké.

Maar ik wil pas voor een regel een punt toekennen wanneer hiermee ook *echt* iets is

gedaan, dus wanneer betreffend kenmerk ook verderop in het (correcte) bewijs een rol speelt.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: alecluse@casema.nl

PERSBERICHT / DUBBEL GOUD!

**Tweemaal goud voor Nederland bij Internationale Wiskunde Olympiade
Nederland neemt de toppositie in binnen West-Europa**

Mar del Plata, Argentinië – Nederland heeft geschiedenis geschreven bij de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) in Argentinië door twee gouden medailles binnen te halen. Van de 42 keer dat Nederland heeft meegedaan, heeft het slechts twee keer eerder een gouden medaille gewonnen: één in 1983 en één in 1977. Het team, bestaande uit de zes beste middelbare scholieren van Nederland, won in Argentinië verder drie bronzen medailles en een eervolle vermelding. Nederland werd daarmee 22ste van de honderd deelnemende landen en liet alle andere West-Europese landen achter zich.

De IMO vond van 9 tot 15 juli plaats in Mar del Plata, Argentinië. Op elk van de twee wedstrijddagen kregen de leerlingen drie opgaven van hoog wiskundig niveau voor hun kiezen, waaraan ze vier en een half uur konden werken. Voor elke opgave waren zeven punten te behalen. Jeroen Huijben en Jetze Zoethout wisten beiden maar liefst vier van de zes opgaven foutloos op te lossen, een uitzonderlijke prestatie. Ze behaalden daarmee elk een gouden

medaille. De resultaten van de afzonderlijke leerlingen zijn als volgt:

- 28 punten – goud: *Jeroen Huijben* (16 jaar, Goirle, 5-vwo, Theresia Lyceum Tilburg)
- 28 punten – goud: *Jetze Zoethout* (17 jaar, Goutum, 6-vwo, Christelijk Gymnasium Beyers Naudé Leeuwarden)
- 17 punten – brons: *Jeroen Winkel* (15 jaar, Nijmegen, 4-vwo, Stedelijk Gymnasium Nijmegen)
- 15 punten – brons: *Matthijs Lip* (16 jaar, Hardinxveld-Giessendam, 5-vwo, Gymnasium Camphusianum Gorinchem)
- 14 punten – brons: *Guus Berkelmans* (18 jaar, Amstelveen, 6-vwo, Barlaeus Gymnasium Amsterdam)
- 13 punten – eervolle vermelding: *Michelle Sweering* (15 jaar, Krimpen aan den IJssel, 4-vwo, Erasmiaans Gymnasium Rotterdam)

In totaal ontvingen van de 548 deelnemers 138 een bronzen medaille, 88 een zilveren medaille en 51 een gouden medaille. Het officiële landenklassement werd aangevoerd door Zuid-Korea, China en de Verenigde Staten.

‘We zien een toenemende belangstelling voor de Wiskunde Olympiade, zowel vanuit leerlingen en scholen als vanuit sponsors,’ aldus Jelle Loois, die als waarnemer mee was namens het bedrijf ORTEC, partner van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. ‘De laatste jaren is het trainingsprogramma voor

de kandidaten behoorlijk geïntensiveerd en geprofessionaliseerd. De laatste week voor de wedstrijd was er nog een extra trainingsweek in Buenos Aires samen met het nationale team van Nieuw-Zeeland. Het is fantastisch dat deze inspanningen zo duidelijk hun vruchten afwerpen.’ Het Nederlandse team (*zie foto 1*) werd begeleid door Birgit van Dalen (Aloysius College Den Haag) en Quintijn Puite (Technische Universiteit Eindhoven). De Wiskunde Olympiade wordt ondersteund door de Technische Universiteit Eindhoven, Transtrend en ORTEC, gesponsord door het Ministerie van OCW, Texas Instruments en Compositio, en wordt georganiseerd met dank aan Cito, het Freudenthal Instituut, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars, en de tijdschriften *NWT Magazine* en *Pythagoras*.



foto 1 V.l.n.r. Michelle Sweering, Guus Berkelmans, Jetze Zoethout, Jeroen Huijben, Jeroen Winkel en Matthijs Lip op het strand in Mar del Plata met hun medailles

VWO – wiskunde B

PILOT EXAMEN

[Ilone Dekkers]

Inleiding

In 2015 gaat (naar verwachting) het nieuwe examenprogramma van start in klas 4. Dit geldt voor alle wiskundevarianten in de bovenbouw van havo en vwo. cTWO heeft van het ministerie de taak gekregen om met het nieuwe programma aan de slag te gaan met scholen. Onze wiskundesectie heeft besloten mee te doen met dit experiment, samen met nog 15 andere scholen. Wij hebben gekozen om mee te doen met wiskunde B op havo en vwo. In het schooljaar 2009/2010 is de pilot van start gegaan. Meer informatie over onze deelname en alle vernieuwingen is te vinden op de cTWO-website (www.ctwo.nl).

Veranderingen in het nieuwe vwo-B programma

De synthetische meetkunde (redeneren en bewijzen) heeft plaats gemaakt voor analytische meetkunde en vectormetkunde. Er zijn aanvullingen bij parametervoorstellingen, symmetrie-eigenschappen, transformaties, inverse functies en limietbegrip in combinatie met functieonderzoek. De grafische rekenmachine wordt ontmoedigd en leerlingen moeten meer denkactiviteiten toepassen bij het oplossen van opgaven.

De lessen

Er is door cTWO materiaal ontwikkeld dat in de les gebruikt wordt, ter vervanging van hoofdstukken uit de methodes. Leerlingen moesten – zeker in het begin – erg wennen aan dit materiaal. De opbouw en het aanleren van nieuwe stof staat toch wel op een andere manier beschreven, dan ze gewend zijn uit de boeken. De denkactiviteiten komen hierin namelijk veel meer naar voren: leerlingen moeten zelf (meer) stappen bedenken om tot de goede oplossing te komen van een vraagstuk. De vraag die elk jaar terug kwam bij de behandeling van de synthetische meetkunde zou je bijna gaan missen: ‘Wat heb je hieraan en wat kun je ermee?’. Leerlingen hebben nu een beeld bij wat ze aan het doen zijn. Deze meetkunde sluit meer aan bij natuurkunde en geeft veel meer toepassingen, herkenningen en inzichten binnen de alledaagse praktijk.

Vorbereiding op examenen

Een nadeel van meedoen aan een pilot is de beschikbare hoeveelheid aan oefenopgaven, of juist het ontbreken daarvan. Leerlingen hadden geen mogelijkheden om buiten het materiaal om te oefenen met extra opgaven (in de voorexamenklassen) ter voorbereiding op een proefwerk. In het examenjaar was de syllabus gereed, met oefenopgaven. Deze hadden echter zo’n hoog niveau, in vergelijking met het aangereikte lesmateriaal, dat het leerlingen afschrok. Er kwamen ook oefenexamenopgaven over de vernieuwingen en die waren perfect ter voorbereiding op het centraal examen. Een oefenexamen maakte het geheel compleet: de leerlingen waren er klaar voor!

Het examen

Opbouw – Een deel van het examen vertoonde overlap met het reguliere B-examen. Sommige vragen waren wat aangepast en de nieuwe stof werd natuurlijk getoetst. Hieronder volgt een opsomming van de opvallendste verschillen tussen beide examens wat betreft overlap in opgaven. En daarna een overzicht van de opgaven uit het nieuwe programma. Het pilotexamen is onder meer te vinden op de site van Cito (www.cito.nl).

Reflectie verschillen in overlap – Een examen begint (over het algemeen) met een makkelijke ‘binnenkomer’. In de eerste opgave (*zie figuur 1*) zat meteen een functie met een parameter waarop de

Onafhankelijk van a

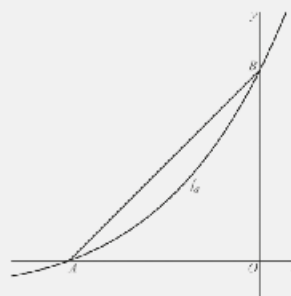
Voor elke waarde van a ($a > 0$) is een functie f_a gegeven door $f_a(x) = (1+ax) \cdot e^{ax}$. In figuur 1 zijn de grafieken van f_1 en f_2 weergegeven.

Voor elke waarde van a ($a > 0$) heeft de grafiek van f_a een punt P_a met een horizontale raaklijn.

- 1 Toon aan dat al deze punten P_a op één lijn liggen

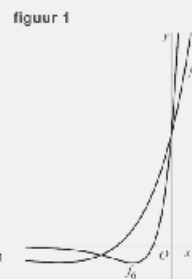
De grafiek van f_a snijdt de x -as in punt $A(-\frac{1}{a}, 0)$ en de y -as in punt $B(0, 1)$. Zie figuur 2.

figuur 2



De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

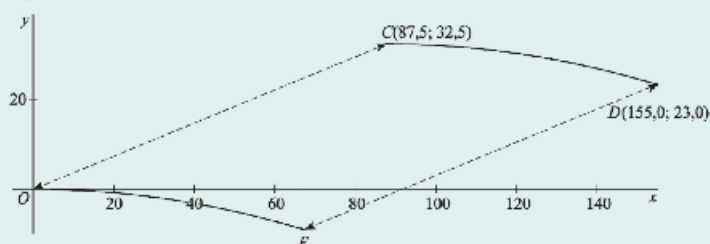
- 2 Toon aan dat de verhouding van de oppervlakten van deze twee delen onafhankelijk is van a .



figuur 1 Uit: VWO-B pilot 2012 (Onafhankelijk van a)

Om CD te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met C als top. Een formule van deze parabool kan worden gevonden door eerst kromme CD te verschuiven zo dat C terechtkomt op $O(0, 0)$. In figuur 3 zijn de kromme CD en de beeldkromme OE getekend en is ook de verschuiving weergegeven. Kromme OE is deel van een bergparabool met top O en heeft dus een formule van de vorm $y = a \cdot x^2$, met $a < 0$. Nu kan gebruik gemaakt worden van de translatie die kromme OE afbeeldt op kromme CD . In figuur 3 is ook deze translatie weergegeven.

figuur 3



- 4 Stel een formule op voor kromme CD .

figuur 2a Uit VWO-B regulier 2012 (Het standaard proefglas)

Om CD te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met C als top.

- 4 Stel een formule op voor kromme CD .

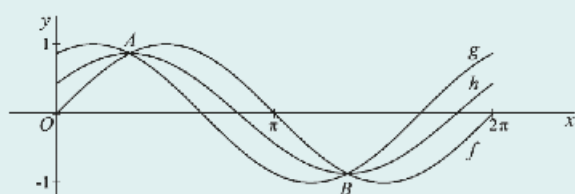
figuur 2b Uit VWO-B pilot 2012 (Het standaard proefglas)

Tussen twee sinusgrafieken

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$.

De functie h is gegeven door $h(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x))$. In figuur 2 zijn de grafieken van f , g en h getekend op het domein $[0, 2\pi]$.

figuur 2



- 9 Bereken exacte waarden van a en b zo dat $\frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x))$ te herleiden is tot $a \cdot \sin(x + b)$.

figuur 3 Uit: VWO-B pilot 2012 (Tussen twee sinusgrafieken)

product- en kettingregel moest worden toegepast. Veel leerlingen lopen daarbij meteen vast en dat is niet goed voor het zelfvertrouwen.

Daar komt dan opgave twee meteen bovenop. Zonder de tussenvraag waarbij de primitieve wordt gegeven die aangetoond moet worden (wat wel in het reguliere examen stond), moet de oppervlakte berekend worden. Leerlingen hadden zelf de primitieve moeten 'zien' en daarmee aan de slag gaan. Dat werd als een denkactiviteit gezien. Deze aanpak zat echter niet in de examenstof en is niet behandeld en geoefend. Slechts een enkeling is het gelukt om deze opgave te maken. Het aantal te behalen punten was echter in beide examens gelijk.

In de opgave *Het standaard proefglas* werd bij het tweede onderdeel gevraagd om de formule van een kromme op te stellen (**zie figuur 2a** voor de tekst in het reguliere examen). In het pilotexamen was de info summier (**zie figuur 2b**): de leerlingen moesten het doen met de eerste zin bij de inleidende tekst en zonder plaatje ter verduidelijking. In beide examens kon ook voor deze vraag hetzelfde aantal punten worden gehaald.

De vraag *Tussen twee sinusgrafieken* was identiek aan het reguliere examen. In de vernieuwingen zijn echter de formules van Simpson geschrapt, waardoor deze opgave niet eenvoudig te maken is. Onze leerlingen moesten zien dat functie h het gemiddelde is van de functies f en g (**zie figuur 3**). Functie f moet dus het tegengestelde zijn van functie g . Dit moest allereerst opgelost worden om b te bepalen. Er moest vervolgens met behulp van het maximum de amplitude, en dus a , berekend worden. Op zich beter dan 'dom' de formule van Simpson gebruiken; dit toetst wel op inzicht.

Bij de vraag *Drie vierkanten in een rechthoek* was het verschil met het reguliere examen alleen dat de variabele x niet aangegeven stond bij de zijde van vierkant A (**zie figuur 4**; zie ter vergelijking **figuur 21** op pag. 18). Een denkactiviteit waar de leerlingen zelf op moeten (kunnen) komen. Dit was geen moeilijke, dus velen zijn erop gekomen. Daar krijgen de leerlingen zelfs 1 punt voor, dus maar liefst 9 voor de hele vraag. Kwam je niet op dit idee, dan scheelt dat dus wel heel veel op een totaal van 83 punten.

De laatste opgave was dezelfde (volkomen identiek) als in het reguliere examen, namelijk *Verschoven platen*.

In totaal hebben de leerlingen in dit examen 15 vragen moeten maken, tegen 17 in het reguliere examen. Vergeleken met het regulier examen waren er dus in de pilot voor de leerlingen veel extra barrières opgeworpen:

- Onderdeel 1: direct lastig vanwege product- en kettingregel met een parameter;
- Onderdeel 2: geen hulp met de primitieve;
- Onderdeel 4: geen extra info of schets;
- Onderdeel 9: geen formule van Simpson;
- Onderdeel 10: geen variabele gegeven.

Blijkbaar vijf 'denkactiviteiten' die ieder op zichzelf geen probleem hoeven te geven, maar zo samen in een examen zijn ze wel erg veel van het goede. Denkactiviteiten zaten impliciet in het lesmateriaal. Vandaar dat wij als docenten veel opgaven klassikaal moesten behandelen in een onderwijs-leer-gesprek. Het lukt leerlingen echter niet om er zelf op te komen en dan loop je al snel vast bij het maken van opgaven, waardoor ze in de stress schieten en niks meer gemaakt krijgen.

Reflectie vernieuwingen – *Lijn en cirkel* was een mooie opgave over de analytische meetkunde; zie **figuur 5**. Vraag 6, over een raaklijn aan een cirkel, kon op verschillende manieren opgelost worden. Makkelijk waren deze vragen echter niet, zoals bleek uit de scores van de leerlingen. Velen vinden het bij zulk soort opgaven moeilijk om een (goed) begin te maken waarmee je verder kunt en tot de goede oplossing komt. Vergelijk het met synthetische meetkunde: velen lopen meteen vast en weten niet hoe ze met zulke opgaven overweg moeten. Dat vergt heel veel training en oefening!

Lus was een voorbeeld van een parametervoorstelling; zie **figuur 7**. Met behulp van vectormeetkunde kun je de bijbehorende vraag oplossen. Heel jammer dat het gebruik van vectoren tot een snelheidsvector beperkt kon blijven om tot de goede oplossing te komen. We hebben in de lessen erg veel met vectoren gewerkt en die veel meer toegepast dan dat in dit examen stond. Daar had een mooiere opgave voor in plaats kunnen staan!

Lijn door perforatie was een hele pittige opgave; zie **figuur 22** op pag. 18.

Leerlingen vinden perforaties over het algemeen al moeilijk en dan zit hier ook nog eens een parameter in waarmee (verder) gerekend moest worden. Dat is toch wel te veel van het goede in één vraag!

Evaluatie – De examenbespreking met alle docenten binnen de pilot was een verademing: iedereen deelde de mening van dit 'mislukte' examen. Er is veel gediscussieerd, onder 'toezicht' van mensen binnen Cito en het CvE. Zij hebben alle opmerkingen goed aangehoord en zijn daarmee aan de slag gegaan. Leerlingen kunnen niet de dupe worden van een moeilijk examen binnen een pilot! Die garantie was ons vooraf ook gegeven. Het CvE heeft daarop besloten om bij drie vragen het volledig aantal te behalen punten toe te kennen. Dit waren vraag 6, 9 en 12. De cijfers zijn nu achteraf dan ook in alle redelijkheid en naar tevredenheid vastgesteld.

Conclusies

Het examen was erg moeilijk! Erg veel leerlingen kwamen met een illusie armer uit het examen. Wiskunde zat ook nog eens vooraan in de examenperiode, dus bijna alle andere vakken moesten nog komen... Zou je de afzonderlijke opgaven nemen

en die in verschillende examens stoppen, dan is dat een betere oplossing: er stonden te veel parameteropgaven en te veel denkactiviteiten in één examen.

De opbouw van het examen was niet in evenwicht met de aangeleerde stof van afgelopen drie jaar.

De vernieuwing van met name de vectormeetkunde kwam nauwelijks herkenbaar – lees vernieuwend – naar voren. Het grootste gedeelte van de vernieuwde stof in de lessen ging daar over, dus dat had prominenter naar voren moeten komen! Wellicht moet er ook een betere balans komen in de stof die we de leerlingen aanbieden.

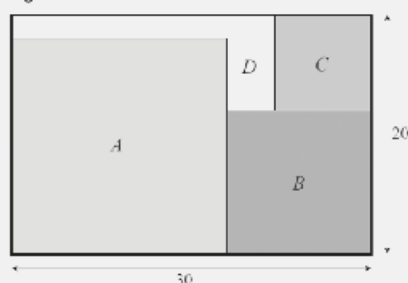
De vraag die meteen naar voren kwam was: 'Waarom moesten vragen die vergelijkbaar zijn met het reguliere examen dermate moeilijk(er) worden gemaakt in dit pilotexamen?' Het antwoord lijkt te zijn: Vanwege de denkactiviteiten die opgenomen zijn in de syllabus, maar waarom dan zo veel (zie de opsomming hierboven).

Toekomst

De meetkundestencils worden aangepast en/of veranderd naar aanleiding van onze opmerkingen en commentaren. Met dit vernieuwde materiaal gaan we dan weer

In een rechthoek van 20 bij 30 liggen drie vierkanten: *A* links onder, *B* rechts onder en *C* rechts boven. Van elk vierkant valt een van de hoekpunten samen met een van de hoekpunten van de rechthoek. *A* en *B* liggen tegen elkaar aan, en *B* en *C* ook. Het deel van de rechthoek dat niet bedekt is door de vierkanten noemen we *D*. Zie **figuur 1**.

figuur 1



Er is een lengte van de zijde van vierkant *A* waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is

10 Bereken exact deze lengte.

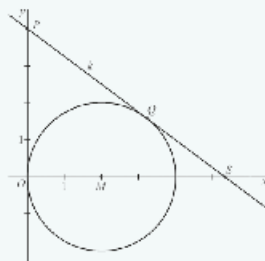
figuur 4 Uit: VWO-B pilot 2012 (Drie vierkanten in een rechthoek)

verder met de volgende lichter leerlingen. In september is een evaluatiebijeenkomst gepland van dit pilotexamen. Het doel van de bijeenkomst is in kaart te brengen in hoeverre het aangeboden lesmateriaal en de centrale examens qua inhoud, vorm en niveau passen bij het vernieuwde examenprogramma en de bijbehorende syllabus. Deze analyse wordt uitgevoerd met (een afvaardiging van) de pilotdocenten, vernieuwingscommissie/projectteam, syllabuscommissie, CvE-vaksectie, Cito-toetsdeskundigen en eventuele andere betrokkenen. Geëvalueerd wordt in hoeverre materiaal en examens aansluiten op de verwachtingen van betrokkenen en, indien nodig, welke wijzigingen uitgevoerd moeten worden om dit te verbeteren. De pilotexamens blijven komende jaren behouden tot de landelijke invoering een feit is. Ik ben benieuwd hoe de examens en het materiaal er komende jaren uit komen te zien!

Lijn en cirkel

Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2, 0)$ en straal 2. De niet verticale lijn l gaat door het punt $P(0, 4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x -as in het punt S . Zie figuur 1.

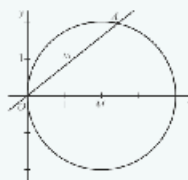
figuur 1



- 6 Bereken exact de x -coördinaat van S .

De lijn l met vergelijking $y = px$ met $p > 0$ snijdt de cirkel achtereis in O in het punt A , zodanig dat $OA = 3$. Zie figuur 2.

figuur 2



- 7 Bereken exact de waarde van p .

figuur 5 Uit: VWO-B pilot 2012 (Lijn en cirkel)

Lus

Een punt beweegt in het Oxy -vlak volgens de bewegingsvergelijkingen

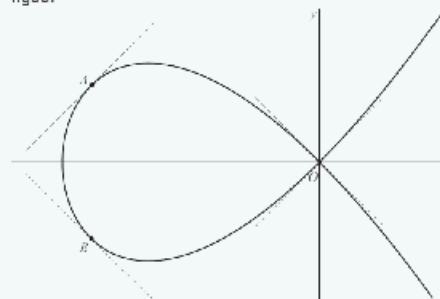
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t(t^2 - 1) \end{cases}$$

Hierin is t de tijd.

De baan van het punt heeft de vorm van een lus. Het punt bevindt zich op de tijdstippen $t = -1$ en $t = 1$ in de oorsprong O . In O heeft de baan van het punt twee raaklijnen.

Het bewegende punt passeert achtereenvolgens twee punten A en B waar de raaklijn aan de baan evenwijdig is met één van de raaklijnen in O . Zie de figuur.

figuur



De benodigde tijd om van O naar A te bewegen, de benodigde tijd om van A naar B te bewegen en de benodigde tijd om van B naar O te bewegen, zijn alle drie even lang.

- 11 Toon dit aan.

figuur 6 Uit: VWO- B pilot 2012 (Lus)

Over de auteur

Ilone Dekkers is docente wiskunde bovenbouw aan het Peellandcollege in Deurne.

E-mailadres: dei@ivo-deurne.nl

HAVO – wiskunde B

EEN SUCCESVERHAAL ! (?)

[Hielke Peereboom]

Tevreden docenten op de landelijke normbespreking, geen verontwaardigde reacties op het forum van de NVvW en geen enkele (negatieve) reactie in de wiskunde-brief. Dit alles wijst in de richting van een succesverhaal met betrekking tot het CE, 1e tijdvak, van de havo-B examens (regulier en pilot). Of is dit iets te rooskleurig voorgesteld en wroet er toch iets onder het mooie oppervlak?

Het reguliere examen, ervaringen op eigen school

Allereerst maar eens de reactie gevraagd van mijn collega Esther Stiksma-Mourits, die dit jaar op mijn school de havo B-leerlingen onder haar hoede heeft gehad. Ze is het eigenlijk wel eens met de opmerkingen die tijdens de landelijke normbespreking gemaakt zijn: omvang goed (leerlingen kwamen niet in tijdnood), het niveau van de analysevragen is goed, die van meetkunde aan de gemakkelijke kant, tevreden over de spreiding van de stof en eveneens tevreden over de verhouding algebraïsche activiteiten versus die op de grafische rekenmachine. Ze voegt er aan toe dat het haar opviel dat er geen rekenen met logaritmen in het CE zit en daarentegen wel transformaties. Al met al een leuk examen, ondanks het feit dat het erg veel tekst bevat. 'De CE-resultaten – gemiddeld 5,4 met bijna 50 % onvoldoendes – van mijn niet al te sterke groep zijn niet geweldig, maar wel in lijn met die van het SE – gemiddeld 5,7', aldus Esther.

Het College voor Examens (CvE) stelt de N-term vast op 1,2, en met een gemiddelde van 6,3 en 28,2% onvoldoendes, geeft dit ook aan dat het examen goed te doen was.

Het pilotexamen

Het pilotexamen is voor de tweede jaar afgenomen op een zestal scholen die experimenteren met het vernieuwde examenprogramma zoals dat landelijk in 2015 zal worden ingevoerd. Uit het verslag van de normbespreking, waarbij alle pilotdocenten aanwezig zijn, de volgende bloemlezing:

een prima examen, lengte goed tot iets te lang, niveau redelijk tot goed, spreiding van de stof goed.

Opgemerkt wordt dat van één van de nieuwe – ten opzichte van het huidige examenprogramma – subdomeinen (Evenredigheidsverbanden) geen enkele

vraag in het examen aanwezig is. En dat mag opvallend genoemd worden.

Men is zeer tevreden over de vernieuwde meetkunde (analytische meetkunde in plaats van ruimtemeetkunde); die is mooi, goed zichtbaar, praktisch en spreekt de leerlingen aan.

Een docent valt het op dat leerlingen bij dit CE regelmatig kiezen voor een (tot mislukken gedoemde) algebraïsche aanpak terwijl van de grafische rekenmachine gebruik gemaakt mag worden. Tenslotte wordt opgemerkt dat er slechts een paar vragen met denkactiviteiten in zitten. Bij het pilotexamen geldt $N = 1,3$ en met een gemiddelde van 6,5 en 25,2% onvoldoendes scoort dit pilotexamen nog iets beter dan het reguliere examen.

Van de 19 vragen vertonen 10 vragen een complete of bijna complete overlap met het reguliere examen. Het gaat dan met name om de opgave *Vliegende parkieten*, *Wortelfunctie*, *Sinusoïde* (de eerste vraag) en CO_2 . Soms is bij het pilotexamen in de stam van een vraag iets weggelaten om het voor de leerlingen enigszins denkactiever te maken; zie als voorbeeld **figuur 1a en 1b**. Een andere keer krijgen leerlingen bij het reguliere examen een afgeleide gegeven en moeten de juistheid ervan aantonen terwijl de leerlingen van het pilotexamen deze afgeleide zelf moeten bepalen; zie **figuur 2a en 2b**.

De 'niet-overlap' bestaat zodoende vrijwel geheel uit de meetkunde.

Persoonlijke noot

Voor iedereen die betrokken is bij de productie van deze examens – examenmakers, Cito en CvE – is het natuurlijk fijn om te ervaren dat het veld tevreden is. Het maken van een examen

De snelheid waarbij het energieverbruik per meter minimaal is, heet de **kruissnelheid**. Om de kruissnelheid te berekenen, is de afgeleide van D nodig. Er geldt

$$\frac{dD}{dv} = \frac{12,0}{v^3} + 0,00100v$$

- 3 Toon de juistheid van deze formule voor $\frac{dD}{dv}$ aan.
- 4 Bereken op algebraïsche wijze de kruissnelheid van parkieten in meter per seconde. Rond daarna je antwoord af op één decimaal.

figuur 1a Uit: HAVO B regulier2012 (Vliegende parkieten)

De snelheid waarbij het energieverbruik per meter minimaal is, heet de **kruissnelheid**. Om de kruissnelheid te berekenen, is de afgeleide van D nodig.

- 3 Bereken op algebraïsche wijze de kruissnelheid van parkieten in meter per seconde. Rond daarna je antwoord af op één decimaal.

figuur 1b Uit: HAVO B pilot 2012 (Vliegende parkieten)

Er bestaat precies één lijn die evenwijdig is aan de lijn $y = 2x - 5$ en die raakt aan de grafiek van f . Omdat deze lijn evenwijdig is aan de lijn $y = 2x - 5$ heeft deze een vergelijking van de vorm $y = 2x + b$.

11 Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van b .

figuur 2a Uit: HAVO B regulier 2012 (Wortelfunctie)

Er bestaat precies één lijn die evenwijdig is aan de lijn $y = 2x - 5$ en die raakt aan de grafiek van f .

5 Stel met behulp van differentiëren een vergelijking van deze lijn op.

figuur 2b Uit: HAVO B pilot 2012 (Wortelfunctie)

is en blijft een lastige klus en het is altijd afwachten hoe het uiteindelijk uitpakt. Als dan uit het commentaar en bovenstaande harde cijfers blijkt dat een en ander goed verlopen is, mag je als examenmakers natuurlijk tevreden zijn.

Maar toch, als ik inhoudelijk naar deze examens kijk, moet me, net als vorig jaar, iets van het hart.

Als ik bij deze examens voor het gemak de vragen in twee categorieën indeel: reproductieve (R) en productieve (P), dan valt het mij op dat er erg weinig vragen zijn in de categorie P. Met name vanuit het perspectief dat wiskundige denkactiviteiten één van de vernieuwingen is ten opzichte van het huidige programma, zou je verwachten dat dit dan ook zichtbaar is in het pilotexamen en dat in de reguliere examens dit ook langzaam maar zeker gebracht wordt in de vorm van vragen in categorie P.

Onder denkactiviteiten worden verstaan: modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren en logisch redeneren en bewijzen.^[1] Bij de havo-A examens zie je ook weinig vragen met denkactiviteiten, maar is er tenminste nog de keus voor een onderzoeksopdracht aan het eind van het examen waar denkactiviteiten in ieder geval een plek hebben. Bij de havo-B examens moet je met een lantaarntje zoeken naar vragen met deze activiteiten.

Bij reproductieve vragen speelt inzicht niet de belangrijkste rol; de leerling moet laten zien dat hij de vragen herkent en over de kennis en vaardigheden beschikt om deze te beantwoorden. Overigens kunnen dit soort vragen nogal uiteenlopen van eenvoudige reproductie van kennis en/of vaardigheden

tot lastige(r) vragen. Bij productieve vragen moet de leerling eerst één of meer denkstappen maken voordat hij aan de slag kan met, en een beroep kan doen op, geleerde kennis en vaardigheden.

In het reguliere examen kom ik dan tot 16 vragen in de categorie R en drie in de categorie P (vraag 7, 14 en 19) en dit geeft 67 scorepunten bij R en 13 bij P.

In het pilotexamen is de situatie niet veel anders: hoogstens vier vragen komen m.i. in aanmerking voor categorie P (14 en 17 t/m 19) en dit geeft 14 scorepunten bij P en 68 bij R. Dit verklaart veel van de tevredenheid bij docenten en leerlingen...

Nu kan het zijn dat iemand anders tot een iets andere indeling in de categorieën P en R komt; ik blijf van mening dat de huidige havo-B examens enigszins mank gaan aan een overwaarding van reproductie. Dit zie je ook aan de formulering van de vragen.

Bij het reguliere examen beginnen 12 van de 17 vragen met: 'Bereken...'. De andere vijf vragen zijn: 'Toon met behulp van differentiëren aan...', 'Maak de uitslag af.', 'Bepaal met behulp van de figuur...', 'Toon met algebra aan dat...' en 'Geef aan met welke twee transformaties...'.

Bij het pilotexamen hetzelfde beeld, van erg sturende vragen met een sterk reproducerend karakter. Bij het pilotexamen beginnen 14 van de 19 vragen met: 'Bereken...'. De andere 5 vragen zijn: 'Toon dit aan.', 'Stel met behulp van differentiëren...', 'Bepaal met behulp van de figuur...', 'Toon met algebra aan dat...' en 'Geef aan met welke twee transformaties...'.

Geen enkele vraag die wat opener is, en bijvoorbeeld begint met: Onderzoek of, Leg uit dat, Beredeneer dat. Vragen die je bij de wiskunde A en C examens wél tegenkomt.

Kijk ik bijvoorbeeld naar het pilotexamen vwo-A, dan zie ik een heel andere verdeling. Het aantal vragen dat begint met 'Bereken...' is slechts vier! Verder zijn er vier vragen die beginnen met 'Onderzoek...', drie vragen met 'Leg uit...', twee met 'Laat zien...' en verder 'Toon aan...', 'Herschrijf...', 'Beredeneer...', 'Stel een formule op...' en twee heel open vragen die beginnen met 'Welke...?' en 'Is...?'. Een compleet ander beeld dat ik bij het pilotexamen wiskunde C, weliswaar iets minder sterk.

Ik daag de examenmakers bij dezen daarom uit tot een bijstelling van de havo-B examens in de richting zoals hierboven is aangegeven.

Noot

[1] Zie het boekje *Rijk aan betekenis*. Utrecht: cTWO; pag. 25 e.v.

Over de auteur

Hielke Peereboom is docent wiskunde aan het Bornego College te Heerenveen en lid van het projectteam van cTWO. E-mailadres: h.peereboom@uu.nl

Examens gemaakt, gezamenlijk corrigeren

Twee jaar geleden schreef ik over de manier waarop we op de Open Schoolgemeenschap Bijlmer (OSB, Amsterdam) samen het examenwerk nakijken en elkaar ondersteunen tijdens het corrigeren. Een bijzonder plezierige gewoonte waar we niet van afwijken: zodra het examen afgenomen is, kijken we elk dezelfde avond zoveel mogelijk werk na. De volgende dag om half vijf, aan het eind van de dag, stallen we alles uit: onze correctielijsten, aantekeningen, het werk van leerlingen, de opgaven, het correctiemodel..., een enorme papierwinkel, en uiteraard koek en chocola. En dan begint de uitwisseling van de eerste ervaringen; sommige zaken leiden snel tot een gemeenschappelijk inzicht, bij andere vragen besluiten we de centrale bespreking in Utrecht af te wachten voordat we conclusies trekken. Ook nu weer een nieuwe collega die niet eerder een examenklas had; hij 'komt er zo snel in'.

Een paar voorbeelden uit GL en TL

Lucifers; zie *figuur 1* – Eigenlijk is het een eenvoudige opgave, rekenen met grote getallen, werken met verhoudingen, tekst verklaren. Waarom gaat er dan toch zoveel fout? 60 lucifers in een doosje. 6 miljoen lucifers uit één boom. 6 biljoen lucifers per jaar wereldwijd afgestoken. Hoeveel is dat eigenlijk, is dat een hoop ter grootte van een krukje, ter grootte van een bank, van een huis? Zou er één leerling geweest zijn, die zich dat afgevraagd heeft? Mijn leerlingen gunnen zich niet de tijd om zich een voorstelling te maken van de gegevens. Terwijl het zo helpt: een innerlijk plaatje maken...

Als ik deze opgave gemaakt had, zou ik niet de getallen 6 miljoen, 60 en 6 biljoen hebben gekozen, het lijkt zo op elkaar... en dat is niet plezierig, want het leidt af. Ik durf mijn hand in het vuur te steken voor de praktische kennis over lucifers van mijn leerlingen: ze kunnen tussen duim en wijsvinger aanwijzen hoe lang een lucifer is. Toch zou ik mezelf verbrand hebben met die lucifers van 340 mm of nog erger... Het moeilijkste van wiskunde doceren is

ervoor zorgen dat leerlingen niet stoppen met denken.

Verfblikken; zie *figuur 2*. Herkenbare vragen en niet al te ingewikkeld.

Bij vraag 7 heeft niemand uit mijn klas – ook niet uit die van mijn collega's – gekozen voor de eerste oplossing uit het correctievoorschrift (zie *figuur 3*). Deze abstracte redenering is niet des vmbo's. Een driestapsredenering, ik hoor het zelden in de klas. Het is een van de zaken die heel veel aandacht behoeft in ons onderwijs: leerlingen goed laten redeneren, aan elkaar laten uitleggen, laten verwoorden wat ze begrijpen. Blijven doen dus, maar ik verwacht niet dat ze deze aanpak uit zichzelf zullen kiezen tijdens een examen.

Een betere en uitdagende vraag om leerlingen op dit niveau te laten redeneren, vind ik vraag 12 (uit de context *Gif in het meer*):

De hoeveelheid gif neemt met 1,5% per uur af.

» *Neemt de hoeveelheid gif dan in een dag (24 uur) af met $24 \times 1,5\% = 36\%$?*

» *Laat zien hoe je aan je antwoord komt.*

Lucifers worden meestal gemaakt van het hout van de ratelpopulier. Van één populier worden gemiddeld 6 miljoen lucifers gemaakt. In een luciferdoosje zitten gemiddeld 60 lucifers.

3p 1 Het bedrijf Zwaluw verkocht vorig jaar 11,7 miljoen luciferdoosjes in Nederland.
→ Bereken hoeveel populieren hiervoor gebruikt zijn. Schrijf je berekening op.

2p 2 Een machine maakt per uur 15 miljoen lucifers.
→ Bereken hoeveel minuten deze machine nodig heeft om lucifers te maken van het hout van één populier. Schrijf je berekening op.

Per jaar worden er in de hele wereld 6×10^{12} (6 biljoen) lucifers aangestoken.

3p 3 Bereken hoeveel lucifers er gemiddeld per seconde worden aangestoken in de hele wereld. Rond af op hele duizendtallen. Schrijf je berekening op.

3p 4 In een krantenartikel staat het volgende:

"Leg alle lucifers achter elkaar die per jaar in de wereld worden aangestoken en je krijgt een afstand van 260 000 000 km."

→ Bereken in hele mm de lengte van één lucifer volgens dit krantenartikel. Schrijf je berekening op.

figuur 1 Uit: VMBO GL/TL 2012 (Lucifers)

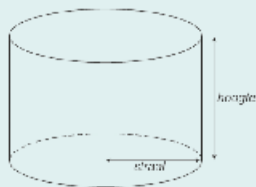
En ze komen er redelijk uit, ik ben eigenlijk wel trots op de antwoorden die hier gegeven worden; het trainen op verwoorden van kennis heeft effect gehad.

Over ambitie gesproken

Ik werk nu inmiddels drie jaar in het vmbo, na een onderwijsstart in de bovenbouw havo en vwo. Het is en blijft een boeiende en fantastische ontdekkingsreis met wisselende perioden van 'voor- en tegenwind' soms met enige averij, maar het is wel een reis waarop ik blijf groeien, noodgedwongen mijn didactisch repertoire uitbreid en zorg dat het in mijn les beter op orde is. Daarover schrijf ik misschien later nog eens.

Nu wil ik één van mijn – weliswaar voor discussie vatbare – vermoedens met u delen, om vervolgens terug te komen op de gemaakte examens. Er is volgens mij een grotere overeenkomst tussen vmbo'ers en vwo'ers, dan tussen havisten en één van deze twee groepen. Vmbo'ers en vwo'ers hebben een grote ambitie wat betreft hun schoolprestaties, waarbij de vwo'ers boffen: hun ambitieniveau houdt gelijke

Verfblikken zijn er in allerlei maten. Zie de foto hieronder. In deze opgave gaan we steeds uit van een wiskundig model van een verfblik, een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. We houden geen rekening met de dikte van het blik.



Een verfblik heeft een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.

- 5 Bereken hoeveel cm^3 de inhoud van het verfblik is. Schrijf je berekening op en rond je antwoord af op een geheel getal.
- 6 Teken op schaal 1:4 de uitslag van dit verfblik. Schrijf op hoe je de maten van je tekening gevonden hebt.
- 7 Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de **inhoud** van het blik dan hetzelfde? Laat zien hoe je het antwoord hebt gevonden.
- 8 Er zijn blikken nodig met een inhoud van 2500 cm^3 . De blikken worden zo gemaakt dat er zo weinig mogelijk metaal voor nodig is. De hoeveelheid metaal die nodig is voor een blik, is zo klein mogelijk als de hoogte van het blik 2 keer zo groot is als de straal. De inhoud van zo'n blikken dan worden berekend met de formule

$$\text{inhoud} = 2 \times \pi \times \text{straal}^2$$

→ Bereken hoeveel cm de straal en de hoogte van dit blik zijn. Geef je antwoorden in één decimaal en schrijf je berekening op.

figuur 2 Uit: VMBO GL/TL 2012 (Verfblikken)

7 maximumscore 3

Een uitleg als:

- In de formule staat de straal in het kwadraat, dus als de straal 2 keer zo groot wordt, wordt de inhoud 4 keer zo groot. 1
- Als de hoogte gehalveerd wordt, wordt de inhoud daardoor 2 keer zo klein. 1
- Dus blijft de inhoud niet hetzelfde (maar wordt 2 keer zo groot). 1

of

- straal wordt 16 en hoogte 7. 1
- $\text{inhoud} = \pi \times 16^2 \times 7 = 5629,73... (\text{cm}^3)$ 1
- Nee, dat is niet hetzelfde als $2815 (\text{cm}^3)$. 1

figuur 3 Uit: Correctievoorschrift VMBO GL/TL 2012 (Verfblikken)

tred met hun cognitieniveau. De ambitie van vmbo'ers wordt vaak gefrustreerd doordat cognitieve vaardigheden en ambitie uit de pas lopen. Dit maakt het onderwijs in het vmbo spannend: je moet als docent balanceren in dit spanningsveld, meegaan in de ambitie en weten waar de beperkingen liggen zodat je voorkomt dat de frustratie onoverbrugbaar groot wordt. De havisten zijn in mijn beleving minder ambitieus wat betreft schoolprestaties, ze zijn vooral op elkaar gericht, geïnteresseerd in sociale aangelegenheden. Dat je ook moet presteren is een noodzakelijk kwaad en een manier om zo snel mogelijk de schoolbanken te kunnen verlaten. (De doorstromers die na het vmbo doorgaan op de havo, vormen hierin opvallend vaak een uitzondering.) Ook erg leuk lesgeven, als je in staat bent 'lichtheid en loslaten' te combineren met 'strengheid en leiden'. Uiteindelijk moeten alle leerlingen – op hun eigen niveau – een proeve van bekwaamheid afleggen en aantonen dat ze over voldoende wiskundige kennis en kunde beschikken. Tot nu toe toetsten we dat bij iedereen schriftelijk in de vorm van opgaven waardoor leerlingen, op verschillend kennis-, abstractie- en inzichtniveau konden laten zien wat ze waard zijn. Misschien paste deze vorm beter bij een leerling die vwo-examen wiskunde B moest doen, dan bij de leerling die een wiskunde kader-examen moest maken. Maar, een zelfde toetsvorm (het maken van opgaven in beperkte tijd) was mijns inziens niet bezwaarlijk, gegeven het feit dat je wiskunde op elk niveau ook oefent door het maken van opgaven.

Digitale examens en de voorbereiding

Er is inmiddels variatie in de toetsvorm ontstaan. Op de OSB deden we mee met de digitale examens voor de kader- en basisleerlingen. Deze digitale examens vroegen een andere aanpak van onze gezamenlijke correctie: het werd samen nakijken achter de computer. Het was lastig, omdat we geen overzicht over het hele examen hadden, en opgaven opgedeeld waren over meerdere schermen: één vraag per scherm. De verschillende versies maakten het overleg ook niet makkelijk. En was de moeilijkheidsgraad van die verschillende versies wel eerlijk verdeeld? Ook niet prettig dat we niet konden zien

hoe leerlingen de automatisch nagekeken vragen hadden gemaakt. We verbaasden ons en er rees steeds meer twijfel over nut en koers van deze digitale examens. We vonden goede antwoorden, maar typefouten in de berekeningen of ontbrekende berekeningen omdat leerlingen die met hun eigen rekenmachine hadden gemaakt. Zou dat ook gebeurd zijn als ze met pen en papier hadden gewerkt? Leerlingen zagen niet hoe ze de lichaamsdiagonaal in een balk moeten berekenen. Zou het – werkend op papier – meer voor de hand gelegen hebben om een kladtekening te maken? We hebben niet genoeg geoefend met het gebruik van verhoudingstabellen. Ja, wel op papier, niet op het scherm.

Er is in Nederland voor gekozen om het experiment met de digitale wiskunde examens te beginnen op het laagste niveau. Of dat een bewuste keus is geweest, weet ik niet. Misschien is het technisch makkelijker om basis/kader-vragen te bouwen dan integraalberekeningen door leerlingen te laten invoeren zonder gebruik van Matlab o.i.d. Misschien denken we dat werken op de computer beter bij basis/kader-leerlingen aansluit dan het werken met pen en papier. Maar, er gaat me wel iets aan het hart: hierboven beschreef ik hoe belangrijk het is om binnen het vmbo oog te hebben voor de frustratiegrens van leerlingen. Kaderleerlingen willen zo graag, maar het kost ze veel moeite. Het kost moeite om huiswerk te maken (thuis gekomen, bleek het benodigde boek nog op school in de kluis te liggen), het kost moeite om veel te herhalen en in te slijpen ('Juf, dit snap ik toch al, waarom moet ik het nog eens doen?'), om te onthouden dat je iets met de straal in het kwadraat moet doen om de oppervlakte van de cirkel te krijgen en nee, dan weer niet bij de omtrek. Dat het om een berekening met twee dimensies gaat, dat je steun hebt aan de eenheid 'cm²', is aan de meesten niet besteed. Daarom juich ik het formuleblad toe, hoewel we het op onze schoolexamens niet geven omdat we vinden dat we moeten blijven trainen met formules. Trainen, oefenen, de moed er in houden door succeservaringen, het leidt allemaal tot succes op het CE. Maar, hoe moesten we trainen en oefenen voor de digitale examens? Er was zo weinig oefenmateriaal en dus zo weinig

gelegenheid om leerlingen zelfvertrouwen te laten krijgen in hun aanpak. Er is zo weinig geschreven over de al opgedane ervaringen met digitaal examineren, dat we niet van elkaar hebben kunnen leren. Achteraf bleek dat onze leerlingen veel te weinig gedaan hadden met kladpapier en bijvoorbeeld geen schetsen hebben gemaakt waardoor ze niet op een goede aanpak kwamen. Met pen en papier zou het logisch geweest zijn. Sommigen hadden te weinig gehad aan die ene keer oefenen, en bijvoorbeeld niet onthouden dat ze voor de *shift-toets*, op het scherm de *inv-knop* moesten hebben. En hoeveel collega's zullen uitgelegd hebben dat het berekenen van een hoek in een rechthoekige driehoek met gegeven rechthoekszijden, een *inverse* berekening is van het berekenen van de verhouding tussen die zijden als de hoek bekend is? Ik niet. Hoe kan je dan als leerling afleiden dat *shift* en *inv* 'hetzelfde' zijn? Om maar te zwijgen van de onrust die het veroorzaakt als je computer vastloopt... Elke storing was snel verholpen, en het schijnt al veel minder vaak voorgekomen te zijn dan vorig jaar, maar toch, elke storing is storend voor de concentratie van de betreffende leerling en zijn/haar burens. Twee uur geconcentreerd naar een beeldscherm kijken is ook wel erg lang, zeker met examenstress erbij.

En dan het type vragen, soms heel adequaat gebruik makend van de digitale mogelijkheden zoals bij het bouwen van aanzichten met schijffjes om een staaf; soms kunstmatig gezocht en verzonnen, zoals het filmpje over het bouwen van het Witte Huis als kaartenhuis; het was in onze ogen overbodig, tijdrovend en niet-informatief. En net als bij de papieren versie: contexten te talig om nog door de bomen het bos te kunnen vinden. Ik geef u één voorbeeld. Gegeven wordt het inwoneraantal van Nederland en Spanje en van beide landen het grondoppervlak. De vraag: Als Nederland net zo dunbevolkt zou zijn als Spanje, hoeveel inwoners zouden er dan wonen? 'Dunbevolkt', het lijkt basis vocabulaire, maar blijkt het niet te zijn. Een verhoudingstabel lijkt hier zo simpel in gebruik, maar je moet als leerling wel weten welk van de vier gegevens je *niet* in de tabel moet zetten. En is het niet raar dat je al weet hoeveel mensen er in Nederland wonen, en dat het dan ook nog gevraagd

wordt? Naar mijn mening hadden we beter het aantal inwoners in Nederland uit de gegevens kunnen schrappen. *Als ... dan ...* is alleen voor de abstract ingestelden onder ons een simpele redenering.

Tot slot, de herkansingsversie

Verder ook nog iets opvallends uit het digitale examen: de herkansingsversie die wij op school gebruikten (één van de drie die klaar stond), bestond ten dele uit exact dezelfde opgaven als in de examens uit het eerste tijdvak. Ik kan het niet helemaal overzien, maar ik vermoed dat er opgaven uit de verschillende eerste tijdvak versies zijn gecombineerd tot een herkansing. Dit betekende voor sommige herkansende leerlingen dat ze opgaven tegenkwamen die ze eerder gemaakt en ook achteraf ingezien en met mij besproken hadden. Pech voor degenen voor wie dat niet het geval was? Een makkie voor de anderen? Inderdaad, voor sommigen was dit zo. Maar tijdens het nakijken van het werk heb ik gezien dat sommigen er ook danig in de war van zijn geraakt. Flarden van goede antwoorden doken op tussen berekeningen die kant nog wal raakten. Ik kan niet anders dan concluderen dat deze leerlingen ten dele op hun geheugen afgegaan zijn (ze herinnerden zich immers deze opgave nog) en ten dele opnieuw zijn gaan nadenken, waardoor er verwarring is ontstaan. Op school doen we het uit principe nooit: in een herkansingsversie gebruik maken van opgaven uit de oorspronkelijke toets. Na deze ervaring lijkt het me een principe om vast te houden. Wat mij betreft doen de examenmakers dit ook niet meer. En wil ik eindigen met een dringend verzoek: geef de gemaakte digitale examens vrij, zodat leerlingen kunnen oefenen en in staat zijn om het beste uit zichzelf te halen!!

Dank

Met dank aan mijn collega's Marlies de Boer, Thomas Nas en Laurens van der Poel voor het meelezen.

Over de auteur

Klaske Blom is docente wiskunde op de Open Schoolgemeenschap Bijlmer in Amsterdam.
E-mailadres: klaskeblom@gmail.com

PERSBERICHT / VOORLOPIG GEEN DIGITALE EINDEXAMENS MEER

16/07/12, 09:11 – bron: ANP

De digitale eindexamens worden tijdelijk opgeschort. Doordat er afgelopen keer veel problemen waren bij de examens waarbij een computer wordt gebruikt, heeft het College voor Examens (CvE) besloten tijdelijk geen digitale centrale examens af te nemen.

Dit jaar hebben meer eindexamenleerlingen dan ooit gebruikgemaakt van een computer. Dat verliep op veel scholen echter 'onrustig', zoals het college het omschrijft. Door die problemen is bij ongeveer 200 leerlingen het examen geheel of deels ongeldig verklaard. 'Niet acceptabel', schrijft het CvE in een brief aan de directeurs van alle middelbare scholen in Nederland. 'Bij grote storingen hebben de kandidaten geen uitwijkmogelijkheden.'

Het digitale examen blijft wel bestaan bij de examens kunst algemeen, muziek, dans en drama.

Voor verdere info zie de website van het CvE:

www.cve.nl/nieuws/20120716/voorlopig-geen-digitale-centrale (c.q. www.cve.nl)

Op deze pagina staat een PDF-bestand met meer informatie.



Op ons kunt u rekenen!

Rekenmachines van alle merken zijn bij ons uit voorraad leverbaar.
Zowel voor enkele stuks en complete schoolorders bent u bij ons aan het juiste adres.
En altijd zonder verzendkosten!

109,00 €



TI-84 Plus

79,00 €



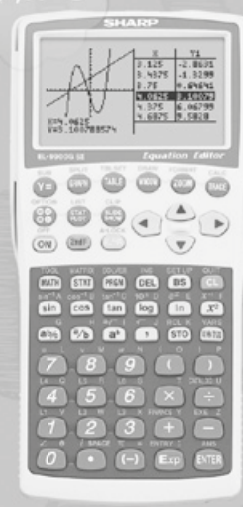
HP 39gII

129,00 €



TI-nspire CX

89,00 €



EL-9900



Free emulator
HP SOFTWARE

Alle prijzen zijn inclusief BTW

De RekenWinkel
Ceintuurbaan 44
1403 AB BUSSUM
info@DeRekenwinkel.nl

Getuigen

[Danny Beckers]



Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippets, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

Tegenwoordig huist in het voormalig natuurmuseum in Groningen de Academie Minerva: een kunstopleiding die onderdeel uitmaakt van de Hanzehogeschool. Aan de opleiding die er tegenwoordig huist, kun je niet meer zien dat de oorspronkelijke doelstellingen van Minerva veel breder waren, en dat ze in feite een van de vele private wiskundeschoolen was die eind achttiende eeuw werd opgericht in een poging om het vaderland van meer en beter wiskundeonderwijs te voorzien. De eerste lesruimtes huurde de academie in de Oude Kijk in 't Jatstraat. In de tweede helft van de negentiende eeuw raakte de wiskunde op de achtergrond en werd de academie steeds meer een opleiding met twee takken: een technische zeevaartopleiding en een opleiding voor beeldende kunsten. Na de oorlog groeiden de opleidingen definitief

uit elkaar, en behield alleen de kunstopleiding de naam Minerva.

De Groningse 'Akademie van Teeken-Bouw- en Zeevaartkunde, mitsgaders andere hiertoe betreffende vakken: Minerva' werd opgericht in 1797. Aan deze academie werd een bijzondere vorm van technisch onderwijs verzorgd die een belangrijke economische impuls betekende voor Groningen. Het doel van de academie was onderwijs te verzorgen in 'nutte kunsten en wetenschappen' voor betalende en niet-betalende leerlingen. De niet-betalende leerlingen waren hoofdzakelijk wezen die zich via dit onderwijs een betere baan konden verwerven. In dat opzicht paste de academie binnen de heersende cultuur van genootschappen die zich inspannen

om het economisch ongunstige tij in Nederland te keren. Vanaf de oprichting werd er onderwijs verzorgd in de rekenkunde, vlakke- en bolmeetkunde. Daarnaast werden er ook technische vakken onderwezen die de leerlingen een goede ondergrond moesten bieden als kunstenaar, architect of navigator. De wiskunde werd geacht fundamenteel te zijn voor al deze vakken. De leidende gedachte achter het wiskundeonderwijs was dat iemand die werkelijk de abstracte wiskunde beheerste, beter voorbereid was op de veranderingen die de samenleving op dat moment doormaakte. In deze periode van veranderende mobiliteit en snelle technische ontwikkelingen vonden de Groningse notabelen het belangrijk dat mensen wiskundig konden denken. Dit in tegenstelling tot het wiskundeonderwijs dat velen uit de achttiende eeuw kenden, en dat gericht was op het oplossen van heel concrete problemen uit de praktijk.

De eerste docent was K.J. Koers. Het salaris dat de academie zijn docenten kon bieden was echter niet geweldig, het aantal posities voor goede wiskunde-onderwijzers was groeiende, dus men kon wachten op zijn vertrek. Toen Koers in 1803 een andere baan kreeg aangeboden, vertrok hij bij Minerva. Ondertussen waren de financiën van de academie nog minder gunstig geworden. Na een aantal jaren van sukkelen en bezuinigen waren in 1822 de financiën weer rooskleuriger en werd J. van Cleeff (1788-1862) als docent voor de wiskundevakken aangesteld.

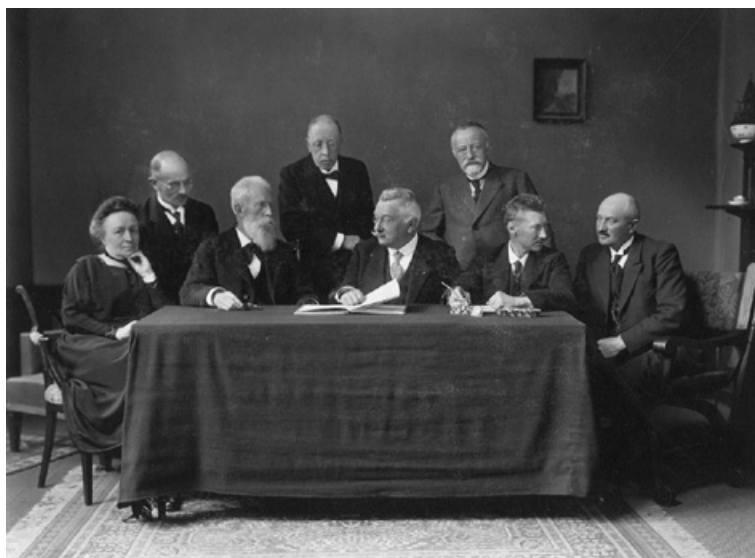
In de jaren 1820 bezochten jaarlijks zo een 30 à 40 'gratis' leerlingen de school. Daarnaast waren er ongeveer evenveel betalende leerlingen. Het niveau van de leerlingen liep sterk uiteen. In augustus 1824 meldden zich bijvoorbeeld 18 leerlingen aan. Die werden allemaal getest. De meesten konden goed lezen en schrijven, hetgeen een vereiste was voor toelating tot de lessen. Er was een aantal mensen in technische beroepen als molenmaker of timmerman en ook een onderwijzer die zich aanmeldde. Die laatste las vrij goed, schreef redelijk en beheerste de



figuur 1 Gebouw Academie Minerva, Groningen

rekenkunde tot en met de deling. Twee van de achttien waren de rekenkunde machtig en wilden algebra-onderwijs. Twee konden helemaal niet rekenen, vier konden alleen optellen, vijf kenden de rekenkundige bewerkingen en eentje rekende gewoonweg 'zeer goed'. Met name de niet-betalende leerlingen werden stevig achter de vordden gezeten en moesten regelmatig laten zien dat ze vooruitgang boekten.

Een van de manieren waarop leerlingen bij de les werden gehouden, was verplichte deelname aan de jaarlijkse wiskunde-concoursen. Vanaf de beginjaren van Minerva is er sprake van de concoursen, maar gedurende de eerste decennia van de negentiende eeuw vonden ze niet plaats. Onder docent J. van Cleeff werden die concoursen nieuw leven ingeblazen. De concoursen waren een waar evenement. In aanwezigheid van de bestuurders van Minerva werden de leerlingen in het openbaar geëxamineerd. Wie het snelste het aantal opgaven goed op had gelost, kreeg een prijs. De opgaven die de leerlingen bij die gelegenheid moesten maken, varieerden sterk: afhankelijk van het niveau van de leerling waren er verschillende opgaven. Er waren open vragen van het niveau: 'Leg uit hoe je een vierkantsvergelijking kunt oplossen' en 'Beschrijf de constructie van een verticale zuidelijke zonnwijzer'. De leerling moest zelf bedenken hoe hij de procedure beschreef, maar men kan zich wel voorstellen dat de lesstof hier min of meer dicteerde hoe de leerling te werk kon gaan. Daarnaast waren er meer standaard opgaven zoals: 'Bepaal de grootste mogelijke cylinder die uit een kegel gesneden kan worden', waarbij de kegel door middel van een tophoek en diameter van de grondcirkel was gegeven. Leerlingen waren dus bekend met algebra en eenvoudige differentiaalrekening. Heel aardig waren de ingeklede rekenkunde-opgaven. Die behandelden veelal onderwerpen uit de vaderlandse geschiedenis of het geloof. Zo moeten aan de hand van een aantal vergelijkingen de jaartallen worden berekend van een aantal Oranjes, waaronder prins Willem I en prins Maurits. En het jaartal van de oprichting van de akademie werd de leerling niet geacht te kennen, maar de leeftijd van de bijbelse Methusalem wel:



figuur 2 Minerva bestuur tweede helft 19de eeuw (Bron: Beeldbank Groningen)



figuur 3 Minerva bestuur eind 19de eeuw (Bron: Beeldbank Groningen)

Wanneer men van het jaartal waarin deze akademie van teeken- bouw- en zeevaartkunde is opgericht 197 aftrekt, van de rest de kwadraatwortel trekt, bij deze wortel 50 vergaart, deze som met 9 vermenigvuldigt, van dit product 10 aftrekt en eindelijk bij deze rest het kwadraat van 13 telt, verkrijgt men een getal gelijk aan het aantal jaren die Methusalem geleefd heeft. Nu is de vraag in wat Jaar deze Akademie is opgericht.

Ik veronderstel dat voor het merendeel van de hedendaagse lezers deze opgave aanleiding zal zijn om hun Bijbelkennis nog eens op te frissen!

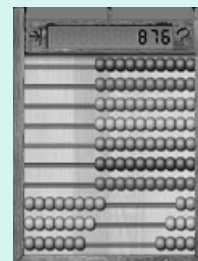
Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent en nu consultant/ ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

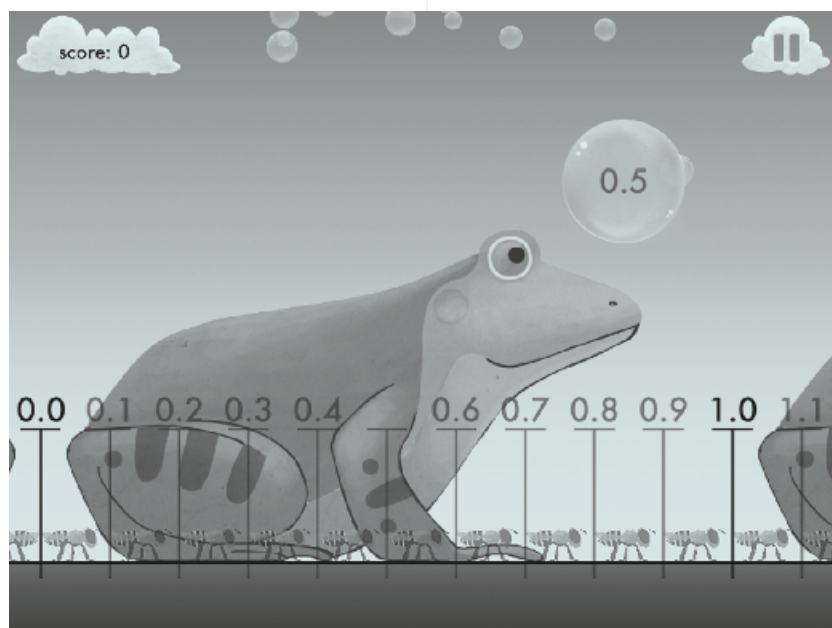
Wiskunde digitaal

MOTION MATH ZOOM 2.2

[Lonneke Boels]



Geschikt voor iPhone, iPod-touch en iPad



De getallenlijn

Motion Math Zoom is een spel dat geschikt is om de plaats van getallen op de getallenlijn goed te leren kennen. Om het spel te begrijpen is er een 'intro' level. Daarin wordt een getallenlijn getoond met kikkers tussen 'palen'. Bovenop de palen staan de getallen 0, 1, 2 enzovoort. Het getal 3 verschijnt in een zeepbel en landt na het springen van de bel op de (nog lege) plek voor het getal 3. Vervolgens is de opdracht om het getal 5 zelf te plaatsen door de kikkers door te schuiven tot de plek voor de 5 zichtbaar wordt. Na de 5 moet je de 19 plaatsen en de getallenlijn daarvoor verder 'doorschuiven'. In hogere levels werk je met twee vingers op het scherm om de getallenlijn uit elkaar te trekken (voor het plaatsen van decimale getallen) of in elkaar te schuiven (voor het plaatsen van tientallen, honderdtallen en duizendtallen). Het leuke van het spel is dat er bij elke orde-grootte ook een ander dier hoort. Als de getallenlijn in elkaar wordt geschoven zodat alleen nog de tientallen zichtbaar zijn, zijn er ineens honden zichtbaar. Bij tienden zijn wespen zichtbaar en zijn de kikkers ineens enorm groot (door de uitvergroting van de getallenlijn).

Doordat het spel werkt met meerdere levels, waarvan een aantal nog op slot zitten als je lagere levels nog niet hebt gehaald, is het een leuke uitdaging. Het is mogelijk om de 'naald' aan te zetten. Na een tijdslimiet prikt de naald de zeepbel door. Heb je op tijd de juiste plek op de getallenlijn gevonden? Grappig detail: bij het negatieve deel van de getallenlijn kijken de dieren de andere kant op.

Het spel is geschikt voor de vmbo onderbouw. Het onderdeel negatieve getallen is geschikt voor klas 1 havo en vwo. Er is echter wel één groot nadeel aan het spel: het spel gebruikt de Engelse notatie voor decimale getallen: een punt waar wij een komma gebruiken en omgekeerd. Met name in het vmbo is dat een probleem, terwijl het spel verder voor deze doelgroep juist erg geschikt is.

Pluspunten

- Door het in- en uitzoomen van de getallenlijn wordt het begrip 'oneindig veel getallen tussen 0 en 1' zichtbaar.
- Het spel is voor thuisgebruik extra interessant omdat je meerder spelers op naam kunt toevoegen.
- Doordat niet alle levels direct

beschikbaar zijn, is het een uitdaging om die beschikbaar te krijgen.

- Het spel bevat een duidelijke uitleg (onder het vraagteken).
- De naald geeft een extra uitdaging (zorgt voor een tijdslimiet).
- Er zitten verrassende grapjes in het spel (klik bijvoorbeeld eens op een paal).
- Je hoeft niet door alle onderdelen van bijvoorbeeld negatieve getallen heen om het onderdeel decimale getallen te mogen doen.

Minpunten

- Het spel oefent maar één type rekenvaardigheid (wel 1F, 1S en 2F-niveau) namelijk: ordenen van (negatieve) getallen.
- De gratis versie bevat te makkelijke onderdelen voor de middelbare school (niveau groep 5/6 basisschool). Voor de middelbare school is dus alleen de betaalde versie interessant.
- Voor decimale getallen wordt de punt als scheidingsteken gebruikt en voor grote getallen de komma ($1000 = 1,000$ en $1 = 1.000$). Dit probleem kom je tegen zodra hogere levels worden gespeeld.
- De namen van de spellen op de startpagina (zoals 'zooming') zijn in het Engels.

Eindoordeel: te overwegen om aan te schaffen

Kostprijs: gratis

Voor meer informatie: www.motionmathgames.com

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

ICT in de wiskundeles – Google SketchUp

DEEL 2

[Marc de Hoog]

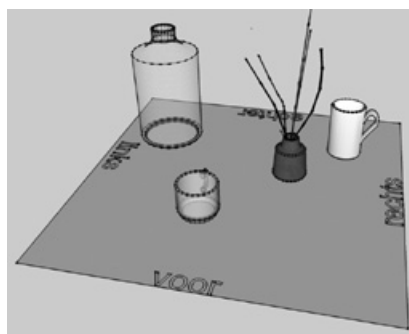
In het eerste deel [1] heb ik aangegeven hoe ik leerlingen laat kennismaken met het programma Google SketchUp. In deze aflevering geef ik allereerst suggesties voor het toepassen van Google SketchUp in 'de dagelijkse lespraktijk'. Hierbij moet worden opgemerkt dat dit geen volledig overzicht is van de toepassingen van Google SketchUp in de wiskundeles. Vervolgens beschrijf ik de evolutie die de lessenserie Google SketchUp op onze school heeft doorgemaakt: van extraatje naar 'apart vak'. Tot slot geef ik enkele reacties van leerlingen en collega's.

Google SketchUp in de wiskundeles

Ruimtefiguren – In de brugklas geef ik de opdracht een tekening te maken waarin ten minste tien wiskundige figuren voorkomen, zowel ruimtefiguren als vlakke figuren.

De leerlingen mogen zelf het onderwerp bepalen. Hoewel de opdracht heel vrij is, blijken leerlingen verrassend snel met deze opdracht uit de voeten te kunnen. Sommige leerlingen vragen zich in het begin nog even af of ze 'het helemaal zelf mogen weten', en na een bevestigend antwoord tekenen ze er lustig op los. Na enkele minuten verschijnen de balk, het prisma en de cilinder op het scherm. Enkele minuten later komen vragen over het tekenen van een bol, een cilinder 'met een gat', et cetera. Het blijkt een nuttige oefening te zijn om de ruimtefiguren weer de revue te laten passeren. Ook maken ze impliciet kennis met de begrippen doorsnede, rotatie, translatie, schalen, enzovoort.

Aanzichten – In Google SketchUp kunnen figuren van meerdere kanten bekeken worden. Dit biedt de mogelijkheid aanzichten 'zichtbaar te maken' zonder concreet materiaal mee te nemen. Ik maak hierbij de kanttekening dat zelfs een goede SketchUp-tekening – voor sommige leerlingen – zeker in het beginstadium, geen goede vervanging is van het concrete materiaal. De docent moet bepalen of en wanneer hij concreet materiaal dan wel Google SketchUp inzet. Een SketchUp-tekening kan ook dienen als basis voor opdrachten. Zo geef ik naast de opdracht een van de aanzichten te tekenen bij een gegeven opstelling (zie figuur 1), ook de



figuur 1 Aanzichten

opdracht bij enkele gegeven aanzichten een 'goede' opstelling te maken. De laatste opdracht laat ik wel eens klassikaal uitvoeren, omdat de redeneringen aanleiding geven tot een onderwijsleergesprek.

Spiegelen – In Google SketchUp kunnen objecten gespiegeld worden. Dit blijkt in de praktijk een waardevolle aanvulling van het repertoire te zijn. Denk aan de mogelijkheid een halve villa te tekenen, om vervolgens met enkele muisklikken de andere helft op het scherm te 'toveren'; zie figuur 2. Een opdracht met dit gereedschap geef ik niet altijd klassikaal. Ik gebruik de opdracht eens te meer om te differentiëren naar niveau. Hierbij plaats ik de kanttekening dat ik, voor het geven van deze opdracht, veel uitgebreider inga op de onderwerpen spiegelen en symmetrie dan de methode.

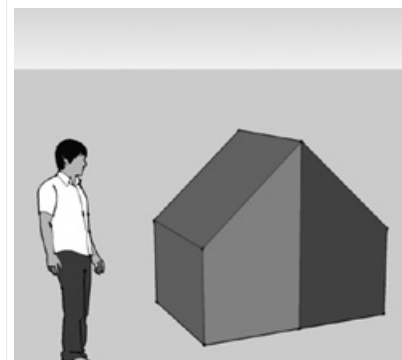
Stelling van Pythagoras in de ruimte

Het behandelen van het onderwerp 'Pythagoras in de ruimte' uit een boek heeft als nadeel dat niet alle leerlingen

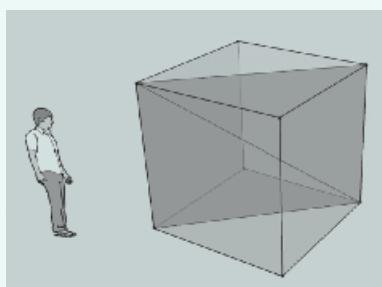
de diepte in de afbeeldingen goed 'zien'; zie figuur 3. Sommige leerlingen hebben moeite met het zien van bijvoorbeeld de lichaamsdiagonalen. Het goed beheersen van SketchUp biedt uitkomst. In de woorden van een leerling: 'Effe een balk tekenen, klik, klik, oh... zo!' Ik laat leerlingen het probleem in SketchUp letterlijk van alle kanten bekijken. Naderhand blijkt dat de opgaven in het boek geen probleem vormen. Navraag leert dat leerlingen als het ware de tekening in hun hoofd maken en het op die manier 'zien'. Denk in dit kader ook aan diagonaalvlakken. Hierbij kan het gereedschap *section plane* uitkomst bieden; zie de figuren 4a, b, c.

Oppervlakte en inhoud in klas 2

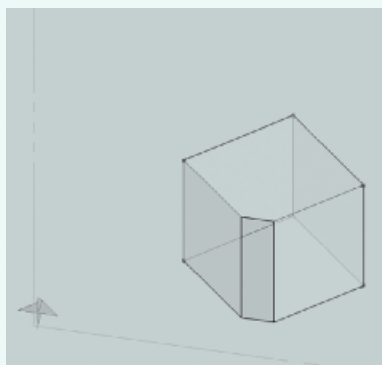
In klas 2 komt het onderwerp inhoud van ruimtefiguren aan bod. Uiteindelijk moeten leerlingen inzien dat het neerkomt op het toepassen van de formule $\text{inhoud} = \frac{1}{3} \times (\text{oppervlakte grondvlak}) \times \text{hoogte}$. In dat leerproces kan SketchUp een waardevolle rol spelen, omdat de leerling bijvoorbeeld de mogelijkheid heeft het grondvlak te tekenen en dit driedimensionaal te maken (bijvoorbeeld: prisma, cilinder). De formule



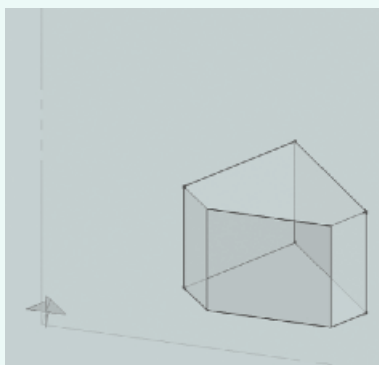
figuur 2 Spiegelen



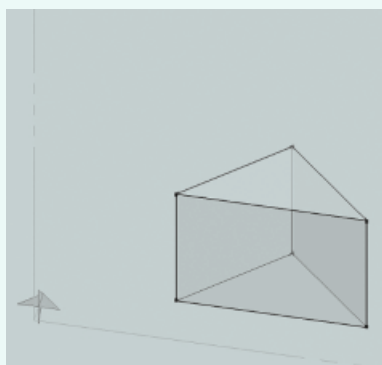
figuur 3 Pythagoras in de ruimte



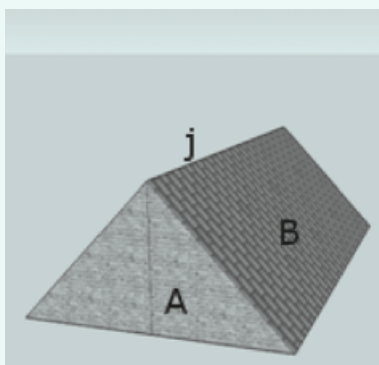
figuur 4a



figuur 4b



figuur 4c



figuur 5 Een prisma

$inhoud = (opp. \text{ grondvlak}) \times hoogte -$
grondvlak tekenen en dan driedimensionaal
maken – komt dan op een andere manier
aan bod. Ook kunnen in Google SketchUp
de lengtes en oppervlaktes worden
opgevraagd, waarbij de leerlingen rekenwerk
uit handen genomen kan worden, zodat
zij zich geheel kunnen bezighouden met
het berekenen van de inhoud en zich niet
druk hoeven te maken over het berekenen
van de oppervlakte van het grondvlak. Dit
kan zinvol zijn als de docent besluit dat
leerlingen zich moeten bezighouden met
de inhoud en dat de oppervlakte van het
grondvlak even geen obstakel mag zijn.
Vergelijk dit met de applets die gebruikt
worden om het oplossen van vergelijkingen
te oefenen. Daarbij neemt de computer het
rekenwerk uit handen om de leerling de
gelegenheid te geven zich geheel te richten
op het oplossen zelf.
Zelf gebruik ik SketchUp onder andere om
uit te leggen wat het grondvlak van een
prisma is.

Lestekst

Het grondvlak van een *prisma* kun je als
volgt herkennen.

Stel je voor dat je het prisma in Google
SketchUp moet tekenen. Daarbij gelden de
volgende beperkingen:

- Je mag maar één vlak van dit prisma
tekenen.
- Je mag van deze vlakke figuur een
ruimtefiguur maken met het knopje 3d.

Het vlak dat je hebt getekend in Google
SketchUp is het *grondvlak*.

Voorbeeld

Je ziet *in figuur 5* een afbeelding van een
dak. Dit dak is een *prisma*.

Je mag maar één vlak van dit prisma
tekenen in SketchUp. Als je vlak B tekent
en dit vlak 3d maakt, ontstaat een balk.
Dus dat klopt niet. Als je vlak A tekent en
3d maakt (richting: naar 'achter'), dan
ontstaat het prisma.

Conclusie: vlak A is het grondvlak.

Van extraatje naar zelfstandig ‘vak’

Enkele jaren geleden liet ik mijn leerlingen tijdens de wiskundeles kennismaken met Google SketchUp. Eerst als ‘extraatje’ en later ter ondersteuning van het leerproces. Door de cursus volledig te digitaliseren had ik direct lesmateriaal ter beschikking om zogeheten opvanguren op een zinvolle wijze te ‘vullen’. Anderhalf jaar geleden wisselde ik van locatie en deed de gelegenheid zich voor de lessen Google SketchUp om te vormen tot zelfstandige XL-lessen. Tijdens de XL-lessen volgt een leerling gedurende zes weken een zelfgekozen cursus uit een divers aanbod, zoals sport, ICT, kunst. In deze enigszins vrije setting krijgen de leerlingen de mogelijkheid zich te verdiepen in de meer bijzondere opties van het programma, zoals het tekenen van modellen op basis van foto's.

Reacties van leerlingen en collega's

De leerlingen zijn over het algemeen erg enthousiast over het programma. Uit enquêtes blijkt dat met name de succesfactor in hoge mate hieraan bijdraagt; in woorden van een leerling: ‘Ik maak heel snel mooie dingen.’ Het gebruik van het programma tijdens een ‘gewone’ les wordt sowieso gewaardeerd, omdat het niet gewoon uit het boek is. Opvallend hierbij lijkt de tendens ‘hoe hoger het niveau, hoe lager het enthousiasme’. Uit de enquêtes die ik heb afgenomen onder vwo-leerlingen komt opvallend vaak de uitspraak ‘Kan dit niet gewoon uit het boek?’ of iets van gelijke strekking voor. Tegelijkertijd valt op dat leerlingen – op eigen initiatief – het programma gebruiken tijdens andere lessen, bijvoorbeeld om bij techniek een ideale slaapkamer te ontwerpen.

De reacties van collega's zijn enigszins terughoudend. Veel gehoord zijn opmerkingen als: ‘De docent moet wel erg goed overweg kunnen met de pc.’ en ‘De tijdsinvestering is enorm, ik krijg mijn boek nu al niet uit.’ Wel acht men het mogelijk gebruik te maken van het materiaal dat ik ontwikkeld heb. Ik denk niet dat dit bezwaarlijk is. Het gebruik van ICT in het algemeen en Google SketchUp in het bijzonder, zou al een grote stap voorwaarts zijn, omdat ik ervaar dat ICT het leerproces van de leerling kan ondersteunen.

Noot

- [1] Marc de Hoog (2012): *ICT in de wiskundeles – Google SketchUp*, deel 1. In: *Euclides* 87(7); pp. 289-290.

Over de auteur

Marc de Hoog is docent wiskunde, rekenen en informatiekunde aan de Interconfessionele Scholengroep Westland. Daarnaast is hij auteur ICT bij *Moderne Wiskunde*. Hij volgt een studie informatica aan de Open Universiteit. E-mailadres: hgm@isw.info

In memoriam Rudolf Troelstra

7 NOVEMBER 1917 - 3 MEI 2012

[Wim Groen]

Op 3 mei 2012 overleed te Bussum Rudolf Troelstra. Hij was wiskundeleraar in Sneek en in Hilversum, docent vakdidactiek wiskunde aan de VU te Amsterdam, onderwijsvernieuwer, leerboekauteur, entomoloog, natuurliefhebber, talenkenner en bovenal een beminnelijk, wijs en bescheiden mens.

Transformatiemeetkunde

Rudolf Troelstra was de spil in het project Transformatiemeetkunde^[1] dat tussen 1958 en 1964 in Hilversum is uitgevoerd. Voor dit project heeft hij samen met drie collega's een compleet nieuwe opzet^[2] van het onderbouwprogramma van de meetkunde geschreven. In die opzet probeerde men 'op natuurlijke wijze voort te bouwen op bij de leerlingen reeds aanwezige kennis van symmetrie, verschuiving en draaiing.' De kiemen voor deze nieuwe aanpak had hij al jaren eerder improviserenderwijs in zijn lessen ontwikkeld en getoetst. Hij was daartoe gekomen, omdat hij zag dat kinderen door tekenen en construeren beter gemotiveerd werden om met de meetkunde aan de slag te gaan. Bij de uitgeverij J.B. Wolters te Groningen is dit materiaal vanaf 1962 uitgebracht als de driedelige serie *Transformatiemeetkunde*^[3].

Voor het nieuwe meetkundeprogramma dat in 1968 werd ingevoerd, maakte de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde dankbaar gebruik van het in Hilversum ontwikkelde materiaal. De opzet en de aard van dit materiaal kwamen dicht in de buurt van wat de commissie voor ogen stond. Indirect heeft Troelstra dus grote invloed gehad op de vorm en de inhoud van het nieuwe meetkundeprogramma van 1968.

Moderne Wiskunde

In de vormgeving van het nieuwe wiskundeprogramma van 1968 speelde ook de methode *Moderne Wiskunde* een belangrijke rol. Deze methode was een vertaling en bewerking van in Schotland



Rudolf Troelstra (1917-2012)

ontwikkelde schoolboeken voor wiskunde. In de boekenlijsten stond H.J. Jacobs als eerste auteur vermeld, maar het was geen geheim dat Troelstra, Kniep en Krooshof de belangrijkste auteurs van de Nederlandse versie waren. Ook op latere versies van deze methode had Troelstra een beslissende invloed. Ik kom daar nog op terug.

Didactisch werk

Van meet af aan heeft Troelstra zich niet alleen bezig gehouden met de ontwikkeling van alternatief lesmateriaal, maar ook met de didactische en psychologische achtergronden van onderwijzen en leren. Dit bleef niet onopgemerkt. Al in de vroege jaren zestig gaf hij aan de VU als invaldocent colleges vakdidactiek wiskunde

omdat de toenmalige vakdidacticus ernstig ziek was. Tien jaar later, in 1972, stelde de VU hem aan als vakdidacticus wiskunde. Hij had op die baan niet gesolliciteerd en hij heeft ook geargeld of hij de uitnodiging zou aannemen, maar na zachte aandrang ging hij door de knieën.

In zijn colleges vakdidactiek zocht hij direct samenwerking met de docent algemene didactiek. Met hem samen bedacht hij het zogenoemde instituutspracticum; voor die tijd een novum. De beide docenten traden gezamenlijk op en ontwierpen per week een drie uur durende motiverende mix van praktische opdrachten en stukjes hoorcollege.

Een jaar na zijn aanstelling aan de VU werd ik daar zijn assistent. Zijn enorme kennis

van het vakgebied maakte grote indruk op mij. Daardoor was hij in die tijd voor mij meer een inspirerende leermeester dan een collega. Bijzonder was vooral het gemak waarmee hij de dingen deed. Bij de voorbereiding van de colleges en instituutspactica maakte hij een globaal en in mijn ogen summier plan. Bij de uitvoering ervan vulde hij dat summier plan moeiteloos in met voorbeelden uit de praktijk en de literatuur.

Vernieuwer

Omstreeks 1977 moest er van de methode *Moderne Wiskunde* een nieuwe versie komen. Troelstra vond dat zo langzamerhand de banden met de Schotse oorsprong wel konden verdwijnen en dat de methode beter moest worden toegesneden op de Nederlandse onderwijssituatie. In die Nederlandse situatie was in die tijd de discussie rond de middenschool actueel en veel onderwijsvernieuwers pleitten voor heterogene klassen in de onderbouw. Om met de heterogeniteit om te gaan kwam het BHV-model in zwang. Iedereen deed de basisstof (B). Wie de diagnostische toets onvoldoende maakte, ging aan de herhalingsstof (H) en wie verder kon, ging werken aan de verrijksstof (V). Troelstra vond dit een volkomen verkeerd model, omdat je geen gebruik maakt van de heterogeniteit in de groep. Door de kinderen aan verschillende taken te laten werken, maak je in feite homogene subgroepen en dat was niet de opzet. Je moet, zo zei hij, kinderen met verschillend niveau juist aan dezelfde opdrachten laten werken. De sterkeren kunnen dan de zwakkeren helpen. Door het geven van hulp aan zwakkere leerlingen intensiveren de sterke leerlingen hun leerproces, terwijl de zwakkeren ervan profiteren. Helemaal mooi zou het worden als je de opdrachten zo zou kunnen kiezen dat er op verschillend niveau aan gewerkt kan worden. De vierde onderbouwditie van *Moderne Wiskunde* (deel 1 verscheen in 1980) is op basis van deze filosofie geschreven, maar mede door gebrek aan achtergrondinformatie heeft deze vernieuwende aanpak bij de gebruikers onvoldoende weerklank gevonden.

Talenkenner

In de jaren zeventig liep in Zweden het IMU-project, een veelomvattend project voor individueel wiskundeonderwijs. Op

zeker ogenblik had Troelstra een grote hoeveelheid van de materialen van dit project aangeschaft: leerboekjes, toetsen en toelichtingen op de achtergronden en de manier van werken. Al deze materialen waren in het Zweeds en dus niet zo toegankelijk. Voor Troelstra echter geen bezwaar; na korte tijd had hij de meeste boekjes voorzien van vertaalde fragmenten en trefwoorden. Zoiets deed hij er gewoon even tussendoor. In Indonesië had hij ooit 'voor de aardigheid' Maleis geleerd, zodat je ook met de niet-Nederlandse mensen die je tegenkwam enigszins kon communiceren. Voor sommige hoogleraren vertaalde hij artikelen uit het Russisch en ook maakte hij vertalingen van opgaven uit een Russisch wiskundetijdschrift waarop hij geabonneerd was. Voor het proefschrift van Ed de Moor^[4] heeft Troelstra in de jaren negentig – hij was toen al geruime tijd gepensioneerd – delen van het werk van Sjochor'-Trotskij uit het Russisch vertaald. Al deze activiteiten hadden voor hem een jaloersmakende vanzelfsprekendheid.

Entomoloog en natuurkenner

Soms maakten we in de lunchpauze een wandeling door de VU-hortus. Zo'n wandeling was altijd een uiterst aangenaam terloops college. Over elke plant of elk insect of ander dier wist hij iets interessants te vertellen. Na zijn pensionering heeft hij zijn activiteiten als entomoloog nog geïntensiveerd. Hij had een grote insectenverzameling en hield in zijn woning regelmatig studiebesprekingen met andere insectenkenner. Ook 'echte' vaklieden beschouwden hem als een autoriteit op dit gebied.

De laatste jaren

Na zijn pensionering in 1980 heeft hij zich niet meer met het wiskundeonderwijs willen bemoeien. 'Ik heb het nooit zo prettig gevonden als mensen tot op hoge leeftijd wilden meeregeren en -beslissen. Daarom wil ik me in die wereld nergens meer mee bemoeien', heeft hij me wel eens gezegd.

Wel was hij – zoals hierboven al vermeld – actief in zijn andere deskundigheden.

En terloops heeft hij zich nog even de beginselen van de Turkse taal eigen gemaakt, zodat hij teksten in die taal ook kon begrijpen.

Tot op hoge leeftijd heeft hij nog zelfstandig

gewoond. De laatste drie jaren heeft hij gewoond in een verzorgingshuis in Bussum. Als je hem daar opzocht, was hij altijd goed gehumeurd, zeer tevreden en dankbaar voor de goede zorgen.

Op zijn overlijdensbericht stond de tekst uit Genesis 1: 'God keek naar alles wat hij had gemaakt en zag dat het zeer goed was.'

Noten

- [1] Zie bijvoorbeeld *Euclides*, jaargang 79; pp. 295-299.
- [2] Zie *Euclides*, jaargang 79; pp. 300-301.
- [3] R. Troelstra, A.N. Habermann, A.J. de Groot en J. Bulens: *Transformatiemeetkunde* 1, 2 en 3. Groningen: J.B. Wolters.
- [4] E.W.A. de Moor (1999): *Van Vormleer naar realistische meetkunde*. Utrecht: CD-bèta Press; isbn 90-73346-40-1

Over de auteur

Wim Groen (1940) was wiskundeleraar in Amsterdam en Hilversum, daarnaast (tot 2003) ook vakdidacticus wiskunde aan de VU te Amsterdam, aanvankelijk als assistent van Troelstra. Wim Groen was ook (mede)auteur van verschillende wiskundemethoden en van de opgavenbundels van de NVvW. E-mailadres: we-groen@casema.nl

Vanuit de oude doos

A^o 1929

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.

Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer een redelijk pittige analytische opgave uit 1929. Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerking aan.

De opgave

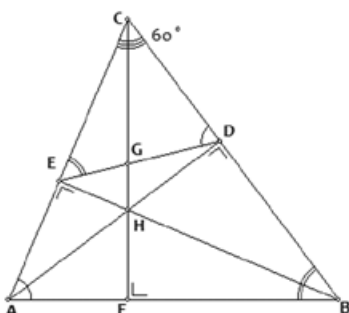
In de scherphoekige driehoek ABC zijn de hoogtelijnen AD en BE getrokken. De derde hoogtelijn snijdt ED in G zodanig, dat $EG : GD = 2 : 3$.

Bereken de hoeken van de driehoek als $\angle C = 60^\circ$ is.

Een situatieschets staat in **figuur 1**. Lukt het u verder?

Wellicht enige handvatten:

- ED is antiparallel aan AB , dus $\angle EDC = \angle A$, $\angle DEC = \angle B$.
- Met *gelijkvormigheid* is snel in te zien dat $\angle EHC = \angle A$, $\angle DHC = \angle B$ (of: $CDHE$ is een koordenvierhoek, dus $\angle EDC = \angle EHC$, $\angle DEC = \angle DHC$).
- De driehoeken EGC en HGD zijn gelijkvormig, de driehoeken GHE en GDC zijn gelijkvormig (in beide gevallen volgens *hh*).
- Hoe kan de gegeven verhouding worden gebruikt?
- *Hint* – De opgave stond in een examen analytische meetkunde.



figuur 1

Mijn oplossing

Er kan worden overgestapt op een analytische aanpak, we laten de handvatten van zojuist los. We kiezen eerst een geschikt assenstelsel: EB als horizontale en EC als verticale as; **zie figuur 2** waarin $O \equiv E$. Deze keuze is ingegeven doordat de zijden van driehoek CBE bekend zijn. We stellen $EC = 1$. In dit stelsel geldt: $C = (0, 1)$ en $B = (\sqrt{3}, 0)$.

Plan van aanpak – Beweeg D over lijnstuk BC , stel een formule op bij de lijn door D loodrecht op BC , die de x -as in H snijdt. Hierna kunnen formules worden opgesteld van CH en ED , en hun snijpunt G kan worden uitgerekend.

De gegeven verhouding $2 : 3$ vertalen we in $EG = \frac{2}{5} \cdot ED$, waarmee we uiteindelijk de exacte positie van D kunnen bepalen. Tot slot kan dan $\angle A = \angle EDC$ eenvoudig worden uitgerekend in driehoek EDC .

Probeer u het eerst even? Het wordt stoeien met wortels.

Mijn berekeningen zijn, onder meer in vectornotatie:

(1) Voor BC is een vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ zodat } D = (\lambda\sqrt{3}; 1 - \lambda),$$

waarbij $0 < \lambda < 1$.

(2) Voor DA is een vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} \lambda\sqrt{3} \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

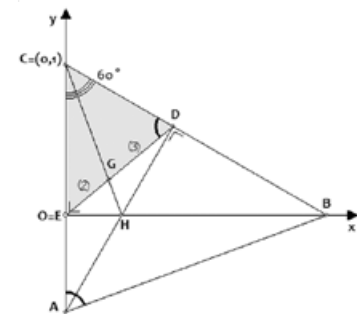
(3) Snijden met de horizontale as geeft voor het punt H :

$1 - \lambda + \mu \cdot \sqrt{3} = 0$, waaruit volgt dat $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda - 1)$, zodat $H = (\frac{1}{\sqrt{3}}(4\lambda - 1); 0)$.

(4) Voor CH is een vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 4\lambda - 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ en voor } ED: \tau \cdot \begin{pmatrix} \lambda\sqrt{3} \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

(5) Snijden van CH en ED geeft voor het



figuur 2

$$\text{punt } G: \begin{cases} \sigma(4\lambda - 1) = \tau\lambda\sqrt{3} \\ 1 - \sigma\sqrt{3} = \tau(1 - \lambda) \end{cases}.$$

(6) Uit dit stelsel kan σ worden geëlimineerd, waarna τ kan worden vrijgemaakt.

$$\text{Dit levert: } \tau = \frac{4\lambda - 1}{-4\lambda^2 + 8\lambda - 1}.$$

(7) Voor E op ED ($\equiv OD$) geldt $\tau = 0$

en voor D op ED geldt $\tau = 1$. Omdat

$EG = \frac{2}{5} \cdot ED$ is, geldt voor G op ED :

$\tau = \frac{2}{5} \cdot \frac{4\lambda - 1}{-4\lambda^2 + 8\lambda - 1} = \frac{2}{5}$, zodat $8\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$ met als enige tussen 0 en 1 liggende uitkomst, zie (1): $\lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{7} - 1)$.

(8) Dus: $\frac{4\lambda - 1}{-4\lambda^2 + 8\lambda - 1} = \frac{2}{5}$, zodat $8\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$ met als enige tussen 0 en 1 liggende uitkomst, zie (1): $\lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{7} - 1)$.

(9) Dus is, zie weer (1):

$$D = (\frac{1}{4}(\sqrt{21} - \sqrt{3}); \frac{1}{4}(5 - \sqrt{7})).$$

(10) $ED = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{21} - \sqrt{3})^2 + (5 - \sqrt{7})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14 - 4\sqrt{7}}$

(11) De sinusregel in driehoek EDC geeft, met $\angle D = \angle A$:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\frac{1}{2}\sqrt{14 - 4\sqrt{7}}} = \frac{\sin \angle A}{1}, \text{ zodat:}$$

$$\sin \angle A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14 - 4\sqrt{7}}}.$$

(12) Met de rekenmachine geeft dit uiteindelijk: $\angle A \approx 69,5533^\circ \approx 69^\circ 33' 12''$.

(13) En $\angle B$ mag u zelf doen.

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.

E-mailadres: alecluse@casema.nl



Jaarvergadering/ Studiedag 2012

TWEEDE UITNODIGING

[Marianne Lambriex]

Dit is de tweede uitnodiging voor de Jaarvergadering/studiedag 2012 van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 3 november 2012**.

Aanvang – 10:00 uur

Sluiting – 16:00 uur

Plaats – **Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal**

Agenda

10:00-10:50u – **Huishoudelijk gedeelte**

1. Opening door de voorzitter, mevr. M. Kollenveld.
2. Jaarrede door de voorzitter.
3. Notulen van de jaarvergadering 2011 (zie het volgende nummer van *Euclides*).
4. Jaarverslagen NVvW en *Euclides* (zie het volgende nummer van *Euclides*).

5. Verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing.
Bestuurslid H. Bijleveld is aftredend en stelt zich niet herkiesbaar.
Penningmeester F. van den Heuvel heeft eind juni zijn plaats in het bestuur

Korte introductie van de kandidaat-bestuursleden



Heleen Traas begon, na haar studie econometrie, haar loopbaan in de IT. Ze stapte in 2005 over naar het onderwijs en heeft daar geen moment spijt van gehad. Ze heeft veel plezier in zowel de wiskunde als het lesgeven. Zij hield zich naast het lesgeven de laatste jaren ook bezig met het nieuwe eindexamenprogramma

wiskunde A havo. Gaat zich nu verdiepen in het nieuwe programma wiskunde C havo.



Gert de Kleuver is geen onbekende binnen de NVvW. Zo is hij 9 jaar redactievoorzitter van *Euclides* geweest. Daarna heeft hij samen met Henk van der Kooij voor de vereniging het project RekenVoort als projectleider mogen leiden. Namens de NVvW heeft hij als meelezer gefunctioneerd om te komen tot een protocol dyscalculie. Gert is al jarenlang een trouw bezoeker van de Vakantiecursus en schrijft daarover jaarlijks een wervend verslagje in *Euclides*.



Lidy Wesker-Elzinga begon met lesgeven in 1986 op de avondschool in Enkhuizen/Hoorn. Zij was vervolgens ook werkzaam in het vavo en daarna bij het reguliere vo. Haar huidige school is het Bonhoeffercollege in Castricum. Daarnaast is ze vakdidacticus wiskunde bij de ILO-UvA en de

HvA in Amsterdam. Voorts is ze onder meer betrokken bij nascholingsprojecten, de NWD en het PWN.



Ab van der Roest is na zijn opleiding aan de VL-VU te Amsterdam en het vervullen van de dienstplicht vanaf december 1979 in het onderwijs werkzaam. Naast het lesgeven heeft hij zijn MO-b en zijn doctoraal wiskunde in Utrecht gedaan. Hij werkt sinds 1985 aan het Ichthus College in Veenendaal. Ab heeft voor de vereniging jarenlang

examenbesprekingen in Amersfoort geleid en in de Resonansgroep Herijking Bekwaamheidseisen gezeten. Ook heeft hij samen met Martin Kindt een Zebra-boekje over Babylonische wiskunde geschreven.

opgegeven (zie Mededeling elders in dit nummer).

De bestuursleden M. Kollenveld, H. van der Kooij en H. Rozenhart zijn aftredend en stellen zich herkiesbaar.

Het bestuur draagt de volgende kandidaten voor als bestuurslid:

mevr. H. Traas, mevr. L. Wesker, dhr. G. de Kleuver en dhr. A. van der Roest.

Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen tegenkandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.

7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vóór aanvang van de vergadering in te dienen bij de secretaris (*secretaris@nvvw.nl*).

8. Sluiting van de jaarvergadering.

Programma Studiedag

10:50-11:00u	Inleiding op de studiedag
11:00-11:45u	Plenaire lezing
11:45-12:00u	Koffie
12:00-13:00u	Workshopronde 1
13:00-14:00u	Lunchpauze, marktbezoek
14:00-15:00u	Workshopronde 2
15:00-15:20u	Koffie
15:20-16:00u	Plenaire voordracht
16:00-16:10u	Afsluiting

Themagedeelte – Wiskunde:

Kernvak!

Deze krachtige kreet wordt het thema van de studiedag in november 2012. Dat heeft het bestuur in haar vergadering van 25 januari j.l. bedacht. Hieronder staan de subthema's van de studiedag.

Slagen/zakken – Zoals iedereen weet is wiskunde weer stevig in beeld als een belangrijk schoolvak. In een tamelijk recent verleden was dat wel eens anders...

En dat nieuwe beeld hebben we te danken aan de overheid die in de PISA-resultaten van 2009 aanleiding zag de onderwijslat voor vo hoger te gaan leggen.

We doen het in PISA bij wiskunde goed tot heel goed als het gaat om de 'relatief

zwakkere' en de 'gemiddelde' leerling, maar we blijven onder de maat met de 'beter' en 'best' presterende leerlingen. En daar moet uiteraard iets aan gedaan worden. Dit was voor de minister een belangrijke aanleiding voor de presentatie aan de Tweede Kamer, in het voorjaar van 2011, van haar 'Actieplan Beter Presteren: opbrengstgericht en ambitieus' met als ondertitel 'het beste uit leerlingen halen'. De tekst van dit plan is te vinden via « *www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties/kamerstukken/2011/05/23/actieplan-vo-beter-presteren.html* ».

Wiskunde, Nederlands en Engels worden in dat plan aangewezen als dé doorstroomrelevante vakken in het vo waarop voorlopig wordt gefocust. Belangrijke punten in het plan, voor wat betreft wiskunde:

- meer specifieke tussendoelen voor de onderbouw van vmbo en havo/vwo;
- verplichte landelijke diagnostische toetsing op deze tussendoelen;
- de minister kan (op grond van een advies van de Onderwijsraad) zich niet voorstellen dat er minder dan een-derde van de onderwijstijd wordt ingeruimd voor de kernvakken wiskunde, Nederlands en Engels;
- de eerder genomen beslissing om voor de kernvakken de examenresultaten strenger te laten meetellen in de slaag/zakregeling blijft van kracht.

Sommige van deze punten lijken beloftevol (meer specifieke tussendoelen voor de onderbouw, wellicht meer onderwijstijd), terwijl andere (verplichte diagnostische toetsing, strengere slaag/zakregeling) een gevoel van onbehagen kunnen oproepen. De strengere slaag/zakregeling maakt het beroep van wiskundeleraar er niet gemakkelijker op. Wat vindt jouw directie er van als 10% meer leerlingen niet slaagt vanwege deze regeling en dat komt door hun wiskundige 'wanprestatie' bij het examen? Zo'n maatregel zorgt er voor dat je jezelf misschien verplicht voelt om meer te gaan inzetten op examentraining in plaats

van bezig te zijn met het onderwijzen en leren van wiskunde.

Tussendoelen – Het meer gedetailleerd beschrijven van tussendoelen voor het einde van de onderbouw lijkt een goede zaak. Dat geeft meer duidelijkheid voor docenten en auteurs van methoden om greep te krijgen op de te behandelen leerstof in de onderbouw. De kerndoelen die een aantal jaren geleden zijn beschreven waren te algemeen, en dus te vaag, geformuleerd. De SLO heeft – in opdracht van OCW – deze tussendoelen geformuleerd op basis van een al eerder opgeleverd document van cTWO. In het najaar is daarover een internet-enquête gehouden onder docenten en andere 'experts'. Op 12 december 2011 heeft de SLO een zogeheten validatiebijeenkomst belegd met docenten en (apart daarvan) met 'experts'. Binnenkort zal de SLO met een definitief voorstel komen. We zijn benieuwd hoe de, af en toe scherpe, discussie tijdens de expert meeting zal worden verwerkt.

Diagnostische toetsen – Omdat wiskunde een van de kernvakken is die aan het eind van de rit zwaar wegen in de zak/slaagregeling, wordt het nodig geacht om aan het eind van de onderbouw een beeld te krijgen of de leerling wel op de goede weg naar het eind is. En daarvoor is een landelijke toets bedacht, die onder verantwoordelijkheid van het CvE wordt gemaakt door het Cito. Met enige nadruk wordt gezegd dat die toets slechts diagnostisch is: scholen en leerlingen worden er niet op afgerekend. Wel moet duidelijk worden waar de leerling het goed doet en waar eventuele achterstanden zijn in de doorlopende leerlijn onderbouw-bovenbouw.

Het feit dat deze nieuwe tussendoelen voor alle leerlingen in enig onderwijstraject (vmbo, havo of vwo) op dezelfde manier voor alle leerlingen, via een landelijke toets, worden gemeten, staat haaks op de doelstelling van het Actieplan.



Daarin wordt gesproken over het 'beste uit leerlingen halen'. Maar elke leerling is een unieke persoon, met een eigen prestatieniveau. Dat moet je niet willen meten met een toets die voor alle leerlingen gelijk is. Dan is de kans groot dat je in dezelfde valkuil trapt als indertijd met de basisvormingtoets: zeer frustrerend voor de 'matig presterende' leerling en met weinig waarde voor de 'goed presterende' leerling.

Het beste uit leerlingen halen – Op 31 maart 2011 was er een consultatiebijeenkomst over het Actieplan, belegd door OCW, waarop het bestuur van de NVvW actief was vertegenwoordigd door Johan Gademan en Henk van der Kooij. Een verslag daarvan is te vinden op « www.actieplanbeterpresteren.nl ». In de discussie met een aantal deskundigen over 'opbrengstgericht werken' kwam op tafel dat toetsing van alle leerlingen met een landelijke toets en het stimuleren van individuele maximale leeropbrengsten bij leerlingen niet echt verenigbaar zijn. De meeste aanwezigen stemden daarmee in. In het verslag van die bijeenkomst is een uitspraak van Henk van der Kooij letterlijk geciteerd: 'Voor de deelnemers staat opbrengstgericht werken vooral voor een continu verbeterproces op individueel niveau met de drive om *te kietelen aan het plafond van capaciteiten van de individuele leerling*.'

Dat zou de uitdaging moeten zijn voor elke docent: haal het maximaal bereikbare uit elke individuele leerling, gegeven zijn/haar capaciteiten. Maar binnen de huidige onderwijscultuur is dit een moeilijke opdracht. En het wordt zeker niet gestimuleerd door landelijke toetsing die voor alle leerlingen gelijk is binnen het onderwijstraject wat zij doorlopen, ook al wordt die toets diagnostisch genoemd. Gelukkig zegt de minister in het Actieplan ook dat professionalisering van docenten op dit gebied (het beste uit de leerling halen) belangrijk is. Of dit ook wordt omgezet in financiële middelen om dat te bereiken

moet nog maar worden afgewacht. In dit opzicht is de politiek meestal niet erg bereidwillig om te investeren met geld.

Kennisbasis Hogescholen – Voor de lerarenopleidingen (hogescholen voor de tweedegraads opleiding van wiskundeleraars en de pabo's) is er ook een kentering in de bestaande praktijk zichtbaar. Door de invoering van het competentiegericht onderwijs in het hbo is de aandacht voor de ontwikkeling van vakinhoudelijke kennis van toekomstige docenten behoorlijk in het gedrang gekomen. OCW heeft bedreigd in te grijpen als de HBO-Raad niet zelf orde op zaken zou stellen. Aangestuurd door de HBO-Raad is voor een aantal vakken (waaronder wiskunde) een vakinhoudelijke kennisbasis geformuleerd waarover een beginnende docent moet beschikken als hij/zij begint met lesgeven. En uiteraard wordt daaraan een landelijk te gebruiken toets gekoppeld. Items voor een toetsbank worden al ontwikkeld en er is, vanuit de HBO-Raad, een vakcommissie ingesteld die de validiteit en correctheid van deze items en de daaruit gecomponeerde landelijke toetsen moet beoordelen. Dat gebeurt in het kalenderjaar 2012.

Digitale toetsing – Bij landelijke toetsing wordt in de discussies die voorafgaan aan invoering, steeds meer automatisch uitgegaan van digitaal toetsen. Dat geldt voor de diagnostische toetsing die bij het Actieplan is bedacht aan het einde van de onderbouw, voor de landelijke rekentoetsen 2F en 3F als onderdeel van het examen, voor de kennisbasis van de lerarenopleidingen, en dat geldt al langer voor de examinering bij vmbo BB en KB. Bij de kennisbasis van de lerarenopleidingen wordt voorlopig *Questionmark Perception* als standaard gehanteerd; bij de andere genoemde toetsen, die in handen van het Cito zijn, wordt nog steeds het zeer beperkte systeem *ExamenTester* van het Cito gebruikt. Wat je wiskundig kunt toetsen

wordt door deze systemen behoorlijk ingeperkt: je bent in de vraagstellingen gedwongen sommige vragen waarbij de strategie van aanpak belangrijker is dan het uiteindelijke antwoord, niet meer te stellen, omdat de beantwoording daarvan niet mogelijk is. Multiple choice-vragen en numerieke antwoorden zijn vaak de enige mogelijkheden die dergelijke toetssystemen toestaan. En dat is een grote aanslag op wat wij gewend zijn bij het toetsen van wiskundige kennis en vaardigheden.

Zoals u ziet bieden we een vol en gevarieerd programma, en belooft het weer een interessante dag te worden. De omschrijvingen van de workshops worden, net als vorig jaar, vanaf nu op de website van de NVvW gepresenteerd, tegelijkertijd met het uitkomen van dit nummer van *Euclides*.

De eindverantwoordelijke voor het themagedeelte is Henk van der Kooij (e-mail: h.vanderkooij@uu.nl).

De LIO-dag

Vorig jaar was dit onderdeel een groot succes en daarom herhalen we het dit jaar: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name voor de lio'ers. Het ochtendgedeelte gaat over hun afstudeerscriptie met pas afgestudeerden als sprekers en in de middag nemen ze deel aan het themagedeelte. De eindverantwoordelijke voor de LIO-dag zijn Erik Kruis (e-mail: e.kruis@fontys.nl) en Jos Slapak (e-mail: jos.slapak@han.nl).

Nieuwe leden

De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dat vindt plaats met een hapje en een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit. In de loop van oktober ontvangen de nieuwe leden hiervoor een persoonlijke uitnodiging via een e-mailbericht.

Kosten

De studiedag is gratis voor leden.

Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee! Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 70,00 (deze kosten kan de school betalen uit de nascholingsgeldten en zijn als vakbondscontributie op te voeren!). Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2013, inclusief alle faciliteiten, waaronder de 7 nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, gratis toegang tot examenbesprekingen in het voorjaar en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen. Ook studenten zijn welkom; zij betalen € 35,00. Wie een lunch bestelt betaalt daarvoor € 10,00.

Aanmelding

Aanmelding dient tijdig te geschieden **vóór 13 oktober 2012**.

Vorig jaar melden zich nog 106 enthousiaste deelnemers na de sluiting van aanmelding. Dat leverde voor de organisatie veel problemen op. Bij onvoldoende deelnemers bij de voorinschrijving van een werkgroep zal deze niet doorgaan. De werkgroepvoerders stellen hun tijd en inzet gratis ter beschikking en het is dan teleurstellend om voor twee personen een lange trip te moeten maken. Voor de organisatie (ook vrijwilligers) is het van belang dat u zich op tijd aanmeldt. Dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de website van de vereniging (www.nvvw.nl). Daarop staat het volledige programma, de workshops waaruit u een keuze kunt maken. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen.

Leden die een lunch willen gebruiken, maken het voor hen geldende bedrag over op bankrekeningnummer 143917 ten name van *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* te Dronten. Betaalt u via een gezamenlijke of schoolrekening of

onder een andere naam, vermeld dan ook de volledige deelnemersnaam, adres en woonplaats.

Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel.

	zonder lunch	met lunch
Lid	gratis	€ 10,00
Niet-lid	€ 70,00	€ 80,00
Student (niet-lid)	€ 35,00	€ 45,00

De plaatsing in werkgroepen geschiedt in de twee laatste weken in volgorde van binnenkomst van aanmelding. Anders dan in voorgaande jaren wordt de indeling een paar dagen voor de studiedag op de website gepubliceerd. Aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens.

Ter plaatse aanmelden is mogelijk, echter niet wenselijk omdat het kunnen bijwonen van een werkgroep afhankelijk is van de beschikbare ruimte.

De eindverantwoordelijken voor de indeling in de workshops zijn Henk en Arja Bijleveld (e-mailadres: henk.bijleveld@gmail.com).

Certificaat

De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken. Wilt u een certificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum.

Deze professionalisering is gecertificeerd door de NVvW ten behoeve van het Beroepsregister: Registerleraar.nl. Validering: 4 punten.

U kunt uw certificaat na afloop van de studiedag (vanaf 15:45u) in ontvangst nemen, op vertoon van een geldig identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele studiedag heeft meegemaakt. Certificaten worden niet nagestuurd.

Informatie

Contactpersoon voor de jaarvergadering/studiedag is Marianne Lambriex (e-mail: m.lambriex@nvvw.nl) en bij onbereikbaarheid én noodgeval Kees Lagerwaard (tel. 026-3813646 / e-mail: secretaris@nvvw.nl).

MEDEDELING/ VAN DE BESTUURSTAFEL

dinsdag 26 juni 2012

Penningmeester Frank van den Heuvel heeft ons laten weten dat hij om persoonlijke redenen zijn bestuurstaken neerlegt. Het bestuur respecteert deze beslissing en dankt Frank hartelijk voor alles wat hij in de afgelopen vier jaar voor de NVvW heeft betekend.

Er zal naar een tijdelijke oplossing worden gezocht om de bestuurstaken van Frank over te nemen. Op de jaarvergadering van 3 november a.s. hoopt het bestuur een nieuwe penningmeester te presenteren.

Kees Lagerwaard, secretaris NVvW

Proniks delen

[Lieke de Rooij en Wobien Doyer]

Deze puzzel is gemaakt naar een idee van Frits Göbel.

Pronikgetallen zijn natuurlijke getallen die ontstaan door een natuurlijk getal te vermenigvuldigen met zijn opvolger. $6 (= 2 \times 3)$, $20 (= 4 \times 5)$ en $552 (= 23 \times 24)$ zijn pronikgetallen.

Formeel: als n in $\mathbb{N}$, dan is $n(n+1)$ een pronikgetal.

Een andere definitie, die natuurlijk op hetzelfde neer komt, is: een pronikgetal is het dubbele van een driehoeksgetal.

Over het woord *pronik* is discussie mogelijk: het zou *promik* moeten zijn, naar het Griekse woord $\piρομηκης$ (*promèkès*) = langwerpig.

We definiëren nu voor $n > 1$ de functie k van n als: $k(n)$ is het kleinste pronikgetal dat deelbaar is door n .

Voorbeeld. $k(18) = 72$, want $72 = 8 \times 9$ is het kleinste pronikgetal dat deelbaar is door 18.

Vervolgens definiëren we de functie g van n als: $g(n) = \frac{k(n)}{n}$.

Voorbeeld. $g(18) = 4$, want $k(18) = 72$ en $\frac{72}{18} = 4$.

In **figuur 1** ziet u de grafiek van functie $g(n)$. Voordat u aan de opgaven begint, is het wellicht zinvol om eerst zelf voor een aantal waarden van n de functiewaarde $g(n)$ te bepalen en te zien of u daarbij al een idee krijgt hoe de merkwaardige structuur die in de grafiek te zien is, kan worden verklaard. U ziet dat een groot aantal punten (ongeveer?) op een rechte lijn liggen, met een veel grotere waarde van $g(n)$ dan de rest van de punten.

Opgave 1

Is deze lijn echt een rechte lijn, en voor welke waarden van n ligt $g(n)$ er (ongeveer?) op? De 'wolk' die wordt gevormd door alle andere punten, lijkt aan de bovenkant te worden begrensd door een andere rechte lijn.

Opgave 2

Voor welke waarden van n ligt $g(n)$ op deze bovengrens? De vergelijking van die grenslijn wordt later in dit stukje genoemd, maar wellicht vindt u het leuker hem eerst zelf te bepalen.

De grafiek suggereert dat het hele gebied tussen de twee lijnen leeg is.

Opgave 3

Toon aan dat inderdaad voor alle andere waarden van n geldt: $g(n) < (n-2)/4$, of nog beter, scherp deze grens zo mogelijk aan.

Extra opgave (levert geen punten op)

Als u de figuur goed bekijkt, ziet u onder de twee al besproken lijnen nog minstens twee lijnen waarop meer punten liggen dan op grond van toeval mag worden verwacht. Hoe zit dat?

Een niet zo makkelijk te bewijzen stelling van Dirac zegt: In iedere rij $ak + b$ met $\text{ggd}(a, b) = 1$ zijn er oneindig veel k waarvoor $ak + b$ priem is.

Voorbeeld. $a = 4$ en $b = 15$. Nu is het grootste gehele getal waardoor a en b te delen zijn, 1; dus $\text{ggd}(a, b) = 1$.

Dan is $ak + b$ priem voor $k = 1, k = 2, k = 4, k = 7, \dots$ De stelling zegt: Er zijn zo oneindig veel waarden voor k met $ak + b$ priem.

Deze stelling is nuttig bij de volgende opgave.

Opgave 4

De functie g neemt alle gehele waarden > 0 aan, en bij iedere waarde c zijn er oneindig veel n met $g(n) = c$. Toon dit aan.

Inzenden oplossingen

Oplossingen kunt u mailen naar liekewobien@hotmail.nl of per gewone post opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk.

U kunt met uw oplossing maximaal 20 punten verdienen voor de ladderwedstrijd. De deadline is **9 oktober 2012**.

Stuur vooral ook uw oplossing in als u maar een deel van de opgaven heeft gemaakt. Ook dat levert punten op voor de ladderwedstrijd!

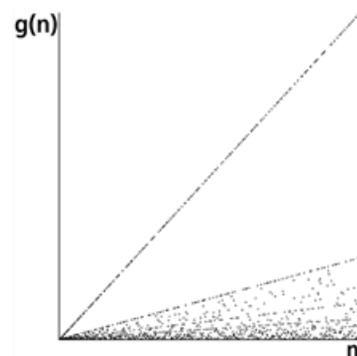
Na elke aflevering van de puzzelrubriek ontvangt de inzender die het hoogst op de

ladder staat, een boekenbon ter waarde van € 20,00 en begint daarna weer op 0 punten. Als u oplossingen hebt ingezonden voor de puzzelrubriek van Frits Göbel, dan krijgt u 10% van de punten die u daar nog voor had staan, als start voor de nieuwe serie (**zie tabel 1**)

Wij zijn op zoek naar hulp bij het vullen van deze rubriek. Wij nodigen u uitdrukkelijk uit om ons meer of minder uitgewerkte ideeën voor nieuwe puzzels te sturen.

*Met bruikbare ideeën kunt u **extra punten** voor de ladderwedstrijd verdienen.*

Veel puzzelplezier!



figuur 1

Ladderstand augustus 2012

Naam	aantal punten	
	oud eind jrg. 86	nieuw start jrg. 88
T. Kool	566	57
H. Linders	533	54
H. Bakker	497	50
K. van der Straaten	435	44
K. Verhoeven	436	44
W. van den Camp	422	43
J. Remijn	387	39
H.J. Braskamp	352	36
J. Verbakel	321	33
R. Stolwijk	287	29
N. de Bruin	269	27
J. Meerhof	269	27
G. Riphagen	267	27
L. Pos	252	26
G. van Steeg	242	25
M. Woldinga	249	25
H. Klein	154	16
C. de Jong	149	15
R. Meulemans	144	15
M. Müller	133	14
J. Smits	126	13
P.K. Jansen	35	4
P.X. Dillo	20	2
E. van Kervel	14	2

De heer J. Hanenberg heeft een boekenbon ontvangen na publicatie van de laatste ladderstand.

tabel 1

De reacties op Doordenkers 87-6 en 87-7

Doordenker 87-6

De opgave was:

Drie gebeurtenissen A, B en C hebben periodiek plaats, A om de 30, B om de 36 en C om de 40 dagen; als ze op Woensdag 23 September 1925 zijn samengevallen, op welken datum zullen ze dan voor den vierden keer op een Vrijdag samenvallen?

Deze opgave kwam uit een rekenboek van Pieter Wijdenes uit 1926. De oudere puzzelaars onder ons zullen direct de impliciete verwijzing herkend hebben naar het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) van drie gehele getallen. Wellicht wisten ze zich, misschien met enige moeite, te herinneren hoe je dat ook weer moest berekenen. Dat gaat namelijk niet zo eenvoudig als met twee gehele getallen. Voor twee gehele getallen a en b geldt de eenvoudige formule:

$$\text{kgv}(a, b) = (a \times b) : \text{ggd}(a, b)$$

waarbij $\text{ggd}(a, b)$ de *grootste gemeenschappelijke deler* is van a en b .

Bij drie en meer getallen geldt deze formule niet. In dat geval ontbind je de getallen in priemfactoren en neemt dan het product van de hoogste gevonden machten van de factoren.

Doordenker **Kees Vugs** nam de moeite om dat uit te schrijven:

$$30 = 2 \times 3 \times 5 ; 36 = 2^2 \times 3^2 ; 40 = 2^3 \times 5$$

$$\text{kgv}(30, 36, 40) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

Als je het zo ziet staan, is het allemaal heel vanzelfsprekend en direct toepasbaar op grotere aantallen gehele getallen. Dus om de 360 dagen zullen de gebeurtenissen weer samenvallen. Maar wanneer is dat voor de vierde keer op een vrijdag?

De meest duidelijke en elegantste oplossing komt van **G. Riphagen**.

- Om de 360 dagen vallen de gebeurtenissen weer samen; $360 \equiv 3 \pmod{7}$.
Dus bij elke cyclus van 360 dagen schuift de dag van de week drie dagen op.
- Het begin is op een woensdag (23 september 1925). Dus voor het eerst op een vrijdag na drie cycli van 360 dagen (wo $\rightarrow$ za $\rightarrow$ di $\rightarrow$ vr). Daarna opnieuw op een vrijdag na zeven cycli van 360 dagen ($7 \times 3 = 21$ dagen ; $21 \equiv 0 \pmod{7}$).

- $360 \equiv -5 \pmod{365}$. Bij een 'normaal' jaar (365 dagen) loopt de datum 5 dagen terug en bij een schrikkeljaar (366 dagen) loopt hij 6 dagen terug per cyclus van 360 dagen.
- Begin: woensdag 23 september 1925. Na $3 + 3 \times 7 = 24$ periodes van 360 dagen voor de vierde keer op vrijdag. Dat is, op de schrikkeldagen na, 24 jaar – 120 dagen. Dan zitten we in de buurt van mei 1949. Van september 1925 tot mei 1949 zijn er 6 schrikkeldagen (1928, 1932, 1936, 1940, 1944 en 1948). De datum loopt dus $24 \times 5 + 6 = 126$ dagen terug. $31(\text{mei}) + 30(\text{juni}) + 31(\text{juli}) + 31(\text{aug}) + 23(\text{sep}) = 146$; $146 - 126 = 20$.
- Dan is vrijdag 20 mei 1949 de gezochte datum.

Op de opgave kwamen acht reacties binnen, waarvan vijf met de juiste oplossing. Rekenkampioen **Willem Bouman** stuurde de opgave door naar drie buitenlandse rekenkompanen. Zij gaven alle drie het juiste antwoord.

Doordenker 87-7

De opgave was:

Het was nog volop oorlog, toen op een morgen, tegen 12 uur, Higginbotham, de trouwe roodharige butler van Sir Patrick Youtellme, door de huisknecht naar de hall werd geroepen om raad te schaffen. Daar stonden namelijk 12 militairen voor de deur, een sergeant en 11 manschappen, moe van een lange mars. Ze hadden nog precies 20 km af te leggen, vertelde de sergeant, en ze moesten zich zo spoedig mogelijk en tegelijk in het naastbijgelegen dorp melden. Was hier soms een of ander vehikel te krijgen?

Sir Patrick was afwezig, maar dat was voor Higginbotham geen bezwaar om te zinnen op een oplossing.

'Wij hebben een afgedankt Fordje', zei de butler tot de sergeant. 'Er kunnen behalve de chauffeur 4 passagiers in en het loopt niet meer dan 20 km per uur. Hoe snel kunnen uw manschappen marcheren?'

'Ik vrees, dat 't wel niet meer zal zijn dan 4 km per uur. Ze zijn doodmoe en zwaar bekapt.'

'Dan zal ik u zeggen, wat we doen', zei Higginbotham. 'Ik ga rijden met vier van uw mannen, de andere acht gaan te voet. Ik zet de vier mannen onderweg ergens af, rijdt terug en pik vier van de anderen op zodra ik die 8 voetgangers tegen kom. Ik zet ook die vier

onderweg af en rijdt terug om de laatste vier te halen. Alles wat ge te doen hebt is dus, dat ge te voet naar uw bestemming gaat tot ik u oppik.

De rest doe ik.'

Aldus geschiedde. Het gezelschap, zowel als het aftandse Fordje met Higginbotham aan het stuur, vertrok om 12 uur.

Hoe laat waren ze allen op hun plaats van bestemming?

Onder het motto 'Reken minder' leverde **Gerard Koolstra** een oplossing voor het algemene probleem voor een groep die k maal zo groot is als de capaciteit van het Fordje, uitgaande van het gegeven dat de afstand die de auto in 1 uur aflegt door de wandelaars in 5 uur wordt afgelegd, en van de aanname dat elke soldaat een even groot deel van de tocht loopt, anders is de oplossing niet optimaal. Het onderhavige geval $k = 3$ leidt bij hem tot het juiste antwoord. De gevallen $k = 1, 2$ en 4 zijn dan meteen een mooie controle op de correctheid van de procedure.

De duidelijkste en elegantste oplossing komt ook nu weer van de hand van **G. Riphagen**.

De Ford gaat 5 keer zo snel als de lopende militairen. Als de Ford een bepaalde afstand aflegt met 4 militairen aan boord, de militairen afzet en leeg weer omkeert tot de andere lopende militairen ontmoet worden, ligt het keerpunt op een afstand die drie keer zo groot is, als wat de lopende militairen hebben afgelegd.

Immers. Afstand lopers is a . Keerpunt ligt op $(a + b)$.

De Ford heeft dan na terugkeer afgelegd $(a + 2b)$.

Dan moet er gelden: $(a + 2b) = 5a$, zodat $b = 2a$.

Het keerpunt $(a + b)$ ligt dan op $3a$.

Er passen maar vier van de twaalf militairen in de Ford. Die moet dus drie maal een stuk rijden. Alle militairen moeten twee maal een stuk (a) lopen en mogen één keer een stuk ($3a$) meerijden. Totaal $5a = 20$ km. Dus $a = 4$ km en $3a = 12$ km.

Twee maal 4 km lopen duurt 2 uur. Eén maal 12 km rijden duurt $12 : 20$ uur = 36 minuten. Totaal 2 uur en 36 minuten. Aankomst 14:36 u.

Van de acht inzenders (waarvan twee oplossingen van de hand van **Auke Smid**) leverden zeven het juiste antwoord.

**Zebraboekjes**

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook www.nvww.nl/page.php?id=7451
en/of www.epsilon-uitgaven.nl

**Nomenclatuurrapport Tweede fase
havo/vwo**

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Voor overige internet-adressen zie:

www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:

www.nvww.nl/forum.html

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (dklingens@gmail.com). Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

jaargang 88

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	23 oktober 2012	28 aug 2012
3	18 december 2012	23 okt 2012
4	8 februari 2013	4 dec 2012
5	26 maart 2013	29 jan 2013
6	14 mei 2013	19 mrt 2013
7	25 juni 2013	29 apr 2013

vrijdag 21 september, Nijmegen

Wiskundetoernooi 2012
Organisatie Radboud Universiteit

**woensdag 26 september, Amersfoort
(CPS)**

NVORWO-jaarvergadering en
studiedag
Organisatie NVORWO

donderdag 27 september, Utrecht

Bèta onder de Dom
Organisatie Bètasteunpunt Utrecht

zaterdag 3 november, Veenendaal

NVvW-jaarvergadering en studiedag
Organisatie NVvW
Zie ook pag. 324 e.v. in *Euclides* 87(7) en
pag. 62-65 in dit nummer.

zaterdag 17 november, Nijmegen

Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis i.s.m.
FNWI van de Radboud Universiteit

woensdag 21 november, Nieuwegein

Conferentie: Alledaags rekenen
Organisatie Steunpunt Taal & rekenen mbo

vrijdag 23 november, Utrecht

ELWIER-conferentie
Organisatie ELWIER, Panama, SLW,
Vadiwulo

dinsdag 27 november, Utrecht

Conferentie: Rekenbewust vakonderwijs in
het vo
Organisatie APS

2013**zaterdag 5 januari, Utrecht**

KWG Wintersymposium: Wiskunde met
natuurkunde
Organisatie KWG

vr 1 en za 2 feb, Noordwijkerhout

Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Flsme

Uitdaging:

Kiest u voor de workshop of ontdekt u de *fx-CG20* zelf?

Ontdek de eenvoud van de *fx-CG20* in een professionele Casio Workshop, die op afspraak én bij u op locatie kosteloos zal worden gegeven. Casio Educatief Consulent David Kropveld zorgt er voor dat u zich de werking van de *fx-CG20* in korte tijd eigen maakt. Vele collega's gingen u voor.

- Supersnel resultaat in berekening én weergave.
- Menustructuur op basis van iconen navigatie.
- Hogeresolutie LCD-kleurenscherm 65.000 kleuren.
- Haarscherpe grafieken: weergave als in een studieboek.
- Software voor projectie en presentatie in de klas.

Test u de *fx-CG20* of een andere Casio rekenmachine liever zélf? Maak dan gebruik van een speciaal geprijsd docentenexemplaar.

Kijk in kleur op
www.casio-educatie.nl



Informeer naar de Casio *fx-CG20* Workshop of bestel uw speciaal geprijsde docentenexemplaar via e-mail: educatie@casio.nl



CASIO *fx-9860GII*

Rekengemak: de grafische rekenmachine *fx-9860GII* met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB groot Flash-ROM-geheugen.



CASIO *fx-82ES PLUS*

Geniale oplossing: de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx-82ES Plus*, met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie. Het puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl