Grote getallen

Werkblad – Groot, groter, nóg groter

Vooraf – De vragen en opdrachten in dit werkblad die vooraf gegaan worden door ▤, moeten *schriftelijk* worden beantwoord.
Daarbij moet altijd duidelijk zijn 'hoe' de antwoorden gevonden zijn. Het geven van *alleen* een antwoord als 'ja' of iets als '$a = 36$' (zonder enige toelichting) is dus *niet* voldoende.
Eenvoudige berekeningen (die 'uit het hoofd' kunnen worden uitgevoerd, zoals 12 × 8) behoeven geen toelichting. Bij andere berekeningen zijn *tussenantwoorden* gewenst; de manier waarop dan een (grafische) rekenmachine wordt gebruikt, hoeft evenmin te worden toegelicht.

Studielast
: 8 à 10 slu

Voorkennis
: getalverzamelingen / eenvoudige eigenschappen van getallen / rekenvaardigheid (o.a. met machten) / vaardigheid in het interpreteren van formules / functies / logaritme

Benodigdheden
: zakrekenmachine (waarop haakjes, machtsverheffing en 'log' voorkomen)

Eigenschappen – In dit werkblad ga je op zoek naar *grote* getallen, en wat in dit verband *groot* is, zal wel blijken. Daarbij is het van belang een aantal eigenschappen van de *rekenkundige bewerkingen* te kennen. Door getallen 'op de juiste manier' rekenkundig te bewerken kunnen namelijk bijzonder grote getallen ontstaan (worden gegenereerd). Bedoelde bewerkingen zijn de standaard bewerkingen:
+ : optelling (*plus*)
× : vermenigvuldiging (*maal*)
^ : machtsverheffing (*tot de macht*)
En daarbij horen natuurlijk ook – (aftrekking; *min*), ÷ of / (deling; *gedeeld door*) en √ (worteltrekking; *de wortel uit*). Maar omdat we ons bij het onderzoek zullen beperken tot *positieve gehele* getallen, worden deze bewerkingen, die er meestal voor zorgen dat er juist kleinere (soms negatieve) getallen of breuken ontstaan, alleen in bijzondere gevallen gebruikt.
Bij het rekenen ga je altijd uit van ten minste *twee* getallen, die een *derde* getal als resultaat van die bewerking geven:
12 + 19
14 × 3
2 ^ 4, dat meestal geschreven wordt als 2^4.
Het 'dakje' wordt eigenlijk alleen gebruikt als bewerkingsteken (knop) op de rekenmachine. Echter, je zult weldra zien dat bij bepaalde problemen het teken '^' handiger werkt dan de notatie met *grondtal* (2) en *exponent* (4).
En, het is gebruikelijk het resultaat van een rekenkundige bewerking te schrijven achter het gelijkteken (=), en *niet* tussendoor (dus niet 'breien').

Opgave 1

We beginnen erg eenvoudig.

- Neem bovenstaande drie rekenopdrachten over en plaats achter elke opdracht een gelijkteken gevolgd door het resultaat van de bewerking(en).
- En doe dat ook met de onderstaande zes opdrachten:
  $33 - 17$
  $85 \div 17$
  $\sqrt{121}$ (waar is het *tweede* getal dat bij deze bewerking hoort?)
  $\sqrt[4]{256}$
  $57 - 23 + 12$
  $126 \div 3 \times 7$

Commutatief. Zoals gezegd zullen we gaan kijken naar enkele eigenschappen van rekenkundige bewerkingen (wellicht heb je die al eens gezien, maar dan kan het geen kwaad ze toch nog eens te bekijken).
De *optelling* en de *vermenigvuldiging* zijn **commutatief** (verwisselbaar), dwz. dat je de getallen die rond + of × staan van plaats mag verwisselen; in formule:

- $a + b = b + a$
- $a \times b = b \times a$; of ook $a \cdot b = b \cdot a$ (dan eveneens $ab = ba$)

Opgave 2

- Verklaar waarom – en ÷ *niet* commutatief zijn.
  Aanwijzing – Om een mogelijke eigenschap van een bewerking te 'ontkennen' is het voldoende één tegenvoorbeeld van die eigenschap te geven bij de betreffende bewerking.
- Verklaar ook waarom ^ *niet* commutatief is.

Associatief. De associatieve eigenschap (associatief = samennemend) heeft betrekking op *drie* getallen waarop *twee* keer *dezelfde* bewerking wordt toegepast. Het gaat daarbij dan om de *volgorde* waarin je de bewerking op telkens twee getallen uitvoert. Om de volgorde te benadrukken worden (en), dus haakjes, gebruikt.
$2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$
Je rekent eerst 2 + 3 uit en dan reken je met het resultaat daarvan verder.
$2 + 3 + 4 = 2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$
Blijkbaar maakt het niet uit om welk tweetal 'naast elkaar staande' getallen je de haakjes zet.
De *optelling* is **associatief**.

Opmerking 1. Zo'n voorbeeld als hierboven is eigenlijk *niet* voldoende om de eigenschap aan + toe te kennen. Wil je een eigenschap algemeen geldig kunnen verklaren, dan moet je eigenlijk laten zien dat *voor elk drietal* getallen a, b en c geldt: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Opmerking 2. Bereken je 2 + 3 + 4 als (2 + 4) + 3, dus als:
$2 + 3 + 4 = 2 + (\mathbf{3} + \mathbf{4}) = 2 + (\mathbf{4} + \mathbf{3}) = (2 + 4) + 3$
dan pas je eigenlijk eerst de commutatieve eigenschap toe.

Opgave 3

- Maak aannemelijk dat ook de *vermenigvuldiging* **associatief** is.
  Aanwijzing – Bij je beantwoording is hier het geven van één voorbeeld voldoende.

- Schrijf de associatieve eigenschap van × (vermenigvuldiging) in een algemene formule, met a, b en c (en haakjes op de juiste plaatsen).

Opgave 4

- Toon met een voorbeeld aan dat de aftrekking (–) en de deling (÷) *niet* associatief zijn.

We moeten natuurlijk ook het al of niet associatief zijn van de *machtsverheffing* onderzoeken. Bij dat onderzoek is dan het teken ^ handig te gebruiken.

Opgave 5

- Bereken (3 ^ 2) ^ 4 én 3 ^ (2 ^ 4).
- Is de machtsverheffing associatief?

Er zijn evenwel combinaties van drie getallen a, b, c te vinden waarvoor wél geldt dat:
(a ^ b) ^ c = a ^ (b ^ c)

- Geef twee voorbeelden daarvan.
- Toon aan dat de machtsverheffing evenmin commutatief is.

Als je een niet-associatieve bewerking hebt, dan *moet* afgesproken worden hoe het herhaald bewerken van drie (of meer) getallen zal worden uitgevoerd. De volgorde waarin dat gebeurt is immers van invloed op de uitkomst!
Voor de machtsverheffing is (op basis van verschillende wiskundige gronden) vastgelegd dat deze **rechts-associatief** is. Dat wil zeggen dat je een berekening *altijd* als volgt uitvoert:
3 ^ 2 ^ 4 = 3 ^ (2 ^ 4) = 3 ^ 16 = 43046721
Zonder ^ wordt dit geschreven als:

$3^{2^4} = 3^{16} = 43046721$

Algemeen geldt dus: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Een vorm als 3^{2^4} zullen we in in dit werkblad nog wel eens tegenkomen. Zo'n vorm noemen we een 'torentje'. Dit torentje heeft drie 'lagen'. Je begint in zo'n torentje met het berekenen van de uitkomst, vanwege de rechts-associativiteit, altijd *rechtsboven*.

LET OP! De meeste rekenmachines berekenen de waarde van een torentje *foutief*. Gebruik daarom, voor alle zekerheid, op je rekenmachine **altijd** haakjes (en op de juiste plaats)!
Controle: voer op je rekenmachine 3 ^ 2 ^ 4 in (dus zonder haakjes). Is het antwoord dan 6561, dan doet ook jouw machine het, wiskundig gezien, verkeerd.

Opgave 6

- Schrijf $a = 4^{3^{2^1}}$ met dakjes (^) en geef met haakjes de berekeningsvolgorde aan.
- Bereken de waarde van a.

Opgave 7

Hierboven ben je in ieder geval al enkele (redelijk) grote getallen tegengekomen.

- Zoek op je rekenmachine uit welk torentje van 4 lagen (waarbij de 1 als getal *niet* in een laag voorkomt) nog *exact* op het scherm daarvan wordt weergegeven.
- Vermeld het torentje en bereken de waarde.
- Lukt het met een torentje van 5 lagen ook?

Recursie

Opgave 8a

- Schrijf het getal 3 op. Zet daarnaast een komma en 2 maal het laatste getal dat je opschreef, zet daarnaast (weer) een komma en dan 2 maal het laatste getal dat je opschreef, …
- Voer dan de opdracht 'zet daarnaast een komma en dan 2 maal het laatste getal dat je opschreef' nog drie keer uit.

Al je Opgave 8a zou zijn begonnen met het opschrijven van het getal a (geen waarde), dan zou je het volgende rijtje hebben gekregen:
a, $2a$, $4a$, $8a$, $16a$, $32a$
Men zegt dat dit rijtje – en het rijtje dat je zelf opschreef – door **recursie** (herhaling) is ontstaan (gegenereerd).
Bij een recursieproces, dat ook uit een meer dan één bewerking kan bestaan (zoals bijvoorbeeld ook 'een komma zetten') wordt een eerder gevonden resultaat opnieuw aan een *gelijksoortige* bewerking onderworpen.

Opgave 8b

- Schrijf het getal 5 op, tel 5 op bij het getal dat op papier staat, en schrijf de uitkomst dan vlak achter het getal dat al op papier staat. Nu staat er dus 510.
- Herhaal dit recursieproces (dus: tel 5 op bij het getal nu op papier staat, en schrijf de uitkomst dan vlak achter het getal dat al op papier staat) nog vier keer.
  Aanwijzing – Als je het goed gedaan hebt, zou je nu een getal moeten hebben dat bestaat uit 48 cijfers (en waarin precies één 3 voorkomt).

De getallen die je in Opgave 8b hebt zien ontstaan (5, 510, …), nemen wel erg snel toe. Als je aan het einde van dit werkblad bent, heb je zoiets vaker gezien…

De getallen in een rijtje dat bij een recursieproces ontstaat, kunnen we ook eenzelfde 'naam' geven (bijvoorbeeld g) én nummeren door middel van een *index* (g_1 is dan het eerste getal).
Het rijtje:
a, $2a$, $4a$, $8a$, $16a$, $32a$, …
wordt dan:
$g_1 = a$, $g_2 = 2a$, $g_3 = 4a$, $g_4 = 8a$, $g_5 = 32a$, …
Algemeen kan je nu schrijven (en die formule is een *recursieformule*):

$$g_n = 2 \cdot g_{n-1}$$

Uitgesproken als: 'het n-de getal is gelijk aan 2 maal het (n – 1)-de getal', of ook als:
'een getal in het rijtje is gelijk aan 2 maal het vorige getal in dat rijtje'.

Als je *alleen* de formule $g_n = 2 \cdot g_{n-1}$ kent, dan is het onmogelijk de rij getallen zelf op te schrijven: je weet immers niet met welk getal je moet beginnen. (Jawel, je begint met g_1, maar daarvan ken je de waarde niet!)
Daarom hoort bij een recursieformule altijd (tenminste) één zogenoemde *startwaarde*. Dus, in dit geval de *waarde* van g_1.

Opgave 9

- Bereken met de recursieformule:

  $t_n = 3 + t_{n-1}$

  de waardes van $t_2, \ldots, t_{10}$ als voor de startwaarde t_1 geldt $t_1 = 3$.
- Doe hetzelfde met de formule: $t_n = 2 \cdot t_{n-1} + 1$.

Het laatste recursieproces in Opgave 9 wordt beknopt geschreven als:

$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_n = 2 \cdot t_{n-1} + 1 \end{cases}$, of liever als: $t_n = \begin{cases} \text{als } n = 1: & 3 \\ \text{anders:} & 2 \cdot t_{n-1} + 1 \end{cases}$

Het is, in verband met het vervolg, echter verstandiger om direct maar aan de gebruikelijke notatie voor recursieprocessen te wennen: er worden daarin *functies* gebruikt.
De 'vertaling' naar functies is:

- de *naam* t van de getallen wordt F (of een andere *hoofdletter*; maar hoofdletters zijn niet noodzakelijk);
- de *index* n wordt vervangen door een x, en die plaatsen we, zoals gebruikelijk tussen (en) direct achter de F.

Dus:

$$F(x) = \begin{cases} \text{als } x = 1: & 3 \\ \text{anders:} & 2 \cdot F(x-1) + 1 \end{cases}$$

Als je met dit voorschrift (het is nu een *functievoorschrift*) de waarde van F zou moeten berekenen voor $x = 4$, dan zou dat schematisch als volgt kunnen:

$$\begin{array}{llllllll} F(4) = 2 \cdot & F(3) + 1 & \downarrow & & & & = 31 & \\ & F(3) = 2 \cdot & F(2) + 1 & \downarrow & & & = 15 & \uparrow \\ & & F(2) = 2 \cdot & F(1) + 1 & & & = 7 & \uparrow \end{array}$$

Maar je kan (mag) natuurlijk ook gewoon bij het begin beginnen:
$F(2) = 2 \cdot F(1) + 1 = 7$
$F(3) = 2 \cdot F(2) + 1 = 15$
$F(4) = 2 \cdot F(3) + 1 = 31$

Opmerking. Nog steeds wordt er, ook in de volgende opgaven, gerekend met *niet-negatieve gehele* getallen x (dus $x \geq 0$).

Opgave 10

Gegeven is:

$$F(x) = \begin{cases} \text{als } x = 1: & 0 \\ \text{als } x = 2: & 2 \\ \text{anders:} & F(x-1) + F(x-2) \end{cases}$$

- Bereken $F(5)$ en $F(6)$.

  Opmerking. Hier is dus $F(1) = 0$ en $F(2) = 2$. Je hebt *twee* startwaardes nodig omdat er in de derde regel met *twee* functiewaardes wordt gerekend.

Opgave 11

Gegeven is: $F(x) = \begin{cases} \text{als } x = 0: & 1 \\ \text{anders:} & 3 \cdot F(x-1) \end{cases}$

Opmerking. De startwaarde wordt hier dus bepaald door $x = 0$.

- Bereken $F(1)$, $F(2)$ en $F(3)$
- Bewijs dat $F(x) = 3^x$.

In Opgave 11 heb je gezien dat het mogelijk is het recursievoorschrift van F om te zetten in een ‘gewoon’ functievoorschrift, waarin F direct is uitgedrukt in x.
Dat is soms eenvoudig, soms moeilijk (zoals bijvoorbeeld in Opgave 8b), maar soms ook *on*mogelijk.

Opgave 12a

Gegeven is: $F(x) = \begin{cases} \text{als } x > 50: & 100 \\ \text{als } x \le 50: & F(x+20) \end{cases}$

- Bereken $F(1)$, $F(5)$, $F(30)$, $F(51)$ en $F(100)$.
- Is het mogelijk de recursieve functie om te zetten in een ‘gewoon’ (niet-recursief) functievoorschrift? Zo ja, doe dat.

Opgave 12b

Gegeven is: $F(x) = \begin{cases} \text{als } x > 15: & x \\ \text{als } x \le 15: & F(x+5) \end{cases}$

- Bereken $F(0)$, $F(1)$, $F(6)$, $F(15)$ en $F(20)$.
- Is het mogelijk de recursieve functie om te zetten in een niet-recursief functievoorschrift? Zo ja, doe dat.

Opgave 12c

Gegeven is: $F(x) = \begin{cases} \text{als } x = 0: & 1 \\ \text{als } x > 0: & x \cdot F(x-1) \end{cases}$

- Bereken $F(1)$, $F(2)$, $F(4)$ en $F(8)$.
  Opmerking. Zie eventueel ook het functievoorschrift in Opgave 11 (de overeenkomst is groot),
- Is het mogelijk de recursieve functie om te zetten in een niet-recursief functievoorschrift? Zo ja, doe dat.
- Beantwoord dezelfde vragen voor:
  $$F(x) = \begin{cases} als\ x = 0: & 1 \\ als\ x > 0: & \tfrac{1}{2}(x+1) \cdot F(x-1) \end{cases}$$

Twee variabelen – Je hebt gezien (en eigenlijk doe je al jaren niets anders) dat je bij het rekenen steeds uitgaat van *twee* getallen. Die twee getallen kunnen bij een functie ook voorkomen als *variabelen*.
Zo is de *optelling* als bewerking ook te schrijven met een functie (de optelfunctie):
- $S(a, b) = a + b$

Uitgesproken als: ‘ de som van de getallen a en b is gelijk aan a plus b ‘.
Andere functies van dit type zijn:
- $P(a, b) = a \cdot b$; vermenigvuldiging
- $M(a, b) = a^b$; machtsverheffing

S, P en M zijn *functies van twee variabelen*.
Zo bijzonder zijn die functies nu ook weer niet, want in het dagelijks leven gebruik je ze zeker ook, maar dan onbewust.
Voorbeeld. Als je inkopen doet, gebruik je heel vaak de ‘bewerking’ (*aantal*)×(*prijs*) = $a \times p$.

Is B het bedrag dat je moet betalen voor a flessen frisdrank die p euro per fles kosten, dan is: $B(a, p) = a \cdot p$

Opgave 13

- Geef zelf twee voorbeelden van functies van twee variabelen uit het 'dagelijks leven' (en *echt* andere functies dan de functie B).

Er zijn ook functies van *drie* (of zelfs meer) variabelen.

- Ken je zo'n 'dagelijkse functie' van drie variabelen? Zo ja, beschrijf die dan kort, en natuurlijk mét formule.

We kijken nu naar een recursieve functie F van *twee* variabelen x en y (beide getallen zijn weer niet-negatief én geheel). F is gedefinieerd door:

$$F(x,y) = \begin{cases} \text{als } y = 0: & x \\ \text{als } x = 0, y \neq 0: & F(y,0) \\ \text{anders:} & F(x, y-1) \end{cases}$$

Bij het berekenen van de waardes van dit type functie is het soms (dus niet altijd) handig een 'boekhouding' bij te houden van de reeds berekende functiewaardes. Dat kan bijvoorbeeld in een tabel waarin *verticaal* de x en *horizontaal* de y staat (andersom als in een assenstelsel).

$x \setminus y$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Natuurlijk moet je zo'n tabel niet 'klakkeloos' gaan zitten invullen aan de hand van het voorschrift, want soms werkt 'gezond verstand' (nadenken) sneller.
Als je bijvoorbeeld $F(10, 5)$ wilt berekenen, dan gaat dat met de 3e regel in het voorschrift.

$F(x, y) = F(x, y - 1)$ betekent dat de functiewaarde onveranderd blijft. En dat de y met 1 verminderd wordt, houdt bij de tabel in dat je één kolom naar links schuift. Dus:
$F(10,5) = F(10,4) = \ldots = F(10, 0) = 10$ (de 1e definitieregel geeft de functiewaarde). *Alle* getallen in de rij met $x = 10$ zijn dus gelijk aan 10!

Opgave 14

- Neem bovenstaande tabel over en vul de functiewaardes van F in.
  Aanwijzing – Trek uit het bovenstaande voor de rij met $x = 0$ *niet* de verkeerde conclusie!
- Wat verandert er in de tabel (en dus in de waardes van F) als je de tweede regel in de definitie van F weglaat?

In het voorschrift van F is een andere kleine wijziging aangebracht; voor de gewijzigde functie S geldt:

$$S(x,y) = \begin{cases} \text{als } y = 0: & x \\ \text{als } x = 0, y \neq 0: & S(y,0) \\ \text{anders:} & 1 + S(x, y-1) \end{cases}$$

- Maak een (nieuwe) tabel van de functiewaardes van S, ook voor $x, y = 0, 1, \ldots, 4$.
- Kan je de recursieve functie S omzetten in een 'gewone' functie $S(x, y)$? Zo ja, doe dit.

Opgave 15

Gegeven is voor $x \geq 1$ en $y \geq 0$:

$$M(x,y)=\begin{cases}\text{als } y=0: & 1\\ \text{als } y>0: & x\cdot M(x,y-1)\end{cases}$$

- Maak een tabel voor de functiewaardes van M met $x = 1, \ldots, 4$ en $y = 0, 1, \ldots, 4$.
- Kan je M omzetten in een *niet-recursieve* functie van twee variabelen? Zo ja, doe dat.

Opgave 16

- Zet de 3e definitieregel van de functie S en die van de functie M eens onder elkaar en vergelijk ze.
- Kan je op basis van die vergelijking (dat is niet direct nodig, maar misschien helpt het) *zelf* een recursievoorschrift $P(x, y)$ bedenken voor de *vermenigvuldiging* van twee getallen x en y? Zo ja, doe dat.
  Aanwijzing – Kijk ook nog eens naar het eerste deel van Opgave 9. Wellicht vind je daar nog wat inspiratie…

Machtsherhaling – De functie M van Opgave 15 gebruiken we om een nieuwe functie T te definiëren (ook voor $x \geq 1$ en $y \geq 0$):

$$T(x,y)=\begin{cases}\text{als } y=0: & 1\\ \text{als } y>0: & M(x,T(x,y-1))\end{cases}$$

Opmerking. T lijkt zo te zien veel op M, want als je de tweede variabele van M in de 2e definitieregel van T even wegdenkt, staat er:

$$T(x,y)=\begin{cases}\text{als } y=0: & 1\\ \text{als } y>0: & M(x,\ldots)\end{cases}$$

Als je op de … een 'y' zou zetten, dan zou er in de 2e regel staan dat $T(x, y) = M(x, y)$.
Maar, die 2e variabele daar, in de definitie van T, heeft een waarde die wordt bepaald door recursief gebruik van T *zelf* (men zegt wel dat de functie T opnieuw door de functie M wordt *aangeroepen*; 'aanroepen' is een term die afkomstig is uit de informatietechnologie; Eng. call).
Omdat je weet dat $M(x, y) = x^y$, kun je snel (zonder tabel) waardes van T uitrekenen (maar wel tot op zekere hoogte; en dat is letterlijk, naar in Opgave 16 zal blijken).

Voorbeeld.

- $T(3, 0) = 1$; immers $y = 0$ (volgens de 1e definitieregel van T).
- $T(3, 1) = \ldots$ Hiervoor moet je de 2e regel van T gebruiken. Gewoon invullen: $x = 3$, $y = 1$. Dan staat er: $M(3, T(3, 1 - 1)) = M(3, T(3, 0))$.
  Om verder te kunnen moet je de waarde van $T(3, 0)$ weten, en die heb je zojuist uitgerekend! $T(3, 0) = 1$. Dus:
  $T(3, 1) = M(3, 1) = 3^1 = 3$.
- $T(3, 2) = M(3, T(3, 1)) = M(3, 3) = 3^3 = 27$.

Opmerking. De tweede variabele van de functie M is hier dus steeds de exponent van het grondtal 3.

Opgave 16

- Bereken op dezelfde manier als in het Voorbeeld ook de waardes van $T(3,3)$ en $T(3,4)$.
  Opmerking. Je mag de waardes best 'helemaal' uitrekenen, maar of je dat kan (of je rekenmachine) …
- En ook $T(1, 0)$, $T(1, 1)$ en $T(1, 100)$, en:
  $T(2, 0)$, $T(2, 1)$, …, $T(2, 5)$.
- En omdat we niet genoeg kunnen krijgen van grote getallen…

Bereken $T(9, 3)$.

De functie T is blijkbaar een *herhaalde machtsverheffing* (de machtsverheffing M wordt immers met T herhaald). Een torentje als $9^{9^9} = T(9,3)$ wordt ook wel *hypermacht* of *tetratie* (een samentrekking van *tetra* = vierde en *iteratie*) genoemd.

Opmerking. Het aantal cijfers van 9^{9^9} is gelijk aan 369693100; maar, het is óók het grootste getal dat met 3 cijfers geschreven kan worden!

Nu je gezien hebt dat een functie zichzelf kan aanroepen, zoals de functie T, is het hek ('dat grote getallen tegenhield') van de dam!
Is er bijvoorbeeld iets zeggen van $T(9, T(9, 3))$?

Opgave 17

Hoeveel 9's zijn er gestapeld in de waarde van T voor $x = 9$ en $y = T(9,3)$?
Met andere woorden: hoeveel lagen heeft het torentje (nou, zeg maar toren) $T(9, T(9, 3))$?
Aanwijzing – Het is niet de bedoeling van deze vraag het torentje geheel uit te schrijven!

Intermezzo: de logaritme – Een *logaritme* is eigenlijk niets anders dan een *exponent*: een exponent van een *macht* met een bepaald *grondtal*. Bij afspraak (per definitie):

Als $a^x = b$, **dan** is $x = {}^a\log b$ (en omgekeerd).

Je ziet in $a^x = b$ dat x een exponent is van de macht met grondtal a.
Je ziet in $x = {}^a\log b$ dat x de a-logaritme is van b.

Uit de afspraak volgt ook de zogenoemde *definitieformule*:

- $a^{{}^a\log b} = b$

In deze formule is de exponent van a een logaritme (met als uitkomst: b).

Voor de ${}^{10}\log$ (spreek uit als 'tienlog') van een getal is in dit intermezzo een belangrijke rol weggelegd.
Omdat de ${}^{10}\log$ de meest gebruikte logaritme is (was), wordt het 'hooggeschreven' getal 10 meestal weggelaten. Staat er 'log' (spreek óók uit als 'tienlog'), dan wordt bedoeld '${}^{10}\log$'.

Opmerking. Op je rekenmachine zit een knop waarop **LOG** staat. Dat is de ${}^{10}\log$-knop.

In onderstaande tabel staan enkele waardes van de functie $\log x$.

x =	1	10	100	1000	10.000	100.000	
x als *macht* van 10 =	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	
$\log x$ =	0	1	2	3	4	5	(exponenten!)

Opgave 18

- Bereken (zonder rekenmachine!): $\log 1000000$, $\log 10^{18}$ en $\log 10^{100}$.
  Opmerking. Het getal 10^{100} wordt wel *googol* genoemd.
- Bereken: $\log 10^{10^{100}}$.
  Opmerking. Het getal 10^{googol} wordt wel *googolplex* genoemd.

Opgave 19

- Bereken, eeneens *zonder* rekenmachine:

  $10^{\log 3}$, $10^{\log 43210}$ en $10^{\log 10^5}$

  Aanwijzing – Kijk nog eens naar bovenstaande definitieformule!

Omdat de functie log x een *stijgende* functie is, en de *log* van alle positieve getallen (maar we gebruiken alleen *gehele* getallen) bestaat, geldt:

als	*dan*	*dus*	*aantal cijfers van x*
$1 \le x < 10$	$0 \le \log x < 1$	$\log x = 0, \ldots\ldots$	1
$10 \le x < 100$	$1 \le \log x < 2$	$\log x = 1, \ldots\ldots$	2
$100 \le x < 1000$	$2 \le \log x < 3$	$\log x = 2, \ldots\ldots$	3
…	…	…	…

Conclusie: het getal vóór de komma in log(x) *plus* 1 is gelijk aan het aantal cijfers van x.
Dat 'getal voor de komma' heet de *wijzer* van de 10-logaritme.
Met andere woorden:
(aantal cijfers van x) = 1 + (wijzer van log x)

Opgave 20

Van een geheel getal x is $\log x = 7{,}9485$.

- Hoeveel cijfers heeft x ?

Omdat je nu óók weet dat $x = 10^{7{,}9485}$ zou je x moeten kunnen berekenen.

- Wat is de *exacte* waarde van x?
- Of zijn er op de vorige vraag meerdere antwoorden mogelijk? Licht een en ander voldoende toe.

Van sommige torentjes (waarin niet dezelfde getallen op een laag behoeven te staan) kun je het aantal cijfers van het getal dat door het torentje wordt bepaald, uitrekenen. Echter niet zonder meer…, want, een *directe* berekening van (en let op de haakjes, zeker het tweede haakje!):
log(9^ (9 ^ 9))
zal op je rekenmachine vermoedelijk niet lukken (*overflow*).

Opgave 21

En nog steeds geldt de rechts-associatieve afspraak bij de machtsverheffing:

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} = a^{b\wedge c} = a \wedge (b \wedge c)$$

- Bereken het aantal cijfers van 2^{2^2} en van 3^{3^3}.
- En ook dat van 987^{2^3}, 4^{3^2}, 5^{4^3} en 5^{5^3}.

Om toch van iets grotere getallen (én niet al te hoge torentjes) het aantal cijfers te kunnen berekenen, heb je een eigenschap van de logaritmen nodig, namelijk:

- ${}^g\log(a^k) = k \cdot {}^g\log a$

Je mag de exponent k van a *vóór* de logaritme zetten als factor (je vermenigvuldigt ${}^g\log a$ met k).

Wellicht ken je deze eigenschap, maar het is altijd goed (nog eens) te kijken waarom dat inderdaad mag.
Blijkbaar geldt de eigenschap voor alle logaritmen, dus ook als je naar ${}^{10}\log$ kijkt. In dit geval moet bewezen worden dat:

- **$\log(a^k) = k \cdot \log a$**

De bewijsvoering bij logaritmen kan vaak worden gebaseerd op de *definitieformule*. En die gebruiken we dan ook. Maar eerst zetten we nog enkele eigenschappen van machten onder elkaar, want daarvan heb je er een paar nodig.

Machten	**A.**	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	(vermenigvuldigen van machten)
	B.	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	(een macht 'tot een macht')
	C.	**Als** $a^p = a^q$, **dan** is $p = q$	
	D.	$10^{\log a} = a$	(definitieformule van log)

Voor het bewijs van de eigenschap gebruiken we $k \cdot \log a$ als exponent van 10. Dan is:
(1)… $10^{k \cdot \log a} = (10^{\log a})^k = (a)^k = a^k = 10^{\log(a^k)}$
(2)… Dus: $k \cdot \log a = \log(a^k)$
Waarmee de eigenschap voor de 10-logaritme bewezen is.

Opgave 22

In bewijsregel (1) hierboven zijn eigenschappen van machten gebruikt.

- Welke eigenschappen (A, …, D) zijn van links naar rechts (na elk gelijkteken) in die regel gebruikt?
- Waarop is de conclusie in regel (2) gebaseerd?

Voorbeelden. Nu volgen enkele voorbeelden van het toepassen van de zojuist bewezen eigenschap (reken ze na op je rekenmachine!).

- $7^6 = 117649$ (6 cijfers)
  $\log(7^6) = 6 \cdot \log 7 = 6 \times 0{,}8451 = 5{,}0706$
  wijzer = 5, dus (*aantal cijfers*) = 1 + 5 = 6
- $2^{3^3} = 134217728$ (9 cijfers)
  $\log 2^{3^3} = 3^3 \cdot \log 2 = 27 \times 0{,}3010 = 8{,}....$
  wijzer = 8, dus (*aantal cijfers*) = 1 + 8 = 9

Opgave 23

- Bereken, op dezelfde manier als in de voorbeelden, het aantal cijfers van 4^{4^4}.
- Laat met een berekening zien dat het aantal cijfers van $2^{2^{2^2}}$ gelijk is aan 19.729 .
  En ook dat het aantal cijfers van 9^{8^7} gelijk is aan 2.001.192 .
- Controleer of 9^{9^9} inderdaad 369.693.100 cijfers heeft.

Dubbele recursie – Voorafgaand aan het Intermezzo heb je onder meer recursieve functies voor standaard rekenbewerkingen gezien. En ook een *nieuwe* rekenkundige bewerking, de *tetratie*, het 'torentje bouwen':
$T(x, y) = x^{\cdot^{\cdot^{x}}}$, waarbij het torentje y lagen met een x heeft.

Ook heb je gezien (eveneens bij de functie *T*) dat je een functie zichzelf kan laten aanroepen; dat is ook recursiviteit.
In de paragraaf hierna bekijken we een functie die *alle* behandelde rekenkundige bewerkingen (en zelfs méér dan dat) in zich heeft. Dergelijke functies staan bekend onder de naam *Ackermann-functies*, genoemd naar Wilhelm Ackermann (1896-1962, Duitsland).

Maar eerst moet je maar eens kijken naar een eenvoudiger vorm van zo'n functie – door de vereenvoudiging is het geen Ackermann-functie – opdat je daarna met de opgedane vaardigheid wat handiger (= sneller) kunt omgaan met dit type functies.
Deze bedoelde functie, met de naam *B*, wordt voor gehele $x, y \geq 1$ gedefinieerd met:

$$B(x,y) = \begin{cases} \text{als } x = 1: & y+3 \\ \text{als } x > 1, y = 1: & x+3 \\ \text{anders:} & B(x-1, B(x,y-1)-2) \end{cases}$$

Merk op dat *B* zichzelf *twee* keer aanroept in de derde defnitieregel; de tweede keer in de tweede variabele. Dat heet *dubbele recursie*.

$x \setminus y$	1	2	3	…
1	4	5	6	…
2	5	…	…	…
3	6	…	…	…
…	…	…	…	…

De hiernaast staande tabel is al met de eerste en tweede definitieregel van *B* ingevuld (ga dat na!).

Maar vul de tabel nog niet verder in!
Kijk eerst eens naar de derde definitieregel. Daar staat iets als:
$B(x, y) = B(x - 1, \ldots)$

De waarde van $B(x, y)$, die hieronder aangegeven is met ?, is dus gelijk aan de waarde van $B(x - 1, \ldots)$, en die 'cel' vind je in de rij vlak boven de cel die wordt bepaald door $B(x, y)$; immers $x - 1$ zorgt ervoor dat je een rij naar boven 'opschuift'.

	…	$y-1$	y	…	$\boldsymbol{k-2}$	$k-1$	$\boldsymbol{k}$	…
…		…	…		…	…	…	
$x-1$		…	…	…	$\boldsymbol{a}$	←	←	
$\boldsymbol{x}$	…	$\boldsymbol{k}$	**?**					
…								

Het getal dat in de cel (x, y) moet komen, staat dus 'ergens' in de *rij* erboven. En waar in die rij, in welke kolom? Met andere woorden: bij welke y ? Dié y is volgens de derde definitieregel gelijk aan $B(x, y - 1) - 2$.
$B(x, y -1)$ staat *links* van de cel (x, y), in de cel $(x, y - 1)$. Immers, $y - 1$ zorgt ervoor dat je één kolom naar links opschuift.
Als nu $B(x , y - 1) = k$, dan moet éérst $k - 2$ berekend worden.
Is dan $B(x - 1, k - 2) = a$, dan is ook $B(x, y) = a$.
Op de plaats van ? in de tabel hierboven komt dus het getal a.

Opmerking. Je kan natuurlijk ook *eerst* kijken naar (niet *in*) de cel $(x - 1, k)$ en *daarna twee* kolommen naar links opschuiven (zie de tabel).

Hieruit blijkt dat je, in dit geval, ervoor moet zorgen dat de waarde links van de cel waarvoor je de waarde wilt berekenen, bekend is, en dat de rij er boven 'goed gevuld' is.

Ter toelichting nog een getallenvoorbeeld.

$x \backslash y$	1	2	**3**	…
1	4	5	**6**	…
2	5	?	…	…
3	6	…	…	…
…	…	…	…	…

Voorbeeld. Te berekenen is ***B*(2, 2)**; zie het vraagteken.
B(2, 2) = *B*(**1**, *B*(2, 1) – 2); volgens de derde regel.
De gezochte waarde staat dus ergens in rij **1**.
B(2, 1) = 5; deze waarde staat links van de cel (2, 2).
Bereken nu: *B*(2, 1) – 2= 5 – 2 = 3. Kijk dan in de cel (1, 3).
Dié staat in de rij schuin rechtsboven de cel (2, 2)!
Gevonden… *B*(1, 3) = 6.
En dan is dus ook: ***B*(2, 2)** = **6**.

Opgave 24

Bereken met een tabel de waardes van de functie *B* voor *x*, *y* = 1, 2, …, 5.

Opmerking 1. Ook *zonder* tabel is het mogelijk de functiewaardes van *B* te berekenen. Je past dan net zolang recursie toe tot de eerste of tweede definitieregel een waarde aan *B* toekent. Voor de berekening van *B*(3, 2) gaat dit als volgt:

```
B(3,2)=B(2,B(3,1)-2)
                B(3,1)=6
B(3,2)=B(2,4)
          B(2,4)=B(1,B(2,3)-2)
                          B(2,3)=B(1,B(2,2)-2)
                                          B(2,2)=B(1,B(2,1)-2)
                                                          B(2,1)=5
                                          B(2,2)=B(1,3)=6
                          B(2,3)=B(1,4)=7
          B(2,4)=B(1,5)=8
B(3,2)=8
```

Een dergelijke manier van recursief rekenen wordt vaak in computers toegepast.
(Voor de berekening van bijvoorbeeld *B*(3,3) mag je natuurlijk ook zelf zo'n schema maken. Maar pas op, neem *x* en *y* niet veel groter!)

Opmerking 2. In computerprogramma's wordt vaak gebruik gemaakt van recursieve processen (ook met functies van meer dan 3 variabelen), die zichzelf soms méér dan dubbel aanroepen. Eén van de problemen daarbij is dat de 'boekhouding' (zoiets als onze *B*-tabel, of 'regels' als in het voorbeeld hierboven) moet (blijven) passen in het beschikbare computergeheugen. Bij programma's die de weersvoorspelling berekenen, blijft het dan echt niet bij een tabel van 10×10 ! Daarbij, meestal moet ook een kopie van die boekhouding (en vaak ook meerdere kopieën) tijdelijk in het computergeheugen worden bewaard. En natuurlijk moet overbodig rekenwerk worden voorkomen, terwijl wél alle functiewaardes die voor de voortgang van het proces nodig zijn, uitgerekend moeten zijn. Voorts mag de *recursiediepte* (dat is het aantal keren dat een functie zichzelf aanroept ten behoeve van het berekenen van één functiewaarde) niet te groot zijn, omdat anders het proces vastloopt (*stack overflow* heet dat in computertermen).
Een vaak heel moeilijk op te lossen probleem is trouwens, dat *van te voren* duidelijk moet zijn dat *elke* recursieve aanroep ook daadwerkelijk *eindigt* met het berekenen van een functiewaarde (en dan wel binnen een bepaalde tijd; het moet natuurlijk geen weken of maanden duren!).

Een Ackermann-functie – In 1928 deed Ackermann fundamenteel onderzoek naar de opbouw van het systeem van de reële getallen. Daarbij ontwikkelde hij een recursieve functie van *drie* variabelen waarin de optelling, de vermenigvuldiging én de machtsverheffing in één functie verenigd waren. Deze functie ziet er in principe, en in een niet-recursieve en *zeer* vereenvoudigde vorm, uit als:

$$F(x, y, t) = \begin{cases} \text{als } t = 1: & x + y \\ \text{als } t = 2: & x \cdot y \\ \text{als } t = 3: & x^y \end{cases}$$

In de jaren daarna zijn ook functies van *twee* variabelen ontwikkeld met dezelfde eigenschap als de functie die Ackermann gebruikte, o.a. in 1935 door Rósza Péter (1905-1977, Hongarije). De functie die door haar bedacht is, bekijken we hieronder. De definitie ervan luidt – aangepast aan het doel van dit werkblad – voor gehele getallen $x, y \geq 1$ als volgt:

$$- \quad Ax, y) = \begin{cases} \text{als } x = 1: & y + 3 \\ \text{als } x > 1, y = 1: & A(x-1, 2) \\ \text{anders:} & A(x-1, A(x, y-1) - 2) \end{cases}$$

Als je de functie A vergelijkt met de functie B in de vorige paragraaf, dan zit het verschil tussen beide alleen in de *tweede* definitieregel. Maar het effect van de wijziging is bijzonder groot!

Omdat de eerste definitieregels van A en B identiek zijn, is het direct duidelijk dat de 1e rij van tabel A gelijk is aan de 1e rij van tabel B. Maar daarbij blijft het!

Met de vaardigheid die je hebt opgedaan met functie B is het niet moeilijk ook de 2e rij van tabel A van waardes te voorzien.

Om te beginnen, volgens de tweede definitieregel: $A(2, 1) = A(1, 2) = 5$.

Opgave 25

- Maak een lege tabel met $x = 1, 2, 3, 4$ en $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Houd daarbij rechts ervan voldoende ruimte voor eventuele uitbreiding.
- Vul de tabel voor $x = 1$ en $x = 2$ (dat zijn de 1e rij én de 2e rij) met functiewaardes van $A(x, y)$.

Opgave 26

- Beredeneer dat $A(x, 1)$ – daarmee vind je de getallen in de cellen van de 1e *kolom* van de tabel – gelijk is aan het getal dat staat in een cel van de rij erboven, en wel schuin rechts van de cel $(x, 1)$.

  Opmerking. De getallen in de 1e kolom van tabel A verschillen daardoor van die in de 1e kolom van tabel B!

De rest van de tabel, dus de cellen met $x \geq 2$ en $y \geq 2$, kan volgens de derde definitieregel van de functie A worden gevuld. Alleen is er soms meer rekenwerk nodig dan bij het vullen van tabel B.

Opgave 27

- Bereken de functiewaardes van $A(x, \text{y})$ voor $x = 1, \ldots, 4$ en $y = 1, \ldots, 6$ voor zover je dat nog niet gedaan hebt.

  Aanwijzing – Het kan zijn dat je waardes nodig hebt voor $y > 6$. En, als je alle gevraagde functiewaardes juist hebt berekend, dan moet de grootste daarvan (dat is 256) in cel (4, 6) staan.

Natuurlijk heb je – tenzij je fouten hebt gemaakt – een zeker 'patroon' (regelmaat) ontdekt in de rijen. Er is steeds een verband tussen de waardes van $A(x, y)$ en y. Zo'n verband bespaart je heel wat tel- en rekenwerk als je de tabel verder zou willen uitbreiden.

Het verband in de 1e rij is duidelijk; dat volgt uit (staat in) de eerste definitieregel van A:

- **$A(1, y) = y + 3$**

En het verband in de 2e rij is (zo te zien):

- **$A(2, y) = y + 4$**

Maar eigenlijk zou je dit moeten *bewijzen*! Want waaruit concludeer je dat? Toch alleen door naar de getallen in de cellen (en die erboven) te *kijken*? Je hebt een vulproces toegepast; wellicht alleen voor de cellen met $x = 2$ en $y = 1, \ldots, 6$. Geldt dat verband verder(op) in die rij dan ook?

Opmerking. Een woordbewijs als 'dat zie je toch zo', is geen bewijs dat in de wiskunde geaccepteerd wordt; het kan zelfs onjuist zijn.
Een (misschien wat flauw) voorbeeld. Iemand (n.l. de schrijver van dit werkblad) schrijft de volgende rij getallen op:
1, 2, 3, 4, 5 (en hij laat de rest van de getallen weg; daarvoor schrijft hij:) …
Hij beweert: '*Alle* getallen zijn kleiner dan 100.' Een bewijs? 'Dat zie je toch zo!'◊

Een bewijs dat wiskundig correcter is (dan kijken), verloopt algemeen gesteld als volgt.

- Je hebt een uitdrukking (meestal is dat een functie of een formule) waarvan je *vermoedt* dat die juist is voor *alle natuurlijke* getallen:
  $f(n)$ = 'iets met n' (zoals '$n + 4$'), waarin n een natuurlijk getal is.
- Stap 1. Je gaat ervan uit dat je vermoeden juist is voor $n = k$ (het 'gegeven').
- Stap 2. Je probeert te bewijzen dat ook $f(k + 1)$ juist is (het 'te bewijzen').
- Stap 3. Als het bewijs geleverd is, dan is je vermoeden inderdaad juist (het 'bewijs + conclusie').

Een dergelijk bewijs noemen we in dit werkblad *inductief bewijs*.

Voorbeeld. We passen dit toe op het *vermoeden* dat $A(2, y) = y + 4$. Omdat y een natuurlijk getal is ($y = 1, 2, \ldots$), hebben we, met $y = k$:
Gegeven: $A(2, k) = k + 4$
Te bewijzen: $A(2, k + 1) = k + 5$
Bewijs. Je mag uiteraard gebruik maken van de definitieregels van A én van het gegeven. Om hieronder niet steeds $A(2, k + 1)$ te hoeven schrijven stellen we $V = A(2, k + 1)$.
$V = A(1, A(2, k) - 2)$; volgens de derde definitieregel van A.
$V = A(1, (k + 4) - 2)$; volgens het gegeven.
$V = (k + 2) + 3 = k + 5$; volgens de eerste definitieregel. Het klopt!
Conclusie: $A(2, y) = y + 4$.◊

En welk patroon zit er nu in de 3e rij? Er staan allemaal even getallen, te beginnen met 6 (voor $y = 1$).

Opgave 28

Toon nu zelf met een inductief bewijs aan dat:

- **$A(3, y) = 2y + 4$**
  Aanwijzing – Je weet dat $A(1, y) = y + 3$ en $A(2, y) = y + 4$.

En we kijken natuurlijk ook nog naar het verband tussen $A(4, y)$ en y in de 4e rij van de tabel. We zien (en als dát geen machten van 2 zijn …):

$y =$	1	2	3	4	5	6
$A(4, y) =$	8	16	32	64	128	256

Opgave 29

Toon met een inductief bewijs aan dat:

- **$A(4, y) = 2^{y+2}$**

  Aanwijzing – Gebruik zeker ook $A(3, y) = 2y + 4$.

Maar, er is ook een (onverwacht?) verband tussen de formules onderling!

$A(2, y) = y + 4 \quad = 2 + (y + 2)$

$A(3, y) = 2y + 4 \quad = 2 \times (y + 2)$; dit is de herhaalde optelling met 2

$A(4, y) = 2^{y+2} \quad = 2$ ^ $(y + 2)$; dit is de herhaalde vermenigvuldiging met 2

Nee, dat kan niet onverwacht zijn! Want aan het begin van deze paragraaf is al geschreven dat bij Ackermann-functies – en de functie A is er zo een – de optelling, de vermenigvuldiging én de machtsverheffing in één functie verenigd zijn.
Deze functie bepaalt dus de *optelling* met 2 als $x = 2$, de *vermenigvuldiging* met 2 als $x = 3$, en de *machtsverheffing* met (grondtal) 2 als $x = 4$.

Opmerking. Ook $A(1, y) = (y + 2) + 1$ heeft een naam. In de theoretische algebra is dit de zogenoemde *opvolgerfunctie*: de 'opvolger' van het getal $(y + 2)$ is $(y + 2) + 1 = y + 3$.

Met de kennis die je nu hebt, kun je ook waardes in de 5e rij van de A-tabel berekenen.
Daarin is (volgens de tweede definitieregel): $A(5, 1) = A(4, 2) = 16$.
En:
$A(5, 2) = A(4, A(5, 1) – 2) = A(4, 16 – 2) = A(4, 14)$
De functiewaarde $A(4, 14)$ is te berekenen; je hebt immers een formule: zie Opgave 29 !

$A(4, 14) = 2^{16} = 65536$, zodat: $A(5, 2) = 65536$ (overigens, $2^{16} = 2^{2^2}$).
En dan ook maar:
$A(5, 3) = A(4, A(5, 2) – 2) = A(4, 65536 – 2) = A(4, 65534) = 2^{65536}$ (19.729 cijfers)
De getallen in die 5e rij worden snel groter!

$A(5, 4) = A(4, A(5,3) – 2) = A(4, 2^{65536} – 2) = 2^{2^{65536}}$ (Oef, hoeveel cijfers? Te veel…!)

We zetten de berekende waardes ook maar eens naast elkaar:

$y =$	1	2	3	4
$A(5, y) =$	$16 = 2^4$	$65536 = 2^{16}$	$2^{65536} = 2^{2^{16}}$	$2^{2^{65536}} = 2^{2^{2^{16}}}$
als torentje:	2^{2^2}	$2^{2^{2^2}}$	$2^{2^{2^{2^2}}}$	$2^{2^{2^{2^{2^2}}}}$

Als je naar de torentjes kijkt, dan krijg je vast wel een vermoeden van een formule… een verband tussen *het aantal lagen* van $A(5, y)$ en de bijbehorende waarde van y.
Om je bij het formuleren van dat vermoeden een beetje te helpen brengen we je de functie T in herinnering waarmee je torentjes wat makkelijker kunt beschrijven.
Die T staat voor *tetratie* (de herhaalde machtsverheffing), maar ook voor torentje!
Met $T(x, a)$ wordt het torentje aangegeven dat bestaat uit a lagen, waarop telkens het getal x staat.

Voorbeeld. $T(6,2)=6^6$, $T(2,3)=2^{2^2}$, $T(12,4)=12^{12^{12^{12}}}$. En de rechts-associativiteit van de machtsverheffing geldt, volgens afspraak, natuurlijk nog steeds! Zodat bijvoorbeeld:
$T(2, 3) = 2\text{^}(2\text{^}2)$

Opgave 30

- Formuleer een vermoeden met betrekking tot een formule voor $A(5, y)$.
  Aanwijzing – Gebruik de functie T in $A(5, y) = \ldots$
- Toon met een inductief bewijs aan dat je vermoeden juist is.

Nu je voldoende vaardigheid hebt (en die heb je nu toch wel?) in het interpreteren van recursieve voorschriften, is het ook wel illustratief een *recursieve definitie* te geven van de functie T:

$$T(x,a)=\begin{cases}\text{als } a=1: & x\\ \text{anders:} & x^{T(x,a-1)}\end{cases}$$

Opmerking. De tweede definitieregel van T kan ook geschreven worden als x ^ $T(x, a - 1)$.

Opgave 31

Voor $a = 1$ is uit de eerste definitieregel van de functie T duidelijk dat je een torentje krijgt van 1 laag met daarop een x.

- Laat zien dat er voor $a = 2$, 3 en 4 met deze definitie inderdaad torentjes van de 'gewenste hoogte' worden 'gebouwd'. Vermeld ook alle tussenstappen bij de recursie!
- Hoeveel lagen heeft het 'recursieve' torentje (de toren): $T(2, T(3,2))$?
- Welke toren heeft meer lagen: $T(2, T(3,2))$ of $T(3, T(2,3))$?

Pijl-omhoog – Terug naar de functie A. We voegen de formule voor de 5e rij van de functiewaardes van A:
$A(5, y) = T(2, y + 2)$
toe aan het onder Opgave 29 staande lijstje:

$A(2, y) = y + 4$	$= 2 + (y + 2)$	; optelling met 2
$A(3, y) = 2y + 4$	$= 2 \times (y + 2)$	; vermenigvuldiging met 2
$A(4, y) = 2^{y+2}$	$= 2$ ^ $(y + 2)$	; machtsverheffing met 2 als grondtal
$A(5, y) = T(2, y + 2)$	$= 2 .. (y + 2)$	; tetratie

«

Zo te zien heb je een nieuw bewerkingsteken nodig op de .. tussen 2 en $(y + 2)$, dat dezelfde 'betekenis' heeft als $T(2, y + 2)$.
Je zou de 'T' (van tetra) kunnen nemen (en als je dat echt zou willen, mag dat natuurlijk), maar het is verstandiger aan te sluiten bij wat in wiskundeland min of meer gebruikelijk is.

Donald Knuth, (1938-…, USA), een wiskundige die wordt beschouwd als de grondlegger van de informatica, bedacht in 1976 een bewerking (hij noemde die 'up arrow') die hij als volgt definieerde (x en a zijn weer positieve gehele getallen):

- $x \uparrow\uparrow a = \underbrace{x \text{^} (x \text{^} (x \text{^} (\ldots \text{^}\, x}_{\text{hier staat } a \text{ keer een } x})))$; hé, een torentje van a lagen met op elke laag een x!

Voorbeelden.

- $6 \uparrow\uparrow 3 = 6 \text{^} (6 \text{^} 6) = 6^{6^6}$

- $7 \uparrow\uparrow 5 = 7 \wedge (7 \wedge (7 \wedge (7 \wedge 7))) = 7^{7^{7^{7^{7}}}}$

En als a = 1?

- $x \uparrow\uparrow 1 = x$, voor ieder positief geheel getal x.◊

Voor 'onze' functie T geldt dus met dubbel 'pijl-omhoog':

- $\boldsymbol{T(x, a) = x \uparrow\uparrow a}$

En daarmee is het ontbrekende bewerkingsteken tussen 2 en (y + 2) hierboven in het lijstje gevonden, en in te vullen:

- $\boldsymbol{A(5, y) = 2 \uparrow\uparrow (y + 2)}$

Maar Knuth ging verder… Hij definieerde ook *drie* 'pijlen omhoog':

- $x \uparrow\uparrow\uparrow a = \underbrace{x \uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow x}_{\text{weer } a \text{ keer een } x})))$

Voorbeeld. $4\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 4\uparrow\uparrow(4\uparrow\uparrow 4)$

De '4' wordt 3 keer herhaald, en het bewerkingsteken ertussen is ↑↑, met uiteraard weer rechts-associativiteit.

Dan is: $4\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 4\uparrow\uparrow(\ 4\wedge(4\wedge(4\wedge 4))\ ) = 4\uparrow\uparrow 4^{4^{4^{4}}} = \ldots$

Opmerking 1. Je ziet dat ↑↑ wordt gedefinieerd met een 'herhaald' ^ (in plaats daarvan mag je ook een ↑ schrijven), en dat ↑↑↑ (3 keer pijl-omhoog) wordt gedefinieerd met herhaald ↑↑ (2 keer pijl-omhoog).

Opmerking 2. Ons machtsverheffingsteken (^) was oorspronkelijk ook een pijl-omhoog (↑). Die pijl werd namelijk op de eerste snelle, maar nog *mechanische* printers gebruikt om de machtsverheffing aan te geven. Het afdrukken van 123^{45} ging niet op die 'kettingdrukkers'; dat werd 123↑45. En dat dakje zat al op de schrijfmachine als een *accent circonflexe* (zoals in â), zodat ↑ al snel ^ werd.

Opgave 32

- Bereken: $2 \uparrow\uparrow 2$, $2 \uparrow\uparrow 3$ en $2 \uparrow\uparrow 4$.
- Bereken: $2 \uparrow\uparrow\uparrow 2$, $2 \uparrow\uparrow\uparrow 3$ en $3 \uparrow\uparrow\uparrow 2$.
- Als je $3 \uparrow\uparrow\uparrow 3$ als toren zou schrijven (maar doe het niet!), hoeveel lagen heeft deze toren dan?

Maar het hek is nu toch wéér van de dam: ook de pijltjes zijn niet meer tegen te gehouden – de grote getallen waren dat toch al niet!
Maar die getallen worden misschien nu wel té groot…

Recursief wordt de betekenis van 'n keer pijl-hoog' (voor x, n, a geheel en x, $n \geq 1$ en $a \geq 0$) als volgt vastgelegd (en, bestudeer het voorschrift goed!):

- $$x \uparrow^{[n]} a = x \overbrace{\uparrow\ldots\uparrow}^{n\,\text{pijlen}} a = \begin{cases} \text{als } a = 0: & 1 \\ \text{als } n = 1: & x^a \text{ (eventueel: } x\wedge a \text{ of } x\uparrow a) \\ \text{als } n > 1: & x \uparrow^{[n-1]} (\ x \uparrow^{[n]} (a-1)\ ) \end{cases}$$

Opmerking. Let ook op de 'definitie' van $\uparrow^{[n]}$ *binnen* deze definitie! Dat is dus een verkorte schrijfwijze voor 'n keer pijl-omhoog'.

Voorbeeld. Voor $n = 3$ en $a = 1$ volgt uit de definitie van $\uparrow^{[n]}$:

$$\begin{aligned}
x \uparrow^{[3]} 1 &= x \uparrow^{[2]} (x \uparrow^{[3]} 0) && \text{; volgens de derde definitieregel}\\
&= x \uparrow^{[2]} 1 && \text{; volgens de eerste definitieregel}\\
&= x \uparrow^{[1]} (x \uparrow^{[2]} 0) && \text{; weer volgens de derde regel}\\
&= x \uparrow^{[1]} 1 && \text{; opnieuw volgens de eerste regel}\\
&= x && \text{; volgens de tweede definitieregel}
\end{aligned}$$

Opgave 33

- Beredeneer (c.q. bewijs) dat voor *ieder* natuurlijk getal n geldt: $x \uparrow^{[n]} 1 = x$.
  Aanwijzing – Voor een bewijs kan je zeker een *inductief* bewijs gebruiken.

Voorbeeld. In de volgende berekening wordt een aantal keer de in Opgave 33 bewezen eigenschap van de bewerking 'pijl-omhoog' gebruikt (zie de onderstreepte getallen).

$$\begin{aligned}
2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow^{[4]} 3 &= 2 \uparrow^{[3]} (2 \uparrow^{[4]} 2)\\
&= 2 \uparrow^{[3]} (2 \uparrow^{[3]} (\underline{2 \uparrow^{[4]} 1})) = 2 \uparrow^{[3]} (2 \uparrow^{[3]} \underline{2})\\
&= 2 \uparrow^{[3]} (2 \uparrow^{[2]} (\underline{2 \uparrow^{[3]} 1})) = 2 \uparrow^{[3]} (2 \uparrow^{[2]} \underline{2})\\
&= 2 \uparrow^{[3]} (2 \uparrow^{[1]} (\underline{2 \uparrow^{[2]} 1})) = 2 \uparrow^{[3]} (2 \uparrow^{[1]} \underline{2})\\
&= 2 \uparrow^{[3]} 2^2
\end{aligned}$$

In Opgave 32 heb je berekend: $2\uparrow^{[3]} 2 = 4$ en $2\uparrow^{[2]} 2 = 4$ (hierna onderstreept); en zie verder ook Opgave 34.
Dan is daarmee:

$$\begin{aligned}
2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow^{[4]} 3 &= 2 \uparrow^{[3]} 4\\
&= 2 \uparrow^{[2]} (2 \uparrow^{[3]} 3)\\
&= 2 \uparrow^{[2]} (2 \uparrow^{[2]} (\underline{2 \uparrow^{[3]} 2})) = 2 \uparrow^{[2]} (2 \uparrow^{[2]} \underline{4})\\
&= 2 \uparrow^{[2]} (2 \uparrow^{[1]} (2 \uparrow^{[2]} 3))\\
&= 2 \uparrow^{[2]} (2 \uparrow^{[1]} (2 \uparrow^{[1]} (\underline{2 \uparrow^{[2]} 2}))) = 2 \uparrow^{[2]} (2 \uparrow^{[1]} (2 \uparrow^{[1]} \underline{4}))\\
&= 2 \uparrow^{[2]} (2 \uparrow^{[1]} 16) = 2 \uparrow^{[2]} (65536) = 2 \uparrow^{[2]} (2^{2^{2^2}})\\
&= 2 \uparrow\uparrow (65536)
\end{aligned}$$

Een aardig hoog torentje met 2-en…, het telt 'slechts' $65536 = T(2, 4) = A(5, 2)$ lagen!

Opgave 34

- Ga met een berekening na dat $2\uparrow^{[4]} 2 = 4$.
  Aanwijzing – Herschrijf het linker lid met de derde en vervolgens met de tweede definitieregel van $\uparrow^{[n]}$. Maak daarna gebruik van het feit dat $2\uparrow^{[3]} 2 = 4$.
- Bewijs dat voor *ieder* natuurlijk getal n geldt dat: $2 \uparrow^{[n]} 2 = 4$.
  Aanwijzing – Met een inductief bewijs? Of …

En nu terug naar de Ackermann-functie $A(x, y)$ voor $x = 6$. Dat is de *herhaalde* tetratie, zeg maar de *pentatie* (penta = vijfde).
Daarna kijken we ook nog even naar de functie A met $x = 7$, de *herhaalde* pentatie, die je *hexatie* (hexa = zesde) zou kunnen noemen.

Maar, merk allereerst op dat: $A(5,2) = 65536 = 2^{2^{2^2}} = T(2,4) = 2 \uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow^{[2]} 4$.

Opgave 35

▤ Waarom is $A(6, 1) = A(5, 2)$?

Conclusie: $A(6, 1) = 65536 = 2\uparrow^{[2]}4$.

▤ Toon aan dat: $2\uparrow^{[3]}3 = 2\uparrow^{[2]}4$.
Aanwijzing – Gebruik in het linker lid de recursieve definitie van $\uparrow^{[n]}$ en herleid verder.

Conclusie (*): $A(6, 1) = 2\uparrow^{[3]}3$.

Verder is:

$$\begin{aligned} A(6,2) &= A(5, A(6, 1) - 2) && \text{; volgens de derde definitieregel van de functie } A \\ &= 2\uparrow^{[2]}A(6, 1) && \text{; volgens de formule } A(5, y) = 2\uparrow^{[2]}(y + 2) \\ &= 2\uparrow^{[2]}(2\uparrow^{[3]}3) && \text{; zie (*)} \end{aligned}$$

▤ Waarom is $2\uparrow^{[2]}(2\uparrow^{[3]}3)$ gelijk aan $2\uparrow^{[3]}4$?
Aanwijzing – Niet uitrekenen! Kijk naar de definitie van $x\uparrow^{[n]}a$.

Conclusie (**): $A(6, 2) = 2\uparrow^{[3]}4$.

Uit de conclusies die aangegeven zijn met (*) en (**), krijg je vast wel een vermoeden van een formule voor $A(6, y)$ waarin $\uparrow\uparrow\uparrow = \uparrow^{[3]}$ als nieuw bewerkingsteken voorkomt.

▤ Geef een 'eenvoudige' formule voor $A(6, y)$.
Opmerking. Je hoeft je vermoeden *niet* te bewijzen!

Opgave 36

▤ Geef ook een 'eenvoudige' formule voor $A(7, y)$ – gelijkend op die voor $A(6, y)$.
Opmerking. Je hoeft de formule voor $A(7, y)$ evenmin te bewijzen!

Opgave 37

Dit alles overziende (van het begin van het werkblad tot hier) moet het niet moeilijk zijn ook een *algemene* definitie van $A(x, y)$ te geven waarin ook pijl-omhoog als bewerkingsteken voorkomt.

▤ Geef zo'n algemene definitie!
Opmerking. Het kan met 4 (en wellicht met 3) regels als je gebruik maakt van $\uparrow^{[n]}$. En, er is vast wel een verband tussen de waarde van x en die van n in $\uparrow^{[n]}$.

En nu je aan het einde van het werkblad bent gekomen…

Opgave 38

▤ Laat je gedachten eens gaan over de grootte van het getal $10\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 10$.
Is je eerste gedachte ook '*Dat getal is veel te groot*' ?

Maar het kan nóg veel groter…
In 1977 publiceerde Ronald Graham (1935-…, USA) een artikel over een vraagstuk op het gebied van de combinatoriek, waarin hij een extreem groot getal als grens voor de oplossing van dat vraagstuk aangaf. Dát getal staat sindsdien bekend als het grootste getal dat ooit is gebruikt in een wiskundig bewijs: het *getal van Graham*.
Het wordt met een recursieve pijl-omhoog notatie beschreven. Bekijk de volgende rij getallen die redelijk 'klein' en nog 'overzichtelijk' begint:

$G_0 = 4,\ G_1 = 3\uparrow^{[G_0]}3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$, maar dan:

$G_2 = 3\uparrow^{[G_1]}3,\ G_3 = 3\uparrow^{[G_2]}3,\ \ldots,\ G_n = 3\uparrow^{[G_{n-1}]}3$

Het getal $\boldsymbol{G_{64}}$ in deze rij is het getal van Graham.
De laatste tien cijfers ervan zijn 2464195387 ('t is maar dat je het weet).

En hoe groot het getal $A(G_{64}, G_{64})$ is? …! G_{64} is daarmee vergeleken een erg klein getal.