Rekenen aan wortels
Werkblad – 546121 = …

Vooraf – De vragen en opdrachten in dit werkblad die vooraf gegaan worden door ▤, moeten *schriftelijk* worden beantwoord.
Daarbij moet altijd duidelijk zijn 'hoe' de antwoorden gevonden zijn. Het geven van *alleen* een antwoord als 'ja' of iets als '$a = 9$' (zonder enige toelichting) is dus *niet* voldoende.
Het gebruik van een rekenmachine bij dit werkblad is **alleen toegestaan** om berekeningen te controleren!

Studielast
: 8 à 10 slu

Voorkennis
: begrippen als term, factor, coëfficiënt / eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging / rekenvaardigheid / herkennen en berekenen van kwadraten / machten en wortels / enige vaardigheid in het interpreteren van formules

Benodigdheden
: zakrekenmachine

PW-vorm – Het *talstelsel* waarin we berekeningen uitvoeren (of dat nu is bij wiskunde, natuurkunde of bij het boodschappen doen) is gebaseerd op het getal 10. Gevolg daarvan is dat we 10 verschillende *cijfers* gebruiken (0, 1, 2, …, 9) waarmee de *getallen* worden 'beschreven'.
Maar er is meer. De betekenis, de *waarde*, die we aan de *dezelfde* cijfers in die getallen toekennen, kan verschillen.
De 3 in 739 is een 30-tal, terwijl de 3 in 379 een 100-tal is. In 333 heeft elke 3 een andere waarde: van links naar rechts 300, 30, 3.
Daarom is $333 = 300 + 30 + 3$.
De *positie* (plaats) die een cijfer in een getal heeft, bepaalt de *waarde* van dat cijfer in het getal. Daarom is ons talstelsel een *positie-waarde-stelsel*.
We kunnen de waarde van de cijfers in een getal met behulp van (machten van) het getal 10 zichtbaar maken:

$$739 = 700 + 30 + 9 = 7\times10^2 + 3\times10^1 + 9\times10^0$$

De exponenten in de machten van 10 (2, 1, 0) geven daarbij de positie aan. Let wel, de 9 staat op de 0*e positie* van 739 (9 is de coëfficiënt van 10^0).
De vorm waarin een getal als de som van een aantal machten van 10 wordt geschreven, heet in dit werkblad de *PW-vorm* (de *positie-waarde-vorm* van een getal).
Het aantal termen in de PW-vorm is dus gelijk aan het aantal cijfers van het getal.

Voorbeeld. De volgende getallen zijn in de PW-vorm geschreven:
- $23 = 2\times10^1 + 3\times10^0$
- $1024 = 1\times10^3 + 0\times10^2 + 2\times10^1 + 4\times10^0$
- $340317 = 3\times10^5 + 4\times10^4 + 0\times10^3 + 3\times10^2 + 1\times10^1 + 7\times10^0$

Maar we kunnen natuurlijk ook schrijven:
- $23 = 2 \times 10 + 3$ (en in dit geval dus *niet* $23 = 20 + 3$)
- $1024 = 10^3 + 2 \times 10 + 4 \times 1$
- $340317 = 3 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 10 + 7$

Let wel: 10 en 7 worden in dit laatste geval *niet* opgeteld. ◊

In het tweede deel van het voorbeeld zijn enkele regels toegepast die je bij het schrijven van getallen in de PW-vorm mag toepassen.

1) Is in een term van de PW-vorm een coëfficiënt van een macht van 10 gelijk aan 0, dan mag je die term weglaten.
2) 1×10^p mag je schrijven als 10^p.
3) 10^1 mag geschreven worden als 10; ook 1×10^1 mag geschreven worden als 10 (volgens regel 2 met $p = 1$).
4) $a \times 10^0$ mag geschreven worden als $a \times 1$ of als a.

N.b. Als je regel 1 toegepast hebt, dan is het aantal termen van de PW-vorm natuurlijk *niet* meer gelijk aan het aantal cijfers van het betreffende getal.

Opmerking. Het is in de *rekenkunde* (en daarmee ben je nu bezig) ongebruikelijk een getal te laten beginnen met een 0. Dus wordt 0347 geschreven als 347.

Opgave 1

- Schrijf de getallen 1, 10, 100, 1000 en 10001 in de PW-vorm.
- Doe hetzelfde met 7, 73, 73100 en 731927307.

Verkort – Soms kennen we de cijfers van een getal niet, maar weten we wél het *aantal* cijfers waarmee het getal geschreven wordt.
De cijfers kunnen we dan met letters aangeven als 'variabelen'. We beginnen dan meestal met a, b, c, … en reserveren x, y, z voor bijzondere gevallen. Het laatste cijfer (op positie 0 in het getal) geven we soms aan met de letter k.
De waardes die a, b, c, … kunnen aannemen, zijn dus in principe 0, 1, 2, …, 9.
Voor de getallen zelf gebruiken we hoofdletters (meestal een G).

Voorbeeld. Voor een getal G van 4 cijfers is de PW-vorm dus te schrijven als:
$G = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$
maar, $G = 1000a + 100b + 10c + d$ mag natuurlijk ook.
In dit geval is dus zeker dat $a \neq 0$ (waarom?). ◊

De PW-vorm van een getal kunnen we, bij gebruik van letters als cijfers, ook korter schrijven, in de *verkorte PW-vorm*:
Voor een getal G van 4 cijfers schrijven we in plaats van:
$G = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$
verkort:
$G = \overparen{abcd}$
Het 'boogje' boven de letters geeft dus aan dat met die letters *cijfers* bedoeld zijn. Verder is $a \neq 0$ en hoeven de waardes van a, b, c, d natuurlijk niet alle verschillend te zijn.

Maar staat er bijvoorbeeld $\overparen{abab}$, dan hebben de a's en de b's in dat getal natuurlijk *dezelfde* waarde.

Weten we het aantal cijfers van G *niet*, dan schrijven we:
$G = \overgroup{a \dots k}$ of $G = \overgroup{abc \dots k}$, en soms ook wel $G = \overgroup{abc \dots}$

N.b. De … in de *verkorte* PW-vorm geven aan dat het *aantal* cijfers (en dan meestal ook de waardes daarvan) op die plaats in het getal onbekend is.

Algemeen – Voor een getal G dat bestaat uit (n + 1) cijfers, is:
$G = \overgroup{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_3 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n \cdot 10^0$, met $a_0 \neq 0$

Opmerking. Het kan voorkomen dat je van een getal G één of meer cijfers wél kent. In zo'n geval schrijf je die bekende cijfers (indien mogelijk) op de juiste positie in de verkorte PW-vorm.

Opgave 2

Het getal $G = 3231$ voldoet aan $G = \overgroup{a2a1}$. Immers: $a = 3$.

- Welke andere getallen voldoen hier ook aan?
- Schrijf alle getallen op die voldoen aan $\overgroup{aba9}$.
- Welke waardes van x voldoen aan $\overgroup{x3x}$?

Opgave 3

- Schrijf $G = \overgroup{1ab2}$ in de PW-vorm.
- Doe hetzelfde met $H = \overgroup{100ab}$.
- Kan het getal $B = \overgroup{100 \dots b}$ in de PW-vorm worden geschreven? Verklaar je antwoord.

Opgave 4

Van een getal G is de PW-vorm: $G = p \cdot 10^5 + q \cdot 10^4 + r \cdot 10^3 + s \cdot 10^2$.

- Schrijf G in de *verkorte* PW-vorm.
- Doe hetzelfde met $H = a \cdot 10^8 + b$.
- En ook met $K = 10^7 + 10^6 + 10^4 + 10p + q$.

Opgave 5

- Als $G = \overgroup{1abc2}$, wat is dan de kleinste waarde van G? En wat is de grootste waarde?
- Beantwoord dezelfde vragen voor $H = \overgroup{abcd3}$.

Met de verkorte PW-vorm kun je nog wel enkele andere berekeningen maken.

Opgave 6

- Gegeven is: $2 \cdot \overgroup{43a} = 872$. Gebruik de PW-vorm voor een berekening van de waarde van a.
- Voor welke waardes van het cijfer p is $2 \cdot \overgroup{43p} = \overgroup{86q}$?
  Welke waardes kan het cijfer q hier aannemen?

Opgave 7

- Bewijs dat $10 \cdot \overgroup{ab} = \overgroup{ab0}$ door gebruik te maken van de PW-vorm.
- Bewijs dat $100 \cdot \overgroup{ab} = \overgroup{ab00}$.
- Bewijs dat $\overgroup{a0} + \overgroup{b} = \overgroup{ab}$.
- Waarom is $\overgroup{ab0} + 5 = \overgroup{ab5}$?

Opgave 8

- Bereken $P = \overline{a27} + 18$ en $Q = \overline{a27} - 18$.
  Aanwijzing – Geef je antwoorden in de *verkorte* PW-vorm en óók in de 'gewone' PW-vorm.
- Kan je $S = \overline{a27} + 73$ berekenen? Zo ja, doe dat. En zo nee, waarom niet?
  Wat is de grootste waarde van S, en wat is de kleinste?

Opgave 9

Gegeven is: $\overline{aa} + \overline{b} = \overline{b00}$.

- Bereken a en b. Licht je antwoord zeker toe.

Iemand berekent $G = \overline{ab} + \overline{c}$. Hij vindt als antwoord $G = \overline{b0}$. De beide b's stellen natuurlijk hetzelfde cijfer voor.

- Druk a in c uit. Licht je antwoord toe!
  Aanwijzing – Dus: a = … (en op de … staat hier 'iets' met c, en *geen* b).

Kwadraten – Omdat je in dit werkblad zult gaan rekenen aan (met) wortels, en wortels 'iets' te maken hebben met de kwadraten van de gehele getallen, herhalen we enkele belangrijke zaken over kwadraten.
Allereerst, er wordt van je verwacht dat je de kwadraten van 0 t/m 20 *in ieder geval* uit je hoofd kent. Om je geheugen wat op te frissen staan die kwadraten nog eens hieronder in een tabel (een *kwadraattafel*).

$p \setminus q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	…				…				
3	…		…							

Kwadraattafel: $(10p + q)^2$

Opgave 10

Maar er zijn natuurlijk nog welke enkele andere kwadraten die je uit je hoofd kent; zie de … in de tabel hierboven.

- Bereken ook: 30^2, 50^2, 80^2, 100^2, 1000^2, $(10^3)^2$.
- Werk de haakjes weg uit $(10^n)^2$ en uit $(10^{2n})^2$.
- Bereken op *twee* manieren $(16 \times 5)^2$.

Verder zijn enkele eigenschappen van machten van belang, vooral als je andere dan de genoemde kwadraten *zonder rekenmachine* (maar wel gewoon op papier) wilt berekenen.
Deze eigenschappen zijn:

A. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ B. $(a^p)^q = a^{pq}$
C. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
D. $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$ E. $(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$

Opmerking. Vergeet bij formule E het *dubbele product* ($2pq$) niet, tenzij je opzettelijk fouten wil maken!

Voorbeelden
Formule A zal je in een enkel geval van rechts naar links gebruiken, namelijk bij het ontbinden in factoren.

- $10^7 = 10^{5+2} = 10^5 \times 10^2$
- $10^5 = 10^{8-3} = 10^8 \times 10^{-3}$

Formule B gebruik je natuurlijk als er een kwadraat van een macht staat.

- $(10^7)^2 = 10^{14}$
- $(10^n)^2 = 10^{2n}$

Formule C kun je soms gebruiken om het kwadraat van wat grotere getallen te berekenen. Je splitst dan het getal waarvan je het kwadraat moet berekenen, in het product van twee of meer kleinere getallen.

- $42^2 = (3 \times 14)^2 = 3^2 \times 14^2 = 9 \times 196 = 1764$
- $102^2 = (2 \times 3 \times 17)^2 = 4 \times 9 \times 289 = 4 \times 2601 = 10404$

Formule D kan wel handig zijn bij het vermenigvuldigen van twee getallen, waarbij het wel een kwestie is van herkennen van het 'patroon'.

- $19 \times 15 = (17 + 2)(17 - 2) = 17^2 - 2^2 = 189 - 4 = 185$
- $17 \times 23 = (20 - 3)(20 + 3) = 400 - 9 = 391$

Maar deze formule kan óók gebruikt worden bij kwadrateren! En wel in de volgende vorm:

D2. $p^2 = (p + q)(p - q) + q^2$

Zo is:

- $31^2 = (31 - 1)(31 + 1) + 1^2 = 30 \times 32 + 12 = 960 + 1 = 961$
- $57^2 = (57 + 3)(57 - 3) + 3^2 = 60 \times 54 + 9 = 3240 + 9 = 3249$, of:
- $57^2 = \underline{(57 - 7)(57 + 7) + 7^2} = 50 \times 64 + 49 = 3200 + 49 = 3249$

Bij dit type berekeningen kun je het onderstreepte deel ervan weglaten mits formule D2 goed in je hoofd zit.

Formule E wordt het meest gebruikt.

- $31^2 = (30 + 1)^2 = 30^2 + 1^2 + 2 \times 30 \times 1 = 900 + 1 + 60 = 961$
- $57^2 = (50 + 7)^2 = 50^2 + 7^2 + 2 \times 50 \times 7 = 2549 + 700 = 3249$
- $102^2 = (100 + 2)^2 = 10000 + 4 + 2 \times 100 \times 2 = 10404$
- $127^2 = (120 + 7)^2 = 14400 + 49 + 240 \times 7 = 14449 + 1680 = 16129$

Opgave 11

Bereken op *twee* van bovenstaande manieren (*zonder* je rekenmachine te gebruiken) de volgende getallen:

a. 34^2	**d.** 52^2	**g.** 163^2
b. 43^2	**e.** 67^2	**h.** 217^2
c. 47^2	**f.** 152^2	**i.** 301^2

Aanwijzing – Vermeld bij elke berekening de tussenresultaten. Zoals aan het begin van dit werkblad is opgemerkt, is het gebruik van een rekenmachine *alleen* toegestaan om antwoorden te controleren.

Opgave 12

Waarom is $(3ab)^2 = 9a^2b^2$? Geef bij je antwoord aan welke formules (A, …, E) je daarbij toepast.

Waarom is $(10^3a^4)^2 = 1000000a^8$? Geef ook aan welke formules van toepassing zijn.

Waarom is $\sqrt{360000}$ gelijk aan 600? Pas je dan ook een formule toe?

Wortels – In hetgeen volgt zal je kennismaken met een methode waarmee je wortels van (ook grote) getallen *zonder rekenmachine* kunt berekenen. Het begrip 'kwadraat' speelt daarbij natuurlijk een rol, omdat *worteltrekken* het omgekeerde is van *kwadrateren*.

Het antwoord op de vraag ‘waarom is 4 de wortel uit 16?’ is immers ‘omdat 4-kwadraat gelijk is aan 16.’
Ook nu zal je gebruik moeten maken van enkele zaken die je al weet, zoals de waardes van de wortels van de kwadraten kleiner dan of gelijk aan 100: $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, …, $\sqrt{100}$ (maar dat zal wel geen probleem opleveren).

Maar hoe bereken je, *zonder rekenmachine*, $\sqrt{124367104}$?

Laten we eerst maar eens ‘klein’ beginnen…

Bijvoorbeeld met $\sqrt{4489}$. We zeggen er maar bij dat $G = 4489$ een kwadraat is.
Duidelijk is dat $4400 < 4489 < 4500$.
We stellen $G_1 = 4400 = 100\times44$ en $G_2 = 4500 = 100\times45$ (zie ook Opgave 7).
Dan is $\sqrt{G_1} = \sqrt{(100\times44)} = 10\sqrt{44}$ en $\sqrt{G_2} = \sqrt{(100\times45)} = 10\sqrt{45}$. En van $\sqrt{44}$ en $\sqrt{45}$ weten we dat ze *beide* liggen tussen 6 en 7 (beide zijn iets als 6,…).
Dus geldt: $60 < \sqrt{G} < 70$.

Opgave 13

In deze opgave is G nog steeds gelijk aan 4489.
- Verklaar waarom de conclusie $60 < \sqrt{G} < 70$ een *juiste* conclusie is.

Als je G_1 (bijvoorbeeld) gelijk kiest aan 4480 en G_2 (bijvoorbeeld) gelijk aan 4490, dan is toch ook: $G_1 < G < G_2$?
- Waarom is de keuze van $G_1 = 4400$ en $G_2 = 4500$ handiger?
- Waarom is het eerste cijfer van $\sqrt{G}$ een 6?
- Waarom is het *aantal* cijfers van $\sqrt{G}$ gelijk aan 2?

Omdat je weet dat 4489 een kwadraat is, kun je op basis van wat je in Opgave 13 hebt gevonden, schrijven:

$\sqrt{4489} = \overset{\frown}{ab}$, waarbij $a = 6$. Met andere woorden:

$\sqrt{4489} = \overset{\frown}{6b} = 6\cdot10 + b$

Kwadrateren geeft dan de volgende vergelijking, waarin het *cijfer b* (nog) onbekend is:
$4489 = (60 + b)^2 = 3600 + b^2 + 2 \cdot 60 \cdot b$
Hierbij is dus formule E gebruikt. Iets verder uitgewerkt:

(*)… $889 = 120 \cdot b + b^2$

Nu zóu je deze vergelijking kunnen schrijven als $b^2 + 120b - 889 = 0$, en dan met een ontbinding in factoren, zoals $(b + …)(b - …) = 0$, de waarde van b berekenen (of met de *abc*-formule; maar dán grijp je mogelijk naar je rekenmachine; en dat is zeker *niet* de bedoeling).

Nee, we schrijven de vergelijking die hierboven met (*) is aangeven, op een *echt andere* manier, omdat we *iets meer* weten over het getal b: het is een *cijfer*! We schrijven:

$889 = (120 + b) \cdot b$

In de *verkorte* WP-vorm – en die komt goed van pas, zoals je in de volgende opgave zult zien – staat er dan:

$889 = \overset{\frown}{12b} \cdot \overset{\frown}{b}$

Opmerking. Het rechter lid hiervan kun je ook ontstaan denken uit:

$10\cdot2\cdot6b + b^2 = (10\cdot12 + b)\cdot b = (120 + b)\cdot b$

Opgave 14

- Welk cijfer b voldoet aan $\overset{\frown}{12b} \cdot \overset{\frown}{b} = 889$?

  Aanwijzing – Je mag natuurlijk gaan proberen met $b = 1, 2, \ldots, 9$. Maar er zijn maar *twee* getallen van één cijfer die, als je dat getal met zichzelf vermenigvuldigt, een getal opleveren dat eindigt op een 9. Eén van die twee moet dus het cijfer b zijn!
- Zodat: $\sqrt{4489} = \overset{\frown}{ab} = ..$ (en vul beide gevonden cijfers op de .. in).

We geven ook nog voorbeeld van de worteltrekking uit een kleiner getal.
Voorbeeld. $G = 841$. Bereken $\sqrt{G}$.
Met $G_1 = 800$ en $G_2 = 900$ is: $G_1 < G < G_2$.
Omdat $\sqrt{G_1} = 10\sqrt{8}$ en $\sqrt{G_2} = 10\sqrt{9}$, en $\sqrt{8} = 2,\ldots$ en $\sqrt{9} = 3$, is dan:
$20 < \sqrt{G} < 30$
De uitkomst van $\sqrt{G}$ heeft dus 2 cijfers, en het eerste cijfer ervan is een 2.
Met $\sqrt{G} = \overset{\frown}{ab}$ en $a = 2$ is dan:
$841 = (20 + b)^2 = 400 + 40b + b^2$, of:
$441 = (40 + b) \cdot b$, en in *verkorte* WP-vorm:
$\overset{\frown}{4b} \cdot \overset{\frown}{b} = 441$
En daaruit volgt $b = 9$. Dus: $\sqrt{841} = 29$.

Opgave 15

- Uit hoeveel cijfers bestaat de uitkomst van $\sqrt{961}$?

  Aanwijzing – Geen rekenmachine gebruiken om het antwoord te vinden!
- En uit hoeveel cijfers bestaat de uitkomst van $\sqrt{1681}$?
- Dezelfde vraag voor $\sqrt{6889}$.

De uitkomsten van $\sqrt{9}$ en $\sqrt{49}$ hebben elk 1 cijfer.

- Zie je een verband tussen het *aantal* cijfers van een getal G (dat een kwadraat is) en het *aantal* cijfers van de uitkomst van $\sqrt{G}$? Zo ja, beschrijf dat verband dan (kort).

Maar geldt een dergelijk verband ook voor grotere getallen? Als dat zo is, dan is natuurlijk de 'wiskundige' vraag: Waarom is dat dan zo?

- Als je denkt op beide laatste vragen een antwoord te hebben, formuleer die antwoorden dan kort (we komen er verderop nog wel op terug).

Je zal zien dat je het berekenen van de wortel uit een getal dat uit 5 of meer cijfers bestaat, iets anders moet aanpakken dan hierboven voor getallen met 3 en 4 cijfers gedaan is: je hebt dan één of meer extra stappen nodig.
Om die extra stappen te kunnen zetten kijken we eerst nog even naar het kwadrateren van 3 (en meer) getallen.

Misschien heb je al eerder iets dergelijks gedaan, maar dan is het toch goed om het nog eens te zien.
Voor het berekenen van $(p + q + r)^2$ stellen we eerst $p + q = A$ en passen dan formule E toe.
Let wel: p, q, r zijn hier *getallen* (geen cijfers).
Dus:
$(p+q+r)^2 = (A+r)^2 = A^2 + 2Ar + r^2$
En daarna vervangen we A weer:

$$A^2 + 2Ar + r^2 = (p+q)^2 + 2(p+q)\cdot r + r^2$$
$$= (p^2 + 2pq + q^2) + (2pr + 2qr) + r^2$$

Zodat:

$$(p+q+r)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2pr + 2qr + r^2$$

Opgave 16

- Bereken op dezelfde manier als hierboven (de variabelen zijn weer *getallen*):
  - $(3x + 2y + z)^2$
  - $(100a + 10b + c)^2$
- En met vier getallen. Bereken (en doe het systematisch):
  - $(1000a + 100b + 10c + d)^2$

En nu op weg naar de worteltrekking uit een getal van 5 of meer cijfers.

Voorbeeld. $G = 56169$ ($n = 5$). Bereken $\sqrt{G}$.
$G_1 = 50000 = 5\times10^4$ en $G_2 = 60000 = 6\times10^4$
Dus: $200 < \sqrt{G} < 300$, immers $\sqrt{5} = 2,\dots$ en $\sqrt{6} = 2, \dots$

Daarmee is $\sqrt{G}$ te schrijven in de verkorte PW-vorm $\sqrt{G} = \overparen{2bc}$, zodat:
$56169 = (200 + 10b + c)^2 = 40000 + 4000b + 100b^2 + \underline{400c + 20bc + c^2}$
Nu is, met $R = 400c + 20bc + c^2$:
$16169 = 4000b + 100b^2 + R = 100 \cdot (40 + b) \cdot b + R$
$$16169 = 100\cdot\overparen{4b}\cdot\overparen{b} + R$$
En… híer gaat het anders dan je in de voorbeelden hierboven hebt gezien!
Het getal $100\cdot\overparen{4b}\cdot\overparen{b}$ is een 100-voud, en gezien de R die er ook nog staat, moet je nu bepalen hoeveel van dát type 100-vouden er 'passen' in 16169:

b	$100\cdot\overparen{4b}\cdot\overparen{b}$
1	$100 \cdot 41 \cdot 1 = 4100$
2	$100 \cdot 42 \cdot 2 = 8400$
3	$100 \cdot 43 \cdot 3 =$ **12900**
4	$100 \cdot 44 \cdot 4 = 17600$; en $17600 > 16169$.

Dus: $b = 3$.

Daaruit vind je dan:
$16169 = 12900 + R$, zodat – en in R moet b vervangen worden door 3:
$3269 = R = 400c + 20 \cdot 3 \cdot c + c^2$
$3269 = 460c + c^2 = (460 + c) \cdot c$, of:
$$3269 = \overparen{46c}\cdot\overparen{c}$$
Hieruit volgt: $c = 7$. En dan is: $\sqrt{56169} = 237$.

Aantal cijfers – Voordat we gaan proberen een en ander in een handzaam schema te zetten, komen we nog even terug op het aantal cijfers van $\sqrt{G}$ dat kan worden berekend uit het aantal cijfers van G (zie Opgave 15).
Je hebt hierboven 'ontdekt' (en kijk nog eens terug):

aantal cijfers van	
G	$\sqrt{G}$
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3

Natuurlijk gaat dit zo door…

6	3
7	4
8	4
…	…

Maar dat moet wel bewezen worden!

Opgave 17

Beredeneer dat het aantal cijfers van de uitkomst van $\sqrt{546121}$ gelijk is aan 3.

Aanwijzing – Bepaal bij het getal $G = 546121$, zoals hierboven al enkele keren gedaan is, *geschikte* getallen G_1 en G_2 waarvoor $G_1 < G < G_2$.

Toon ook aan dat het aantal cijfers van de uitkomst van $\sqrt{2676496}$ gelijk is aan 4.

We kunnen de manier waarop je nu een aantal keren het aantal cijfers van $\sqrt{G}$ hebt bepaald, veralgemeniseren. Daarbij maken we onderscheid tussen (A) een *even aantal* cijfers van G en (B) een *oneven aantal* cijfers van G.

We gaan in beide gevallen uit van $G = \overline{abc\ldots}$, waarvan n het aantal cijfers is.

A. n is *even*; met $n = 2k$ (dan is n immers even; begin met $k = 1$).

We kiezen in dit geval: $G_1 = 10^{2k-2} \cdot \overline{ab}$ en $G_2 = 10^{2k-2} \cdot (\overline{ab} + 1)$.

Voor G_1 gebruiken we dus de eerste *twee* cijfers van G en vullen dan aan met nullen.

In dit geval is $\sqrt{G_1} \le \sqrt{G} < \sqrt{G_2}$, zodat het aantal cijfers van $\sqrt{G}$ gelijk is aan:

$1 + (k - 1) = k = \tfrac{1}{2}n$

B. n is *oneven*; met $n = 2k + 1$ (dan is n immers oneven; begin hier met $k = 0$).

Nu kiezen we: $G_1 = 10^{2k} \cdot \overline{a}$ en $G_2 = 10^{2k} \cdot (\overline{a} + 1)$.

Voor G_1 gebruiken we nu alleen het *eerste* cijfer van G en vullen ook aan met nullen.

Ook nu is $\sqrt{G_1} \le \sqrt{G} < \sqrt{G_2}$, zodat het aantal cijfers van $\sqrt{G}$ in dit geval gelijk is aan:

$1 + (k) = \tfrac{1}{2}(n + 1)$

Opgave 18a

In de gevallen A en B hierboven is beschreven hoe het getal G_1 gekozen is, uitgaande van G.

Hoe is in beide gevallen het getal G_2 gekozen?

Hoeveel nullen heeft G_1? En hoeveel G_2?

Aanwijzing – Wat gebeurt er met een getal als je het met 10 vermenigvuldigt? Hoe vaak is er bij G_1 en bij G_2 met 10 vermenigvuldigd?

Licht kort toe waarom het aantal cijfers van $\sqrt{G}$ gelijk is aan:

- $1 + (k - 1)$, als n even is;
- $1 + k$, als n oneven is.

Samengevat – Als het aantal cijfers van een kwadraat G gelijk is aan n, dan is het aantal cijfers van $\sqrt{G}$ gelijk aan:

- $\tfrac{1}{2}n$, als n even is;
- $\tfrac{1}{2}(n + 1)$, als n oneven is.

Opgave 18b

- Bereken (en dat vereist nu bijna geen rekenwerk) het aantal cijfers van de uitkomst van $\sqrt{4460544}$, van $\sqrt{20457529}$ en van $\sqrt{124367104}$.

Opmerking. In het bovenstaande bewijs kun je ook zien hoe het *eerste cijfer* van $\sqrt{G}$ eenvoudig uit G kan worden afgeleid.

- n is even:

  de wortel uit het grootste kwadraat dat kleiner dan of gelijk is aan $\overset{\frown}{ab}$ (dit zijn de eerste twee cijfers van G) is het eerste cijfer van $\sqrt{G}$.

  Voorbeeld. $G = 546121$; $\overset{\frown}{ab} = 54$; grootste kwadraat = 49; 1e cijfer = 7.

- n is oneven:

  de wortel uit het grootste kwadraat dat kleiner dan of gelijk is aan $\overset{\frown}{a}$ (dat is het eerste cijfer van G) is het eerste cijfer van $\sqrt{G}$.

  Voorbeeld. $G = 2676496$; $\overset{\frown}{a} = 2$; grootste kwadraat = 1; 1e cijfer = 1.

Opgave 18c

- Bereken het eerste cijfer van de uitkomst van:
  $\sqrt{4460544}$, van $\sqrt{20457529}$ en van $\sqrt{124367104}$.

Het schema – In deze paragraaf wordt een schema opgebouwd waarmee je handig, én overzichtelijk, de wortel uit een getal (op papier) kunt berekenen.
We zullen dit weer aan de hand van een voorbeeld doen. Daarbij kom je dan verschillende eerder in dit werkblad behandelde zaken opnieuw tegen.

Voorbeeld. We gaan uit van $G = 751689$ ($n = 6$).
Te berekenen: $\sqrt{751689}$.
Oplossing – In hetgeen hierna volgt staat in de linker kolom het te ontwikkelen schema, en in de rechter kolom een toelichting bij elke stap in dat schema.

Schema	*Toelichting*
1. √751689= ...	n = 6; dus is: "aantal cijfers van $\sqrt{G}$" = ½n = 3. In plaats van $\overset{\frown}{abc}$ staan er drie puntjes: ... (dan kun je de cijfers gemakkelijker invullen). Op elke . komt een cijfer; achtereenvolgens van links naar rechts zijn dat de cijfers a, b, c.
2. √751689= ... .x.=	We zoeken het grootste kwadraat dat kleiner is dan 75. Daarom staat er in het schema '. × . =' in plaats van $\overset{\frown}{a} \cdot \overset{\frown}{a} =$.
3. √751689= 8.. 8x8=64 -- 11	a = 8, want 64 < 75 (en 81 > 75). Dus invullen en aftrekken! Daarmee bedoelen we eigenlijk: 751689 – 640000 = 111689 Maar de cijfers "1689" spelen hier nog geen rol.
4. √751689= 8.. 8x8=64 -- 1116	In deze stap gaat het alleen om de rest "11" en de cijfers "16". Vandaar dat alleen de 1 en de 6 worden *bijgehaald*. Nu is: $\sqrt{G} = \overset{\frown}{8bc} = 800 + 10b + c$. Bij het kwadrateren hiervan stoppen we 'alles met c' in R: $G = (800 + 10b + c)^2$ $= 640000 + 2 \cdot 800 \cdot 10b + 100b^2 + R$ Zodat: 111689 = 100 · (2 · 8 · 10b + b^2) + R. We zoeken dus naar het grootste 100-voud dat van 111689 kan worden afgetrokken. **N.b.** Met R reken je verder in stap 7.
5. √751689= 8.. 8x8=64 -- 1116 16.x.=	Dan moet gelden (het gaat immers om 100-tallen): 1116 ≥ (2 · 8 · 10 + b) · b 1116 ≥ (160 + b) · b, of: $1116 \geq \overset{\frown}{16b} \cdot \overset{\frown}{b}$ Vandaar dat er nu in het schema '16 . × . =' staat. (*)... Merk op dat die "16" direct gevonden kan worden als: $2 \cdot \overset{\frown}{a} = 2 \cdot 8 = 16$
6. √751689= 86. 8x8=64 -- 1116 166x6= 996 ---- 120	Dan is b = 6, immers: 166 · 6 = 996 en 167 · 7 = 1169 (en 1169 > 1116). Invullen en aftrekken! Eigenlijk bereken je: 111689 – 99600 = 12089

7.

```
          √751689= 86.
   8x8=64
       --
         1116
  166x6=  996
         ----
          12089
 172.x.=
```

Nu gaat het alleen nog om R (zie stap 4).
We halen dus nu ook de 'rest' van het getal bij: de 8 en de 9.
Met "120" vormen die samen het getal 12089.
Met de nog niet ingevulde waarden van a, b en de nog onbekende c is:

$R = \underline{2} \cdot 100a \cdot c + \underline{2} \cdot 10b \cdot c + c^2$, of:

$R = (\ 2 \cdot (100a + 10b) + c\ ) \cdot c$

En dat wordt, met $a = 8$ en $b = 6$:

$$R = (2 \cdot (800 + 60) + c) \cdot c = (2 \cdot 860 + c) \cdot c = \overline{172c} \cdot \overline{c}$$

In het schema zetten we: 172 . × .

(*)... Merk op dat die "172" direct gevonden kan worden als:

$$2 \cdot \overline{ab} = 2 \cdot 86 = 172$$

Zie voor de 'waarde' van het getal R in stap 7 nog eens het voorbeeld dat volgt op Opgave 16.

8.

```
          √751689= 867
   8x8=64
       --
         1116
  166x6=  996
         ----
          12089
 1727x7=  12089
          -----
              0
```

Dan is $c = 7$, want: $1727 \cdot 7 = 12089$.
Invullen en aftrekken, en er komt 0 uit.

Dus: √751689 = 867 .

Opmerkingen

1. Een belangrijk aspect bij het berekenen van wortels willen we nog even benadrukken. In stap 5 en stap 7 wordt daarop al gewezen in de beide met (*) aangegeven zinnen.
In het schema van de wortelberekening vinden we *na* elkaar de cijfers a, b, c, ... van:

$$\sqrt{\ } G = \overline{abc..k}$$

Is een deel van de cijfers van de wortel gevonden, bijvoorbeeld $\sqrt{\ } G = \overline{abcd}$, dan worden die cijfers gebruikt om het volgende cijfer 'x' van de wortel te berekenen met:

$$2 \cdot 10 \cdot \overline{abcd} + x = 2 \cdot \overline{abcd0} + x = \overline{????x}$$

Het getal $2 \cdot \overline{abcd}$ staat dan op de vraagtekens. Ga het 'waarom' daarvan nog eens na!
Dit wordt dan in het schema geschreven als: ' ???? . × . = ' .

2. Van √G = 11449 is het tweede cijfer van de uitkomst een 0 (zie het schema hieronder).

```
      √11449=107
  1x1=1
      -
        14
 20x0=   0
        --
        1449
207x7=  1449
        ----
           0
```

In het schema staat op de 4e regel alleen het bijgehaalde getal "14"; immers, daaraan voorafgaand is: 1 – 1 = 0.
Direct is duidelijk dat daarna '20 × 0' gebruikt moet worden.
Op de gebruikelijke manier kan vervolgens verder gerekend worden met het getal "1449", nadat de volgende twee cijfers (de 4 en de 9) zijn bijgehaald.

Opgave 19

Bestudeer eerst het bovenstaande 'grote' voorbeeld en het schema dat daarin ontstaan is, nog eens goed.
Het is de bedoeling dat je in deze opgave *alleen* berekeningen maakt in het schema zelf (eventueel met een deelberekening op een kladblaadje). De toelichting in het voorbeeld moet je dus zien als 'theoretische achtergrond' (echt als *toelichting*) bij de berekeningen in dat voorbeeld.

```
         √751689= ...
     .x.=..
         --
         ..16
  ??.x.=....
         ----
         ....89
 ???.x.=......
         ------
              0
```

Speel nu het voorbeeld nog eens geheel na.
Gebruik daarbij nevenstaand reeds gedeeltelijk ingevuld schema.

Aanwijzing – Vul alleen cijfers c.q. getallen in op de plaats van de puntjes en vraagtekens, het liefst *zonder* het voorbeeld te raadplegen.
Elke stap van het voorbeeld zou dus min of meer 'in je hoofd' moeten zitten, en eigenlijk ook het 'waarom' van het zetten van die stap.

Opgave 20

Bereken *alleen* met behulp van een schema zoals dat staat in Opgave 19, de wortel uit de volgende getallen:

a.	961	**e.**	21 077 281
b.	546 121	**f**	124 367 104
c.	974 169	**g.**	41 211 842 049
d.	3 236 401	**h.**	121 485 211 453 089

Tot slot – Natuurlijk kun je ook wortels trekken uit *gehele* getallen die *geen* kwadraat zijn. Dat worden dan altijd *benaderingen* met een aantal 'cijfers achter de komma'.

Stel je wilt √7 benaderen, waarbij er achter de komma 3 cijfers staan.
Je kunt dan uitgaan van $G = 7000000$, immers:

$\sqrt{G} = \sqrt{7000000} = \sqrt{(7 \cdot 10^6)} = 10^3\sqrt{7}$, zodat: $\sqrt{7} = \dfrac{\sqrt{G}}{10^3}$.

Echter, als we spreken over '3 cijfers achter de komma' c.q. 3 *decimalen*, dan bedoelen we daarmee in de wiskunde altijd 'in 3 decimalen *nauwkeurig*'.

```
        √7000000=2645,7
  2x2=  4
        -
        300
 46x6=  276
        ---
         2400
 524x4=  2096
         ----
          30400
 5285x5=  26425
          -----
           377500
 52907x7=  370349
           ------
```

En dat wil zeggen dat de *laatste* decimaal (hier is dat dus de 3e) wordt *afgerond* op basis van de waarde van de 4e decimaal.
Daarom is er in het schema hiernaast nog iets verder gerekend, met de 7 achter de komma die na "2645" staat.
Dus is:

$\sqrt{7} = \dfrac{2645{,}7}{10^3} = 2{,}646$

Als je wilt benadrukken dat er sprake is van 'afronding', dan schrijf je:
$\sqrt{7} \approx 2{,}646$

Het getal 2 is de zogenoemde *onderwortel* van 7. Het is het grootste gehele getal dat in het kwadraat (nog net) kleiner is dan 7.

Opgave 21a

- Bereken de *onderwortel* van 10, van 1000 en van 2011.

Gebruikelijk is bij een berekening als die van √7, de komma ook in het schema op te nemen.

`√7,000000(00)=.,...(.)`

Dat wordt dan iets als hiernaast staat.
De haakjes om de cijfers geven aan dat die cijfers worden gebruikt voor de *afronding* van het antwoord.
Na de onderwortel in het antwoord volgt dan de komma.

Opgave 21b

- Bereken in 2 decimalen – en natuurlijk met een schema – de wortel uit 10.
  Aanwijzing – Denk eraan om ook 'achter de komma' telkens 2 cijfers (hier zijn dat nullen) bij te halen!
- Bereken, in 2 decimalen, ook de wortel uit 1000 en uit 2011.

Maar dan kun je nu ook wortels berekenen uit getallen die *niet geheel* zijn, d.w.z. uit getallen die in *decimale vorm* (dus met cijfers achter de komma) zijn gegeven.
Het is min of meer gebruikelijk de wortel uit zo'n getal met een even groot aantal decimalen uit te rekenen als het aantal decimalen van het getal zelf (uiteraard met een juiste afronding van de laatste decimaal).

Opgave 22

- Benader de wortel uit de volgende, in decimale vorm geschreven, getallen:

a. 1,4142 **c.** 25,10
b. 11,111 **d.** 101,01

Aanwijzing – Geef in alle gevallen het gebruikte schema. En, ten behoeve van de afronding van de laatste decimaal moet je dus altijd één decimaal extra berekenen!