PRIJEN en PRIPRIJEN
Werkblad – Rationale rechthoekige driehoeken

Vooraf – De vragen en opdrachten in dit werkblad die vooraf gegaan worden door , moeten *schriftelijk* worden beantwoord.
Daarbij moet altijd duidelijk zijn ‘hoe’ de antwoorden gevonden zijn. Het geven van *alleen* een antwoord als ‘ja’ of iets als ‘$a = 36$’ (zonder enige toelichting) is dus *niet* voldoende.

Studielast

8 à 10 slu

Voorkennis

getalverzamelingen / rekenen met breuken en formules / merkwaardige (bijzondere) producten / stelling van Pythagoras / enige vaardigheid met bewijzen en met werken met formules / oplossen van vergelijkingen / beginselen van de analytische meetkunde

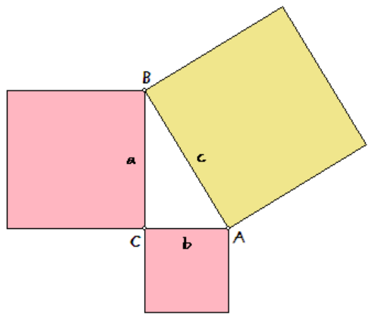
Benodigdheden

eenvoudige rekenmachine

Afkortingen – Tja, de titel van dit werkblad is wat vreemd. Wat is een *prij* (het is geen prei)? En wat is een *priprij*?
Je zult over die afkortingen – want dat zijn het – in het onderstaande wat meer te weten komen. Maar dat het ‘iets’ met wiskunde te maken heeft, dat is zeker.
Natuurlijk weet je wél ‘wat’ de stelling van Pythagoras is. Toch formuleren we deze stelling nog maar eens:

Voor de lengtes a en b van de rechthoekszijden en de lengte c van de schuine (grootste) zijde (ook wel hypotenusa) van een rechthoekige driehoek geldt: $a^2 + b^2 = c^2$.

In figuur 1 zie je de stelling meetkundig geïllustreerd: de som van de oppervlaktes van de vierkanten met zijden *a* en *b* is gelijk aan de oppervlakte van het vierkant met zijde *c*.



figuur 1

Duidelijk is dat je niet met *elk* drietal getallen een rechthoekige driehoek krijgt. Die getallen moeten in de eerste plaats positief zijn; je kijkt immers naar de lengtes van lijnstukken.
Een drietal positieve getallen a, b, c dat ‘aan de stelling van Pythagoras voldoet’, wordt in de Nederlandse wiskundeliteratuur een *pythagoreïsch getaltripel* genoemd (Eng. pythagorean triple). Maar in hetgeen volgt spreken we van een *pythagoreïsche drierij*, en kortweg van een **prij**.
Aan een prij (a, b, c) wordt soms ook een eis van *ordening* gesteld: $a \le b < c$. In plaats van het drierijtje (4, 3, 5) schrijft men dan liever (3, 4, 5).
De bekendste prij is natuurlijk (3, 4, 5). Maar $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6})$ is ook een prij, immers:

$$(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{9} = \tfrac{25}{36} = (\tfrac{5}{6})^2$$

Ook $(\frac{5}{4}, 3, \frac{13}{4})$ is een prij, omdat $\frac{25}{16} + 9 = \frac{25+144}{16} = \frac{169}{16} = (\frac{13}{4})^2$.
We zullen in dit werkblad slechts kijken naar *positieve gehele* getallen (dat zijn de *natuurlijke getallen*) en naar *positieve* breuken; dat wil dus zeggen: alleen naar *positieve rationale* getallen.
Opmerking. Natuurlijk ten overvloede: van een breuk hoeft de teller niet noodzakelijk kleiner te zijn dan de noemer!

Driehoeken waarvan de lengtes van de zijden rationale getallen zijn, worden *rationale driehoeken* genoemd. In dit werkblad kijken we *alleen* naar *rechthoekige* rationale driehoeken. Dat begrip korten we, voor het gemak, af tot **r-driehoeken** (de 'r' staat dus voor 'rationaal én rechthoekig').
En met deze begrippen is eigenlijk direct al een stelling te formuleren:

Stelling 1. *Elke prij bepaalt een r-driehoek*. En omgekeerd: *elke r-driehoek bepaalt een prij*.

Prijen berekenen – Prijen zijn reeds lang bekend. Op een kleitablet (de naam ervan is 'Plimpton 322') dat gedateerd is rond 1800 v. Chr., staan er een aantal, waaronder (4601, 4800, 6649).
Prijen kunnen worden gevonden volgens, onder meer, het volgende eenvoudige rekenrecept (we noemen dit in hetgeen volgt ook wel 'ons recept'):
- kies twee *gehele* getallen m en n, met $m > n$;
- bereken daarmee vervolgens:
  $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$;
- en (niet noodzakelijk) orden de getallen a, b, c (de kleinste als eerste).

Voorbeeld 1
De keuze van $m = 2$ en $n = 1$ geeft $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$. De (geordende) prij is dan (3, 4, 5).◊

Opgave 1
- Bereken zelf, volgens bovenstaand recept, nog drie andere prijen.

Opgave 2
- Met $a = 2mn$ en $b = m^2 - n^2$ geldt dat $a^2 + b^2$ gelijk is aan een kwadraat (het kwadraat van $c = m^2 + n^2$) – anders zou het recept niet juist zijn.
  Bewijs dit door hieronder op de … aan te vullen, nadat je eerst beide haakjesvormen hebt uitgewerkt:
  $a^2 + b^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = \ldots$
  Aanwijzing – De berekening van iets als $(p - q)^2$ leidt tot **drie** termen: p^2, q^2 én … (het dubbele product).

Opgave 3
Het 'omkeerde' recept, namelijk het vinden van de gehele getallen m en n bij een gegeven prij, is mogelijk niet zo eenvoudig.
- Bereken de getallen m en n van de prij (4800, 4601, 6649).
  Opmerking. Het getal 4800 staat hier als eerste, omdat de a in ons recept een even getal is.
- Geef, zo mogelijk, een beschrijving voor het 'omgekeerde' recept.

Als je in Opgave 1 $m = 3$ en $n = 1$ hebt genomen, dan heb je gevonden: $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. De prij is dan (6, 8, 10).
Elk van de 'elementen' van die prij is deelbaar door 2. Je mag schrijven:

(6, 8, 10) = 2 × (3, 4, 5)
De factor 2 is buiten haakjes gehaald. Dit kan doordat 2 een *gemeenschappelijke deler* is van de (elementen van de) prij; het is zelfs de *grootste g*emeenschappelijke *d*eler.
Korter gezegd: 2 is de *ggd* van de prij (6, 8, 10). Of ook:
ggd(6, 8, 10) = 2
De ggd van een prij is altijd een *natuurlijk getal*, maar daarbij moet ook de prij zelf uit *alleen natuurlijke getallen* bestaan!
Met m = 3 en n = 2 vind je a = 12, b = 5, c = 13; en als prij (5, 12, 13). Bij deze prij kun je geen ander (geheel) getal buiten haakjes halen dan 1. De ggd van deze prij is gelijk aan 1:
ggd(5, 12, 13) = 1
En nu kan ook de tweede afkorting in de titel van het werkblad verklaard worden:

Een prij (a, b, c) die bestaat uit natuurlijke getallen en waarvoor geldt dat ggd(a, b, c) = 1, is een *primitieve* prij; afgekort **priprij**.

Opgave 4

- Bereken ggd(108, 144, 180).
  Bereken ook de m en de n die hierbij horen.
- Bereken ggd(4800, 4601, 6649).

Blijkbaar zijn met het rekenrecept naast ‘gewone’ prijen (ggd ≠ 1) ook priprijen (ggd = 1) te berekenen.
Je zult hierna gaan onderzoeken hoe je ons recept moet aanpassen om *alleen priprijen* te vinden. We geven daarbij aan m en n geen waarde, maar kijken alleen naar het even (E) en oneven (O) zijn van die twee getallen.
Het ‘even of oneven’ zijn van een getal wordt de *pariteit* van dat getal genoemd.
Voor m en n zijn nu slechts 4 mogelijkheden; zie de tabel ***in figuur 2***, waarin deels ook daarbij behorende pariteit van a, b en c is opgenomen.

m	n	a	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2$	
E	E	E	E	E	
E	O	E	O	…	«
O	E	…	…	…	«
O	O	…	…	…	

figuur 2

Opgave 5

- Vul de tabel in figuur 2 aan met E’s en O’s.
- Waarom geeft het paar (m, n) = (E, E) geen priprij?
  Aanwijzing – Een even getal is deelbaar door 2.
- Waarom geeft het paar (m, n) = (O, O) geen priprij?

Uit deze tabel zou je mogelijk kunnen afleiden (zie de rijen die in de tabel zijn aangegeven met «):
- (*) Als m en n verschillende pariteit hebben, dan bepalen m en n een priprij.

Maar is dit ook werkelijk zo?
Met m = 9 en n = 6 (pariteit is verschillend) vinden we: (a, b, c) = (108, 45, 117) = (45, 108, 117).
- Verklaar waarom deze combinatie van m en n géén priprij oplevert!

We moeten de hierboven met (*) aangegeven ‘conclusie’ dus wat bijstellen.

- ***Als m en n verschillende pariteit hebben én ggd$(m,n) = 1$, dan bepalen m en n een priprij.***

Het is dus *niet* voldoende *alleen* naar de pariteit van m en n te kijken. In hetgeen volgt kiezen we daarom m en n steeds zo, dat aan het bovenstaande voldaan is.

Opgave 6

- Vul de tabel die staat in figuur 3, verder in.

m	n	a	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2$	*prij*	*nr*
2	1	4	3	5	(3, 4, 5)	1
3	2	12	5	13	(5, 12, 13)	2
4	1	8	15	17	(8, 15, 17)	3
4	3	…	…	…	…	4
5	2	…	…	…	…	5
5	4	…	…	…	…	6
6	1	…	…	…	…	7
6	5	…	…	…	…	8
7	2	…	…	…	…	9
7	4	…	…	…	…	10
7	6	…	…	…	…	11

figuur 3

- Waarom staat $m = 2$, $n = 2$ niet in de tabel?
- Waarom is $m = 3$, $n = 1$ niet in deze tabel opgenomen?
- Ook ontbreken bijvoorbeeld de paren ($m = 4$, $n = 2$), ($m = 5$, $n = 1$) en ($m = 5$, $n = 3$). Waarom?

Opmerking. Van een geordende priprij is dus precies één van de elementen a, b een even getal.

Overigens, er zijn meer rekenvoorschriften waarmee je prijen kunt vinden. Twee daarvan – het zijn klassieke – worden in de volgende paragraaf behandeld.

Terug in de tijd – Proclos (411-485, Griekenland) wijdt in een commentaar op de stelling van Pythagoras ook enkele regels aan de vorming van prijen:

‘*Bepaalde methoden voor de ontdekking van driehoeken van dit type* [dwz. r-driehoeken] *zijn bekend, een die wordt toegeschreven aan Plato, en een andere aan Pythagoras.*

[*De methode van Pythagoras*] *gaat uit van oneven getallen. Want hierbij neemt men het gegeven oneven getal als de kleinste van de zijden om de rechte hoek en, nadat hiervan het kwadraat genomen is en daarvan de eenheid is afgetrokken, neemt men de helft van de uitkomst als de grootste zijde om de rechte hoek. Hier weer de eenheid aan toevoegend, geeft de derde zijde, de hypotenusa.* […]

De methode van Plato begint met even getallen. Want het gegeven even getal nemende, neemt men het als zijde om de rechte hoek en, nadat het in tweeën gedeeld is en de helft in het kwadraat is gebracht, maakt men de hypotenusa door aan dit kwadraat de eenheid toe te voegen en de andere zijde om de rechte hoek door van het kwadraat de eenheid af te nemen.’

De *methode van Pythagoras* leidt dan, met m als *oneven* getal, tot het *Pythgoras-voorschrift*:

$$a = m,\ b = \frac{m^2-1}{2},\ c = \frac{m^2+1}{2}$$

en de *methode van Plato* geeft, met *positieve gehele* waarden van m, het *Plato-voorschrift*:
$a = 2m$, $b = m^2 - 1$, $c = m^2 + 1$

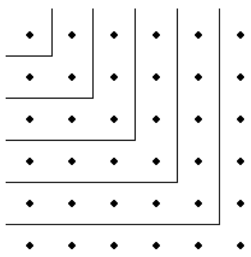
Opgave 7

Ga na dat beide voorschriften overeenkomen met de tekst van Proclos.

- Bereken met het ‘Pythagoras-voorschrift’ de prijen voor $m = 3, 5, 7, 9$.
- Bereken met het ‘Plato-voorschrift’ de prijen voor $m = 2, 3, 4, 5$.
- Valt je daarbij iets op? Zo ja, wat?

De oude Grieken beschikten niet over algebra-hulpmiddelen zoals wij die nu kennen. Formules zoals je in Opgave 7 hebt gebruikt, hadden ze helemaal niet: hun rekentechnieken waren gebaseerd op meetkundige figuren en beschouwingen. Bij hun ‘rekenkunde’ gebruikten ze vaak de *gnomon-configuratie* (Gr. gnomon = winkelhaak). Daarover schreef Philoponos (±490-±570, Egypte):
‘*Als een bewijs* [...] *refereren de Pythagoreërs aan wat er gebeurt bij de optelling van getallen; want als oneven getallen opvolgend bij een kwadraat worden opgeteld, blijven ze een kwadraat* [...]. *Oneven getallen worden daarom gnomons genoemd, omdat ze, als ze worden opgeteld bij wat al kwadraten zijn, ze de kwadratische vorm behouden* [...]. *Alexander heeft op uitstekende wijze uitgelegd, dat de zin “als gnomons rondom geplaatst zijn” betekent “een schema maken met oneven getallen”* [...], *want het is de praktijk van de Pythagoreërs dingen in schema’s weer te geven.*’

In het ‘schema’ van ***figuur 4*** is het geciteerde geïllustreerd.



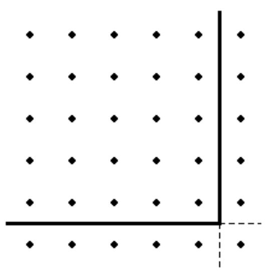
figuur 4

We zien in de telkens met een gnomon uitgebreide vierkanten, linksboven beginnend:
$1 = 1^2$
$1 + 3 = 1^2 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 2^2 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 3^2 + 7 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 4^2 + 9 = 5^2$

Opgave 8

- Bereken, op basis van figuur 4, de uitkomst van: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 101$.
- Geef een formule voor: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$.

Het is wellicht illustratief de twee ‘klassieke’ prij-methodes, waarover Proclos schreef, in gnomons te vatten.

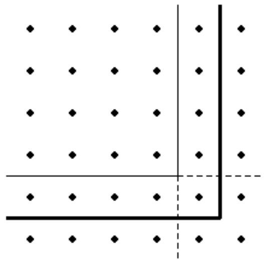


figuur 5

Pythagoras. In ***figuur 5*** liggen op de zijde van een vierkant z punten (in dit geval is $z = 5$). De aanvullende gnomon van dat vierkant telt dan $2z + 1$ (= 11) punten. Analoog aan het schema ***in figuur 4*** is hier:
$(2z) + 1 + z^2 = (z + 1)^2$
We stellen $2z + 1 = m^2$, zodat $z = ½(m^2 - 1)$ en $z + 1 = ½(m^2 + 1)$.
Opdat in die formules z én $z + 1$ geheel zijn, moet m een oneven getal zijn.

Opgave 9a

- Verklaar (kort) hoe uit het bovenstaande het Pythagoras-voorschrift volgt.



figuur 6

Plato. Ook in ***figuur 6*** wordt uitgegaan van een vierkant met op een zijde daarvan z punten (ook hier is $z = 5$) *plus* een gnomon die één 'dik' is. Vergelijken we dit aangevulde vierkant met het oorspronkelijke vierkant *min* een gnomon van één dik, dan is:
$(z + 1)^2 = (z - 1)^2 + 4(z - 1) + 4 = (z - 1)^2 + 4z$

Opgave 9b

- Hoe kan uit het bovenstaande het Plato-voorschrift worden afgeleid?

Of beiden, Pythagoras en Plato, hun prijen-methode via de gnomon-configuratie hebben gevonden, is helaas onbekend.
Wel is hieruit duidelijk dat in de Griekse oudheid het via een rekenvoorschrift genereren van r-driehoeken bekend was.

Opmerking. Ook *ons* recept is klassiek. Het komt namelijk in meetkundige vorm voor als hulpstelling in boek X van *De Elementen* van Euclides (±325-±265 v. Chr., Egypte).

Primitieve r-driehoeken – Een r-driehoek die door een priprij bepaald wordt, heet *primitieve* r-driehoek. Van zo'n driehoek kunnen we gemakkelijk de oppervlakte berekenen; we weten immers de lengtes a en b van de rechthoekszijden.

Opgave 10

In Opgave 6 zijn de priprijen genummerd (*nr*). De nummers vind je ook in de tabel in figuur 7.

nr	*prij*	*V*
1	(3, 4, 5)	6
2	(5, 12, 13)	30
3	(8, 15, 17)	60
4	…	…
5	…	…
6	…	…
7	…	…
8	…	…
9	…	…
10	…	…
11	…	…

figuur 7

- Neem de prijen ***uit figuur 3*** over en bereken van elke bijbehorende primitieve r-driehoek de oppervlakte V.
- Kijk nu nog eens naar de tabel in figuur 7. Als er dingen zijn die je erin opvallen (bijvoorbeeld eigenschappen van V in samenhang met de priprij), doe daarvan dan (kort) verslag.

Een primitieve r-driehoek wordt volgens ons recept bepaald door natuurlijke getallen m en n die onder meer verschillende pariteit hebben. Voor de oppervlakte V van zo'n driehoek is dan:
$V = mn(m^2 - n^2)$ of $V = mn(m - n)(m + n)$
Hiermee is V dus in 4 *verschillende* factoren ontbonden! En voor de pariteiten van m en n is weer een tabelletje gemaakt; ***zie figuur 8***.

m	n	$m - n$	$m + n$	V
E	O	O	O	E
O	E	O	O	E

figuur 8

In de tabel blijkt:
- dat de ontbinding van V precies één even factor en drie oneven factoren heeft;
- dat V altijd even is (dat zien we terug in Opgave 10; was dat je opgevallen?).

En, wat doen we nu met deze kennis? We kunnen er in ieder geval de volgende stelling mee bewijzen:

Stelling 2. *De oppervlakte van een primitieve r-driehoek is **geen** kwadraat.*

Die eigenschap vind je ook terug in de tabel ***van figuur 8*** (was die eigenschap je opgevallen?). Maar een bewijs daarvan? Hoe pak je dat aan?

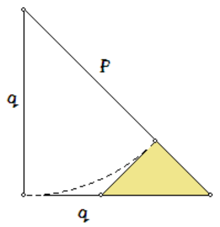
Nu is het zo dat het bewijs van een stelling die middels een ontkenning (*geen*, zoals hier) geformuleerd is, meestal wordt geleverd 'uit het ongerijmde'. Dat wil zeggen: allereerst neem je aan (veronderstel je) dat de 'eigenschap' die je wilt bewijzen, *niet waar* is.
'De oppervlakte is geen kwadraat' is *niet waar*, betekent dus: 'de oppervlakte is wél een kwadraat'.
En dan probeer je zó te redeneren, dat je 'iets' krijgt dat *in strijd* is met 'iets anders' waarvan je (heel) zeker weet dat het waar is. In de wiskunde noemt men dit dan een *tegenspraak*.
Hieronder staan enkele voorbeelden van een dergelijke bewijs.

Voorbeeld 2
Te bewijzen: $\frac{12}{0}$ is ***geen*** getal.
Bewijs (uit het ongerijmde): Stel $\frac{12}{0}$ is wél een getal. Noem dat getal a, zodat $\frac{12}{0} = a$. Per definitie (deling) is dan: $a \cdot 0 = 12$. Maar dit is in strijd met: $a \cdot 0 = 0$.
Tegenspraak! Dus is de veronderstelling onjuist. Met andere woorden: $\frac{12}{0}$ is geen getal.◊

Voorbeeld 3
We gaan uit van drie natuurlijke getallen a, b en c.
Te bewijzen: **Als** ggd(a, b) = 1, **dan** is ook ggd(a, b, c) = 1.
Bewijs (uit het ongerijmde): We willen bewijzen dat ggd(a, b, c) = 1. Dus veronderstellen we dat ggd(a, b, c) ≠ 1. Maar dit betekent dat er een getal d (≠ 1) is dat deelbaar is op alledrie, en dus ook op a en b. Maar we weten zeker dat ggd(a, b) = 1, wat betekent dat a en b *alleen* het getal 1 als gemeenschappelijk deler hebben. Een tegenspraak dus.
Met andere woorden: ggd(a, b, c) = 1.◊

Voorbeeld 4
Te bewijzen: $\sqrt{2}$ kan ***niet*** geschreven worden als een breuk.

Bewijs (uit het ongerijmde): Stel $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, waarbij p en q natuurlijke getallen zijn. We schrijven deze breuk zó, dat de breuk *niet* te vereenvoudigen is (p en q zijn dus *niet* door hetzelfde getal te delen: p en q zijn zo klein mogelijk). Verder is dan (na kwadrateren):
$p^2 = 2q^2 = q^2 + q^2$
Volgens de stelling van Pythagoras bestaat er dan een r-driehoek met twee rechthoekszijden gelijk aan q en met een schuine zijde gelijk aan p.



figuur 9

Dit is een 45°-45°-90°-driehoek. En het is, met die p en q, ook de *kleinste* driehoek met deze eigenschap. Immers, p en q zijn niet kleiner te maken.
Maar ***in figuur 9*** is zo'n kleinere driehoek, hoe groot p en q ook zijn, wel getekend! Een tegenspraak.
Dus: $\sqrt{2}$ kan niet geschreven worden als een breuk.◊

We gaan nu proberen Stelling 2 *uit het ongerijmde* te bewijzen.
We ***veronderstellen*** daarom: $V = mn(m - n)(m + n)$ is **wél** een kwadraat.
Daarbij weten we:
- m en n hebben verschillende pariteit en $m > n$ (dit is zeker);
- ggd(m, n) = 1 (dit is zeker; we zouden naar geen andere m, n kijken);
- de 4 factoren van V zijn *verschillend* (dit is zeker);
- V is een even kwadraat (dit weten we oa. op basis van de veronderstelling).

Voorbeeld 5
Kijk eerst maar eens hóe je een dergelijke ontbinding zou kunnen maken, alleen uitgaande van een kwadraat.
Neem het even kwadraat 3600 (= 60^2). In de ontbinding daarvan zit één even factor, en die zet je voorop: $3600 = 16 \times 225$.
En dan moet 225 nog in 3 factoren worden ontbonden…
$225 = 75 \times 3 \times 1 = 45 \times 5 \times 1 = 25 \times 9 \times 1$. En ook $225 = 15^2 \times 1 \times 1$?◊

Opgave 11
- Welk ontbinding van $V = 3600$ past volgens jou het 'best' bij de drie andere dingen die we over de ontbinding van V weten?
- Bepaal (zoals in het voorbeeld) alle ontbindingen met 4 factoren van $V = 23716$ en kies daaruit ook de 'beste'.
- Doe hetzelfde als $V = 93636$.
- Kun je op basis van deze ontbindingen een vermoeden formuleren met betrekking tot de 'beste' ontbinding van V? Zo ja, doe dat!

Intermezzo
Deelbaarheid – We zeggen 3 *is deelbaar* op 15 (of 3 *is een deler* van 15), want er is een getal dat je met 3 kunt vermenigvuldigen om 15 te krijgen: $15 = 5 \times 3$.
Algemeen, sprekend over natuurlijke getallen a en b, is per *definitie*:
- a is een deler van b als er een geheel getal q bestaat met $b = q \cdot a$.

Het getal 1 wordt niet als een *echte* deler van een getal beschouwd.
Afspraak: Twee getallen a, b met ggd(a, b) = 1 zijn *relatief-priem*.

Voorbeeld 6
$m = 28$ (even), $n = 15$ (oneven) , $m - n = 13$, $m + n = 43$, en ook ggd(28, 15) = 1.
3 is deler van 15 en 3 is geen deler van 28.
En we zien verder: 3 is geen deler van 13, en ook: 3 is geen deler van 43.◊

Algemeen (maar met een oog op de ontbinding van V) – We gaan uit van een *even* getal m, en een *oneven* getal n met ggd(m,n) = 1.
Is nu d een deler van n (d is ook oneven, én $d \neq 1$). Volgens de definitie bestaat er dan een getal q met $n = q \cdot d$.
We *veronderstellen* nu (en er volgt hierna een bewijs uit het ongerijmde):
d is óók een deler van $(m - n)$.
Dan is er (opnieuw volgens de definitie) een getal r met $m - n = r \cdot d$. Gevolg:
$m - (q \cdot d) = r \cdot d$
$m = q \cdot d + r \cdot d = (q + r) \cdot d$
Maar dit laatste betekent dat d óók een deler is van m! De getallen m en n hebben dus een *gemeenschappelijke* deler die $\neq 1$ is. Tegenspraak, want ggd(m, n) = 1.

Conclusie: de factoren n en $(m - n)$ in de ontbinding van V hebben *geen* gemeenschappelijke deler: n en $(m - n)$ zijn relatief-priem.

Opgave 12

- Bewijs, zoals hierboven gedaan is voor n en $(m - n)$, dat ook n en $(n + \mathrm{m})$ relatief-priem zijn.

Gevolg van een en ander (dit weten we nu ook zeker):
Elke twee getallen van het viertal m, n, $m - n$, $m + n$ is relatief-priem.
Of ook:
ggd(m, n, $m - n$, $m + n$) = 1

(einde Intermezzo)

Het bewijs van Stelling 2

Opgave 13

- Bewijs dat *elk* van de factoren van de ontbinding $V = mn(m - n)(m + n)$ een kwadraat is, als je weet dat V een kwadraat is.

Nu we weten dat m, n, $(m - n)$ en $(m + n)$ kwadraten zijn – en dat is nog altijd *in de veronderstelling* dat V een kwadraat is – kunnen we opnieuw kijken naar:
$V = mn(m^2 - n^2)$
Omdat $(m - n)$ en $(m + n)$ kwadraten zijn, is ook het product $m^2 - n^2$ een kwadraat.
We stellen dat kwadraat gelijk aan u^2. Dus: $m^2 - n^2 = u^2$, of:
$n^2 + u^2 = m^2$
En dit is een belangrijke stap! Want, de getallen n, u, m zijn blijkbaar de lengtes van de zijden van een nieuwe rechthoekige driehoek, terwijl ggd(m, n) = 1.
(n, u, m) is dus een priprij, én de bijbehorende r-driehoek (een tweede) is een *primitieve* r-driehoek.

Volgens ons recept moet één van de getallen n, u een even getal zijn.

Opgave 14

- Toon aan dat n even is!

  Aanwijzing – Dat $u^2 = m^2 - n^2$ oneven is, dat weet je al (waarom?). En m is de schuine zijde van een r-driehoek; en de lengte van zo'n schuine zijde is een … getal (zie Opgave 4). Dus …

Gevolg: Het getal n is het even element in de priprij (n, u, m).

Bij deze prij zijn er (weer volgens ons recept) natuurlijke getallen p, q (die *verschillende* pariteit hebben) waarmee:

$n = 2pq$, $u = p^2 - q^2$, $m = p^2 + q^2$

We hebben al gezien dat m, als factor van V, een kwadraat is; zeg $m = r^2$. Anders gezegd:

$p^2 + q^2 = r^2$

En daarmee hebben we een *derde* r-driehoek met bijbehorende priprij (p, q, r). Van deze derde driehoek geldt voor de oppervlakte V_3:

$V_3 = ½pq$

Opgave 15

- Bewijs dat $V_3 = ¼n$.

  Aanwijzing – Hierboven staat vast wel ergens een verband tussen n, p en q.
- Bewijs dat ook V_3 een kwadraat is.

  Aanwijzing – n is een factor van V, en van alle factoren van V weet je dat …

Opmerking. Dat V_3 een kwadraat is, hadden we natuurlijk niet behoeven te bewijzen!
Volgens onze veronderstelling is de oppervlakte van *elke* primitieve r-driehoek immers een kwadraat. Maar in dit geval was een bewijs snel te leveren.◊

Naast de oorspronkelijke primitieve r-driehoek (noem deze D), waarvan de oppervlakte V een kwadraat is, hebben we in ieder geval nóg een primitieve r-driehoek (D_3) waarvan de oppervlakte V_3 een kwadraat is.

Opgave 16a

- Bewijs dat $V > V_3$.
- Waarom zijn V en V_3 natuurlijke getallen?

Nu volgt de belangrijkste stap in het bewijs (uit het ongerijmde)!
Uitgaande van de primitieve r-driehoek D_3, kunnen we, op basis van wat we hierboven gedaan hebben met de primitieve r-driehoek D, opnieuw via een 'tussendriehoek' een *vijfde* primitieve r-driehoek D_5 bepalen, waarvan de oppervlakte V_5 ook een geheel kwadraat is.

Opgave 16b

- Waarom is $V_3 > V_5$?

En zo – *nog steeds* in de veronderstelling dat V een kwadraat is – kunnen we natuurlijk, eindeloos doorgaan: bij D_5 bestaat een driehoek D_7, bij D_7 …
Daarmee ontstaat dan een 'oneindige' rij natuurlijke getallen V, V_3, V_5, V_7, … (de oppervlaktes) met:

$V > V_3 > V_5 > V_7 > \ldots$

Maar dit is in strijd met iets dat we zeker weten: een rij natuurlijke getallen waarin elk getal kleiner is dan z'n voorgaande, móet een keer stoppen, want een natuurlijk getal dat *kleiner* is dan 1, bestaat niet.

Dus hebben we een tegenspraak. De veronderstelling 'V is een kwadraat' was dus onjuist. En daarmee is Stelling 2 bewezen.

R-driehoeken – Met wat je nu weet, kun je ook de volgende stelling bewijzen; en dat gaat iets eenvoudiger dan in het vorige bewijs: zonder 'ongerijmdheid'.

Stelling 3. *De oppervlakte van een (willekeurige) r-driehoek is **geen** kwadraat.*

Voorbeeld 7
De lengtes van de zijden van een willekeurige r-driehoek zijn rationale getallen (breuken).
$P = (3\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 5\frac{5}{6})$ is de prij die de r-driehoek D bepaalt (ga dit na!).
Het *kleinste* getal dat door de noemers 2, 3, 6 van de elementen van P te delen is, is het getal 6. Dit getal geven we aan met k (k = 6 is het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud*, het kgv, van 2, 3 en 6).
$P_1 = k \times P = 6 \times P = (21, 28, 35)$ is dan eveneens een prij.
De zijden van D worden dus alle met 6 vermenigvuldigd; en dat geeft een nieuwe driehoek D_1.
Nu is d = ggd(21, 28, 35) = 7. En, $P_2 = \frac{1}{d} \times P_1 = (3, 4, 5)$ is een priprij.
De zijden van driehoek D_1 worden dus alle door 7 gedeeld; en dat geeft een nieuwe driehoek D_2.
Je weet, op grond van Stelling 2, dat de oppervlakte van de driehoek D_2 bepaald door (3, 4, 5) *geen* kwadraat is.
De oppervlakte van D is dan evenmin een kwadraat.◊

Dit voorbeeld lijkt wat omslachtig om aan te tonen dat dit laatste het geval is, immers met een eenvoudige berekening kun je dat ook vinden:
oppervlakte(D) = $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{14}{3} = \frac{98}{12} = \frac{49}{6}$ (en die 6 in de noemer is geen kwadraat!)
Maar het voorbeeld geeft wel enig inzicht in de manier waarop Stelling 3 bewezen zou kunnen worden!

Opgave 17a

Deze opgave heeft betrekking op de driehoeken D en D_2 die voorkomen in Voorbeeld 7.
- Bereken oppervlakte(D_2).
- Toon aan dat: oppervlakte$(D) = \frac{d^2}{k^2} \cdot$ oppervlakte(D_2).

Natuurlijk is met deze opgave Stelling 3 niet bewezen, maar de laatste opdracht in Opgave 17a geeft daartoe wel een eerste aanzet.

Opgave 17b

Als voor de oppervlaktes van twee r-driehoeken D en D_2, waarvan D_2 een *primitieve* r-driehoek is, geldt dat:
oppervlakte(D) = f^2 · oppervlakte(D_2)
Dan is de oppervlakte van driehoek D ***geen*** kwadraat.
- Bewijs dit (het mag met en zonder 'ongerijmdheid').
  Aanwijzing – Het getal f is een willekeurig rationaal getal. En, maak gebruik van Stelling 2.

Voor de volledigheid laten we hieronder een bewijs van Stelling 3, gelijkend op Voorbeeld 7, volgen.

Is D een willekeurige r-driehoek, dan wordt D bepaald door een prij, zeg $P = (u, v, w)$.
Is k het kgv van de noemers van de rationale getallen u, v, w, dan is $P_1 = (ku, kv, kw)$ een 'noemervrije' prij (P_1 bestaat uit natuurlijke getallen).
Er geldt immers $(ku)^2 + (kv)^2 = k^2(u^2 + v^2) = k^2 \cdot w^2 = (kw)^2$, en door vermenigvuldiging met k vallen de noemers van de elementen van de prij P weg.
Is nu $d = \text{ggd}(ku, kv, kw)$, dan is $P_2 = \frac{1}{d} \times P_1 = \frac{1}{d} \times (ku, kv, kw)$ een priprij (ga na waarom), die dus een *primitieve* r-driehoek D_2 bepaalt.
En dan geldt voor de oppervlaktes V en V_2 van D en D_2:

$$V_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{ku}{d} \cdot \frac{kv}{d} = \frac{k^2}{d^2} \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot u \cdot v) = \frac{k^2}{d^2} \cdot V$$

Of: $V = \frac{d^2}{k^2} \cdot V_2$

Door gebruik te maken van het gestelde in Opgave 17b, met $f = \frac{d}{k}$, is dan bewezen: de oppervlakte V van driehoek D (een willekeurige r-driehoek) is geen kwadraat.
En daarmee is de juistheid van Stelling 3 aangetoond.

Laatste Stelling van Fermat – De stelling van Pythagoras heeft aanleiding gegeven tot veel onderzoek naar het oplossen (en de oplossingen) van vergelijkingen van het type:
$x^n + y^n = z^n$
voor (positieve) gehele waarden van x, y, z waarbij n een natuurlijk getal is ≥ 2.
Voor $n = 2$ krijg je dan de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$. Hierboven heb je gezien dat daaraan alle prijen voldoen; zoals $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ en $(x, y, z) = (\frac{5}{4}, 3, \frac{13}{4})$.
De reden voor dat onderzoek is een notitie die Pierre de Fermat (1601-1655, Frankrijk) maakte in de kantlijn van een wiskundeboek dat hij aan het bestuderen was: '*Het is onmogelijk een derde macht te verdelen in twee derde machten, of een vierde macht in twee vierde machten, en, algemeen, elke macht hoger dan de tweede in twee gelijksoortige machten. Hiervan heb ik een zeer bijzonder bewijs gevonden. Deze marge is te smal om het te bevatten.*'
Fermat's uitspraak, geformuleerd als stelling in onze terminologie, luidt:

Stelling 4 (LSF). Er zijn ***geen*** positieve gehele getallen x, y, z zijn met $x^n + y^n = z^n$ als $n \geq 3$.

Fermat heeft het bewijs van *zijn* stelling – die is namelijk bekend geworden als de *Laatste Stelling van Fermat* (LSF) – verder nergens gepubliceerd. Velen na hem hebben gepoogd het bewijs van de LSF te leveren, maar tevergeefs. Geen wonder, want het eerste correcte bewijs, dat Andrew Wiles (geb. 1953, Engeland) in 1993 gaf – na vele jaren van onderzoek, en met gebruikmaking van ingewikkelde wiskundige theorieën (ook van anderen) – telt zo'n 120 pagina's, verdeeld over twee artikelen in een Amerikaans wiskundetijdschrift.
In 1753 was de LSF wel voor $n = 3$ bewezen (door Leonhard Euler, 1707-1783, Zwitserland). Het bewijs van Wiles betreft de waarden van $n \geq 5$.
Je zult hieronder zelf zien dat het bewijs van de LSF voor $n = 4$ redelijk eenvoudig verloopt. Het komt min of meer overeen met het bewijs dat Fermat in ieder geval wél leverde, en dat pas na zijn dood is gepubliceerd (in 1670).

Opmerking. Fermat heeft overigens ook 'onze' Stelling 1 bewezen. Zijn bewijs van die stelling staat in hetzelfde wiskundeboek als hierboven bedoeld (dit keer wél), en óók in een marge ervan. Fermat schrijft erbij dat hij het heeft gevonden 'na moeizaam en lastig denkwerk' (en dat was het eigenlijk in dit werkblad ook wel…).◊

We zullen de reeds bewezen Stelling 3 (*de oppervlakte van een r-driehoek is geen kwadraat*) gebruiken in het bewijs van de volgende:

Hulpstelling. *Er zijn* ***geen*** *natuurlijke getallen a, b en c waarvoor* $a^4 - b^4 = c^2$.

Gezien de formulering van deze hulpstelling (die ook afkomstig is van Fermat, én door hem bewezen) wordt het een bewijs uit het ongerijmde. Maar eerst een herkenbaar opwarmertje…

Opgave 18a

Bij gegeven natuurlijke getallen a, b, c (met $a > b$) worden de getallen u, v, w bepaald door (en dit is een *nieuw* recept):

$u = a^4 - b^4$, $v = 2a^2b^2$, $w = a^4 + b^4$

- Bereken voor $a = 2$ en $b = 1$ de waarden van u, v en w. Wat valt je aan de waarden van u, v, w op?
- Er geldt algemeen: $u^2 + v^2$ gelijk is aan een kwadraat (het kwadraat van $w = a^4 + b^4$) . Bewijs dit door hieronder op de … aan te vullen, nadat je eerst beide haakjesvormen hebt uitgewerkt:

  $$u^2 + v^2 = (a^4 - b^4)^2 + (2a^2b^2)^2 + = \ldots$$

  Aanwijzing – De berekening van iets als $(p - q)^2$ leidt tot **drie** termen: p^2, q^2 én …

Uit Opgave 18a volgt dat het drierijtje (u, v, w) een prij is die, zoals je gezien hebt, een r-driehoek D bepaalt. Is V de oppervlakte van D (en waar heb je dat eerder gezien?), dan is:

$V = ½uv = a^2b^2(a^4 - b^4)$

Hierin herken je natuurlijk de term $(a^4 - b^4)$ die ook in de hulpstelling staat. Daarom zal het je niet vreemd voorkomen dat we nu ***veronderstellen*** (als begin van de 'ongerijmdheid') dat (wél geldt dat er getallen a, b, c zijn met):

$a^4 - b^4 = c^2$

En dan is het zaak zó verder te redeneren dat dit tot een tegenspraak leidt met iets dat we zeker weten! En dat is heel eenvoudig. Het eerste deel van die redenering is:

in de veronderstelling dat $a^4 - b^4 = c^2$, geldt: $V = a^2b^2c^2 = (abc)^2$.

Opgave 18b

- Waarom $V = (abc)^2$ in tegenspraak is met Stelling 3?

Uit Opgave 18b volgt dan dat de veronderstelling dat $a^4 - b^4 = c^2$, *onjuist* is.
Met andere woorden: *er zijn* ***geen*** *getallen a, b en c waarvoor* $a^4 - b^4 = c^2$.
En hiermee is de Hulpstelling dus bewezen!

LSF als $n = 4$ – Met deze Hulpstelling is het helemaal niet moeilijk een bewijs van de LSF te geven in het geval dat $n = 4$.
We willen bewijzen: *Er zijn* ***geen*** *positieve gehele getallen x, y, z met* $x^4 + y^4 = z^4$.
Deze te onderzoeken vergelijking is te schrijven als:
$z^4 - x^4 = y^4$ of $z^4 - x^4 = y^2 \cdot y^2$

Opgave 19

- Herschrijf deze laatste vergelijking met $z = a$, $x = b$ en $y^2 = c$.
- Pas vervolgens op deze herschreven vergelijking de Hulpstelling toe.
  Welke conclusie kun je dan trekken met betrekking tot de getallen a, b en c?
  En welke dan óók met betrekking tot de getallen x, y en z?
- En wat weet je dan van de LSF (Stelling 4) als $n = 4$?

En, uiteraard bekijken we in dit werkblad de LSF *niet* voor waarden van n die groter zijn dan 4, en evenmin voor $n = 3$…

Oneindig veel? – In het werkblad is tot nu eigenlijk niet gesproken over het *aantal* prijen cq. priprijen.
Je kunt opmerken dat je elke prij (als zou het er maar ééntje zijn) met een willekeurig natuurlijk getal (of rationaal getal) r kan vermenigvuldigen: uit (3,4,5) volgen dan de prijen $2 \times (3,4,5) = (6,8,10)$, $3 \times (3,4,5) = (9,12,15)$, … (en dat houdt niet op).
Alleen (3,4,5) is hier een priprij (die opmerking is dan eigenlijk een beetje flauw). Maar zijn er ook 'oneindig veel' priprijen? Dat dit zo is, ga je in de volgende opgave bewijzen!

Opgave 20

- Schrijf de rij kwadraten die hieronder staan, over zoals ze er staan en houd tussen elk tweetal telkens een kleine ruimte (je mag het rijtje ook wat langer maken).

  $0^2 \quad 1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8^2 \quad 9^2 \quad 10^2 \quad 11^2 \quad 12^2 \quad 13^2 \quad \ldots$
- Schrijf *onder* die rij, tussen elk tweetal, het verschil van beide. Dus iets als:

  $0^2 \qquad 1^2 \qquad 2^2 \qquad 3^2 \qquad \ldots$
  $\quad 1 \qquad 3 \qquad 5 \qquad \ldots$
- Wat valt je op in de tweede rij?
- Bewijs dat het verschil van de kwadraten van twee opeenvolgende natuurlijke getallen een *oneven* getal is.
  Aanwijzing – Iets dergelijks zag je al eerder. Maar probeer het hier eens met de volgende hint. Twee opeenvolgende natuurlijke getallen zijn altijd een oneven én een even getal, en die kun je (met p als willekeurig natuurlijk getal) schrijven als $(2p–1)$ en $2p$, of als $2p$ en $(2p+1)$. Bereken dan van de kwadraten van deze getallen het verschil.

In het lijstje zie je onder meer dat $9 = 3^2 = 5^2 – 4^2$ en $25 = 5^2 = 13^2 – 12^2$; dus dat:
$3^2 + 4^2 = 5^2$ en $5^2 + 12^2 = 13^2$

- Waarom kom je, als je de rij verder zou aanvullen met kwadraten, als verschil ook het getal 25 tegen? En ook 121 als verschil?
- Van welke twee kwadraten is 5^2 het verschil? En 11^2?
- Bewijs op basis van het bovenstaande dat er *oneindig veel* priprijen zijn.

Opgave 21

Zoals reeds is opgemerkt, kun je elk oneven getal met een natuurlijk getal $p \geq 1$ schrijven als $2p – 1$ (een even getal *min* 1).

- Van welke twee kwadraten is $2p – 1$ dan het verschil?
- Schrijf je antwoord ook als formule; dus: $(\ldots\ldots)^2 – (\ldots\ldots)^2 = 2p – 1$.
- Stel nu $2p – 1 = k^2$, druk dan p uit in k, en laat met een berekening zien dat:
  $(k^2-1)^2 + (2k)^2 = (k^2+1)^2$

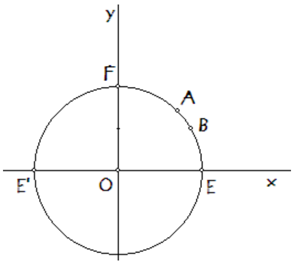
▤ Ben je deze formule eerder in dit werkblad al eens tegengekomen? Zo ja, waar?

Meetkunde – In het laatste deel van dit werkblad wordt ook gebruik gemaakt van *analytische meetkunde*. De berekeningen zijn daarbij niet al te ingewikkeld, ook als je niet met die meetkunde vertrouwd bent. Is dit het geval, probeer dan de opgaven die hierbij horen, toch tot het eind te maken!

Ga je uit van een willekeurige prij (a,b,c), dan is $a^2 + b^2 = c^2$. Dan mag je, omdat $c \neq 0$ is, door c delen, zodat:

$$(\tfrac{a}{c})^2 + (\tfrac{b}{c})^2 = 1$$

Is nu $x = \frac{a}{c}$ en $y = \frac{b}{c}$, dan zijn x en y beide rationale getallen (het zijn *echte* breuken) waarvoor geldt dat $x^2 + y^2 = 1$.



figuur 10

En $x^2 + y^2 = 1$ is de vergelijking van de *eenheidscirkel*. Dat is de cirkel met straal 1 en middelpunt O, de oorsprong van het rechthoekige assenstelsel xOy.

Het punt $P = (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ ligt dus (ergens) *op* die eenheidscirkel, omdat de coördinaten voldoen aan de cirkelvergelijking.

Bijzondere punten op de eenheidscirkel zijn $E = (1, 0)$, $F = (0, 1)$ en $E' = (-1, 0)$; ***zie figuur 10***.

Ook het punt A met coördinaten $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ ligt op die cirkel, evenals het punt B met coördinaten $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$.

Opgave 22

▤ Toon met een berekening aan dat de punten A en B op de eenheidscirkel liggen.

Hieruit blijkt dat op de eenheidscirkel óók punten liggen met coördinaten die *geen* rationale getallen zijn.

Opmerking. In Voorbeeld 4 heb je al gezien dat √2 geen rationaal getal is. Dan is ½√2 dat ook niet. Op dezelfde manier als in dat voorbeeld kun je ook bewijzen dat √3 niet rationaal is. Hiervoor zou je dan een 30°-60°-90°-driehoek kunnen gebruiken.

▤ Geef de coördinaten van twee andere punten op de eenheidscirkel die geen rationale getallen zijn.

Aanwijzing – Bijvoorbeeld: nog een punt waarvan in de coördinaten √3 voorkomt (het moet niet moeilijk zijn zo'n punt, zonder berekening, te vinden!). En een punt waarbij √5 een rol speelt?

Door gebruik te maken van een handige techniek kan bewezen worden dat er op de eenheidscirkel *oneindig* veel punten liggen waarvan de coördinaten (positieve) *rationale* getallen zijn.

Deze punten worden *rationale punten* genoemd.

Opmerking. Deze techniek is eveneens klassiek, en is vermoedelijk voor het eerst toegepast (zij het in een andere vorm dan wij het hier doen) door Diophantos (±210-±290, Egypte) in diens boek *Arithmetika* (het is een verhandeling over het oplossen van vergelijkingen).

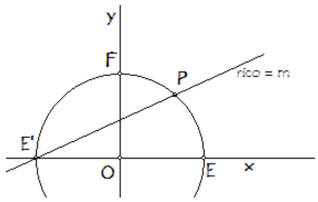
In een exemplaar van de Latijnse vertaling daarvan (uit het Grieks) maakte Fermat trouwens zijn 'marginale notities'.

Een vergelijking waarvan de oplossing(en) gegeven moet(en) worden als gehele of rationale getallen, zoals $x^n + y^n = z^n$, wordt een *diophantische vergelijking* genoemd.◊

Bij de bedoelde techniek wordt gebruik gemaakt van een geschikt gekozen rechte lijn in het rechthoekige coördinatenstelsel.

De rechte lijn die door het punt $E' = (-1, 0)$ gaat en waarvan de richtingscoëfficiënt gelijk is aan m (***zie figuur 11***), heeft als vergelijking:

$y = m(x + 1)$



figuur 11

Om de coördinaten van het andere snijpunt P van deze lijn met de eenheidscirkel te berekenen moet je kijken naar het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = m(x+1) = mx + m \end{cases}$$

De x-coördinaat van E' en die van P vind je dan (na het 'wegwerken' van de y) uit de tweedegraads vergelijking:

$$x^2 + (mx + m)^2 = 1$$

Opgave 23

- Herleid, met enkele tussenstappen, die tweedegraads vergelijking tot:
  $(1+m^2)x^2 + 2m^2x + (m^2 - 1) = 0$

Om beide x-en te berekenen grijpen we nu *niet* naar de *abc*-formule (het mag natuurlijk wel), omdat één van de x-en al bekend is, namelijk de x-coördinaat van E' ($x = -1$).
Daarom is het linker lid van de laatste vergelijking te ontbinden in twee factoren:
$(x + 1)(\ldots\, x + \ldots) = 0$
De getallen op de … in de tweede factor zijn nu (eerst links, dan rechts) gelijk aan $(1 + m^2)$ en $(m^2 - 1)$.

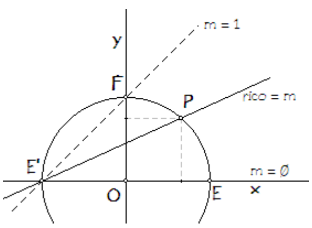
- Waarom is dat zo?
  Aanwijzing – Reken met die waarden eens 'terug'.

De x-coördinaat x_P van het punt P is dan te berekenen uit: $(1 + m^2)x + (m^2 - 1) = 0$.

Zo blijkt: $x_P = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$.

- Laat met een berekening zien dat voor de y-coördinaat y_P van P geldt:
  $y_P = \dfrac{2m}{1+m^2}$
  Aanwijzing – Het punt P ligt op de lijn met vergelijking $y = m(x + 1)$. Je weet de 'x', zodat je met de vergelijking van de rechte lijn de 'y' (dwz. y_P) kunt uitrekenen.
- Kies $m = \frac{1}{2}$ en bereken daarmee de coördinaten van het punt P.
  Bepaal ook de priprij die daarbij hoort.
- Doe hetzelfde voor $m = \frac{2}{3}$ en voor $m = \frac{3}{4}$.

Opgave 24



We kiezen nu voor m (de 'rico' van de rechte lijn) *alle* rationale getallen die tussen 0 en 1 liggen (het getal m is dan een *echte* breuk). En daarvan zijn er, zoals je weet, oneindig veel (en niet alleen tussen 0 en 1); ***zie figuur 12***.
Elke waarde van m bepaalt zo een snijpunt P van de rechte lijn

figuur 12 met de eenheidscirkel dat gelegen is op cirkelboog EF.

Er zijn dan oneindig veel van die snijpunten P!

- Waarom zijn in dit geval de coördinaten x_P en y_P van het punt P rationale getallen (breuken)?
- Waarom geldt (voor elke waarde van m): $\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2=1$?

  Aanwijzing – Niet uitrekenen!

Gevolg: Met $x=\frac{1-m^2}{1+m^2}$, $y=\frac{2m}{1+m^2}$ kun je de coördinaten van (alle?) rationale punten op de eenheidscirkel vinden.

- Bekijk nu eens het drierijtje $(1 - m^2, 2m, 1 + m^2)$.

  Verklaar waarom dit drierijtje een *prij* is.

Je kunt het positieve rationale getal m ook schrijven als een *echte* breuk: $m=\frac{r}{s}$, met $0 < r < s$ en $\text{ggd}(r, s) = 1$.

In de laatste opdracht van Opgave 23 heb je de priprij berekend voor $r = 2$ en $s = 3$ (bij $m=\frac{2}{3}$).

- Bereken met $(1 - m^2, 2m, 1 + m^2)$ de prij voor $r = 1$ en $s = 5$ (dus voor $m=\frac{1}{5}$).

  Als die prij geen primitieve prij is, wat is daarvan dan de oorzaak?

  Aanwijzing – Kijk nog eens naar Opgave 5 en het gevolg daarvan.
- Laat nu met een berekening zien dat, ook in het algemeen, met behulp van het drierijtje $(1 - m^2, 2m, 1 + m^2)$ een *priprij* gevonden kan worden.

  Welke priprij is dat?

  Aanwijzing – Vul r/s in voor m en 'vereenvoudig' de prij zo ver mogelijk door één of meer factoren buiten haakjes te halen.
- Bewijs opnieuw, maar nu op basis van deze 'meetkundige' beschouwingen, dat er *oneindig veel* priprijen zijn.