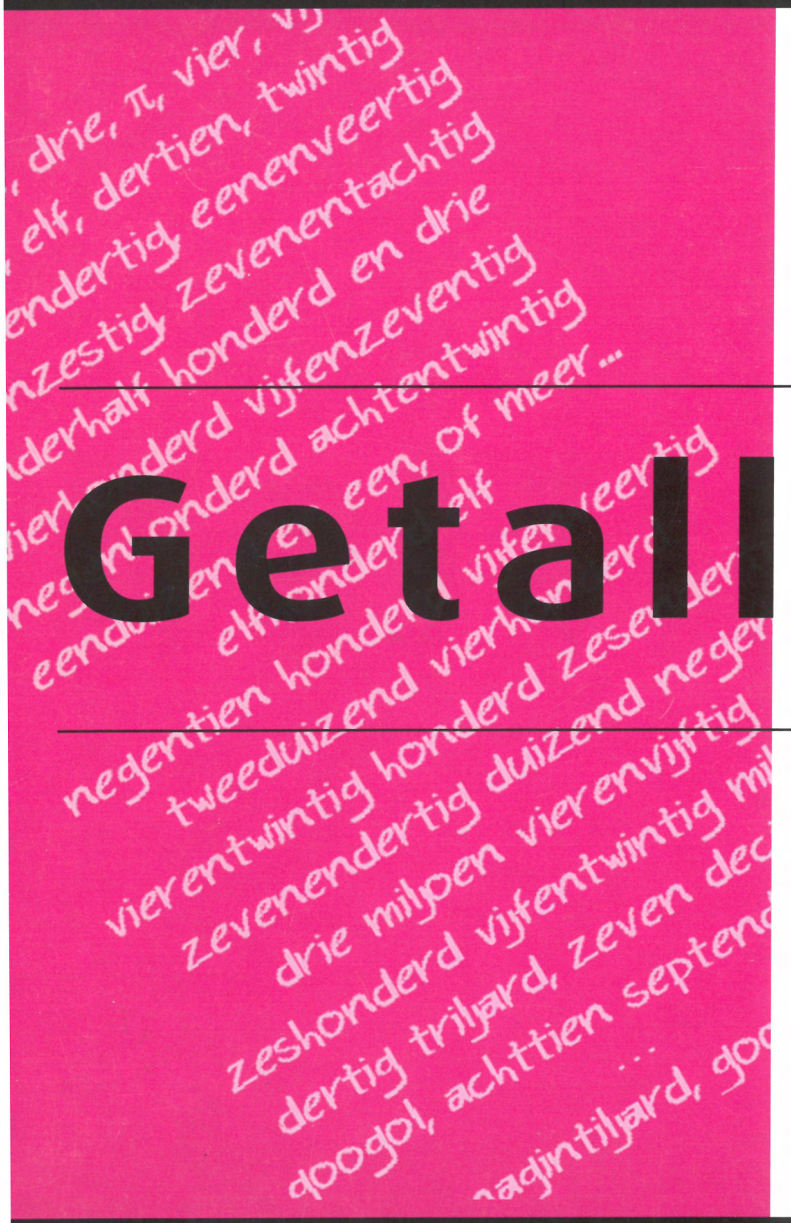
EUCLIDES
orgaan van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Getallen

Special 2012

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en tevens vakblad voor de wiskundeleraar.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Getallen / Euclides Special 2012

Jaargang 87
Dit boekje is een speciale uitgave van *Euclides* (eerste druk, april 2012).
Redactie: Klaske Blom, Dick Klingens

Uitgegeven door:
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren (NVvW)
Druk en grafische verzorging:
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v., Veenendaal
Ontwerp omslag: DiSigned
Ontwerp binnenwerk:
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v., Veenendaal

© Copyright 2012,
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren, Amsterdam
(www.nvvw.nl)

NUR 918

Alle rechten voorbehouden.
Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook, en evenmin worden opgeslagen in een geauto- matiseerd gegevensbestand, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de hoofdredacteur van *Euclides* (e-mailadres: *redactie-euclides@nvvw.nl*).
Voor zover het maken van kopieën van/uit deze uitgave aan onderwijsinstellingen is toegestaan op grond van art. 16 en 17 Auteurswet 1912 en daarop gebaseerde Besluiten, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen of te hebben voldaan aan de Stichting Reprorecht, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp.

Voor het verkrijgen van toestemming tot overname van een artikel of van enkele gedeelten uit deze uitgave in bloemlezingen, readers of andere compilatiewerken dient men zich tot de hoofdredacteur van *Euclides* te wenden.

EUCLIDES

orgaan van de

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Getallen

Getallen

Inhoud

				pag.
0	Voorwoord en leeswijzer	Klaske Blom		1
1	Getallentheorie	Kees Hoogland		3
	1009	»		10
	De helderheid van onze getallen	Gaston Dorren		11
	VWP 1 – Tja	»		13
	Getallen in de krant	Hans van Maanen	L	14
	Dagen	»		16
2	De erfenis van Pythagoras	Jan Hogendijk		17
	153 – 3 cijfers	»		22
	Rationale rechthoekige driehoeken	Daaf Spijker	L	23
	Ongewoon	»		36
	Getallen als som van kwadraten	Bram van Asch	L	37
	Irrationale getallen	Frits Beukers		45
	VWP 2 – 521 wordt 215 | VWP 3 – Rij verder	»		51
	Wortels – getallen in herhaling	Pim Diemitz		52
	546121 – of, omdat wortels zijden zijn	Pim Diemitz	L	58
	Vermenigvuldigen	»		63
	Groot, groter, nóg groter	Dick Klingens	L	64
	VWP 4 – Splitsen	»		74
3	Betonijzer	Gerrie van Doren		75
	VWP 5 – 315 wordt 153	»		76
	Puzzels met getallen	Luc Gheysens		77
	Een andere 15-Puzzel	»		84
	Getallen in letters	»		85
	Kruisgetalpuzzel	Anne Laning		86
	Sudoku	Bart Windels		88
	1634, ook $_{10}$narcistisch	»		95
	Gegoochel met getallen	Job van de Groep		96
	Getal(len) volgens Van Dale en WikipediA	»		104
4	De wereld in getallen	Evi van Huuksloot		105
	Het begon met strafwerk	Rob Tijdeman		106
	Gauss	»		109
	Het vermoeden van Catalan	Rob Tijdeman		110
	Tellen	»		113

				pag.
	Reken mee met ABC	Bart de Smit		114
	VWP 6 – Priem?	»		117
	Dieren tellen mee – getalbegrip bij dieren	Paul Koene		118
	Raadsel	»		124
	De geheimen van taxinummers	Alex van den Brandhof		125
	VWP 7 – Geschikt | VWP 8 – Drieën	»		128
5				
	Anekdote	Rob Birkhoff		129
	VWP 9 – Deelbaar | VWP 10 – Minimaal	»		130
	Een universele afkeer van 67	Maarten Evenblij		131
	Getallen bij leven en dood	Daaf Spijker	L	135
	Factor	»		151
	Het Plastisch Getal	Frederik van der Blij		152
	1049	»		159
	Fibonacci gedichten	Klas 2vt (HLW)		160
	1.023.456.987.896.543.201	»		163
	Telwoorden in Nieuw Guinea	»		164
	6, 7, 8, 9, 11 en 21	»		164
6				
	En daarom …	Dick Klingens		165
	Uit: Decimalen	»		168
	De geboorte van het getal e	Rob van Oord		169
	Betekenis geven aan getallen bij wiskunde C	Peter van Wijk	L	176
	Complexe getallen	Hans Sterk	L	180
	88	»		188
	Phi als grondtal	Gert Treurniet		189
	Een verhouding in een 9-hoek	»		194
	Breuken – de Singaporese methode	Lonneke Boels, Marjanne de Nijs		195
7				
	Over de auteurs	»		205
	En overige medewerkenden	»		207

L betekent: bij dit artikel is een leerlingen- c.q. onderzoekstekst op internet beschikbaar.

Voorwoord en leeswijzer

[Klaske Blom]

1, 2, 3, rood; 1, 2, 3, rood; 1, 2, rood; 1, 2, 3, rood; 1, 2, 3, rood; 1, 2, rood. 1, 2, 3, rood. … Niet dat er altijd na drie grijze tegels een rode kwam; soms al na twee. Waar ik over piekerde – op weg naar school – was dat ik geen patroon kon vinden. Geen ritme te ontdekken in de stoeptegels. Ergerlijk. Soms was ik er al overheen en had vergeten op te letten, vergeten te tellen. Een enkele keer ging ik terug om deze omissie te herstellen. Misschien dat er dagen waren waarop de wereld meer beheerst moest worden dan op andere. Stom eigenlijk dat ik niet weet of iemand anders daar wel ooit een patroon ontdekt heeft. Ik sprak er niet over, hoorde er ook niemand over terwijl er toch heel wat voetstappen gingen over dat pad.
Inmiddels is het voetpad opgeknapt. De mooie oude waterpomp staat er nog, maar er leidt een breder voetpad naar toe – zonder gekleurde tegels, zonder patroon. Meer toeristen tegenwoordig in Dokkum, dat zal de oorzaak wel zijn van het terugsnoeien van de bosjes en het verbreden van het pad. Misschien ook worden rode tegels niet meer gebakken.
Ik geloof niet dat ik ooit gefascineerd ben geweest door getallen, had ook geen lievelingsgetal, wel een lievelingskleur overigens. Maar patronen, daar hield ik van! Mozaïeken, borduurpatronen, getalpatronen.

En deze special gaat over getallen, alleen maar over getallen …

Het is me een waar genoegen om deze *Special* bij u te mogen introduceren. Zoveel getallen, dat kan alleen maar eindigen in patronen! We hopen dat u het zult waarderen en ervan zult genieten. Graag dank ik hierbij alle auteurs voor hun bijdragen waardoor het mogelijk werd deze special uit te brengen en dank ik alle referenten voor het kritisch en betrokken doornemen van deze bijdragen.
Voordat ik u meeneem op het pad langs de artikelen, even iets over het creatieve proces: aan tafel kun je als redactie het idee van een special over getallen relatief makkelijk opperen; vervolgens een eerste selectie van onderwerpen en mogelijke auteurs bedenken, vraagt al iets meer getob, maar is vooral een leuke puzzel. Het verzamelen van een groep enthousiaste schrijvers is in Nederland een plezierige bezigheid omdat de diverse netwerken altijd ergens-via-iemand-die-we-kennen verbonden zijn. Maar dan, dan moet er geschreven worden. Schrijven vereist een lege situatie waarin ideeën vorm krijgen, vereist tijd om te onderzoeken, te scherpen en te schrappen. Dat tijd een schaars goed is in ons leven, behoeft geen betoog. Het verheugt me daarom oprecht dat ruim dertig auteurs hun tijd hebben willen gebruiken om een bijdrage te leveren aan deze special.

Deze special die over getallen gaat, alleen maar over getallen …

Er is geen enkele reden om de artikelen in volgorde door te werken. Er is ook niets tegen, mocht u dat van plan zijn. Voor het geval u liever een hint of aanbeveling wilt voordat u start met lezen, volgt hier een beknopte leeswijzer – hoofdstuk voor hoofdstuk, dat dan weer wel.

Geen zichzelf respecterend werk bestaat zonder inleiding. De drie artikelen in het eerste hoofdstuk dienen als zodanig en nemen u mee in de wereld van de getallen. Na lezing hiervan zult u het met ons eens zijn dat getallen niet alleen de moeite van het bestuderen waard zijn, maar ook noodzakelijkerwijs bestudeerd moeten worden.

En als we het dan daarover eens zijn, dan moet er gestudeerd worden. Dat kan met de artikelen uit hoofdstuk 2. Pen en potlood klaar? Tijd? Zin om uw tanden ergens in te zetten? U vindt verhandelingen over verschillende getallen – breuken, wortels, sommen van kwadraten, irrationale en grote getallen. Naast het studiemateriaal, bevat dit hoofdstuk ook de meeste verwijzingen naar leerlingenteksten, materiaal dat op internet beschikbaar is en waarmee u in de klas aan het werk kunt. Vergeet u niet dit waardevolle materiaal op te zoeken.[1]

Dat het niet altijd een ernstige zaak is – of soms juist een kwestie van groot belang, zoals blijkt uit 'Betonijzer' – om met getallen bezig te zijn, bewijzen de bijdragen in hoofdstuk 3. Puzzelliefhebbers komen hier helemaal aan hun trekken.[2] De samenhang van de bijdragen in hoofdstuk 4 bestaat erin dat er geschreven wordt over vermoedens en zaken die nog onaf zijn. Wetenschap kan alleen maar bedreven worden als we vragen blijven stellen en vermoedens exploreren. Hoe iets met strafwerk kan beginnen en vervolgens kan leiden tot zeer diep wiskundig werk, is fascinerend om te lezen. De fantasie van Evi biedt hoop op nog onbekende vergezichten, en dat biologie toch opmerkelijke raakvlakken heeft met wiskunde, blijkt in de zoektocht naar getalbegrip bij dieren – vermakelijk en indrukwekkend.

Getallen met een bijzondere toepassing vindt u in hoofdstuk 5: het zijn getallen die bij zaken van leven en dood en in architectuur een grote rol spelen.

En tot slot, de special zou *Euclides* onwaardig zijn, als u niet een schat aan onderwijsgerelateerde artikelen zou vinden: daarom last but not least, in hoofdstuk 6 zijn ze gegroepeerd. Getallen die u tegen komt in wiskunde C en wiskunde D, breuken waar u mee worstelt in uw brugklas, en phi en e als de kroon op het werk.

Namens de redactie, wens ik u bijzonder veel leesgenoegen met
deze special die over getallen gaat, alleen maar over getallen …

Noten

[1] Deze teksten zijn direct te vinden, als PDF-bestanden, op: *www.nvvw.nl/special12*

[2] De rubriek Recreatie in de jaargangen 34 tot en met 38 van *Euclides* stond onder redactie van Piet Vredenduin (1909-1996). In 1964 is een selectie daaruit samengebracht in een boekje: *Vijfentachtig wiskundige puzzels* (Groningen: Noordhoff).
Enkele opgaven (ze gaan uiteraard over *getallen*) zijn – enigszins bewerkt – als *VWP* (*V*redenduin's *W*iskundige *P*uzzel) verspreid in deze *Special* opgenomen.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Getallentheorie

[Kees Hoogland]

Inleiding

Getallentheorie? Hij zal toch wel getaltheorie bedoelen?

Ik heb in de jaren tachtig van de vorige eeuw wiskunde gestudeerd in Leiden. Zuivere wiskunde wel te verstaan: getaltheorie, combinatoriek, discrete wiskunde. Fascinerend was het om te ervaren welk een diepe en prachtige wiskunde een relatief eenvoudig rijtje als 1, 2, 3, 4, … of zo u wilt $\{a_{n+1} = a_n + 1 \text{ met } a_0 = 1\}$ kan opleveren.

Getaltheorie vind ik een van de meest opmerkelijke vermogendheden van de menselijke geest en voor de liefhebbers is het spelen met de abstracte patronen en structuren binnen de getaltheorie van een verbluffende schoonheid. Een academische parel.

Maar dit artikel gaat over *getallentheorie*. Getallentheorie heeft als onderwerp hoe getallen een rol spelen in het maatschappelijke leven, hoe aantallen en getalgevoel een diepliggende evolutionaire menselijke cognitie zijn, hoe mensen reageren op getallen en zich er door laten beïnvloeden. Het is de psychologische en sociologische theorie over getallen. Het is de theorie van getallen gekeken vanuit de empirie.

En het is een theorie die (nog) niet bestaat. Maar die, na dit artikel, automatisch haar intrede doet in die empirie. Mijn persoonlijke passie gaat uit naar *gecijferdheid*; dat is de manier waarop mensen omgaan met de kwantitatieve kanten van de wereld om ons heen. En net zoals getaltheorie een zeer boeiend onderdeel is van de wiskunde, is getallentheorie dat van gecijferdheid.

Wiskunde versus empirie

De strikt wiskundige benadering van getallen en de empirische benadering van getallen staan natuurlijk niet los van elkaar.

Er is een opvatting dat wiskunde voortkomt uit een steeds verdergaande abstrahering van menselijke ervaringen. Anderen echter zien wiskunde juist als een geheel van de werkelijkheid losstaand, abstract cognitief construct van de menselijke geest. Weer anderen zien wiskunde als iets dat al volledig beschreven is in het boek van God, en waarvan de mens langzaam maar zeker steeds meer stukjes ontdekt [1]. Net zoals wij Nieuw-Zeeland hebben ontdekt, terwijl het er toch allang lag.

Kortom: hoeveel heeft wiskunde eigenlijk te maken met de werkelijkheid? Over die vraag wordt al heel lang gediscussieerd zonder dat er nu overduidelijke conclusies worden getrokken. Het blijft boeiend om te filosoferen waarom we in de wereld om ons heen al die getallen en patronen zichtbaar zijn, en waarom we met wiskundige procedures zaken kunnen ontwerpen en bouwen die een grote mate van precisie en robuustheid hebben en een functionaliteit van hoge complexiteit.

Is de werkelijkheid om ons heen opgebouwd uit kwantitatieve structuren, of hebben wij de werkelijkheid juist gestructureerd door er met een wiskundige blik naar te kijken en heeft dat ons de mogelijkheid gegeven die werkelijkheid te beheersen en te (ver)vormen?
Dit filosofische dilemma wordt misschien wel het best samengevat in de volgende omschrijving: 'the unreasonable effectiveness of mathematics' (*zie kadertekst*). Vrij vertaald: Het gaat je verstand bijna te boven dat strikt wiskundige constructies van de menselijke geest een zo groot en effectief gebruik kennen in het dagelijkse leven.
Elk product, elke onderdeel van de culturele (geproduceerde) wereld is gebaseerd op een of andere vorm van getallen en getalstructuren. Geen brug, gebouw of apparaat zonder te meten en te rekenen, geen internet, telefoon of vervoer zonder elektronische systemen met strikt wiskundige patronen.
Je kunt bij de wiskundige concepten en structuren beginnen en vanuit daar naar de werkelijkheid kijken. Dat gebeurt meestal in schoolwiskunde. Maar je kunt ook beginnen aan de kant van de werkelijkheid, en kijken naar de wiskundige patronen en structuren die daar bijna als vanzelf uit tevoorschijn komen. Er volgen een paar voorbeelden.

In an address to the Prussian Academy of Science in Berlin on Jan 27, 1921, Einstein was discussing the significance of mathematics in the history of scientific thought, and remarked:
"At this point an enigma presents itself which in all ages has agitated inquiring minds. How can it be that mathematics, being after all a product of human thought which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality? Is human reason, then, without experience, merely by taking thought, able to fathom the properties of real things?
In my opinion the answer to this question is briefly this: As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality."
This same issue was later addressed by Eugene Wigner in his famous essay *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, which appeared in the *Communications in Pure and Applied Mathematics* (vol. 13; 1960), and is probably the most often cited reference for this notion (...)

Bron: www.mathpages.com/home/kmath493.htm

De wiskunde van talstelsels in getallentheorie

In de zuivere wiskunde maakt het vaak niet uit of je een tientallig stelsel neemt of een ander. Veel resultaten gelden voor willekeurige stelsels. In de concrete wereld om ons heen zie je dat getalstelsels empirisch zijn ontstaan en met elkaar strijden om voorrang en dat sommige stelsels zeer dominant zijn en andere een zieltogend of zelfs bedreigd bestaan leiden.
Het tientallig stelsel is in onze huidige wereld erg dominant. Wij hebben gekozen voor onze tien vingers en tenen. Of onze vingers en onze tenen hebben vóór ons gekozen.
Er zijn natuurlijk wat hardnekkige andere stelsels die maar blijven opduiken, zoals het zestigtallige, historisch gezien via de Babyloniërs en Alexander de Grote tot een blijvertje geworden. Vooral in onze tijdrekening, maar ook bij het meten van hoeken.
Wat zou de wereld er toch een stuk rustiger van worden als een dag bestond uit 10 uren van 10 minuten die elk weer 10 seconden bevatten. De landmeters hebben bij hoeken al eens geprobeerd de strijd te doen kantelen door een rechte hoek tot 100 graden te bom-

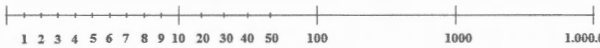
barderen, maar 400 graden voor de hele cirkel is nu ook weer niet van een grote schoonheid en elegantie. Dat is een *niche* gebleven.
Voor een twaalftallig stelsel is natuurlijk veel te zeggen. Dat vonden de Mesopotamiërs ook. Daar was dát dominant. Wij zien het nog in onze maanden, uren, dierenriem, dozijnen et cetera. En in Angelsaksische landen zie je het nog in geld en lengtematen. Wat betreft fysiek tellen, is er ook wat te zeggen voor het twaalftallig stelsel: met de duim van één hand kun je makkelijk tot 12 tellen door de kootjes van de andere vingers van die hand langs te gaan. Probeer het maar eens. Die vingerkootjes zijn ook een mooi voorbeeld van een 3×4 structuur die in heel veel culturen voor van alles worden gebruikt. Want tien vingers opsteken is wel leuk, maar hoe tel je die dan? Iedereen heeft wel eens een kind zien worstelen met het tellen met een vinger, terwijl die tellende vinger ook bij de vingersom hoorde.
Ik heb wereldwijd op markten foto's gemaakt van voorkeuren die mensen hebben om zaken uit te stallen, denk aan doosjes, foto's, potjes planten et cetera.
Daar zie je veel vaker 2×3 en 3×4 en 2×3×4 structuren dan 2×5 structuren. Zo natuurlijk en handig is een tientallig stelsel nu ook weer niet.

figuur 1

In getallentheorie kijk je dus naar het nut en het gebruik van die talstelsels in de maatschappij en naar de verbinding tussen talstelsels en (fysiek) menselijk handelen.

Andere wetenschapsgebieden en getallentheorie

Er zijn meer wetenschapsgebieden die ingrediënten kunnen aandragen voor het bouwwerk van de getallentheorie.
In de antropologie is uitvoerig beschreven hoe primitieve volken begonnen zijn te tellen met '1, 2, veel' of '1, 2, 3, veel' et cetera. Dat leidt om de zoveel jaar tot een hausse in de media als er weer een volk ontdekt is dat nog middenin deze ontwikkeling zit. Meest recent nog de Pirahã's in Brazilië [2]. Conclusie hieruit is, dat je blijkbaar prima kunt leven in een wereld die gaat tot en met 4. Pas bij 5 schijnt het échte tellen te beginnen. Vanuit de ethologie is bekend dat ook dieren elementaire 'kennis' hebben over kleine getallen. In Butterworth's prachtige book *The Mathematical Brain* wordt uitvoerig beschreven hoe twee groepen leeuwen als ze toevallig terecht komen in elkaars territorium, een tijdje over grote afstand naar elkaar gaan staan te brullen, waarna de kleinste groep altijd weg gaat.
Uit neurologisch onderzoek is bekend dat de getallenlijn die de mensen in het hoofd hebben, niet equidistant is als het gaat om opvolgende getallen. Hij ziet er ongeveer uit als ***in figuur 2***.



figuur 2

Dat heeft wel iets weg van een logaritmische schaal, maar dat is er direct weer een wiskundige blik op loslaten. Ik geloof er niets van dat mensen logaritmisch denken en handelen als het gaat om getallen. Ik denk dat het een empirische schaal is vanuit een diep menselijke behoefte om het wereldbeeld terug te brengen tot getallen onder de tien.
Uit de ontwikkelingspsychologie is bekend dat een natuurlijk besef van aantallen aangeboren is. De eerdergenoemde Butterworth noemt dat: 'Why the brain is hardwired for mathematics.' Een vraag die het goed doet op verjaardagen, is de volgende: 'Op welke leeftijd kan een kind het onderscheid maken tussen de aantallen 2 en 3?' En dan gaat het natuurlijk niet om getallen 2 en 3, die u nu hier leest, maar om de aantallen ◊◊ en ◊◊◊.
De schattingen lopen uiteen: 4 jaar, 2 jaar, 6 maanden, 6 weken, 6 dagen. Het echte antwoord roept veel verbazing op: 8 uur na de geboorte. De onvermijdelijke vraag uit het publiek is: 'Hoe meten ze dat dan?' Wel nu, dat gaat als volgt. Kinderen krijgen twee vormen te zien, die eerst variëren in vorm: dat levert geen enkele reactie op. Dan veranderen ze van kleur: nog steeds geen enkele reactie. Dan variëren ze in grootte: wederom geen enkele reactie. Dan verandert het aantal ◊◊ in het aantal ◊◊◊: er ontstaat spontane opwinding (*arousal*) bij de pasgeborenen. Er gebeurt iets significants. Er is al een hersenstructuur aanwezig waarop dit inhaakt. Hoe ze die 'arousal' meten? Door middel van de 'sucking rate'. Er is hier geen ruimte om daar verder op in te gaan. Dat laat ik graag aan de verbeelding van de lezer over.

Getallentheorie en onderwijs

Laten we nu eens aannemen dat een belangrijke functie van onderwijs is, kinderen voor te bereiden op en toe te rusten tot het omgaan met de werkelijkheid om ons heen. En laten we dat eens toespitsen op het omgaan met de kwantitatieve kanten van de werkelijkheid. Welke keuzes zou je dan kunnen maken in de klas, in het curriculum en in de toetsing?
Wat zou er gebeuren als een analyse van dagelijks gebruik van getallen leidend zou zijn voor de keuzes die gemaakt worden in referentiekaders, kerndoelen en examenprogramma's?
In de volgende paragrafen wordt dat uitgewerkt voor een paar onderdelen.

Getallen en een empirische opzet

De getallentheorie heeft eigenlijk maar één axioma:
Mensen houden van 1-10 *en veel minder van* 10-100, *nog veel minder van* 100-1000, *en zo voorts.*
In getallentheorie moet dit eigenlijk wat preciezer gedefinieerd worden. Er zijn vier klassen van getallen:

Klasse I	Klasse III
De getallen 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, en alle getallen met significantie 1, zoals: 30, 400, 7000, 6 miljoen, 20 miljard, 50%.	Alle getallen met significantie 3, zoals: 123, 792, 315 miljoen, 27,2 miljard, 23,1%.

Klasse II	Klasse IV
De getallen 11, 12, 13, 14, ...,19, en alle getallen met significantie 2, zoals: 23, 1400, 1,3 miljoen, 18 miljard, 23%.	Alle andere getallen, de zogenoemde restklasse.

Het axioma komt niet zomaar uit de lucht vallen. Het heeft een stevige wetenschappelijke basis. Als je namelijk met Google zoekt, zijn de gevonden frequenties veelzeggend.

getal	frequentie
een	360.000.000
twee	44.100.000
drie	19.400.000
vier	22.600.000
vijf	7.030.000
zes	6.280.000
zeven	3.560.000
acht	9.690.000
negen	2.750.000
tien	22.400.000
elf	9.130.000
twaalf	1.610.000
dertien	1.030.000
negentien	292.000
twintig	1.800.000
eenentwintig	258.000

getal	frequentie
tweeëntwintig	60.500
drieëntwintig	20.300
vierentwintig	93.400
vijfentwintig	245.000
zesentwintig	21.100
zevenentwintig	4.120
achtentwintig	65.200
negenentwintig	285.000
dertig	2.080.000
eenendertig	74.400
tweeëndertig	147.000
drieëndertig	115.000
vierendertig	57.700
negentig	824.000
honderd	2.200.000
duizend	1.390.000

Experimenteer hier zelf eens mee. Je krijgt andere getallen als je zoekt op 1, 2, 3, 4. En ook weer andere als je zoekt op one, two, three, four. En per dag kunnen de aantallen flink variëren. De werkelijkheid is immers altijd in beweging.

De conclusie is onontkoombaar: ons leven speelt zich voor 90% af in het gebied 1-10. En dat gaat veel verder dan je denkt. In kranten zie je bijna altijd dat de getallen teruggebracht worden tot 1 cijfer of tot 1 significant cijfer: 100 miljard naar Griekenland, 6000 doden, 30% daling. Pas als je wetenschappelijk wilt doen, mensen wilt overtuigen of status wilt verlenen aan je uitspraken, dan wordt het specifieker uitgedrukt in méér significante cijfers: 18 miljard bezuinigen versus 25 miljard. Hoe meer significantie, hoe overtuigender de uitstraling. Vergelijk maar eens de uitspraken:

- 'Uit onderzoek is gebleken dat 30% van de leerlingen baat heeft bij getallentheorie.'
- 'Uit onderzoek is gebleken dat 31,3% van de leerlingen baat heeft bij getallentheorie.'

Deze manier van naar getallen kijken zou toch niet misstaan in een moderne rekenles. Bijvoorbeeld de tien verschillende manieren waarop je naar 4 × 8 kunt kijken: op papier, in beeld, in patronen, in aantallen, in andere talen, in ... Dat zou je best kunnen verkiezen boven oefenen met 4 × 8 op een papiertje.

Het zou ook aanleiding kunnen zijn voor een onderdeel 'Hoe communiceer ik met getallen?', over het effect van significantie en overtuigingskracht. Met uitgebreide collages uit kranten en tijdschriften. Een dergelijk rekendoel ben ik tot op heden nog niet tegengekomen in een referentiekader.

Metriek stelsel en een empirische opzet

Met dezelfde blik kun je kijken naar het metriek stelsel. U kunt bijna al raden waarop dán de nadruk gaat liggen vanuit de getallentheorie. Niet per se staan de trappetjes met voorvoegsels centraal die vooral de wiskundige systematiek benadrukken en die wereldwijd al vele generaties leerlingen in cognitieve verwarring hebben gebracht.
Kijk eens met een andere blik naar een eenvoudig en veel voorkomend sommetje.

1,3 hm = … dam, met als correct antwoord 1300.

Reken ik hier iets uit? Voeg ik iets toe? Verhelder ik iets? Verander ik iets aan de gegeven afstand? Nee ik schrijf het alleen anders op. Maar waarom dan?
Of kijk eens naar een ander voorbeeld.
70 kg = … gram, met als correct antwoord 70000.
Wiskundig gezien is dit correct, maar in het echt kan dit toch bijna niet waar zijn. Jan weegt 70 kilogram, dus Jan weegt 70.000 gram is in getallentheorie geen valide redenering. Jan zal wel ergens rond de 70.000 gram wegen. Ik weet niet of een mens op enig moment wel zo nauwkeurig kan wegen. Met hoeveel gram per seconde gaat vochtverlies via de huid?
In getallentheorie ben je daarentegen juist wél geïnteresseerd in de menselijke behoefte om die voorvoegsels te gebruiken. Waarom zeg je niet: 'Ik ga 3000 meter wandelen.' Maar: 'Ik ga 3 kilometer wandelen.' Waarom zeg je niet: 'Ik weeg 88,700 gram.' Maar: 'Ik weeg bijna 90 kilo.' Waarom zit er geen 0,005 liter stof in een oplossing, maar 5 ml?
De verklaring vanuit de getallentheorie is eenvoudig: mensen willen graag terug naar het veilige gebied van 1-10. Ze gebruiken liever een lastig stelsel met voorvoegsels als ze daarmee de getallen die de hoeveelheden aangeven, maar 'klein' kunnen houden. Dat is natuurlijk ook de echte basis van het metriek stelsel.
Hoe zou je dit onderdeel kunnen opbouwen vanuit getallentheorie? Leg de nadruk op de meest voorkomende eenheden. Statistisch kan zo even uitgezocht worden welke dat zijn. Ik schat in:

- mg, g, kg, ton
- mm, cm, dm, m, km
- cm^2, m^2
- cm^3, m^3
- cL, dL, L

Kies bij elke veel voorkomende eenheid een paradigmatisch voorbeeld, dat wil zeggen een voorbeeld waar je direct een beeld bij hebt, wat je kunt zien en wat je kunt ervaren.
Als het even kan een voorbeeld gerelateerd aan het eigen lichaam. Dat heb je immers altijd bij je. Of anders uit de dagelijkse omgeving:

- 1 g = 1 suikerkorrel
- 1 mm = dikte vingernagel
- 1 m^3 = de kubus op het schoolplein
- 1 L = pak melk

En laat deze eenheden in een grote variëteit aan situaties de revue passeren. Je legt daarmee een metrieke basis voor kinderen die een leven lang mee kan.

Breuken en een empirische opzet

Mijn stelling is dat elke leerling met breuken kan omgaan. Ik ben namelijk nog nooit een kind tegengekomen dat niet wist wat een half was. Een half brood, een halve banaan, een halve kokosnoot, of een half koekje, afhankelijk van in welk werelddeel je bent.

De klassiek wiskundige opzet is dat je begint met $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$, dat als vanzelfsprekend uitbreidt tot:

$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ en $\frac{1}{23}$. En vervolgens tot $\frac{3}{7}$, $\frac{15}{59}$ en $\frac{345}{567}$.

En dat het gaat om met het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met deze breuken.

Vanuit de getallentheorie zou het basiscurriculum breuken kunnen bestaan uit het herkennen en gebruiken van $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ en $\frac{1}{1000}$.

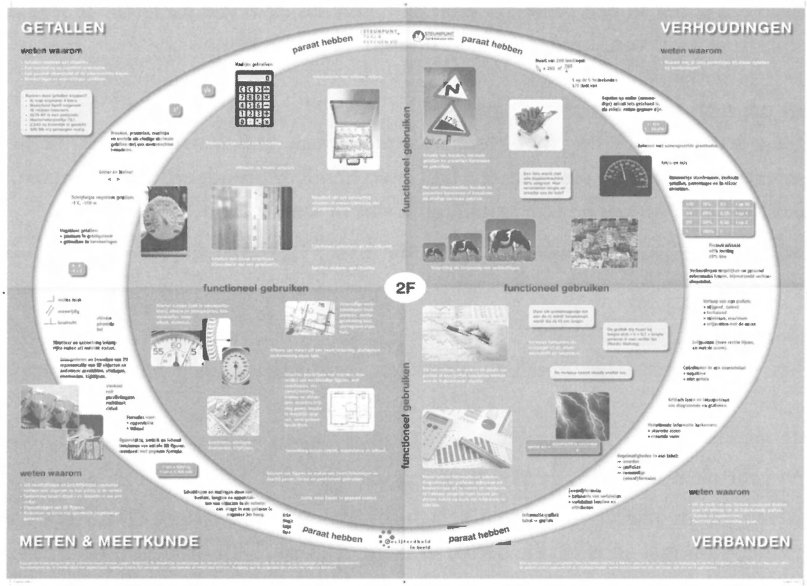
En die vervolgens in allerlei vormen en verschijningen en toepassingen steeds maar weer de revue laten passeren: in tekst, in beeld, in echte spullen. Dan kom je vanzelf ook wel een keertje $\frac{3}{7}$ en $\frac{13}{15}$ tegen. En dat is genoeg. Op die manier heb je waarschijnlijk wel 90% van het praktische breukengebruik te pakken. Wil je meer, dan doe je dat in de verrijkingstof van groep 7 en 8, in de sector techniek van het (v)mbo en bij het vak wiskunde op het havo en het vwo.

Een nieuw curriculum?

Er is nu net een mooi Referentiekader Rekenen in de wet vastgelegd, met daarin vier hoofddomeinen van het rekenen: Getallen, Verhoudingen, Meten & Meetkunde en Verbanden; zie figuur 3.

Dat is conform de internationale standaarden voor zulke frameworks en het weerspiegelt ook goed een wereldwijde brede visie op rekenen waarbij het gaat om én kennis én vaardigheden én het kunnen gebruiken van dat rekenen in functionele situaties.

Die domeinen zijn dan ook niets anders dan een poging om de kwantitatieve kant van de wereld om ons heen te categoriseren in vier wiskundige hoofdcategorieën. Voor de invulling van die domeinen wordt echter weer teruggegrepen op wiskundige structuren van 'generalisering' en 'algemeenheid'. Terwijl we, voor het gebruik in de wereld om ons heen, juist 'specifiek zijn' en 'verbinding met de werkelijkheid' nodig hebben.



figuur 3 Referentieniveau 2F, rekenposter APS

Bij een toekomstige herziening van het referentiekader zou wat mij betreft wel wat meer gebruik gemaakt mogen worden van de in dit artikel geschetste getallentheorie. Dan staat het iets verder af van de wiskunde. Maar iets dichter bij de mens. Dat zal de goede en hoogstaande naam van de wiskunde heus niet direct schaden. Het zal eerder de angst voor rekenen en wiskunde doen verminderen en het plezier om bezig te gaan met de kwantitatieve kant van de werkelijkheid vergroten.
Op weg naar gecijferdheid.

Literatuur en noten

[1] Zie het prachtige boek *De man die van getallen hield* van Paul Hoffman over de Hongaarse wiskundige Erdös.

[2] Voor bronnen zie « *www.gecijferdheid.nl/Inhoudsopgave.htm* » bij de G van Getallentheorie.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

1009

Het kleinste 4-cijferige priemgetal waarin elk cijfer een kwadraat is.
Ook: $1009^2 = 1045817322864049$, en dat is een *pandigitaal* getal (alle cijfers komen ten minste één keer in het getal voor).
En verder is: $1009 = 1^3 + 2^3 + 10^3 = 4^3 + 6^3 + 9^3$.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

De helderheid van onze getallen

[Gaston Dorren]

Onze taal is helder én subtiel, eenvoudig én rijk. Ook rijmen, tellen en schelden kunnen we als de beste. Dat we een hoge dunk hebben van het Nederlands, is dus terecht. Of toch niet?
Gaston Dorren vergelijkt onze taal met de talen van de rest van Europa.

Wat kunnen we in het Nederlands toch goed tellen en rekenen. Onze telwoorden zitten helder in elkaar en zijn makkelijk te leren: boven de 12 hoef je alleen nog maar de uitgang *-tig* en de woorden *honderd* en *duizend* te onthouden. Als je die woorden kent, zijn alle telwoorden tot een miljoen vrij eenvoudig te snappen. De rangtelwoorden (zoals *vijfde*) zijn helemaal simpel: tot en met 19 zet je *-de* achter het hoofdtelwoord (*twaalfde*), daarboven *-ste* (*dertigste*). Alleen *eerste*, *derde* en *achtste* zijn spelbrekers.
Helemáál perfect is het Nederlandse telwoordensysteem natuurlijk niet. Wie onze taal leert, verwacht *drietien* en *viertien*, *tweetig*, *drietig* en *viertig* en uiteraard *achtig* (of *achttig*). Ook is het even wennen dat het Nederlands de volgorde van de cijfers soms niet respecteert: in de uitspraak van 23 komt immers de drie voorop. *Twintigendrie* zou logischer zijn. Maar ach, er zijn wel meer Europese talen die dat omdraaien (zoals Deens, Duits en Sloveens). Plus Arabisch – en tenslotte gebruiken wij Arabische cijfers.
De Nederlandse telwoorden hebben dus wel wat hebbelijkheden, maar die zijn klein vergeleken bij die van andere talen.

Sommen

Vrij bekend zijn de vreemde kostgangers die het Frans herbergt, zoals 'zestig-tien-acht' (78) en 'vier-twintigen' (80). In Keltische talen als Bretons en Welsh duiken verrassingen op als 'twee op vijftien op twintig' (37), 'half honderd' (50), 'twee-negen en vier-twintig' (98) en 'vier-twintig min één' (79). Dat zijn geen getallen meer, dat zijn sommen.

Tachtig is in het Frans 'vier twintigen'.

Ook het Deens bezondigt zich daaraan. In de reeks van tientallen duikt daar het woord *tres* op, dat sterk lijkt op *tre* ('drie'). Betekent *tres* dus 'dertig'? Nee: het staat voor 'zestig' – drie keer twintig, vandaar die gelijkenis met het woord voor 'drie'. In de reeks van tientallen staat ook *halvtreds*. Is dát dan 'dertig'? – het suggereert immers sterk 'half zes-

tig'. Maar nee, ook niet: *halvtreds* is 'vijftig' (tweeënhalf keer twintig). Voor wie desondanks nog in het Deens wil leren tellen: 'dertig' is *tredive*. Of *tredve*.
Ook in het Turks is er met 30 iets vreemds aan de hand. Dit telwoord, *otuz*, lijkt namelijk totaal niet op het woord voor 3, *üç*. (De letters *u* en *ü* lijken voor het oog wel op elkaar, maar dat is toeval.) Net zo lijken de Turkse woorden voor 20, 40 en 50 niet op die voor 2, 4 en 5. Alsof de oude Turken geen enkel verband zagen tussen die getallen.

Nummer 947

In het Spaans is het niet zozeer het hoofdtelwoord *dertig* dat zich vreemd gedraagt, als wel het rangtelwoord *dertigste*. Sterker nog: bijna alle Spaanse rangtelwoorden doen vreemd. Waar de hoofdtelwoorden zich in de loop der (Middel)eeuwen geleidelijk uit het Latijn ontwikkelden, zoals de meeste Spaanse woorden deden, daar werden de meeste rangtelwoorden boven de 5 door taalgeleerden kunstmatig ontleend aan het Latijn toen dat al een dode taal was. Met als gevolg dat er tussen de hoofd- en rangtelwoorden geen regelmatig verband bestaat. 'Dertig', om bij dat voorbeeld te blijven, is in het Spaans *treinta*, maar 'dertigste' is *trigésimo*. Om het extra ingewikkeld te maken krijgt bij langere rangtelwoorden elk onderdeel zijn eigen uitgang. Zodat '947ste' in het Spaans, letterlijk vertaald, 'negenhonderdste veertigste zevende' heet (*nonigentésimo cuadragésimo séptimo*). Geen wonder dat Spaanstaligen deze woorden mijden als de pest en meestal hun toevlucht nemen tot de formulering 'nummer 947'.
De Slavische talen, zoals Russisch, Pools, en Servisch, Kroatisch en Bosnisch, hebben op het eerste gezicht makkelijke, regelmatige telwoorden – misschien wel makkelijker en regelmatiger dan het Nederlands. Maar deze talen hebben dan weer eindeloze grammaticále complicaties opgelopen. Sommige getallen gedragen zich als bijvoeglijke naamwoorden, andere als zelfstandige naamwoorden, hetgeen tot heel andere naamvalsverbuigingen leidt. Zo kent het nederige getal 2 in het Servisch, Kroatisch en Bosnisch zes en in het Pools zelfs zeven verbogen vormen. Het Russisch heeft dan weer zijn eigen gril: op getallen die eindigen op 1, 2, 3 of 4 volgt een enkelvoud. In correct Russisch spreekt men dus wel van '19 dagen', maar van '21 dag'.
Kortom, al zijn de Nederlandse getallen niet helemaal volmaakt, ze behoren wel tot de absolute top van Europa. Of niet?

Bijna, maar niet helemaal. Want het Welsh heeft geprofiteerd van de 'wet van de bevorderlijke achterstand' (de tegenhanger van de 'wet van de remmende voorsprong'). Juist omdat deze taal van oudsher zo'n hersenverstuikend moeilijk telsysteem kende, met telwoorden als 'twee-negen' (18) en 'vier op tien en drie-twintig' (74), is er daarnaast een alternatief ontstaan. De oude getallen zijn nog wel in zwang, bijvoorbeeld voor data. Maar als een moderne Welshtalige rekent, noemt hij 37 'drie tien zeven' en 79 'zeven tien negen'. Hetgeen dus betekent: drie tientallen plus zeven en zeven tientallen plus negen. Dat systeem wordt consequent volgehouden, ook met honderdtallen en hoger.
Minder schilderachtig dan het oude systeem, zeker. Maar wel veel praktischer en helderder. Zó helder dat zelfs het Nederlands er niet aan kan tippen.

Verantwoording

[Red.] In het tijdschrift *Onze Taal* (van het Genootschap Onze Taal; *www.onzetaal.nl*) schrijft Gaston Dorren een rubriek onder de titel *Onze taal is de beste*. Bovenstaande column verscheen in die serie als vierde, in het nummer van oktober 2011.
De column is met toestemming van de auteur en van de redactie van *Onze Taal* overgenomen.

Overigens, in het pas verschenen boek van Gaston Dorren, *Taaltoerisme. Feiten en verhalen over 53 Europese talen*, gaat hoofdstuk 26 helemaal over tellen en rekenen.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

VWP 1 – Tja ...

De vrienden A en B ontmoeten elkaar en voeren het volgende gesprek.
A: Hoe gaat het met je drie kinderen?
B: Uitstekend, dank je.
A: Hoe oud zijn ze nu?
B: Het product van hun leeftijden (in gehele jaren) is 72.
A: Tja ...
B: De som van hun leeftijden is m'n huisnummer.
A: Je huisnummer weet ik, maar hun leeftijden ...
B: De oudste heeft zojuist een fiets gekregen.
A: Ja, nú weet ik hun leeftijden!

De lezer nu ook?

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Getallen in de krant

[Hans van Maanen]

De beste manier om een journalist machteloos te maken, is met getallen aan te komen. Veel getallen, met liefst nog een paar grafieken.

Journalisten zijn snel tevreden, zeker als het over cijfers gaat. Ze zijn al blij als ze de getallen goed opschrijven, de komma correct plaatsen, en aan het verschil tussen miljoen en miljard denken. Ze vergeten zich af te vragen of de cijfers kunnen kloppen, of ze niet wat concreter kunnen worden gemaakt en of er niet weer meer reliëf en context bij kan.

Neem, volstrekt willekeurig, een bericht dat op dinsdag 17 november 2009 in *NRC Handelsblad* verscheen. Het complete bericht, onder de kop 'Babysterfte onder allochtonen hoger', luidde:

'Babysterfte onder niet-westerse allochtonen van de eerste generatie was in de periode 2004-2005 ruim de helft hoger dan bij kinderen van autochtone moeders. Dat blijkt uit cijfers die het CBS gisteren heeft gepubliceerd. Van niet-westerse allochtone moeders van de eerste generatie sterven ruim dertien baby's op elke duizend pasgeborenen. Bij autochtone moeders was dit bijna negen per duizend. Vooral onder kinderen van Antilliaanse, Arubaanse of Surinaamse moeders was de kindersterfte hoog.'

Zoals gezegd, de meeste berichten geven zelfs geen cijfers, dus we zouden al heel gelukkig kunnen zijn, maar de vraag blijft: wat heeft dit te betekenen? Hoe komt het dat de babysterfte onder allochtonen zoveel hoger was? Wisten ze de weg naar het ziekenhuis niet te vinden? Bevielen ze vaker of minder vaak in het ziekenhuis? Rookten ze meer, of hebben Zuid-Amerikaanse baby's altijd al een hoger sterfterisico, bijvoorbeeld door een laag geboortegewicht? En de tweede en derde generatie?

Drijfcijfers

Het voorbeeld is willekeurig, want de keus is alarmerend ruim. Kranten melden de meeste cijfers zonder zich een moment te verdiepen in de achtergrond, de herkomst of de bedoeling van de cijfers: ze worden losgeslagen van de werkelijkheid en dobberen vervolgens wat doelloos rond, klaar om opgepikt te worden door ieder die er wat mee wil. Terwijl er ook in 2009 al een hevige discussie in verloskundig Nederland woedde over de perinatale sterfte en iedereen elkaar naar het leven stond, bood de krant een geïsoleerd, op dat moment al bijna vijf jaar oud drijfcijfer. Eigenlijk alleen omdat het CBS twee bestaande bestanden had samengevoegd en daar een persbericht over had uitgegeven.

Controlegroepen

Het zijn berichten als 'Afscheidsfeest wethouder kostte twee ton', of 'Overschot handelsbalans 3% omhoog'. Er zijn wel cijfers, maar het blijft onduidelijk of ze iets betekenen, laat staan of we er blij of boos over moeten zijn. Hoeveel kosten andere afscheidsfeesten?

Is een overschot gunstig of ongunstig voor ons land? En hoeveel fluctueert zo'n balans normaal gesproken?
'Veel koffie goed voor een mens', meldde *de Volkskrant* op de voorpagina van 17 juni 2008, zonder te melden hoe groot dat beschermend effect dan was. Bij gedetineerden die 'zonder het te weten vitaminen, mineralen en (omega 3) vetzuren kregen, namen agressie en regelschending met 34 procent af', aldus het hoofdartikel in *NRC Handelsblad* van 31 januari 2009, dat zich verder natuurlijk niet verdiepte in de vraag hoeveel het scheelde in de groep die *geen* voedingssupplementen kreeg, hoeveel 34 procent is gezien het totaal en de natuurlijke variatie in regelschending, enzovoort.
Het zou misschien niet eens zo erg zijn, als door al deze omissies niet ook de lezers het ontwennen door cijfers heen te kijken en er pientere vragen bij te stellen.

Verslaafd aan twee triljoen sigaretten

Concreet

Cijfers zijn abstract – daarom zijn ze zo handig – maar een van de belangrijkste taken en hulpmiddelen van journalisten is nu juist die cijfers concreet te maken. In plaats van te spreken over een gebied van 7 hectare, zeggen zij 'een terrein zo groot als een voetbalveld'. Van 160 miljoen euro subsidie maken ze liever 10 euro voor iedere Nederlander. Daarmee worden cijfers, als het goed wordt gedaan, begrijpelijker en hanteerbaarder. Wie een verhaal over de Chinese tabaksindustrie kopt 'Verslaafd aan twee triljoen sigaretten' (*NRC Handelsblad*, 20 augustus 2007) heeft niet eens nagerekend hoeveel sigaretten een Chinees dan per jaar zou roken. Onbenullen met zoveel nullen.
Daarnaast is het goed cijfers reliëf te geven. Een stadstuin ter grootte van een voetbalveld is enorm, maar op de Veluwe zegt het niet zoveel. Ook aan andere zaken wordt 160 miljoen euro besteed, en enig vergelijkingsmateriaal zou welkom zijn. Als het aantal autodiefstallen dit jaar 'sterk' is gestegen, willen we ook wel horen hoe het in de voorgaande jaren was – misschien was vorig jaar toevallig een dieptepunt, of is er slechts sprake van een toevalsfluctuatie. En als er meer cijfers zijn, waarom worden die dan niet gekozen als vergelijkingsmateriaal? Waarom komen ze nu met die cijfers?

Status

Cijfers hebben, het kan niet vaak genoeg worden gezegd, een bedoeling. Cijfers komen niet uit de lucht vallen, ze zijn zorgvuldig geselecteerd, gewassen en voorgekookt. Soms op verantwoorde wijze, maar soms op een manier die bedoeld is om te misleiden. Cijfers spelen een rol in de communicatie zoals argumenten, treffende voorbeelden, metaforen en bluf dat doen. Getallen worden aangeroepen op momenten dat gezag alleen niet meer volstaat. Waar de overheid, de dokter, de notaris en de ingenieur vroeger een eenvoudig beroep op hun autoriteit konden doen, moeten zij nu met getallen en statistieken hun gelijk aantonen. De hoogleraar wordt niet op zijn woord geloofd, maar zal wetenschappelijk bewijs moeten leveren. Het ziekenhuis doet niet meer vanzelfsprekend zijn best, maar moet met prestatie-indicatoren voorrekenen dat het zijn best doet. Vandaar, zou je kunnen zeggen, dat er steeds meer vraag naar 'objectieve cijfers' ontstaat.

Een rapport vol cijfers oogt gewichtig, en als de cijfers erbij geleverd worden, zal het vast wel kloppen. Cijfers en tabellen, statistieken en p-waarden dienen om autoriteit te vestigen of te handhaven. Een ziekenhuis dat bovenaan prijkt op de lijst prestatie-indicatoren heeft in ieder geval zijn reputatiemanagement op orde – of het er voor patiënten goed toeven is, blijft de vraag.

Context

Kranten horen daarop bedacht te zijn, zoals ze dat zijn bij argumenten van politici en verklaringen van directeuren en voetbaltrainers. Maar het ontbreekt journalisten ten enenmale aan het gereedschap om cijfers te verifiëren en te analyseren. Vrijwel elke dag staan in de krant artikelen met evidente rekenfouten en statistische uitglijers (dat komt natuurlijk ook omdat er elke dag zoveel artikelen in de krant staan, maar toch). Ook al is het voor goede journalistiek volstrekt niet nodig om de standaarddeviatie en de chi-kwadraat te kunnen berekenen, het is, denk ik, wel belangrijk om te begrijpen waar cijfers vandaan komen, welk belang ze dienen, in welke samenhang ze gezien moeten worden, en hoe ze gecontroleerd kunnen worden.
Wat dat betreft verschillen cijfers niet van andere nieuwsfeiten: journalisten zijn ervoor om ze tegen het licht te houden, van de juiste context te voorzien, en voor lezers begrijpelijk te maken. Anders kunnen die net zo goed *Nu.nl* of overheidswebsites gaan lezen.

Leerlingentekst

Getallen in de krant – tekst met opdrachten te gebruiken bij dit artikel
2 pagina's, PDF-bestand van ca. 340 Kb
Zie: *www.nvvw.nl/special12/(wb)getallenkrant.pdf*

Meer ongelukken bij mooi weer

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

DAGEN

Dertig dagen heeft November,
April, Juni en September.
De andere hebben dertig en één,
Uitgenomen Februari alleen,
Want die heeft er viermaal zeven;
't Schrikkeljaar nog één daarneven.

Simon Abramsz. (1937?): *Rijmpjes en versjes uit de oude doos*. Amsterdam: J.M. Meulenhoff.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

De erfenis van Pythagoras

[Jan P. Hogendijk]

Pythagoras

Pythagoras van Samos leefde in de zesde eeuw voor Christus. Hij was in de eerste plaats een religieus leider en oprichter van een school waarin leerlingen werden opgeleid tot een hoger leven. Hij onderwees dat de essentie van de wereld bestond uit natuurlijke getallen, en dat harmonieën van natuurlijke getallen verband hielden met verschijnselen in de realiteit. Dit illustreerde hij door een snaar aan te strijken, hem daarna te halveren en opnieuw aan te strijken. De tweede toon klonk dan mooi samen met de eerste toon, en hetzelfde gebeurde als de snaar volgens een andere verhouding van kleine getallen werd verdeeld, bijvoorbeeld 2 : 3 of 3 : 4.

Dit soort harmonieën waren ook elders te vinden. De planeten bewogen namelijk in cirkels met omloopstijden die zich als natuurlijke getallen verhouden, en daardoor maakten ze een harmonieuze hemelse muziek.

Wiskunde diende volgens Pythagoras in de eerste plaats voor de verheffing van de ziel, en pas daarna voor het praktisch nut. Volgens Proclus (vijfde eeuw na Chr.) was Pythagoras de eerste die 'de beginselen (van de meetkunde) van bovenaf beschouwde en de stellingen op een onstoffelijke manier met het denken onderzocht'. De 'stelling van Pythagoras' was als wiskundig feit al duizend jaar voor Pythagoras bekend aan de oude Babyloniërs, maar wellicht heeft Pythagoras gewerkt aan de onderbouwing van deze stelling, niet door een praktijkvoorbeeld of een plaatje, maar door een wiskundig bewijs.

Bij de Pythagoreeërs werden getallen vaak meetkundig weergegeven. Zo kende de pythagoreïsche wiskunde 'vierkante getallen' (modern: getallen van de vorm n^2) en ook 'driehoekige getallen' (modern: getallen van de vorm $\frac{1}{2}n(n+1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$). De vierkante getallen leven nog voort in het woord kwadraat. De term driehoekige getallen wordt niet veel meer gebruikt, maar heeft lang voortgeleefd in beroemde wiskundige problemen. In 1650 bepaalde P. Mengoli de som van de omgekeerden van de driehoekige getallen (probeer dit zelf), en in 1796 bewees Gauss dat elk natuurlijk getal te schrijven is als som van ten hoogste drie driehoekige getallen. De Pythagoreeërs veronderstelden dat de getallen bepaalde eigenschappen hadden die vanuit de huidige wiskunde onzinnig zijn, bijvoorbeeld dat alle even getallen vrouwelijk waren, alle oneven getallen mannelijk, en 5 het getal van het huwelijk. Sommige pythagoreïsche begrippen zijn wel zinvol. Een *volmaakt* getal in de pythagoreïsche wiskunde is gelijk aan de som van zijn delers, zoals bijvoorbeeld $6 = 1 + 2 + 3$, en $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Twee getallen heten *bevriend* als ze de som zijn van elkaars delers, zoals:

$220 = 1+ 2 + 4 + 71 + 42$ en

$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11+ 20 + 22 + 44 + 55 +110$

In Boek 9 van de *Elementen* van Euclides wordt bewezen dat als $p = 2^{n+1} - 1$ een priemgetal is, $2^n \cdot p$ een volmaakt getal is. In de negende eeuw na Christus bewees Thābit ibn

Qurra uit Harran (op de grens van Turkije en Syrië) dat als $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ en $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ priemgetallen zijn, de twee getallen $2^n \cdot pq$ en $2^n \cdot r$ bevriende getallen zijn. Alle bekende volmaakte getallen hebben de vorm die Euclides aangaf, maar er zijn paren bevriende getallen (bijvoorbeeld 1184, 1220) die niet geleverd worden door de methode van Thābit. De theorie van volmaakte en bevriende getallen is een leuke curiositeit die verder weinig aan de ontwikkeling van de wiskunde heeft bijgedragen.

Omstreeks 430 voor Christus werd in Griekenland ontdekt dat bepaalde verhoudingen binnen de meetkunde, zoals die tussen zijde en diagonaal van een vierkant, niet door gehele getallen kunnen worden weergegeven. Dit inzicht is in strijd met het idee van de Pythagoreeërs dat de essentie van alles (natuurlijk) getal is. Zij hadden wel een methode om de verhouding tussen zijde en diagonaal van een vierkant te benaderen met een rij steeds nauwkeurigere verhoudingen 3 : 2, 7 : 5, 17 : 12, 41 : 29 = (17 + 2 × 12) : (17 + 12), …
Eudoxos (ca. 350 v. Chr.) ontwikkelde een nieuwe theorie van verhoudingen in de meetkunde die niet uitging van getallen maar van het basisbegrip 'grootheid' (bijvoorbeeld lijnsegment). Deze theorie is 2000 jaar lang de basis van de meetkunde geweest.

Praktische getallenmagie

De pythagoreïsche visie op getallen leidde in de middeleeuwen en de renaissance tot toepassingen van de getallenleer. Dat deze toepassingen voor ons mogelijk ongeloofwaardig zijn, doet in de volgende beschrijving niet terzake. De toepassingen zijn te vinden in de Islamitische wereld en in Christelijk Europa, die we in dit verband het beste samen als één cultuurgebied kunnen beschouwen. Eigenschappen van getallen kunnen iets uitdrukken over de realiteit. Zo verklaarde de heilige Augustinus (354-430) dat God de wereld in 6 dagen schiep, omdat 6 een volmaakt getal is (*De Civitate Dei*, boek 11, hoofdstuk 30). Als verschijnselen in de realiteit de uitwerking zijn van harmonieën tussen getallen, wordt het mogelijk de realiteit te beïnvloeden door op de juiste manier getallen toe te voegen. In Arabische teksten wordt bijvoorbeeld een manier beschreven voor het verhelpen van relatieproblemen. Wanneer men de bevriende getallen 220 en 284 op een stukje papier schrijft, dat in tweeën scheurt, elk van beide stukjes in het geheim door een portie voedsel verwerkt, en deze porties door twee verschillende personen laat consumeren, dan zal de relatie tussen deze twee personen verbeteren.
De meest voorkomende middeleeuwse toepassingen van de pythagoreïsche getallenleer hebben de vorm van 'magische vierkanten', in het Arabisch: 'harmonieuze plaatsing van getallen' (wafq al-a'dād). Een magisch vierkant van orde n bestaat uit de getallen 1 tot en met n^2 die in een vierkant van n rijen en n kolommen worden geplaatst zodat de som van elke rij, elke kolom en de twee diagonalen hetzelfde getal $M = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$ is. Diverse auteurs geven een rij magische vierkanten van ordes 3 tot en met 9, die aan de zeven planeten werden toegekend, op volgorde van afnemende afstand tot de aarde volgens Ptolemaeus: Saturnus (3), Jupiter (4), Mars (5), Zon (6), Venus (7), Mercurius (8) en Maan (9). We vinden deze rijen planeetvierkanten bijvoorbeeld in de tiende-eeuwse *Brieven van de Zuivere Broeders* uit Basra, en in Boek 2 van de *Occulte Filosofie* van Agrippa van Nettesheim (1509-1510), dat beschikbaar is in Engelse vertaling op [1].

De Zuivere Broeders en Agrippa beschrijven de toepassing summier, zodat de lezer in het duister blijft tasten. Gelukkig is er een veertiende-eeuwse Latijns vertaling van een Arabische tekst over planeetvierkanten bewaard, waaraan we de volgende samenvatting ontlenen (voor meer uitgebreide gegevens zie Sesiano, *Magic squares for daily life*).

16	**3**	**2**	**13**
5	**10**	**11**	**8**
9	**6**	**7**	**12**
4	**15**	**14**	**1**

figuur 1a Jupiter-vierkant

figuur 1b Melencolia I / Albrecht Dürer (1471-1528)
Bron: WikipediA

Figuur 1a is het Jupiter-vierkant uit de reeks. Dit is ook te vinden op de beroemde ets Melencolia I van Dürer in 1514. Dürer koos dit vierkant omdat het jaartal 1514 in de onderste regel te zien is, maar het vierkant is ouder. Het vierkant moet op een zilveren plaat gegraveerd worden op het moment dat Jupiter een gunstige stand aan de hemel heeft. De plaat moet daarna gerookt worden met (smeulend) hout van aloë of (smeulende) amber. Als iemand deze amulet daarna bij zich draagt, zullen de mensen hem aardig vinden, en hij zal krijgen wat hij vraagt. Legt men de amulet op de stoel van een bestuurder, dan zal deze lang besturen, en constructief met vriend en vijand kunnen omgaan.

14	10	**1**	22	18
20	**11**	**7**	**3**	24
21	**17**	**13**	**9**	**5**
2	**23**	**19**	**15**	6
8	4	**25**	16	12

figuur 2 Mars-vierkant

Planeetvierkanten konden ook op negatieve manier worden ingezet. Het (5×5)-vierkant van Mars in figuur 2 dient op een koperen plaat gegraveerd te worden op een moment dat de planeet Mars terugloopt in de dierenriem of anderszins ongunstig staat. De plaat moet daarna gerookt worden met uitwerpselen van muizen of katten. Als de plaat op de stoel van een bestuurder gelegd wordt, zal deze elke dag ellende meemaken; als de plaat bij een gebouw in aanbouw begraven wordt, zal dit nooit worden afgemaakt; als deze plaat in een winkel wordt geïnstalleerd, zal deze spoedig sluiten, enzovoort.

1	32	34	3	35	6
30	8	27	28	11	7
20	24	15	16	13	23
19	17	21	22	18	14
10	26	12	9	29	25
31	4	2	33	5	36

figuur 3 Zonnevierkant

Het zonnevierkant in figuur 3 moet op goud worden gegraveerd in het begin van de lente, en daarna gerookt worden met saffraan. In een lap gele zijde bewaard zal deze amulet de bezitter veel geluk brengen. Tenslotte wordt gezegd dat in dit vierkant een groot geheim verborgen ligt. De tekst gaat verder met vierkanten voor Venus, Mercurius en de Maan en soortgelijke instructies, die we hier achterwege laten.

Deze magische vierkanten zijn niet gevonden door lukraak proberen. In de Islamitische wereld ontstond in de tiende eeuw een traditie in het wiskundig construeren van magische vierkanten (zie Sesiano, *Les carrés magiques*).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

figuur 4 Een basisvierkant

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

figuur 5 Magisch vierkant, afgeleid uit figuur 4

Veel magische vierkanten zijn gevonden door te beginnen met een basisvierkant zoals in figuur 4, met de eerste n^2 getallen in stijgende of dalende volgorde. Dit is nog geen magisch vierkant, maar de som van de diagonalen van dit vierkant is al wel goed. Door alleen de diagonalen in het middelpunt te spiegelen vind je een magisch vierkant als in figuur 5, en daaruit zou figuur 1 gevonden kunnen zijn door de tweede en derde kolom te verwisselen.

Met een soortgelijke maar iets ingewikkeldere methode kan ook een (8×8)-planeetvierkant voor Mercurius worden ontworpen.

Het Mars-vierkant in figuur 2 is ontworpen door de Islamitische wiskundige Ibn al-Haytham (ca. 1000). De structuur is duidelijk te zien als we het vierkant verdelen in de vetgedrukte oneven getallen in het midden en vier 'taartpuntjes' met even getallen (zoals het puntje bestaande uit de getallen 2, 4, 8). We zien dan een deel van een schuin basisvierkant waarin de vetgedrukte oneven getallen van 1 tot en met 25 op volgorde staan, in vijf schuine rijen. We kunnen het 'taartpuntje' met getallen 2, 4, 8 naar rechtsboven schuiven zodat in het vette vierkant de 2 en 4 tussen de 1, 3 en 5 terechtkomen en de 8 tussen de 7 en de 9. Door ditzelfde met de drie andere puntjes te doen krijgen we een schuin basisvierkant met alle getallen van 1 tot en met 25. Door dit proces om te draaien kan de lezer nu zelf planeetvierkanten voor Saturnus, Venus en de Maan ontwerpen.

Ook het zonnevierkant is uit een basisvierkant gemaakt. Men heeft de getallen op de diagonalen laten staan en heeft daarna getallen uit de bovenste en de onderste rij op handige

manier verwisseld, en op analoge manier met de andere rijen. Het is moeilijk hier verder een consequent systeem in te ontdekken.
Ook toepassingen van grotere magische vierkanten worden in de literatuur genoemd. In een vijftiende-eeuws Turks geschrift (Yaltkaya; p. 59) wordt verhaald dat er in het begin van de Islam een strijd zou zijn gevoerd tussen een leger van Ali, de vierde kalief, en een leger van ongelovigen. Het leger van Ali droeg een vaandel met een magisch vierkant van orde 100. De strijd bleef onbeslist, totdat aan Ali meegedeeld werd dat ook in het leger van ongelovigen een vaandel met een magisch vierkant van orde 100 gedragen werd. Ali gaf onmiddellijk opdracht om een nieuw vaandel te maken met een magisch vierkant van orde 101, en dit in de veldslag mee te dragen. De Moslims wonnen daarna de strijd.
Pythagoras zou zich in zijn graf omdraaien als hij van deze toepassingen van zijn getallenleer had gehoord.
Magische vierkanten hebben weinig aan de wiskunde bijgedragen, maar sinds de zeventiende eeuw zijn ze ook in Europa bestudeerd, en nog steeds wekt het onderwerp veel enthousiasme (zie het internet).

Harmonieën tussen reële getallen

Tot in de negentiende eeuw was de wiskunde bewust of onbewust gebaseerd op het meetkundige begrip 'grootheid'. Na 1860 is het begrip 'reëel getal' uitgewerkt op basis van natuurlijke getallen. De meetkunde is nu niet meer nodig om getallen als $\sqrt{2}$, e en π te definiëren.
In de mechanica van Newton kunnen planeetbanen en de valbeweging op aarde op wiskundige manier worden afgeleid uit de gravitatiewet, die kan worden beschreven door een formule $F = gm_1m_2/r^2$. In de negentiende eeuw bleken ook eigenschappen van elektriciteit en magnetisme te kunnen worden afgeleid uit basiswetten die geschreven kunnen worden als formules. Alle grootheden in deze formules kunnen uiteindelijk worden uitgedrukt als reële getallen, en de formules zouden kunnen worden opgevat als 'harmonieën tussen reële getallen'. De relativiteitstheorie van Einstein is ook op wiskundige formules gebaseerd. Tegenwoordig zijn fysici bezig met een theorie van alles, waarin men probeert de diepste vragen over de werkelijkheid op te lossen met behulp van 'harmonieën van getallen'.
Conclusie: **de erfenis van Pythagoras is springlevend!**

Noot

[1] Zie: *http://www.esotericarchives.com/agrippa/*

Literatuur

- John D. Barrow (1992): *Pi in the Sky*. New York: Oxford University Press.
- Jacques Sesiano (2004): *Les carrés magiques dans les pays islamiques*. Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR).
- Jacques Sesiano (2004): *Magic squares for daily life*. In: Ch. Burnett e.a. (2003): *Studies in the History of Exact Sciences in Honour of David Pingree*. Leiden: Brill; pp. 715-734.

- B.L. van der Waerden (1979): *Die Pythagoreer, Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft.* Zürich/München: Artemis Verlag.
- Serefeddin Yaltkaya, ed. (1940): *Molla Lutfi'l Maqtul. La duplication de l'autel*, trad. française et introduction par Abdulhak Adnan et Henry Corbin. Paris: E. de Boccard.
  Reprint in: F. Sezgin (1998): *Islamic Mathematics and Astronomy*; vol. 78. Frankfurt: Johann Wolfgang Goethe-Universität.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

153 – 3 cijfers

- 153 = 1 + 2 + 3 + … + 17 ; het 17e driehoeksgetal en het 9e zeshoeksgetal.
- 153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!
- 153 = $1^3 + 5^3 + 3^3$; een *narcistisch* getal in het 10-tallig stelsel ($_{10}$narcistisch; de exponent is het aantal cijfers van het getal).
- Simon Petrus ging op, en trok het net op het land, vol grote vissen, tot honderd drie en vijftig... (Joh. 21-11).

Maar ook (met → in de betekenis 'waaruit afgeleid'):

123 → $1^3 + 2^3 + 3^3$ = **36** → $3^3 + 6^3$ = 243 → $2^3 + 4^3 + 3^3$ = **99** → $9^3 + 9^3$ = 1458 →
$1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3$ = **702** → $7^3 + 0^3 + 2^3$ = 351 → $3^3 + 5^3 + 1^3$ = **153**

345 → $3^3 + 4^3 + 5^3$ = 216 → **225** → 141 → 66 → 432 → 99 → … → **153**

567 → 684 → 792 → 1080 → 513 → **153**

789 → 1584 → 702 → … → **153**

En bijvoorbeeld ook:

261 → 225 → … → **153**

264 → **288** → 1032 → 36 → … → **153**

De lezer kan zelf wel enkele andere getallen van drie cijfers vinden met deze eigenschap – uiteraard *geen* 'permutaties' van de hier bovenstaande getallen.

En, vanzelfsprekend(?): $(153)^3$ = 3581577 → 1476 → 624 → 288 → … → **153** .

Ook 370, 371 en 407 zijn 3-cijferige $_{10}$narcistische getallen.

Overigens in het 3-tallig stelsel zijn *alleen* de getallen 12 en 122 narcistisch (die zijn dus $_3$narcistisch; naast uiteraard de triviale getallen 0, 1, en 2 in dat stelsel).

Zie ook 1643.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Rationale rechthoekige driehoeken
OVER PRIJEN EN PRIPRIJEN

[Daaf Spijker]

Afgekort

De titel van dit artikel doet deels misschien wat vreemd aan: Rationaal, als het over driehoeken gaat? Rationaal heeft toch alleen betrekking op getallen... En de ondertitel is nóg vreemder.

De titel geeft (mogelijk iets te) kort weer wat we zullen gaan doen: kijken naar rechthoekige driehoeken waarvan de lengtes van de zijden *rationale* getallen zijn (maar we doen ook meer dan dat ...). Zo'n type driehoek noemen we daarom kortweg *rationaal.*

Zijn p, q en r bedoelde lengtes (r is de lengte van de 'schuine zijde') dan geldt uiteraard:
$p^2 + q^2 = r^2$

Het geordende rijtje getallen (p, q, r) is een *pythagoreïsche drierij*[1], in dit artikel afgekort tot ***prij***. Zijn p, q en r *natuurlijke* getallen (die zijn natuurlijk óók rationaal) waarvan de grootste gemene deler (ggd) gelijk is aan 1, dan spreken we van een ***primitieve*** *prij*, afgekort tot ***priprij***.

Bekende voorbeelden van priprijen zijn: (3, 4, 5), (5, 12, 13) en (7, 24, 25).

Overigens, de ordening van (p, q, r) heeft eigenlijk alleen betrekking op de positie van de component r in het rijtje, omdat uit de 'hoofdeigenschap' volgt dat $(p, q, r) = (q, p, r)$.

En nu we toch aan het afkorten zijn: we schrijven in hetgeen volgt ***r-driehoek*** in plaats van 'rechthoekige driehoek'.

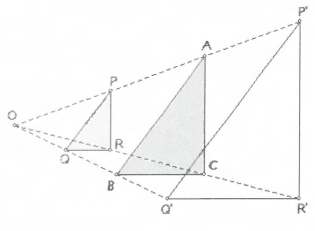
Primitieve r–driehoeken

Om direct maar een tipje van het gesluierde '*meer* dan dat...' op te lichten: onder *meer* zal worden aangetoond:

Stelling 1. *De oppervlakte van een rationale r-driehoek is* ***geen*** *kwadraat.*

Voordat we aan het bewijs van stelling 1 toekomen, bewijzen we eerst, ter vereenvoudiging van het probleem:

Stelling 2. *Bij elke rationale r-driehoek PQR (met zijden p, q, r) bestaat een* ***primitieve*** *r-driehoek ABC met* ***gehele*** *zijden die met driehoek PQR gelijkvormig is.*



figuur 1

Bewijs. Is k het kleinste gemene veelvoud (kgv) van de noemers van p, q en r, dan krijgen we, na vermenigvuldigen van (p,q,r) met k, de 'noemervrije' prij (kp, kq, kr) waarvan de componenten de lengtes zijn van de zijden van een met PQR gelijkvormige driehoek $P'Q'R'$ (zzz); zie figuur 1.

Is g = ggd(kp, kq, kr), dan delen we kp, kq, kr door deze gemeenschappelijke factor g, met als resultaat de prij:

$$(\frac{kp}{g}, \frac{kq}{g}, \frac{kr}{g}) = (a,b,c)$$

waarbij ggd(a, b, c) = 1. En daarmee is (a, b, c) een priprij.
Vermenigvuldiging van driehoek $P'Q'R'$ met de factor $\frac{1}{g}$ geeft als beeld een driehoek ABC, met *gehele* zijden a, b en c. Die driehoek is gelijkvormig met driehoek PQR (*zzz*). Omdat de 'bijbehorende' prij van driehoek ABC primitief is, noemen we driehoek ABC ook **primitief**. ◊

De vermenigvuldigingsfactor van PQR naar ABC, in bovenstaand bewijs, is gelijk aan $\frac{k}{g}$.

Zoals bekend wordt daarbij de *oppervlakte* van driehoek PQR vermenigvuldigd met $\frac{k^2}{g^2}$.

Zou de oppervlakte van de rationale r-driehoek PQR een kwadraat zijn, dan is de oppervlakte van de 'bijbehorende' primitieve r-driehoek ABC eveneens een kwadraat.

Gevolg. We kunnen bij onze beschouwingen, op basis van stelling 2, gemakshalve uitgaan van *primitieve* r-driehoeken ABC met rechthoekszijden a, b, en schuine zijde c (daarbij zijn a, b, c dus natuurlijke getallen).

Kiezen we natuurlijke getallen m en n en stellen we:

$$a = 2mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = m^2 + n^2 \qquad \ldots(*)$$

dan is:
$a^2 + b^2 = 4m^2n^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2 = c^2$
Het getal a is 'per definitie' een even getal.
Hebben m en n *dezelfde pariteit* (d.w.z. beide getallen zijn even óf beide zijn oneven), dan is dat ook het geval met m^2 en n^2, zodat b en c in dit geval even getallen zijn; met als gevolg dat a, b, c zeker een gemeenschappelijke deler 2 hebben.
Hebben m en n *verschillende* (of *tegengestelde*) pariteit, dan is dat ook het geval met m^2 en n^2, zodat nu b en c beide oneven zijn. Is dan ook ggd(m, n) = 1, dan is ggd(a, b, c) = 1 en is (a, b, c) dus een priprij.

Met natuurlijke getallen m en n die *verschillende pariteit* hebben én waarvoor ggd(m,n) = 1, kunnen we met de formules (*) de priprijen (en primitieve r-driehoeken) genereren:

m	n	a	b	c	*priprij*
2	1	4	3	5	(3, 4, 5)
3	2	12	5	13	(5, 12, 13)
4	1	8	15	17	(8, 15, 17)
4	3	24	7	25	(7, 24, 25)
5	2	20	21	29	(20, 21, 29)
5	4	40	9	41	(9, 40, 41)
...	...	...	...	...	...

Even terug in de tijd

Proclos (411-485, Griekenland) wijdt in zijn commentaar op Euclides' *Elementen* bij Propositie I-47 (daarin staat de stelling van Pythagoras) ook enkele regels aan de vorming van prijen [2]:

'Bepaalde methoden voor de ontdekking van driehoeken van dit type zijn bekend, een die wordt toegeschreven aan Plato, en een andere aan Pythagoras.
De methode van Pythagoras gaat uit van oneven getallen. Want hierbij neemt men het gegeven oneven getal als de kleinste van de zijden om de rechte hoek en, nadat hiervan het kwadraat genomen is en daarvan de eenheid is afgetrokken, neemt men de helft van de uitkomst als de grootste zijde om de rechte hoek. Hier weer de eenheid aan toevoegend, geeft de derde zijde, de hypotenusa.
Als voorbeeld, nemende 3, nemende het kwadraat, en aftrekkende 1 van 9, geeft dit de helft van 8, zijnde 4; dan, optellende weer 1, geeft dit 5; en een rechthoekige driehoek is gevonden met een zijde van 3, een andere 4 en een andere 5.
De methode van Plato begint met even getallen. Want het gegeven even getal nemende, neemt men het als zijde om de rechte hoek en, nadat het in tweeën gedeeld is en de helft in het kwadraat is gebracht, maakt men de hypotenusa door aan dit kwadraat de eenheid toe te voegen en de andere zijde om de rechte hoek door van het kwadraat de eenheid af te nemen.
Als voorbeeld, nemende 4, men kwadrateert de helft hiervan, oftewel 2, en dat maakt 4; dan, aftrekkende de eenheid, geeft dat 3 en optellende de eenheid geeft het 5.
Dus is dezelfde driehoek gevormd als die welke verkregen is door de andere methode.'

De *methode van Pythagoras* kan kort weergegeven worden met de formule, waarin m een oneven natuurlijk getal is:

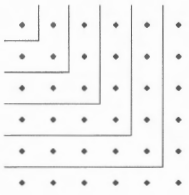
$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

en de *methode van Plato* met de formule, waarin n een natuurlijk getal is:

$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$$

In hun rekenkunde gebruikten de Pythagoreeërs vaak de *gnomon-configuratie* (Gr. gnomon = winkelhaak). Daarover schreef Philoponos (±490 - ±570, Egypte) [3]:

'Als een bewijs [...] refereren de Pythagoreeërs aan wat er gebeurt bij de optelling van getallen; want als oneven getallen opvolgend bij een kwadraat worden opgeteld, blijven ze een kwadraat [...]. Oneven getallen worden daarom gnomons genoemd, omdat ze, als ze worden opgeteld bij wat al kwadraten zijn, ze de kwadratische vorm behouden [...]. Alexander heeft op uitstekende wijze uitgelegd, dat de zin "als gnomons rondom geplaatst zijn" betekent "een schema maken met oneven getallen" [...], want het is de praktijk van de Pythagoreeërs dingen in schema's weer te geven.'



figuur 2

In het 'schema' van figuur 2 is het geciteerde geïllustreerd. We zien:

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 1^2 + 3 = 2^2$

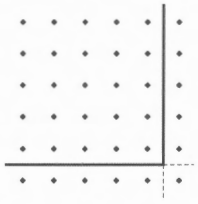
$1 + 3 + 5 = 2^2 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 3^2 + 7 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 4^2 + 9 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 5^2 + 11 = 6^2$

Het is natuurlijk ook illustratief de twee klassieke prij-methodes, waarover Proclos schreef, in gnomons te vatten.



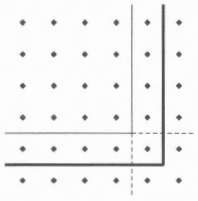
figuur 3

Pythagoras. In figuur 3 liggen op de zijde van een vierkant a punten (in dit geval is $a = 5$). De aanvullende gnomon van dat vierkant telt dan $2a + 1$ (= 11) punten. Analoog aan het schema in figuur 2 is hier:

$(2a) + 1 + a^2 = (a + 1)^2$

Stellen we nu $2a + 1 = m^2$, zodat $a = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$ en $a + 1 = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$, dan krijgen we de 'formule' van Pythagoras.

En opdat in die formule a én $a + 1$ geheel zijn, moet m een oneven getal zijn.



figuur 4

Plato. Ook in figuur 4 wordt uitgegaan van een vierkant met op een zijde daarvan a punten (ook hier is $a = 5$) *plus* een gnomon die één 'dik' is. Vergelijken we dit aangevulde vierkant met het oorspronkelijke vierkant *min* een gnomon van één dik, dan is:

$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + 4(a - 1) + 4 = (a - 1)^2 + 4a$

Als we a vervangen door n^2, krijgen we de 'formule' van Plato.

Of beiden inderdaad hun prijen-methode via de gnomon-configuratie hebben gevonden, is helaas onbekend. Wel is duidelijk dat in de Griekse oudheid het algoritmisch genereren van r-driehoeken bekend was.[4]

Terug naar stelling 1

Is driehoek ABC een primitieve r-driehoek die op basis van de formules (*) is 'gegenereerd', dan geldt voor de oppervlakte V daarvan:

$$V = \tfrac{1}{2}ab = mn(m^2 - n^2) = mn(m - n)(m + n)$$

We zien dat V ontbonden is in vier *verschillende* factoren, van welke we zeker iets kunnen zeggen.

- De eerste twee factoren, m en n, hebben geen gemeenschappelijke delers, immers ggd$(m,n) = 1$.

- Stel dat $d \mid m$ (d.w.z. d is een deler van m) én $d \mid (m - n)$, dan is d ook deelbaar op het verschil van beide, dus op $m - (m - n) = n$. Maar dat kan niet: m en n hébben geen gemeenschappelijke delers! Gevolg: ook m en $(m - n)$ hebben *geen* gemeenschappelijke deler.
- Analoog kan bewezen worden: m en $(m + n)$ hebben geen gemeenschappelijke deler, n en $(m - n)$ ook niet; en dat geldt ook voor n en $(m + n)$.
- Stel $d \mid (m - n)$ én $d \mid (m + n)$. Dan is d ook een deler van de som en ook van het verschil van die factoren van V. Dus: $d \mid (2 \cdot m)$ én $d \mid (2 \cdot n)$. Nu is $(m - n)$ een oneven getal, zodat ook d oneven moet zijn. Dit houdt in dat $d \mid m$ én $d \mid n$. Opnieuw: dat kan niet!

Conclusie: Van elk tweetal factoren in de ontbinding van V is de ggd gelijk aan 1. De ontbinding van V is daarmee uniek.

Bewijs van stelling 1 (uit het ongerijmde). Stel V is wél een kwadraat.
Dan kan het niet anders dan dat, op grond van het bovenstaande, *elk* van de vier factoren van V een kwadraat is. Ook $(m - n)(m + n)$ is dan een kwadraat – zeg u^2 (ook u is een natuurlijk getal; trouwens: $u^2 = b$). Dus:
$(m - n)(m + n) = u^2 = m^2 - n^2$
Waaruit volgt dat: $m^2 = n^2 + u^2$.
We hebben daarmee een nieuwe prij: (n, u, m), waarvan ggd$(m, n) = 1$, zodat (n, u, m) een priprij is; de daarbij behorende (tweede) r-driehoek is eveneens primitief.
Merk op dat $u^2 = m^2 - n^2$ oneven is; u is dus eveneens oneven. Het getal n in (n, u, m) is dan de *even* component van de prij. Bij deze prij zijn er weer natuurlijke getallen m_1, n_1 (die *verschillende* pariteit hebben) zodat:
$n = 2m_1n_1$, $u = m_1^2 - n_1^2$, $m = m_1^2 + n_1^2$
We hebben hierboven gezien, dat m, als factor van V, een kwadraat is; zeg $m = v^2$. Dan is:
$v^2 = m_1^2 + n_1^2$
Daarmee is er een *derde* r-driehoek, waarvan (m_1, n_1, v) de bijbehorende priprij is. Voor de oppervlakte V_3 ervan geldt:
$V_3 = \frac{1}{2}m_1n_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}n$
Het getal n is een kwadraat – n is immers een factor van V – zodat V_3 (= $\frac{1}{4}n$) eveneens een kwadraat is. Met andere woorden: deze derde driehoek is – evenals driehoek ABC – een primitieve r-driehoek waarvan de oppervlakte een kwadraat is.
En, direct is duidelijk dat $V > V_3$.

Indien we het proces zoals dat hierboven beschreven is, herhalen, ontstaat een *dalende* rij *natuurlijke* getallen:

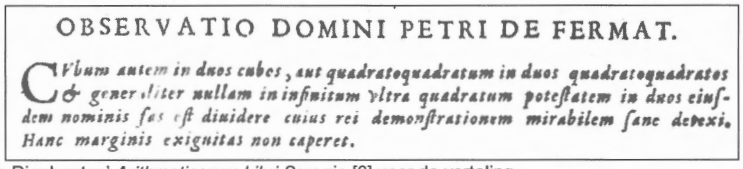
$V > V_3 > V_5 > \ldots$

Zo'n rij breekt na een eindig aantal stappen af, terwijl het beschreven proces erop duidt dat we *onafgebroken* kunnen doorgaan. Een tegenspraak!
Het uitgangspunt – V is een kwadraat – is dus *onjuist*.
De oppervlakte van een *primitieve* r-driehoek kan dus *geen* kwadraat zijn. Volgens stelling 2 is dat dan ook zo bij een *rationale* r-driehoek. Waarmee stelling 1 bewezen is. ◊

Fermat

Het verhaal is al vele malen verteld: Pierre de Fermat (1601-1655, Frankrijk) schreef in de marge van zijn exemplaar van Diophantos' *Arithmetika* [5] dat die marge te smal was voor het door hem gevonden bewijs dat er ***geen*** positieve gehele getallen x, y, z zijn met $x^n + y^n = z^n$ als $n \geq 3$.

Deze uitspraak staat bekend als de *Laatste Stelling van Fermat* (LSF).



OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cvbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

figuur 5 Uit: Diophantos' *Arithmeticorum Libri Sex*; zie [6] voor de vertaling.

Het *echte* (leesbare; hoewel...) bewijs van Fermat's 'vermoeden' heeft lang op zich laten wachten (tot 1993: Andrew Wiles, later met enige assistentie van Richard Taylor), maar de juistheid van de bewering voor $n = 4$ kunnen we met het bovenstaande gemakkelijk aan.

Een eerste stap is:

Stelling 3. *Er zijn **geen** natuurlijke getallen a, b en c waarvoor* $a^4 - b^4 = c^2$.

Bewijs (uit het ongerijmde). Is voor zekere natuurlijke getallen a, b, c (met $a > b$):
$u = a^4 - b^4$, $v = 2a^2b^2$, $w = a^4 + b^4$
dan is:
$u^2 + v^2 = (a^4 - b^4)^2 + 4a^4b^4 = (a^4 + b^4)^2 = w^2$
De driehoek met zijden u, v, w is dus een r-driehoek, met prij (u, v, w). Is V de oppervlakte van deze driehoek, dan is: $V = \frac{1}{2}uv = a^2b^2(a^4 - b^4)$.
Veronderstellen we nu dat $a^4 - b^4 = c^2$, dan is:
$V = a^2b^2c^2 = (abc)^2$
Met andere woorden: we hebben – ná onze veronderstelling – te maken met een r-driehoek waarvan de oppervlakte een kwadraat is. Volgens stelling 1 is dat echter onmogelijk. Dus een tegenspraak!
Onze veronderstelling is *onjuist*. Waarmee stelling 3 bewezen is. ◊

We kunnen nu de LSF voor $n = 4$ aantonen (Fermat deed dat ook, en ongeveer op dezelfde manier als in dit artikel is beschreven):

Stelling 4 (Fermat). *Er zijn **geen** natuurlijke getallen x, y en z waarvoor* $x^4 + y^4 = z^4$.

Bewijs (uit het ongerijmde). Door een 'handige' substitutie kunnen we stelling 4 als een bijzonder geval zien van stelling 3. In $z^4 = x^4 + y^4 = (x^2)^2 + y^4$ vervangen we namelijk z door a, x^2 door c en y door b, zodat:
$a^4 = c^2 + b^4$ of $a^4 - b^4 = c^2$
De getallen a, b, c in de laatste relatie bestaan volgens stelling 3 echter niet.
De getallen x, y, z bestaan dan ook niet. ◊

Opmerking. In de marge aan het einde van boek VI van de *Arithmetika* plaatste Fermat eveneens een kanttekening; deze is hierboven geformuleerd als stelling 1. Dit keer zette

Fermat er wél een bewijs bij. Daarover merkt hij op dat hij het heeft gevonden 'na moeizaam en lastig denkwerk'. Later heeft hij op basis hiervan 'zijn LS' voor $n = 4$ bewezen.
Fermat's kanttekening betreft een opgave die de vertaler, Bachet, heeft toegevoegd aan het door Diophantos gestelde vraagstuk 26 dat, in onze terminologie [7], en enigszins aangepast, luidt:

Vind een r-driehoek waarvan een rechthoekszijde een derde macht is, de andere rechthoekszijde ook een derde macht is min de derdemachtswortel daaruit, en de hypotenusa gelijk is aan deze laatste derde macht plus die derdemachtswortel.

Bachet's opgave erbij is: *Vind een r-driehoek waarvan de oppervlakte een gegeven getal is.*

Met stelling 4 kunnen we een klein beetje meer..., namelijk:

Stelling 5. *Er zijn* ***geen*** *natuurlijke getallen x, y, z en m waarvoor* $x^{4m} + y^{4m} = z^{4m}$.

Bewijs (uit het ongerijmde). Stel het drierijtje $(x, y, z) = (a, b, c)$ is een oplossing van de vergelijking $x^{4m} + y^{4m} = z^{4m}$ voor een bepaalde waarde van m. Dan is het drierijtje (a^m, b^m, c^m) een oplossing van de vergelijking $x^4 + y^4 = z^4$. Echter, volgens stelling 4 bestaat een dergelijke oplossing niet. Dus bestaan de getallen a, b en c niet. Stelling 5 is daarmee bewezen. ◊

Leonhard Euler (1507-1783, Zwitserland) bewees in 1753 de LSF voor $n = 3$ (hij gebruikte daarbij complexe getallen). Dus rest er vanaf dat moment 'slechts' het bewijs voor de waarden van $n = p$ waarbij p een priemgetal ≥ 5 is.
Veelvouden van p hoeven namelijk niet bekeken te worden; want als $n = m \cdot p$, moet onderzocht worden of de vergelijking $(x^m)^p + (y^m)^p = (z^m)^p$ een oplossing heeft. Maar dan volstaat – conform het bewijs van stelling 5 – het onderzoek van de vergelijking $x^p + y^p = z^p$.
En dát deden Wiles en Taylor aan het einde van de vorige eeuw, met een bewijs van de LSF (het telt meer dan 120 pagina's, verdeeld over twee artikelen, in het tijdschrift *Annals of Mathematics*) dat deels gebaseerd is op eerder door andere wiskundigen [8] gevonden resultaten.

Naschrift

Bijzondere breuken

Bekijk de rij rationale getallen:

$1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{3}{7}$, $4\frac{4}{9}$, $5\frac{5}{11}$, $6\frac{6}{13}$, ... of: $\frac{4}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{40}{9}$, $\frac{60}{11}$, $\frac{84}{13}$, ...

Wat valt op? Het gehele deel van zo'n breuk is een natuurlijk getal (en in de rij volgen ze elkaar op), en de noemers van de breuken zijn opvolgende oneven getallen groter dan 1. Maar er is meer...
Vergelijk de tellers en noemers eens met de getallen a en b in de tabel die staat aan het begin van dit artikel! Inderdaad, de noemer en de tellers van een breuk zijn de lengtes van de rechthoekszijden van een primitieve r-driehoek. *Voorbeeld*: $13^2 + 84^2 = 85^2$.

Een bewijs. We beschouwen het getal $n+\frac{n}{2n+1}=\frac{2n^2+2n}{2n+1}$, dat (voor $n \geq 1$) de algemene gedaante is van een term uit de beschouwde rij. Nu moeten we aantonen dat het getal h met:

$h=(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2$

een volledig kwadraat is. Uitwerken dus:

$h=(4n^4+8n^3+4n^2)+(4n^2+4n+1)$

$=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1$

Het is de lezer bij beschouwing van de rij wellicht opgevallen dat de lengte van de hypotenusa van de r-driehoek steeds 1 groter is dan de grootste rechthoekszijde. Gemakkelijk is nu in te zien dat: $h=((2n^2+2n)+1)^2$.

Getallen in de rij van Fibonacci

De termen van de rij:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

worden wel aangegeven met F_1, F_2, F_3, ...

We nemen nu 4 *opvolgende* termen van deze rij, bijvoorbeeld: $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$.

Er geldt dan:

- $F_4 \cdot F_7 = 3 \cdot 13 = \mathbf{39}$; het product van het eerste en het vierde getal;
- $2 \cdot F_5 \cdot F_6 = \mathbf{80}$; het dubbele product van de beide middelste getallen van het viertal;
- index(F_5) + index(F_6) = 5 + 6 = 11; de som van de indexen van de middelste termen;
- $F_{11} = \mathbf{89}$.

Kijk aan, we vinden op deze manier de getallen 39, 80, 89. Bijzonder? Ja, want:

$39^2 + 80^2 = 89^2$

Omdat 39 en 80 verschillende pariteit hebben, is (39, 80, 89) dus een priprij.

Ik laat het aan de lezer deze eigenschap aan te tonen voor *elk* viertal opvolgende Fibonacci-getallen.

Nog een eigenschap

We gaan uit van de priprij (a, b, c).

Stel om te beginnen dat a en b *beide even* zijn, bijvoorbeeld $a = 2x$ en $b = 2y$.

Dan is: $a^2+b^2 = 4x^2+4y^2 = 4(x^2+y^2)$. Dus: $c^2 = 4(x^2+y^2)$.

Dit houdt in dat $4 \mid c^2$ ('|' staat voor 'is deelbaar op'), en dan dus ook: $2 \mid c$.

Dit leidt tot een tegenspraak, want dan is de prij *niet* primitief.

Stel vervolgens dat a en b *beide oneven* zijn, bijvoorbeeld $a = 2x + 1$ en $b = 2y + 1$.

Dan is:

$a^2+b^2=(2x+1)^2+(2y+1)^2=4(x^2+y^2+x+y)+2$

$=2(2(x^2+y^2+x+y)+1)$

Dus, voor zekere positieve gehele k is: $c^2 = 2\cdot(2k+1)$.

Dit houdt in dat c^2 geschreven kan worden als 2 maal een *oneven* getal.

Maar het houdt ook in dat:

$2 \mid c^2$, en dan is dus ook $2 \mid c$, zodat $c = 2z$. En hiermee is: $c^2 = 4z^2 = 2 \cdot 2q^2$.
Maar hier staat dat c^2 gelijk is aan 2 maal een *even* getal. En opnieuw: tegenspraak!
We hebben nu (in twee stappen) bewezen:

Stelling n1. *In een priprij (a, b, c) hebben a en b verschillende pariteit.*

Stelling n2. *In een priprij (a, b, c) is c gelijk aan een (4-voud + 1).*

Bewijs. Stel $a = 2x + 1$ en $b = 2y$, immers de prij is een priprij (zie stelling n1; verwisseling van a en b geeft dezelfde uitkomst). Dan is:

$$a^2 + b^2 = (2x+1)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2 + x) + 1$$

Dus is voor zekere positieve gehele k:

$$c^2 = 4k + 1$$

En dit houdt in dat $(4k + 1) \mid c$. Met andere woorden:
c is gelijk aan een (4-voud + 1). ◊

Stelling n3. *Van een prij (a, b, c) zijn niet alle elementen oneven.*

Bewijs (uit het ongerijmde). Stel dat dit wél het geval is; dus $a = 2x + 1$, $b = 2y + 1$, $c = 2z + 1$. Dan is:

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = (2z+1)^2$$
$$(4x^2 + 4x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) = 4z^2 + 4z + 1$$

Dus:

$$4(x^2 + y^2 - z^2 + x + y - z) = -1$$

Omdat x, y, z gehele getallen zijn, kunnen we schrijven, voor zekere gehele k:
$4k = -1$
Er bestaat echter geen (gehele) k die aan deze vergelijking voldoet. Waaruit het gestelde volgt. ◊

Opmerking. Van een prij kunnen alle elementen wél *even* zijn. Immers, gaan we uit van (3, 4, 5) en vermenigvuldigen we met 4, dan is $4 \cdot (3, 4, 5) = (12, 16, 20)$, waarbij $12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$. Dus is ook (12, 16, 20) een prij. ◊

Identiteit van Brahmagupta-Fibonacci
Een niet zo bekende eigenschap van prijen is de volgende.

Stelling n4. Zijn (a, b, c) en (p, q, r) prijen, dan is $(|ap - bq|, aq + bp, cr)$ eveneens een prij.

Bewijs. We moeten dus aantonen dat uit $a^2 + b^2 = c^2$ en $p^2 + q^2 = r^2$ volgt dat:

$$(ap - bq)^2 + (aq + bp)^2 = (cr)^2$$

Nu is:

$$(ap - bq)^2 + (aq + bp)^2 = a^2p^2 + b^2q^2 + a^2q^2 + b^2p^2 - 2abpq + 2abpq$$
$$= (a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = c^2r^2 = (cr)^2$$

En daaruit volgt het gestelde. ◊

Opmerking. De relatie:

$(a^2+b^2)(p^2+q^2)=(ap-bq)^2+(aq+bp)^2$

wordt wel de *identiteit van Brahmagupta-Fibonacci* (BF-identiteit) genoemd. In woorden staat er: het product van de sommen van telkens twee kwadraten is gelijk aan de som van twee kwadraten.

Deze identiteit, die ook voorkomt in Diophantos' *Arithmetika* (III, 19), werd herontdekt door Brahmagupta (598–668), een Indiaas wiskundige en astronoom, en komt ook voor in Fibonacci's *Liber Quadratorum* (1225). ◊

Er is een relatie met de *complexe* getallen. Voor reële getallen a, b, p, q hebben we voor vermenigvuldiging van de absolute waardes van twee daarmee vastgelegde complexe getallen:

$|a+bi|\cdot|p+qi|=|(a+bi)\cdot(p+qi)|$

Uit:

$|a+bi|\cdot|p+qi|=|(ap-bq)+(aq+bp)i|$

volgt dan door kwadrateren:

$|a+bi|^2\cdot|p+qi|^2=|(ap-bq)+(aq+bp)i|^2$

En dan is per definitie:

$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ap-bq)^2+(aq+bp)^2$

De BF-identiteit stelt ons in staat *verwante* prijen te bepalen: twee prijen (a, b, c) en (p, q, r) zijn *verwant* als $c = r$.

Voorbeeld. Is $c = 65 = 5 \cdot 13$, dan is c een mogelijk (derde) element van een prij; immers, $65 = 4 \cdot 16 + 1$ (zie stelling n2).

Nu is:

$5=1^2+2^2=(1+2i)(1-2i)$

$13=2^2+3^2=(2+3i)(2-3i)$

Voorts is:

$(1+2i)(2+3i)=-4+7i$

$(1+2i)(2-3i)=8+i$

waaruit we vinden dat: $65=4^2+7^2=1^2+8^2$.

Uit de BF-identiteit volgt dan:

$(4^2+7^2)(4^2+7^2)=(4\cdot4-7\cdot7)^2+(4\cdot7+7\cdot4)^2=33^2+56^2$

en:

$(1^2+8^2)(1^2+8^2)=(1\cdot1-8\cdot8)^2+(1\cdot8+8\cdot1)^2=63^2+16^2$

De *verwante* prijen zijn dus: (33, 56, **65**) en (16, 63, **65**).

Bewezen kan worden dat, als het aantal verschillende priemdelers van c gelijk is aan k, er dan 2^{k-1} verwante prijen zijn.

We kunnen ook op basis van de BF-identiteit een 'vermenigvuldiging' ⊗ definiëren tussen twee prijen:

$(a, b, c) \otimes (p, q, r) = (|ap - bq|, aq + bp, cr)$

Voorbeeld.
$(3, 4, 5) \otimes (5, 12, 13) = (33, 56, 65)$
$(4, 3, 5) \otimes (5, 12, 13) = (16, 63, 65)$

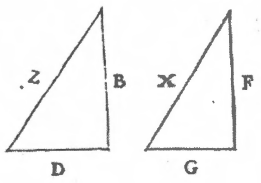
Franciscus Vieta

In het boek *Ad Logisticem Speciosam Notae Priores* (Inleidende notities bij de *logistica speciosa*) van François Viète, ook cq. beter bekend onder de naam Franciscus Vieta (1540-1603, Frankrijk), dat voor het eerst (postuum) is uitgegeven in 1624, staat als Propositie 46:

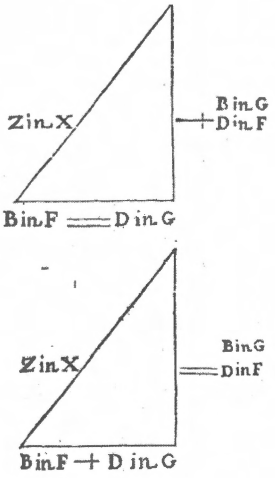
A Duobus triangulis rectangulis tertium triangulum rectangulum effingere.

figuur 6 *Bij twee rechthoekige driehoeken een derde rechthoekige driehoek te bepalen.*

Beide hierna volgende illustraties (figuur 7a en figuur 7b) zijn overgenomen uit Vieta's *Opera Omnia* dat door Frans van Schooten is uitgegeven in 1646. De naast deze figuren geplaatste tekst is een bewerkte en verkorte vertaling van de Latijnse tekst. In de vertaalde tekst worden kleine letters in plaats van hoofdletters gebruikt.



figuur 7a



figuur 7b

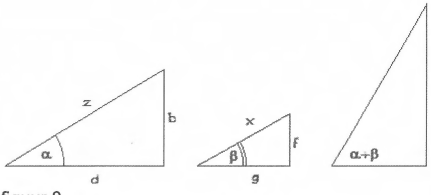
De beide driehoeken zijn in ligging en grootte gegeven.
We beschouwen een derde rechthoekige driehoek waarvan de hypotenusa gelijk is aan zx.
Dan is, door substitutie: $z^2x^2 = (b^2 + d^2)(f^2 + g^2)$.
Dit product bestaat uit vier deelproducten, $b^2f^2 + d^2g^2$ en $b^2g^2 + d^2f^2$.

Wordt tweemaal het gedurige product van b, d, f en g bij de eerste twee opgeteld en van de laatste twee afgetrokken, of, omgekeerd, van de eerste afgetrokken en bij de laatste opgeteld, dan is:
$z^2x^2 = (bg + df)^2 + (bf - dg)^2$, of:
$z^2x^2 = (bg - df)^2 + (bf + dg)^2$
Dus met beide methoden is bij twee rechthoekige driehoeken een derde rechthoekige driehoek te construeren. De hypotenusa van de derde is dan gelijk aan het product van de hypotenusa van de eerste en die van de tweede.
In het eerste geval is de hoogte van de derde driehoek gelijk aan de som van het product van de hoogte van de eerste en de basis van de tweede, en het product van basis van de eerste en de hoogte van de tweede, en is de basis het verschil van het product van de hoogtes en het product van de bases.
En in het tweede geval is dat omgekeerd: de hoogte is het verschil van de producten, en de basis is de som van de producten.

Opmerkingen.

1. *Logistica speciosa* (= letterrekenen; *speciosa* komt van *species* = soort), zoals Vieta zijn 'nieuwe algebra' noemt, staat tegenover het 'klassieke' *logistica numerosa* (= cijferrekenen).
2. 'X in Y' (zie de figuren) heeft in het Latijn bij Vieta de betekenis X *maal* Y.
3. Vieta gebruikt het (verlengde) = - teken voor de aftrekking van twee grootheden waarvan niet bekend is welke van beide het grootste is. Hij kent *geen* gelijkteken.
4. Om dit enigszins te illustreren is hierboven het teken '~' in plaats van '–' gebruikt. De driehoeken die volgens deze methodes worden bepaald, hebben bij Vieta een aparte naam. Hij spreekt opvolgend van een *synaeretische* driehoek (Gr. συναιρεω (sun-ai-reo) = samennemen) en een *diaeretische* driehoek (Gr. διαιρεω (di-ai-reo) = scheiden).

In sommige moderne commentaren/vertalingen van het werk van Vieta wordt deze terminologie – *vreemd genoeg* – in verband gebracht met de *taalkunde*.[9] In de taalkunde is *syneresis* de contractie van twee opeenvolgende klinkers in een woord, en is *diëresis* het tussenvoegen van een klinker in een woord.
Echter, is α de hoek tussen de basis en de hypotenusa in de eerste driehoek en β die in de tweede, dan is:



figuur 8

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{b}{z}.\frac{g}{x}+\frac{d}{z}.\frac{f}{x}$$
$$=\frac{bg+df}{zx}$$

Waaruit duidelijk is dat de hoeken van beide driehoeken in het eerste geval worden 'samengevoegd' (opgeteld).
In het tweede geval leidt dit tot:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{b}{z}.\frac{g}{x}-\frac{d}{z}.\frac{f}{x}$$
$$=\frac{bg-df}{zx}$$

We zien hieruit dat de 'constructie' van Vieta overeenkomt met die van *verwante* prijen. Ook Vieta zal wel kennis hebben gehad van de BF-identiteit; hij kende Diophantos' *Arithmetika*.

Kortom

Waartoe prijen (*getallen*) en r-driehoeken (*meetkunde*) al niet kunnen leiden …

Noten

[1] In de Nederlandse wiskundige literatuur leest men meestal *pythagoreïsch getaltripel* of ook wel *pythagoreïsch tripel*.

[2] Naar een vertaling uit het Grieks van E.J. Dijksterhuis in *De Elementen van Euclides*. Groningen: P. Noordhoff, 1929); deel I, pag. 214.
Ook propositie 28 in Boek X van de *Elementen* gaat over prijen.

[3] Vertaald uit Th.L. Heath (1908): *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications (reprint 1956); vol. I, pag. 359.

[4] Ook in het oude Babylonië waren prijen bekend, zoals bijvoorbeeld blijkt uit het kleitablet Plimpton 322, dat gedateerd wordt tussen 1800 en 1600 v. Chr.
Zie bijvoorbeeld:
- « *http://nl.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322* »
of:
- J. van de Craats (2005): *Babylonisch rekenen*. In: *Euclides* 80(4), pp. 234-237.
Dit artikel is digitaal beschikbaar via « *http://staff.science.uva.nl/~craats/babylon.pdf* ».

[5] Zes van de oorspronkelijk dertien delen van dit werk van Diophantos van Alexandrië (±210 - ±290, Egypte) zijn bewaard gebleven. Die zes delen (boeken) zijn in 1621 uit het Grieks in het Latijn vertaald door Claude Bachet de Méziriac (1581-1638, Frankrijk) met als titel *Arithmeticorum Libri Sex*. Bachet voegde er een uitvoerige toelichting en aantal vraagstukken aan toe.
Fermat had de beschikking over zo'n vertaald exemplaar (met naast elkaar de Griekse en Latijnse tekst – geen wonder die smalle marge).
In 1670 is het boek door Clément Samuel de Fermat, de oudste zoon, opnieuw uitgegeven met daarin opgenomen alle kanttekeningen van zijn vader – dus ook de in figuur 5 staande *Observatio domini Petri de Fermat*; deze staat in boek II bij vraagstuk 8, dat simpelweg luidt: *Verdeel een gegeven kwadraat in twee andere kwadraten*; zie ook [7].

[6] *Vertaling* – Het is onmogelijk een derde macht te verdelen in twee derde machten, of een vierde macht in twee vierde machten, en, algemeen, elke macht hoger dan de tweede in twee gelijksoortige machten. Hiervan heb ik een zeer bijzonder bewijs gevonden. Deze marge is te smal om het te bevatten.

[7] Oplossingen van vraagstukken in de *Arithmetika* kunnen, gezien de tijd waarin de boeken geschreven zijn, alleen *positieve rationale* getallen zijn. De oude Grieken kenden immers geen negatieve getallen, terwijl, volgens hen, met irrationale getallen niet kon worden gerekend.

[8] We noemen hier: Goro Shimura, Yutaka Taniyama, Gerhard Frey, Jean-Pierre Serre en Kenneth Ribet.

[9] Zie bijvoorbeeld:
T.R. Witmer (2006): *The Analytic Art*. Mineola (USA): Dover Publications; p. 69. Het boek bevat negen in het Engels vertaalde wiskundige werken van Vieta.
Zie voor meer informatie over Vieta:
- *www.math4all.nl/Wiskundegeschiedenis/Wiskundigen/Viete.html*
of:
- *http://nl.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te*

Literatuur

- F. Beukers (1999): *Getaltheorie voor Beginners*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- G. Cornelissen (2008): *Diophantische vergelijkingen / mogelijkheden en onmogelijkheden* (wiskunde-D keuzemodule). Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- Th.L. Heath (1921): *A History of Greek Mathematics*. Mineola: Dover Publications; reprint 1981. Over Diophantos en diens *Arithmetika* hierin, zie vol. II, pp. 440-517.
- J. Hunter (1964): *Number Theory*. Edinburgh: Oliver and Boyd.
- P. Lanser (2000): *De Laatste Stelling van Fermat*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (Zebra-reeks nr. 7).
- S. Singh (1997): *Fermat's Last Theorem*. London: Fourth Estate.
- J. Top (ed.): *De Laatste Stelling van Fermat*. Utrecht: Universiteit Utrecht i.s.m. het Wiskundig Genootschap; 1993.

- A. Wiles (1995): *Modular elliptic functions and Fermat's Last Theorem*. In: *Annals of Mathematics* 141(3); pp. 443-551.
- A. Wiles, R. Taylor (1995): *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*. In: *Annals of Mathematics* 141(3); pp. 553-572.

Leerlingentekst

Prijen en priprijen – leerlingentekst te gebruiken bij dit artikel
17 pagina's, PDF-bestand van ca. 510 Kb
Zie: *www.nvvw.nl/special12/(wb)prijen.pdf*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Ongewoon

Definitie – Een natuurlijk getal n (= 0, 1, 2, 3, ...) is (heet) **gewoon** als het een algebraïsche eigenschap heeft die *elk* ander natuurlijk getal óók heeft.

Stelling. *Alle natuurlijke getallen zijn gewoon.*

Is deze stelling juist of onjuist?

Bewijs. **Ja**, de stelling is juist. Immers, voor *elk* natuurlijk getal a geldt $a + 0 = a$. Dus voor $n \neq m$ geldt:
$n + 0 = n$ en $m + 0 = m$
Trouwens, ook geldt voor *iedere* natuurlijke a dat $a \cdot 1 = a$. Er zijn dus zelfs twee algebraïsche eigenschappen op basis waarvan de stelling als juist kan worden verklaard.
En de lezer kan vast wel een derde eigenschap noemen.

Nee, de stelling is *niet* juist. En dan is slechts één tegenvoorbeeld voldoende. En zo'n tegenvoorbeeld ís er. Immers, *alleen* voor het natuurlijke getal $a = 1$ geldt $a^a = a$.
En de lezer kan vast wel een tweede eigenschap noemen op basis waarvan de stelling als *onjuist* moet worden verklaard. ◊

Tja, kunnen we dan eigenlijk wel spreken van 'gewone' getallen?

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Getallen als som van kwadraten
DE GEHELEN VAN GAUSS

[Bram van Asch]

Inleiding

In het blad *Pythagoras* staan in elke aflevering enkele 'Pythagoras Olympiade opgaven'. Dit zijn opgaven die wat lastiger en ongewoner zijn dan de standaard schoolboekopgaven, maar die wel met de wiskundestof van het vo moeten kunnen worden opgelost. In het nummer van januari 2006 trof ik de volgende opgave aan.

Een geheel getal heet ***gaaf*** *als het geschreven kan worden als de som van twee kwadraten van gehele getallen (waarbij die getallen eventueel ook nul mogen zijn). Bewijs:*

1. *Als n gaaf is, dan is ook $2n$ gaaf.*
2. *Als n gaaf is, dan is $3n$ niet gaaf.*

Deze opgave gebruik ik regelmatig in een cursus vakdidactiek die gegeven wordt als onderdeel van de master-opleiding *Science Education en Communication* aan de TU/e. Doel is dan niet zozeer de opgave zelf, maar meer wat je met dergelijke, puzzelachtige, opgaven kunt doen. Ik laat echter wel eerst de opgave maken, en wat mij dan opvalt is dat met name het tweede deel toch wel voor grote problemen zorgt. Kennis van elementaire getaltheoretische zaken is zeker onder mijn studenten niet meer algemeen aanwezig. Terwijl dit toch een bron kan zijn voor tal van ideeën om in het onderwijs mee aan de slag te gaan: opgaven waarmee 'bewijzen' geoefend kan worden, handig rekenen met gehele getallen, onderzoekachtige opdrachten. Speciaal met het oog daarop geven we in de genoemde master-opleiding ook het vak getaltheorie.
In dit artikel wil ik aanknopen bij de opgave uit *Pythagoras* en aandacht besteden aan gehele getallen die te schrijven zijn als som van kwadraten. Dit is ook één van de onderwerpen uit de cursus getaltheorie.

Som van twee kwadraten

In deze paragraaf bekijken we gehele getallen groter dan of gelijk aan 0; en dan in het bijzonder getallen n die te schrijven zijn als $n = a^2 + b^2$. Aan het eind van deze paragraaf – in stelling 4 – zal ik precies aangeven wanneer een getal n deze eigenschap heeft. Als voorbereiding daarop leiden we eerst een aantal eigenschappen af. In sommige gevallen zullen we een bewijs geven, in andere gevallen is dat wat erg bewerkelijk en zal ik naar de literatuur verwijzen.

Stelling 1. *Als n en m beide te schrijven zijn als som van twee kwadraten, dan geldt dat ook voor $n \cdot m$.*

Bewijs. Stel dat $n = a^2 + b^2$ en $m = c^2 + d^2$. Dan is $n \cdot m = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$. ◊

In dit bewijs komt de schrijfwijze voor $n \cdot m$ min of meer uit de lucht vallen. In de volgende paragraaf zal er verband gelegd worden tussen sommen van kwadraten en de *norm* van bepaalde complexe getallen, en volgt deze uitdrukking op een heel natuurlijke manier.
Stelling 1 lost dus het eerste onderdeel van de in de paragraaf Inleiding genoemde opgave uit *Pythagoras* op.
Van een grote categorie getallen kunnen we onmiddellijk aangeven dat ze beslist *niet* als som van twee kwadraten zijn te schrijven.

Stelling 2. *Als* $n \equiv 3 \bmod 4$, *dan is n* ***niet*** *te schrijven als som van twee kwadraten.*

Bewijs. Omdat een getal even of oneven is, is een kwadraat een 4-voud of een 4-voud + 1. Anders gezegd: $a^2, b^2 \equiv 0 \bmod 4$ óf $a^2, b^2 \equiv 1 \bmod 4$. Daaruit volgt dat $a^2 + b^2 \equiv 0, 1, 2 \bmod 4$, dus zeker *niet* $\equiv 3 \bmod 4$. ◊

Met het oog op stelling 1 lijkt het zinvol te onderzoeken welke priemgetallen te schrijven zijn als som van twee kwadraten. Voor $p = 2$ is het duidelijk, en voor $p \equiv 3 \bmod 4$ ook, op grond van stelling 2. Blijven over de priemgetallen $p \equiv 1 \bmod 4$. Er geldt nu de volgende stelling.

Stelling 3. *Als p een oneven priemgetal is, dan is p te schrijven als som van twee kwadraten dan en slechts dan als* $p \equiv 1 \bmod 4$.

Wat van deze stelling nog bewezen moet worden is het feit dat een priemgetal $p \equiv 1 \bmod 4$ ook daadwerkelijk als som van twee kwadraten is te schrijven. En hoewel het bewijs niet heel erg moeilijk is, vraagt het toch nogal wat subtiel redeneren. Daarom verwijzen we voor een bewijs naar [1] of [2].
We zijn nu zo ver dat we precies kunnen aangeven wanneer een getal wel of niet te schrijven is als som van twee kwadraten. We gaan daarbij uit van de ontbinding van het getal in priemfactoren.

Stelling 4. *Als* $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_t^{k_t}$ *(t factoren), dan is n te schrijven als som van twee kwadraten dan en slechts dan als voor elke* p_i *met* $p_i \equiv 3 \bmod 4$ $(1 \leq i \leq t)$ *geldt dat* k_i *even is.*

Bewijs. Het bewijs van het 'als'-gedeelte van deze stelling is duidelijk: als voor elke p_i met $p_i \equiv 3 \bmod 4$ geldt dat k_i even is, dan volgt uit stelling 1 onmiddellijk dat n te schrijven is als som van twee kwadraten.
Het tweede deel van de stelling bewijzen we uit het ongerijmde.
Daartoe schrijven we $n = a^2 + b^2 = mN^2$, waarbij m kwadraatvrij is, en we veronderstellen nu dat m een priemfactor $p \equiv 3 \bmod 4$ bevat. We zullen laten zien dat dit tot een tegenspraak leidt. Daarbij gebruiken we de zogenoemde kleine stelling van Fermat (zie bijvoorbeeld weer [1] of [2]).
Noem $d = \text{ggd}(a, b)$, dan geldt dus $\frac{a}{d} = r$ en $\frac{b}{d} = s$ met $\text{ggd}(r, s) = 1$.
We laten nu eerst zien dat d^2 een deler is van N^2.

Stel dat q een priemdeler is van d, en dat m de hoogste macht van q is die d deelt. Omdat d een deler is van a en b, geldt dat q^m ook een deler is van zowel a als b. Dan is q^{2m} een deler van $a^2 + b^2 = mN^2$, dus q^{2m-1} is een deler van N^2. Maar dan is ook q^{2m} een deler van N^2.
Hieruit volgt dat d^2 een deler is van N^2.
En dan volgt uit $a^2 + b^2 = d^2(r^2 + s^2) = mN^2$, dat p een deler is van $r^2 + s^2$.
De getallen r en s zijn beide niet door p deelbaar. Uit ggd(r, p) = 1 volgt dat er getallen u en v zijn met $ur + vp = 1$; ofwel, $ur \equiv 1 \bmod p$.
Uit $r^2 + s^2 \equiv 0 \bmod p$ volgt dan $(ur)^2 + (us)^2 \equiv 0 \bmod p$, dus $(us)^2 \equiv -1 \bmod p$. En dan is dus ook:

$$((us)^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$$

Maar, volgens de kleine stelling van Fermat geldt dat:

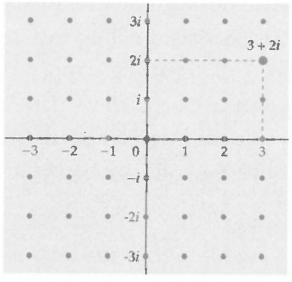
$$((us)^2)^{\frac{p-1}{2}} = (us)^{p-1} \equiv 1 \bmod p \text{, want ggd}(us, p) = 1.$$

Er zou dan dus moeten gelden: $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$. En dat is onmogelijk als $p \equiv 3 \bmod 4$.
◊

Het tweede deel van de opgave uit de paragraaf Inleiding is een bijzonder geval van deze stelling. Als namelijk het getal n gaaf is, dan is de exponent van de priemfactor 3 in de ontbinding van n even. Maar dan is deze exponent in het getal $3n$ oneven, dus dan is $3n$ niet gaaf.

De gehelen van Gauss

In deze paragraaf bekijken we een systeem van speciale complexe getallen, de zogenoemde *gehelen van Gauss*. Daarbij zullen we onder meer resultaten uit de vorige paragraaf kunnen gebruiken, maar ook kijken we naar overeenkomsten tussen het systeem van alle gehele getallen en deze gehelen van Gauss.



figuur 1 De gehelen van Gauss vormen de 'roosterpunten' in het complexe vlak
(Bron: [3], pag. 70)

In de verzameling van de gehele getallen zijn belangrijke begrippen: deling met rest, grootste gemene deler (te bepalen via herhaald delen met rest, volgens het euclidisch algoritme), priemgetal, ontbinding in priemfactoren. De gangbare definitie van priemgetal is: een geheel getal > 1, dat alleen 1 en zichzelf als positieve delers heeft.
Dan is 7 dus een priemgetal, en -7 niet, hoewel 7 en -7 qua deelbaarheid volkomen vergelijkbaar zijn. Laten we ook negatieve priemgetallen toe, dan is er geen sprake meer van eenduidige ontbinding. Bijvoorbeeld: $6 = 2 \cdot 3 = -2 \cdot -3$. Dit verschijnsel doet zich nog

nadrukkelijker voor bij de gehelen van Gauss, zoals we verderop zullen zien. We beginnen met de definitie:
$\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \text{ in } \mathbf{Z}\}$
en dit is een ring. Dat betekent dat de verzameling gesloten is voor optellen en vermenigvuldigen, en verder ook aan alle ringaxioma's voldoet. Deze getallen heten de *gehelen van Gauss* (in hetgeen volgt ook wel kortweg *gehelen* genoemd).
Van belang is de *norm* N van zo'n getal, gedefinieerd als $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

Stelling 5. *Voor* α, β *in* $\mathbf{Z}[i]$ *geldt* $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

Bewijs. Eenvoudigweg uitschrijven; in feite een herhaling van het bewijs van stelling 1. ◊

Er zijn precies *vier* van deze gehelen van Gauss die een multiplicatieve inverse hebben. Dat zijn namelijk de getallen waarvan de norm gelijk is aan 1: ± 1 en $\pm i$. Deze noemen we *eenheden*.
We noemen twee gehelen van Gauss α en β *geassocieerd* als $\alpha = \mu\beta$, waarbij μ een eenheid is (vergelijk bijvoorbeeld 7 en -7 in $\mathbf{Z}$).
Een eerste treffende overeenkomst tussen $\mathbf{Z}[i]$ en $\mathbf{Z}$ is dat er in $\mathbf{Z}[i]$ óók sprake kan zijn van *deling met rest*. In de volgende stelling wordt dit iets preciezer geformuleerd.

Stelling 6. *Voor elke* α, β *in* $\mathbf{Z}[i]$, met $\beta \neq 0$, *zijn er* ω, ρ *in* $\mathbf{Z}[i]$ *zó dat* $\alpha = \omega\beta + \rho$ *en* $N(\rho) < N(\beta)$.

Bewijs. Schrijf $\frac{\alpha}{\beta} = p + qi$, waarbij p en q rationale getallen zijn. Kies dan gehele getallen x en y zó dat: $|p - x| \leq \frac{1}{2}$ en $|q - y| \leq \frac{1}{2}$.
Noem vervolgens $\omega = x + yi$ en $\rho = \alpha - \omega\beta$. Dan volgt:
$N(\frac{\alpha}{\beta} - \omega) = (p - x)^2 + (q - y)^2 \leq \frac{1}{2}$
Dus: $N(\rho) = N(\alpha - \omega\beta) \leq \frac{1}{2} N(\beta) < N(\beta)$. ◊

Als we nu beginnen met twee gehelen α en β (dus in $\mathbf{Z}[i]$) die niet beide 0 zijn, en we passen herhaald deling met rest toe (het euclidisch algoritme), dan is dat een proces dat na een eindig aantal stappen stopt.
En daarmee bepalen we dan, analoog aan de situatie in $\mathbf{Z}$, een ggd(α, β).
We vatten dit samen in de volgende stelling. Het bewijs ervan is volkomen analoog aan het overeenkomstige bewijs in $\mathbf{Z}$.

Stelling 7
1. *Voor elk tweetal gehelen* α *en* β, *niet beide* 0, *is er een* ggd$(\alpha, \beta) = \delta$. *Deze ggd is te bepalen met het euclidisch algoritme.*
2. *Als* $\delta = \text{ggd}(\alpha, \beta)$ *dan zijn er gehelen* σ *en* τ *zó dat* $\sigma\alpha + \tau\beta = \delta$.
3. *In het bijzonder: als* α *en* β *relatief priem zijn, dan zijn er* σ *en* τ *zó dat* $\sigma\alpha + \tau\beta = 1$.

Een volgend begrip dat we introduceren in $\mathbf{Z}[i]$ is dat van priemgetal. Een getal π in $\mathbf{Z}[i]$ heet *priemgetal* als π alleen maar deelbaar is door eenheden en door met π geassocieerde getallen.

We noteren nu eerst de volgende stelling, die ook analoog is aan een overeenkomstige stelling in Z.

Stelling 8. *Als* π *in* $\mathbb{Z}[i]$ *een priemgetal is, en* π *is deler van het product* $\alpha\beta$, *dan is* π *deler van* α *of van* β.

Bewijs. Stel dat π geen deler is van α, dan is π relatief priem met α. Dus dan zijn er σ en τ zó dat $\sigma\alpha + \tau\pi = 1$ (zie stelling 7.3). Vermenigvuldigen met β levert $\sigma\alpha\beta + \tau\pi\beta = \beta$, waaruit volgt dat π een deler van β is. ◊

Uit de multiplicatieve eigenschap van de norm volgt onmiddellijk de volgende stelling.

Stelling 9. *Als voor een getal* π *in* $\mathbb{Z}[i]$ *de norm* $N(\pi)$ *een priemgetal is in* $\mathbb{Z}$, *dan is* π *een priemgetal in* $\mathbb{Z}[i]$.

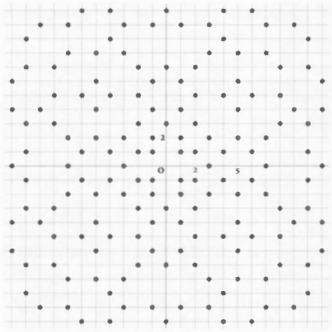
Op grond hiervan kunnen we gemakkelijk een groot aantal priemgetallen in $\mathbb{Z}[i]$ aangeven.
Stel dat we beginnen met een priemgetal p in Z, en dat p een 4-voud + 1 is. Volgens stelling 3 is p dan te schrijven als som van twee kwadraten: $p = a^2 + b^2$.
In $\mathbb{Z}[i]$ kunnen we dit schrijven als $p = (a + bi)(a - bi)$. En volgens stelling 9 zijn de getallen $a + bi$ en $a - bi$ dan priemgetallen in $\mathbb{Z}[i]$.
Zo zijn bijvoorbeeld $1+i$, $1-i$, $1+2i$, $1-2i$, … priemgetallen in $\mathbb{Z}[i]$.
We zullen nu *alle* priemgetallen in $\mathbb{Z}[i]$ gaan bepalen.

Stelling 10. *Als* π *een priemgetal is in* $\mathbb{Z}[i]$, *dan is er een priemgetal* p *in* Z *zó dat* π *een deler is van* p *in* $\mathbb{Z}[i]$.

Bewijs. Het getal $N(\pi)$ is een geheel getal, en dus in Z te ontbinden in priemfactoren:
$N(\pi) = p_1 p_2 \ldots p_t$
Dit product kan ook geschreven worden als $\pi \cdot \overline{\pi} = p_1 p_2 \ldots p_t$ ($\overline{\pi}$ is de complex geconjugeerde van π). Met behulp van stelling 8 volgt dan dat π deler is van een p_i. ◊

We kunnen dus alle priemgetallen in $\mathbb{Z}[i]$ vinden door te kijken hoe priemgetallen p uit Z ontbonden kunnen worden in $\mathbb{Z}[i]$.
Voor $p = 2$ en $p \equiv 1 \bmod 4$ is dat duidelijk: $p = (a + bi)(a - bi)$, waarbij $p = a^2 + b^2$.
Het is ook gemakkelijk in te zien dat een priemgetal $p \equiv 3 \bmod 4$ in $\mathbb{Z}[i]$ niet ontbonden kan worden.
Stel namelijk dat in zo'n geval geldt $p = \alpha\beta$ met $N(\alpha) > 1$ en $N(\beta) > 1$.
Dan volgt $N(p) = p^2 = N(\alpha) \cdot N(\beta)$. Dus: $N(\alpha) = N(\beta) = p$.
En dit kan niet, want $p \equiv 3 \bmod 4$ is niet te schrijven als som van twee kwadraten. We vatten dit samen.

Stelling 11. *De priemgetallen in* $\mathbb{Z}[i]$ *zijn:*
- $1 + i$ *en* $1 - i$;
- *alle* $a + bi$ *en* $a - bi$ *zodanig dat* $a^2 + b^2 = p$, *met* p *een priemgetal in* Z *en* $p \equiv 1 \bmod 4$;
- *alle priemgetallen* p *in* Z *met* $p \equiv 3 \bmod 4$;
- *alle geassocieerden van de hierboven bedoelde getallen.*



figuur 2 Priemgetallen van Gauss in het complexe vlak
(Bron: WikipediA)

Elk getal uit $\mathbf{Z}[i]$ is in priemfactoren te ontbinden, maar van een eenduidige ontbinding is vooralsnog geen sprake. Zo is bijvoorbeeld $5 = (1 + 2i)(1 - 2i) = (2 + i)(2 - i)$.
Willen we toch naar eenduidigheid toe, dan moeten we uit de verzameling van alle priemgetallen een deelverzameling nemen (net zoals we dat in feite in de verzameling van de gehele getallen doen). We kunnen bijvoorbeeld nemen:
$\mathbf{P} = \{\pi \mid \pi \text{ priem}, \operatorname{Re}(\pi) > 0, \operatorname{Im}(\pi) \geq 0\}$
Dan geldt dat elk getal $\alpha \neq 0$ in $\mathbf{Z}[i]$ op een unieke manier te schrijven is als:
$\alpha = \mu\pi_1\pi_2\ldots\pi_t$
waarbij μ een eenheid is en $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ in $\mathbf{P}$.
Deze ontbinding in priemfactoren kan bijvoorbeeld gebruikt worden om het volgende resultaat op een elegante manier aan te tonen.

Stelling 12. *In de rekenkundige rij van de getallen van de vorm* $4n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *komen oneindig veel priemgetallen voor.*

Bewijs. Veronderstel dat $p_1, p_2, \ldots, p_m$ alle priemgetallen van de vorm $4n + 1$ zijn. Bekijk nu:
$(4p_1^2 p_2^2 \ldots p_m^2) + 1 = (2p_1 p_2 \ldots p_m + i)(2p_1 p_2 \ldots p_m - i)$
in $\mathbf{Z}[i]$.
Als het linkerlid geen priemfactoren van de vorm $4n + 1$ heeft in de 'gewone' gehelen, dan zijn alle priemfactoren van de vorm $4n + 3$. Deze priemfactoren zijn ook priem in de gehelen van Gauss, en elk ervan is dan een deler van minstens één van de factoren in het rechterlid.
Maar als zo'n (reëel) priemgetal q het getal $(2p_1p_2\ldots p_m + i)$ deelt, dan deelt het ook de geconjugeerde $(2p_1p_2\ldots p_m - i)$, en dus ook de som.
Dat kan natuurlijk niet. (In feite hoeven we maar één priemfactor van de vorm $4n + 1$ te bekijken.) ◊

Het onderwerp 'Complexe getallen' kan een rol spelen in wiskunde B of D. Zie bijvoorbeeld [3] voor lesmateriaal o.a. over de gehelen van Gauss.
Elders in deze *Special* besteedt Hans Sterk ook aandacht aan Complexe getallen.[4]

Sommen van meer kwadraten

Zoals we in het voorgaande zagen, zijn sommige natuurlijke getallen te schrijven als som van twee kwadraten, en andere niet. We kunnen ons nu afvragen hoe het zit als we naar

méér kwadraten kijken. Met drie kwadraten lukt het nog niet om alle natuurlijke getallen te krijgen.
Bijvoorbeeld: $7 = a^2 + b^2 + c^2$ lukt niet. Maar met vier kwadraten lukt het plotseling wel!

Stelling 13. *Elk natuurlijk getal is te schrijven als som van vier kwadraten.*

Deze stelling is afkomstig van Lagrange. Een bewijs is te lang om hier op te nemen (zie daarvoor [1] of [2]). In zekere zin stopt na deze stelling de zoektocht naar representaties van natuurlijke getallen als sommen van kwadraten: met vier kwadraten lukt het altijd. We kunnen dan een vervolgvraag stellen.
Als we eenmaal weten wanneer een getal wel of niet als som van kwadraten is te schrijven, is er dan ook iets te zeggen over het aantal manieren waarop dat kan?
Om het tellen wat eenvoudiger te maken laten we nu ook kwadraten van *negatieve* gehele getallen toe, en definiëren we voor $k = 2, 3, 4, \ldots$ dat $r_k(n)$ het aantal oplossingen $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ in $\mathbf{Z}^k$ is van:

$$n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$$

Expliciete uitdrukkingen voor deze functies worden vaak afgeleid met behulp van de theorie van de modulaire vormen, iets wat ver buiten het bestek van dit artikel valt. Opmerkelijk is dat de uitdrukkingen voor oneven waarden van k veel ingewikkelder zijn dan voor even waarden. We volstaan daarom met het geven van resultaten voor $k = 2, 4, 6$ en 8, in stelling 14.
De notatie $\sum_{d \mid n} U$ daarin betekent dat de uitdrukking U gesommeerd wordt over *alle* delers d van het getal n. En de functie χ die optreedt in de gevallen $k = 2$ en $k = 6$, is als volgt gedefinieerd:

$$\chi(d) = \begin{cases} 0, \text{ als } d \text{ even is} \\ (-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}, \text{ als } d \text{ oneven is} \end{cases}$$

Stelling 14

1. $r_2(n) = 4 \cdot \sum_{d \mid n} \chi(d)$
2. $r_4(n) = 8 \cdot \sum_{\substack{d \mid n \\ d \not\equiv 0 \bmod 4}} (d)$
3. $r_6(n) = 16 \cdot \sum_{d \mid n} \chi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot d^2 - 4 \cdot \sum_{d \mid n} \chi(d) \cdot d^2$
4. $r_8(n) = 16 \cdot (-1)^n \cdot \sum_{d \mid n} (-1)^d \cdot d^3$

Tot slot

In de paragraaf Inleiding is al opgemerkt dat elementaire getaltheorie een bron kan zijn voor tal van ideeën om in het onderwijs mee aan de slag te gaan: opgaven waarmee 'bewijzen' geoefend kan worden, handig rekenen met gehele getallen, onderzoekachtige opdrachten. Hopelijk hebben de voorafgaande paragrafen dit een beetje duidelijk gemaakt. De wiskunde die daarin aan de orde kwam, is geen standaard wiskunde in het voortgezet onderwijs, en ook de methoden zijn niet standaard. Maar verschillende zaken moeten met de beschikbare vwo-wiskunde best zijn aan te pakken. Het onderwerp 'sommen van kwadraten' kan op zichzelf al onderwerp voor een praktische opdracht of onderzoeksopdracht zijn.

En als we de resultaten uit het voorafgaande als basis nemen, zijn er nog weer tal van vervolgvragen te stellen. Hieronder volgt er een aantal.

- Welke van de getallen 1!, 2!, …, 100! zijn wél, en welke zijn níet als som van twee kwadraten te schrijven? Kun je algemeen in dat verband iets zeggen over $n!$?
- Welke getallen zijn wél, en welke níet te schrijven als verschil van twee kwadraten?
- Welke natuurlijk getallen kunnen worden voorgesteld door de kwadratische vorm $a^2 - ab + b^2$?
- Hoe zit het met het schrijven van natuurlijke getallen als som van *drie* kwadraten?
- Stelling 1 zegt dat als n en m beide te schrijven zijn als som van twee kwadraten, er geldt dat $n \cdot m$ dan ook als som van twee kwadraten is te schrijven. Geldt dan ook $r_2(nm) = r_2(n) \cdot r_2(m)$? En hoe zit dat met $r_4(nm)$?
- Als n en m beide natuurlijke getallen zijn, dan zijn ze beide als som van vier kwadraten te schrijven. Kun je uit representaties van n en m afzonderlijk als som van vier kwadraten een dergelijke representatie voor $n \cdot m$ afleiden?
- Hoe zit het met het schrijven van een getal als som van derde machten? En eventueel nog hogere machten?
- Kun je een computerprogramma schrijven dat in $\mathbb{Z}[i]$ deling met rest en ontbinding in priemfactoren oplevert?

Referenties

[1] F. Beukers (1999): *Getaltheorie voor Beginners*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

[2] D.M. Burton (2007): *Elementary Number Theory*. Columbus (OH, USA): McGrawHill, Higher Education.

[3] Kerngroep Wiskunde D (2007): *Wat? Nog meer getallen! / Complexe getallen en toepassingen*. Eindhoven: Faculteit Wiskunde en Informatica, TU/e.
Zie: « *www.win.tue.nl/wiskunded* ». Via de keuze 'Complexe getallen' (links in de Navigatie) kom je bij 'Het dictaat' (een PDF-bestand).

[4] Hans Sterk (2012): *Complexe getallen*. In: *Getallen / Euclides Special 2012*.

Leerlingentekst

Wat? Nog meer getallen! – leerlingentekst (onder meer) te gebruiken bij dit artikel
89 pagina's, PDF-bestand van ca. 4,1 Mb
Zie: *www.win.tue.nl/wiskunded/files/public/Complexe_getallen/complex-2007-06.1s.pdf*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Irrationale getallen

[Frits Beukers]

Inleiding

De getallen waaraan wij gewend zijn, bestaan uit de rationale getallen, ofwel breuken, en irrationale getallen, zoals $\sqrt{2}$, π en e. Samen vormen ze de verzameling van de zogenoemde reële getallen, het getalsysteem waarop een groot deel van de tegenwoordige wiskunde is gebaseerd. Hoewel we deze getallen als tamelijk vanzelfsprekend ervaren, is de formele invoering ervan het resultaat van een kleine crisis in de ontwikkeling van de wiskunde geweest. Tot aan de 19e eeuw waren begrippen als *limiet, oneindige sommatie* en *getal* nogal losjes gedefinieerd. Vroeger of later moest dit problemen geven, hetgeen ook gebeurde bij de ontwikkeling van de Fourier-theorie in het begin van de 19e eeuw. De tegen-intuïtieve resultaten leidden destijds tot verhitte discussies die duidelijk maakten dat er een herbezinning nodig was. Resultaat hiervan zijn de tegenwoordige analyse en een axiomatische omschrijving van de reële getallen. Die axioma's van de reële getallen zijn niet zo angstaanjagend als men wel eens denkt. Ik heb ze in de appendix van dit artikel nog eens samengevat. De meeste zien er vertrouwd uit, ook de gewone breuken voldoen eraan. Enige uitzondering is het *volledigheidsaxioma* (axioma van Archimedes). Dit onschuldig lijkende axioma heeft belangrijke consequenties, maar past niet echt in de gedachtenwereld van de middelbare schoolwiskunde.

Het reële-getalbegrip op de middelbare school is nogal oppervlakkig: reële getallen worden behandeld alsof het 'gewone getallen' zijn, wat dat ook moge zijn. We maken ons bijvoorbeeld niet al te druk over het verband tussen $\sqrt{2}$ en hetgeen je op de display van de rekenmachine ziet na intoetsen van 2 gevolgd door $\sqrt{}$. Of over wat de oplossing van een (hogere graads) vergelijking precies betekent. Zelfs het feit dat een rekenmachinedisplay slechts een eindig aantal getallen kan voorstellen, terwijl er toch echt oneindig veel zijn, wordt niet als storend ervaren. De urgentie om dieper op het begrip 'getal' in te gaan is op de middelbare school niet zo groot, en dat is natuurlijk begrijpelijk. Op het vwo krijgen we immers niet te maken met crisismomenten zoals in de Fourier-theorie. Een en ander neemt niet weg dat ook op middelbaar schoolniveau nog veel leuks kan worden gedaan aangaande het getalbegrip.

Decimale ontwikkelingen

In de middelbare schoolwiskunde zijn reële getallen 'dingen' die je kunt voorstellen met oneindig lang doorlopende decimaalontwikkelingen. Voor het gemak zullen we eindige decimaalontwikkelingen ook interpreteren als oneindige ontwikkelingen door er een oneindige rij nullen achter te plakken.

Dus bijvoorbeeld 0,5 = 0,500000... Laten we eens een oneindige ontwikkeling nemen, bijvoorbeeld:

0,12345678910111213 14...

Hier hebben we gewoon de gehele getallen achter elkaar opgeschreven en de zo ontstane rij cijfers als decimalen gebruikt. Dan weet de lezer ook wat er op de '...' moet worden ingevuld.
Wat betekent zo'n oneindige decimale ontwikkeling? Als we de decimalen opschrijven, doen we dit met het idee dat we gaandeweg naar 'iets' toe convergeren. Maar wat is dat 'iets' eigenlijk? Een getal?
Uiteindelijk is dat wel de bedoeling, maar dan moet er wel een klasse van getallen zijn waartoe dat 'iets' behoort. Dit is precies de *raison d'être* van de reële getallen, en in het bijzonder van het volledigheidsaxioma.
Laten we stapsgewijs onze decimale ontwikkeling opschrijven:
0,1
0,12
0,123
0,1234
0,12345
. , ...
Hier ontstaat een oneindige en stijgende rij decimale breuken, die alle kleiner zijn dan 1. Het volledigheidsaxioma uit de appendix van dit artikel zegt nu dat de rij een kleinste bovengrens in de reële getallen heeft. Dit is precies onze gewenste limiet en tevens het gezochte 'iets'. In dit speciale geval staat het bekend als het *getal van Champernowne*.
Als bovenstaand verhaal duidelijk is, zal het ook duidelijk zijn dat met *iedere* oneindige decimale ontwikkeling een reëel getal correspondeert. Een kleine vraag die nog rijst is, of verschillende decimale ontwikkelingen aanleiding kunnen geven tot hetzelfde reële getal. Het blijkt dat dit inderdaad kan.
Bijvoorbeeld: 0,999999999... = 1,000000000...
Dat deze twee gelijke getallen zijn, kan in de klas aanleiding geven tot aardige discussies. Voor zover ik weet is de simpelste manier om de gelijkheid in te zien de volgende.

- Stel $b = 0{,}9999\ldots$
- Vermenigvuldig met 10. We krijgen:
- $10b = 9{,}9999\ldots = 9 + b$
- Oplossing van de vergelijking $10b = 9 + b$ geeft $b = 1 = 1{,}0000\ldots$

Alle andere voorbeelden van decimale ontwikkelingen die hetzelfde getal geven, zijn varianten hierop; bijvoorbeeld: 0,23999999... = 0,24000000...
Met andere woorden, decimale ontwikkelingen die vanaf zeker moment alleen negens bevatten, kunnen herschreven worden als decimale ontwikkelingen met alleen nullen vanaf zeker punt.
Omgekeerd hoort bij elk reëel getal een decimale ontwikkeling. Hoe je hieraan komt, illustreren we door de decimalen van $\frac{1}{7}$ te bepalen. We maken gebruik van het volgende principe. Als je van een getal a tussen 0 en 1 het eerste cijfer achter het decimaalteken wilt weten, vermenigvuldig je a met 10 en rondt naar beneden op gehelen af. Het resultaat is het gewenste cijfer. Laten we dit dus met $a = \frac{1}{7}$ doen en het proces herhalen om ook de volgende decimalen te vinden:

$10\times\frac{1}{7}=\frac{10}{7}=\mathbf{1}+\frac{3}{7}$
$10\times\frac{3}{7}=\frac{30}{7}=\mathbf{4}+\frac{2}{7}$
$10\times\frac{2}{7}=\frac{20}{7}=\mathbf{2}+\frac{6}{7}$
$10\times\frac{6}{7}=\frac{60}{7}=\mathbf{8}+\frac{4}{7}$
$10\times\frac{4}{7}=\frac{40}{7}=\mathbf{5}+\frac{5}{7}$
$10\times\frac{5}{7}=\frac{50}{7}=\mathbf{7}+\frac{1}{7}$
$10\times\frac{1}{7}=\frac{10}{7}=\ldots$

De vetgedrukte getallen zijn de opvolgende decimalen. In de één na laatste regel zien we dat we de rest $\frac{1}{7}$ weer hebben gekregen, en het rijtje herhaalt zich daarna steeds weer. We concluderen dat de decimale ontwikkeling van $\frac{1}{7}$ wordt gegeven door $0,\overline{142857}$ waarbij $\overline{142857}$ betekent dat het blok van zes cijfers 142857 steeds weer herhaald wordt. We hebben een periodieke of repeterende decimale ontwikkeling gevonden. Sterker nog, het blijkt dat *elk* rationaal getal een periodieke decimale ontwikkeling heeft. Stel dat $g=\frac{a}{b}$ rationaal is. Laat nu onze procedure los op deze g. Dan zullen alle restjes die we tegenkomen, breuken zijn met noemer b die tussen 0 en 1 liggen. Hier zijn maar eindig veel mogelijkheden voor, en vroeger of later moet er een rest zijn die twee keer voorkomt in de procedure. Vanaf dat moment treedt periodiciteit van de decimalen op. Een paar vragen:

Vraag 1 – Bedenk een aantal andere breuken en vindt hun decimale ontwikkeling met behulp van bovenstaande methode. (N.b. De GR zal hier niet helpen; probeer maar $\frac{1}{23}$ in te toetsen).

Vraag 2 – Bepaal de decimale ontwikkeling van $\frac{1}{7}$ en van $\frac{3}{7}$. De periodieke blokken kun je uit die van $\frac{1}{7}$ krijgen door de cijfers cyclisch te verwisselen. Verklaar dit. Lukt dit ook voor breuken met andere noemers?

Vraag 3 – Als de breuk een noemer p heeft die priem is, dan deelt de kleinste periodelengte het getal $p-1$. Verklaar dit (hiervoor moet je de kleine stelling van Fermat kennen).

Vraag 4 – Bedenk nog wat andere vragen.

Het feit dat rationale getallen een periodieke decimale ontwikkeling hebben, geeft ons een prachtig middel om irrationale getallen te produceren.

Vraag 5 – Geef een oneindige rij cijfers waarvan je kunt beredeneren dat deze *niet* periodiek is.

Als dat lukt, heb je een irrationaal getal te pakken. Hier ligt echter een moeilijkheid. Een ongetraind persoon, zoals een doorsnee middelbare-schoolleerling, is een dergelijke vraagstelling niet gewend en zal niet begrijpen wat er als antwoord verwacht wordt. Laten we dus eerst iets anders vragen.

Vraag 6 – Neem de decimale ontwikkeling:
0,101001000100001000001…
(dus 1 gevolgd door één nul, 1 gevolgd door twee nullen, …). Beredeneer waarom deze rij niet periodiek is.

Vraag 7 – Beredeneer waarom de decimale ontwikkeling van het getal van Champernowne niet periodiek is.

Ook ongebruikelijke vragen voor iemand met alleen schoolachtergrond, maar misschien iets concreter. Als je het antwoord op vraag 6 begrijpt, zal het ook duidelijk zijn dat het aantal mogelijkheden om irrationale getallen te construeren onbeperkt is. Georg Cantor heeft zelfs laten zien dat de verzameling **R** overaftelbaar is. Dat vereist wat uitleg – waarvoor hier geen plaats is – maar het komt erop neer dat je de reële getallen niet één voor één kunt aftellen op een zodanige manier dat ieder reëel getal op een gegeven moment aan bod komt.

Tot slot nog een grapje met de decimale ontwikkelingen.
Stel:
$a = 0{,}9 \times 0{,}99 \times 0{,}999 \times 0{,}9999 \times 0{,}99999 \times \ldots$
Dan geldt (zie de uitdrukking rechts):

$a = 0{,}89$
00100
99998999
00000010000
99999999899999
00000000001000000
99999999999899999999
0000000000000100000000...

Vraag 8 – Vind het patroon.

Aantonen waarom dit patroon bestaat, is absoluut niet makkelijk!

De getallenrechte

Een ander model van de reële getallen wordt gegeven door de getallenrechte. Dat is niets meer en niets minder dan een rechte lijn waarvan de punten de reële getallen voorstellen. In de 90-er jaren was dit op school een populair beeld van de getallen.
Laten we ons beperken tot de halfrechte van positieve getallen. We gaan nu de rationale getallen daarin als het ware 'afplakken' door er een interval omheen te leggen. Concreet: om het rationale getal $\frac{p}{q}$ leggen we een interval ter lengte $\frac{1}{2^{p+q}}$ en met $\frac{p}{q}$ in het midden. Deze intervallen samen zullen een deel van de positieve reële getallenrechte bedekken, dat ook de rationale getallen bevat. Hoe groot dit deel is, kunnen we schatten door de totale lengte van die intervallen zelf af te schatten. Concreter: de totale lengte van al die intervallen wordt naar boven begrensd door de som over alle gehele p, $q \geq 1$ van $\frac{1}{2^{p+q}}$. We maken daarbij gebruik van de bekende meetkundige reeks:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1$$

We vinden:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^{p+q}}=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^p}\cdot\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^q}\right)=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^p}\cdot 1\right)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}=1$$

door eerst over q te sommeren en daarna over p.
Conclusie: we kunnen alle positieve rationale getallen overdekken door een verzameling intervallen waarvan de totale lengte niet groter dan 1 is. De totale lengte van de positieve

reële getallen is oneindig. In deze zin bestaat blijkbaar het overgrote deel van de reële getallen uit irrationale getallen. Sterker nog, in plaats van intervallen van lengte $\frac{1}{2^{p+q}}$ hadden we lengte $\frac{\varepsilon}{2^{p+q}}$ kunnen kiezen voor een zelf te bepalen ε (bijvoorbeeld $\varepsilon = 0{,}001$). De rationale getallen zijn dan bevat in een verzameling met totale lengte ε. Deze lengte kan zo klein worden gemaakt als wij willen. Men zegt dat de rationale getallen 'een verzameling van maat nul' vormen. Alle andere getallen zijn irrationaal.

Irrationaliteitsbewijzen

In de voorgaande paragrafen zagen we dat, in zekere zin, vrijwel alle getallen irrationaal zijn. Maar wat als we een speciaal getal kiezen en ons daarvan vragen of het irrationaal is? Bijvoorbeeld $\sqrt{2}$, of π, of e ?

Ter illustratie volgt hier een irrationaliteitsbewijs voor $\sqrt{2}$. Niet het standaardbewijs dat je in veel boeken vindt, maar mijn favoriete variant.

Bewijs. Stel dat $\sqrt{2}$ rationaal is, een breuk dus. Dan is $(\sqrt{2} - 1)$ ook rationaal; dat wil zeggen een breuk, waarvan we de vereenvoudigde vorm aangeven met $\frac{a}{b}$. Hierin zijn a, b positieve gehele getallen met grootste gemeenschappelijke deler gelijk aan 1. We gaan nu laten zien dat deze aanname onhoudbaar is door een tegenspraak af te leiden.

Ga allereerst na dat: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = (\sqrt{2}-1)+2$.

Vullen we nu $\frac{a}{b}$ voor $(\sqrt{2} - 1)$ in, dan krijgen we: $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}+2$.

Observeer dat links in de gelijkheid een vereenvoudigde breuk staat met noemer a en rechts een vereenvoudigde breuk met noemer b. Ze moeten gelijk zijn, waaruit volgt dat $a = b$. We concluderen dat $\sqrt{2}-1 = \frac{a}{b} = 1$; met andere woorden: $\sqrt{2} = 2$. Dit kan niet waar zijn, en daarmee is de aanname dat $\sqrt{2}$ rationaal is, onhoudbaar geworden. ◊

Dit korte, maar krachtige bewijs is helaas lastig uit te breiden tot andere wortelgetallen. Daarvoor moeten we toch weer het standaardbewijs nemen.

Als je niet gewend bent om over irrationaliteit na te denken, is hier een vraag, om wat te wennen.

Vraag 9 – Ga van de volgende uitspraken na of ze waar of onwaar zijn.

1. De som van een rationaal getal en een irrationaal getal is irrationaal.
2. De som van twee irrationale getallen is irrationaal.

Een ander irrationaliteitsbewijs is de zogenaamde 'high school proof' voor e, hoewel deze allang niet meer op de 'high school' onderwezen wordt. De volgende versie is mijn favoriete vereenvoudiging ervan.

Bewijs. We starten met de reeks:

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots$$

Stel dat we deze reeks afbreken na de term $-\frac{1}{3!}$.

Dan weten we dat $\frac{1}{e}$ groter moet zijn dan $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$. Immers, de termen die daarna komen, kunnen we in paren bij elkaar zetten: $\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}$, $\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}$, … De som van elk van die paren is positief. Dus $\frac{1}{e}$ is inderdaad groter.

Op analoge manier zien we dat $\frac{1}{e}$ kleiner is dan $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$.

Stel dat $\frac{1}{e}$ rationaal is, zeg $\frac{1}{e}=\frac{a}{b}$. Kies nu een even getal $2n > b$. Dan geldt, net als daarnet:

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{(2n-1)!}<\frac{1}{e}=\frac{a}{b}<1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(2n)!}$$

Vermenigvuldig met $(2n)!$ en stel $A=(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{(2n-1)!})\cdot(2n)!$.

Merk op dat A geheel is. We vinden:

$$A<\frac{(2n)!\cdot a}{b}<A+1$$

Omdat $2n > b$, is ook $\frac{(2n)!\cdot a}{b}$ geheel. Dit gehele getal ligt volgens onze ongelijkheden strikt tussen twee opeenvolgende gehele getallen, hetgeen onmogelijk is. We hebben een tegenspraak. Dus is $\frac{1}{e}$, en daarmee ook e, irrationaal. ◊

Bovenstaande bewijzen zijn op middelbaar schoolniveau de meest haalbare. Irrationaliteit van π wordt al een stuk lastiger. Bovendien zijn er massa's getallen waarvan men geen idee heeft hoe de irrationaliteit te bewijzen. Bekendste voorbeelden zijn $e + \pi$ en $e \cdot \pi$.
Om te illustreren hoe grillig irrationaliteitstheorie kan zijn, merken we op dat men wél de irrationaliteit van e^{π} kan aantonen. Dit hangt samen met het feit dat $e^{\pi}=(-1)^{\sqrt{-1}}$.

Aan de andere kant weten we dan weer niets over π^e. Uiteraard, zou je bijna zeggen …

Appendix – Axioma's

Hier volgen in het kort de axioma's van de reële getallen. Allereerst zijn er de bijzondere elementen 0 en 1.

Axioma 1 (Optelling en vermenigvuldiging) – *Er zijn een optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd, aangegeven met + en ×, met de volgende eigenschappen*:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- $a + b = b + a$
- $a \times b = b \times a$
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- $a + 0 = 0 + a = a$
- $a \times 1 = 1 \times a = a$
- $\exists x : a + x = 0$
- $\exists x : a \times x = 1$ (mits $a \neq 0$)
- $0 \neq 1$

Axioma 2 (Ordening) – *Er bestaat een ordeningsrelatie < met de volgende eigenschappen*:

- $a < b$ óf $a = b$ óf $a > b$
- ($a < b$ én $b < c$) $\Rightarrow a < c$
- $a < b \Rightarrow (a + c) < (b + c)$
- ($a > 0$ én $b > 0$) $\Rightarrow a \times b > 0$

Tot zover is er weinig nieuws. Al deze regels vormen ook standaardkost op school. Maar ze gelden natuurlijk ook voor de rationale getallen (breuken). Het onderscheid tussen rationale en reële getallen wordt gemaakt door het volgende axioma.

Axioma 3 (Volledigheid) – *Elke begrensde en stijgende rij getallen heeft een limiet.*

Vaker wordt dit axioma ook als volgt geformuleerd:

Axioma 4 (Volledigheid - bis) – *Elke verzameling reële getallen met een bovengrens heeft ook een kleinste bovengrens.*

Onder een *bovengrens* voor een verzameling V wordt verstaan een getal B zó dat $x \leq B$ voor alle x in V.
Op deze manier hoeven we het limietbegrip niet te definiëren. De consequenties van het volledigheidsaxioma zijn enorm en het kost flink wat tijd om ze allemaal te overzien.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

VWP 2 – 521 wordt 215

Van het getal 521 is het eerste cijfer weggehaald en als laatste cijfer weer toegevoegd: 215 is de *transposiet* van 521.
Bepaal het kleinste met een 7 beginnend gehele getal waarvan de transposiet het vijfde deel is.

VWP 3 – Rij verder

Zet de volgende rij getallen voort:
3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30, 38, …

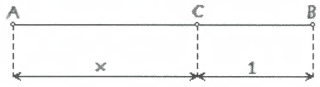
≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Wortels
GETALLEN IN HERHALING

[Pim Diemitz]

$\sqrt{(1 + \sqrt{1})} = \ldots$

Bij de behandeling van de *gulden snede* komt al snel de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$ naar voren. De 'verdeling van een lijnstuk in uiterste en middelste reden' cq. 'het aanbrengen van de *gulden snede* op een lijnstuk' is niets anders dan:
'het punt C bepalen (construeren) op een lijnstuk AB zodat: $AB : AC = AC : BC$'.



Stellen we $BC = 1$ (en dat mag) en $AC = x$, dan is $AB = x + 1$.
Dus is: $(x + 1) : x = x : 1$, zodat:
$x^2 = x + 1$

Op 0 herleid is dat de eerder genoemde vergelijking, waarvan de positieve *wortel* (*oplossing*) gelijk is aan:

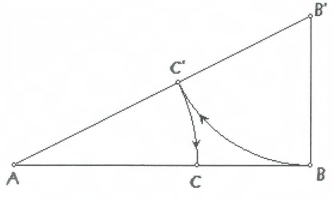
$$x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}6180$$ (het zogeheten 'gulden-snede-getal')

En daarmee is (ook):

$$AB : AC = \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})+1}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

Of, korter:

$$AB : AC = \frac{x+1}{x} = \frac{x^2}{x} = x = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$



Meetkundig. Met $AB = 2$ en $BB' = 1$ in een in B rechthoekige driehoek ABB' is $AB' = \sqrt{5}$.
C' is zó op AB' gelegen, dat $B'C' = 1$.
Dan is: $AC = AC' = \sqrt{5} - 1$. Daarmee geldt:

$$AB : AC = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

Soms komt dan ook de uit $x^2 - x - 1 = 0$ afgeleide vergelijking $x = \sqrt{x+1}$ op papier (of op het bord).
En die vergelijking geeft aanleiding een rij getallen t_n (met $n = 0, 1, \ldots$) op te bouwen met behulp van de functie $f(x) = \sqrt{(1 + x)}$, en wel als volgt:
$t_0 = 1$, $t_1 = \sqrt{(1 + t_0)}$, $t_2 = \sqrt{(1 + t_1)}$, …, $t_k = \sqrt{(1 + t_{k-1})}$, …
Voor de 'algemene term' van die rij is dus: $t_k = f(t_{k-1})$.

Met een rekenmachine, die de laatste daarop uitgevoerde opdracht kan herhalen (hier is een TI-83 gebruikt), vinden we dan:

opdracht	*resultaat*	*getal*	*toelichting*
$1 \rightarrow X$	1	t_0	$\rightarrow$ = [STO]
$\sqrt{(1 + X)} \rightarrow X$	1,4142...	t_1	
[ENTER]	1,5537...	t_2	herhaling van de laatste opdracht
[ENTER]	1,5980...	t_3	
...	...	...	...
[ENTER]	1,6179...	t_8	
[ENTER	1,6180...	t_9	
[ENTER]	1,6180...	t_{10}	

Hiermee wordt niets anders berekend dan: $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$. Immers, stellen we:

$x = \sqrt{1+\underline{\sqrt{1+...}}}$

dan is (zie het onderstreepte deel hierboven): $x = \sqrt{1+x}$. En daarmee zijn we terug bij af, zodat we kunnen concluderen dat:

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

En hoe zit het dan met $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...}}}$?

Met $x = \sqrt{a+x}$ biedt een klein programmaatje (weer op de TI-83) uitkomst – en je hoeft dan ook niet al te vaak op [ENTER] te drukken.

```
PROGRAM:ITERWORT
:Prompt A
:√(A)→X
:For(I,1,50)
:√(A+X)→X
:End
:Disp X
:
```

De overeenkomst met de hierboven handmatig uitgevoerde opdrachten is, denk ik, wel duidelijk.
En, er wordt via de 'variabele' I (in de vierde regel) vijftig keer herhaald.
Dit geeft voor de ingevoerde waarden van a het volgende te zien:

a =	1	2	3	4	5	6	7
resultaat:	1,618	2	2,303	2,563	2,791	3	3,193

a =	8	9	10	11	12	13	8
resultaat:	3,372	3,541	3,702	3,854	4	4,140	3,372

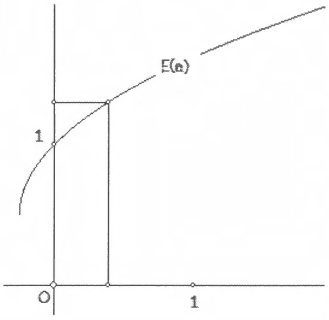
Dat $a = 2$ (en ook $a = 6, 12, 20, ...$) resulteert in een *geheel* getal als 'eindwaarde' van het herhalingsproces, en de andere waarden van a niet, wordt duidelijk als we de relatie omzetten:

$x = \sqrt{a+x} \Rightarrow x^2 = a+x \Rightarrow x^2 - x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$

Voor de laatste genoemde waarden van a (telkens het product van twee *opeenvolgende* natuurlijke getallen: 1×2, 2×3, 3×4, 4×5, ...) is $4a + 1$ het kwadraat van een geheel getal. Immers, met $a = (k - 1)k$ is:
$4a + 1 = 4(k - 1)k + 1 = 4k^2 - 4k + 1 = (2k - 1)^2$

Als we 'startwaarden' van a gebruiken met $0 < a < 1$, dan blijkt dat de eindwaarde E (toch) altijd groter is dan 1:

$a =$	0,05	0,07	0,09	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90
$E =$	1,048	1,066	1,083	1,092	1,242	1,366	1,475	1,572



Dit 'verschijnsel' is eenvoudig te verklaren door naar de grafiek van E als functie van a te kijken. Immers, de eindwaarde E (na 50 herhalingen) kan worden benaderd door:

$E(a) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$

Voor $a \geq 0$ is $E(a) \geq 1$, waarbij E een *stijgende* functie is.

En dit heeft tot gevolg dat bij gegeven eindwaarde E de bijbehorende startwaarde a kan worden bepaald.

Is bijvoorbeeld $E = 1\frac{3}{10}$, dan is $1\frac{3}{10} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$, waaruit, na enige berekening, volgt dat $a = \frac{39}{100}$. Daarmee is:

$$\sqrt{\frac{39}{100}+\sqrt{\frac{39}{100}+\sqrt{\frac{39}{100}+\ldots}}} = \frac{13}{10}$$

Bekijken we vervolgens $y = \sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\ldots}}}$, dan komen we, analoog aan bovenstaande overwegingen, via $y = \sqrt{a-y}$ tot: $y = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a})$.

Wordt nu gevraagd de waarde te berekenen van:

$$\left(\sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+\ldots}}}\right)\cdot\left(\sqrt{56-\sqrt{56-\sqrt{56-\ldots}}}\right)$$

dan kan dat geen probleem meer zijn.

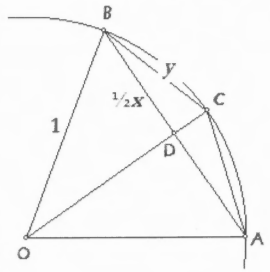
Deze opgave stond overigens als 'Problem of the Month' (november 2010) op de website van *Math Central* (Canada; *http://mathcentral.uregina.ca/index.php*).

Met de hierboven gevonden waarden van x en y is:

$xy = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})\cdot\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a}) = \frac{1}{4}((\sqrt{1+4a})^2-1) = a$

Voor a = 56 (= 7×8) is het antwoord 56 (of 'gewoon' eerst x en y berekenen: opvolgend 8 en 7).

Herhaald halveren



Op een cirkel met middelpunt O, waarvan de lengte van de straal gelijk is aan 1, liggen de punten A en B.
De lengte van de koorde AB is gelijk aan x.
Is D het midden van AB en snijdt OD de cirkel in het punt C, dan ontstaan (oa.) de driehoeken ODB en DCB, die beide rechthoekig zijn. Daarbij is dan $BD = \frac{1}{2}x$.
In driehoek ODB is volgens de stelling van Pythagoras:

$$OD = \sqrt{1 - BD^2} = \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}x)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} \qquad \ldots(1)$$

Verder is:

$$DC = 1 - OD \qquad \ldots(2)$$

Stellen we in driehoek DCB de lengte van BC gelijk aan y, dan is in die driehoek, weer 'volgens Pythagoras':

$$y^2 = (\tfrac{1}{2}x)^2 + DC^2 \qquad \ldots(3)$$

Uit (3), (2) en (1) volgt dan:

$$y^2 = \tfrac{1}{4}x^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}\,)^2$$

Uitgewerkt:

$$y^2 = \tfrac{1}{4}x^2 + 1 - \sqrt{4 - x^2} + \tfrac{1}{4}(4 - x^2) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$$

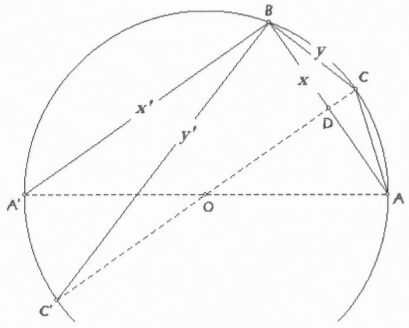
Of:

$$y = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}} \qquad \ldots(4a)$$

Daarmee is een relatie gevonden tussen de lengtes x en y van opvolgend de koorden AB en CB, waarbij driehoek OCB (een middelpuntsdriehoek van de cirkel) ontstaan is uit de middelpuntsdriehoek OAB door *halvering* van de hoek AOB.
In verband met hetgeen volgt – we gaan de halvering namelijk herhalen – schrijven we relatie (4a) als:

$$x_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x_{n-1}^2}} \qquad \ldots(4b)$$

voor $n \geq 1$.
Er ontstaat op die manier een rij getallen x_0, x_1, x_2, x_3, ..., waarbij aan de startwaarde x_0 nog een waarde moeten worden toegekend – dat zullen we doen in de volgende paragraaf.



De koorden AB ($= x$) en CB ($= y$) zijn rechthoekszijden van de driehoeken ABA' en CBC', bepaald door de tegenpunten A' van A en C' van C op de cirkel.
De lengtes van de andere rechthoekszijden van die driehoeken zijn resp. x' en y'.
In driehoek CBC' geldt voor de projectie $C'D$ van $C'B$ op de schuine zijde $C'C$:

$(C'B)^2 = C'D \cdot C'C = (1 + OD) \cdot 2$ ...(5)

In driehoek ABA' is $OD \,//\, A'B$, zodat (via de *middenparallel* in die driehoek):

$OD = \frac{1}{2} A'B$ ...(6)

Uit (5) en (6) volgt:

$(y')^2 = (1 + \frac{1}{2}x') \cdot 2 = 2 + x'$ ...(7)

En vergelijking (7) is dan identiek met: $y' = \sqrt{2 + x'}$.
Bij het proces van (herhaalde) halvering van de koorde x ($= x_{n-1}$) waaruit y ($= x_n$) ontstaat, ontstaat de koorde y' uit x'.
Met $y' = c_n$ en $x' = c_{n-1}$ is er bij de rij getallen x_n daarmee óók een (tweede) rij getallen c_n waarvoor geldt:

$c_n = \sqrt{2 + c_{n-1}}$ ...(8)

Formule (8) wordt wel de *verdubbelingsformule van Van Ceulen* genoemd (naar Ludolph van Ceulen, 1540-1610).
Merk voorts op dat $x_n = y = \sqrt{4 - (y')^2} = \sqrt{4 - c_n^2}$ en daarmee is ook $c_n = \sqrt{4 - x_n^2}$.

Pi

Geven we, met het oog op uitdrukking (4b), aan x_0 de waarde $\sqrt{2}$ – dat is de lengte van de zijde van een in de eenheidscirkel beschreven vierkant – dan zijn de waardes van x_1, x_2, ... de (lengtes van de) zijden van een in die cirkel beschreven *regelmatige* 8-hoek, 16-hoek, ... (we verdubbelen het aantal zijden!).
De volgende drie termen van de rij zijn hierbij:

$$x_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}},\quad x_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},\quad x_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

Hierin zit een stukje, namelijk $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$, dat we al eerder gezien hebben. De eindwaarde daarvan is 2. Zoals verwacht (de zijden van de veelhoek worden telkens gehalveerd) is dan $x_n \to 0$ als $n \to \infty$.
Vermenigvuldiging van x_0, x_1, x_2, ... met opvolgend 4, 8, 16, ... (het aantal zijden van de veelhoeken) leidt tot een *benadering* A_n van de omtrek A van een cirkel waarvan de straal gelijk is aan 1:

$A_n = 4 \cdot 2^n \cdot x_n = 2^{n+2} \cdot x_n$ ...(9)

Omdat $A_n \approx 2\pi$ is, blijkt uit (9) dat: $2\pi \approx 2^{n+2} \cdot x_n$. Dus is het getal P_n met:

$P_n = 2^{n+1} \cdot x_n$ ...(10)

een *benadering* is van het getal π (= 3,14159...). Zo is (x_n en P_n afgerond op 5 decimalen):

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8
zijden:	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
x_n =	1,41421	0,76537	0,39018	0,19603	0,09814	0,04908	0,02454	0,01227	0,00614
P_n =	2,82841	3,06147	3,12145	3,13655	3,14033	3,14128	3,14151	3,14157	3,14159

In P_8 (dus na 8 herhalingen) zien we 5 significante decimalen van π.
Maar snel gaat het niet. Op deze manier wordt een benadering van π in 12 decimalen nauwkeurig pas bereikt bij de 21e herhaling; maar dan moet de rekenprecisie van het gebruikte rekenapparaat zo'n berekening wel toelaten (mijn TI-83 dus niet).

Min na Plus...

We bekijken tot slot de herhaalde wortels met afwisselend plus- en mintekens, in:

$x = \sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+...}}}$ ...(11)

Nee, kwadrateren helpt niet, immers:

$x^2 = a+\sqrt{a-\sqrt{a+...}} \Rightarrow (x^2-a)^2 = a-\sqrt{a+...}$. En vervolgens, via (11):

$(x^2-a)^2 = a-x \Rightarrow x^4-2ax^2+x+a^2-a=0$

Deze vierdegraads vergelijking laat zich niet zo gemakkelijk oplossen ...

Maar met $y = \sqrt{a-\sqrt{a+...}}$ gaat het wél. Hiermee is (en dat is fraai) blijkens relatie (11):

$y = \sqrt{a-x}$ én $x = \sqrt{a+y}$

Dit geeft : $\begin{cases} x^2 = a+y \\ y^2 = a-x \end{cases}$, een stelsel dat oplosbaar is naar y :

$x^2-y^2 = x+y \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow y=x-1$

En dan wordt het even eenvoudig als hiervoor (via $x^2 = a+y$):

$x^2 = a+y = a+(x-1) \Rightarrow x^2-x+(1-a)=0$, zodat: $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{4a-3})$.

Daarmee is bijvoorbeeld:

$\sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{1+...}}} = 1$, $\sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{3+...}}} = 2$ en $\sqrt{31+\sqrt{31-\sqrt{31+...}}} = 6$

En óók, nogmaals terug bij af:

$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+...}}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

546121 = 490000 + 42900 + 13221
OF, OMDAT WORTELS ZIJDEN ZIJN

[Pim Diemitz]

Het in onbruik geraakte algoritme voor de 'handmatige' worteltrekking is gebaseerd op het verdelen van een vierkant in kleinere vierkanten en rechthoeken. In het onderstaande artikel wordt dat (nog eens) uiteengezet.

Recepten

Elk positief geheel getal $\overline{abc...k}$ is door ons 10-tallig (positie)stelsel[1] *per definitie* te schrijven als:

$a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} + \ldots + k \cdot 10^0$

Het 'boogje' boven '*abc…k*' geeft aan dat *a*, *b*, *c*, … moeten worden opgevat als (niet noodzakelijk verschillende) *cijfers*; het getal bestaat dus uit $(n + 1)$ cijfers, waarbij wel $a \neq 0$.

Bijvoorbeeld:

$7569 = 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

waarin $a = 7$, $b = 5$, $c = 6$ en $d = 9$, en $n = 3$ (aantal cijfers = 4).

Voor het rekenen met getallen bestaan op basis van deze schrijfwijze een aantal *algoritmen*, ook wel *rekenrecepten* genoemd. Zo zetten we (grote) getallen die we *met de hand* met elkaar willen vermenigvuldigen, meestal onder elkaar. Een voorbeeld van dát algoritme is:

```
   7569
   1234
   ---- ×
  30276
 227070
1513800
7569000
------- +
9340146
```

De regels die we daarbij toepassen, zijn natuurlijk formeel te beschrijven, maar het algoritme is (als het goed is) zó ingeslepen dat we de regels gedachteloos toepassen (daarbij inbegrepen óók de tafels van vermenigvuldiging).

Toch even aandacht voor een enkele regel (om de gedachten te bepalen).

- We beginnen met het laatste cijfer (4) van de 'vermenigvuldiger' (1234) en berekenen:
  $4 \times 7569 = 30276$ ('4 keer 9 is 36, 6 opschrijven, 3 onthouden, 4 keer 6 is 24 plus 3, …'): 4 maal 9 eenheden = 36 eenheden = 6 eenheden + 3 tientallen, …

- Vervolgens het op één na laatste cijfer (3) van de vermenigvuldiger. We schrijven, rechts en onder 30276, eerst een 0, en dan berekenen we: 3 × 7569. Of eigenlijk: we berekenen 30 × 7569.
- En analoog verwerken we (in deze volgorde) de '2' en de '1'.
- We hebben dan:
- 7569 × 1234 = (4 + 30 + 200 + 1000) × 7569 = 4 × 7569 + … + 1000 × 7569

In de optelling daarna zitten ook enkele 'regels'. Zoals in de tweede kolom van rechts: 7 + 7 = 14 ('4 opschrijven, 1 onthouden'). Maar we berekenen in feite: 70 + 70 = 140 (7 tientallen + 7 tientallen = 14 tientallen = 4 tientallen + 1 honderdtal).
Merk op dat we even gedachteloos de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging en de commutatieve en associatieve eigenschap van de optelling hebben toegepast.

Bij het omgekeerde – delen, of zo men wil ontbinden in factoren – wordt ook een algoritme gebruikt (een rekenrecept dat *staartdeling* heet), waarbij eveneens gedachteloos bewerkingseigenschappen worden toegepast.

```
1234/9340146\7569
     8638
     ----
      7021
      6170
      ----
       8514
       7404
       ----
       11106
       11106
       -----
           0
```

Eigenlijk wordt er *herhaald* gedeeld (of herhaald afgetrokken).

In feite trekken we *niet* 8638 af van 9340; maar wél 8638000 (= 7000 × 1234) van 9340146.
Daarna delen we 1234 op 702146, en dat gaat eerst 500 keer, …
Zodat uiteindelijk:
9340146 = 1234 × (7000 + 500 + 60 + 9)

De wortel uit…

Wanneer we de 'formele' schrijfwijze van een *kwadraat* bekijken, wordt het iets ingewikkelder (ook hier zijn *a*, *b*, *c*, … *cijfers* en is $a \neq 0$):

$$(\overline{abcd\ldots k})^2 = (a\cdot 10^n + b\cdot 10^{n-1} + c\cdot 10^{n-2} + \ldots)^2 = 10^{2n}\cdot\left(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \ldots\right)^2$$

N.b. Het getal (niet het kwadraat ervan) zelf bestaat dus weer uit $(n + 1)$ cijfers.

Herhaalde toepassing van $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ geeft:

$$\begin{aligned}(\overline{abcd\ldots k})^2 &= 10^{2n}\cdot\left(a^2 + 2a\cdot\frac{b}{10} + \frac{b^2}{100} + 2\cdot a\cdot\frac{c}{100} + 2\cdot\frac{b}{10}\cdot\frac{c}{100} + \frac{c^2}{10000} + \ldots\right)\\ &= 10^{2n}\cdot\Big(a\cdot a + (20a+b)\cdot b\cdot 10^{-2} + (200a+20b+c)\cdot c\cdot 10^{-4} +\\ &\qquad + (2000a + 200b + 20c + d)\cdot d\cdot 10^{-6} + \ldots\Big)\end{aligned}$$

Voorbeeld. Met $n = 2$, $a = 7$, $b = 3$ en $c = 9$ (*d*…*k* laten we weg):

$$\begin{aligned}(\overline{739})^2 &= 7\times 7\times 10^4 + (20\times 7 + 3)\times 3\times 10^2 + (200\times 7 + 20\times 3 + 9)\times 9\times 10^0\\ &= 7\times 7\times 10^4 + (140+3)\times 3\times 10^2 + (1460+9)\times 9\\ &= 490000 + 42900 + 13221\\ &= 546121\end{aligned}$$

Ook is: 546121 = 490000 + (42000 + 900) + (12600 + 540 + 81). ◊

Maar is de lezer zich ervan bewust dat er een algoritme gebaseerd is op déze schrijfwijze van een kwadraat? (Hij/zij leze het voorbeeld even terug…)
Eerst merken we op dat er een verband is tussen de *eerste* factoren van telkens twee op elkaar volgende termen van de algemene uitdrukking (zie de volgende tabel).

factor	+	=	× 10	+	= (*volgende term*)
a	a	$2a = 2\cdot\widehat{a}$	$2\cdot\widehat{a0}$	b	$2\cdot\widehat{a0}+b$
$20a + b$	b	$20a+2b = 2\cdot\widehat{ab}$	$2\cdot\widehat{ab0}$	c	$2\cdot\widehat{ab0}+c$
$200a + 20b + c$	c	$200a+20b+2c = 2\cdot\widehat{abc}$	$2\cdot\widehat{abc0}$	d	$2\cdot\widehat{abc0}+d$
$2000a + 200b + 20c + d$	…	…	…	…	…

Ook is er een verband tussen de factoren in *één* term (de macht van 10 daarbij buiten beschouwing latend):

- elk product is te schrijven als: $\widehat{\ldots k}\cdot\widehat{k}$, waarbij blijkbaar het laatste cijfer van de eerste factor gelijk is aan het cijfer van de tweede.

In bovenstaand voorbeeld:
7 × 7 (met $k = 7$), (140 + 3) × 3 = **143 × 3** ($k = 3$) en (1460 + 9) × 9 = **1469 × 9** ($k = 9$).
Dus iets als: $\widehat{\ .}\times\widehat{\ .}$, $\widehat{14\ .}\times\widehat{\ .}$ en $\widehat{146\ .}\times\widehat{\ .}$.

Met deze kennis bekijken we het volgende (bekende?) rekenschema (alweer een recept):

Schema A

```
     √(546121) = w
  .x.= 49                    ; 7 × 7 = 49
       --                    ; zodat w = 7^
        561
 14.x.= 429                  ; 20 × 7 = 140 en (140 + 3) × 3 = 429
       ---                   ; zodat w = 73^
       13221
146.x.= 13221                ; 20 × 73 = 1460 en (1460 + 9) × 9 = 13221
       -----                 ; zodat w = 739^
           0
```

In dit schema moet (volgens het algoritme) in '. × .' op de punten telkens hetzelfde cijfer worden gezet, en wel zó, dat het dan gevormde product het grootste getal is dat van het erboven staande getal kan worden afgetrokken.

Het algoritme waarop hierboven gedoeld werd (afgeleid uit de formele schrijfwijze van een kwadraat), is dus de 'handmatige' *vierkantsworteltrekking* ('de wortel uit') waarbij de cijfers in de uitkomst van √546121 opvolgend worden bepaald als: $\widehat{7..}$, $\widehat{73.}$ en $\widehat{739}$.
De 'echte' bewerkingen – volgens de formele schrijfwijze van het kwadraat – zien we in Schema B nog eens geïllustreerd. Zie ook de titel van dit artikel, en verder ook de paragraaf Naschrift.

Schema B

$\sqrt{(546121)} = \overline{abc}$	; met $a = 7$, $b = 3$, $c = 9$
490000	; $= a \cdot a \cdot 10^4$
------	; $a = 7$ past hier als grootste waarde in $\overline{abc}$.
56121	
42900	; $= (20a + b) \cdot b \cdot 10^2$
-----	; $b = 3$ past als grootste waarde in $\overline{7bc}$.
13221	
13221	; $= (200a + 20b + c) \cdot c \cdot 10^0$
-----	; $c = 9$ past *precies* in $\overline{73c}$.
0	

Over deze schema's nog twee opmerkingen.

1. In Schema A worden telkens *twee* cijfers 'bijgehaald':

- 54 – 49 = 5, en dan **61** bijhalen (ernaast); dat geeft het getal **561** ;
- 561 – 429 = 132, en dan **21** erbij; dat geeft het getal 13**221** .

De reden daarvoor is dat er eigenlijk opvolgend met 10^4 en 10^2 moet worden vermenigvuldigd (zie de overeenkomstige regels in Schema B).

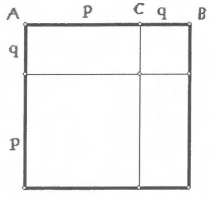
2. Uit het aantal cijfers van het getal waaruit de wortel moet worden getrokken, kan op basis van de factor 10^{2n} het aantal cijfers van die wortel worden afgeleid:

- verdeel de cijfers van het getal, rechts beginnend, in groepjes van *twee* (54|61|21);
- het *aantal* groepjes is dan het *aantal cijfers* van de vierkantswortel uit dat getal.

Vierkanten

De oude Grieken berekenden kwadraten met de oppervlaktes van vierkanten en rechthoeken.[2]

In onderstaande figuur ligt het punt C willekeurig op het lijnstuk AB, waarbij $AC = p$ en $CB = q$.



De oppervlakte van het vierkant met zijde $(p + q)$ is gelijk aan $(p + q)^2$, en die oppervlakte is ook gelijk aan de som van oppervlaktes van het vierkant met zijde p en het vierkant met zijde q (samen $p^2 + q^2$) en die van de twee rechthoeken, elk met zijden p en q ($2 \cdot pq$).

'Zonder haakjes uitwerken' was het toen direct duidelijk dat:

$(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$

(Het *dubbele product* wordt op deze manier zeker niet vergeten!)

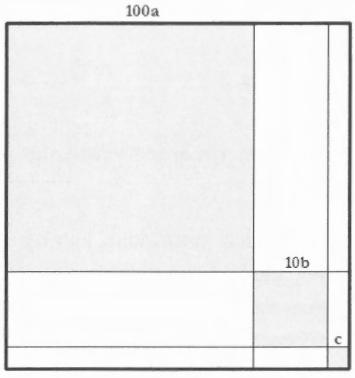
Een paar eeuwen later, in 1568, gaf Peter van Halle in zijn rekenboek, *Arithmetica*, de volgende definities van kwadraat en wortel: [3]

'*In arithmetica ofte int sypheren heeten wy een ghetal te weesen een 'quadraet ghetal', welck met syn unitatem oft aeskens op die maniere van een quadraet in geometrie ghestelt mach weesen.*'[4]

(Zie onderstaande *geometrie*-figuur met *quadrati numeri*, 'kwadraatgetallen'.)

En:

'*Van deese exempelen ende dierghelijke meer andere, een sijde wort gheheeten 'radix quadrata.'*



Met een meetkundige blik kijken wij, wéér wat eeuwen later, in nevenstaande figuur naar zo'n *quadraet ghetal*, waarvan de *radix quadrata* gelijk is aan:

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$

De oppervlakte A van het grootste vierkant is gelijk aan:

$$(100a)^2 + (10b)^2 + c^2 + \\ +2 \cdot (100a \cdot 10b) + \\ +2 \cdot (100a \cdot c) + 2 \cdot (10b \cdot c)$$

En na enige rangschikking blijkt:

$$A = a^2 \cdot 10^4 + (20a + b) \cdot b \cdot 10^2 + (200a + 20b + c) \cdot c$$

Hoezo ingewikkeld, die formele schrijfwijze van een kwadraat?
De meetkunde maakt het echt eenvoudig!

Naschrift

In een boek dat meer dan een eeuw oud is [5], staat het volgende recept van de *vierkantsworteltrekking*.

1. Men verdeelt het getal, waaruit men den wortel moet trekken, in vakken van twee cijfers, te beginnen met het cijfer der eenheden. Elk vak levert één cijfer in den wortel op.
2. Men vindt het 1e cijfer aan de linkerhand van den wortel door den 'wortel' te trekken uit het 1e vak aan de linkerhand van het gegeven getal.
3. Om het n-de cijfer van den wortel te bepalen, schrijft men de cijfers van het n-de vak achter de $(n-1)$-de rest en deelt dit getal door 20-maal het reeds gevonden deel van de wortel (als geheel getal beschouwd).
4. Het komende cijfer kan echter te groot zijn. Komt 10 of meer, dan begint men het onderzoek met 9. Komt er 0, dan is dit stellig het gezochte cijfer.
5. Om den aftrekker [6] te krijgen, schrijft men achter 2-maal het gevonden deel van den wortel (als geheel getal beschouwd) het n-de cijfer van den wortel en vermenigvuldigt dit getal met dat n-de cijfer.

De lezer vergelijke deze stappen met de berekeningen in Schema A.
Overigens, ook is:
$546121 = 730^2 + 114^2 + 15^2$
En dat heeft niets met worteltrekken te maken. Of toch wél?

Noten

[1] Ook wel *decimaal positioneel getalstelsel* of 10-*tallig plaats-waarde-stelsel* genoemd.

[2] Bijvoorbeeld, in Euclides' *Elementen* luidt Propositie II-4: *Wordt een lijnstuk willekeurig verdeeld, dan is het vierkant op het geheel gelijk aan de* [som van de] *vierkanten op de delen en twee keer de rechthoek bepaald door die delen.*

[3] Het boek van Van Halle is als manuscript bewaard gebleven (Koninklijke Bibliotheek, Brussel; hs. 3552).
Bron:
Marjolein Kool (1999): *Die conste vanden getale*. Hilversum: Uitgeverij Verloren; pp. 115-116 (proefschrift Universiteit Utrecht). Elektronisch beschikbaar via DBNL:
www.dbnl.org/titels/titel.php?id=kool006cons01

[4] Kool (zie [3]) vertaalt het gedeelte 'welck … weesen' met 'als het met zijn eenheden in de vorm van een vierkant uit de meetkunde genoteerd kan worden'. Zij laat m.i. de vertaling van 'aeskens' (een *aesken* is een gewichtsaanduiding voor een kleine hoeveelheid goud of zilver) achterwege.
Gebruikt Van Halle 'aesken' hier als *pars pro toto* voor 'munt', verwijzend naar het gebruikelijke penningrekenen?

[5] N.L.W.A. Gravelaar (1897): *Leerboek der Rekenkunde*. Groningen: P. Noordhoff; deel II, pp. 15-16.

[6] Bij de bewerking $a - b$ is het getal b de *aftrekker* (a is het *aftrektal*).

Leerlingentekst

Rekenen aan wortels – leerlingentekst te gebruiken bij dit artikel
14 pagina's, PDF-bestand van ca. 115 Kb
Zie: *www.nvvw.nl/special12/(wb)rekenwortels.pdf*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

VERMENIGVULDIGEN

3 x 9 = ?

$= 3 \times \sqrt{81} = 3\sqrt{81} = 3\sqrt{81} = 27$

6
21
21
0

Bron: *http://xkcd.com*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Groot, groter, ~~grootst~~ nóg groter

[Dick Klingens]

Wat is het grootste getal dat je met twee woorden kunt schrijven?

Groot

Ook al weet iedere wiskundige – en eigenlijk ook iedereen die (een beetje) kan tellen – dat er geen *grootste* natuurlijk getal bestaat (er is altijd een groter getal dan het vermeende grootste getal G, namelijk $G + 1$), toch wordt er veel 'gezocht' cq. onderzoek gedaan naar grootste getallen die een welomschreven eigenschap hebben.

Een **voorbeeld**. 9^{9^9} is het grootste getal dat *met drie* cijfers geschreven kan worden *zonder* daarbij gebruik te maken van de gebruikelijke bewerkingstekens. Of kent de lezer een groter getal met die eigenschap? (Maar na het lezen van dit artikel…)
Onvermijdelijk rijst dan de vraag: 'En wat is dan het grootste getal (met drie cijfers) als je wél gebruik mag maken van bewerkingstekens?'
Is dat dan (toch ook) 9^9^9 ? Daarin staat '^' voor machtsverheffing of – wellicht hier beter – 'tot de macht': 9 tot de macht 9 (en die weer) tot de macht 9.

Een tweede **voorbeeld**. Een Mersenne-getal M_n is een getal van de vorm $2^n - 1$ (met n positief en geheel). Zo is $M_3 = 2^3 - 1 = 7$, en hierin zijn 3 en M_3 *beide* priemgetallen.
$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$; 11 is priem, maar M_{11} niet.
M_3 is een *Mersenne-priemgetal*, M_{11} niet.
Sinds 1996 wordt er (wereldwijd) gezocht naar Mersenne-priemgetallen.[1] Tot nu toe (november 2011) zijn er van dat type 47 gevonden.
Het grootste (sinds 23 augustus 2008) bestaat uit 12.978.189 cijfers en is gelijk aan $2^{43112609} - 1$.[2]

Terug naar de machtsverheffing. De schrijfwijze daarvan met ^ heeft echter een probleem. Zo is:
- 3 ^ (2 ^ 4) = 3 ^ 16 = 43046721
- (3 ^ 2) ^ 4 = 9 ^ 4 = 6561

Deze laatste uitdrukking wordt trouwens meestal (en dat is bekend) genoteerd als $(3^2)^4 = 3^8$.
De bewerking ^ is blijkens het bovenstaande in ieder geval niet *associatief*.

Opmerking. De eerste (mechanische) printers waren niet in staat exponenten af te drukken. Het afdrukken ging met een roterende ketting waarop alle tekens die afgedrukt konden worden, waren geplaatst. Een 'torentje', zoals $3^{2^4} = 3 \wedge (2^4)$, of hoger, was helemaal onmogelijk. Toen werd daarvoor het teken $\uparrow$ gebruikt – ook in de programmeertaal Algol60 kwam dat symbool voor als bewerkingsteken voor de machtsverheffing. En daarvan

is vermoedelijk alleen het 'dakje' (dat toch al op de schrijfmachine aanwezig was: de *accent circonflexe*, zoals in â) overgebleven. Maar de pijl komt terug! ◊

Overigens, op moderne zakrekenmachines waarop de machtsverheffing is geïmplementeerd, berekenen we machten – meestal – van links naar rechts (zoals 'het' er staat).

- Op mijn TI-84 : [3][^][2][^][4][enter] resulteert in 6561 (tussen [en] staat het teken op de in te drukken knop);
- op mijn TI-30XB MultiView in mode 'classic', met dezelfde knoppenvolgorde : 6561;
- op diezelfde TI-30, maar nu in mode 'mathprint', via dezelfde knoppen : 43046721.

Merkwaardig… twee *verschillende* uitkomsten op *dezelfde* rekenmachine!

Maar daarbij, wat zijn bewerkingstekens eigenlijk? Alleen +, –, ×, ÷, ^ en eventueel ook √ ?

We kunnen ze echter ook zelf 'verzinnen', als *functie* van twee variabelen. Bijvoorbeeld, we spreken af voor natuurlijke getallen x en y:

- *som* : $S(x, y) = x + y$
- *product* : $P(x, y) = x \times y$
- *macht* : $M(x, y) = x^y = x \wedge y$

Dan is:

- $a = 2 + (3 + 5) = 2 + S(3, 5) = S(2, S(3, 5))$;
- $b = (2 + 3) + 5 = S(2, 3) + 5 = S(S(2, 3), 5)$. We weten $a = b$ (S is associatief).

En:

- $c = 2 \times (3 \times 4) = 2 \times P(3, 4) = P(2, P(3, 4))$;
- $d = (2 \times 3) \times 4 = P(2, 3) \times 4 = P(P(2, 3), 4)$. We weten $c = d$ (P is associatief).

En ook:

- $e = 3 \wedge (2 \wedge 4) = 3 \wedge M(2, 4) = M(3, M(2, 4))$;
- $f = (3 \wedge 2) \wedge 4 = M(3, 2) \wedge 4 = M(M(3, 2), 4)$. We hebben hierboven gezien dat $e \neq f$ (M is immers *niet* associatief).

We bekijken de functie M nog wat nader, in het bijzonder voor $y = 2$, dus $M(x, 2)$.

Daarmee is:

- $M(x, M(2, 2)) = x \wedge (4) = x^4$, en:
- $M(M(x, 2), 2) = (x^2) \wedge 2 = (x^2)^2 = x^4$.

In dit geval is M, als gevolg van het herhaald kwadrateren, wél associatief.

Voor de functie $M(x, 2)$ schrijven we even $K(x)$, waarmee $K(x) = x^2$.

Voeren we K twee keer achter elkaar uit, dan is, conform de conventie van het bewerkingsteken ' ∘ ' waarmee het na elkaar toepassen van een functie wordt aangegeven:

- $(K \circ K)(x) = K(\, K(x)\,) = K(x^2) = x^4$

Hiermee wordt geïllustreerd dat déze manier van machtsverheffen *rechts-associatief* is: de waarde van x^2^2 wordt berekend als x^(2^2).

De rechts-associativiteit van ^ (en dus van M) is als het ware *inherent* aan die bewerking (cq. aan die functie).

Een torentje als 3^{2^4} vatten we daarom op als een macht met grondtal 3 en exponent 2^4. Om zo'n macht uit te rekenen spreken we af *eerst* de exponent te berekenen (er wordt gerekend van rechtsboven naar linksbeneden).

Zo is: $3^{4^{2^3}} = 3^{4^8} = 3^{65536}$ (een getal dat bestaat uit 31.269 cijfers).

Groter

Herhaling en recursie. Ook met een *recursieve* definitie wordt duidelijk dat de machtsverheffing een *herhaalde vermenigvuldiging* is. Voor natuurlijke getallen a en n is:

$a^n = M(a,n) = \begin{cases} a, & \text{als } n = 1 \\ a \times a^{n-1}, & \text{als } n > 1 \end{cases}$, overeenkomstig de definitie van machtsverheffen.

Recursief: $M(a,n) = \begin{cases} a, & \text{als } n = 1 \\ a \times M(a,n-1), & \text{als } n > 1 \end{cases}$, zodat met gebruik van de hierboven gedefinieerde functie P geldt:

- $M(a,n) = \begin{cases} a, & \text{als } n = 1 \\ P(a, M(a,n-1)), & \text{als } n > 1 \end{cases}$

Voorbeeld.
$3^4 = M(3, 4) = P(3, M(3, 3)) = P(3, P(3, M(3, 2))) = P(3, P(3, P(3, M(3, 1))))$. En dan is:
$M(3, 4) = P(3, P(3, P(3, 3))) = P(3, P(3, 9)) = P(3, 27) = 81$

Tetratie. Zoals we M recursief hebben gedefinieerd met P, kunnen we verder gaan.
De functie H wordt met behulp van de functie M, weer voor natuurlijke getallen a en n, recursief vastgelegd door:

- $H(a,n) = \begin{cases} a, & \text{als } n = 1 \\ M(a, H(a,n-1)), & \text{als } n > 1 \end{cases}$

Hier is dus sprake van *herhaalde machtsverheffing*, waarbij de $(n - 1)$ in het torentje gebruikte exponenten *alle* gelijk zijn aan het grondtal a. Met $n = 2$ is:

- $H(a,2) = M(a, H(a,1)) = M(a,a) = a^a$

Enkele berekeningen met $a = 3$:

- $H(3,1) = 3$
- $H(3,2) = M(3, H(3,1)) = M(3,3) = 3^3 = 27$
- $H(3,3) = M(3, H(3,2)) = M(3,3^3) = 3^{3^3} = 3^{27} = 7625597484987$
- $H(3,4) = M(3, H(3,3)) = M(3,3^{3^3}) = 3^{3^{3^3}} = 3^{7625597484987}$

Zodat algemeen: $H(a,n) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$.
Van het torentje in het rechter lid van $H(a, n)$ hierboven is het aantal a's dus gelijk aan n: het torentje bestaat uit n lagen (met een a). In de wiskundige literatuur wordt ook wel geschreven: $H(a,n) = {}^n a$.

De uitdrukking ${}^n a$ kan worden opgevat als een 'hypermacht' van a. In recursieve notatie:

- $^{n}a = \begin{cases} a, & \text{als } n = 1 \\ a^{\left(^{n-1}a\right)}, & \text{als } n > 1 \end{cases}$

Deze bewerking wordt *tetratie* (samentrekking van de woorden *tetra* en *iteratie*) genoemd: '^{n}a is de n-de tetratie van a'. Dat hier sprake is van een *tetra* (= vierde) herhaling, is, min of meer, als volgt in te zien:

1. optelling: $a+n = a+\underbrace{1+\ldots+1}_{n \text{ 'enen'}}$
2. vermenigvuldiging: $a\times n = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ termen}}$
3. machtsverheffing: $a^{n} = \underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ factoren}}$
4. *tetratie*: $^{n}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n \text{ 'lagen' met een } a}$

Zo is:

- $H(4, 3) = {}^{3}4 = 4\text{^}(4\text{^}4) =$

1340780792994259709957402499820584612747936582059239337772356144372176403007354697680187429816690342769003185818648605085375388281194656994643364900608409 6

$H(4, 3)$ bestaat uit (slechts) 155 cijfers.

En:

- $H(5, 3) = {}^{3}5 = 5\text{^}(5\text{^}5) =$

1911012597945477520356404559703964599198081048990094337139512789246520530242615803012059386519739850265586440155794462235359212788673806972288410146915986602087961896757195701839281660338047611225975533626101001482651123413147768252411493094447176965282756285196737514395357542479093219206641883011787169122552421070050709064674382870851449950256861944615431835113798491336917799281274338404315492368555267835963741021053315460313537253257486369091597786903282664591829838152302869365728736914226481312917437621363257303216452829794868625762453622180176732249405676428193600787207138370723553054463561539464011853484937927195145945055082327492216058489129109451899599486819954314766693801303717616359259447974616422005088507946980448713320513316073913423054019887257003832980124605019701346739717590902738949392381731578699684589979478106804282243609378394633526542281570430283244238551508231649096728571217170812323279048181726832751011274678231741098588868370852200071173349225391332230075614718042900752767779335230620061828601245525424306100689480544658470482065098266431936096038873625851074707434063628697657670269925864995355797631817390255089133122329474393034395616132833407283166349825814522686200430779908468810380418736832480090387359621291963360258312078167367374253332287929690720549059562140688882599124458184237959786347648431567376092362509037151179894142426227022006628648686786871018298087280256069310194928083082504419842479679205890881711232719230145558291674679519743054802640464685400273399386079859446596150175258696581144756851004156868773090371248253534383928539759874945849705003822501248928400182659005625126818762993804440734014234706205578530532503491818958970719930566218851296318750174353596028220103821161604854512103931331225633226076643623668829685020883949614283048473911399166962264994856368523471287329479668088450940589395110465094413790950227654565313301867063352132302846051943438139981056140065259530073179077271106578349417464268472095613464732774858423827489966875505250439421823219135722305406671537337424854364566637820457016545932181540535483936142506644985854033074664685418901481343477146503150379541757786228117765858769416809082031252

$H(5, 3)$ heeft 2185 cijfers.

- $H(2,5) = {}^{5}2 = 2^{2^{2^{2^{2}}}} = 2^{65536}$ (te groot om als getal te noteren) bestaat uit 19.729 cijfers.

En, het getal waarmee we begonnen zijn:

- $9^{9^9} = H(9,3) = {}^3 9 = 9^{387420489}$. Ook dit getal is te groot om uit te schrijven; het bestaat uit 369.693.100 cijfers. Maar, het is en blijft het grootste getal dat *zonder* bewerkingstekens óók met slechts 3 cijfers kan worden weergegeven.

Nóg groter

Maar nu is het hek van de dam… We definiëren een functie B (weer voor natuurlijke a en n), recursief en met gebruik van H:

- $B(a,n) = \begin{cases} a, & \text{als } n = 1 \\ H(a, B(a, n-1)), & \text{als } n > 1 \end{cases}$

Dan is:

- $B(a,1) = a$.
- $B(a,2) = H(a, B(a,1)) = H(a,a) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$; dit is een torentje met a lagen (met op elke laag één a).
- $B(a,3) = H(a, B(a,2)) = H(a, a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}})$; dit is een torentje, zeg maar toren, met $a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$ lagen (eveneens met één a op elke laag).

Hier stoppen we. De torens worden te hoog. Iemand die wél verder ging, was Donald Knuth (geb. 1938, USA), in 1976. Hij introduceerde de zogenoemde 'up-arrow notation', ook gebaseerd op de machtsverheffing.[3]

Knuth begint eenvoudig, met een bekende definitie (en de pijl is terug!):

- $x \uparrow n = x \wedge n = x^n$

Voorbeeld.

$10 \uparrow 7 = 10^7 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000000$

'*Maar*', schrijft Knuth, '*het zal snel duidelijk zijn waarom ik de voorkeur geef aan het gebruik van een pijl-omhoog.*'

In zijn volgende definitiestap worden namelijk twee pijlen direct na elkaar gebruikt:

- $x \uparrow\uparrow n = x \uparrow (x \uparrow (\ldots \uparrow x))$

waarin herhaald machten staan met x als exponent (het aantal x-en in het rechter lid is gelijk aan n).

Voorbeeld (uit [3]).

$$10 \uparrow\uparrow 4 = 10 \uparrow (10 \uparrow (10 \uparrow 10) = 10 \uparrow (10 \uparrow 10^{10}) = 10 \uparrow 10^{10^{10}} = 10^{10^{10^{10}}} =$$

$$= (1 \text{ gevolgd door } 10^{10^{10}} \text{ nullen})$$

En Knuth vervolgt met: '*Een aardig groot getal; ten minste, als een aap op een schrijfmachine willekeurig toetsen aanslaat, dan is het gemiddeld aantal pogingen om de exacte tekst van Shakespeare's Hamlet te typen veel, veel kleiner dan dit getal, namelijk een* 1 *gevolgd door* 40.000 *nullen.*'

De algemene regel voor 'pijl-omhoog' is:

$$x\overbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}^{k\text{ pijlen}}n = \underbrace{x\overbrace{\uparrow\ldots\uparrow}^{k-1}(x\overbrace{\uparrow\ldots\uparrow}^{k-1}(x\overbrace{\uparrow\ldots\uparrow}^{k-1}(\ldots\overbrace{\uparrow\ldots\uparrow}^{k-1}x)))}_{\text{aantal } x\text{-en} = n}$$

Kort gezegd: één pijl wordt gedefinieerd *zonder* pijl (x^n), twee pijlen met één pijl, drie pijlen met twee, …, met n x-en erom heen.

Voorbeeld.

- $10\uparrow\uparrow 5 = 10\uparrow(10\uparrow(10\uparrow(10\uparrow(10\uparrow 10)))$; er staat 5 maal een 10 gescheiden door 1 pijl, én er wordt rechts-associatief gerekend. En:
- $10\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 10\uparrow\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow\uparrow 10)$; er staat 3 keer een 10 telkens gescheiden door 3 pijlen, ook rechts-accociatief. ◊

In de laatste vorm in het voorbeeld geldt voor de uitdrukking tussen (en):

$10\uparrow\uparrow\uparrow 10 = 10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow 10)))))))$

Dit geeft:

$$10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow 10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}}})))))))=$$

$$=10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow 10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}})))))))$$

waarbij het aantal lagen, met elk een 10, in $10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}}$ gelijk is aan $10\uparrow\uparrow 10$.

Maar dan zijn we nog (lang) niet klaar met het 'opbouwen' van de torens! Laten we daarom dit zojuist 'berekende' immense getal, $10\uparrow\uparrow\uparrow 10$, maar aangeven met een bijzondere letter: de $\Re$.

Dan geldt:

$$10\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 10\uparrow\uparrow\uparrow(\Re) = \underbrace{10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow(\ldots\uparrow\uparrow(10\uparrow\uparrow 10))))}_{\Re\text{ keer}}$$

Die … in de uitdrukking verhullen veel, erg veel (misschien zou …… meer op zijn plaats zijn geweest).

Echter, het getal $10\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ is erg 'klein' vergeleken met $10\underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{\Re\text{ pijlen}}3$.

Andere functies

Ackermann's functie. Zo'n 50 jaar eerder, in 1928, beschouwde Wilhelm Ackermann (1896-1962, Duitsland) enkele getaltheoretische (recursieve) functies [4], die tegenwoordig ook een rol spelen in de mathematische logica (bij recursiviteit en bij berekenbaarheid van functies). Daarbij bracht hij recursieve functies voor optelling en vermenigvuldiging in *hetzelfde* voorschrift onder.

Afzonderlijke recursieve voorschriften voor deze bewerkingen zijn bijvoorbeeld (voor niet-negatieve gehele getallen x en y):

Optelling: $S_r(x,y) = \begin{cases} x, & \text{als } y = 0 \\ (x+1)+S_r(0,y-1), & \text{als } y > 0 \end{cases}$

Voorbeeld.

$S_r(4,3) = 5 + S_r(0,2) = 5 + (1 + S_r(0,1)) = 6 + (1 + S_r(0,0)) = 7 + 0 = 7$

Vermenigvuldiging: $P_r(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{als } y = 0 \\ x + P_r(x, y-1), & \text{als } y > 0 \end{cases}$

Voorbeeld.

$P_r(2,3) = 2 + P_r(2,2) = 2 + (2 + P_r(2,1)) = 4 + (2 + P_r(2,0)) = 6 + 0 = 6$

Ackermann nam ook het bewerkingstype als (derde) variabele op in zijn functie ($t = 0$ voor de optelling en $t = 1$ voor de vermenigvuldiging).
Gemakkelijk te interpreteren, maar *niet* recursief, is dan een definitie als:

$$A_{ov}(x,y,t) = \begin{cases} x + y, & \text{als } t = 0 \\ x \cdot y, & \text{als } t = 1 \end{cases}$$

In Ackermann's *recursieve* definitie zien we alleen de eerste regel van A_{ov} terug:

- $A(x,y,t) = \begin{cases} \text{als } t = 0: & x + y \\ \text{als } t = 1 \text{ en } y = 0: & 0 \\ \text{als } t = 2 \text{ en } y = 0: & 1 \\ \text{als } t > 2 \text{ en } y = 0: & x \\ \text{anders}: & A(x, A(x, y-1, t), t-1) \end{cases}$ met $x, y, t \geq 0$ en geheel

Merk op dat in de definitie van A blijkbaar óók bewerkingstypen met $t > 1$ zijn toegestaan, en óók, dat de laatst definitieregel ervoor zorgt dat, via $t - 1$, op een 'lager' bewerkingstype wordt overgegaan.

2

Voorbeelden.

- $A(4,3,0) = 4 + 3 = 7$. Maar, de volgende functiewaarde heeft wat meer stappen nodig:
- $A(2,3,1) = A(2, A(2,2,1), 0) = 2 + A(2,2,1) = 2 + A(2, A(2,1,1), 0)$
  $= 2 + (2 + A(2,1,1)) = 4 + A(2, A(2,0,1), 0) = 4 + (2 + A(2,0,1))$
  $= 6 + A(2,0,1) = 6 + 0 = 6$

Deze uitkomst mochten we natuurlijk verwachten: met $t = 1$ (vermenigvuldiging) is inderdaad:

$A(2,3,1) = 2 \times 3 = 6$

In de volgende uitwerking (met $t = 2$) gebruiken we dat enkele keren.

- $A(2,3,2) = A(2, A(2,2,2), 1) = 2 \times A(2,2,2) = 2 \times A(2, A(2,1,2), 1)$
  $= 2 \times (2 \times A(2,1,2)) = 4 \times A(2, A(2,0,2), 1)$
  $= 4 \times (2 \times A(2,0,2)) = 8 \times A(2,0,2) = 8 \times 1 = 8 = 2^3$

Uit dit laatste mogen we concluderen dat functie A met $t = 2$ de machtsverheffing is.
Een formeel bewijs daarvan, ook van de in A 'verstopte' vermenigvuldiging, geven we niet. We kunnen echter wel aannemelijk maken dat:

(1)… $A(x, y, 1) = x \cdot y$ en (2)… $A(x, y, 2) = x^y$

'*Bewijs*' *van* (1). Per definitie is: $A(x, 0, 1) = 0$ (2e regel in A). En dat gebruiken we natuurlijk. Dan is:

$A(x,1,1) = A(x, A(x,0,1), 0) = x + A(x,0,1) = x + 0 = x$

En:

$A(x,2,1) = A(x, A(x,1,1), 0) = A(x,x,0) = x + x$; en vervolgens:

$A(x,3,1) = x + x + x = x \cdot 3$

Zodat: $A(x,y,1) = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{\text{aantal } x = y} = x \cdot y$ ◊

'*Bewijs*' *van* (2). Per definitie: $A(x, 0, 2) = 1$ (zie de 3e regel in de definitie van A). Ook hierop vallen we terug, en natuurlijk ook op (1). Dan is:

$A(x,1,2) = A(x, A(x,0,2), 1) = x \cdot A(x,0,2) = x \cdot 1 = x$

En:

$A(x,2,2) = A(x, A(x,1,2), 1) = x \cdot A(x,1,2) = x \cdot x = x^2$,en ook:

$A(x,3,2) = x \cdot x \cdot x = x^3$

Zodat inderdaad: $A(x,y,2) = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{aantal } x = y} = x^y$ ◊

Toch ook maar even kijken naar het 'hogere bewerken' ($t \geq 3$); eerst $t = 3$.

We gebruiken $A(x, 0, 3) = x$ (per definitie; zie de 4e regel in A). Daarmee is:

$A(x,1,3) = A(x, A(x,0,3), 2) = A(x,x,2) = x^x$, en:

$A(x,2,3) = A(x, A(x,1,3), 2) = A(x,x^x,2) = (x)^{x^x} = x^{x^x}$

$A(x,3,3) = A(x, A(x,2,3), 2) = A(x,x^{x^x},2) = x^{x^{x^x}}$

Gevolg: $A(x,y,3) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}$, waarvan het torentje $(y + 1)$ hoog is, met op elke laag een x. Dit is de eerder genoemde *tetratie*: $A(x,y,3) = {}^{y+1}x$.

En ook nog $t = 4$. In dit geval is, per definitie, $A(x, 0, 4) = x$. Zodat:

$A(x,1,4) = A(x, A(x,0,4), 3) = A(x,x,3) = {}^{x+1}x$, en:

$A(x,2,4) = A(x, A(x,1,4), 3) = {}^{A(x,1,4)+1}x = {}^{\left({}^{x+1}x\right)+1}x$

Er is niets nieuws onder de zon… Dit zijn, ook voor kleine waardes van x, 'tot ver in het heelal reikende' torenhoge torens. Ter illustratie:

$A(3,1,4) = {}^4 3 = 3^{3^{3^3}} = 3^{3^{27}} = 3^{7625597484987}$, zodat:

$A(3,2,4) = {}^{A(3,1,4)+1}3 = 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^3}}}}$, met torenhoogte = $3^{7625597484987}+1$ (het mag toch wel één drietje meer zijn?).

Péter's functie. Van de functie A zijn in de loop der tijd ook functies van *twee* variabelen afgeleid, onder meer door Rósza Péter (1905-1977, Hongarije), in 1935 in haar proefschrift:

$$R(x,y)=\begin{cases}\text{als } x=0: & y+1\\ \text{als } x>0 \text{ en } y=0: & R(x-1,1)\\ \text{anders:} & R(x-1,R(x,y-1))\end{cases} \qquad \text{met } x,y\geq 0 \text{ en geheel}$$

De functie R is – maar in feite niet correct – (ook) bekend onder de naam *Ackermann-functie.*

Het berekenen van waardes van R verloopt in eerste instantie redelijk eenvoudig.

- $R(0,0)=1$
- $R(0,1)=2$, $R(0,2)=3$, $R(0,3)=4$, ...

Algemeen: $R(0,n)=n+1$

- $R(1,0)=R(0,1)=2$
- $R(1,1)=R(0,R(1,0))=R(0,2)=3$
- $R(1,2)=R(0,R(1,1))=R(0,3)=4$, ...

Algemeen: $R(1,n)=n+2$

- $R(2,0)=R(1,1)=3$
- $R(2,1)=R(1,R(2,0))=R(1,3)=5$
- $R(2,2)=R(1,R(2,1))=R(1,5)=7$, ...

Algemeen: $R(2,n)=2n+3$

- $R(3,0)=R(2,1)=5$
- $R(3,1)=R(2,R(3,0))=R(2,5)=13$
- $R(3,2)=R(2,R(3,1))=R(2,13)=29$
- $R(3,3)=R(2,R(3,2))=R(2,29)=61$

Algemeen: $R(3,n)=2^{n+3}-3$

Maar dan worden de waardes van R snel groter (en te groot!):

- $R(4,0)=R(3,1)=13$
- $R(4,1)=R(3,R(4,0))=R(3,13)=2^{16}-3=65533$
- $R(4,2)=R(3,R(4,1))=R(3,65533)=2^{65536}-3=$ (een getal van 19.729 cijfers)
- $R(4,3)=R(3,R(4,2))=R(3,2^{65536}-3)=2^{2^{65536}}-3=$ (een getal van ... cijfers)

Het is duidelijk, er ontstaan torentjes.

We zetten enkele 'algemene' uitdrukkingen voor waardes van R nog even onder elkaar, en enigszins 'bewerkt':

$$\begin{aligned} R(1,n)=n+2 &= 2+(n+3)-3 && \text{; optelling}\\ R(2,n)=2n+3 &= 2\times(n+3)-3 && \text{; vermenigvuldiging}\\ R(3,n)=2^{n+3}-3 &= 2\uparrow(n+3)-3 && \text{; machtsverheffing}\\ R(4,n)=\ldots &= 2\uparrow\uparrow(n+3)-3 && \text{; tetratie}\end{aligned}$$

We laten het aan de lezer om na te gaan of $R(5,n)$ gelijk is aan $2\uparrow\uparrow\uparrow(n+3)-3$.

Toren-functie. We kunnen met pijl-omhoog een bijzondere functie F_{ack} (een 'toren-functie') definiëren voor natuurlijke getallen n:

$F_{ack}(n) = n \uparrow^{[n]} n$

waarin $\uparrow^{[n]}$ een bewerkingsteken is dat afhankelijk is van n (ooit gezien?): $\uparrow^{[n]} = \underbrace{\uparrow \ldots \uparrow}_{n \text{ pijlen}}$.

We berekenen de 'eerste' waardes van F_{ack} :

- $F_{ack}(1) = 1 \uparrow^{[1]} 1 = 1^1 = 1$
- $F_{ack}(2) = 2 \uparrow^{[2]} 2 = 2\uparrow\uparrow 2 = 2 \uparrow 2 = 4$
- $F_{ack}(3) = 3 \uparrow^{[3]} 3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3) = 3\uparrow\uparrow(3\uparrow(3\uparrow 3)) = 3 \uparrow\uparrow 7625597484987$, zodat:

$F_{ack}(3) = 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$, waarvan de toren bestaat uit 7.625.597.484.987 lagen.

De waardes van F_{ack} worden wel *Ackermann-getallen* genoemd.[5]

Grootst?

(Een tweegesprek…) Is *googol* een groot getal? Ja. En *googolplex*? Zeker! Hoe groot zijn die getallen dan? Wel: $googol = 10^{100}$ en $googolplex = 10^{googol}$.[6]

Maar er zijn toch wel grotere getallen dan deze? Natuurlijk! Kun je daarvan een voorbeeld geven?

Wat denk je van $F_{ack}(10^{100})$?

En nóg groter, kan dat ook?[7] … Maar het gróótste getal kan niet, hè?

Noten

[1] Zie: *www.mersenne.org* (GIMPS = Great Internet Mersenne Prime Search)

[2] Het aantal cijfers van een macht kan worden bepaald door uitschrijven, of via de 10-logaritme van die macht.
Zo is $^{10}\log 2^{43112609} = 43112609 \times {}^{10}\log 2 = 12978188{,}50\ldots$
Het aantal cijfers van $2^{43112609}$ is dan gelijk aan de 'wijzer' van de logaritme (het getal vóór de komma) + 1 = 12.978.189.

[3] Donald E. Knuth: *Coping With Finiteness*. In: *Science*, vol. 194, nr. 4271 (17 dec. 1976); pp. 1235-1242.

[4] Wilhelm Ackermann (1928): *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*. In: *Mathematische Annalen*, vol. 99; pp. 118-133.

[5] John H. Conway, Richard K. Guy (1996): *The Book of Numbers*. New York: Springer-Verlag; pp. 59-61.

[6] tien sexdeciljard = $10 \times 10^{99} = 10^{100}$

De term 'googol' is in 1938 voor het eerst gebruikt door de toen 9-jarige Milton Sirotta, een neefje van Edward Kasner, aldus Kasner in:
E. Kasner, J.R. Newman (1989): *Mathematics and the Imagination*. Redmond, WA (USA): Tempus Books; pp. 20-27.
Kasner zelf bedacht de term 'googolplex'.

[7] In 1977 publiceerde Ronald Graham (1935-..., USA) een artikel over een vraagstuk op het gebied van de combinatoriek (Ramsey-theorie), waarin hij een extreem groot getal als bovengrens voor de oplossing van dat vraagstuk aangaf. Dát getal staat sindsdien bekend als het grootste getal dat ooit is gebruikt in een wiskundig bewijs: het *getal van Graham*.
Het wordt met een recursieve pijl-omhoog notatie beschreven. In de rij:

$G_0 = 4,\ G_1 = 3 \uparrow^{[G_0]} 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3,\ G_2 = 3 \uparrow^{[G_1]} 3,\ \ldots,\ G_n = 3 \uparrow^{[G_n - 1]} 3$

vinden we voor n = 64 het getal van Graham. De laatste tien cijfers ervan zijn 2464195387.

Leerlingentekst

Grote getallen – leerlingentekst te gebruiken bij dit artikel
21 pagina's, PDF-bestand van ca. 510 Kb
Zie: *www.nvvw.nl//special12/(wb)grootgroter.pdf*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

2

VWP 4 – Splitsen

a.

48 = 4 · (4 + 8)
3468 = 34 · (34 + 68)
112896 = 112 · (112 + 896)
••••×××× = •••• · (•••• + ××××)

Welke cijfers moeten er op de plaats van de stippen (•) en de kruisjes (×) in de laatste regel gezet worden?

b.

Hoe vindt men de paren getallen a, b waarvoor geldt:

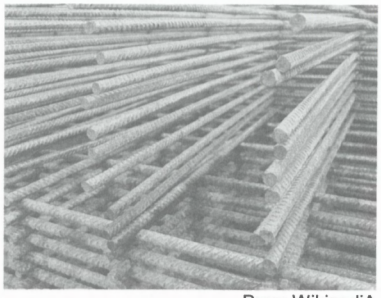
$\overline{ab} = a \cdot (a + b)$

Hierin wordt onder $\overline{ab}$ verstaan het getal dat ontstaat door de beide cijferrijen waaruit a en b bestaan, achter elkaar te schrijven. Is bijvoorbeeld a = 24 en b = 57, dan is $\overline{ab}$ = 2457.
De getallen a en b moeten uit evenveel cijfers bestaan.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Betonijzer

[Gerrie van Doren]



Bron: WikipediA

Vijftien jaar en dan in je avonduren en op je vrije zaterdag betonijzer vlechten.
Ga d'r maar aan staan!
Zwaar werk, maar Sander is er niet vies van. Gewoon werken, dat is waar hij goed in is. Op tijd bij zijn baas zijn, en als er op het einde van de middag nog even langer doorgewerkt moet worden, geen probleem. En als de baas belt op dinsdagmiddag dan kom je natuurlijk nog even in de avonduren werken. Vies worden is geen probleem. Allemaal competenties die een goede werknemer nodig heeft. Iedere baas zal blij worden met Sander.

'*Juf, ik kom er niet uit, wil je effe helpen?*'

Sander zit in de hoek van de klas, voor zich een papier en een rekenmachine.

'*Vorige week dinsdag heb ik gewerkt, en toen heb ik* 6 *euro verdiend. Mijn baas kon het niet precies afrekenen en toen heb ik* 50 *euro gekregen. Hij zei toen dat we het wel tellen bij het loon van de vrijdag en de zaterdag. Op vrijdag en zaterdag heb ik ook gewerkt. Toen was de baas er niet ,maar op vrijdag heb ik* 57 *stuks gemaakt en op zaterdag* 59 *stuks. Moet ik nu nog steeds werken voor die* 50 *euro of ben ik al klaar?*

Even duizelt het me van de getallen en ik vraag hoe hij betaald wordt. Per uur? Per stuk? Hij krijgt, zegt 'ie, 50 cent per stuk. En ja, hij heeft uitgelegd wat 'ie aan het maken is, maar dat weet hij niet meer.
Ik kijk op zijn papier, en zie allerlei getallen staan. 'Leg eens uit', zeg ik, 'Wat heb je geteld?'

'*Wel,* 6 *en* 50 *is* 56', zegt Sander.
'57 *gedeeld door* 2 *is* 27,50.
59 *gedeeld door* 2 *is* 28,50.
27,50 *en* 28,50 *is* 56 *en dan dat weer delen door* 2 *is* 28.
56 *eraf* 28 *is* 28, *dus ik moet nog* 28 *stuks maken.*'

Sander heeft geen benul wat 'ie aan het doen is. Hij goochelt met getallen. Optellen en delen door twee, rekenvaardigheden die hij geleerd heeft. Maar waarom? Waarom optellen of eraf, waarom delen door twee? Hij weet het niet. Echt niet.

Op de basisschool lag hij al ver achter met het niveau van rekenen. In het vmbo viel hij ook uit. Ook bij wiskunde. Maar hij heeft wel andere heel sterke punten. Hij is heel sociaal vaardig. Wil altijd helpen. Zal ook altijd weer opnieuw beginnen als een docent zegt dat het niet goed is. Hij kan doorpakken, nogmaals opnieuw en altijd vragen. Vraag hem niet van alles uit te rekenen, maar doe hem iets voor. Nadoen. Dat is zijn sterke kant.

'*Van de* 50 *euro die je gekregen hebt, heb je al voor* 6 *euro gewerkt. Dus moet je nog voor* 50 – 6 *is* 44 *euro werken. Voor iedere euro moet je er* 2 *maken. Dus er moeten nog* 44 × 2 *is* 88 *stuks gemaakt worden.* 88 – 57 *is* 31. *Dus op zaterdag heb je voor* 59 – 31 *is* 28 *stuks weer geld verdiend.* 28 *stuks is* 14 *euro.*'
Hij lacht. '*Komt goed uit, juf. Het is volgende week carnaval.*'

Of hij zijn lwt-diploma [1] zal halen? Dat is niet waarschijnlijk. Het niveau van metaaltechniek zal te hoog zijn voor hem. Zijn ruimtelijk inzicht is te laag. Er zijn te veel berekeningen, hij zal het niet kunnen overzien. Maar vraag je mij of hij straks zal werken? Ja hoor, en tot tevredenheid van zijn baas en collega's. Een betere collega dan Sander kun je niet hebben.
Ik hoop alleen dat hij het treft met zijn baas, want als die verkeerd wil, dan kun je deze Sander zoveel bedonderen als je wilt. Hij kan niet uitrekenen of zijn salaris klopt, of hij de uren en overuren, die hij zonder meer en zonder mopperen zal maken, goed uitbetaald krijgt.

Maar … twee dagen en een dinsdagavond gewerkt. 50 en 14 is 64 euro. Toch een mooi begin voor de carnaval.

Noot

[1] **Lwt-diploma** – Dit is een variant van het vmbo-basisberoepsgericht diploma. Leerlingen op het lwt leren anders. Het zijn doeners en leren beter in de praktijk. Het niveau is hetzelfde, de weg er naar toe is anders. Op het diploma zal staan: VMBO BB/LWT. Leerlingen, die dit diploma willen halen, moeten examen doen in Nederlands BB en een beroepsgericht vak. Beide vakken moeten met minimaal een 6 afgesloten worden. Deze route kan op een vmbo-school aangeboden worden. De leerling moet dan in de leerjaren 3 en 4 veel stage doen bij speciale gecertificeerde bedrijven met erkende leermeesters.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

VWP 5 – 315 wordt 153

Van het getal 315 is het eerste cijfer weggehaald en als laatste cijfer weer toegevoegd: 153 is de *transposiet* van 315.
Bepaal het kleinste gehele getal waarvan de transposiet de helft is.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Puzzels met getallen

[Luc Gheysens]

Mijn ouders losten nooit getallenpuzzels op en hadden twee zonen.
Onze kinderen heten Liesbeth en Marlies.

Van magisch vierkant tot sudoku

Reeds eeuwenlang zijn wiskundigen gefascineerd door magische vierkanten. Deze vierkantige getallenroosters waarin de natuurlijke getallen van 1 tot en met n^2 in n rijen en n kolommen worden gerangschikt, hebben de magische eigenschap dat de som van de n getallen op elke rij, in elke kolom en op de twee diagonalen telkens gelijk is aan $\frac{1}{2}n(n^2+1)$, de zogenoemde *magische constante* van het vierkant. Het beroemdste vierkant van orde 3 (met 3 × 3 vakjes) is de *Lo Shu* en bevat de cijfers van 1 tot en met 9:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

De vraag rijst meteen of er een algemene formule bestaat voor magische vierkanten van orde 3 als men toelaat dat hierin willekeurige getallen staan. Het was de Franse wiskundige Edouard Lucas (1842-1891) die deze formule vond:

$x+y$	$x-y-z$	$x+z$
$x-y+z$	x	$x+y-z$
$x-z$	$x+y+z$	$x-y$

Voor alle waarden van x, y en z levert het bovenstaande rooster een magisch vierkant op met $3x$ als magische constante.

Magische vierkanten vormden ongetwijfeld de inspiratiebron voor sudoku's die sedert 2005 in heel wat kranten verschenen. Sudoku betekent in het Japans 'uniek cijfer'. In een rooster met 9 × 9 vakjes staan een aantal cijfers (reeds) ingevuld. Het is de bedoeling dat in elke horizontale rij, in elke verticale kolom en in elk (3×3)-blok de cijfers van 1 tot en met 9 telkens precies één keer voorkomen. Voor een dergelijke puzzel is er maar één oplossing mogelijk.[1]

Het was uiteindelijk Wayne Gould, een gepensioneerde rechter uit Matamata in Nieuw-Zeeland die op het lumineuze idee kwam om een computerprogramma te ontwikkelen om sudoku's aan te maken. Hieraan werd ongeveer zes jaar gewerkt en uiteindelijk werd de puzzel in 2004 in het Verenigd Koninkrijk geïmporteerd door de Daily Mail. Sindsdien doken heel wat andere getallenpuzzels (vaak met Japanse namen) op in diverse dagbladen zoals kakuro, sumbrero, kuromasu, futoshiki, hitori. Creatieve geesten bedachten ook allerlei varianten op de originele sudoku, zoals de tridoku, de cross-sudoku en de

chaos-sudoku. Op « *www.puzzelland.com* » kom je hiervoor ongetwijfeld aan je trekken en voor de driedimensionale variant tredoku verwijzen we naar « *www.tredoku.com* ».

Van Loyd tot Dudeney, de twee grootste puzzelbedenkers aller tijden

De Amerikaan Sam Loyd (1841-1911) en de Engelsman Henry Ernest Dudeney (1857-1930) mag men terecht als de twee grootste puzzelbedenkers aller tijden bestempelen. Ze waren tijdgenoten en concurrenten, maar wisselden ook veel ideeën uit. Hun getallenpuzzels en meetkundige vraagstukken verschenen in heel wat kranten en tijdschriften.

De getallenpuzzel waarmee Sam Loyd wereldberoemd werd (maar die hij waarschijnlijk niet zelf heeft bedacht), is ongetwijfeld de 14-15-puzzel, die bestaat uit 15 blokjes en één leeg vakje. Hij loofde 1000 dollar uit voor wie erin zou slagen door het verschuiven van de cijferblokjes in figuur 1 van de situatie 1 naar de situatie 2 over te gaan.

figuur 1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	.

situatie 1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	.

situatie 2

Uiteindelijk bleek deze puzzel onoplosbaar te zijn!

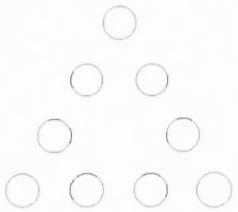
Een leuke puzzel van Dudeney, geïnspireerd op een magisch vierkant van orde 3 is de volgende. In het vierkant hieronder komen de cijfers van 1 tot en met 9 precies één keer voor en het getal op de twee rij (384) is precies het dubbel van het getal op de eerste rij (192). Bovendien is het getal op de derde rij (576) het drievoud van het getal op de eerste rij.

Kan je een andere oplossing bedenken die aan dezelfde voorwaarden voldoet? (*Tip*. Er zijn drie andere oplossingen.)

1	**9**	**2**
3	**8**	**4**
5	**7**	**6**

De puzzels van Loyd en Dudeney werden in de vorige eeuw vooral door Martin Gardner (1914-2010) terug in de belangstelling gebracht in zijn populaire boeken en zijn artikelen in *The Scientific American*, waarin hij ook heel wat originele getallenpuzzels publiceerde. Ook de puzzelredacteur David Wells verzamelde heel wat van deze hersenbrekers in zijn puzzelboeken, die in het Nederlands werden uitgegeven.

In Rusland leefde een gerenommeerd puzzelfanaat, die heel wat leuke getallenpuzzels bedacht, namelijk Boris Kordemsky (1907-1999), een wiskundedocent uit Moskou. Hieronder vind je één van de 359 puzzels uit zijn boek *The Moscow Puzzles*.



figuur 2

Plaats de cijfers van 1 tot en met 9 in de cirkeltjes in het diagram zodat de som van de vier cijfers langs de drie zijden gelijk is aan 17.
En hoe kan je ze rangschikken zodat de som langs de drie zijden telkens gelijk is aan 20?

We vonden zelfs een schikking waarbij de som telkens 21 is. Kan je deze oplossingen vinden?

Van alphametics tot mastermind

Een *cryptarithm* is een getallenpuzzel waarbij in een rekenkundige som verschillende cijfers worden vervangen door verschillende letters of symbolen. Wanneer in een dergelijke puzzel de lettercombinaties bovendien bestaande woorden opleveren, spreekt men van een *alphametic*, een term die door J.A.H. Hunter werd bedacht in 1955.
Het meest gekende voorbeeld van een alphametic is ongetwijfeld de puzzel die Henry Dudeney in 1924 publiceerde:
SEND + MORE = MONEY
met als oplossing 9567 + 1085 = 10652. Andere voorbeelden vind je onder andere op de website « *www.cryptarithms.com* ».
In zijn puzzelboek *Madachy's Mathematical Recreation* verzamelde Joseph S. Madachy, die jarenlang de uitgever was van het Amerikaanse tijdschrift *Journal of Recreational Mathematics*, een aantal leuke alphametics waaronder deze 'Franse' som:

```
  UN
  UN
 DEUX
DOUZE  +
------
SEIZE
```

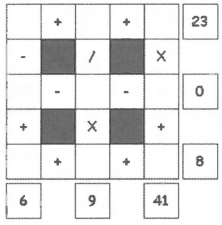
Voor deze puzzel blijken er zelfs twee oplossingen te bestaan:
35 + 35 + 8230 + 84 72 = 92672 en 34 + 34 + 8632 + 87316 = 96016

Ik bedacht de volgende puzzel (verschillende letters stellen ook hier verschillende cijfers voor):

$\sqrt{VROUW} = MAN$

Kan je (met behulp van een rekenmachine) hiervoor een oplossing vinden? En is er meer dan één oplossing?

Getallenpuzzels waarin alle cijfers van 1 tot en met 9 één keer voorkomen, hebben altijd al een magische aantrekkingskracht gehad.
Zo biedt de website « *http://puzzlemaker.discoveryeducation.com* » de mogelijkheid om zelf een aantal leuke getallenpuzzels te maken (en op te lossen).
In figuur 3 zie je een voorbeeld van een 'Math Square', waarin naast elke rij en onder elke kolom de uitkomst staat van een bewerking en waarbij alle cijfers van 1 tot en met 9 precies één keer moeten ingevuld worden.



figuur 3

Een ander soort getallenpuzzel waarbij een codegetal moet worden geraden, vindt zijn oorsprong in het populaire spelletje *Mastermind*. Hierbij is het de bedoeling een geheim getal van drie cijfers te vinden en in te vullen in de onderste vakjes.
Telkens worden eerst vier getallen van drie cijfers gegeven waarvan enkele kenmerken worden verklapt die zij gemeen hebben met het geheime getal:

- ● voor elk juist cijfer op de juiste plaats;
- ❍ voor elk juist cijfer dat niet op de juiste plaats staat.

Opgelet! In het geval dat een cijfer meer dan één keer voorkomt in het gezochte getal, geldt het volgende: het krijgt een rondje als het in het geheime getal één keer voorkomt; het krijgt twee rondjes als het in het geheime getal twee keer voorkomt, enzovoort. De zwarte rondjes worden eerst toegekend, dan de witte. Elk hokje van het gegeven getal kan niet meer dan één rondje (zwart of wit) toegewezen krijgen.
Voorbeeld.

1	8	5	❍
8	7	5	● ❍
5	7	4	●
4	0	1	❍

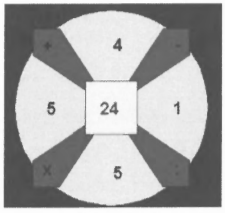
Van 'des chiffres en des lettres' tot flippo's

In het begin van de jaren '70 dook op de Franse televisie een spelprogramma op dat bestond uit twee delen: twee kandidaten moesten met behulp van een aantal willekeurig gekozen letters een zo lang mogelijk woord proberen te vormen en daarna moesten ze met behulp van 6 getallen (kleiner dan 10 of veelvouden van 5) via de hoofdbewerkingen (+, –, × en ÷) een willekeurig gekozen getal tussen 100 en 999 zo dicht mogelijk proberen te benaderen. Niet alle zes getallen hoefden hiervoor gebruikt te worden. Het programma kreeg de evidente naam 'Des chiffres en des lettres' en verscheen zowel op de Vlaamse als op de Nederlandse televisie onder de naam 'Cijfers en letters'.
Ik verbaasde me er steeds over hoe één van de medewerkers (die bekend stond als 'het rekenwonder') er haast altijd in slaagde exact het getal van drie cijfers als uitkomst te krijgen.

Een voorbeeld. Vorm met de getallen 6, 10, 25, 50, 8 en 75 het getal 456.
Oplossing. ((50 : 25) + 75) × 6 – 10 + 4 = 456.

Voor wie over een eenvoudig computerprogramma beschikt (zoals misschien ook 'het rekenwonder' uit de TV-uitzending er eentje had?) is het oplossen van een dergelijke rekensom nu een koud kunstje. Je vindt een dergelijk rekenprogramma bijvoorbeeld op de website van collega Aad van de Wetering (*http://home.wxs.nl/~avdw3b/aad.html* – zoek daar naar het programma 'Reken').

Een tweede soort getallenpuzzel die gemakkelijk via een dergelijk rekenprogramma kan worden opgelost, is het zogenaamde 24-spel, dat in de jaren '90 op de zogenoemde flippo's in zakjes chips opdook. Op deze flippo's stonden vier cijfers afgebeeld en het was de bedoeling om hiermee met de vier hoofdbewerkingen precies 24 te vormen. Alle cijfers moesten bovendien precies één keer gebruikt worden.
Een eenvoudig voorbeeld staat in figuur 4.



figuur 4

Oplossing. $5 \times 4 + (5 - 1) = 24$

Op de website « *www.fi.uu.nl/toepassingen/03002/toepassing_rekenweb.html* » van het Freudenthal Instituut kan je dit spelletje, dat de rekenvaardigheid stimuleert en bovendien de volgorde van de bewerkingen leert te gebruiken, online spelen.
Een leuke uitdaging waarmee de doorsnee puzzelaar die vertrouwd is met het 24-spel, heel wat moeite kan hebben, is de vraag om met behulp van de vier cijfers 1, 4, 5 en 6 via de vier hoofdbewerkingen +, ×, – en : het getal 24 te vormen.
Hiervoor zijn er twee oplossingen, namelijk:
$6 : ((5 : 4) - 1) = 6 : \frac{1}{4} = 24$ en $4 : (1 - (5 : 6)) = 4 : \frac{1}{6} = 24$

Van Diophantos tot Augustus de Morgan

Heel wat getallenpuzzels zijn vraagstukjes waarbij men met behulp van een vergelijking met één onbekende of via een stelsel van twee of meer vergelijkingen met twee of meer onbekenden tot een oplossing kan komen. Hieronder volgt een zestal voorbeelden, waarbij sommige opgaven 'klassiekers' zijn in het domein van de getallenpuzzels.

Probleem 1 – De Griekse wiskundige Diophantos leefde in de derde eeuw na Chr. in Alexandrië. Naar hem worden vergelijkingen waarbij men gehele getallen als oplossing zoekt, *diophantische vergelijkingen* genoemd. Over zijn leeftijd kennen we het volgende raadsel:
'Diophantos' jeugd maakte het zesde deel van zijn leven uit; na verder een twaalfde kreeg hij een baard; na verder een zevende trouwde hij en zijn zoon werd vijf jaar daarna geboren; de zoon werd maar half zo oud als zijn vader en de vader overleed vier jaar na de zoon. Hoe oud werd Diophantos?'

Oplossing. Als x de leeftijd is van Diophantos, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de volgende vergelijking: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$ met als oplossing $x = 84$.

Probleem 2 – Drie mannen bezitten elk een aantal goudstukken. De eerste geeft aan de beide anderen evenveel goudstukken als ze al hadden. Daarna doet de tweede hetzelfde en tenslotte de derde ook. Op het einde hebben ze elk 8 goudstukken. Hoeveel hadden ze er bij het begin? (Probleem van Claude Gaspard Bachet, 18de eeuw.)
Oplossing. Men kan dit probleem op de klassieke manier oplossen via een stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden. Men kan echter ook 'achteruit' redeneren: op het einde hebben ze elk 8 euro's, dus vooraleer de derde persoon er uitdeelde aan beide anderen hadden ze er resp. 4, 4 en 16. Vooraleer de tweede persoon er uitdeelde had de eerste er 2 en de derde 8 en bijgevolg had de tweede er 14. Dan had de tweede er aanvankelijk 7 en de derde 4, zodat de eerste 13 goudstukken had (aangezien het totaal aantal goudstukken gelijk is aan 24).

Probleem 3 – Een moeder is 21 jaar ouder dan haar dochter. Over 6 jaar zal die moeder 5 keer zo oud zijn als haar dochter. Waar bevindt de vader zich momenteel?
Oplossing. Noem x de leeftijd van de dochter en y de leeftijd van de moeder. Dan is:

$$\begin{cases} y = x+21 \\ y+6 = 5(x+6) \end{cases}$$

met als oplossing $x = -\frac{3}{4}$, dat is 9 maanden vóór de geboorte. De vader bevindt zich dus heel dicht bij de moeder…

Probleem 4 – Twee Arabieren van wie de ene 5 broden heeft en de andere 3, ontmoeten een rijke en uitgehongerde derde Arabier. Ze besluiten hun broden te delen zodat iedereen even veel te eten krijgt. Uit dankbaarheid schenkt de rijke Arabier hun na de maaltijd 8 goudstukken. De eerste Arabier beweert dat hij recht heeft op 5 goudstukken zodat de tweede er dan 3 krijgt. De tweede Arabier stelt echter voor dat ze er elk 4 zouden krijgen. Wie heeft gelijk?
Oplossing. Als men de 8 broden telkens in 3 gelijke stukken verdeelt, heeft men 24 stukken. Elke Arabier eet dus 8 stukken. De eerste Arabier heeft dus 7 stukken afgestaan en de tweede slechts één stuk zodat de eerste recht heeft op 7 goudstukken en de tweede slechts 1 goudstuk ontvangt.

Probleem 5 – De Britse wiskundige en logicus Augustus de Morgan overleed in 1871 en was x jaar oud in het jaar x^2. In welk jaar werd hij geboren?
Oplossing. $43^2 = 1849$ is de enige mogelijkheid. De Morgan werd dus geboren in 1806.

Noot

[1] **[Red.]** Zie ook het artikel van Bart Windels onder de titel *Sudoku / De verleiding van het lege vakje* in deze *Euclides Special.*

Literatuur

- H.E. Dudeney (1958): *Amusements in Mathematics*. New York: Dover Publications Inc.
- A. van den Essen (2007): *Magische vierkanten / Van Lo Shu tot Sudoku*. Diemen: Veen Magazines.
- L. Gheysens (2007): *Twee plus twee is vijf*. Brugge: die Keure.
- A. Kordemsky (1975): *The Moscow Puzzles / 359 mathematical recreations*. Pelican Books (reprint Dover Publications, 1992).
- S. Loyd (1914): *Cyclopedia of 5000 Puzzles*. Privé-uitgave.
- J.S. Madachy (1966): *Madachy's Mathematical Recreations*. New York: Dover Publications, New York.
- M. Tahan (2009): *De man die kon rekenen*. Amsterdam: Uitgeverij Sijthoff.
- D. Wells (1996): *Merkwaardige en interessante puzzels*. Amsterdam: Uitgeverij Bert Bakker.

Oplossingen van de puzzels in de tekst

De puzzel van Dudeney

2	1	9
4	3	8
6	5	7

2	7	3
5	4	6
8	1	9

3	2	7
6	5	4
9	8	1

De getallenpuzzel van Kordemsky

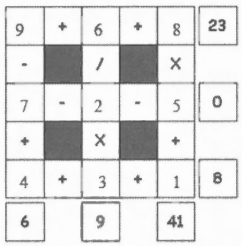
2	5	6
5 4	7 3	9 7
9 8	6 4	1 2
1 6 6 3	2 9 1 8	4 3 8 5
som = 17	som = 20	som = 20

6
7 4
5 2
3 8 1 9
som = 21

√(vrouw) = man

$$\sqrt{43681} = 209 \text{ en } \sqrt{67801} = 259$$

Math Square

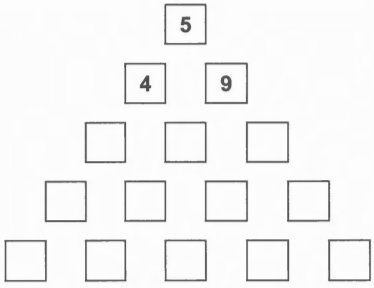


Mastermind

0	7	8

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

EEN ANDERE 15-PUZZEL



Vijftien kaarten zijn genummerd van 1 tot en met 15.

Drie van de kaarten zijn reeds in nevenstaand schema neergelegd; de overige moeten er nog in worden opgenomen.

5 = 9 – 4

Het (absolute) verschil van de getallen op twee naast elkaar liggende kaarten staat op de kaart die er recht boven ligt.

De nog neer te leggen kaarten moeten hieraan óók voldoen!
Leg de kaarten op de juiste plaats!

Het schema hierboven bestaat uit 5 rijen. Het is ook mogelijk opvolgend genummerde kaarten (steeds beginnend met 1) te plaatsen in zo'n schema met 2, 3 en 4 rijen.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Getallen in letters
VOORBEELDEN VAN GETALNAMEN

1 Getal met de meeste klinkers per medeklinker.
3 Het grootste getal dat bestaat uit een rijtje medeklinkers gevolgd door een rijtje klinkers.
7 Het kleinste getal waarvan alle letters voorkomen in kleinere getallen.
10 Het enige getal dat in hoofdletters geschreven evenveel rechte lijntjes telt als het getal is.
12 Het kleinste getal met zes letters.
14 Het kleinste getal met drie e's.
22 Het kleinste getal met twee w's.
26 Dit getal is gelijk aan het aantal letters.
35 Het kleinste getal met tien verschillende letters.
39 Is drie keer zo groot als zijn lengte.
41 Het kleinste getal waarin eenzelfde letter vijf keer voorkomt.

Alfametica In onderstaande identiteiten stelt elke letter een cijfer (0 t/m 9) voor. De codering in beide is verschillend.

3 × ZES + 2 × TWAALF = 6 × ZEVEN

3 × ZEVEN + ELF = 4 × ACHT

Tweetalig Frans: 7 1 9 13 et 3 (Louise Lévêque de Vilmorin, 1954)
Nederlands: 't Is een erg nauw ei.

Romeins 38 = XXXVIII, het laatste getal in het alfabetisch geordende 'woordenboek' van de getallen in Romeinse cijfers.

Ideaal Een getalnaam is *ideaal* als zijn lengte in letters (*L*) deelbaar is op het getal waarvan hij de naam is.

getalnaam	*L*
vier	4
zes	3
acht	4
twaalf	6
dertig	6

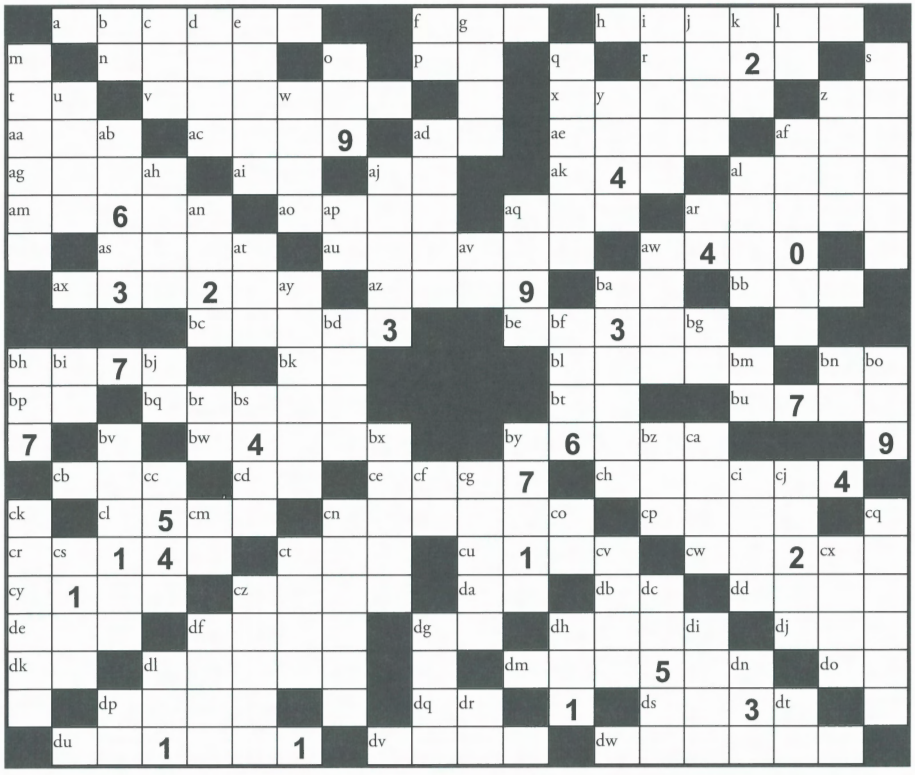
getalnaam	*L*
negenendertig	13
zestig	6
zesenzestig	11
eenennegentig	13
achtennegentig	14

Bron (onder meer):
Battus (2002): *Opperlans! Taal- & letterkunde*. Amsterdam: Em. Querido's Uitgeverij bv.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Kruisgetalpuzzel

[Anne Laning]



Legenda

Vul getallen in volgens de hiernaast staande omschrijving, waarbij:

fac = faculteit; dus een getal uit de rij: $n!$ = 1, 2, 6, 24, 120, …
fib = getal in de rij van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …
macht2 = tweede macht, kwadraat (1, 4, 9, 16, …)
macht3 = derde macht (1, 8, 27, 64, …)
macht4 = vierde macht (1, 16, 81, 256, …)
macht5 = vijfde macht (1, 32, 243, 1024, …); enzovoort
perfect = perfect (volmaakt) getal; d.w.z. een getal dat gelijk is aan de som van z'n *echte* delers: 6 (= 1 + 2 + 3), 28 (= 1 + 2 + 4 + 7 + 14), 496, …
priem = priemgetal: 2, 3, 5, 7, 11, 13, …
vriend = bevriend getal; d.w.z. een getal *a* waarvan de som van de *echte* delers gelijk is aan een getal *b* waarvan de som van de *echte* delers weer gelijk is aan *a* (220, 284, 1184, 1210, 2620, 2924, …)

N.b. Geen van de getallen begint met een 0. Elk getal wordt slechts één keer gebruikt, met uitzondering van 13 en 61, die twee keer gebruikt worden.

Omschrijving

horizontaal								verticaal			
a	macht7	bb	fib	df	priem			u	macht2	bv	macht2
f	macht2	bc	priem	dg	priem			w	macht3	bx	priem
h	macht4	be	priem	dh	priem			y	priem	by	priem
n	macht2	bh	macht2	dj	mach3			z	macht2	bz	macht5
p	priem	bk	priem	dk	macht4			ab	priem	ca	macht2
r	priem	bl	vriend	dl	fib			ad	macht2	cc	priem
t	fib ≠ priem	bn	priem	dm	macht3			af	vriend	cf	priem
v	macht2	bp	priem	do	fib			ah	vriend	cg	macht2
x	macht2	bq	macht3	dp	vriend			aj	priem	ci	macht4
z	priem	bt	priem	dq	macht6			al	macht2	cj	priem
aa	priem	bu	macht2	ds	priem			an	macht2	ck	macht3
ac	priem	bw	priem	du	priem			ap	priem	cm	priem
ad	priem	by	macht2	dv	macht3			aq	priem	cn	macht3
ae	fib	cb	priem=aq – 4	dw	vriend			ar	fib	co	macht3
af	priem	cd	priem					at	priem	cq	macht2
ag	macht5	ce	fib	verticaal				av	macht2	cs	priem
ai	fib	ch	macht2	b	priem			aw	macht2	ct	macht2
aj	perfect	cl	priem	c	macht3			ay	macht2	cv	priem
ak	priem	cn	vriend	d	macht2			ba	macht2	cx	perfect
al	priem	cp	macht2	e	priem			bd	macht3	cz	macht3
am	priem	cr	priem	f	priem			bf	macht2	dc	macht2
ao	vriend	ct	vriend	g	macht2			bg	priem	df	macht2
aq	fib	cu	priem	i	priem			bh	priem	dg	macht2
ar	priem	cw	priem	j	macht5			bi	macht2	dh	priem
as	macht2	cy	priem	k	priem			bj	priem	di	macht3
au	macht5	cz	macht2	l	fib ≠ priem			bm	priem	dl	priem
aw	macht2	da	priem	m	macht2			bn	macht4	dn	priem
ax	macht2	db	macht5	o	macht2			bo	priem	dp	macht2
az	priem	dd	vriend	q	macht3			br	fac	dr	priem
ba	priem	de	fib	s	macht4			bs	priem	dt	priem

Onder de inzenders van de juiste oplossing van deze puzzel worden drie boekenbonnen van elk € 30,00 verloot.
Oplossingen kunnen worden gestuurd naar « *redactie-euclides@nvvw.nl* » onder vermelding van 'Getalpuzzel Special', en moeten **uiterlijk 15 juni 2012** door de redactie van *Euclides* ontvangen zijn.

Opmerking.
De puzzel is ook te downloaden via « *www.nvvw.nl/special12/laning.pdf* » (ca. 250 Kb).

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Sudoku
DE VERLEIDING VAN HET LEGE VAKJE

[Bart Windels]

In juni 2008 werd in Sydney een drugsproces stopgezet, dat drie maanden had geduurd en meer dan een miljoen Australische dollars had gekost. De oorzaak: vijf juryleden hadden sinds week 2 van het proces sudoku's opgelost in plaats van naar de 105 getuigen te luisteren.

De populariteit van deze intrigerende denkpuzzel, die sinds 2005 een wereldwijde hype is, is wellicht het gevolg van de bijzonder eenvoudige regels: Vul een (9×9)-rooster aan zodat op elke rij én in elke kolom én in elk vet omlijnd (3×3)-deelrooster de cijfers 1 tot en met 9 juist één keer voorkomen.
Een mogelijke opgave staat in figuur 1:

			4		1			
		9				1		
	6		3		7		9	
6		1				7		8
9		5				4		3
	3		2		4		5	
		6				8		
			6		8			

figuur 1

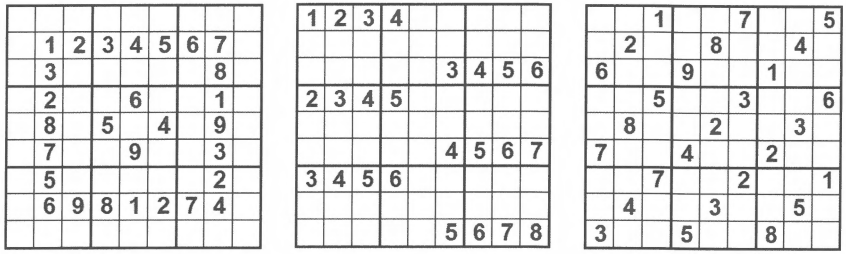
数独

De oplossingen van de sudoku's staan aan het einde van dit artikel.

De eerste sudoku verscheen in 1979 in de Verenigde Staten. Enkele jaren later werd de puzzel erg populair in Japan, waar hij ook zijn naam kreeg (*sū* = getal, *doku* = alleen; elk getal moet immers één keer voorkomen in elke rij en elke kolom). In 2004 verscheen de eerste sudoku in *The Times* in het Verenigd Koninkrijk en een jaar later vond men deze puzzels in zowat elke Europese krant.

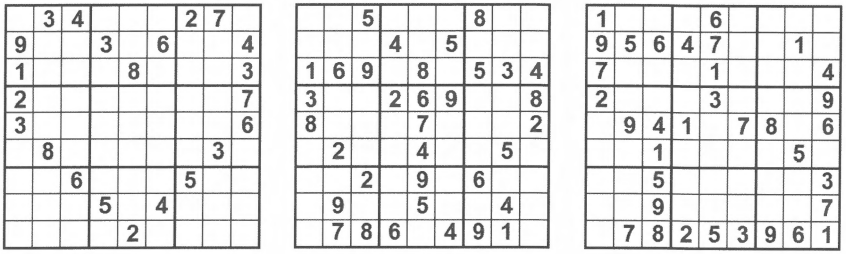
Esthetisch verantwoorde sudoku's

De sudoku's die men in de krant vindt, hebben meestal een erg grillige vorm. Er is zelden regelmaat of symmetrie te vinden bij de gegevens. Dat komt omdat de meeste kranten computergegenereerde opgaven gebruiken. Het kost heel wat meer moeite om een sudoku te ontwerpen waarin wél een meetkundig patroon waar te nemen is bij de gegevens. De volgende sudoku's zijn voorbeelden.



figuur 2

Sommige puzzelaars worden meer bekoord door gegevens die een leuke figuur vormen. Onderstaande bekende voorbeelden (zie figuur 3) zijn gerangschikt volgens stijgende moeilijkheidsgraad. Het 'katje' (rechts) is dus niet zo zachtaardig als het lijkt.



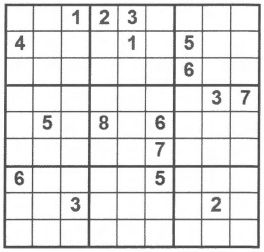
figuur 3

Minimaal aantal gegevens

Bij de meeste sudoku's in de krant zijn er ongeveer 30 gegevens. Bij de moeilijker opgaven blijft het aantal vooraf ingevulde vakjes soms beperkt tot 26. Wiskundigen vragen zich natuurlijk af of het ook met minder gegevens kan: *hoeveel ingevulde vakjes zijn er minimaal nodig opdat het volledige rooster uniek is bepaald?*

Op dit ogenblik is dat nog een open vraag. Er is al met veel computergeweld geëxperimenteerd op de 6.670.903.752.021.072.936.960 verschillende (volledig ingevulde) sudoku-roosters. Men vermoedt het volgende.

Vermoeden 1 – Het minimaal aantal gegevens in een sudoku is 17.
Hieronder vind je zo'n (vermeende) minimale sudoku.



figuur 4

Er zijn zo'n 40.000 sudoku's met 17 gegevens bekend en bij geen enkele kan een vakje worden weggelaten. Maar een bewijs dat er *geen* sudoku met 16 gegevens bestaat, is nog niet geleverd.

Bovenstaande sudoku vertoont geen symmetrie. Veel kranten publiceren zulke asymmetrische raadsels. Aantrekkelijker zijn de zogenoemde *symmetrische sudoku's* waarvan de

vooraf ingevulde vakjes puntsymmetrisch zijn ten opzichte van het middelste vakje. Bij een symmetrische sudoku volstaan 17 gegevens wellicht niet.

Vermoeden 2 – Het minimaal aantal gegevens in een symmetrische sudoku is 18.
In figuur 5 staat zo'n minimale symmetrische sudoku.

9					8			
					7			6
		5					4	3
	6	4						
						9	2	
7	8					1		
2			6					
			3					4

figuur 5

Maximale minimale sudoku's

Men kan zich ook de omgekeerde vraag stellen: hoeveel vakjes kunnen er *maximaal* worden ingevuld in een *zinvolle* sudoku-opgave? Natuurlijk mogen er geen gegevens zijn die de puzzelaar zelf kan vinden. Het weglaten van één gegeven moet ervoor zorgen dat er meer oplossingen zijn. In wiskundige termen: de sudoku moet *minimaal* zijn.

Vermoeden 3 – Het maximaal aantal gegevens in een minimale sudoku is 39.
Hieronder vind je zo'n (voorlopig) maximale minimale sudoku.

		1			7	2	5	
7					3		1	9
2	9		6		1	7		3
1		7	5	2	6	9		
								1
9		6	1		4	5	2	7
			3					
		3		6	5			2
6		9	4		2	3		5

figuur 6

Deze sudoku heeft 39 gegevens. Dit is zeer opmerkelijk: bijna de helft van de vakjes is al ingevuld en toch kan geen enkel gegeven worden weggelaten, want dan zouden er verschillende oplossingen mogelijk zijn.
Men zou kunnen denken dat deze sudoku – met zoveel gegevens – een gemakkelijke opgave is, maar dat is niet het geval!

Orthogonale sudoku's

Aangezien op elke rij én in elke kolom elk cijfer juist één keer moet voorkomen, is een opgeloste sudoku een *Latijns vierkant*.
Wie denkt aan Latijnse vierkanten, denkt spontaan ook aan *orthogonale* Latijnse vierkanten. Twee Latijnse vierkanten noemt men *orthogonaal* als alle koppels (a, b) gevormd door een element a uit het eerste vierkant en het overeenkomstig element b uit het tweede vierkant, verschillend zijn.

Dit wiskundig begrip kan worden vertaald naar een – niet al te eenvoudige – variant van de sudoku: de *orthogonale sudoku*. De spelregels zijn: vul twee vierkanten aan zoals in een gewone sudoku, waarbij bovendien alle koppels van overeenkomstige elementen verschillend zijn.
Hieronder staat zo'n orthogonale sudoku.

6			7			5		
					2		8	
7		4		3				2
	2			4		3		
3			9		6			7
		7		1			2	
2				7		1		3
	5		2					
		8			3			9

én

2			5			8		
	9				8		1	
		8		1				5
3			6		9			7
		9				2		
8			3		1			9
1				6		7		
	6		7				2	
		4			2			6

figuur 7

Merk op dat elk van beide sudoku's afzonderlijk geen unieke oplossing heeft. Toch is er maar één manier om ze zodanig aan te vullen dat de sudoku's bovendien orthogonaal zijn.

Sommige puzzelaars schrijven beide vierkanten liever in één rooster; zie figuur 8.

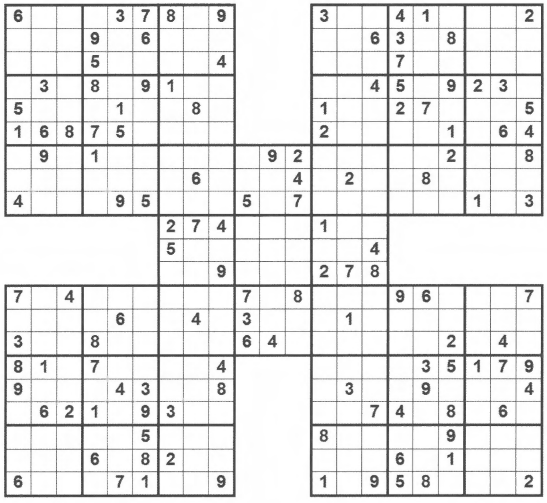
62			75			58		
	_9				28		81	
7_		48		31				25
_3	2_		_6	4_	_9	3_		_7
3_		_9	9_		6_	_2		7_
_8		7_	_3	1_	_1		2_	_9
21				76		17		3_
	56		27				_2	
		84			32			96

figuur 8

In elke rij, in elke kolom en in elk vet omlijnd (3×3)-deelrooster moeten de eerste cijfers verschillend zijn en moeten ook de tweede cijfers verschillend zijn. Alle getallen van 11 tot 99 die geen 0 bevatten, moeten precies één keer voorkomen.

Samoerai-sudoku

Sommige sudoku-liefhebbers lossen met plezier meer dan één sudoku per dag op. Voor hen is de *samoerai-sudoku* een verfrissende variant: vijf sudoku's waarvan er één een (3×3)-deelrooster gemeenschappelijk heeft met elk van de vier andere.
De opgave wordt dus: Vul de lege vakjes aan met de cijfers 1 tot en met 9 zodat in elk vet omlijnd (3×3)-deelrooster én in elke rij en elke kolom van elk van de vijf (9×9)-deelroosters de cijfers 1 tot en met 9 juist één keer voorkomen. Zie figuur 9.



figuur 9

De meeste mensen zien in deze figuur eerder een zegevierende sumo-worstelaar dan een samoerai-krijger, maar toch wordt de puzzel naar deze laatste genoemd.

Superdoku's

De regels voor sudoku zijn: Vul een $(n^2 \times n^2)$-rooster aan zodat op elke rij én in elke kolom én in elk vet omlijnd $(n \times n)$-deelrooster de getallen van 1 tot en met n^2 juist één keer voorkomen, met $n = 3$.

Natuurlijk hoeft n niet gelijk te zijn aan 3. Voor $n = 1$ is de puzzel triviaal. Voor $n = 2$ krijg je een eenvoudige puzzel als in figuur 10. Deze variant noemt men wel eens *baby-sudoku*.

1	2		
3			
			3
		2	

figuur 10

Voor $n > 3$ spreekt men van een *super-sudoku* of *superdoku*. Gelukkig neemt de moeilijkheidsgraad niet recht evenredig toe met n. De oplossingstijd wordt wél veel langer als n toeneemt.

In figuur 11 staat een (eenvoudige) superdoku met $n = 4$.

16		3	8	10	15	1		5	12		4					6								
	15	7	13	12		3			2	14	10		1			5								
				7	11	14			1	13	8		15	12										
10		14	12	16		5		9	7	6		11		13	3									
12	10	2			13	8			14	3		16	4		9									
		1		3					10	4		13	6	14										
	14	4			10	16				15	2	3	8	1	12									
8	3	13	11	4		6	14		16					15										
14	7	6	2	11		13	10		15		12	1												
		16	15	9		4	12	2		7			11	10	14									
			3			7	1		11		14		12		15									
4	12				14				9	1		7	16	2	13									
3		12	14	1						8	13	9	5	11										
13	9	15					16	14		2			7	3	4									
7	11	8	5		3	9	15	10	4				13		2									
		10			12		5				16	15		8										

figuur 11

In de hieronder staande opgave, met $n = 5$, zijn de getallen 1 tot en met 25 omwille van de overzichtelijkheid vervangen door de letters **A** tot en met **Y**.

				R		V		X			D		O	N	J	U		S	P	A	Y	Q	H	K	
I	G				W	L	E	K		F			H	V	A		R					M			
S	Q	N		E			T	P	D	J	B	Y	X	K					M				G	W	
A	L				Y	R			F		G				Q		K		X		J		B		
K	Y	T	X	O		N	H		S						B	D				L			V	P	
P	T		L	C	K		D		J		E	W			I					S		O		X	
U					G	I	C				M				R	S	N	F	E	Y	Q		J	V	
R	J	G		W	H	U		F	P			K	N	Q		A	M	D	T			L			
			Q		V	S				I	X	H			Y	W	U	P		M		D	F		
F	I			D	E	T	Q	N		G	U	B		O			X	C		W	H	K			
N	D	I	M		T	Y	J	U			Q		P		K	L	O	V	B			H		F	
X	R	L	O				K	S	I		T		G					A		P	E			Y	
	K	W	P				V		L	C	I	A	Y	H	F	M		E	R	G				B	
	U		E	A	F		O						L		P				I		S				
V		Y	F	T	R	P		G		B			K	W		Q		J	S	I	X			L	
		X		P		C		I	W	M	Y			B	L		S	G	A	Q	V	J	E		
	W	O	A	J	X	F						Q			N	P	I			C	M	R	K	D	
			R	M		E		J		P	W	U		I	H		C	Q	D				Y		
		Q	N		L	G	R	M	K	X	J	C		A				U			P	I			
E			I						H	K	N	D	T		X	R	J	M		B	W	G	S	O	
Q	E	R	C		N				X	O	P	J	B	S			W	K	U	V	G		A		
	P	D		F	B	K		Q	G	V			C	Y			A		J	T	O	X	R	N	
Y			B	K		H	P	E									V		Q			W	I	S	
M	V	A		L			I	R	Y	W		T	Q	X	D	F		N						E	
W	N		T				V	M		A			I			B	Y	R	O					Q	

figuur 12

De ware sudoku-adept kan nog op zoek gaan naar andere boeiende sudoku-varianten. Zo is er de *diagonaal-sudoku*, waarin ook op de diagonalen de cijfers 1 tot en met 9 moeten voorkomen, en de *hyper-sudoku*, waarin dat moet gelden voor enkele ingekleurde gebieden.

Heel fraai zijn ook de varianten zónder ingevulde vakjes. Zo is er de *samunamupure* of *killer-sudoku* (die heeft gebieden met een opgegeven som, zoals in *kakuro*) en de *groter-dan-sudoku* (waarbij de orde tussen aanliggende vakjes wordt opgegeven). Als twee spelers online eenzelfde sudoku invullen en elkaar telkens de toegang tot het rooster 10 seconden onmogelijk maken door het invullen van een vakje, spreken we van *sociale sudoku.*

Veel plezier!

Oplossingen

7	5	3	4	9	1	2	8	6
4	2	9	8	6	5	1	3	7
1	6	8	3	2	7	5	9	4
6	4	1	5	3	9	7	2	8
3	8	2	7	4	6	9	1	5
9	7	5	1	8	2	4	6	3
8	3	7	2	1	4	6	5	9
5	1	6	9	7	3	8	4	2
2	9	4	6	5	8	3	7	1

figuur 1

4	9	6	1	8	7	3	5	2
8	1	2	3	4	5	6	7	9
7	3	5	6	2	9	4	8	1
9	2	3	7	6	8	5	1	4
6	8	1	5	3	4	2	9	7
5	7	4	2	9	1	8	3	6
1	5	8	4	7	6	9	2	3
3	6	9	8	1	2	7	4	5
2	4	7	9	5	3	1	6	8

figuur 2a

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

figuur 2b

4	3	1	2	6	7	9	8	5
5	2	9	3	8	1	6	4	7
6	7	8	9	5	4	1	2	3
2	9	5	8	1	3	4	7	6
1	8	4	7	2	6	5	3	9
7	6	3	4	9	5	2	1	8
8	5	7	6	4	2	3	9	1
9	4	6	1	3	8	7	5	2
3	1	2	5	7	9	8	6	4

figuur 2c

6	3	4	9	5	1	2	7	8
9	2	8	3	7	6	1	5	4
1	5	7	4	8	2	6	9	3
2	6	5	8	4	3	9	1	7
3	4	9	7	1	5	8	2	6
7	8	1	2	6	9	4	3	5
4	9	6	1	3	7	5	8	2
8	7	2	5	9	4	3	6	1
5	1	3	6	2	8	7	4	9

figuur 3a

7	4	5	9	3	6	8	2	1
2	8	3	4	1	5	7	6	9
1	6	9	7	8	2	5	3	4
3	5	4	2	6	9	1	7	8
8	1	6	5	7	3	4	9	2
9	2	7	8	4	1	3	5	6
4	3	2	1	9	7	6	8	5
6	9	1	3	5	8	2	4	7
5	7	8	6	2	4	9	1	3

figuur 3b

1	4	3	8	6	9	2	7	5
9	5	6	4	7	2	3	1	8
7	8	2	3	1	5	6	9	4
2	6	7	5	3	8	1	4	9
5	9	4	1	2	7	8	3	6
8	3	1	9	4	6	7	5	2
6	2	5	7	9	1	4	8	3
3	1	9	6	8	4	5	2	7
4	7	8	2	5	3	9	6	1

figuur 3c

5	6	1	2	3	8	7	4	9
4	7	2	6	1	9	5	8	3
8	3	9	5	7	4	6	1	2
9	4	6	1	5	2	8	3	7
3	5	7	8	4	6	2	9	1
1	2	8	3	9	7	4	5	6
6	1	4	9	2	5	3	7	8
7	8	3	4	6	1	9	2	5
2	9	5	7	8	3	1	6	4

figuur 4

9	3	2	4	6	8	5	1	7
4	1	8	5	3	7	2	9	6
6	7	5	1	2	9	8	4	3
1	6	4	2	9	5	3	7	8
8	2	9	7	1	3	4	6	5
3	5	7	8	4	6	9	2	1
7	8	6	9	5	4	1	3	2
2	4	3	6	8	1	7	5	9
5	9	1	3	7	2	6	8	4

figuur 5

8	3	1	9	4	7	2	5	6
7	6	4	2	5	3	8	1	9
2	9	5	6	8	1	7	4	3
1	4	7	5	2	6	9	3	8
3	5	2	7	9	8	4	6	1
9	8	6	1	3	4	5	2	7
5	2	8	3	1	9	6	7	4
4	7	3	8	6	5	1	9	2
6	1	9	4	7	2	3	8	5

figuur 6

62	91	23	75	89	46	58	37	14
55	39	16	64	97	28	73	81	42
74	87	48	52	31	13	66	99	25
93	22	61	86	45	79	34	18	57
36	15	59	98	24	67	82	43	71
88	44	77	33	12	51	95	26	69
21	63	92	49	76	85	17	54	38
19	56	35	27	68	94	41	72	83
47	78	84	11	53	32	29	65	96

figuur 7 / figuur 8

6	5	4	2	3	7	8	1	9
8	7	1	9	4	6	5	3	2
9	2	3	5	8	1	6	7	4
7	3	2	8	6	9	1	4	5
5	4	9	3	1	2	7	8	6
1	6	8	7	5	4	2	9	3
3	9	6	1	2	8	4	5	7
2	1	5	4	7	3	9	6	8
4	8	7	6	9	5	3	2	1

3	7	8	4	1	6	9	5	2
9	5	6	3	2	8	4	1	7
4	1	2	7	9	5	3	8	6
7	8	4	5	6	9	2	3	1
1	6	3	2	7	4	8	9	5
2	9	5	8	3	1	7	6	4
6	3	1	9	4	2	5	7	8
5	2	7	1	8	3	6	4	9
8	4	9	6	5	7	1	2	3

2	7	4	9	8	3	1	6	5
5	8	6	2	7	1	3	9	4
1	3	9	4	5	6	2	7	8

7	8	4	5	1	2	6	9	3	7	1	8	4	5	2	9	6	3	8	1	7
2	9	1	3	6	7	8	4	5	3	2	9	7	1	6	8	5	4	9	2	3
3	5	6	8	9	4	7	1	2	6	4	5	9	8	3	1	7	2	5	4	6
8	1	3	7	5	6	9	2	4				6	4	8	2	3	5	1	7	9
9	7	5	2	4	3	1	6	8				5	3	1	7	9	6	2	8	4
4	6	2	1	8	9	3	5	7				2	9	7	4	1	8	3	6	5
1	3	7	9	2	5	4	8	6				8	7	4	3	2	9	6	5	1
5	4	9	6	3	8	2	7	1				3	2	5	6	4	1	7	9	8
6	2	8	4	7	1	5	3	9				1	6	9	5	8	7	4	3	2

figuur 9

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

figuur 10

16	2	3	8	10	15	1	13	5	12	11	4	14	9	7	6
11	15	7	13	12	9	3	6	16	2	14	10	8	1	4	5
5	4	9	6	7	11	14	2	3	1	13	8	10	15	12	16
10	1	14	12	16	4	5	8	9	7	6	15	11	2	13	3
12	10	2	7	15	13	8	11	1	14	3	6	16	4	5	9
15	5	1	16	3	2	12	9	8	10	4	7	13	6	14	11
6	14	4	9	5	10	16	7	11	13	15	2	3	8	1	12
8	3	13	11	4	1	6	14	12	16	5	9	2	10	15	7
14	7	6	2	11	5	13	10	4	15	16	12	1	3	9	8
1	13	16	15	9	6	4	12	2	8	7	3	5	11	10	14
9	8	5	3	2	16	7	1	13	11	10	14	4	12	6	15
4	12	11	10	8	14	15	3	6	9	1	5	7	16	2	13
3	16	12	14	1	7	2	4	15	6	8	13	9	5	11	10
13	9	15	1	6	8	10	16	14	5	2	11	12	7	3	4
7	11	8	5	14	3	9	15	10	4	12	1	6	13	16	2
2	6	10	4	13	12	11	5	7	3	9	16	15	14	8	1

figuur 11

C	M	F	W	R	I	V	G	X	B	T	D	L	O	N	J	U	E	S	P	A	Y	Q	H	K
I	G	P	J	B	W	L	E	K	Q	F	C	S	H	V	A	N	R	O	Y	U	D	M	X	T
S	Q	N	V	E	U	A	T	P	D	J	B	Y	X	K	C	I	L	H	M	O	R	F	G	W
A	L	H	D	U	Y	R	M	O	F	E	G	I	W	P	Q	V	K	T	X	N	J	S	B	C
K	Y	T	X	O	J	N	H	C	S	Q	A	R	M	U	B	D	F	W	G	L	I	E	V	P
P	T	V	L	C	K	M	D	Y	J	R	E	W	A	F	I	G	Q	B	H	S	U	O	N	X
U	X	B	K	H	G	I	C	W	O	L	M	P	D	T	R	S	N	F	E	Y	Q	A	J	V
R	J	G	S	W	H	U	X	F	P	Y	V	K	N	Q	O	A	M	D	T	E	B	L	C	I
O	A	E	Q	N	V	S	L	B	R	I	X	H	J	C	Y	W	U	P	K	M	T	D	F	G
F	I	M	Y	D	E	T	Q	N	A	G	U	B	S	O	V	J	X	C	L	W	H	K	P	R
N	D	I	M	G	T	Y	J	U	C	S	Q	X	P	E	K	L	O	V	B	R	A	H	W	F
X	R	L	O	Q	M	B	K	S	I	U	T	F	G	J	W	C	H	A	N	P	E	V	D	Y
J	K	W	P	S	Q	X	V	D	L	C	I	A	Y	H	F	M	T	E	R	G	N	U	O	B
B	U	C	E	A	F	W	O	H	N	D	R	V	L	M	P	Y	G	X	I	K	S	T	Q	J
V	H	Y	F	T	R	P	A	G	E	B	O	N	K	W	U	Q	D	J	S	I	X	C	M	L
T	F	X	H	P	D	C	N	I	W	M	Y	O	R	B	L	K	S	G	A	Q	V	J	E	U
L	W	O	A	J	X	F	B	T	U	H	S	Q	E	G	N	P	I	Y	V	C	M	R	K	D
G	B	K	R	M	O	E	S	J	V	P	W	U	F	I	H	T	C	Q	D	X	L	N	Y	A
D	S	Q	N	Y	L	G	R	M	K	X	J	C	V	A	E	O	B	U	W	F	P	I	T	H
E	C	U	I	V	P	Q	Y	A	H	K	N	D	T	L	X	R	J	M	F	B	W	G	S	O
Q	E	R	C	I	N	D	F	L	X	O	P	J	B	S	T	H	W	K	U	V	G	Y	A	M
H	P	D	U	F	B	K	W	Q	G	V	L	M	C	Y	S	E	A	I	J	T	O	X	R	N
Y	O	J	B	K	A	H	P	E	T	N	F	G	U	R	M	X	V	L	Q	D	C	W	I	S
M	V	A	G	L	S	O	I	R	Y	W	H	T	Q	X	D	F	P	N	C	J	K	B	U	E
W	N	S	T	X	C	J	U	V	M	A	K	E	I	D	G	B	Y	R	O	H	F	P	L	Q

figuur 12

Literatuur (red.)

- Narendra Jussien (2007): *A to Z of Sudoku*. Hoboken (NJ, USA): Wiley-Blackwell.
- Wil Schilders (2010): *Los elke sudoku op*. Books4You BV.
- Hans Zantema (2007): *De achterkant van sudoku*. Haarlem: Uitgeverij Aramith.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

1634, ook $_{10}$narcistisch

$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$

Of een getal al dan niet narcistisch is (zie ook 153), hangt (natuurlijk) mede af van de representatie van het getal in het betreffende talstelsel.

Is g het grondtal van dat stelsel en is de representatie van het getal n (bestaande uit k cijfers c_j; $1 \leq j \leq k$) in dat stelsel:

$n = c_k \cdot g^{k-1} + c_{k-1} \cdot g^{k-2} + \ldots + c_3 \cdot g^2 + c_2 \cdot g^1 + c_1$

dan is n een $_g$narcistisch getal als óók:

$n = (c_k)^k + (c_{k-1})^k + \ldots + (c_3)^k + (c_2)^k + (c_1)^k$

Bijvoorbeeld. Met $g = 3$ en $n = 12_{(3)}$ (en $k = 2$) is: $n = \mathbf{1} \cdot 3^1 + \mathbf{2} = 5_{(10)}$ en voorts:

$1^2 + 2^2 = 5_{(10)}$

Met $g = 4$ en $n = 313_{(4)}$ ($k = 3$) hebben we:

$n = \mathbf{3} \cdot 4^2 + \mathbf{1} \cdot 4^1 + \mathbf{3} = 55_{(10)}$

En dan is inderdaad (10-tallig berekend): $3^3 + 1^3 + 3^3 = 55$.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

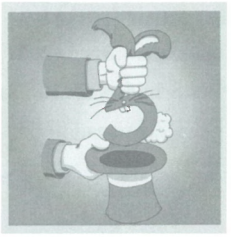
Gegoochel met getallen

GOOCHELTRUCS ALS DIDACTISCH GEREEDSCHAP

[Job van de Groep]

Als mensen spreken over 'goochelen met getallen' is dat vaak niet positief bedoeld. Meestal wordt dan aangegeven dat een bepaald betoog behoorlijk rammelt, omdat daarin met getallen is geknoeid of gemanipuleerd. Zie ook de bijdrage van Hans van Maanen [1], die over het misbruik van cijfers en statistiek een boek met die titel heeft geschreven (Boom; 2009).

Het *gegoochel met getallen* in dit artikel gaat over echte goocheltrucs, die beslist niet zijn bedoeld om toeschouwers te benadelen of voor de gek te houden, maar uitsluitend om te entertainen (de essentie van goochelen) én vooral om de nieuwsgierigheid te prikkelen en verwondering op te wekken.



figuur 1
Illustratie 'Getal 5 uit de hoed' (door Johnny de Jonge)

Nieuwsgierigheid, bij jónge mensen van nature (nog) alom aanwezig (sic!), is immers een belangrijke schakel binnen het leerproces. Een eigenschap die daarom onderhouden en ontwikkeld moet worden, zéker als van leerlingen 'zelfstandig studeren' wordt gevraagd/verwacht (...).

Met het op een niet alledaagse manier introduceren van nieuwe leerstof of aardige weetjes, bijvoorbeeld in de vorm van een goocheltruc, zou een extra beroep gedaan kunnen worden op behoefte van leerlingen om het naadje van de kous te willen weten.

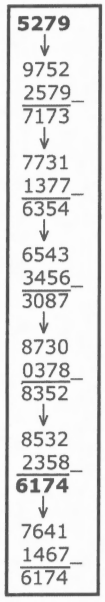
Met goocheltrucs, die op eigenschappen van getallen zijn gebaseerd, kun je als leraar de magie van het wiskunde/rekenvak uitbuiten.

Een goocheltruc, al dan niet rechtstreeks aansluitend bij een onderdeel van de leerstof, kan natuurlijk ook gebruikt worden als zogenoemde *energiegever* aan het begin van de les of om de aandacht van de leerlingen (weer) te vangen, en is zeker geschikt om de *laatste les voor de vakantie* met iets leuks te vullen.

Kaprekar

De volgende getallentruc is een bijzondere variant van de overbekende, maar niettemin – mits 'magisch' genoeg uitgevoerd ijzersterke '1089-truc' (zie ondermeer *Uitwiskeling*, jaargang 26, nr. 1).

De 'goochelaar' (hierna verder zonder aanhalingstekens) vertelt dat hij zo-even een 'brainwave' kreeg en schrijft het 'ontvangen' woord op een papiertje of op de achterzijde van een flip-over, dus niet zichtbaar voor het publiek.
De truc die hierna volgt, wordt aangekondigd als een oefening in het van elkaar aftrekken van getallen.
Iemand uit het publiek wordt gevraagd een willekeurig cijfer te noemen dat de goochelaar, voor iedereen zichtbaar, op een bord of flip-over noteert. Vervolgens worden nog drie andere willekeurige toeschouwers gevraagd eveneens een cijfer te noemen, maar wel verschillend van de eerdergenoemde. De goochelaar noteert de vier onderling verschillende cijfers achter elkaar van groot naar klein, waardoor een getal van vier cijfers ontstaat. Dat getal is *a*.



figuur 2

De goochelaar vraagt een 'vrijwilliger' naar voren te komen om dan de volgende procedure uit te voeren:
- Getal *b* ontstaat door de cijfers van getal *a* in omgekeerde volgorde, dus van klein naar groot, te noteren.
- Vervolgens wordt *b* van *a* afgetrokken. Met de vier cijfers van het verschil wordt dezelfde procedure een aantal keren herhaald: de cijfers van het resultaat van de aftrekking worden dus weer van groot naar klein genoteerd en daaronder dezelfde cijfers, maar nu van klein naar groot.
- De twee getallen worden weer van elkaar afgetrokken, enzovoort.

Op een gegeven moment meldt de goochelaar dat er nu wel voldoende 'geoefend' is met het aftrekken. Iemand uit het publiek wordt gevraagd het laatst verkregen antwoord – in het voorbeeld 6174 – in drie getallen te splitsen: bijvoorbeeld 6, 17 en 4.
Iemand anders uit het publiek krijgt de opdracht om in een (zogenaamd) willekeurig boek het 4de woord op te zoeken van de 17de regel op pagina 6.
Nu zal blijken dat op pagina 6 óf helemaal niets staat óf zeer waarschijnlijk géén 17 regels staan, dus wordt een alternatieve splitsing voorgesteld: 61, 7 en 4 (6, 1 en 74 is dan ook geen optie, want regel 1 heeft in het algemeen géén 74 woorden).
Dus wordt eerst pagina 61 opgezocht, en op regel 7 naar het 4de woord gekeken.
En dát was nu precies het woord dat de helderziende goochelaar bij het begin van de truc had genoteerd! Frappant!

Verklaring – De verklaring is vergelijkbaar met die van de '1089-truc', die ook een voorspelbaar eindantwoord oplevert. Als de bovengenoemde procedure wordt gevolgd, komt men na een aantal stappen altijd het getal 6174 tegen (de *constante van Kaprekar*). Daarna ontstaat er een 'loop' (6174 → 7641 – 1467 = 6174 → ...).
De goochelaar geeft natuurlijk niet van te voren aan hoeveel keer de procedure moet worden uitgevoerd, maar roept pas dat het 'wel mooi geweest is, zo', als het getal 6174 voor het éérst verschijnt. De goochelaar moet het doen voorkomen alsof het stoppen min

of meer volkomen toevallig is. Mocht 6174 al direct na de eerste keer ontstaan, dan moet hij de vrijwilliger complimenteren voor het correcte rekenwerk en melden dat het ('blijkbaar') niet nodig is, om nog meer te oefenen (of zoiets).
Ook het splitsen van 6174 in drie getallen (pagina, regel, zoveelste woord) moet overkomen als een volledig eigen vrije keuze van de betreffende toeschouwer.
Net zoals dat geldt voor de 1089-truc, moet het geheel 'vrij' kiezen van het boek als niet geforceerd overkomen.

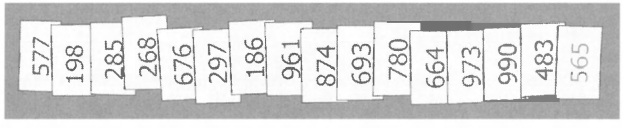
Transfer naar de les (eventueel) – Als de goochelaar/leraar de truc in de les zou willen bespreken – bij voorkeur nooit direct ná of aansluitend aan de presentatie ervan – geldt nu weer het advies om de leerlingen éérst de gelegenheid te geven zélf door puzzelen het geheim te achterhalen.
Vragen voor in de klas – afhankelijk van het niveau van de leerlingen – zijn daarbij:
- Hoeveel getallen van vier verschillende cijfers zijn er, als de cijfers van links naar rechts aflopend zijn (inclusief de nul)?
- Hoe kan dat uitgerekend worden?

Het verschil van twee getallen met dezelfde cijfers, maar in een andere volgorde, is altijd een 9-voud (zie boven). Eenvoudig is na te gaan dat dát negenvoud 18 óf 27 is, als het om getallen van vier cijfers gaat.
- Hoeveel verschillende getallen van vier cijfers zijn mogelijk, als de som van die cijfers 18 of 27 moet zijn?
- Leidt een vergelijkbare procedure die wordt toegepast op een willekeurig getal van 5 cijfers ook tot een constante?

Voorzover bekend bestaat er (nog) geen waterdicht theoretisch bewijs voor het ontstaan van de constante van Kaprekar uit een willekeurig getal van vier niet dezelfde cijfers.
Er zijn maximaal 7 stappen nodig om het getal 6174 via de procedure te laten ontstaan. Als men wil voorkomen dat het rekenwerk veel te lang gaat duren, dan kan ook met een 3-cijferig getal worden gestart (zie begin) en dan vanaf 1089 verdergaan met de algoritme: 1089 → 9810 – 0189 = 9621 → 9621 – 1269 = 8352 → 8532 – 2358 = 6174.

Telepathisch of ...

De goochelaar toont het publiek een stapeltje kaarten in waaiervorm (of op de tafel, zoals in figuur 3) en vertelt daarbij dat op elke kaart een driecijferig getal staat. Allemaal verschillende.



figuur 3

Een vrijwilliger uit het publiek wordt gevraagd het stapeltje eventueel te 'schudden', doormiddel van couperen. Dat wil zeggen dat een willekeurig aantal kaarten als stapeltje van boven wordt afgenomen en onder de stapel kaarten gedaan. Het couperen mag een paar keer worden herhaald.
Vervolgens schrijft de goochelaar, niet zichtbaar voor het grote publiek, een getal op een stukje papier en stopt dat in een enveloppe dat de vrijwilliger in bewaring krijgt.

De getallenkaartjes worden door de goochelaar vervolgens verdeeld over 4 stapeltjes door de kaarten een voor een van boven af te tellen: '1 – 2 – 3 – 4, 1 – 2 – 3 – 4, …' (de vijfde kaart komt dus in het eerste stapeltje op de eerste (was bovenste) kaart terecht. Enzovoort.
Alle vier stapeltjes bevatten evenveel kaarten, aangezien het totaal aantal kaarten een viervoud is.
De vrijwilliger wordt nu gevraagd uit elk stapeltje 'blind' één volkomen willekeurige kaart te nemen.

De getallen op deze vier kaarten worden, eventueel zichtbaar voor het publiek op een flap-over of bord, bij elkaar opgeteld.
De uitkomst blijkt een getal te zijn dat uit vier cijfers bestaat.
Het getal dat bestaat uit de eerste twee cijfers van die som wordt opgeteld bij het getal dat door de laatste twee cijfers wordt gevormd.
De uitkomst blijkt door de goochelaar te zijn voorspeld, want het staat op het briefje in de enveloppe!
Heeft de goochelaar telepathische gaven?

Verklaring – Telepathisch niet, maar de goochelaar is in zekere zin wel helderziend, want de uitkomst 'zag' hij aankomen.
Omdat de volgorde van de (in het voorbeeld in figuur 3) 16 kaarten door *couperen* niet wezenlijk verandert, komen in de vier stapeltjes kaarten die bij elkaar 'horen' (zie het voorbeeld):
stapeltje 1: 577, 676, 874 en 973;
stapeltje 2: 198, 297, 693 en 990;
stapeltje 3: 285, 186, 780 en 483;
stapeltje 4: 268, 961, 664 en 565.
Wat direct opvalt is dat per stapeltje het middelste cijfer van de getallen gelijk is, en dat het eerste en derde cijfer van de getallen in een stapeltje steeds dezelfde som geven.
Op deze twee eigenschappen van de zogenaamde willekeurige getallen is de truc gebaseerd, want daardoor staat de som van de tientallen van de vier willekeurig gekozen kaarten (uit elk stapeltje één) vast, in het voorbeeld namelijk 7 + 9 + 8 + 6 = 30. Voor de totale som van die vier getallen zijn dat dus 3 honderdtallen. De som van de eenheden en de som van de honderdtallen van de vier gekozen getallen zijn weliswaar variabel, maar niet willekeurig, want door de constructie van alle 16 getallen is ook de som van die eenheden- en honderdtallen-som constant, namelijk 38. Samen met die 3 honderdtallen geeft dat dus 41 als vast eindantwoord.
Stel dat de volgende vier getallen uit de stapeltjes worden gekozen: 676, 198, 483 en 664.
De som van de honderdtallen is 17 en de som van de eenheden is 21, samen 38. Daarbij komen nog 3 honderdtallen.
De totale som is 2021. De som van 20 en 21 is 41, het getal dat de goochelaar in bewaring had gegeven.

Transfer naar de les – Bij de analyse van deze geraffineerde getallentruc zijn de volgende onderzoeksvragen interessant:

- Hoeveel verschillende optellingen kunnen met die 4 kaarten (uit elk stapeltje 1)worden samengesteld?
- Als de kaarten al in stapeltjes op tafel liggen, zouden nog kaarten toegevoegd kunnen worden. Welke?
- Wat moet er veranderen er men geen vier maar drie of vijf (of meer) stapeltjes wil maken?
- De middelste getallen (tientallen) van de kaarten zijn zo gekozen dat hun som precies 30 (3 honderdtallen) is. Kunnen de getallen ook zó geconstrueerd worden, dat een willekeurige vaste som van de tientallen ontstaat?

Upside-down

Op een tafel ligt een spel kaarten, onderste boven. De goochelaar vraagt een toeschouwer een willekeurig getal te noemen, (bijvoorbeeld) tussen 15 en 25. Stel dat het getal N wordt genoemd.
De goochelaar neemt de bovenste N kaarten en legt ze ondersteboven, dus met de 'plaatjes' zichtbaar, weer terug op de stapel. Hij vraagt een andere toeschouwer om te assisteren door het pak kaarten op de normale wijze te schudden, zodat de N omgekeerde kaarten op geheel willekeurige plaatsen in het spel komen te zitten.
Die toeschouwer ('assistent') mag nu het spel onder tafel houden en precies N kaarten van boven aftellen. Dit pakje overhandigt hij onder tafel aan de goochelaar.
Deze zegt dat hij natuurlijk niet weet hoeveel omgekeerde kaarten er het pakje zitten dat hij nu in z'n handen heeft, maar dat het er waarschijnlijk minder zijn dan in het stapeltje (van 52 – N kaarten) dat de assistent nog heeft. Hij meldt verder dat hij zonder te kijken nog enige kaarten om zal draaien om het aantal omgekeerde kaarten van zijn pakje gelijk te maken aan dat van de assistent.
Daarna leggen de goochelaar en de assistent hun kaarten op tafel en tellen het aantal omgekeerde kaarten. Dit blijkt even groot te zijn!

Verklaring – De goochelaar hoefde niets anders te doen dan ál zijn kaarten om te keren, dus gewoon het hele pakje van N. Als de goochelaar a omgekeerde kaarten heeft, dan moet het pakje van de assistent ($N - a$) omgekeerde kaarten bevatten.
Als de goochelaar zijn pakje met N kaarten, waarvan er a omgedraaid zijn, geheel omkeert, zijn er ook ($N - a$) omgekeerde kaarten. Dus evenveel!

Transfer naar de les – Bewering (om over te discussiëren): Als precies de helft van het pak kaarten wordt omgedraaid (dus 26), die vervolgens door het gehele pak worden geschud, en de goochelaar krijgt er blind ook 26 terug, dan hoeft de goochelaar onder tafel helemaal niets te doen, want dan is het aantal omgekeerde kaarten in zijn stapeltje even groot als in het stapeltje van de assistent.
Waar of niet waar? En waarom?

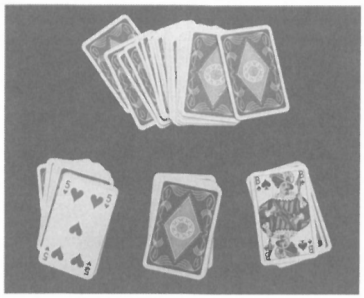
De truc kan ook uitgevoerd worden met ander materiaal met verschillende 'kanten': zoals munten (van alle munten met 'kop' boven wordt een aantal omgekeerd en daarvan wordt – onzichtbaar voor iedereen – een aantal aan de goochelaar gegeven, die in dit geval ál zijn munten omkeert, of een bundeltje lucifers (met de 'kop' naar boven).

De waarde van de bovenste kaart

Alle 52 speelkaarten van een spel kaarten hebben de waarde van het getal dat er op is afgebeeld, waarbij een *aas* voor 1 telt, een *boer* voor 11, een *vrouw* voor 12 en een *koning* voor 13.

De goochelaar zegt tegen het publiek dat hij een spel kaarten, dat eerst door iemand van de toeschouwers wordt geschud, in een aantal stapeltjes zal verdelen, met een willekeurig aantal kaarten per stapeltje. Hij legt de kaarten vervolgens één voor één en open en bloot op tafel, dus met de afbeeldingen zichtbaar voor iedereen. Als hij dat gedaan heeft, houdt hij eventueel ook nog wat kaarten over.

Terwijl de goochelaar met zijn rug naar de tafel met de stapeltjes gaat staan, wordt een toeschouwer gevraagd de stapeltjes om te draaien (dus nu met de 'blinde' zijde boven) en vervolgens alle stapeltjes, op drie willekeurige stapeltjes na, aan hem terug te geven. De 'volgorde' van drie overgebleven stapeltjes mag eventueel gewijzigd worden.



figuur 4

De goochelaar gaat nu weer gewoon aan de tafel staan en vraagt de toeschouwer van twee willekeurige stapeltjes de bovenste kaart om te keren. De goochelaar zegt nu te weten wat de waarde is van de bovenste kaart van het derde stapeltje, waarvan de topkaart *niet* is omgedraaid. Hij noemt het getal en draait direct daarna de bovenste kaart van het derde stapeltje om. Het klopt!

Hoe doet ie dat toch?

Verklaring – Het aantal kaarten in een stapeltje wordt bepaald door de waarde van de eerste kaart die voor een stapeltje wordt neergelegd. Bij elke kaart die de goochelaar uitdeelt, telt hij (onhoorbaar en onzichtbaar!) dóór tot en met 13, te beginnen met de *waarde* van de eerste kaart. Dan is het eerste stapeltje klaar.

Bijvoorbeeld. Als de eerste kaart harten 5 is, telt de goochelaar in gedachten '5' en bij elke volgende kaart door tot en met 13, dus vervolgens '6, 7, 8, 9 10, 11, 12, 13'. In dat stapeltje liggen dus precies 9 kaarten. Dan begint de goochelaar met het volgende stapeltje, zogenaamd zonder enige structuur. Het tweede stapeltje en alle volgende maakt de goochelaar op dezelfde manier. Als toevalligerwijs de eerste kaart van een stapeltje een koning is, bestaat dat stapeltje dus uit die ene kaart. Op deze manier kunnen er tenminste 4, maar meestal zo'n 5 of 6, soms zelfs nog meer, stapeltjes worden neergelegd. Het komt zelden voor dat het neerleggen precies uit komt en men geen kaarten overhoudt.

Als de toeschouwer bezig is met het wijzigen van de volgorde van de drie stapeltjes, die nog op tafel zijn overgebleven en het omkeren van twee van de drie topkaarten, telt de

goochelaar, zo onopvallend mogelijk, het totaal aantal kaarten dat hij in zijn hand heeft (het aantal kaarten dat hij na het verdelen in stapeltjes over had, plus het aantal kaarten dat hij van de toeschouwer terug kreeg). Dat aantal kaarten is K. Er liggen dus nog $(52 - K)$ kaarten in drie stapeltjes op tafel. De toeschouwers weten niet dat de waarde van de willekeurige twee omgedraaide kaarten een 'code' is voor het aantal kaarten in dat stapeltje, namelijk 13 + 1 minus de waarde van die topkaart.
Samen met de waarde van de tweede topkaart kan de waarde van de derde, nog niet omgekeerde topkaart uitgerekend worden.
Voorbeeld. Stel dat de waarden van de twee omgekeerde topkaarten a en b zijn (in het voorbeeld in figuur 4 zijn dat 5 en 11) en c de waarde van de derde topkaart. De goochelaar heeft K kaarten in zijn hand (de bovenste rij kaarten in figuur 4).
Op tafel liggen dus totaal $(52 - K)$ kaarten. Dat moet gelijk zijn aan $(14 - a) + (14 - b) + (14 - c)$. Dus: $52 - K = 14 - a + 14 - b + 14 - c = 42 - a - b - c$.
K, a en b zijn bij de goochelaar bekend, dus nu ook c, want:
$c = K - 52 + 42 - a - b = K - 10 - a - b$
c is dus het aantal kaarten, dat het verschil is van de kaarten in de hand van de goochelaar min 10 en dat verschil vervolgens nog verminderen met de som van de waarden van de twee getoonde topkaarten.
Met $K = 33$ kaarten in de hand en $a = 5$ en $b = 11$, moet de waarde c van de derde topkaart 7 zijn.

Uiteraard moet het aftellen van de stapeltjes met niet te veel geheimzinnigheid worden omgeven; de goochelaar moet doen voorkomen dat de hoeveelheid kaarten in elk stapeltje volkomen willekeurig is; de essentie van de truc!
De truc wint nog meer aan kracht als een 'handlanger' uit de toeschouwers wordt ingeschakeld, die de stapeltjes volgens bovenstaand procédé neer legt. Een écht willekeurige toeschouwer mag dan de stapeltjes aanwijzen die moeten blijven liggen en overhandigt de resterende kaarten aan de goochelaar. Een derde toeschouwer geeft aan welke twee topkaarten omgekeerd worden.
De goochelaar heeft zich in dat geval al voor het neerleggen van de stapeltjes van de tafel afgewend.

Transfer naar de les – Bij een analyse van deze truc kan de leerlingen worden gevraagd over welke informatie de goochelaar feitelijk beschikt: hij heeft een aantal kaarten in z'n hand en hij ziet de twee bovenste kaarten die omgekeerd zijn. Wat zou dat kunnen betekenen? Hoeveel complete stapeltjes zouden er theoretisch maximaal neergelegd kunnen worden?
Natuurlijk kunnen ook alle stapeltjes op vier na worden teruggegeven (en dan drie topkaarten worden getoond) of indien bij het vormen van de stapeltjes wordt doorgeteld tot en met 10 in plaats van tot en met 13, bijvoorbeeld als eerst alle 'plaatjes' uit het spel zijn verwijderd.
In tegenstelling tot de andere beschreven trucs kan deze truc eventueel voor hetzelfde publiek wel (eenmaal) worden herhaald!

Inspiratiebronnen

Inspiratiebronnen bij het bovenstaande waren onder meer *Nieuwe Wiskrant* en *Pythagoras* (zeer oude jaargangen).

Noot

[1] Hans van Maanen (2012): *Getallen in de krant.* In: *Getallen / Euclides Special 2012.*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Irrationaal?

Stelling. Er bestaan (niet noodzakelijk verschillende) irrationale getallen p en q zó, dat p^q rationaal is.

Bewijs. We weten dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.[1]

We bekijken vervolgens het getal $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. We kunnen nu twee uitspraken (A en B) doen:

(A) x is rationaal óf **(B)** x is niet rationaal (met andere woorden: x is irrationaal).

Als uitspraak A waar is, dan zijn we klaar: $p = \sqrt{2}$ en $q = \sqrt{2}$.

Is uitspraak A *niet* waar, dan is uitspraak B waar. In dit geval bekijken we:

$x^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$

Dus in dit geval is: $p = x$ (p is irrationaal) en $q = \sqrt{2}$ (q is irrationaal), terwijl p^q rationaal is (gelijk aan 2).

En daarmee is de stelling bewezen. ◊

Opmerking. Of het getal $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal is of niet, kunnen we helaas *niet* uit deze stelling afleiden.

Noot

[1] Zie het artikel van Frits Beukers (Irrationale getallen) in deze *Special.*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Getal(len)
VOLGENS VAN DALE EN WIKIPEDIA

'Getal' volgens Van Dale

ge·tal *het*; *o*; ***-len***; *-letje* **1** hoeveelheid; aantal: *in groten ~e* **2** voorstelling ve hoeveelheid door cijfers.

Bron: *www.vandale.nl*

'Getal' volgens WikipediA

Een ***getal*** is de aanduiding van een hoeveelheid. Oorspronkelijk was het begrip ***getal*** synoniem met *aantal*, dus voor de **getallen** een, twee, drie, ..., maar het heeft een ruimere betekenis gekregen, zodat ook gebroken, negatieve en zelfs complexe **getallen** als ***getal*** aangemerkt worden.

Getallen kunnen in woorden of met symbolen weergegeven worden. Tegenwoordig worden voor deze symbolen, behalve in speciale gevallen, uitsluitend cijfers gebruikt en aanvullende tekens, zoals de komma of decimale punt, een plus- of minteken e.d. Verder is er nog de wetenschappelijke notatie.

Een ***getal*** is verschillend van een cijfer: cijfers zijn symbolen die gebruikt worden om **getallen** weer te geven.

[...] **Getallen** als begrip zijn taalonafhankelijk. Ook de symbolische voorstelling van **getallen** in de decimale schrijfwijze is op enige kleinigheden na in de meeste talen hetzelfde. In gesproken taal, en geschreven als woord, heeft men wel een taalafhankelijke voorstelling van **getallen** door middel van telwoorden. Een voorbeeld van regelmatige benaming vindt men bij: *Telwoord in Esperanto* (zie de kadertekst hieronder).

Getallen worden ook gebruikt als codering. Zo worden voor belangrijke autoroutes door verschillende taalgebieden heen meestal genummerde benamingen gebruikt (letter A, E, N, R, ... gevolgd door een ***getal***).

Bron: *http://nl.wikipedia.org/wiki/Getal_(wiskunde)*

Telwoord in Esperanto

In de benaming van de **getallen** is de volgorde van de cijfernamen dezelfde als de volgorde van de cijfers van het ***getal***.

De cijfernamen zijn: nulo (0), unu (1), du (2), tri (3), kvar (4), kvin (5), ses (6), sep (7), ok (8), nau (9) dek (10).

Tientallen en honderdtallen worden als één woord geschreven: 'dudek' (20), 'tridek' (30), 'ducent' (200), 'okcent' (800). Alle andere **getallen** worden uitgesproken en geschreven als aparte woorden, ook duizendtallen: 'dek unu' (11), 'dek du' (12), 'du mil' (2000).

De nul wordt niet gebruikt in de getalbenaming, maar voor het weergeven van de orde van grootte is het noodzakelijk om op de juiste plaats de hoofdtelwoorden te zetten voor respectievelijk duizend-, honderd- en tiental: mil, cent en dek.

Bron: *http://nl.wikipedia.org/wiki/Telwoord_in_Esperanto*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

De wereld in getallen

[Evi van Huuksloot]

Heel, heel lang geleden was er een heel bijzonder land, met alleen maar mensen die een, twee, drie, vier vijf, zes, zeven, acht, negen en tien van hun achternaam heten. En alles in dat land was een, twee, drie, enzovoort.

Op een dag kwam er een meneer bij een kraampje. Hij vroeg of ze een getallentaart hadden. 'Ja', zei de verkoopman. 'Welke taart wilt u? U kunt kiezen uit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 of 10.'

'Nou, ik wil taart 7, omdat mijn dochter, ze heet Elfje, 7 jaar is geworden.'
'Dat wordt dan 14,95.'
'Zo veel?'
'Ja, zo veel!' En de meneer betaalt met 15,00 en krijgt 5 terug.
'Dag', zegt de meneer, en 'Dag', zegt de verkoopman. De meneer stapt in zijn auto en daarna is hij thuis.
'Ik heb de taart van 7', fluistert hij tegen zijn vrouw. 'Kom, zullen we de taart snijden?'
'Nee', zegt ze, 'Eerst een foto maken! Want hij is zo mooi.'
Klik. De foto is gemaakt.
Lang zal ze leven!
Dan is de verjaardag afgelopen en is het bedtijd. Elfje telt tot wel honderd voor ze in slaap valt.
De volgende dag is Elfje weer op school.
'Goeden morgen kinderen, ga aan het werk in je rekenboek', zegt juf. …
8 + 2 =
4 – 3 =
7 – 3 =
0 + 0 =
9 + 1 =
'Juf, ik ben klaar!
'Elfje, niet door de klas roepen!', zegt juf, 'Pak je werkblad maar, en maak de rest van de sommen!'

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Het begon met strafwerk
ALLE KWADRATEN VAN 1 TOT EN MET 50

[Rob Tijdeman]

Afstanden tussen opeenvolgende *n*-de machten. Differenties.

In mijn schooltijd was het een gebruikelijke straf: schrijf alle kwadraten van 1 tot en met 50 op. Er waren toen nog geen rekenmachinetjes. Toch was het geen zware straf als je slim was. Het begin wist je uit je hoofd, omdat je de tafels van vermenigvuldiging kende:

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Als je nu de verschillen van opeenvolgende kwadraten opschreef, zag je een mooie regelmaat. De regelmaat werd zelfs nog groter als je daaronder nogmaals de verschillen opschreef. Het werd nog duidelijker als je met $x = 0$ begon.

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x^2 =$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$\Delta x^2 =$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$\Delta^2 x^2 =$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	…

(De Δ staat hier voor *voorwaarts verschil.*) Je kon nu gemakkelijk eerst de rij Δx^2 verder opschrijven en vervolgens de kwadraten vinden door het laatst gevonden kwadraat bij het volgende verschilgetal op te tellen. Dus (81 + 19 = 100), 100 + 21 = 121, 121 + 23 =144, enzovoort. Dus in de volgende tabel eerst de onderste rij invullen en dan de bovenste rij.

$x^2 =$	…	64	81	100	121	144	169	196	…
$\Delta x^2 =$	…	17	19	21	23	25	27	29	…

In plaats van 50 vermenigvuldigingen kunnen we zo toe met het opschrijven van de eerste 50 oneven getallen en 50 optellingen.

Wat gebeurt er als je een zwaardere straf zou krijgen en de derdemachten van 1 tot en met 50 zou moeten opschrijven? We beginnen met de eerste acht derdemachten en nemen weer de voorwaartse verschillen.

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^3 =$	0	1	8	27	64	125	216	343
$\Delta x^3 =$	1	7	19	37	61	91	127	…
$\Delta^2 x^3 =$	6	12	18	24	30	36	…	

Hoewel de rij van derdemachten vrij grillig lijkt, herkennen we in de onderste rij ogenblikkelijk de tafel van 6. (Nemen we nog eens de verschillen, dan vinden we dus een constante rij 6.) Door eerst de veelvouden van 6 verder op te schrijven en dan rij voor rij naar boven te berekenen door optellingen als boven, vinden we inderdaad de volgende

derdemachten. Dus eerst 42, 48, 54, 60, …, dan 127 + 42 = 169, 169 + 48 = 217, 217 + 54 = 271, …, en dan 343 + 169 = 512, 512 + 217 +729, 729 + 271 = 1000, …

$x =$	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x^3 =$	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197
$\Delta x^3 =$	91	127	169	217	271	331	397	469	…
$\Delta^2 x^3 =$	36	42	48	54	60	66	72	…	

In plaats van 100 vermenigvuldigingen kunnen we toe met 150 optellingen (voor elke rij 50 of iets minder).

Het patroon lijkt duidelijk: als we de rij van n-de machten uit willen rekenen, is de n-de verschilrij constant en kunnen we door optellen de rij van n-de machten vinden. Laten we dit vermoeden nog even checken voor $n = 5$.

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^5 =$	0	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768
$\Delta x^5 =$	1	31	211	781	2101	4651	9031	15961	…
$\Delta^2 x^5 =$	30	180	570	1320	2550	4380	6930	…	
$\Delta^3 x^5 =$	150	390	750	1230	1830	2550	…		
$\Delta^4 x^5 =$	240	360	480	600	720	…			
$\Delta^5 x^5 =$	120	120	120	120	…				

Het blijkt te kloppen. Ga na dat de 4-de verschilrij van de 4-de machten inderdaad ook constant is. Ontdek verder de regelmaat in de rij $\Delta^n x^n$ voor $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Wat zal $\Delta^6 x^6$ zijn?
Een bewijs dat de rij van n-de machten voor elke n regelmatig groeit, volgt hieronder.

Differenties

Stel dat we voor vaste n de differenties beschouwen van de rij van n-de machten. Dan is Δx^n gelijk aan:
$(x+1)^n - x^n$
Volgens het binomium van Newton is dit gelijk aan:

$$nx^{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2} + \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots + 1 \qquad \ldots(1a)$$

Nemen we weer de voorwaartse differentie, dan wordt de eerste term $n(n-1)x^{n-2}$ en hebben alle volgende termen graad kleiner dan $(n-2)$. De 'kopterm' krijgen we door de vorige kopterm te differentiëren. We zien verder dat er bij elke volgende voorwaartse differentie een veelterm ontstaan met een graad die 1 lager is dan de vorige veelterm. Gaan we door met differenties nemen, dan houden we bij $\Delta^n x^n$ alleen de kopterm $n!$ over.

De overeenkomst met differentiëren is opmerkelijk, maar niet toevallig. In feite is differentiatie namelijk het limietgeval van differenties. Als we de afgeleide van x^n willen berekenen, beschouwen we immers het quotiënt van $(x+h)^n - x^n$ en h en laten we vervolgens h naar 0 gaan.
Nemen we $h = 1$, dan krijgen we (1a).

Nemen we $h = \frac{1}{10}$, dan krijgen we het quotiënt van $(x+\frac{1}{10})^n - x^n$ en $\frac{1}{10}$, ofwel, na vermenigvuldiging boven en beneden met 10^n, van $(10x + 1)^n - (10x)^n$ en 10^{n-1}. Passen we nu het binomium van Newton toe, dan krijgen we in plaats van (1a):

$$nx^{n-1} + \frac{1}{20}n(n-1)x^{n-2} + \frac{1}{600}n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots + 1 \qquad \ldots(1b)$$

De eerste term blijft ongewijzigd, maar de andere worden achtereenvolgens door 10, 100, 1000, … gedeeld.

Nemen we $h = \frac{1}{100}$, dan worden de termen achtereenvolgens door 1, 100, 10000, 1000000, … gedeeld. Het is duidelijk dat als h naar 0 gaat, alleen de kopterm nog overeind blijft en dat we in de limiet dus nx^{n-1} overhouden als afgeleide van x^n. Overigens gaat het bovenstaande niet alleen op voor n-de machten, maar voor alle veeltermen van de graad n, zoals uit bovenstaande analyse blijkt.

Neem bijvoorbeeld $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Dan vinden we:

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x) =$	5	4	9	20	37	60	89	124	165	212
$\Delta f(x) =$	-1	5	11	17	23	29	35	41	47	53
$\Delta^2 f(x) =$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	…

Afstanden tussen willekeurige machten. Het vermoeden van Catalan.

Stel nu dat je de rij neemt van alle getallen die een macht zijn, de zogenoemde *zuivere machten* x^n met $n > 1$. Dan is de regelmaat in de verschillen helemaal zoek. Een combinatie van regelmatige rijen kan heel onregelmatig zijn! We kunnen de rij niet op bovenstaande manier verder berekenen, want er is geen enkele verschilrij die regelmaat vertoont.

$x^n =$	0	1	4	8	9	16	25	27	32
$\Delta x^n =$	1	3	4	1	7	9	2	5	…
$\Delta^2 x^n =$	2	1	-3	6	2	-7	3	…	
$\Delta^3 x^n =$	-1	-4	9	-4	-9	10	…		
$\Delta^4 x^n =$	-3	13	-13	-5	19	…			

De rij Δx^n roept al allerlei vragen op. We zien de verschillen 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 optreden.

- Komen de ontbrekende verschillen 6, 8, 10, … ook voor?
- Hoe vaak komt een bepaald verschil voor?
- Komen er ook verschillen oneindig vaak voor?
- Komt het verschil 1 nog vaker voor?

De laatste vraag werd al in 1844 door E. Catalan (1814-1894) gesteld. Hij vermoedde dat 8 en 9 de enige positieve zuivere machten zijn die 1 verschillen, met andere woorden dat de vergelijking

$$x^m - y^n = 1 \qquad \ldots(2)$$

geen oplossingen heeft in gehele getallen $m, n, x, y > 1$ met $(m, n, x, y) \neq (2, 3, 3, 2)$. Dit staat bekend als *het vermoeden van Catalan.* Het zou meer dan 150 jaar duren voor dit vermoeden bevestigd werd. Daarover schrijf ik in een volgend artikel [1].

Noot

[1] Zie verder het artikel van Rob Tijdeman: *Het vermoeden van Catalan*. In: *Getallen | Euclides Special 2012*.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

GAUSS

Toen Gauss een kleine jongen was
en zich verveelde in de klas,
wist hij zich uit te leven
in wangedrag en kattenkwaad
tot meesterlief ten einde raad,
besloot hem straf te geven.

Hij gaf hem stevig op zijn kop
en riep: 'Tel de getallen op
van 1 tot 100, vlegel!
Dat houdt je minstens heel de dag,
misschien zelfs morgen aan de slag.'
Maar Gaussje vond een regel.

Hij kon, dat zag die knul meteen,
met 50 keren 101,
de uitkomst snel voorspellen.
Zij meester, die het niet doorzag,
zit nu voor straf al heel de dag,
het zaakje na te tellen.

Marjolein Kool in:
Drs. P & Marjolein Kool (2000): *Wis- en natuurlyriek*. Amsterdam: Nijgh & Van Ditmar.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Het vermoeden van Catalan
ACHTERGRONDEN BIJ DE BEWIJZEN

[Rob Tijdeman]

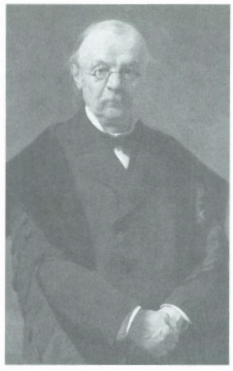
De oudste resultaten

In 1842 formuleerde Eugène Catalan (1814-1894; geboren in Brugge) het volgende vermoeden:

De vergelijking

$x^m - y^n = 1$ ...(1)

heeft geen oplossingen in gehele getallen $m, n, x, y > 1$ *met uitzondering van* $(m, n, x, y) = (2, 3, 3, 2)$.



Eugène Charles Catalan (1814-1894)
Detail van een schilderij door Émile Delpérée / 1884
Bron: WikipediA

Voor zover we weten, werd de eerste vraag van deze aard gesteld door Philippe de Vitry (1291-1361):

Is er een geheel getal $m > 2$ *zó dat* $(3^m + 1)$ *of* $(3^m - 1)$ *een macht van 2 is?*

De vraag werd beantwoord door Levi ben Gerson (1288-1344) die aantoonde dat zo'n getal *niet* bestaat.

Het is een leuke uitdaging dit resultaat zelf te bewijzen.

In 1738 bewees Euler dat vergelijking (1) geen oplossingen heeft met $m = 3$, $n = 2$, en alleen de oplossing $x = 3$, $y = 2$ als $m = 2$, $n = 3$.

Kort nadat Catalan zijn vermoeden geformuleerd had, in 1850, bewees V.A. Lebesgue dat (1) geen oplossing heeft voor $n = 2$. Het corresponderende resultaat dat er voor $x > 3$ geen oplossing is met $m = 2$, werd pas in 1964 verkregen door Chao Ko.

Al in 1921 had Nagell aangetoond dat er voor $x > 3$ geen oplossing is met $m = 3$ of $n = 3$, en in 1932 deed S. Selberg dat voor $m = 4$ of $n = 4$.

Als het vermoeden van Catalan onjuist zou zijn, zouden de exponenten m en n in (1) dus tenminste 5 moeten zijn.

Na 1950 leidden Cassels, Hyyrö, Inkeri en anderen nog allerlei andere eigenschappen af van een eventueel tegenvoorbeeld van Catalan's vermoeden.
Zelf raakte ik in 1974 geïnteresseerd in het vermoeden. Dat kwam zo. Vijf jaar eerder was ik gepromoveerd op een proefschrift waarin ik schattingen afleidde voor het aantal nulpunten van exponentiaalpolynomen in een cirkelschijf. Dit bleek relevant voor een theorie die Alan Baker in 1966-1968 ontwikkeld had, waarvoor hij in 1970 de Fields-medaille kreeg. Het academisch jaar 1970/71 bracht ik door op het Institute of Advanced Study in Princeton (NJ, USA), waar zo'n vijfentwintig getaltheoretici samen waren onder wie Serre, Wolfgang M. Schmidt, Ramachandra, Harold Stark, Wirsing en Alan Baker. Hier raakte ik bekend met de theorie van Baker. In de daaropvolgende jaren ontwikkelden Ramachandra, zijn leerling Shorey en ik enkele toepassingen van deze theorie. In 1974 las ik een overzichtsartikel van Baker waarin hij Catalan's vermoeden noemde. Dat intrigeerde me. Zou Baker's theorie ook op dit probleem toepasbaar zijn? Ik had al eerder ingezien dat zijn theorie kon helpen om vergelijkingen met zuivere machten waarin zowel grondtal als exponent onbekend zijn, te behandelen.

Toepassing van de theorie van Baker

Laat me iets dieper op de wiskunde ingaan. Het is mogelijk dat het quotiënt van twee producten van zuivere machten 1 is; bijvoorbeeld $\frac{2^6}{4^3} = 1$ en $\frac{3^4 \cdot 6^8}{4^4 \cdot 9^6} = 1$. Baker toonde aan dat als het quotiënt van twee producten van zuivere machten *niet* gelijk is aan 1, het ook niet heel dicht bij 1 kan liggen. Hij gaf een expliciete scherpe ondergrens voor het verschil voor het geval dat alle grondtallen op één na constant zijn. Hij en Coates lieten zien hoe dit tot bovengrenzen leidt voor oplossingen van Thue-Mahler-vergelijkingen en hyperelliptische vergelijkingen; dat zijn polynoomvergelijkingen waarbij van de voorkomende machten het grondtal of de exponent vast is. In 1974 vond ik dat ook voor de vergelijking $ax^n - by^n = c$ waarbij a, b, c vaste positieve gehele getallen zijn en $n > 2$ en x, y onbekenden zijn, met Bakers afschattingen bovengrenzen voor n, x, y kunnen worden afgeleid die natuurlijk wel van a, b, c afhangen. Daarbij gebruikte ik dat $\frac{a \cdot x^n}{b \cdot y^n}$ heel dicht bij 1 ligt, maar niet gelijk aan 1 is, omdat c niet 0 is. Stel nu dat (1) een grote oplossing heeft. Dan ligt $\frac{x^m}{y^n}$ heel dicht bij 1, maar is *niet* gelijk aan 1. Nu zijn echter beide grondtallen en exponenten onbekend. Ik moest Baker's bewijs verder uitwerken om de afhankelijkheid van alle grondtallen en exponenten expliciet te maken. Wellicht had Baker dat al geprobeerd voor hij dat overzichtsartikel schreef. In elk geval bleek het niet te werken: de verkregen afschatting was niet scherp genoeg om een bovengrens voor de onbekenden m, n, x, y te krijgen.
Tijdens een vakantie in Spanje kreeg ik het volgende idee. We nemen aan dat m en n oneven priemgetallen zijn. (Ga na dat dit kan zonder verlies van algemeenheid, omdat er geen oplossingen zijn voor $m = 4$ of $n = 4$.) Dan is $(x^m - 1)$ deelbaar door $(x - 1)$ en $(y^n + 1)$ deelbaar door $(y + 1)$.
Omdat $\frac{x^m - 1}{x - 1} = x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1$, is de grootste gemene deler van het quotiënt met $(x - 1)$ een deler van m. Omdat het product van beide een n-de macht y^n is en de g.g.d. m

deelt, moeten beide factoren op een deler van m na een n-de macht zijn. Uitwerking, zoals Cassels al eerder gedaan had, levert dat er getallen r en s zijn zo dat $x - 1 = m^{-1}r^n$ en $y + 1 = n^{-1}s^m$. Door dit in (1) in te vullen vinden we:

$$(n^{-1}r^n + 1)^m - (n^{-1}s^m - 1)^n = 1 \qquad \ldots(2)$$

Als r^n en s^m groot zijn, zijn de termen +1 en -1 tussen de haakjes in (2) relatief klein, en vinden we dat het getal:

$$\frac{(n^{-1}r^n + 1)^m}{(n^{-1}s^m - 1)^n}$$

heel dicht bij 1 ligt, maar niet gelijk is aan 1.
Stel dat n niet groter is dan m. Dan bleek met Baker's methode te volgen dat n kleiner is dan een constante maal $(\log m)^3$. Dus is m relatief groot ten opzichte van n en daarmee de term -1 relatief klein.
Door nu Baker's methode toe te passen op:

$$\frac{(n^{-1}r^n + 1)^m}{(n^{-1}s^m)^n}$$

volgt dat m kleiner is dan een constante maal $(\log m)^5$. Maar dit betekent dat m zelf begrensd is. Dan is ook n, die klein was ten opzichte van m, begrensd. Door nu Baker's bovengrenzen voor oplossingen van hyperelliptische vergelijkingen toe te passen blijken ook x en y begrensd te zijn. Er bleek dus een effectief berekenbare constante te zijn waarboven zich geen oplossingen van Catalan's vergelijking bevinden. Er moesten nog 'maar eindig' veel getallen gecontroleerd te worden om Catalan's vermoeden te bevestigen of te weerleggen (zie [5]).
Voor mij was het voldoende dat een bovengrens voor de oplossingen van het vermoeden van Catalan berekend kon worden. Langevin berekende die bovengrenzen voor m, n, x en y, en die waren erg groot:

$$m, n < e^{e^{e^{e^{730}}}} \text{ en } x, y < e^{e^{e^{e^{245}}}}$$

Met behulp van verscherpingen van Baker's schattingen, congruentie-eigenschappen van machten, eigenschappen van klassegetallen en snellere computers verkregen Mignotte en zijn collega's in de loop van de tijd steeds betere grenzen voor m en n. Toen Ribenboim in 1994 een boek schreef over Catalan's vermoeden [3], waren de grenzen voor m,n teruggebracht tot:

$\max(m, n) < 1{,}06 \times 10^{24}$ en $\min(m, n) < 1{,}31 \times 10^{18}$

Al veel beter, maar nog te groot om met de computer de resterende waarden na te gaan.

Mihailescu geeft een volledig bewijs

In 2002 kwam een doorbraak uit onverwachte hoek. Mihailescu beweerde dat hij bewezen had dat Catalan's vermoeden waar is. Zijn bewijs was niet duidelijk. Gelukkig had Bilu het geduld en het begrip om het zo te herschrijven dat het ook voor anderen begrijpelijk werd. Mihailescu gebruikte dat $(x^m - 1)$ niet alleen deelbaar is door $(x - 1)$, maar geschreven kan worden als product van de lineaire factoren $(x - z)$ over de m-de een-

heidswortels z. (Een m-de eenheidswortel is een complex getal waarvan de m-de macht gelijk is aan 1. Daar zijn er m van, die op een regelmatige m-hoek om 0 liggen.)
Iets dergelijks geldt voor $y^n + 1$. Hij gebruikte dus de volledige ontbinding over complexe algebraïsche getallen en kwam daardoor terecht in de algebraïsche getaltheorie. In 2004 verscheen zijn bewijs van het vermoeden van Catalan.[2]
Voor meer achtergronden verwijs ik naar een overzichtsartikel van Jeanine Daems [1] en voor het bewijs zelf naar het boek van Schoof[4] over de vergelijking van Catalan.

Na 160 jaar was het vermoeden van Catalan bewezen!

Verwijzingen

[1] J. Daems (2004): *Het vermoeden van Catalan*. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/5; pp. 221-225.

[2] P. Mihailescu (2004): *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 572; pp. 167-195.

[3] P. Ribenboim (1994): *Catalan's Conjecture*. Academic Press.

[4] R. Schoof (2008): *Catalan's Conjecture*. Springer Verlag; Universitext.

[5] R. Tijdeman (1976): *On the equation of Catalan*. In: *Acta Arithmetica*, 29; pp. 197-209.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

TELLEN

Eén, twee, kopje thee;
Drie, vier, glaasje bier;
Vijf, zes, kurk op de flesch;
Zeven, acht, soldaat op wacht;
Negen, tien, ik heb een dief gezien;
Tien, elf – de dief dat ben je zelf!

Simon Abramsz. (1937?): *Rijmpjes en versjes uit de oude doos*. Amsterdam: J.M. Meulenhoff.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Reken mee met ABC

[Bart de Smit]

Als ik op een feestje zeg dat ik onderzoek doe in de wiskunde, is de verbaasde reactie nogal eens 'Goh, wat valt daar dan nog aan te onderzoeken?' Men weet wel dat er wiskundigen bestaan, maar de algemene indruk is dat hun werk bestaat uit het volgen van reeds lang bekende recepten.
Mijn eigen werkterrein is de getaltheorie, en gelukkig staat dat vakgebied bol van de open problemen. Er zijn tal van glasheldere vragen waarop we het antwoord niet weten. Een mooi voorbeeld is het *Vermoeden van Goldbach*: elk even getal groter dan 2 is een som van twee priemgetallen. De experts verwachten dat dit waar is, maar niemand weet een bewijs. Dat geeft de uitspraak iets mysterieus, en het is natuurlijk een geweldige uitdaging om een bewijs te zoeken. De eerste die met een bewijs komt, zal eeuwig beroemd zijn – binnen de getaltheorie althans.
Een van de doelen van het project *Reken mee met ABC* is te laten zien dat wiskunde verre van 'af' is, en dat er een rijke wereld aan kleine en grote raadsels klaar ligt waarin de gretige wiskundige zijn tanden kan zetten. Het project behelst het zogeheten *ABC-vermoeden* van Masser en Oesterlé. Het is een van de meest centrale open problemen in de moderne getaltheorie in de zin dat het samenhangt met allerlei bewezen stellingen en onbewezen vermoedens. En het is ook een toegankelijk vermoeden omdat er weinig voorkennis nodig is om de vraag te begrijpen.

ABC-drietallen

Om het ABC-vermoeden te formuleren moeten we eerst weten wat het *radicaal* $r(n)$ van een positief geheel getal n is: en dat is het product van de priemdelers van n.
Bijvoorbeeld, als $n = 6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$, dan is $r(n) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.
We noemen een getal *kwadraatvrij* als het niet deelbaar is door het kwadraat van een geheel getal groter dan 1. Het radicaal van n is gelijk aan de grootste kwadraatvrije deler van n.
Met een *ABC-drietal* bedoelen we een drietal positieve gehele getallen $a < b < c$ met de volgende drie eigenschappen:

- $a + b = c$;
- $\text{ggd}(a, b, c) = 1$;
- $r(a \cdot b \cdot c) < c$.

De derde eigenschap zegt dat het product van de priemdelers van a, b en c voor zo'n ABC-drietal nogal klein uitvalt: het moet kleiner zijn dan c. ABC-drietallen zijn dan ook niet zo talrijk. De enige met $c < 100$ zijn:

$1 + 8 = 9$; $5 + 27 = 32$; $1 + 48 = 49$; $32 + 49 = 81$; $1 + 63 = 64$ en $1 + 80 = 81$

De getallen die in deze drietallen voorkomen, hebben een priemontbinding die veelal bestaat uit kleine priemgetallen met relatief hoge exponenten.

Ook al zijn er betrekkelijk weinig ABC-drietallen tot een gegeven grens, het is toch niet moeilijk om te laten zien dat er oneindig veel ABC-drietallen bestaan. Voor elke positieve gehele n hebben we bijvoorbeeld het drietal $a = 1$, $b = 9^n - 1$ en $c = 9^n$.
We zeggen dat een ABC-drietal *beter* is naarmate $r = r(abc)$ kleiner is ten opzichte van c. Preciezer gezegd, we definiëren de *kwaliteit* $q(a, b, c)$ van een ABC-drietal als het reële getal q waarvoor geldt dat: $c = (r(abc))^q$.

Met andere woorden: $q(a,b,c) = \dfrac{\log c}{\log(r(abc))}$.

Alle ABC-drietallen hebben per definitie kwaliteit groter dan 1.
De hoogst bekende kwaliteit op dit moment is het record uit 1987 van de Franse wiskundige Eric Reyssat:
$a = 2$, $b = 6436341 = 3^{10} \cdot 109$, $c = 6436343 = 23^5$, met:

$$q(a,b,c) = \frac{5\log 23}{\log(2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 23)} = 1{,}6299116...$$

Het ABC-vermoeden zegt dat deze kwaliteit niet substantieel boven de 1 komt:

ABC-vermoeden
Voor elk reëel getal $\varepsilon > 0$ *zijn er slechts eindig veel ABC-drietallen met* $q(a, b, c) > 1 + \varepsilon$.

Van dit vermoeden denken alle deskundigen dat het waar is, en ook dat het bewijs buiten het bereik van de huidige wiskundige technieken ligt. Hoe centraal dit vermoeden in de moderne wiskunde staat, kan men nalezen in het stuk *The ABC conjecture and the Number Theory Hall of Fame* in [2].
Als het ABC-vermoeden waar is, dan is er een ABC-drietal waarvoor geen enkel ander ABC-drietal een hogere kwaliteit heeft.
Experts achten het niet onwaarschijnlijk dat Reyssat's drietal de absolute kampioen is.

BOINC-project

In 2006 lanceerden Kennislink en de Universiteit Leiden het project *Reken mee met ABC* (zie [4] voor de website). Een hoofddoel van het project was een complete lijst van ABC-drietallen te maken met $c < 10^{18}$.
Deze enorme rekenklus is verdeeld over de computers van vrijwilligers die middels de Berkeley Open Infrastructure for Network Computing (BOINC) communiceren met een centrale server in Leiden.
Dankzij de inzet van meer dan 170.000 computers over die vijf jaren werd in 2011 het doel bereikt.

De volledige lijst van de **14.482.065** gevonden ABC-drietallen is voor iedereen beschikbaar op de website « *www.abcathome.com* ».
De methode staat uitgelegd in [1].
Er worden nog controles op de data uitgevoerd om zeker te zijn dat we de volledige zoekruimte overdekt hebben.

	$q > 1$	$q > 1.05$	$q > 1.1$	$q > 1.2$	$q > 1.3$	$q > 1.4$
$c < 10^2$	6	4	4	2	0	0
$c < 10^3$	31	17	14	8	3	1
$c < 10^4$	120	74	50	22	8	3
$c < 10^5$	418	240	152	51	13	6
$c < 10^6$	1.268	667	379	102	29	11
$c < 10^7$	3.499	1.669	856	210	60	17
$c < 10^8$	8.987	3.869	1.801	384	98	25
$c < 10^9$	22.316	8.742	3.693	706	144	34
$c < 10^{10}$	51.677	18.233	7.035	1.159	218	51
$c < 10^{11}$	116.978	37.612	13.266	1.947	327	64
$c < 10^{12}$	252.856	73.714	23.773	3.028	455	74
$c < 10^{13}$	528.275	139.762	41.438	4.519	599	84
$c < 10^{14}$	1.075.319	258.168	70.047	6.665	769	98
$c < 10^{15}$	2.131.671	463.446	115.041	9.497	998	112
$c < 10^{16}$	4.119.410	812.499	184.727	13.118	1.232	126
$c < 10^{17}$	7.801.334	1.396.909	290.965	17.890	1.530	143
$c < 10^{18}$	14.482.065	2.352.105	449.194	24.013	1.843	160

figuur 1 In de tabel staan de aantallen ABC-drietallen bij een zekere kwaliteit q en waarde van c.
Bron: [4]

Vragen en ontdekkingen

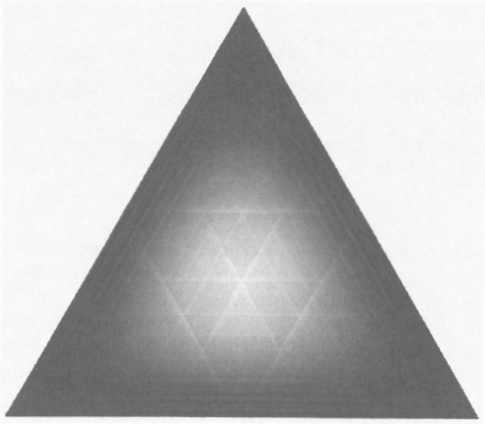
De lijst met ABC-drietallen tot 10^{18} is nu een dankbare bron van allerlei wiskundig interessante observaties en vragen. We illustreren dit met drie voorbeelden.

Laten we eerst kijken hoe vaak de mogelijke waarden voor a voorkomen in de lijst. Met afstand wint $a = 1$. Hoe is dat te verklaren? De nummer twee is $a = 5^6$.

De volgende observatie gaat over paren ABC-drietallen met dezelfde c die opgebouwd zijn uit precies dezelfde priemgetallen. Twee zulke ABC-drietallen hebben dus ook dezelfde kwaliteit.
Er zijn maar zeven dergelijke paren van drietallen opgedoken; het eerste paar bestaat uit de drietallen (128, 3645, 3773) en (648, 3125, 3773), waarbij:
$2^7 + 3^6 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^4 + 5^5 = 7^3 \cdot 11$ en $q = 1{,}063347$
Zouden er maar eindig veel van dergelijke paren zijn?

Tot slot blijkt er een tot dusver onverklaarde fijn-structuur te zitten in de verdeling van het radicaal van abc over de getallen a, b en c. Dit kunnen we het beste illustreren in een meer symmetrische formulering waarin a, b, en c ook negatief mogen zijn en voldoen aan de vergelijking $a + b + c = 0$.
De ABC-eigenschap wordt dan $r(|abc|) < \max(|a|, |b|, |c|)$.

Voor elk drietal van dit soort kunnen we ons nu afvragen hoe het totale radicaal $r(|abc|)$ verdeeld is over de getallen a, b en c. Door een en ander op logaritmische schaal te plotten krijgen we de afbeelding die staat in figuur 2.



figuur 2 – Bron: [3]

Elk ABC-drietal geeft een witte pixel, waarbij de drietallen waarvoor van de getallen $r(|a|)$ of $r(|b|)$ of $r(|c|)$ er één substantieel groter is dan de andere twee, in de hoeken terecht komen. De drietallen waarin een 1 voorkomt, komen op een zijde. De symmetrie in het plaatje is niet verrassend: die is ingebouwd in deze formulering. Maar de witte lijnen, die aan 1 kant scherper lijken te zijn dan aan de andere, zijn een empirisch verschijnsel waarvoor op dit moment nog geen verklaring is.

Referenties

[1] T. van Dijk (2011): *Op jacht naar radicalen*. Leiden: Bachelor scriptie (september 2009), Universiteit Leiden.
Zie: *www.math.leidenuniv.nl/nl/theses/263/*

[2] A. Granville, T.J. Tucker (2002): *It's As Easy As abc*. In: *Notices of the AMS*; volume 49 no. 10, pp. 1224-1231.

[3] W.J. Palenstijn (2010): *Enumerating ABC triples*.
Zie: *www.math.leidenuniv.nl/~wpalenst/abc20101126.pdf*

[4] Website van het project 'Reken mee met ABC' : *www.rekenmeemetabc.nl*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

VWP 6 – Priem?

a. $n^2 - n + 41$ is een priemgetal (ondeelbaar getal) als $n = 1$, als $n = 2$, als $n = 3$, als $n = 4$, zoals men zonder moeite narekent.
Is $n^2 - n + 41$ voor *elke* positieve gehele waarde van n een priemgetal?

b. Beantwoord dezelfde vraag voor $n^2 - 79n + 1601$.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Dieren tellen mee – getalbegrip bij dieren

KIPPEN REDENEREN NIET ALS EEN KIP ZONDER KOP

[Paul Koene]

Al lang vragen mensen zich af of ook dieren kunnen tellen. In 1889 werd de waarneming gedaan dat een mus met 4 jongen, met 4 rupsen bij het nest kwam, en dat steeds maar weer. Kon dat vogeltje tellen?
Over getalbegrip bij dieren is in het verleden zo nu en dan onderzoek verricht. De laatste jaren is er voor dit onderwerp meer belangstelling.

Noodzaak

Alle dieren moeten om in het wild te overleven, in staat zijn verschillende hoeveelheden met elkaar te vergelijken en van elkaar te onderscheiden. Een enkele vijand is minder gevaarlijk dan een groep vijanden, veel voedsel is beter dan weinig voedsel, snel veel kunnen eten is beter dan weinig eten per tijdseenheid.

Dat laatste voorbeeld komt uit gegevens van *optimaal foerageren*. Bij de theorie daarover wordt berekend hoeveel energie een dier uitgeeft om een plaats waar voer is, te bereiken en hoeveel voedsel het dier daar opneemt, vergeleken met een andere plek. Voor een foerageerplek waar veel voedsel van goede kwaliteit is, kun je langer reizen, energie uitgeven, dan voor een plek waar weinig voedsel te halen valt. Op een of andere manier moet het dier zijn ervaringen op beide plekken kunnen vergelijken om een beslissing te nemen. Dieren kunnen dat goed, waarbij ze zelfs niet alleen de kwantiteit, maar ook de kwaliteit van het voedsel mee laten tellen.

Maar de vraag is hoe het dier tot het onderscheid komt. Kan hij tellen hoeveel happen hij per tijd neemt? Is het gewoon de uiteindelijke maagvulling die telt?

We weten dat in ieder geval een paar diersoorten kunnen tellen. Er zijn veel broodje-aapgegevens over tellen bij dieren. Zo zouden kippen pas gaan broeden op een oneven aantal eieren! Maar er komen steeds meer gegevens gebaseerd op resultaat van gedegen onderzoek. Allerlei aspecten zijn daarbij van belang, ook voor de mens. Om er een paar te noemen.

- Wat is de evolutie van het getalbegrip binnen één soort en ook tussen soorten?
- Kun je een evolutionaire stamboom maken van het getalbegrip bij dieren?
- Hoe is het getalbegrip in de hersenen gerepresenteerd?
- Waarom is 7 zowel voor dieren als mensen een magisch getal?

Veel van dit soort vragen zijn nog niet beantwoord.

Definitie

Wat is het eigenlijk getalbegrip? Het is gedefinieerd als 'een intuïtief begrip van aantallen, hun grootte, relaties en berekeningen'. Bij dieronderzoek werden in het verleden verschillende definities door elkaar gebruikt, en daarom is de literatuur nogal verwarrend. In 1988 is een eerste poging gedaan om de chaos in de literatuur te ordenen door precies te beschrijven welke vormen van tellen er zijn. We hebben al even gezien dat dieren onder

veel omstandigheden in staat zijn om verschillen in aantallen te onderscheiden: het beoordelen van relatieve aantallen. Dat zijn schattingen van ongelijkheid die op grootte geordend kunnen worden. Vaak zijn dat dichotomie-vergelijkingen zonder dat er sprake is van absolute aantallen. Een tweede vorm is als je direct ziet wat een aantal is. Meestal gaat dat tot 6, en ondanks het feit dat mensen en sommige dieren het aantal onmiddellijk kunnen benoemen, is hier waarschijnlijk niet 'echt tellen' bij betrokken. Bij grotere aantallen wordt door mensen en dieren ook een aantal geschat, waarbij wel een aantal genoemd kan worden dat niet direct gezien wordt, maar wel ongeveer geschat. Tellen is toch weer anders. Tellen is een formeel proces dat het absolute aantal van een serie items aangeeft. Tellen vereist een serie labels die een één-op-één relatie met de te tellen items hebben. Vervolgens moet er een stabiele voorspelbare volgorde bestaan en veelal ook cardinaliteit, namelijk dat het laatste getal het totaal aantal items in een reeks representeert.

Onderzoeken

Om de verschillende vormen van tellen bij dieren te onderzoeken zijn allerlei methoden gebruikt. Altijd wordt het onderzoek gedaan door dieren stimuli aan te bieden, ofwel tegelijkertijd, ofwel sequentieel. Daarbij zijn vooral visuele stimuli gebruikt, maar ook zijn er voorbeelden met geluid en aanraking. Twintig jaar geleden was de conclusie uit alle experimentele gegevens dat veel dieren in staat zijn om verschillen te constateren tussen hoeveelheden, maar een gevoel van aantal en tellen kon toen nog niet gevonden worden. Dat is pas de laatste jaren het geval. In het algemeen geldt dat eigenlijk alle kenmerken van menselijk gedrag het beste begrepen kunnen werden door de oorsprong, analogen en homologen bij dieren te bestuderen. Er is een continuüm van dier naar mens, dat ook mogelijk een continuüm in de vaardigheid van tellen kan betekenen Daarom heeft het onderzoek naar tellen of 'numerieke competentie' bij dieren meer aandacht gekregen.

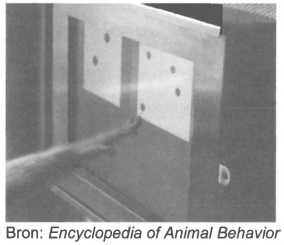
Hersens

Door naar hersenbeschadigingen en afwijkingen in het omgaan met getallen bij mensen te kijken, lijkt de aansturing van het getalbegrip te liggen in een gebied dat de *pariëtale cortex* (deel van hersenschors) wordt genoemd. Experimenten bij dieren laten zien dat de pariëtale cortex ook belangrijk is bij 'telgedrag' van apen, honden en katten. De gevonden parallellen tussen de functionele en morfologische basis van het aantalbegrip bij mensen en dieren suggereren dat het als een belangrijk fundamenteel mechanisme in gedrag wordt doorgegeven.

In 2006 werd ontdekt dat apen neuronen in hun schors hebben die vuren bij een bepaald getal: 3-neuronen voor 3, 4-neuronen voor 4 en 5-neuronen voor 5. De respons werd beter na leren, maar was al sterk in aanleg aanwezig. Opvallend is dat mensen en dieren hetzelfde doen bij het zogenoemde 'numerieke afstand-effect' en het 'aantalsgrootte-effect'. Het numerieke afstand-effect houdt in dat getallen makkelijker onderscheiden worden als er een groter verschil tussen de getallen is; dus 2 wordt makkelijker van 8 onderscheiden dan van 3. Het aantalsgrootte-effect laat zien dat er makkelijker onderscheid gemaakt wordt tussen 2 en 3 dan tussen 14 en 15, en dat is weer makkelijker dan tussen 49 en 50. Dieren en mensen maken dat soort onderscheid met een vergelijkbare be-

trouwbaarheid. Ratten, duiven, wasberen, dolfijnen, papegaaien, apen en chimpansees discrimineren volgens dezelfde regels tussen paarsgewijs aangeboden aantallen.

Rekenende zoogdieren


Bron: *Encyclopedia of Animal Behavior*

Chimpansees werden getraind om het aantal stippen op deksels te onderscheiden en daarna Arabische cijfers (getallen) te koppelen aan het aantal stippen. Vervolgens leerden ze voedsel aan de Arabische cijfers te koppelen (5 snoepjes → 5). Ze kunnen hiermee succesvol tot 7 snoepjes labellen met het juiste getal. De chimpansees waren ook in staat een rijtje van 1, 2 of 3 snoepjes correct en in de juiste volgorde te koppelen aan kaartjes of deksels met de cijfers 1, 2 en 3. Vaak is veel training nodig voor zulke experimenten, maar er zijn sterke aanwijzingen dat dieren ook in het wild en spontaan getalrepresentaties hebben. Ratten kunnen bijvoorbeeld leren om links een pedaaltje in te drukken bij 2 flitslichtjes of geluidjes, en rechts op 4 flitsen of geluiden. Als een dergelijk rat geconfronteerd wordt met 2 flitsen en 2 geluiden, wordt spontaan op het rechter pedaal gedrukt. Onafhankelijk of het licht of geluid is, is het gedrag van de rat gebaseerd op 4 gebeurtenissen. Als een chimpansee moet kiezen uit twee sets, kiezen ze spontaan de set met de grootste hoeveelheid snoepjes. Dit experiment is ook bij mensen en bij resusapen in het wild gedaan. Resusapen kunnen uitstekend 4 en 8 van elkaar onderscheiden als uitkomst van de sommetjes 3 + 1, 2 + 2 en 4 + 4. Ze kunnen dus een beetje optellen. Maar ze kunnen niet goed tussen 4 en 6 discrimineren. Ze zijn dus wel behoorlijk beperkt in hun tellen. In een ander experiment moesten resusapen van twee hoopjes snoep beslissen welk van beide het grootste aantal bevatte. Daarin zijn ze heel goed en ze benaderen de keuze-efficiëntie van mensen, maar ze zijn veel sneller.

Doet een getal er eigenlijk wel toe? Vaak kan op vorm of grootte eenzelfde reactie van dieren begrepen worden. Dit is getest bij de resusaap met een zogenoemde 'delayed matching-to-sample' methode. De dieren werden getraind om, na het zien van een startstimulus, onderscheid te maken tussen twee verschillende stimuli. De ene stimulus kwam in aantal overeen met de hoeveelheid van de startstimulus en de andere in de vorm of de grootte. De apen werden beloond ongeacht hun keuze. Ze werden getraind op aantal versus vorm, aantal versus oppervlakte, aantal versus kleur. Wat bleek? De dieren kozen vooral voor de numerieke representatie. Het lijkt er dus op dat er een natuurlijke neiging is om op het aantal te letten, of met het aantal rekening te houden. Getallen doen er dus toe. Ook in de natuur zijn experimenten gedaan, waarbij simpele sommetjes aan resusapen zijn voorgelegd. Voor de dieren werden de uitkomsten soms 'onverwacht' gemaakt, zoals 1 + 1 = 3 snoepjes. In zulke gevallen bleven de dieren veel langer kijken naar het voer. Ze leken wel verbaasd!
Bij honden zijn de volgende problemen 1 + 1 = 2, 1 + 1 = 1 en 1 + 1 = 3 ook getest. Door de uitkomst van het sommetje achter een scherm te plaatsen, in de vorm van lekkere hapjes, kon gemanipuleerd worden. Ook honden kijken langer als het resultaat van

de berekening niet verwacht was. Honden lijken de uitkomst van een optelling te anticiperen en kunnen dus wellicht een beetje rekenen.
Nog even terug naar het overleven in de natuur. Recent onderzoek, met verwilderde honden in Italië, liet zien dat er ook groepsgedrag mogelijk is gestuurd door aantalsvergelijkingen. Groepen vrijlevende honden komen regelmatig met elkaar in aanvaring. In ruim een jaar zijn 819 confrontaties tussen groepen gemeten en elke keer is vastgesteld wat de aantallen van beide groepen waren, welke groep er als eerste agressief benaderde en welke groep uiteindelijk het gevecht verloor. Uit de gegevens blijkt duidelijk dat de groepen honden het aantal van de tegenstanders schatten, of misschien bij kleine groepen zelfs tellen. De verhouding tussen de aantallen van beide groepen is bepalend voor het gedrag van de groep en leden van de groep. Bij een relatief overwicht wordt eerder agressief benaderd en minder vaak verloren.

Tellende vogels

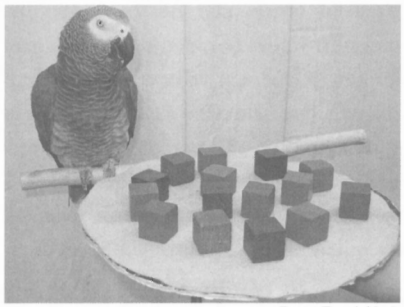
In 1940 werd een experiment gepubliceerd waarin een kauwtje deksels van doosjes met voer moest halen. Het had geleerd maar 5 beloningen te eten, bij de 6de kreeg het diertje straf. Eén specifieke gebeurtenis is in detail beschreven.
'Een kauwtje stopte na het openen van 3 doosjes met in totaal 4 beloningen. De eerste 5 doosjes bevatten 1, 2, 1, 0 en 1 beloningen. De experimentator wilde noteren "één te weinig, incorrecte oplossing", toen de vogel terugging. De kauw boog voor het 1e doosje, deed 2 buigingen voor het 2e, één voor het 3e, toen naar het 4e, waar geen beloning in zat, en nam na het deksel verwijderd te hebben de vijfde en laatste beloning uit het 5e doosje. Toen hij dat gedaan had, liet het dier doos 6 t/m 10 met rust en stopte.'
Het zou kunnen dat het dier door de maagvulling werd gestuurd, maar het is wel een heel opvallende waarneming.
Een recent voorbeeld van tellende vogels komt uit het wild. De Nieuw-Zeelandse roodborst verstopt voedsel en haalt dat verstopte voedsel ook weer op. Hij lijkt dan te weten hoeveel er nog is. In een experiment met twee kunstmatige verstopplaatsen werden hoeveelheden meelwormen aan de wilde roodborsten getoond, daarna in bakjes achter een scherm gestopt en vervolgens werd gekeken wat de keuze van de diertjes was. Tot aan 12 meelwormen kozen de vogels, significant vaker dan verwacht, voor het grootste aantal. De resultaten konden niet verklaard worden door tijd, volume, oriëntatie, volgorde of zo. Als de vogels genept worden door verschillende hoeveelheden te laten zien, maar gelijke hoeveelheden te laten vinden, zochten ze langer dan gewoonlijk bij de vermeende grootste hoeveelheid meelwormen. Het roodborstje gebruikt een getalbegrip bij het ophalen van verstopt voedsel.

Bron: WikipediA

Nog gekker maken parasitair broedende koevogels het. Ze leggen eieren in andermans nest, afhankelijk van de snelheid waarmee het nest gevuld wordt. Ze houden daarvoor van een groot aantal nesten het aantal eieren dagelijks bij. De vrouwtjes koevogels vermijden nesten waarbij er minder dan één ei per dag bij komt. Ze onthouden het aantal eieren in een nest en vergelijken veranderingen in het aantal eieren per nest en bepalen zo de geschiktste nesten om te parasiteren.

Volgens de onderzoekers moeten de vogels wel kunnen tellen, maar men is nog druk bezig dit verder uit te zoeken.

Alex de papegaai kon vragen beantwoorden over aantallen.
'Hoeveel groene sleutels heb ik hier, Alex?'
'Five.'
Alex was dertig jaar lang voortdurend getraind, maar kon dan ook heel veel.
In het wild zullen dit soort dieren waarschijnlijk dezelfde basisvaardigheden hebben, maar zullen ze daar niet zo over communiceren. Alex bleek goed te zijn in het tellen tot en met het getal 6.



Bron: EurekAlert

Een blad met allemaal verschillende aantallen van verschillende dingen onder bekers werd aan hem getoond. Eén voor één werden de bekers opgetild waaronder bijvoorbeeld 1 tot 6 noten, 1 tot 6 blauwe sleutels of 1 tot 6 groene sleutels lagen. Alles werd tussen de 10 en15 seconden getoond, en daarna moest hij op vragen antwoorden, als 'Hoeveel noten lagen er?'
Alex scoort ongeveer 85% goede antwoorden op dergelijke vragen. Alex heeft dus zeker een idee van wat getallen zijn. Alex kon overigens nog veel meer dan tellen en onderscheid maken, maar helaas is hij in 2007 overleden.

Vissen

Kunnen vissen ook tellen? Er waren al experimenten die lieten zien dat vissen onderscheid tussen aantallen konden maken, maar er waren steeds alternatieve verklaringen mogelijk. Een goed gedocumenteerd voorbeeld zonder alternatieve verklaring is een experiment met muskietvissen.
De muskietvis wil graag bij de grootste groep soortgenoten zwemmen, waarschijnlijk om de kans om zelf opgegeten te worden te verkleinen. Door in een experiment één voor één de deelnemers in een groep te presenteren, kon duidelijk aangetoond worden dat deze vissen na het zien van 3 afzonderlijke vissen voor een groep van 3 (tegenover een groep van 2) en een groep van 8 (tegenover een groep van 4 vissen) kiezen. Ook bij vissen zijn er dus sterke aanwijzingen dat ze – een beetje – kunnen tellen.

Ongewervelde dieren

Kunnen nu alleen gewervelden tellen, of zijn er ook ongewervelden die dat kunnen? Bij mieren is het onderzocht, maar de uitkomsten zijn niet altijd even duidelijk. Bij bijen is het wel duidelijk. Bijen werden getest volgens het eerder genoemde 'delayed matching-to-sample' schema. Zij konden na enige training niet alleen onderscheid maken tussen 2 en 3 stimuli, maar konden daarna zonder extra training onderscheid maken tussen 3 en 4. Meer konden ze echt niet. Er werden uitgebreide controles gedaan om onderscheid op de kleur, oppervlakte of vorm uit te sluiten. Het aantal stimuli bleek het enige waar de bijen op letten. Dus ook ongewervelden kunnen getalbegrip hebben en kunnen onderscheid maken tussen aantallen tot 4 en een vergelijking tussen 2 getallen (1 en 2) generaliseren naar een andere vergelijking tussen 2 getallen (3 en 4).

Der kluge Hans

Der kluge Hans, het paard dat begin 20ste eeuw voor publiek sommetjes maakte, heeft eigenlijk veel verknoeid voor het onderzoek naar getalbegrip bij dieren. Hans was goed in communicatie en zijn baas (wiskundeleraar Wilhelm von Osten; 1838-1909) verraadde door zijn gedrag steeds het juiste antwoord. In 1907 werd dat ontdekt en bekendgemaakt.

Bron: WikipediA

Omdat Hans dus niet bleek te kunnen rekenen, werd vaak gedacht dat alle dieren niet konden rekenen of tellen.

Gelukkig is die conclusie enigszins achterhaald. Volgens zeer recent onderzoek kunnen paarden in ieder geval een beetje tellen. Ze kunnen prima 1 van 2 en 2 van 3 onderscheiden, maar niet 4 van 6. Ze kunnen dus goed omgaan met kleine numerieke contrasten.

Landbouwhuisdieren

Hoe staat het met het getalbegrip bij onze landbouwhuisdieren? Gezegden als: 'dom als een rund', 'dom als het achtereind van een varken', 'redeneren als een kip zonder kop', zijn geen complimenten voor hun intelligentie. Zijn die dieren zo dom, of beter, hebben die dieren geen getalbegrip? In een uitgebreid onderzoek naar de cognitieve mogelijkheden van varkens wordt geen melding gemaakt over tellen of het getalbegrip. Net als bij koeien lijkt daar nog geen onderzoek naar gedaan te zijn. Op internet staan wat discussies over koeien die in een vaste volgorde de stal binnenkomen en dus kunnen tellen. Dit soort volgordes is over het algemeen beter te verklaren uit de rangorde die de dieren onderling hebben, dan door tellen.

Van kippen weten we sinds 2009 meer. Een prachtig onderzoek laat zien dat kippen in ieder geval een of ander getalbegrip hebben. Ze lijken te kunnen tellen en zelfs te kunnen optellen en aftrekken. Het experiment gaat als volgt: kuikens worden meteen uit het ei ingeprent op 5 identieke voorwerpen, bijvoorbeeld balletjes. De experimentator zet op dag 3 of 4 een kuiken achter een raampje in een starthokje en laat de 5 balletjes één voor één achter een scherm aan de linkerkant of aan de rechterkant zakken. De kuikens kiezen ver boven kans om naar het scherm te lopen waarachter de meeste balletjes zijn. Ze volgen dus de afzonderlijke balletjes en lijken ze op te tellen. Ze kunnen ook optellen en aftrekken, wat blijkt uit hun goede keuzes nadat balletjes verplaatst zijn tussen de schermen. Dus kippenkuikens kunnen sequentieel optellen en aftrekken en dat is toch verbazingwekkend. Veel van de eerder besproken experimenten vergen een gedegen training van het proefdier en daar schuilt het gevaar in dat de procedure zelf aanleiding geeft tot het leren van onderscheid tussen getallen of kwantiteiten. Het kippenvoorbeeld is een prachtig voorbeeld, waarbij leren in een procedure geen rol speelt en dat dieren spontaan keuzes in aantallen kunnen maken.

De kuikentest
Een totaal van 5 voorwerpen wordt één voor één achter twee schermen verdeeld.
Het kuiken kiest voor het scherm waarachter de meeste voorwerpen zijn.

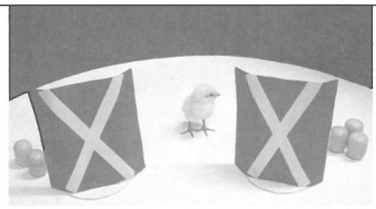


Foto: Rugani et al.

Besluit

Een getalbegrip wordt dus bij veel diersoorten en diergroepen teruggevonden. Van de meeste soorten weten we echter nog niets omdat er geen experimenten voorhanden zijn. Bij de meeste diersoorten wordt wel enige vorm van omgaan met verschillende hoeveelheden en het schatten van verschillende hoeveelheden gevonden. Het kan zijn dat dergelijke getalscompetenties onafhankelijk van elkaar in de loop van de evolutie zijn ontstaan, omdat zulke vaardigheden eigenlijk voor elke diersoort op een of andere manier nodig zijn. Het kan ook zijn dat een eenvoudig getalbegrip vanaf het prille begin al in de eenvoudigste levensvormen aanwezig was en op die manier voor alle soorten een belangrijk onderdeel van de evolutie is geweest. Zoals we 3-, 4- en 5-neuronen kunnen onderscheiden, is er een mogelijkheid dat vanaf het prilste zenuwstelsel alle dieren eigenlijk al telmogelijkheden hadden die in meer of minder mate bijdroegen aan de overleving van het dier.
Er zullen gezien de huidige onderzoeksinspanningen op dit terrein in de nabije toekomst vast veel spectaculaire ontdekkingen gedaan worden.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

RAADSEL

Als een wiskundige uit 2^3
Het in het 10^2 lopen laat
En dan ge3^2 is
Om zich blasé in 4^2hoven
Van het leven te beroven
Wat is hij dan?

Oplossing
Als een wiskundige uit Acht
(Wat twee is tot de derde macht)
Het in tien in het kwadraat
(dus in het honderd) lopen laat
En dan gedrie tot de macht twee
(Genegen) is om zich blasé
In vier maal vier is Zestienhoven
Van het leven te beroven
Is hij denk ik maar één ding:
Een machtsverhefwellusteling

Frank van Pamelen (2008): *IKEA en andere verzen*. Amsterdam: Nijgh & Van Ditmar.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

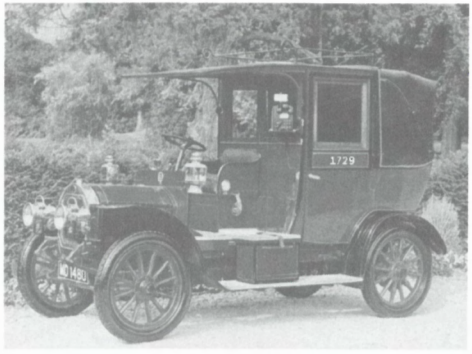
De geheimen van taxinummers

[Alex van den Brandhof]

Waarom is 24153319581254312065344 een bijzonder getal? Omdat dit getal het kleinste is dat op *zes* manieren kan worden geschreven als som van twee derdemachten.
En wat maakt 933528127886302221000 zo speciaal? Dit is het kleinste getal dat op *tien* manieren te schrijven is als som óf als verschil van derdemachten. Deze twee eigenschappen werden ontdekt in 2008.
We hebben hier te maken met zogeheten *taxicab-* en *cabtaxi-getallen.*

De Engelse wiskundige Godfrey Harold Hardy (1877-1947) haalde in 1913 het Indiase genie Srinivasa Ramanujan (1887-1920) naar Engeland.

Toen Hardy hem eens met een taxi opzocht in het ziekenhuis, merkte hij op dat het nummer van de taxi oninteressant was: 1729. 'Nee, dat is juist een heel interessant getal', moet Ramanujan toen hebben opgemerkt, 'Het is het kleinste getal dat op twee manieren kan worden uitgedrukt als een som van twee derdemachten. Het is de som van 1^3 en 12^3, en ook van 9^3 en 10^3.'



Taxicab-getallen

De anekdote van taxinummer 1729 heeft de wiskunde twee begrippen rijker gemaakt: *taxicab-getal* en *cabtaxi-getal.* Wiskundigen bedoelen met 'Taxicab(n)' het *kleinste* getal dat op precies n manieren als som van twee positieve derdemachten kan worden geschreven.
Taxicab(1) is snel gevonden: dat is 2, want het is gelijk aan $1^3 + 1^3$.
Taxicab(2) kennen we van Ramanujan: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Deze eigenschap van 1729 was al een paar eeuwen vóór Ramanujan opgemerkt. Voor zover we kunnen nagaan, werd het voor het eerst opgemerkt in 1657 door de Franse wiskundige Bernard Frénicle de Bessy (1605-1670).
Taxicab-getallen groeien razendsnel. Taxicab(3) heeft al acht cijfers:

$87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$

Dit werd ontdekt in 1957 door John Leech (1926-1992), waarbij hij gebruik maakte van een computer. Ondanks de snelle computers van tegenwoordig zijn er op dit moment nog maar zes taxicab-getallen bekend; zie figuur 1. Het vierde en vijfde taxicab-getal werden gevonden in respectievelijk 1991 en 1997. Een getal dat op *zes* manieren te schrijven is als som van twee derdemachten, werd in 2002 gevonden door de Amerikaan Randall

Rathbun, en in 2008 bewees de Amerikaan Uwe Hollerbach dat dat getal inderdaad het *kleinste* is met die eigenschap.

Hoewel we de taxicab-getallen vanaf 7 niet met zekerheid kennen, kunnen we er wel het een en ander over zeggen. Ten eerste bewezen G.H. Hardy en E.M. Wright in 1954 dat Taxicab(n) voor élke waarde van n *bestaat*. Van de getallen Taxicab(7) tot en met Taxicab(19) zijn al *bovengrenzen* bekend.
Bijvoorbeeld: het getal 24885189317885898975235988544 is op zeven manieren te schrijven als som van twee derdemachten, maar we weten nog niet zeker of dit het *kleinste* getal is met die eigenschap.

figuur 1

$$\begin{aligned}
\text{Taxicab}(1) &= 2 = 1^3 + 1^3 \\
\text{Taxicab}(2) &= 1729 = 1^3 + 12^3 \\
&\quad = 9^3 + 10^3 \\
\text{Taxicab}(3) &= 87539319 = 167^3 + 436^3 \\
&\quad = 228^3 + 423^3 \\
&\quad = 255^3 + 414^3 \\
\text{Taxicab}(4) &= 6963472309248 = 2421^3 + 19083^3 \\
&\quad = 5436^3 + 18948^3 \\
&\quad = 10200^3 + 18072^3 \\
&\quad = 13322^3 + 16630^3 \\
\text{Taxicab}(5) &= 48988659276962496 = 38787^3 + 365757^3 \\
&\quad = 107839^3 + 362753^3 \\
&\quad = 205292^3 + 342952^3 \\
&\quad = 221424^3 + 336588^3 \\
&\quad = 231518^3 + 331954^3 \\
\text{Taxicab}(6) &= 24153319581254312065344 = 582162^3 + 28906206^3 \\
&\quad = 3064173^3 + 28894803^3 \\
&\quad = 8519281^3 + 28657487^3 \\
&\quad = 16218068^3 + 27093208^3 \\
&\quad = 17492496^3 + 26590452^3 \\
&\quad = 18289922^3 + 26224366^3
\end{aligned}$$

Varianten op taxicab-getallen

Eenmaal aan het rekenen geslagen zijn wiskundigen niet meer te houden. Hoe zit het als we alleen naar sommen van *priemgetallen* tot de derdemacht kijken? De priemversie van Taxicab(2) is:

$6058655748 = 61^3 + 1823^3 = 1049^3 + 1699^3$

De priemversie van andere taxicab-getallen zijn vandaag de dag nog allemaal onbekend!
Een andere leuke variant is: hoe zit het als we geen derdemachten nemen, maar *vierdemachten*? Het kleinste getal dat op twee manieren kan worden geschreven als som van vierdemachten wist Leonhard Euler (1707-1783) al:

$635318657 = 59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4$

Cabtaxi-getallen

Een andere variant waardoor veel getaltheoretici gegrepen zijn, zijn de *cabtaxi-getallen*. Deze getallen zijn niet alleen opgebouwd uit *sommen* van derdemachten; ook *verschillen* worden hierbij toegestaan.

Met 'Cabtaxi(n)' noteren we het *kleinste* getal dat op n manieren te schrijven is als som óf als verschil van twee derdemachten.

Cabtaxi(2) werd gevonden door François Viète in 1591; het is $91 = 3^3 + 4^3 = 6^3 - 5^3$.

Euler was waarschijnlijk de eerste die een kandidaat voor Cabtaxi(3) vond:

$165464 = 87^3 - 79^3 = 20^3 + 54^3 = 38^3 + 48^3$

Dit getal bleek niet het ware (het kleinste) cabtaxi-getal voor $n = 3$ te zijn. Dat werd gevonden in 1902 door de Amerikaan Edward Escott:

$728 = 12^3 - 10^3 = 9^3 - 1^3 = 8^3 + 6^3$

Het duurde sinds de ontdekking van Escott negentig jaar tot het volgende cabtaxi-getal werd gevonden; maar toen ging het hard. Tussen 1992 en 2005 werden Cabtaxi(4) tot en met Cabtaxi(9) gevonden.

Een kandidaat voor Cabtaxi(10) werd in 2006 gevonden door de Fransman Christian Boyer.

En in 2008 was het opnieuw Hollerbach die bewees dat die kandidaat het *ware* tiende cabtaxi-getal is:

93352812788630222100O

figuur 2

Cabtaxi(1) = $1 = 1^3 \pm 0^3$

Cabtaxi(2) = $91 = 3^3 + 4^3$
$= 6^3 - 5^3$

Cabtaxi(3) = $728 = 6^3 + 8^3$
$= 9^3 - 1^3$
$= 12^3 - 10^3$

Cabtaxi(4) = $2741256 = 108^3 + 114^3$
$= 140^3 - 14^3$
$= 168^3 - 126^3$
$= 207^3 - 183^3$

Cabtaxi(5) = $6017193 = 166^3 + 113^3$
$= 180^3 + 57^3$
$= 185^3 - 68^3$
$= 209^3 - 146^3$
$= 246^3 - 207^3$

Cabtaxi(6) = $1412774811 = 963^3 + 804^3$
$= 1134^3 - 357^3$
$= 1155^3 - 504^3$
$= 1246^3 - 805^3$
$= 2115^3 - 2004^3$
$= 4746^3 - 4725^3$

Cabtaxi(7) = 11302198488
$= 1926^3 + 1608^3$
$= 1939^3 + 1589^3$
$= 2268^3 - 714^3$
$= 1939^3 + 1589^3$
$= 2268^3 - 714^3$
$= 2310^3 - 1008^3$
$= 2492^3 - 1610^3$
$= 4230^3 - 4008^3$
$= 9492^3 - 9450^3$

Cabtaxi(8) = 137513849003496
$= 22944^3 + 50058^3$
$= 36547^3 + 44597^3$
$= 36984^3 + 44298^3$
$= 52164^3 - 16422^3$
$= 53130^3 - 23184^3$
$= 57316^3 - 37030^3$
$= 97290^3 - 92184^3$
$= 218316^3 - 217350^3$

Cabtaxi(9) = 424910390480793000
= $645210^3 + 538680^3$
= $649565^3 + 532315^3$
= $752409^3 - 101409^3$
= $759780^3 - 239190^3$
= $773850^3 - 337680^3$
= $834820^3 - 539350^3$
= $1417050^3 - 1342680^3$
= $3179820^3 - 3165750^3$
= $5960010^3 - 5956020^3$

Cabtaxi(10) = 933528127886302221000
= $77480130^3 - 77428260^3$
= $41337660^3 - 41154750^3$
= $18421650^3 - 17454840^3$
= $10852660^3 - 7011550^3$
= $10060050^3 - 4389840^3$
= $9877140^3 - 3109470^3$
= $9781317^3 - 1318317^3$
= $9773330^3 - 84560^3$
= $8444345^3 + 6920095^3$
= $8387730^3 + 7002840^3$

Recreatie of nuttig?

Wiskundigen houden van puzzelen en sommigen kan het weinig schelen of hun werk de wereld werkelijk verbetert. Andrew Wiles werd in 1994 in één klap beroemd toen hij de *Laatste Stelling van Fermat* bewees. Deze stelling uit de getaltheorie heeft op zichzelf geen praktische waarde, maar het heeft de wiskunde wel degelijk rijker gemaakt, doordat Wiles verbanden wist te leggen tussen verschillende gebieden uit de wiskunde. Dat geldt wel vaker in de wiskunde en zo ook voor het onderzoek naar taxicab- en cabtaxi-getallen: ze zijn zelf niet direct voor toepassingen van belang, maar ze stimuleren wel het ontwikkelen van algemeen bruikbare wiskundige theorie.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

VWP 7 – Geschikt

Volgens welk principe zijn de volgende getallen, alle kleiner dan 40, lineair gerangschikt?
8, 38, 28, 18, 13, 30, 3, 33, 23, 1, 31, 21, 11, 9, 39, 29, 19, 10, 12, 2, 32, 22, 20, 14, 4, 34, 24, 5, 35, 25, 15, 6, 36, 26, 16, 7, 37, 27, 17

VWP 8 – Drieën

Hoeveel cijfers 3 bevat het getal dat gelijk is aan de som van de kwadraten van de getallen 1 tot en met 10^n ?

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Anekdote

[Rob Birkhoff]

De reistijd was langer dan we dachten, en het was onderweg wat drukker dan verwacht, dus arriveren we nogal laat bij het *Optisches Museum* in Jena [1]. Dan blijkt ook nog het museum erg vroeg te sluiten: er is nog maar een half uur over voor het museumbezoek.

Een half uur is wel erg kort voor een museumbezoek, dus er volgt een kort overleg.
'Te kort, we kunnen beter meteen naar een terrasje, en daar het entreegeld besteden.' (Ik was niet die spreker.) Deze mening lijkt eerst enige bijval te vinden, maar dan:
'Zo vaak kom je niet in Jena. Dit is je kans dit museum eens te zien.'
Voldoende krachtig uitgesproken, zodat iedereen zich conformeert en onze reisleidster a.i. zich naar binnen spoedt om de benodigde kaartjes aan te schaffen.

En met nog precies 27 minuten te gaan sta ik in de hal van dit museum. Wat te doen? Snel alle zalen doorhollen, overal een paar foto's maken en vanavond bekijken wat er allemaal te zien was?
Weinig aantrekkelijk. Wacht, misschien hebben ze wel een gidsje of boekje waar al die foto's al in staan! Een korte rondblik leert dat inderdaad het geval is: vlak naast de kassa ligt een prachtig gidsje (ik kan het u aanbevelen) met veel informatie en veel foto's. De prijs kan geen bezwaar zijn: € 4,50.

Ik leg een exemplaar van het werkje op de toonbank, maak de kassajuffrouw duidelijk dat ik dit exemplaar graag wil aanschaffen, bekrachtig dat door ook nog een briefje van tien euro neer te leggen. De jongedame vraagt of ik er nog een halve euro bij kan doen en bijna automatisch voldoe ik aan dat verzoek en deponeer nog een halve euro. (Wel gek eigenlijk bedenk ik vervolgens: dit verhoogt alleen maar het aantal bij de transactie benodigde munten. Kennelijk heeft de dame een groot gebrek aan vijftig cent munten.)
Ze legt een 5-eurobiljet neer en beschouwt kennelijk de zaak als afgedaan.
Hoewel ik nog maar 26 minuten heb, doe ik toch aarzelend een poging de mij toekomende euro alsnog te krijgen – je bent tenslotte Hollander – en tracht uit te leggen dat er '*etwas nicht stimmt*'.

'Aber alles ist richtig. Das Heft kostet vier Euro fünfzig, Sie gaben fünfzig cent, ich gab Sie fünf Euro, zusammen zehn Euro, so es stimmt genau', legt de Thüringse me uit.
Als rechtgeaard docent had ik natuurlijk even de neiging het meisje eens rustig en duidelijk uit te leggen waar de fout zat. Je hebt je beroepseer nietwaar?
Maar kijkend naar haar schatte ik in dat de 25 minuten die mij nog restten, niet voldoende zouden zijn en ik besloot mijn verlies te nemen.

Kennelijk deed ik net iets te lang over het omdraaien en weglopen, want mijn aarzeling was bemerkt. Er werd een rekenmachine gepakt. Zo'n hele grote met de basisbewerkingen, toetsen van een vierkante centimeter en een heel groot scherm. Ik kon dus meegenieten van alles wat ingetikt werd.

10 × 100 + 50 – 4 × 100 + 50

Bij de laatste plus had ik enige moeite niet te reageren, maar dat leek me niet echt nuttig. Drukken op de = - toets leverde, voor de dame volstrekt onverwacht, het correcte antwoord van deze berekening: 700.
Met een heel rood gezicht en veel *Entschuldigung*'s werden nog twee euromunten op de toonbank gelegd. Onder een 'Zullen we dan maar sam-sam doen?' pakte ik één munt, schoof de andere terug en spoedde mij naar de expositieruimten, waar ik in de resterende 23 minuten toch nog heel erg genoten heb van de prachtige tentoongestelde voorwerpen.

En ik ga ik zeker nog een keer, maar dan wel iets langer.

Noot

[1] Website: *www.optischesmuseum.de*
Adres: Optisches Museum der Ernst-Abbe-Stiftung, Carl-Zeiss-Platz 12, D 07743 Jena.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

VWP 9 – Deelbaar

Hoeveel getallen bestaande uit 10 cijfers, waarin de cijfers 0, 1, 2, …, 9 elk precies éénmaal voorkomen, zijn deelbaar door 99?

VWP 10 – Minimaal

Wat is het kleinste getal n waarvoor geldt dat $n!$ op 1000 nullen eindigt?
Geef (zo mogelijk) een oplossing die voor generalisatie vatbaar is.
(Met $n!$ wordt bedoeld het product van de getallen 1, 2, 3, …, n.)

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Een universele afkeer van 67

[Maarten Evenblij]

De mens heeft al heel vroeg geprobeerd zijn dagelijks bestaan te verklaren met cijfersymboliek. Maar zelfs gevoelsmatig spelen ook nu nog cijfers en getallen een belangrijke rol in het leven. Met prettige getallen is het gemakkelijker rekenen.
Wie een getal onder de tien moet raden, bijvoorbeeld om het ene overgebleven taartje te mogen verschalken, kan het best drie of zeven zeggen. Want dat zijn de getallen die het meest genoemd worden als mensen naar hun lievelingsgetal wordt gevraagd.
Dat er met deze getallen wat aan de hand is, weet zelfs een kind. Want ze figureren veelvuldig in sprookjes en kinderrijmpjes: De drie kleine kleutertjes op een hek, de wolf die zeven geitjes oppeuzelt of de zeven kikkertjes in een boerensloot.

Psychologe drs. M. Milikowski promoveerde in 1995 aan de Universiteit van Amsterdam op een onderzoek naar de manier waarop mensen omgaan met de getallen één tot en met honderd. Niet alleen vroeg ze proefpersonen naar hun lievelingsgetal en naar de associatie die ze bij een getal hebben, ook onderzocht ze met welke getallen het gemakkelijk rekenen is en met welke moeilijker.
Als schoolkinderen wordt gevraagd hoe lang een trein over één rondje doet als hij er tien in 30 minuten aflegt, dan geven ze snel het juiste antwoord. Maakt de trein echter twaalf rondjes in 84 minuten, dan levert het antwoord heel wat meer hoofdbrekens op.
Milikowski vroeg zich af of valt te voorspellen is welke sommen het gemakkelijkst te maken zijn. Of er in de hersenen een soort opslagmechanisme is waardoor dicht bij elkaar liggende getallen ook vaker met elkaar worden geassocieerd.
Daarvoor deed ze associatie-experimenten, zoals ook in de taalkunde worden gedaan. Een proefpersoon zegt bijvoorbeeld in meer dan vijftig procent 'zwart' als hij 'wit' op een beeldscherm te lezen krijgt. Milikowski vroeg haar proefpersonen associaties bij getallen te maken. Hoog – maar nooit boven de 50 procent – scoorden bijvoorbeeld de paren 59-60, 70-7, 9-3, 25-5 en 100-10.
De associaties bleken overigens niet wederkerig. Het aantal mensen dat 3 zegt als het 9 ziet bijvoorbeeld, is bijna twee keer zo groot als het aantal dat de associatie 9 krijgen als 3 te zien is. Ook wordt het cijfer 2 onevenredig vaak als associatie genoemd, terwijl het aantal associaties dat men bij 2 krijgt, niet boven het gemiddelde uitstijgt.
Milikowski constateert dat er grote verschillen zijn tussen verschillende categorieën van getallen, als ze kijkt naar de frequentie waarin die in associatie-experimenten worden genoemd. De enkelvoudige getallen, de cijfers 0 tot en met 9, worden veruit het meest genoemd, gevolgd door de tientallen. Daarna komen de getallen die deel uitmaken van de tafels van vermenigvuldiging, en tenslotte de getallen die geen deel uitmaken van deze tafels.
Ook bij het onthouden van getallenrijen scoren de 1-cijferige getallen en de tientallen het best. Verder blijken proefpersonen 59 en 41, gevraagd naar het gevoel dat ze erbij heb-

ben, heel vervelende getallen te vinden en ze worden ook slecht onthouden. Maar de kroon spant 67. Dat moet wel het rotste getal op aarde zijn, want mensen blijken het niet alleen een 'naar' getal te vinden, ze weigeren ook het te onthouden als het in een rijtje voorkomt.

Het is misschien een beetje raar om mensen te vragen welk gevoel ze bij een getal krijgen, en Milikowski moest constateren dat een aantal proefpersonen dacht dat ze gek was, maar toch blijken mensen sympathie of antipathie voor bepaalde getallen te hebben. Denk alleen maar aan het getal 13, waarvan velen menen dat het ongeluk brengt.

Op de schaal 'goed-slecht' scoren vooral de even getallen goed (met 10 en 100 als absolute toppers) en de oneven getallen slecht (met 67 en 53 als slechtste). Verder worden 87 en 83 als 'zware' getallen beschouwd, en 22 en 4 als 'lichte'. En 13 en 19 vonden Milikowskis proefpersonen 'opwindend'; 80 en 82 juist 'kalm'. Achteraf kwamen sommige proefpersonen met hele ontboezemingen over wat ze bij diverse getallen voelden.

'7 is geen goed getal voor mij', vertelt één van hen. 'Het is onvriendelijk, net als 11.'
Een ander over het getal 13: 'Het is een ongeluksgetal. Ik geloof er niet zo in, maar... Het is ook een priemgetal en 13, geen goede leeftijd ook.'

Dat getallen worden geassocieerd met gevoelens uit het dagelijks leven en dat ze een rol spelen in de interpretatie daarvan, is ouder dan de weg naar Rome. Bij de Babyloniërs was zeven het aantal delen waaruit alle volkomen dingen bestonden. Er waren zeven hemelen, zeven afdelingen van de onderwereld met zeven poorten.
Ook in de Bijbel speelt zeven, als teken van volmaaktheid, veelvuldig een rol. De Schepping duurde niet voor niets zeven dagen en Joshua moest op de zevende dag, zeven keer om de stad Jericho trekken terwijl zeven priesters op zeven ramshoorns bliezen.
Dertien geldt als ongeluksgetal: er is geen dertiende rij stoelen in vliegtuigen, vaak missen hotels kamer 13 en in flatgebouwen wil ook nog wel eens de dertiende etage ontbreken. En over het onheil dat ons op vrijdag (de dag waarop Jezus werd gekruisigd) de dertiende kan overkomen, kunnen we beter zwijgen.
Het bijgeloof in het getal 13 hangt in de Westerse wereld samen met het laatste avondmaal van Jezus waaraan dertien personen deelnamen. Judas verlaat als eerste de tafel en zal ook als eerste sterven nadat hij Jezus verraden heeft. Dertien wordt daarom ook wel het Judas-getal genoemd. In Nederland herinneren de gezegden 'De dertiende man brengt de dood an' en 'Dertien aan tafel, morgen één dood', nog aan die betekenis. In het Midden-Oosten is dertien ook een ongeluksgetal. Het is immers één meer dan twaalf, het getal dat aansluit bij de verdeling van het uitspansel in sterrenbeelden.
Tot in de Middeleeuwen was 13 onder Christenen in Europa echter juist een geluksgetal. Het was immers een combinatie van tien (de tien geboden) en drie (de heilige drie-eenheid). In de kabbalistiek – waarin op grond van onder meer de getalswaarde van de (Hebreeuwse) letters inzicht wordt gekregen in God en zijn verhouding tot mens en wereld – is 13 ook een geluksgetal. En ook op andere plekken in Joodse geschriften komt 13 naar voren als een getal van verlossing.

De Christelijke leer heeft heel wat getallen een betekenis gegeven. De 1, ondeelbaar, werd het symbool van God, 3 de drie-eenheid, 7 en 12 zijn heilige getallen omdat ze de drie-eenheid combineren met de vier elementen (water, lucht, aarde, vuur): $3 + 4$ en 3×4. Het getal 10 staat voor de Christelijke volmaaktheid, terwijl het getal 11 de onmatigheid en de zonde symboliseerde.

De Griekse filosoof Pythagoras (6e eeuw voor Christus) en zijn volgelingen brachten de getallensymboliek bij uitstek in praktijk. Elke scholier kent de stelling van Pythagoras over de rechthoekige driehoek waarin de lengte van de schuine zijde de wortel is van het de som der kwadraten van de rechte zijden ($c^2 = a^2 + b^2$).
Net zoals deze stelling een belangrijke bouwsteen werd van de meetkunde, hebben andere ideeën van de meester en zijn discipelen religie en literatuur beïnvloed. Voor Pythagoras draaide alles om orde en regelmaat. Hij zou hebben ontdekt dat de intervallen op de muzikale toonschaal zich verhouden als 1 : 2, 2 : 3 of 3 : 4, waarmee de eerste vier gehele getallen uit de wiskunde worden vastgelegd.
Hij en zijn volgelingen bouwden deze gedachte uit en concludeerden tenslotte dat alles in het universum te meten is met gewone gehele getallen. Zij waren buitengewoon gefascineerd door even en oneven getallen, waarmee ze de wereld indeelden.
De oneven getallen behoren tot de rechter zijde en ze hangen samen met de beperking, het mannelijke, rust, eerlijkheid, licht en goedheid en – in meetkundige zin – het vierkant.
De even getallen behoren toe aan de linker zijde; het oneindige (want ze zijn oneindig deelbaar), het vrouwelijke, beweging, oneerlijkheid, donker en kwaad en de rechthoek. Dit contrast tussen even en oneven, tussen het ondeelbare (God) en het oneindige, heeft een belangrijke rol gekregen in het volksgeloof en in theologische speculaties.
Plato bijvoorbeeld, zag in alle even getallen slechte voortekens. In tegenstelling tot de hedendaagse proefpersonen van Milikowski die de even getallen juist als positief waarderen.
Pythagoras introduceerde ook het perfecte getal, waarvan de echte delers bij elkaar opgeteld weer het betreffende getal leveren. Zes is het eerste perfecte getal ($1 + 2 + 3 = 6$) en 28 het volgende ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$). Inmiddels zijn er 23 van zulke perfecte getallen ontdekt. 6 is zelfs een dubbel perfect getal, want ook $1 \times 2 \times 3$ levert 6 op.

'In de structuur van de wiskunde zit iets bovenmenselijks', verklaart emeritus-hoogleraar wiskunde prof. dr. F. van der Blij, 'De vroege drang van de mens tot getallensymboliek; het is een manier om de onzekerheid van het leven een zekerheid te geven.'
Van der Blij meent dat veel wiskundigen denken dat de wiskunde een ontdekking is van ideeën. 'De aantrekkingskracht van wiskunde zit ook in de oneindigheid. Er is altijd een getal te bedenken dat groter of kleiner is. Vroeger geloofde men in de eindigheid der dingen, maar de wiskunde heeft dat denken op z'n kop gezet.'
Over de bijzonderheid van bepaalde getallen moet wiskundige Van der Blij een beetje lachen. Alle getallen zijn bijzonder, is zijn stelling. Want het eerste getal dat niet bijzonder is, is juist daardoor ook weer speciaal, waardoor het volgende getal het eerste niet-bijzondere getal wordt, enzovoort.

Van der Blij vergelijkt het tellen en het toekennen van getallen aan gebeurtenissen met de eerste grottekeningen van de primitieve mens. Door hun tekening – wellicht gebruikt voor de jacht of in de magie – kregen ze macht over wat ze waarnamen. 'Ook als je het kunt tellen, heb je er macht over', stelt Van der Blij.

In veel primitieve culturen – vooral onderzocht aan het eind van de vorige eeuw, begin van deze eeuw – is de bevolking gezegend met drie telwoorden: één, twee, veel. Andere maken bij het tellen combinaties. De Braziliaanse Bakaïri-indianen zeggen *tokále* als ze één bedoelen en *ahége* voor twee. Vijf is bij hen *ahége-ahége-tokále*.
Het is niet verwonderlijk dat bij veel natuurvolken 5 vaak met 'hand', 10 met 'beide handen' en 20 met 'mens' (inclusief de tenen) wordt aangeduid. De Groenlandse Eskimo zou – volgens de in 1947 gehouden oratie van dr. J. Popken bij zijn aanstelling als hoogleraar aan de Universiteit Utrecht – het getal 53 hebben uitgedrukt als 'aan de derde man aan de eerste voet drie'. Wat betekent dat men eerst vingers en tenen van twee mannen moet aftellen, daarna de vingers van een derde man en vervolgens drie tenen van diens voet.

In de moderne samenleving gebruiken we zonder aarzelen getallen waarvoor handen en voeten absoluut te kort schieten. Van bijvoorbeeld de lezer van een krantenartikel wordt verwacht dat deze een miljoen, miljard of zelfs biljoen nog kan bevatten.
Onderzoekster Milikowski vraagt zich af of zulke getallen nog wel kunnen worden onthouden. Daarvoor gaat zij, inmiddels werkzaam bij de afdeling publieksstudies van de Universiteit van Amsterdam, onderzoeken hoe getallen het best kunnen worden gepresenteerd aan argeloze krantenlezers.
Heeft het bijvoorbeeld zin om te schrijven dat 1.123.000 Nederlanders de film *Schindlers List* hebben gezien? Denkt de lezer dan: 'Heel veel mensen hebben de film gezien', of rondt hij of zij het aantal kijkers automatisch af op ruim een miljoen? En hoe kunnen getallen het best gepresenteerd worden: cijfers of letters?
Misschien wel het best als symbolen, zoals de Maya's in Latijns Amerika deden of de Pythagoreeërs met hun geometrische figuren. Want het menselijk brein is nu eenmaal beter in staat om figuren en symbolen te onthouden dan cijfers. Een wereldbol zou kunnen staan voor vijf miljard, een voetbalstadion voor tienduizend.
Maar wat moet je dan antwoorden op de vraag: 'Noem eens een getal onder een voetbalstadion?'

Verantwoording

Dit artikel is eerder gepubliceerd in *de Volkskrant* van 21 oktober 1995. Het is met toestemming van de auteur opgenomen. Op een enkele plaats is de tekst aangepast. De illustratie kwam niet voor in het *Volkskrant*-artikel.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Getallen bij leven en dood
EEN KIJKJE IN DE ACTUARIËLE WISKUNDE

[Daaf Spijker]

Een levensverzekering is een overeenkomst tussen een persoon (de verzekeringnemer) en een bedrijf (de verzekeraar), waarin wordt vastgelegd dat het bedrijf een zeker bedrag (*uitkering* genoemd) zal betalen indien de verzekerde (niet noodzakelijk dezelfde persoon als de verzekeringnemer) is overleden en/of bij het in leven zijn van de verzekerde op een in die overeenkomst vastgelegd tijdstip of tijdstippen. Een en ander geschiedt onder de voorwaarde van betaling van bepaalde bedragen vooraf (koopsom of premies) door de verzekeringnemer aan het bedrijf.

Daarbij is het, voor een goede bedrijfsvoering, noodzakelijk dat de verzekeraar meerdere van dergelijke verzekeringen sluit met veel verschillende verzekerden.

Om aan de verplichtingen die het bedrijf aangaat, te voldoen maakt het gebruik van kennis omtrent de toekomstige *sterfte* van de verzekerden, van de in de toekomst te maken *interest* (het 'losstaande' woord *rente* wordt in dit verband voor een ander begrip, namelijk *lijfrente*, gebruikt) en van de door het bedrijf te maken kosten.

De sterfte van personen wordt door het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) om de 5 jaar vastgelegd in zogenoemde *overlevingstafels* (vroeger ook wel aangeduid als *sterftetafels*). Deze tafels worden door het Actuarieel Genootschap (AG) bewerkt voor praktisch gebruik door (onder meer) verzekeringsbedrijven: de zogenoemde AG-tafels.

In een overlevingstafel wordt binnen een grote groep mensen telkens van personen met dezelfde leeftijd geteld hoeveel van hen er na precies één jaar nog leven. Men beschouwt daarbij alle leeftijden, te beginnen met de 0-jarigen. Voor het aantal 0-jarigen schrijft men l_0; voor het aantal levenden die x jaar zijn, schrijft men l_x. Daarna vindt voor de AG-tafels omrekening plaats: men stelt dan l_0 meestal gelijk aan 10 miljoen.

x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	10.000.000	20	9.888.451	60	8.897.261
1	9.941.605	...		61	8.797.766
2	9.936.638	30	9.820.644	62	8.687.264
3	9.932.858	31	9.813.542	63	8.564.307
4	9.930.395	32	9.806.118	64	8.427.871
5	9.928.299	33	9.798.345	65	8.276.947
6	9.926.414	34	9.790.171	66	8.111.841
7	9.924.736	35	9.781.460	...	
8	9.923.265	...		113	3
9	9.921.860	40	9.727.241	114	1
10	9.920.504	50	9.498.579	115	0

figuur 1

In figuur 1 staan een aantal waarden van l_x uit de AG-tafel die is afgeleid voor de gehele Nederlandse *mannelijke* bevolking in de periode 1995-2000. Deze AG-tafel heet GBM 1995-2000 [1]; er bestaat ook zo'n tafel voor vrouwen: GBV 1995-2000. De waarden van

l_x in beide tafels verschillen voor elke overeenkomstige leeftijd gezien de verschillen in overlevingskansen van mannen en vrouwen (zie de paragraaf Kansen).

Berekeningen die nodig zijn om bovenbedoelde koopsommen (en premies) op basis van de uit te keren bedragen en van de verwachte sterfte vast te stellen, behoren tot de ***actuariële wiskunde*** (ook wel *verzekeringswiskunde* genoemd).
Bij deze berekeningen wordt voor de interest, bij gebrek aan beter, meestal een vaste rentevoet (de *rekenrente* van de verzekeraar) gebruikt, terwijl voor de onkosten van de verzekeraar een vast percentage van de koopsom of van de premies wordt gehanteerd.

Indien een kapitaal K tegen een vast rentepercentage van p% per jaar belegd wordt – daarbij is $i = \frac{p}{100}$ – dan is de interest aan het einde van een jaar gelijk aan $K \cdot i$.
Samen met de interest is het belegde kapitaal op dat moment dus gelijk aan:
$K + K \cdot i = K \cdot (1 + i)$
Is dit gehele bedrag weer rentegevend, dan spreekt men van *samengestelde interest*. Na n jaar is het kapitaal dan met samengestelde interest aangegroeid tot $K \cdot (1 + i)^n$. Dit bedrag wordt de *eindwaarde* (ook wel slotwaarde) van K na n jaar genoemd.
Het getal $(1 + i)^n$ wordt aangegeven met $S_{\overline{n}|}$ (de S is een symbool dat afkomstig is uit de *financiële rekenkunde*). Dus: $K_{\text{eind}} = K \cdot S_{\overline{n}|}$.

Voor $\frac{1}{S_{\overline{n}|}}$ wordt geschreven: $A_{\overline{n}|}$ (ook dit symbool wordt in de financiële rekenkunde gebruikt). Met $A_{\overline{n}|}$ kunnen we de zogenoemde *contante waarde* (aanvangswaarde) van een kapitaal berekenen: hebben we op een zeker tijdstip een kapitaal K, dan is de contante waarde daarvan – n jaar *eerder* – gelijk aan $K \cdot A_{\overline{n}|}$:

$K_{\text{contant}} = K \cdot A_{\overline{n}|}$

Merk voorts op dat: $A_{\overline{0}|} = S_{\overline{0}|} = 1$, $A_{\overline{n+m}|} = A_{\overline{n}|} \cdot A_{\overline{m}|}$ en $S_{\overline{n+m}|} = S_{\overline{n}|} \cdot S_{\overline{m}|}$.

Wiskundige reserve

Bij de hierna volgende berekeningen gaan we er steeds van uit dat x (leeftijd) en n (verzekeringsduur, looptijd) gehele getallen zijn en dat betaling, zowel van koopsom en premies als van uitkeringen, steeds bij het sluiten van de verzekering en/of na een *geheel* aantal jaren zal plaats vinden. Voorts worden daarbij de kosten van de verzekeraar buiten beschouwing gelaten.

Is x de leeftijd van een verzekerde bij het sluiten van de verzekering, T_n het bedrag dat aan het einde van het n-de verzekeringsjaar door het bedrijf moet worden uitbetaald als de verzekerde leeft, en U_n het bedrag dat moet worden uitbetaald aan het einde van het $(n + 1)$-de jaar indien de verzekerde in dat jaar is overleden, dan vormt de som van de bedragen T_n en U_n de zogeheten *verplichting* van het bedrijf (overigens, T_n of U_n kunnen gelijk aan 0 zijn).
Naast de verplichting van het bedrijf hebben we natuurlijk ook de verplichting van de verzekeringnemer: het betalen van premie. Is P_n de premie die moet worden voldaan di-

rect aan het begin van het $(n + 1)$-de jaar, dan kan een relatie worden gevonden tussen T_n, U_n en P_n.
We veronderstellen daartoe dat op het leven van l_x personen (allen hebben dus dezelfde leeftijd) een dergelijke verzekering wordt gesloten.

De grootte van het bedrag waarover de verzekeraar na n jaar voor deze verzekeringen kan beschikken – ná de uitgaven U_{n-1}, maar vóór de ontvangsten van P_n en de uitgaven T_n – geven we aan met ${}_nW$. Het bedrag één jaar later is dan ${}_{n+1}W$.

Het bedrag waarover de verzekeraar op enig moment moet beschikken om, met de nog te ontvangen premies, de verzekerde uitkeringen *in de toekomst* te kunnen verrichten, heet *wiskundige reserve*.

Na n jaar is die wiskundige reserve dus ${}_nW$. Uiteraard bestaat er een relatie tussen ${}_nW$ en ${}_{n+1}W$. Er geldt (*recursief*):

$$ {}_{n+1}W = ({}_nW + l_{x+n} \cdot P_n - l_{x+n} T_n) \cdot (1+i) - (l_{x+n} - l_{x+n+1}) \cdot U_n \qquad \ldots(1) $$

Immers, na n jaar leven er nog l_{x+n} verzekerden voor wie de premie P_n moet worden betaald én aan wie een bedrag T_n moet worden uitbetaald. En, omdat ${}_{n+1}W$ één jaar later bekeken wordt, moet er vermenigvuldigd worden met $(1 + i)$.
Aan het einde van het $(n + 1)$-de jaar zijn er van die verzekerden nog l_{x+n+1} in leven, zodat aan $l_{x+n} - l_{x+n+1}$ personen een bedrag van U_n moet worden uitbetaald, en dat bedrag wordt natuurlijk in mindering gebracht op de reserve.

Voor het aantal personen dat in hun $(x + 1)$-de levensjaar overlijdt, schrijven we d_x.

Gevolg: $d_x = l_x - l_{x+1}$

We kunnen nu vergelijking (1), met $1+i = S_{\overline{1}|}$, ook schrijven als:

$$ {}_{n+1}W = ({}_nW + l_{x+n} \cdot P_n - l_{x+n} T_n) \cdot S_{\overline{1}|} - d_{x+n} \cdot U_n \qquad \ldots(2) $$

Uitgaande van ${}_0W = 0$ (een juiste aanname als we de kosten buiten beschouwing laten) vinden we hieruit achtereenvolgens:

$$ {}_1W = l_x \cdot S_{\overline{1}|} \cdot P_0 - l_x \cdot S_{\overline{1}|} \cdot T_0 - d_x \cdot U_0 $$
$$ {}_2W = l_x \cdot S_{\overline{2}|} \cdot P_0 - l_x \cdot S_{\overline{2}|} \cdot T_0 - d_x \cdot S_{\overline{1}|} \cdot U_0 \quad + \quad l_{x+1} \cdot S_{\overline{1}|} \cdot P_1 - l_{x+1} \cdot S_{\overline{1}|} \cdot T_1 - d_{x+1} \cdot U_1 $$
$$ \ldots $$

En daarmee na n jaar:

$$ {}_nW = \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot S_{\overline{n-t}|} \cdot P_t - \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot S_{\overline{n-t}|} \cdot T_t - \sum_{t=0}^{n-1} d_{x+t} \cdot S_{\overline{n-t-1}|} \cdot U_t \qquad \ldots(3) $$

We veronderstellen we nu dat na n jaar (d.w.z. vlak voor én vlak na het einde van het n-de verzekeringsjaar) geen ontvangsten en uitbetalingen meer plaats vinden – de verzekering is normaal beëindigd. Dan is ${}_nW = 0$. Uit relatie (3) volgt dan:

$$ \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot S_{\overline{n-t}|} \cdot P_t = \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot S_{\overline{n-t}|} \cdot T_t + \sum_{t=0}^{n-1} d_{x+t} \cdot S_{\overline{n-t-1}|} \cdot U_t \qquad \ldots(4) $$

Hiermee is in principe het hoofdprobleem van de actuariële wiskunde, het berekenen van premies, opgelost: uit relatie (4) kan bij gegeven U_t en V_t de waarde van P_t worden berekend (zeker indien, zoals gebruikelijk, $P_t = P$, $T_t = T$ en $U_t = U$, voor iedere t).

De oplossing van een tweede actuarieel probleem is vervat in relatie (3): het berekenen van de zogenoemde *premiereserve* ${}_nV$ van een verzekering. Na het n-de verzekeringsjaar, d.w.z. ná de betalingen U_{n-1}, maar vóór de betalingen P_n en T_n, moet de verzekeraar de beschikking hebben over het bedrag ${}_nW$, en dat is per verzekering:

$${}_nV = \frac{{}_nW}{l_{x+n}}$$

De premiereserve van een verzekering wordt ondermeer gebruikt bij staking van de premiebetaling of bij wijziging van de verzekering (daaronder begrepen voortijdige beëindiging).

Equivalentie

In relatie (4) komen in het linker en rechter lid de constanten S voor. Deling van de termen in (4) door $S_{\overline{n-t}|}$ geeft:

$$\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot P_t = \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot T_t + \sum_{t=0}^{n-1} d_{x+t} \cdot S_{\overline{-1}|} \cdot U_t \qquad \ldots(5a)$$

Hierin kan $S_{\overline{-1}|}$ vervangen worden door $A_{\overline{1}|}$.

Overigens, niets staat een verdere manipulatie (in de goede zin van het woord) van deze relatie in de weg. Vermenigvuldiging van (5a) met het getal $A_{\overline{t}|}$ geeft:

$$\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot A_{\overline{t}|} \cdot P_t = \sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t} \cdot A_{\overline{t}|} \cdot T_t + \sum_{t=0}^{n-1} d_{x+t} \cdot A_{\overline{t+1}|} \cdot U_t \qquad \ldots(5b)$$

Hierin zien we termen met $A_{\overline{t}|} \cdot P_t$, $A_{\overline{t}|} \cdot T_t$ en $A_{\overline{t+1}|} \cdot U_t$ als factoren. Dit zijn de contante waarden van premies en uitkeringen t cq. $(t+1)$ jaar eerder, dus op het moment van afsluiten van de verzekering. Elke term is evenwel vermenigvuldigd met een factor die te maken heeft met leven of dood (l_{x+t} of d_{x+t}). We kunnen (5b) dus formuleren als:

Bij afsluiten van de verzekering is de som van de contante waarden van de nog te ontvangen premies gelijk aan de som van de contante waarden van de nog te verrichten uitbetalingen.

Dit is het belangrijkste principe in de actuariële wiskunde, het *equivalentieprincipe*.

Er is niets tegen de sommaties in (5b) voort te zetten tot en met de hoogste waarde van x waarvoor $l_x \neq 0$. Deze x wordt aangegeven met ω ($l_\omega \neq 0$, $l_{\omega+1} = 0$; in de tafel van figuur 1 is $\omega = 114$).
Immers, op een bepaald moment is de verzekering beëindigd en hebben de termen die dan extra zijn toegevoegd, alle een factor die gelijk is aan 0 ($= P_t = T_t = U_t$).

Vermenigvuldigen we relatie (5b) met het getal $A_{\overline{x}|}$, dan vinden we, met een gewijzigde eindwaarde in de sommaties:

$$\sum_{t=0}^{\omega} l_{x+t} \cdot A_{\overline{x+t}|} \cdot P_t = \sum_{t=0}^{\omega} l_{x+t} \cdot A_{\overline{x+t}|} \cdot T_t + \sum_{t=0}^{\omega} d_{x+t} \cdot A_{\overline{x+t+1}|} \cdot U_t \qquad \ldots(6)$$

Voor bepaalde combinaties van getallen worden zogenoemde *commutatietekens* (speciale omrekeningsgrootheden) ingevoerd, vooral om berekeningen en uitdrukkingen te vereenvoudigen. Zo geldt (*per definitie*) voor ieder gehele x:

- $D_x = l_x \cdot A_{\overline{x}|}$ (gedisconteerd aantal levenden van de leeftijd x);
- $C_x = d_x \cdot A_{\overline{x+1}|}$ (gedisconteerd aantal doden).

De waarden van D_x staan eveneens in de AG-tafels (gedeeld door 100 en daarna afgerond op gehelen); zie figuur 2, waarin een deel van zo'n AG-tafel staat.
Met gebruik van de grootheden C_x en D_x wordt (6):

$$\sum_{t=0}^{\omega} D_{x+t} \cdot P_t = \sum_{t=0}^{\omega} D_{x+t} \cdot T_t + \sum_{t=0}^{\omega} C_{x+t} \cdot U_t \qquad \ldots(7)$$

x	l_x	q_x	D_x	N_x
0	10000000	0.0058395	100000	2427613
1	9941605	0.0004996	95592	2327613
2	9936638	0.0003804	91870	2232021
3	9932858	0.0002480	88303	2140151
4	9930395	0.0002111	84885	2051848
5	9928299	0.0001899	81603	1966963
6	9926414	0.0001690	78450	1885360
7	9924736	0.0001482	75420	1806910
8	9923265	0.0001416	72508	1731490
9	9921860	0.0001367	69710	1658982
10	9920504	0.0001347	67019	1589272

figuur 2 Bron: AG-tafel, Actuarieel Genootschap (2002) – GBM, rentevoet 4%

Kansen

Voor de breuk $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ wordt geschreven ${}_np_x$. Dit is de *kans* dat een x-jarige over n jaar nog leeft: de n-jarige *overlevingskans*.[2] De 1-jarige overlevingskans van een x-jarige is dan ${}_1p_x$, maar deze kans wordt geschreven als p_x.
De kans dat een x-jarige in diens $(x + 1)$-de levensjaar overlijdt (de 1-jarige sterftekans), dus tussen zijn x-de en $(x + 1)$-de verjaardag, is gelijk aan:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Merk op dat $1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = q_x$. De getallen q_x worden eveneens in de AG-tafels opgenomen (zie figuur 2).
Voor de kans dat een x-jarige in z'n $(n + 1)$-de levensjaar overlijdt (de n jaar *uitgestelde* sterftekans) schrijven we:

$${}_nq_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

Daarmee is dus: ${}_0q_x = q_x$.
Bij het betalen van premie cq. het doen van een uitkering zijn er precies twee mogelijkheden: wel óf niet betalen, afhankelijk van het al (gebeurtenis G) of niet (gebeurtenis G^*) in leven zijn van de verzekerde.
Horen bij deze gebeurtenissen opvolgend de kansen p en $1 - p$, dan kunnen we een kansverdeling opstellen als in figuur 3.

figuur 3

	G	G^*
betaling =	K	0
$P(G)$ =	p	$1-p$

De (mathematische) *verwachting* E van de betaling kan dan eenvoudig (en dit is per definitie) worden berekend als:

$E = p \cdot K + 0 \cdot (1-p) = p \cdot K$

In relatie (5b) staan in het linker lid de termen $l_{x+t} \cdot A_{\overline{t}|} \cdot P_t$. Delen we zo'n term door l_x dan is:

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot A_{\overline{t}|} \cdot P_t = ({}_t p_x) \cdot (A_{\overline{t}|} \cdot P_t)$$

Dit is de verwachting van de (contante waarde van de) na t jaar door de verzekeraar te ontvangen premie P_t.

In termen van kansen luidt relatie (5b), na deling door l_x en ook weer met aanpassing van eindwaarde in de sommaties:

$$\sum_{t=0}^{\omega} ({}_t p_x) \cdot A_{\overline{t}|} \cdot P_t = \sum_{t=0}^{\omega} ({}_t p_x) \cdot A_{\overline{t}|} \cdot T_t + \sum_{t=0}^{\omega} ({}_t q_x) \cdot A_{\overline{t+1}|} \cdot U_t \qquad \ldots(8)$$

Deze relatie drukt dus de gelijkheid uit van de mathematische verwachting van de inkomsten, het linker lid van (8), en de uitgaven, het rechter lid van (8), van de verzekeraar.

Koopsom

In plaats van te delen door l_x kunnen we natuurlijk ook delen door D_x. Hierdoor gaat (7) over in:

$$\sum_{t=0}^{\omega} \frac{D_{x+t}}{D_x} \cdot P_t = \sum_{t=0}^{\omega} \frac{D_{x+t}}{D_x} \cdot T_t + \sum_{t=0}^{\omega} \frac{C_{x+t}}{D_x} \cdot U_t \qquad \ldots(9)$$

We veronderstellen nu (als voorbeeld) dat elke T_t gelijk is aan 0, behalve $T_n = 1000$, en dat elke U_t gelijk is aan 0, en verder ook dat P_t gelijk is aan 0, met uitzondering van P_0.

We hebben dan een verzekering waarbij een bedrag 1000 na n jaar bij in leven zijn van de verzekerde wordt uitgekeerd. Voor die verzekering wordt dus éénmalig, en wel bij het sluiten van de verzekering, het bedrag P_0, de zogenoemde *koopsom*, betaald.

Dus is volgens (9) de *netto* koopsom – we zouden immers geen rekening houden met kosten – gelijk aan:

$$P_0 = 1000 \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

***Voorbeeld* 1.** We berekenen P_0 voor een dergelijke verzekering op het leven van een 30-jarige man met een verzekeringsduur van 35 jaar, bij een rekenrente van 4%.

$$\frac{D_{30+35}}{D_{30}} = \frac{l_{65} \cdot A_{\overline{65}|}}{l_{30} \cdot A_{\overline{30}|}} = \frac{8.276.947}{9.820.644} \cdot A_{\overline{35}|} = \frac{8.276.947}{9.820.644} \cdot (1{,}04)^{-35} = 0{,}2135814$$

De netto koopsom P_0 voor deze verzekering is dus 213,58 . ◊

Het getal $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ wordt 'actuarieel' geschreven als $A_{x\ \overline{n}|}^{\ 1}$.[3] Dit is dus de koopsom (we laten in hetgeen volgt 'netto' weg) voor een uitkering van 1 bij in leven zijn van de verzekerde na n jaar.

Opmerking 1. Omdat de waarden van D_x in de AG-tafels zijn opgenomen, kunnen we de P_0 daaruit natuurlijk direct berekenen:

$$P_0 = 1000 \cdot A_{30\ \overline{35}|}^{\ 1} = 1000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{30}} = 1000 \cdot \frac{6467}{30279} = 213{,}58$$

Opmerking 2. We zien dat bij de twee indexen x en $\overline{n}|$ van A het cijfer 1 boven $\overline{n}|$ staat. De betekenis daarvan is dat bij deze koopsom eerst gekeken wordt naar de duur n van de verzekering en vervolgens naar de gebeurtenis die te maken heeft met de leeftijd x van de verzekerde (in leven of overleden). ◊

Veronderstellen we vervolgens (en dit ook weer als voorbeeld) dat $P_t = 0$, $T_t = 0$, $U_t = 0$, maar alleen $P_0 \neq 0$ en $U_n = 1$, dan gaat (9) over in:

$$P_0 = 1 \cdot \frac{C_{x+n}}{D_x} = \frac{C_{x+n}}{D_x}$$

In dit geval is P_0 de koopsom voor een uitkering van 1 aan het einde van het $(n + 1)$-de verzekeringsjaar als de verzekerde gedurende dát jaar is overleden.

Het getal $\frac{C_{x+n}}{D_x}$ wordt actuarieel (en niet zo 'leesbaar') geschreven als ${}_{n|}A_{x\ \overline{1}|}^{\ 1}$ (een n jaar uitgestelde overlijdensverzekering met een duur van 1 jaar). Met minder indexen (maar ongebruikelijk) is wellicht $B_{x+n\ \overline{1}|}$ iets beter leesbaar.

Relatie (9) is dus te herleiden tot een combinatie van twee *elementaire* verzekeringsvormen, een verzekering bij leven (A) en een verzekering bij overlijden (B):

$$\sum_{t=0}^{\omega} (A_{x\ \overline{t}|}^{\ 1}) \cdot P_t = \sum_{t=0}^{\omega} (A_{x\ \overline{t}|}^{\ 1}) \cdot T_t + \sum_{t=0}^{\omega} (B_{x+t\ \overline{1}|}) \cdot U_t \qquad \ldots(10)$$

En dat gebeurt eigenlijk ook in de dagelijkse praktijk: de actuarieel wiskundige (de *actuaris*) herleidt gewenste verzekeringen tot een *combinatie* van andere verzekeringen.
Hiervan zullen we in hetgeen volgt nog enkele voorbeelden tegenkomen.

Lijfrente

De oudste verzekeringsvorm waarvan de koopsom min of meer wetenschappelijk werd berekend[4], is de *levenslange lijfrente*: een serie periodieke uitkeringen steeds uit te betalen bij in leven zijn van de verzekerde.
De koopsom van een dergelijke verzekering, met telkens *aan het einde* van een jaar een uitkering van 1 en actuarieel genoteerd als a_x, kan als volgt worden afgeleid.

Stel l_x personen worden op deze manier verzekerd. Dan ontvangt de verzekeraar bij het sluiten van die verzekeringen het bedrag $I = l_x \cdot a_x$.

Na het eerste jaar zijn er van de l_x verzekerden nog l_{x+1} in leven: er moet dán een bedrag van $l_{x+1} \cdot 1 = l_{x+1}$ worden uitgekeerd. De contante waarde daarvan is $l_{x+1} \cdot A_{\overline{1}|}$. Aan het

eind van het tweede verzekeringsjaar zijn er l_{x+2} verzekerden in leven; de contante waarde van de uitkeringen aan hen op dat moment is $l_{x+2} \cdot A_{\overline{2}|}$. Enzovoort.

De contante waarde U van *alle* uitkeringen van deze verzekeringen is dus:

$$U = l_{x+1} \cdot A_{\overline{1}|} + l_{x+2} \cdot A_{\overline{2}|} + \ldots = \sum_{t=1}^{\omega} l_{x+t} \cdot A_{\overline{t}|}$$

Volgens het equivalentieprincipe is $I = U$, zodat:

$$l_x \cdot a_x = \sum_{t=1}^{\omega} l_{x+t} \cdot A_{\overline{t}|}, \text{ of ook: } a_x = \sum_{t=1}^{\omega} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot A_{\overline{t}|}$$

We kunnen a_x ook schrijven als: $a_x = \sum_{t=1}^{\omega} A_{x\,\overline{t}|}^{\;1}$, dus als een *som* van koopsommen (zie de paragraaf Koopsom). De eerste uitkering ($t = 1$) geschiedt aan het einde van het eerste verzekeringsjaar (als de verzekerde in leven is), de tweede aan het einde van het tweede (bij leven van de verzekerde), enzovoort. Men spreekt hier van een *postnumerando* (lijf)rente (achteraf uitgekeerd, aan het einde van een periode).

Voor deze combinatie van steeds dezelfde verzekering (een uitkering bij leven) geldt:

$$a_x = A_{x\,\overline{1}|}^{\;1} + A_{x\,\overline{2}|}^{\;1} + A_{x\,\overline{3}|}^{\;1} + \ldots = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{\omega}}{D_x}$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{\omega}}{D_x}$$

Om dit type berekening (en zo'n sommering komt vaak voor) wat te vereenvoudigen is een commutatieteken ingevoerd:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{\omega} = \sum_{t=0}^{\omega} D_{x+t}$$

Ook voor de waarden van N_x is een kolom opgenomen in de AG-tafels (zie figuur 2).

Zo vinden we, omdat $N_{x+1} = D_{x+1} + \ldots + D_{\omega}$:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

***Voorbeeld* 2.** Bereken de koopsom van een levenslange *postnumerando* lijfrente van 1200 per jaar op het leven van een 55-jarige man.

Oplossing. $a_{55} = \frac{N_{56}}{D_{55}} = \frac{148.703}{10.720} = 13{,}872$

N.b. In de praktijk worden de koopsommen van lijfrentes berekend in 3 decimalen.

De gevraagde koopsom is dan gelijk aan: 16.646,40 . ◊

Wordt er direct bij het sluiten van de verzekering – aan het begin van het eerste jaar ($t = 0$) – óók een uitkering van 1 gedaan (dat zal weliswaar nooit worden bedongen), dan spreekt men van een *prenumerando* rente. Schrijven we $\ddot{a}_x$ voor de koopsom van díe verzekering, dan geldt dus:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

Het bedrag 1 wordt door de verzekeringnemer betaald (als deel van de koopsom) en direct weer uitbetaald door de verzekeraar (als eerste uitkering).

Nu is:

$\ddot{a}_x = A_x\,{}^{1}_{0|} + A_x\,{}^{1}_{1|} + A_x\,{}^{1}_{2|} + \ldots$. Hierin is $A_x\,{}^{1}_{0|} = 1$, zodat:

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

***Voorbeeld* 3.** Bereken de koopsom van een levenslange *prenumerando* lijfrente van 1200 per jaar op het leven van een 55-jarige man.

Oplossing. $\ddot{a}_{55} = \frac{N_{55}}{D_{55}} = \frac{159.423}{10.720} = 14{,}872$

De koopsom is 17.846,40 (= 16.646,40 + 1.200,00). ◊

De prenumerando rente $\ddot{a}_x$ is vooral van belang bij het berekenen van periodieke premies (die worden altijd vooruit betaald) én bij het samenstellen van andere verzekeringsvormen.
N.b. De waarden van $\ddot{a}_x$ staan daarom eveneens in de AG-tafels; en daaruit kunnen de waarden van a_x eenvoudig worden berekend.

Men spreekt van een *uitgestelde lijfrente* (een *pensioen*) met een uitstelperiode n jaar (notatie: ${}_{n|}\ddot{a}_x$), als de betaling van de rente pas aanvangt *aan het einde* van het n-de jaar, d.w.z. direct aan het begin van het $(n+1)$-de jaar. In de praktijk is dit bijna altijd een *pre*numerando rente.
De koopsom van die uitkeringen zou aan het einde van het n-de jaar gelijk aan $\ddot{a}_{x+n}$ – bij het ingaan van het pensioen is de verzekerde immers $(x+n)$ jaar.
Om de koopsom van het pensioen te berekenen op de datum van sluiten (dus n jaar eerder), beschouwen we $\ddot{a}_{x+n}$ als een (eenmalige) uitkering die wordt gedaan n jaar na het afsluiten van de verzekering. De contante waarde bij het sluiten van de verzekering wordt dan gevonden door te vermenigvuldigen met $A_x\,{}^{1}_{n|}$ (d.w.z. met de koopsom van 1 voor een uitkering bij leven na n jaar), zodat:

$${}_{n|}\ddot{a}_x = A_x\,{}^{1}_{n|} \cdot \ddot{a}_{x+n}$$

Maar, we kunnen ook anders redeneren. We vatten de uitgestelde lijfrente op als een *levenslange* lijfrente waarvan de koopsom verminderd wordt met de koopsommen voor de niet gedane uitkeringen in de eerste $(n-1)$ jaar – deze laatste uitkeringen zijn te beschouwen als een prenumerando (direct ingaande) *tijdelijke lijfrente*. Dus:

$$\begin{aligned} {}_{n|}\ddot{a}_x &= \ddot{a}_x - (A_x\,{}^{1}_{0|} + A_x\,{}^{1}_{1|} + \ldots + A_x\,{}^{1}_{n-1|}) \\ &= \frac{N_x}{D_x} - \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

***Voorbeeld* 4.** Bereken de koopsom van een 10 jaar uitgestelde *levenslange* prenumerando lijfrente van 1200 voor een 55-jarige man.

Oplossing. ${}_{10|}\ddot{a}_{55} = \frac{N_{65}}{D_{55}} = \frac{72.258}{10.720} = 6{,}740$

De koopsom is dan 8088,00 .

***Voorbeeld* 5.** Bereken de koopsom van een 7 jaar uitgestelde *tijdelijke* lijfrente, jaarlijks 1500, met een duur van 5 jaar op het leven van een 12-jarige jongen.
Oplossing. We schrijven de koopsom (per eenheid) actuarieel als ${}_{m|}\ddot{a}_{x\,n\rceil}$, waarin dan hier $m = 7$, $x = 12$, $n = 5$.

Nu is (en de lezer verifiëre deze formule!): ${}_{m|}\ddot{a}_{x\,n\rceil} = {}_{m|}\ddot{a}_x - {}_{m+n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} - \frac{N_{x+m+n}}{D_x}$.

Dus: ${}_{7|}\ddot{a}_{12\,5\rceil} = \frac{N_{19} - N_{24}}{D_{12}} = \frac{1.071.408 - 854.241}{61.946} = 3{,}506$

De koopsom is dan 5259,00 .
In dit geval wordt wel gesproken van een *studieverzekering*, hier dus gesloten op het leven van de student zelf.
Als deze verzekering op het leven van de 35-jarige vader van de jongen gesloten wordt, vinden we:

${}_{7|}\ddot{a}_{35\,5\rceil} = \frac{N_{42} - N_{47}}{D_{35}} = \frac{350.606 - 264.472}{24.788} = 3{,}475$

En dan is de koopsom gelijk aan 5212,50 .

Kapitaalverzekering

Een verzekering die bij overlijden en/of bij leven (ná een bepaalde periode) één uitkering kent, wordt *kapitaalverzekering* genoemd. Hierboven (in de paragraaf Koopsom) maakten we al kennis met een kapitaalverzekering bij leven.
De langst bestaande verzekering van dit type is de levenslange verzekering met een éénmalige uitkering bij overlijden (*begrafenisverzekering*).
De koopsom voor zo'n verzekering wordt actuarieel aangegeven met A_x. De uitkering vindt bij deze verzekeringsvorm dus plaats aan het einde van het sterfjaar van de verzekerde. We zullen laten zien hoe A_x (voor een uitkering van 1) kan worden berekend.

Stel dat l_x personen een dergelijke verzekering sluiten. De verzekeraar ontvangt dan bij het afsluiten van de verzekering het bedrag $l_x \cdot A_x$.
Volgens de gebruikte overlevingstabel overlijden in het eerste verzekeringsjaar d_x verzekerden, zodat het bedrijf aan het eind van dat jaar het bedrag $d_x \cdot 1 = d_x$ moet uitkeren.
De (contante) waarde van het bedrag d_x – dat is de waarde van d_x bij het afsluiten van de verzekering – is dan gelijk aan $A_{\overline{1}|} \cdot d_x$.

Aan het eind van het tweede verzekeringsjaar zijn d_{x+1} verzekerden overleden. De contante waarde van de uitkeringen hierbij is bij afsluiten van de verzekering gelijk aan $A_{\overline{2}|} \cdot d_{x+1}$.

Volgens het equivalentieprincipe geldt dan:

$$l_x \cdot A_x = A_{\overline{1}|} \cdot d_x + A_{\overline{2}|} \cdot d_{x+1} + \ldots \qquad \ldots(11a)$$

Vermenigvuldiging hiervan met $A_{\overline{x}|}$ geeft:

$$l_x \cdot A_{\overline{x}|} \cdot A_x = A_{\overline{x+1}|} \cdot d_x + A_{\overline{x+2}|} \cdot d_{x+1} + \ldots \qquad \ldots(11b)$$

Per definitie is (zie de paragraaf Equivalentie): $C_x = A_{\overline{x+1}|} \cdot d_x$. En daarmee is (11b) 'korter' te schrijven:

$$D_x \cdot A_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega \qquad \ldots(11c)$$

Opmerking. Ook voor de som $C_x + \ldots + C_\omega$ bestaat een commutatieteken (namelijk M_x), maar daarvan zullen we in hetgeen volgt geen gebruik maken. ◊

Wel kijken we nog even verder naar A_x. We weten (conform de gegeven definities):
$C_x = A_{\overline{x+1|}} \cdot d_x = A_{\overline{x+1|}} \cdot (l_x - l_{x+1})$
En dan is, hiermee verder rekenend aan C_x:
$$C_x = A_{\overline{x+1|}} \cdot l_x - A_{\overline{x+1|}} \cdot l_{x+1} = A_{\overline{1|}} \cdot A_{\overline{x|}} \cdot l_x + D_{x+1}$$
$$= A_{\overline{1|}} \cdot D_x + D_{x+1}$$
Zodat (11c) ook kan worden geschreven als:
$$D_x \cdot A_x = (A_{\overline{1|}} \cdot D_x - D_{x+1}) + (A_{\overline{1|}} \cdot D_{x+1} - D_{x+2}) + (A_{\overline{1|}} \cdot D_{x+2} - D_{x+3}) + \ldots$$
$$= A_{\overline{1|}} \cdot (D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega) - (D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega) \qquad \ldots(11d)$$
$$= A_{\overline{1|}} \cdot N_x - N_{x+1}$$
Gevolg:
$$A_x = A_{\overline{1|}} \cdot \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad \ldots(12a)$$
De uitdrukkingen $\frac{N_x}{D_x}$ en $\frac{N_{x+1}}{D_x}$ in (12a) zijn we in de paragraaf Lijfrentes reeds tegengekomen: ze zijn opvolgend gelijk aan $\ddot{a}_x$ en a_x. Daarmee vinden we uit (12a):
$$A_x = A_{\overline{1|}} \cdot \ddot{a}_x - a_x \qquad \ldots(12b)$$
We hebben ook gezien dat $a_x = -1 + \ddot{a}_x$, zodat $A_x = A_{\overline{1|}} \cdot \ddot{a}_x - (-1 + \ddot{a}_x)$, waarmee uit (12b) volgt dat:
$$A_x = 1 - (1 - A_{\overline{1|}}) \cdot \ddot{a}_x \qquad \ldots(13)$$

Aan relatie (13) wijden we ook nog enkele woorden. Eerst iets over de daarin voorkomende coëfficiënt $d = 1 - A_{\overline{1|}}$:

$$d = 1 - A_{\overline{1|}} = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot i = A_{\overline{1|}} \cdot i$$

Daaruit zien we dat d gelijk is aan de contante waarde van de interest i, als een kapitaal groot 1, gedurende één jaar is belegd tegen p% (immers $i = \frac{p}{100}$); en dit dus één jaar teruggerekend. Kijken we in deze wetenschap weer naar (13), dan kunnen we die relatie als volgt interpreteren.
In het linker lid staat de koopsom, de verplichting van de verzekeringnemer, en in het rechter lid staan de uitbetalingen van de verzekeraar.
Het bedrijf keert onmiddellijk bij het sluiten van de verzekering een bedrag groot 1 uit: de eerste 1 in het rechter lid van (13).
Déze uitbetaling kan worden opgevat als een 'lening' van de verzekeraar aan de verzekeringnemer, want recht op die betaling heeft deze laatste nog niet (de verzekerde leeft immers bij het sluiten van de verzekering). Maar over die lening moet aan de verzekeraar natuurlijk interest worden betaald! En die interest is, zoals we gezien hebben, gelijk aan

het bedrag d, en dat bedrag moet (door de verzekeringnemer) *jaarlijks* zólang *pre*numerando worden betaald tot de verzekerde is overleden. De interestbetaling is dus op te vatten als een levenslange lijfrente die de verzekeringnemer *aan de verzekeraar* betaalt. De contante waarde (koopsom) van die 'lijfrente' is gelijk aan $d \cdot \ddot{a}_x$.

Volgens het equivalentieprincipe is nu, met links de contante waarde van de betalingen van de verzekeringnemer (koopsom en te betalen interest) en rechts die van de uitkering van de verzekeraar (*alleen* het bedrag 1, bij het aangaan van de verzekering):

$A_x + d \cdot \ddot{a}_x = 1$

Dus is inderdaad: $A_x = 1 - (1 - A_{\overline{1}|}) \cdot \ddot{a}_x$.

En ook in dit geval is de verzekering herleid tot een andere.

***Voorbeeld* 6.** Bereken de koopsom van een levenslange verzekering bij overlijden met een uitkering van 2000 voor een 30-jarige man.

Oplossing. $A_{30} = 1 - (1 - A_{\overline{1}|}) \cdot \ddot{a}_{30}$

N.b. Ook de waarden van $A_{\overline{n}|}$ staan in het algemeen in de AG-tafels.

$A_{30} = 1 - 0{,}0384615 \cdot 21{,}297 = 0{,}181$

De gevraagde koopsom is dan 362,00 . ◊

Wordt het verzekerde kapitaal (we gaan weer uit van een bedrag gelijk aan 1) alleen uitgekeerd bij overlijden van de verzekerde indien dat plaats vindt *binnen* een bepaalde periode (van n jaar), en wel aan het einde van het sterfjaar, dan spreken we van een *tijdelijke* verzekering bij overlijden; actuariële notatie voor de koopsom: $A^1_{x\,\overline{n}|}$. (We kwamen deze notatie in 'uitgestelde' vorm al tegen in relatie (10); daar geschreven als $B_{x+n\,\overline{1}|}$.) Wordt een dergelijke verzekering afgesloten voor l_x personen, dan is:

$$l_x \cdot A^1_{x\,\overline{n}|} = A_{\overline{1}|} \cdot d_x + A_{\overline{2}|} \cdot d_{x+1} + A_{\overline{3}|} \cdot d_{x+2} + \ldots + A_{\overline{n}|} \cdot d_{x+(n-1)} \qquad \ldots(14)$$

Immers, aan het einde van het eerste jaar zijn er d_x verzekerden overleden en op dat moment moet er een bedrag van $d_x \cdot 1 = d_x$ worden uitgekeerd; enzovoort.

Vermenigvuldigen we (14) met $A_{\overline{x}|}$, dan is:

$$(l_x \cdot A_{\overline{x}|}) \cdot A^1_{x\,\overline{n}|} = A_{\overline{x+1}|} \cdot d_x + A_{\overline{x+2}|} \cdot d_x + \ldots + A_{\overline{x+n}|} \cdot d_{x+n-1}$$

En, weer met de definities van D_x en C_x:

$$D_x \cdot A^1_{x\,\overline{n}|} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}$$

Dus: $A^1_{x\,\overline{n}|} = \dfrac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x}$

Analoog aan de levenslange verzekering met koopsom A_x – zie relatie (12b) – kunnen we ook afleiden dat:

$$A^1_{x\,\overline{n}|} = A_{\overline{1}|} \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} - a_{x\,\overline{n}|} \qquad \ldots(15)$$

Hierin zijn $\ddot{a}_{x\,\overline{n}|}$ en $a_{x\,\overline{n}|}$ opvolgend een pre- en een postnumerando tijdelijke lijfrente (elk met een duur van n jaar).

De meest afgesloten kapitaalverzekering is de zogenoemde *gemengde verzekering*: het verzekerde kapitaal wordt uitgekeerd aan het einde van een n-jarige periode als de verzekerde in leven is, of bij eerder overlijden. De actuariële notatie voor de koopsom bij deze, uit twee verzekeringen opgebouwde vorm, is: $A_{x\,\overline{n}|}$. Dan geldt (al combinatie van twee verzekeringen, de een bij overlijden, de ander bij leven):

$$A_{x\,\overline{n}|} = A^{1}_{x\,\overline{n}|} + A_{x\,\overline{n}|}^{\,1}$$

Zodat, met (15):

$$A_{x\,\overline{n}|} = (A_{\overline{1}|} \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} - a_{x\,\overline{n}|}) + A_{x\,\overline{n}|}^{\,1} = A_{\overline{1}|} \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} - (a_{x\,\overline{n}|} - A_{x\,\overline{n}|}^{\,1}) \qquad \ldots(16a)$$

In de tweede term in het rechter lid van (16a), $a_{x\,\overline{n}|} - A_{x\,\overline{n}|}^{\,1}$, houdt de vermindering van $a_{x\,\overline{n}|}$ met $A_{x\,\overline{n}|}^{\,1}$ in, dat de *laatste* uitkering van $a_{x\,\overline{n}|}$ *niet* plaatsvindt.

Met andere woorden: $a_{x\,\overline{n}|} - A_{x\,\overline{n}|}^{\,1} = a_{x\,\overline{n-1}|}$. En daarmee gaat (16a) over in:

$$A_{x\,\overline{n}|} = A_{\overline{1}|} \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} - a_{x\,\overline{n-1}|} \qquad \ldots(16b)$$

Bij tijdelijke lijfrentes geldt dat (en de lezer ga dit zelf na!):

$$\ddot{a}_{x\,\overline{n}|} = 1 + a_{x\,\overline{n-1}|} \qquad \ldots(17)$$

En hiermee leiden we uit (16b) af:

$$A_{x\,\overline{n}|} = A_{\overline{1}|} \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} - (-1 + \ddot{a}_{x\,\overline{n}|}) = A_{\overline{1}|} \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} + 1 - \ddot{a}_{x\,\overline{n}|}$$

Of:

$$A_{x\,\overline{n}|} = 1 - (1 - A_{\overline{1}|}) \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} \qquad \ldots(18a)$$

Uit (18a) blijkt nu dat ook de koopsom van een gemengde verzekering (twee verzekeringen in één) berekend kan worden met die van één (tijdelijke, prenumerando) lijfrente.

Opmerking. $1 - A_{\overline{1}|}$ wordt wel geschreven als d. We zagen dat eerder bij (13). Daarmee is relatie (18a) te schrijven als:

$$A_{x\,\overline{n}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} \qquad \ldots(18b)$$

Aan het einde van de volgende paragraaf staat een voorbeeld (voorbeeld 7) van een van uit (18b) afgeleide berekening van de koopsom van een gemengde verzekering.

Actuariële epiloog

A.

Men spreekt van een *kapitaalverzekering op vaste termijn* (*kapitaal-termijnverzekering*) als na n jaar (aan het einde van de verzekering) een uitkering U plaats vindt *onafhankelijk* van het al of niet in leven zijn van de verzekerde. Men kan zich afvragen of hier dan wel sprake is van een *verzekering* (waarom *eigenlijk* niet?).

Het is duidelijk dat de koopsom K_{vast} van zo'n verzekering niets anders is dan het bedrag dat men tegen samengestelde interest – het percentage is gelijk aan de rekenrente van de verzekeraar – op een spaarbank zou moeten zetten om na n jaar het bedrag U op de spaarrekening te hebben: K_{vast} is de contante waarde van U, n jaar eerder. Dus:

$$K_{\text{vast}} = A_{\overline{n}|} \cdot U$$

B.

Komt men bij het sluiten van de verzekering overeen dat U alleen dán na n jaar wordt uitgekeerd als de verzekerde in enig jaar daaraan voorafgaand is overleden, dan spreekt men van een *risico-termijnverzekering*.

De koopsom K_R hiervan, per eenheid verzekerd kapitaal, is dan gelijk aan $A_{\overline{n}|}$ $(= K_{\text{vast}})$ *verminderd met* de koopsom van een verzekering waarbij een uitkering van 1 wordt gedaan bij leven van de verzekerde na n jaar. (De lezer overtuige zich van de juistheid van het hier gestelde!)

Dus: $K_R = A_{\overline{n}|} - A_{x\,\overline{n}|}^{\,1}$

We kunnen dit resultaat ook afleiden op basis van het equivalentieprincipe.

Stel l_x personen worden op deze manier verzekerd. Dan is de 'contante' waarde C_P van de betalingen:

$C_P = l_x \cdot K_R$

Na n jaar zijn $(l_x - l_{x+n})$ personen overleden, zodat aan het eind een bedrag van $(l_x - l_{x+n}) \cdot 1 = l_x - l_{x+n}$ moet worden uitbetaald. Voor de contante waarde C_U van deze betalingen geldt:

$C_U = A_{\overline{n}|} \cdot (l_x - l_{x+n})$

Volgens het equivalentieprincipe is $C_P = C_U$, of:

$l_x \cdot K_R = A_{\overline{n}|} \cdot (l_x - l_{x+n})$

En daaruit volgt:

$$K_R = A_{\overline{n}|} \cdot (1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}) = A_{\overline{n}|} - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot A_{\overline{n}|} = A_{\overline{n}|} - \frac{l_{x+n} \cdot A_{\overline{x+n}|}}{l_x \cdot A_{\overline{x}|}} = A_{\overline{n}|} - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= A_{\overline{n}|} - A_{x\,\overline{n}|}^{\,1}$$

C.

Een verzekering die van de risico-termijnverzekering is afgeleid, is die waarbij, na het overlijden van de verzekerde binnen n jaar, een *jaarlijkse rente* groot 1 wordt uitgekeerd (in plaats van de uitkering aan het eind). Die rente wordt voor het eerst uitbetaald aan einde van het sterfjaar; de laatste betaling ervan valt aan het einde van het $(n-1)$-de verzekeringsjaar.

De koopsom K_E van deze zogenoemde *ideaalrente* of *erfrente* is gelijk aan de som van $(n-1)$ koopsommen van risico-termijnverzekeringen met een duur van 1, 2, … $(n-1)$ jaar (de lezer ga ook dit na!):

$$K_E = (A_{\overline{1}|} - A_{x\,\overline{1}|}^{\,1}) + (A_{\overline{2}|} - A_{x\,\overline{2}|}^{\,1}) + \ldots + (A_{\overline{n-1}|} - A_{x\,\overline{n-1}|}^{\,1})$$

$$= (A_{\overline{1}|} + A_{\overline{2}|} + \ldots + A_{\overline{n-1}|}) - (A_{x\,\overline{1}|}^{\,1} + A_{x\,\overline{2}|}^{\,1} + \ldots + A_{x\,\overline{n-1}|}^{\,1})$$

Zodat, met hetgeen we hierboven gezien hebben:

$$K_E = a_{\overline{n-1}|} - a_{x\,\overline{n-1}|} = (-1 + \ddot{a}_{\overline{n}|}) - (-1 + \ddot{a}_{x\,\overline{n}|})$$

$$= \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x\,\overline{n}|}$$

D.

Een kapitaalverzekering op vaste termijn *gecombineerd* met een erfrente, die $100r$ % (het r-de deel) is van het verzekerde kapitaal U, wordt *ideaalverzekering* genoemd. Voor de koopsom K_I van een ideaalverzekering (met $U = 1$) geldt dus: $K_I = K_{\text{vast}} + r \cdot K_E$, of:

$$K_I = A_{\overline{n}|} + r \cdot (\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x\,\overline{n}|})$$

Aan het einde van deze epiloog staat een rekenvoorbeeld (voorbeeld 7).

E.

Volgens (18b) is de koopsom van een *gemengde verzekering* gelijk aan:

$$A_{x\,\overline{n}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|}$$

waarbij $d = \frac{i}{i+1}$ de contante waarde is (één jaar eerder) van de jaarlijkse interest van de kapitaalseenheid.

Uit de interestrekening leiden we nu nog een hierbij te gebruiken relatie met betrekking tot het getal d af.

Als iemand het bedrag 1 tegen $100i$ % gedurende n jaar uitzet, dan kan (in theorie) de *vaste* rente daarvan als d aan het begin van *elk* jaar (dus prenumerando) direct weer worden opgenomen (de interest wordt dus aan het eind van het jaar *niet* bijschreven). De contante waarde van deze n 'uitbetalingen' van d is gelijk aan $d \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Na n jaar kan ook het bedrag 1 (gewoon) worden uitbetaald. De contante waarde daarvan is $A_{\overline{n}|}$. Zodat de bedoelde relatie (ook hier wegens $C_U = C_P$) luidt:

$$d \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} + A_{\overline{n}|} = 1$$

Maar dan is voor de gemengde verzekering:

$$A_{x\,\overline{n}|} = (1) - d \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} = (d \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} + A_{\overline{n}|}) - d \cdot \ddot{a}_{x\,\overline{n}|}$$

of:

$$A_{x\,\overline{n}|} = A_{\overline{n}|} + d \cdot (\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x\,\overline{n}|})$$

Conclusie. De gemengde verzekering komt (volgens D) overeen met een ideaalverzekering waarvan de erfrente gelijk is aan $100d$ % (het d-de deel) van het verzekerde kapitaal.

Voorbeeld 7. Bereken de koopsom van een *ideaalverzekering* met $U = 10.000$ waarbij: $x = 30$, $n = 25$, $i = 0{,}04$ en $r = 0{,}2$

Oplossing. Hierboven, bij D, hebben we gezien dat voor de koopsom K_I met $U = 1$ geldt:

$$K_I = A_{\overline{25}|} + 0{,}2 \cdot (\ddot{a}_{\overline{25}|} - \ddot{a}_{30\,\overline{25}|})$$

Voorts is: $A_{\overline{25}|} = \frac{1}{(1{,}04)^{25}} = 0{,}3751168$, en uit $A_{\overline{25}|} + d \cdot \ddot{a}_{\overline{25}|} = 1$ (zie E) volgt:

$$\ddot{a}_{\overline{25}|} = \frac{1}{d} \cdot (1 - A_{\overline{25}|}) = \frac{1{,}04}{0{,}04} \cdot 0{,}6248832 = 16{,}2469632$$

Rest nog de waarde te berekenen van $\ddot{a}_{30\,\overline{25}|}$.

We hebben eerder gezien dat een tijdelijke (direct ingaande) lijfrente kan worden opgevat als de som van een aantal verzekeringen van uitkering bij leven (koopsom $= A_{x\,\overline{n}|}^{\,1}$) met opeenvolgende duren (prenumerando; dus $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Zo is in dit geval:

$$\ddot{a}_{30\,\overline{25}|} = A_{30\,\overline{0}|}^{\,1} + A_{30\,\overline{1}|}^{\,1} + \ldots + A_{30\,\overline{24}|}^{\,1} = \frac{D_{30} + D_{31} + \ldots + D_{54}}{D_{30}} = \frac{N_{30} - N_{55}}{D_{30}}$$

En dan is: $\ddot{a}_{30\,\overline{25}|} = \frac{644.845 - 159.423}{30.279} = 16{,}0316391$

Zodat: $K_I = 0{,}418$

De gevraagde koopsom (U = 10.000, erfrente = 2000) is hiermee gelijk aan 4180,00 .

Is $r = d = \frac{0{,}04}{1{,}04} \approx 0{,}038$, dan is – volgens E – de koopsom van een *gemengde verzekering* met n = 25 en U = 10.000 voor een 30-jarige man gelijk aan 3830,00 .

Tot slot

Het bovenstaande geeft slechts een zeer kleine indruk van de actuariële wiskunde en het werk van de actuaris, die zich bijvoorbeeld ook bezighoudt met het bepalen van financiële risico's bij branden, stormen en overstromingen, en bij deelname aan het verkeer.[5] Andere terreinen waarop actuarissen actief zijn, zijn die van pensioenen en sociale voorzieningen. Actuarissen buigen zich bijvoorbeeld over de vraag hoe een pensioenbreuk opgelost kan worden, of over de introductie van een flexibele pensioenleeftijd; maar ook over hoe de AOW in het licht van de toenemende vergrijzing kan worden gehandhaafd, of over de financiële consequenties van een koppeling tussen lonen en uitkeringen.
Op welk terrein de actuaris ook werkzaam is, zijn belangrijkste technieken zijn: systematisch in de toekomst kijken, voorspellingen doen, en deze voorspellingen vertalen in financiële consequenties. Een actuaris is dus in essentie een creatieve probleemoplosser die zich, op basis van het verleden, met de toekomst bezig houdt.
En daarbij is de actuariële wiskunde slechts één van de gehanteerde hulpmiddelen.

Noten

[1] Een overlevingstafel waarin de in dit artikel gebruikte actuariële grootheden zijn opgenomen (gebaseerd op GBM 1995-2000, rekenrente 4%), kan als PDF-bestand worden gedownload via:
www.pandd.nl/downloads/gbm9500.pdf

[2] Eigenlijk is hier sprake van een *relatieve frequentie*. In de actuariële wiskunde is het echter gebruikelijk te spreken van *kans*.

[3] In de actuariële wiskunde wordt de koopsom (per eenheid) van de meeste elementaire verzekeringsvormen met een speciaal (commutatie)teken aangegeven: een A bij kapitaalverzekeringen, en een $\ddot{a}$ (ook wel geschreven als a) of a bij rentes, alle voorzien van één of meer indexen.

[4] Johan de Witt (1625-1672) bracht in 1671 als raadpensionaris een rapport uit aan de Staten van Holland. In dat rapport, getiteld *Waerdye van Lijf-rente Naer proportie van Los-renten*, toonde hij aan dat het uitbetalen van een lijfrente voordeliger was voor de Staten (die geld leenden van de burgers) dan het betalen van een *losrente*, waarbij de rente over een lening en een deel van de aflossing werden betaald tot de lening geheel was afgelost.

[5] Zie voor meer informatie de website van het Actuarieel Genootschap en het Actuarieel Instituut (*www.ag-ai.nl*), of:
WikipediA – *Actuaris* (*http://nl.wikipedia.org/wiki/Actuaris*).

Literatuur

- D.P.G van As e.a. (1998): *Levensverzekeringswiskunde en Pensioencalculatie*. Den Haag: Sdu Uitgevers (2e druk, 2010).
- J. Donselaar e.a. (2007): *Over sterfte en overleven*. Woerden: Actuarieel Genootschap.
- W.J.C. de Heer, J. Sattler (1977): *Actuariële wiskunde*. 's-Gravenhage: Martinus Nijhoff.
- Wim Pijls (2003): *Financiële rekenkunde voor wiskundigen*. In: *Euclides* 78-7 (mei 2003); pp. 336-339.
- C.C.W. Pinkse: *Levensverzekeringswiskunde*. Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers bv (6e druk, 2009).
- Kees Prins (2003): *Levensverwachting / het CBS bepaalt hoe oud we worden*. In: *STAtOR*, jaargang 4, nummer 4 (dec. 2003); pp. 22-27.

Leerlingentekst

Overlevingstafels en verzekeren – leerlingentekst bij dit artikel
21 pagina's, PDF-bestand van ca. 525 Kb
Zie: *www.nvvw.nl/special12/overzekeren.pdf*

De auteur spreekt hier zijn dank uit aan Marjanne de Nijs en haar leerlingen van het Cosmicus College te Rotterdam voor hun commentaar bij een eerste versie van de leerlingentekst.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

FACTOR

Jawel, ik sta bekend als fenomeen
Tenminste onder mathematici
En in wiskundig aangelegde kringen

Mijn naam, als u het weten wilt, is i
Ik zit in allerlei berekeningen
En aan het einde hef ik mij weer op

U vraagt niet, denk ik, om verhandelingen
Maar wenst dat ik mezelf nu eens ontpop
Welnu – ik ben de wortel uit -1

Ik functioneer, ofschoon ik niet besta
Denk daar maar eens langdurig over na

Drs. P in:
Drs. P & Marjolein Kool (2000): *Wis- en natuurlyriek*. Amsterdam: Nijgh & Van Ditmar.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Het Plastisch Getal

UIT DE ARCHITECTUUR VAN DOM JOHANNES VAN DER LAAN

[Frederik van der Blij]

De architect en benedictijner monnik Dom Hans van der Laan (1904-1991) publiceerde enkele studies over verhoudingen die hij in zijn ontwerpen gebruikte. Een bekend ontwerp van hem is de Benedictijnse Abdij in Vaals.
In dit artikel wil ik enkele van zijn gedachten navertellen. Daarbij zal ik uitgaan van zijn studie:
Dom H. van der Laan (1977): *De Architectonische ruimte. Vijftien lessen over de Dispositie van het Menselijke Verblijf.* Leiden: Brill (3e herziene druk, 1992)

Dom Hans van der Laan (1904-1991)

Ik zal de gebruikte omschrijvingen vertalen naar een, de lezers ongetwijfeld bekend, algebraïsch formalisme.
Van der Laan zelf wil bewust alleen meetkundige termen gebruiken. Als hij over lijnstukken met steeds grotere lengtes wil spreken, noemt hij deze het kleine element, het grote element, het kleine stuk, het grote stuk, het kleine deel, het grote deel, het kleine geheel en het grote geheel.
Dit zal ik vertalen als $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_6, x_7$. Hierdoor hoop ik de boeiende achtergrond van het werk van Van der Laan voor de lezers meer toegankelijk te maken.

Interieur van de Benedictijnse Abdij in Vaals

Een eerste opmerking in zijn theorie is dat onze waarneming natuurlijk niet lengtes in absolute nauwkeurigheid, in verschillen van tienden van millimeters kan waarnemen. Binnen zekere marges zien we lijnstukken als even lang. Hij poneert dat we lijnstukken met lengtes tussen $a(1 - \varepsilon)$ en $a(1 + \varepsilon)$ alle even lang als een lijnstuk met lengte a waarnemen.
Wanneer we twee lijnstukken a en b willen introduceren, voeren we eigenlijk twee verzamelingen lijnstukken met ongeveer gelijke lengte in: bij a alle lijnstukken die groter dan $(a - a \cdot \varepsilon)$ en kleiner dan $(a + a \cdot \varepsilon)$ zijn en bij b alle lijnstukken die groter dan $(b -$

$b \cdot \varepsilon$) en kleiner dan ($b + b \cdot \varepsilon$) zijn. En omdat we de lijnstukken in groepjes willen indelen, willen we dat deze verzamelingen aansluiten, dus dat $a + a \cdot \varepsilon = b - b \cdot \varepsilon$.

Dan is: $\frac{b}{a} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Willen we een derde groep lijnstukken met lengte ongeveer c invoeren, dan zullen we hiervoor alle lijnstukken met lengte groter dan $(c - c \cdot \varepsilon)$ en kleiner dan $(c + c \cdot \varepsilon)$ gebruiken. Om het weer aan te laten sluiten eisen we $b + b \cdot \varepsilon = c - c \cdot \varepsilon$.

Hieruit volgt dat: $\frac{c}{b} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, en dus: $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$.

En a, b en c vormen dan de eerste drie termen van een meetkundige rij. Noemen we de reden van deze rij t, dan is de voortzetting van de rij a, at, at^2, at^3, at^4, ... Hierbij is dus $b = at$, $c = at^2$. Kiezen we a, b en c zo, dat $c = a + b$, dan geldt $at^2 = a + at$ en dus $t^2 = t + 1$.

We vinden zo een meetkundige rij met reden $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1{,}6180...$

De termen a, b en c zijn dus respectievelijk het kleinste, het grootste en het geheel van een in uiterste en middelste reden verdeeld lijnstuk. En ieder drietal opeenvolgende termen is zo'n in uiterste en middelste reden verdeling, de *gulden snede*.

Van der Laan ziet deze als typisch tweedimensionaal, dus voor vlakverdelingen. Bij de architectuur heeft hij behoefte aan een driedimensionale verhouding.[1]

Van der Laan begint nu ook met een meetkundige rij: a, b, c en d en stelt de eis dat $d - b = a$, dus dat de vierde term de som van de eerste en de tweede is:

$d = b + a$

Daar de termen een meetkundige rij vormen, kunnen we schrijven:

$a, ap, ap^2, ap^3, ap^4, ap^5, \ldots$

Omdat $b = ap$, $c = ap^2$, $d = ap^3$ geldt in formule dus: $ap^3 = ap + a$, of ook:

$p^3 = p + 1$

We merken nu op dat de vijfde term, ap^4, gelijk is aan de som van ap^2 en ap, dus aan de som van de derde en de tweede term, en dat de zesde term gelijk is aan de som van de vierde en de derde term, enzovoort.

Omdat $p^3 = p + 1$ is p bepaald als wortel van een derdegraads vergelijking; enig proberen met de rekenmachine leert $p = 1{,}324717...$ (zie ook de tekst binnen onderstaand kader).

> Kent u de methode van Cardanus voor het oplossen van derdegraads vergelijkingen, dan kunt u de wortel zelfs expliciet bepalen. We voeren twee nieuwe onbekenden u en v in met som p, dan zal:
> $(u + v)^3 = (u + v) + 1$
> Werken we de derde macht uit dan komt er:
> $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = (u + v) + 1$
> We proberen nu u en v zo te kiezen dat zowel $u^3 + v^3 = 1$ als $3uv = 1$. Dus geldt $v = \frac{1}{3u}$. Vullen we dit in $u^3 + v^3 = 1$ in, dan komt er een gewone vierkantsvergelijking in u^3. Deze kunnen we met de bekende formule oplossen en daarna, door de derde wortel te trekken, u bepalen. Dan is ook v te vinden, en het antwoord wordt:
> $p = u + v = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108 - 12\sqrt{69}}\right)$

Maar dit is niet in de geest van Van der Laan. Het gaat immers om de verhouding van lijnstukken en die zien we niet in getallen met vele decimalen achter de komma. Hoewel hij in zijn studie wel de derdegraads vergelijking vermeldt, vinden we niet een decimale ontwikkeling van de wortel, het *plastisch getal p*.
Toch heb je een numerieke benadering nodig, liefst, of eigenlijk beslist, een rationale benadering.
We zouden, weer tegen de geest van Van der Laan in, de wortel van de vergelijking in een kettingbreuk kunnen ontwikkelen en zo een rationale benadering voor p vinden.
Met een zakrekenmachine gaat dat heel eenvoudig:

- $p = 1{,}324717...$
- $p - 1 = \frac{1}{a}$ (toets p in daarna -1, en vervolgens de toets **1/x** (cq. x^{-1}); en je hebt a in het venster)
- $a - A = \frac{1}{b}$ (A is het stuk van a voor de komma; dus het grootste gehele getal kleiner dan a)
- $b - B = \frac{1}{c}$ (B is het getal van b voor de komma)
- $c - C = \frac{1}{d}$ (C is het getal van c voor de komma)

Herhaal dit proces nog een paar keer, en stop dan bijvoorbeeld bij $g - G = \frac{1}{h}$.

Schrijf nu ter vereenvoudiging $g = G$ en reken terug.

Voorbeeld:

- $p = 1{,}324717...$
- $a = \frac{1}{0{,}324717...} = 3{,}079595...$; dus $A = 3$
- $b = \frac{1}{0{,}079595...} = 12{,}563504...$; dus $B = 12$
- $c = \frac{1}{0{,}563504...} = 1{,}774607...$; dus $C = 1$
- $d = \frac{1}{0{,}563504...} = 1{,}290976...$; dus $D = 1$

Breken we hier af en werken we terug, dan vinden we, met $d = D = 1$:

- $c = C + \frac{1}{d} = 1 + \frac{1}{1} = 2$
- $b = B + \frac{1}{c} = 12 + \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$
- $a = A + \frac{1}{b} = 3 + \frac{2}{25} = \frac{77}{25}$

En dus: $p = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{25}{77} = \frac{102}{77}$.

Inderdaad is $\frac{102}{77}$ een goede benadering; we vinden $\frac{102}{77} = 1{,}324675...$

Als u dit leuk vindt, moet u het ook eens doen met de gulden verhouding!

Maar dit alles past natuurlijk niet in de meetkundige omschrijvingen van Van der Laan. We moeten niet over een rij *getallen* maar over een rij *lijnstukken* spreken. De lengtes van de opeenvolgende lijnstukken kunnen we a, b, c, d, e, f, g, h noemen. We beginnen met een lijnstuk dat we lengte 1 geven. De lengtes van de opeenvolgende lijnstukken vormen een meetkundige reeks die we maar even onbegrensd voortzetten. We vinden dan de rij:

$1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, \ldots$

De eis dat $p^3 = p + 1$ voert tot allerlei relaties tussen deze nieuwe termen. We zijn natuurlijk alleen geïnteresseerd in relaties tussen lijnstukken in de vorm van sommen en verschillen. Producten die oppervlakten zouden voorstellen, nemen we niet op in onze beschouwingen. We zien direct dat:
$p^4 = p^2 + p$; $p^5 = p^3 + p^2$; enzovoort.
We schrijven nu de rij als:
$t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$
en vinden dat:
$t_{n+3} = t_{n+1} + t_n$
een mooie analogie met de rij van Fibonacci, waarvoor geldt $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$.
We komen hier nog op terug.

Maar er gelden meer relaties: we kunnen iedere macht van p uitdrukken als som van 1, p en p^2 met gehele getallen als coëfficiënten. Bijvoorbeeld:
$p^5 = p^2 + p + 1$ en $p^6 = p^2 + 2p + 1$
En zo vinden we de aardige relatie:
$p^6 = p^5 + p$
die door Van der Laan gebruikt wordt om het viertal a, b, c en d aan te vullen tot a, b, c, d, e, f met $f = e + a$. Maar ook negatieve machten van p, waarmee we de rij voortzetten naar steeds kleinere lijnstukken, zijn uit te drukken als verschillen en sommen van 1, p en p^2. Enkele voorbeelden:

$$p^{-1} = \frac{1}{p} = p^2 - 1$$

$$p^{-2} = \frac{1}{p^2} = -p^2 + p + 1$$

Als we dit voortzetten, gebeurt er een wonder. Dom Van der Laan vindt dit wonder zonder algebra met zijn woordtermen als groot stuk, klein element, enzovoort. Deze rij wordt uitgebreid met steeds kleinere lijnstukken, door het kleine element als groot geheel van een nieuwe rij op te vatten. Zelfs herhaalt hij dit proces nog een keer. Het lijkt als of het 'octaaf' a, b, c, …, g, h voortgezet wordt naar een rij één en zelfs twee octaven lager. De 'verlaagde' a staat tot de a zelf als:
$p^{-7} : 1 = 1 : p^7 = 1 : 7{,}1591\ldots$
Richard Padovan legt verband tussen de verhoudingen die bij Van der Laan optreden, en muzikale verhoudingen.[2]
Het wonder is nu dat, als we ver genoeg rekenen, twee negatieve machten van p voorkomen, die een lineaire combinatie van alleen 1 en p respectievelijk van alleen 1 en p^2 zijn. Namelijk:
$p^{-13} = 4 - 3p$
$p^{-14} = 4p^2 - 7$
Omdat p een getal groter dan 1 is, is $\frac{1}{p}$ kleiner dan 1 en zijn de hoge machten van $\frac{1}{p}$ erg klein.
Verwaarlozen we deze, dan vinden we als benadering voor p de waarde $\frac{4}{3}$ en voor p^2 de waarde $\frac{7}{4}$. Zo komt Van der Laan tot het rijtje:

$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{4}$

We kunnen nu op twee manieren verder gaan, enerzijds kunnen we voor de volgende term de som van de eerste en de tweede, dus $1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$ nemen; anderzijds kunnen we de derde term met $p=\frac{4}{3}$ vermenigvuldigen, $\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$. Het is duidelijk dat we voor de vierde term $\frac{7}{3}$ kiezen. We hebben nu dus:

$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{7}{3}$

Nu de vijfde term; weer met twee mogelijkheden, namelijk de som van de tweede en de derde term, dus $\frac{4}{3}+\frac{7}{4}=\frac{37}{12}$ of $\frac{4}{3}$ keer de vierde term, dus $\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}=\frac{28}{9}$. Beide breuken liggen dicht bij 3. We kiezen als vijfde getal 3. We hebben nu dus:

$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{7}{3},\ 3$

Voor de zesde term kunnen we nemen $\frac{7}{4}+\frac{7}{3}=\frac{49}{12}$ of $\frac{4}{3}\cdot 3=4$. We kiezen 4. Dan geldt zelfs ook nog de relatie, die Dom Van der Laan gebruikt, dat de zesde term de som is van de vijfde en de eerste:

$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{7}{3},\ 3,\ 4$

Voor de zevende term kunnen we kiezen uit $\frac{7}{3}+3=\frac{16}{3}$ of $\frac{4}{3}\cdot 4=\frac{16}{3}$; dus: $\frac{16}{3}$, zodat we nu hebben:

$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{7}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{16}{3}$

Voor de achtste en laatste term vinden we $3+4=7$ of $\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{3}=\frac{64}{9}$; we kiezen 7. Dus:

$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{7}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{16}{3},\ 7$

In eerste instantie ontbreekt het getal $\frac{16}{3}$ bij Van der Laan. Naast deze rij schrijft hij ook de rij van de omgekeerden op:

$\frac{1}{7},\ \frac{3}{16},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{4},\ 1$

Omdat 7 keer de onderste rij de bovenste rij moet vormen, zien we kleine afwijkingen doordat we, in plaats van met het *irrationale* plastisch getal, met *rationale* benaderingen ervan werken. Gelukkig schelen $7\cdot\frac{3}{16}=\frac{21}{16}$ en $\frac{4}{3}$ niet zoveel, en $7\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$ en $\frac{16}{3}$ evenmin. In tabel 1 staan, ter vergelijking, de echte waarden van de getallen uit deze rijen en de benaderingen met de breuken.

precieze waarde	rationale benadering
p = 1,3247…	$\frac{4}{3}=1,3333...$
p^2 = 1,7548…	$\frac{7}{4}=1,7500$
p^3 = 2,3247…	$\frac{7}{3}=2,3333...$
p^4 = 3,0795…	3
p^5 = 4,0795…	4
p^6 = 5,4043…	($\frac{21}{4}=5,2500$; $\frac{16}{3}=5,3333...$)
p^7 = 7,1591…	7

tabel 1

We gaan even, met wat meer details, in op één facet uit de publicatie van Padovan. Hij verdeelt de sprong van een lijnstuk naar een zevenmaal groter lijnstuk in veertien sprongen:

$\frac{1}{1} \sim \frac{8}{7} \sim \frac{4}{3} \sim \frac{3}{2} \sim \frac{7}{4} \sim \frac{2}{1} \sim \frac{7}{3} \sim \frac{8}{3} \sim \frac{3}{1} \sim \frac{7}{2} \sim \frac{4}{1} \sim \frac{14}{3} \sim \frac{16}{3} \sim \frac{6}{1} \sim \frac{7}{1}$

De intervalsprongen zijn steeds $\frac{8}{7}$, $\frac{7}{6}$ en $\frac{9}{8}$.

Omdat $\frac{8}{7}.\frac{7}{6}.\frac{9}{8}.\frac{7}{6}.\frac{8}{7} = 2$, vinden we na vijf sprongen het octaaf.

Ik ben geneigd dit systeem iets te veranderen:

$\frac{1}{1} \sim \frac{8}{7} \sim \frac{4}{3} \sim \frac{3}{2} \sim \frac{7}{4} \sim \frac{2}{1} \sim \frac{16}{7} \sim \frac{8}{3} \sim \frac{3}{1} \sim \frac{7}{2} \sim \frac{4}{1} \sim \frac{32}{7} \sim \frac{16}{3} \sim \frac{6}{1} \sim \frac{7}{1} \sim \frac{8}{1}$

en zo drie octaven te omspannen. De verhoudingen met factor 7 zijn in de muziek ongebruikelijk; de verhouding $\frac{9}{8}$ is klassiek. In het pythagoreïsche systeem wordt alleen met verhoudingen gewerkt die uit factoren 2 en 3 zijn opgebouwd. Moderne systemen voegen daar nog de priemfactor 5 aan toe. Padovan geeft ook nog een vergelijking van het systeem van Van der Laan met het pythagoreïsche systeem.

Keren we nu terug naar het begin: de lijntjes waren eigenlijk verzamelingen lijntjes, met lengte groter dan $(a - a \cdot \varepsilon)$ en kleiner dan $(a + a \cdot \varepsilon)$. Nu we voor p het plastisch getal p = 1,3247… hebben gekozen, kunnen we uit de boven gevonden formule:

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = p$$

het getal ε berekenen; we vinden ε = 0,1396… . De grenzen voor de verzameling lijntjes met lengte a worden nu (0,8603…) · a en (1,1396…) · a .

Waar liggen nu de deelpunten die deze verzamelingen van elkaar scheiden? Tussen a en b hebben we een scheidingpunt s.

Een eenvoudige berekening leert dat het tussenpunt s het harmonisch gemiddelde van a en b is.

Dus: $s = \frac{2ab}{a+b}$.

De opeenvolgende tussenpunten vormen weer een meetkundige rij, ook weer met de reden gelijk aan het plastisch getal p. Tussen de termen 1 en p van de oorspronkelijke rij komt het tussenpunt $\frac{2p}{p+1} = 2p^{-2}$. De rij van de tussenpunten is dezelfde als het dubbele van een verschoven oorspronkelijke rij.

We weten dat er een verband bestaat tussen de gulden snede en de rij van Fibonacci. Het quotiënt van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci nadert tot de gulden snede. We zagen bij het opstellen van formules voor de door Van der Laan gebruikte rij van lijnstukken, een relatie optreden die gelijkenis vertoont met de definitie van de rij van Fibonacci. Namelijk:

$t_{n+3} = t_{n+1} + t_n$

Om zo'n rij te starten moeten we de eerste drie termen vastleggen. Kiezen we hiervoor a, b en c, dan wordt de rij:

$a, b, c, a + b, b + c, a + b + c, a + 2b + c, a + 2b + 2c, 2a + 3b + 2c, \ldots$

We bekijken nu speciaal de rij die met 1, 0, 0 begint [3]:

1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, ...

Wiskundig is vrij eenvoudig te bewijzen dat iedere rij die met deze regel geconstrueerd wordt (op een heel bijzondere uitzondering na), de eigenschap heeft dat het quotiënt van twee opeenvolgende termen (t_{n+1} en t_n) tot het plastisch getal nadert.[4] Zo is $\frac{265}{200} = 1{,}325$ al een goede benadering.

We merken nog op dat de rij die met 0, 0, 1 begint, eenvoudig uit bovenstaande rij te vinden is door één plaats op te schuiven. De rij die met 0, 1, 0 begint, vinden we door twee plaatsen op te schuiven. Een rij die met *a, b* en *c* begint, is nu eenvoudig op te stellen als combinatie van deze drie basisrijen.

U zult begrijpen dat deze hele theorie bij Dom van der Laan, zonder formules opgeschreven en uitgewerkt, vele bladzijden in beslag neemt, die we hier maar gedeeltelijk konden samenvatten.

Van der Laan stelt ook nog enkele combinatorische problemen aan de orde. Allereerst wil hij plankjes waarvan de lengte- en breedtematen uit zijn stelsel zijn afgeleid, in een rechthoekige doos passen en hij ontwerpt een kist waarin blokken met lengte, breedte en hoogte uit het systeem passen. Voor de praktijk vertaalt hij zijn maatsysteem nog naar standaard maten: als eenheid neemt hij nu een lijnstuk met lengte 100. De acht basislijnstukken krijgen dan opklimmende lengtes tot 716. Daarnaast voert hij twee verkleiningen in. Zo ontstaat het schema:

De zeven basislengtes:	100	132,5	175,5	232,5	308	408	540,5	716
De éénmaal verkleinden:	14	18,5	24,5	32,5	43	57	75,5	100
De tweemaal verkleinden:	2	2,5	3,5	4,5	6	8	10,5	14

Noten

[1] Zie voor een andere opzet voor een driedimensionale verhouding:
F. van der Blij, W. Vastrick (1995): *Van gulden snede naar zevensnede*. In: *Nieuwe Wiskrant* 14(2); pp. 34-38.

[2] Richard Padovan (1994): *Dom Hans van der Laan, Modern Primitive*. Amsterdam: Architectura & Natura Press.

[3] **[Red.]** Deze rij is een zogeheten *rij van Padovan*.

[4] **[Red.]** Zie voor een schets van het bewijs het hierna volgend *Naschrift van de redactie*.

Verantwoording

Dit artikel is met toestemming van de auteur en van het bestuur van de Stichting Ars et Mathesis overgenomen uit *Arthesis* (jaargang 9, nummer 3; augustus 1995).
De tekst is op een enkele plaats enigszins aangepast. De illustraties bij dit artikel komen niet voor in het genoemde nummer van *Arthesis*.

Naschrift van de redactie

We geven hier een *schets* van een bewijs – er ontbreekt een stukje – dat het quotiënt van twee opeenvolgende termen in de rij van Padovan tot het plastisch getal p nadert.

We beschouwen voor $n \geq 2$ de rij rationale getallen $Q_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$, waarbij P_n getallen zijn uit de (verschoven) rij van Padovan:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, …

Voor deze getallen geldt dat: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ met $n \geq 4$ en $P_1 = P_2 = P_3 = 1$.
Dan is (voor $n \geq 4$):

$$Q_n = \frac{P_{n-2} + P_{n-3}}{P_{n-1}} = \frac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}} + \frac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_{n-3}}} = \frac{1}{Q_{n-1}} + \frac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \cdot \frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}} = \frac{1}{Q_{n-1}} + \frac{1}{Q_{n-1} \cdot Q_{n-2}}$$

Als de rij Q convergent is met limiet gelijk aan q, dan geldt:

$$q = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}$$

Daaruit volgt: $q^3 = q + 1$, waarmee $q = p$. Met andere woorden, dan is:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} Q_n = p$$

Opmerking. Uit $p^3 = p + 1$ volgt $p = \sqrt[3]{1 + p}$. Hiermee kan p worden geschreven als:

$$p = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \ldots}}}$$

Met deze uitdrukking als uitgangspunt kunnen we een benadering van p vinden via de recursieve definitie:

$$\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_n = \sqrt[3]{1 + u_{n-1}} \quad \text{voor gehele } n \geq 1 \end{cases}$$

Zodat dan $\lim_{n \to \infty} u_n = p$.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

1049

Het op één na kleinste 4-cijferige priemgetal waarin elk cijfer een kwadraat is. En ziet, de som van de laatste twee cijfers is ook priem; de som van de eerste en de derde trouwens ook…
Maar van $1049^2 = 1100401$ zijn de cijfers ook alle een kwadraat.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

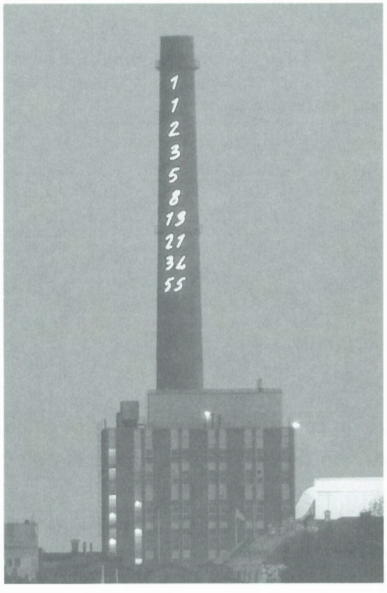
Fibonacci gedichten / Fibonacci poems

UIT AMSTERDAM / FROM AMSTERDAM

[klas 2vt, Hervormd Lyceum West]

Erik Atsma, mathematics teacher

1 Wiskunde?
1 Brood?
2 Eén gedicht?
3 Kan dat wel?
5 In 'A Taste Of Mathematics'?
8 In dit project mengen we wiskunde en voedsel!
13 Dit gedicht is gebaseerd op de rij van Fibonacci, bekend van de konijnen.
21 Brood eten we allemaal in alle landen van ons project, maar Nederland staat bekend om de kaas die we daarop eten!
34 Wiskunde is overal om ons heen: denk aan de natuur in combinatie met de rij van Fibonacci, denk aan het rekenen met geld in het dagelijks leven, denk aan architectuur met zijn gulden snede.
55 Maar het belangrijkste is dat de wiskunde nu zes landen verbindt: Spanje, Griekenland, Italië, Tsjechië, Roemenië en Nederland werken samen en wisselen hun cultuur uit met de andere landen over het onderwerp voedsel en we proberen dat te doen door te kijken hoe voedsel samenhangt met wiskunde door bijvoorbeeld leuke raadsels over wiskunde en eten.
89 Deze regel zal zeker de laatste zijn, aangezien negenentachtig woorden al moeilijk genoeg is om als één regel te schrijven en het zo goed als onmogelijk zal zijn om een regel te maken met honderdvierenveertig woorden en een wiskundige is wel goed met getallen, maar het schrijven van een gedicht ligt erg ver van zijn abstracte geest af, dus het is verstandiger om dan maar weer wiskunde en voedsel te combineren, wat voor velen ook al erg vreemd is, maar in dit project wordt aangetoond dat dat leuk is.



Schoorsteen van Turku Energia Oy (Turku, Finland)

Bugra

1	Wiskunde	Maths
1	Eten	Food
2	Een smaak	A taste
3	Gaat dat samen?	Can it combine?
5	Dat gaat toch niet samen …	These things can't be combined …
8	Ik kan geen wiskunde vinden in een appel	I can not find maths in an apple
13	Of toch wel? Je kunt bijvoorbeeld zeggen dat een appel 360 graden is	Or can it be? You can say that an apple is 360 degrees
21	En ook bij pizza: Als je van boven kijkt, lijkt het een diagram waarin je de percentage van ingrediënten kunt zetten	Also by a pizza: If you look from top, it looks like a diagram where you put the percentage of ingredients

Barbara

1	Lol	Fun
1	Wiskunde	Math
2	En eten?	And food?
3	Kan dat werken?	Can that work?
5	En alles in één gedicht?	And everything in one poem?
8	Denk eerst aan voedsel dat we allemaal eten	First think about the food we all eat
13	Vandaag at ik bruin brood met wat kaas erop en wat koude melk	Today I ate brown bread with cheese on it and some cold milk
21	Ik denk dat er veel mensen waren die die dag bruin brood met kaas aten maar je bent nooit helemaal zeker	I think that a lot of people of our project ate bread that day but you will never know for sure
34	Heel veel kinderen gaan naar school en doen dan wiskunde elke dag maar hoeveel procent van hen at bruin brood met kaas erop en koude melk en hoe reken je dat dan goed uit?	A lot of children go to school and do math everyday but how much percent of them ate brown bread with cheese on it and with milk and how will you calculate it correctly?

Ismail

1	Brood	Bread
1	Vlees	Meat
2	Geroosterd vlees	Roasted meat
3	Brood met maïs	Bread with corn
5	Het beste vlees ooit geslacht.	The best meat ever slayed.
8	Het voelt alsof engelen dansen op je tong.	It feels like angels dancing on your tongue.
13	13 woorden die beschrijven hoe lekker vlees is, is net genoeg voor mij.	13 words describing how tasty the meat is, is just enough for me.
21	21 stukjes vlees geroosterd bruin, alsof ze zonnebaden op een zomer in Spanje, met een paar zeer pittige pepers er omheen.	21 peaces of meat roasted brown, like it's sunbathing on a summer in Spain, with some very spicy chillies around it.
34	Vlees is het meest krachtige voedsel dat je veel vitaminen en energie geeft om weer te jagen op andere dieren voor weer nieuwe vlees, die het proces moet ondergaan om weer gegeten te worden.	Meat is the most powerful food that can give you a lot of vitamins and energy to hunt other animals for some new meat, which has to pass the whole process of being eaten.

Manal

1	Eten	Food
1	Wiskunde	Maths
2	Wiskunde, Eten	Maths, Food
3	Zijn ze overeenkomend?	Are they corresponding?
5	Ja, in ons project wel.	Yes, in our project ofcourse.
8	Dus, ons project heeft de grappige naam ATOM.	Anyway, so our project is called ATOM.
13	Nee niet ATOM als in ⚛; dat heeft helemaal niks te maken met Wiskunde.	Not ATOM as in ⚛; that does not have to do anything with Maths.
21	Maar ATOM als in: *A Taste Of Maths*, eindelijk, nu weet je waar ik het over heb; nou het is makkelijk.	But ATOM as in: *A Taste Of Maths*, finally, now you know what I am talking about; well it is easy.
34	Laat me het je uitleggen; wij begonnen een project met verschillende landen namelijk: Tsjechië, Italië, Nederland, Roemenië en Spanje; eerst hadden we een logowedstrijd zodat we een logo hadden om ons werk te presenteren.	Let me explain you; we started a project containing: Czech Republic, Greece, Italy, the Netherlands, Romania and Spain; we first started a logo-contest so that we had a logo to represent our project with.

Wissam

1	wiskunde	mathematics
1	eten	food
2	kan dat?	mathematics, food?
3	ja dat kan!	it is possible!
5	dat laat dit project zien	that's what this project shows
8	het klinkt raar maar het kan heel goed!	it sounds strange but it could be done!
13	bijvoorbeeld een taart kun je zien als een cirkeldiagram, het is ook lekker!	for example you could see a mathematical pie chart as a delicious cake!

Oumaima

1	Wiskunde	Math
1	Voedsel	Food
2	Wiskunde, voedsel	Math, food
3	Gaat niet samen!?	Do not mix!?
5	Ik kan geen gedicht maken	I can't make a poem

Noot

A Taste of Maths (ATOM) is een eTwinning-project (*www.etwinning.net*), dat door Erik Atsma is uitgevoerd samen met collega's in Roemenië, Tsjechië, Spanje, Griekenland en Italië. De betrokken leerlingen, tussen de 12 en 16 jaar oud, werkten gedurende een schooljaar samen in het Engels. Het doel van ATOM was leerlingen te enthousiasmeren voor het vak wiskunde door ze op een andere manier naar wiskunde te laten kijken.

Zie ook:

F. Nusink, E. Atsma (2012): *Met wiskunde Europa ontdekken*. In: *Euclides* 87(4); pp. 148-151.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

1.023.456.987.896.543.201

Dit is een *pandigitaal priem palindroom*, waarvan de linker helft (tot en met het middelste cijfer 7) alle cijfers precies één keer bevat. Die 'helft' is daarmee 10-*pandigitaal*.

Een getal is *n-pandigitaal* wanneer het alle cijfers *kleiner* dan *n*, precies éénmaal bevat. Een 10-pandigitaal getal kan dus nooit priem zijn, omdat 0 + 1 + … + 9 = 45. Een 10-pandigitaal getal is dus altijd deelbaar door 9.

Ontbinding van beide 'helften' in priemfactoren:

$102346987 = 3^2 \cdot 7 \cdot 16245349$ en $7896543201 = 3^3 \cdot 292464563$

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Telwoorden in Nieuw Guinea

Ndom (Frederik Hendrik Eiland), 6-tallig stelsel

getal	uitspraak	betekenis	getal	uitspraak	betekenis
1	sas	1	11	mer abo meregh	6 plus 5
2	thef	2	12	mer an thef	6 maal 2
3	ithin	3	13	mer an thef abo sas	(6 maal 2) plus 1
4	thonith	4	14	mer an thef abo thef	(6 maal 2) plus 2
5	meregh	5	15	mer an thef abo ithin	(6 maal 2) plus 3
6	mer	6	16	mer an thef abo thonith	(6 maal 2) plus 4
7	mer abo sas	6 plus 1	17	mer an thef abo meregh	(6 maal 2) plus 5
8	mer abo thef	6 plus 2	18	tondor	18
9	mer abo ithin	6 plus 3	19	tondor abo sas	18 plus 1
10	mer abo thonith	6 plus 4	20	tondor abo thef	18 plus 2

Huli, 15-tallig stelsel

getal	uitspraak	betekenis	getal	uitspraak	betekenis
1	mbira	1	11	bearia	11
2	kira	2	12	hombearia	12
3	tebira	3	13	haleria	13
4	maria	4	14	deria	14
5	duria	5	15	nguira	15
6	waragaria	6	16	nguira-ni mbira	15 plus 1
7	karia	7	17	nguira-ni kira	15 plus 2
8	halira	8	18	nguira-ni tebira	15 plus 3
9	dira	9	19	nguira-ni maria	15 plus 4
10	pira	10	20	nguira-ni duria	15 plus 5

Bron: *www.sf.airnet.ne.jp/~ts/language/number.html*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

6, 7, 8, 9, 11

De elf acht zeven zeven genoeg. Acht zeven acht ze wat veel.

De elf van elf en haar zusje van negen negen negen keer.

Als in Acht zeven elfen met zeven zeven zeven, acht een achtste elf in Acht bij het zeven met die zeven zeven zes zeven te weinig, maar het zeven met acht zeven acht die elf te veel. Die elf acht dus: altijd met zeven zeven zeven!

en 21

Ik ben eenentwintig en eenentwintig (soms).

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

En daarom ...

[Dick Klingens]

Mooi

In deze speciale uitgave van *Euclides*, die zo duidelijk gewijd is aan getallen, mag een mooie – volgens mij de mooiste – formule uit de wiskunde niet ontbreken. Waarom de mooiste?

Omdat in die formule, en bedoeld is $e^{i\cdot\pi}+1=0$, de 'basisgetallen' van de wiskunde 0, 1, e, π en i via de basisoperaties + en × zo fraai met elkaar verbonden zijn.

Onderstaande afleiding ervan (waar ik die voor het eerst gezien heb, weet ik niet meer) gaf ik mijn vwo-leerlingen mee na mijn klassikale inleiding tot de complexe getallen, als 'opwarmertje' (en als differentieerherhaling).

Beschouw voor reële getallen x de functie f gedefinieerd door:

$f(x)=(\cos x+a\cdot\sin x)\cdot e^{-a\cdot x}$

waarin a een nog niet nader bepaalde 'constante' is. We geven a verderop wel een waarde, een waarde die ons dán goed uitkomt.

Merk eerst op dat *voor iedere a* :

$f(0)=(\cos 0+a\cdot\sin 0)\cdot e^{-a\cdot 0}=(1+0)\cdot e^{0}=1$ (we gebruiken dit hierna!).

Differentiatie van f, gebruikmakend van de *product-* en *kettingregel*, geeft:

$$f'(x)=(-\sin x+a\cdot\cos x)\cdot e^{-a\cdot x}+(\cos x+a\cdot\sin x)\cdot e^{-a\cdot x}\cdot(-a)$$
$$=e^{-a\cdot x}\left((-\sin x+a\cdot\cos x)+(-a\cdot\cos x-a^2\cdot\sin x)\right)$$

We stellen nu, want nú komt het ons goed uit (!): $a^2 = -1$. En daarmee kan a gelijk aan i gekozen worden. En dat doen we dan ook! In de eerste plaats is:

$f(x)=(\cos x+i\cdot\sin x)\cdot e^{-i\cdot x}$

Maar het gevolg van een en ander is ook [1]:

$f'(x)=e^{-i\cdot x}\left((-\sin x+i\cdot\cos x)+(-i\cdot\cos x+\sin x)\right)=e^{-i\cdot x}\cdot 0=0$

Dit wil zeggen dat met $a = i$ de functie f een *constante* functie is. En die constante functiewaarde hebben we hierboven al gevonden: $f(0) = 1$. Zodat voor *iedere* reële waarde van x geldt: $(\cos x+i\cdot\sin x)\cdot e^{-i\cdot x}=1$. Dus is:

$e^{i\cdot x}=\cos x+i\cdot\sin x$

Deze formule wordt de *formule* (*identiteit*) *van Euler* genoemd (naar Leonhard Euler, 1707-1783).

Kiezen we in die relatie vervolgens $x = \pi$, dan is:

$e^{i\cdot\pi}=\cos\pi+i\cdot\sin\pi=-1+0=-1$

En daarom is de mooiste formule uit de wiskunde: $e^{i\cdot\pi}+1=0$.

Rationaal = (ook) mooi

In de bekende rijtjes van goniometrische verhoudingen:

$x =$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin x =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x =$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

komen zes waarden van de sinus (en van de cosinus) van x voor die *rationaal* (mooi) zijn. Het reële getal x is daarbij zelf een *rationaal veelvoud* (een mooi veelvoud) van π.
Natuurlijk zijn er meer, zoals:

$\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, $\sin 1\frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{2}$, $\sin 1\frac{1}{2}\pi = -1$

Opmerking. Het is niet zo dat, als de cosinus (of sinus) van x rationaal is, x een rationaal veelvoud van π is! Een (tegen)voorbeeld is eenvoudig te vinden in een 3-4-5-driehoek. ◊

De vraag die we hierna volgt zullen beantwoorden, luidt:

Voor welke (reële) waarden van $x = \frac{p}{q}\pi$, *met* p *en* q *geheel* (x *is dan een rationaal veelvoud van* π), *is de cosinus van* x *rationaal?*

Het antwoord geven we met behulp van de hierboven gevonden *formule van Euler* (we gebruiken dus *complexe* getallen, maar heel elementair).

Met $z = e^{i\cdot x}$ waarin $x = \frac{p}{q}\pi$, is:

$$z^{2q} = (e^{i\cdot\frac{p}{q}\pi})^{2q} = e^{i\cdot(2p\cdot\pi)}$$

Zodat, volgens Euler's formule (zie boven):

$$z^{2q} = \cos(p\cdot 2\pi) + i\cdot\sin(p\cdot 2\pi) = 1 + i\cdot 0 = 1$$

Het getal z is dan (met $n = 2q$) een oplossing van de vergelijking [2]:

$X^n - 1 = 0$ ...(1)

Verder is:

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x} &= (\cos x + i\cdot\sin x) + (\cos(-x) + i\cdot\sin(-x)) \\ &= (\cos x + i\cdot\sin x) + (\cos x - i\cdot\sin x) \\ &= 2\cos x \end{aligned}$$

of: $z^2 - (2\cos x)\cdot z + 1 = 0$

Het getal z is daarmee óók een oplossing van de vergelijking:

$X^2 - (2\cos x)\cdot X + 1 = 0$ ...(2)

Delen we de veelterm in het linker lid van (1) door de veelterm die staat in het linker lid van (2), dan geldt met geschikte veeltermen $q(X)$ en $r(X)$, volgens de zogeheten *reststelling*:

$X^n - 1 = q(X)\cdot(X^2 - (2\cos x)\cdot X + 1) + r(X)$ ...(3)

Daarbij is de graad van de veelterm $r(X)$ – de rest – kleiner dan 2 (immers, de graad van de 'delende' veelterm is gelijk aan 2).
Met de substitutie $X = z$ geeft (3): $0 = q(z)\cdot 0 + r(z)$, waaruit volgt dat $r(z) = 0$.

Met $r(X) = uX + v$ (de graad van r is kleiner dan 2) blijkt dan, weer via de substitutie $X = z = e^{i \cdot x}$ én de formule van Euler:

$$r(z) = 0 = uz + v = u \cdot (\cos x + i \cdot \sin x) + v$$

of:

$$u \cdot \cos x + i \cdot u \cdot \sin x = -v = -v + i \cdot 0 \qquad \ldots(4)$$

Waaruit volgt dat in ieder geval voor het imaginaire deel $i \cdot u \cdot \sin x$ van het linker lid van (4) moet gelden:

$$u \cdot \sin x = 0 \qquad \ldots(5)$$

We onderscheiden op basis hiervan twee gevallen (**A** en **B**).

A. Uit sin x = 0 volgen met (5) de (direct voor de hand liggende) waarden $x = k \cdot \pi$, met *k geheel.*

Deze waarden van x zijn rationale veelvouden van π, omdat de gehele getallen k een deelverzameling van de rationale getallen vormen.

B. Is $u = 0$, dan volgt uit (4) dat óók $v = 0$. Maar in dit geval is $r(X) = 0$ voor *iedere X.* Uit (3) blijkt nu dat $X^n - 1$ *deelbaar* is door $X^2 - (2\cos x) \cdot X + 1$.

Er kan (maar zeker *niet* elementair) bewezen worden dat de coëfficiënt '2cos x' van X in de 'delende' veelterm een *geheel* getal is. Het bewijs kan worden gebaseerd op een gevolg van een stelling (lemma) van Gauss (1801); zie figuur 1.[3]

Omdat $-2 \leq 2\cos x \leq 2$, kan cos x dan *alleen* de waarden 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 aannemen, en die waarden geven, naast de reeds onder **A** gevonden oplossingen, verder nog:

$$x = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \quad x = \pm\tfrac{2}{3}\pi, \quad x = \pm\tfrac{1}{2}\pi$$

Deze laatste oplossingen zijn alle modulo 2π.

En daarom zijn:

$$x = 0, \quad x = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \quad x = \pm\tfrac{1}{2}\pi, \quad x = \pm\tfrac{2}{3}\pi, \quad x = \pm\pi \quad \text{(modulo } 2\pi\text{)}$$

de enige *mooie* (rationale) veelvouden van π waarvan de cosinus ook *mooi* (rationaal) is.

42.

Si coefficientes $A, B, C \ldots N$; $a, b, c \ldots n$ *duarum functionum formae*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + N \quad (P)$$
$$x^\mu + a x^{\mu-1} + b x^{\mu-2} + c x^{\mu-3} \ldots + n \quad (Q)$$

omnes sunt rationales, neque vero omnes integri, productumque ex (P) *et* (Q)

$$= x^{m+\mu} + \mathfrak{A} x^{m+\mu-1} + \mathfrak{B} x^{m+\mu-2} + \text{etc.} + \mathfrak{Z}$$

omnes coefficientes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots \mathfrak{Z}$ *integri esse nequeunt.*

figuur 1 Uit [4], Band I, *Disquisitiones Arithmeticae* (pag. 34); zie [5] voor de vertaling

Noten

[1] We moeten natuurlijk (eigenlijk) nog bewijzen dat de functie f waarin $a = i$ nog steeds, en op dezelfde manier als erboven, differentieerbaar is.
We maken hier evenwel de **afspraak** – en dat doen we in de wiskunde vaker; en daarbij, het geeft ook elders geen conflicten – dat de regels voor differentiëren van functies van reële x met *complexe* coëfficiënten dezelfde zijn als voor functies van reële x met *reële* coëfficiënten.

[2] We schrijven in hetgeen volgt vergelijkingen en veeltermen met een (hoofdletter) X, zoals dat vaak gedaan wordt bij *uitbreidingen* van getalverzamelingen (bijvoorbeeld van $\mathbf{Z}$ naar $\mathbf{Z}[X]$ en van $\mathbf{Q}$ naar $\mathbf{Q}[X]$).

[3] Naar Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Kort geformuleerd luidt het bedoelde gevolg van die stelling van Gauss:
Indien een veelterm met gehele coëfficiënten kan worden ontbonden in factoren met rationale coëfficiënten, dan is die veelterm ook ontbindbaar in factoren met gehele coëfficiënten.
Zie voor een bewijs hiervan een handboek over algebra, of bijvoorbeeld:
- J. Rotman (2000): *Galois Theory*. New York: Springer Verlag (2nd edition);
- WikipediA: « *http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss's_lemma_(polynomial)* ».

[4] C.F. Gauss: *Werke*. Göttingen, 1863. Digitaal beschikbaar via:
« *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN*235993352 »

[5] Zijn de coëfficiënten $A, B, C, \ldots, N$; $a, b, c, \ldots, n$ van de twee veeltermen:
$P \equiv x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + N$
$Q \equiv x^\mu + ax^{\mu-1} + bx^{\mu-2} + cx^{\mu-3} + \ldots + n$
rationaal, maar niet alle geheel, dan kunnen in het product van P en Q:
$PQ \equiv x^{m+\mu} + \mathfrak{A}x^{m+\mu-1} + \mathfrak{B}x^{m+\mu-2} + \ldots + \mathfrak{Z}$
niet alle coëfficiënten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{Z}$ geheel zijn.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

6

Uit: DECIMALEN

(...)
Ja, deze π (dat staat te lezen in de encyclopedie)
Is eeuwenoud en wetenschappelijk en Grieks en vol magie
Als ik zo pieker over π spreekt u wellicht over een manie
Maar zijn wij allen niet neuro-, fana-, roman- of mystici?
Een ander heeft een kolibrie, een relikwie of een fobie
Maar ik verdiep me onophoudelijk en zonder compromis
In dit unieke en verheven wonder der planimetrie
Ik zoek het antwoord op het grote raadsel π
(...)

Drs. P in:
Drs. P & Marjolein Kool (2000): *Wis- en natuurlyriek*. Amsterdam: Nijgh & Van Ditmar.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

De geboorte van het getal e

[Rob van Oord]

Inleiding

Er is niets mooier in het leven dan een feestje te vieren. Ook in de wiskundelessen mag best af en toe eens wat gevierd worden. Ik vind dat de geboorte van het getal e een feestje waard is. Na π en $\sqrt{2}$ en andere wortels is dit een verrassend nieuw getal. De leerlingen weten niet hoeveel waarde dit getal heeft voor de wiskunde en zeker niet welke mooie toepassingen er zijn weggelegd voor het gebruik van dit getal. Maar het begint met de geboorte. Er moet net als bij de geboorte van Dik Trom even worden opgemerkt dat het een *bijzonder* getal is, *en dat is het.*

En natuurlijk ... beschuit met muisjes!

Hoe?

Er zijn verschillende manieren om het getal e te introduceren in de klas.

In *WikipediA* wordt e gedefinieerd als de limiet van $(1+\frac{1}{n})^n$, voor steeds grotere gehele waardes van n [1]:

$(1+\frac{1}{1})^1 = 2$; $(1+\frac{1}{2})^2 = 2{,}25$; $(1\frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} = 2{,}370...$; $(1\frac{1}{4})^2 = 2{,}441...$; enzovoort

Een zeer langzaam convergerende rij die pas bij $n = 74$ als eerste decimaal een 7 heeft:

$(1+\frac{1}{74})^{74} = 2{,}7001...$

Ook kun je een Taylor-reeksontwikkeling nemen van de somrij van $\frac{1}{n!}$ voor gehele waardes vanaf $n = 0$:

1; $1 + 1 = 2$; $1+1+\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$; $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 2{,}666...$; $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24} = 2{,}708...$; een veel snellere benadering.

Maar in mijn eigen onderwijs sluit ik het liefst aan bij differentiëren.
Hierna beschrijf ik eerst in het kort de geboorte van het getal e zoals ik het graag doe. Daarna zal ik proberen uit te leggen hoe dit past in een breder verband binnen de aanpak van mijn lessen.

Bijkomend voordeel is dat ik hier het functioneel gebruik van de grafische rekenmachine mee aantoon.

In het kort

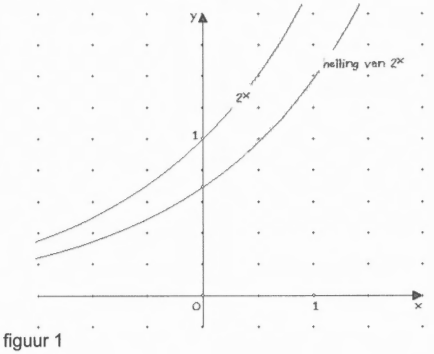
In het rijtje van de afgeleiden van machtsfuncties zoals x^2, $\frac{1}{4}x^2 + x$, x^3, x^n, en in het bijzonder $\sqrt{x}$ en $\frac{1}{x}$, vervolgens de kettingregel en product- en quotiëntregel, volgen op een natuurlijke wijze de afgeleide van exponentiële functies zoals 2^x en 3^x.

Ik noem dan 2^x de *vader* en 3^x de *moeder* van e): samen op zoek naar het ideale *kind*. In hetzelfde stramien van het voorbeeld dat ik verderop laat zien, werk ik toe naar de climax. Op het (smart)bord, en in de schriften van de leerlingen, verschijnt stukje bij beetje een mega-tabel.

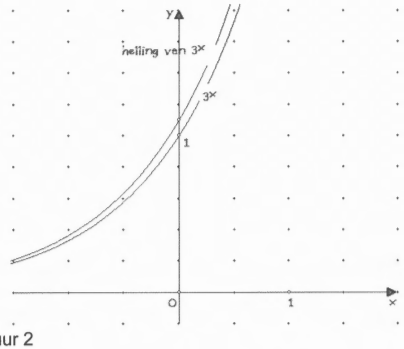
Eerst maar eens de grafiek van $y = 2^x$ laten tekenen, dan wat hellingen meten, vervolgens hellingen laten benaderen, eerst via de bekende benadering met $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ via differentiequotiënten, daarna via de hellingfunctie benaderd door het differentiaalquotiënt. (Op de grafische rekenmachine zit hiervoor ook een optie, die je hierbij kunt inzetten. Zelf doe ik het anders; zie mijn uitgewerkte voorbeeld in de volgende paragraaf.)

Als de tabel er eenmaal staat, kijken we met z'n allen of er iets aan opvalt. De leerlingen zien vrijwel allemaal dat de hellingen zich ook steeds verdubbelen. De hellingfunctie lijkt ook exponentieel, met grondtal 2. Dan introduceer ik de *Truc* om dit verband helder te krijgen. Er blijkt dat (*hellingfunctie* gedeeld door 2^x) constant is, en wel 0,693. Conclusie is dan dat (zie figuur 1):

hellingfunctie = 0,693 · 2^x



figuur 1



figuur 2

Kort gezegd: de helling van de vader van e is overal ongeveer 70% van de lokale functiewaarde. De grafiek van de hellingen is dus een exponentiële grafiek die op 70% onder de waardes van de 2^x - grafiek ligt.

Dit hele procédé herhaal ik voor de functie $y = 3^x$. Dan blijkt de hellinggrafiek op zo'n 110% te liggen, boven de 3^x - grafiek; zie figuur 2.

Nu gaan we, samen met de *ouders*, op zoek naar het *ideale kind*: welk grondtal moet genomen worden opdat de hellinggrafiek bij y = (*grondtal*)^x precíes samenvalt met die grafiek, het ideale kind zogezegd.

Het getal zal tussen 2 en 3 liggen, dat is duidelijk. Proberen we 2,5. Nee, dat is te laag. Proberen we 2,75. Dat is te hoog. En zo vinden we, door wat uitproberen, het getal 2,718; enzovoort.
Dit getal noemen we '**e**'.
Gefeliciteerd met de geboorte van dit mooie getal!

Het getal e is genoemd naar de 'uitvinder' van dat getal, meneer Euler uit Basel.

Op internet is over meneer Euler genoeg te vinden.[2] Hij is de wiskundige met de meeste publicaties op allerlei gebieden van de wiskunde, die, toen hij blind was, dag en nacht zijn vondsten dicteerde.

Wat er aan vooraf gaat – een voorbeeld

De helling $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van een lijnstuk staat aan de basis van het berekenen van afgeleide functies van allerlei bekende functies.

Ik laat nu zien hoe dat gaat bij $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$.

Eerst wordt de parabool getekend. Dan gaan we samen zoeken naar hoe een helling te bepalen via metingen; met:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{verschil in } y\text{–waardes}}{\text{verschil in } x\text{–waardes}}$$

Maak een driehoekje waarin Δx handig gekozen wordt, bijvoorbeeld $\Delta x = 1$ of $\Delta x = 2$.
Nu gaan de leerlingen zelf, via metingen, hellingen bepalen in punten van de grafiek. Elke leerlingenrij in de klas krijgt er eentje aangewezen. De resultaten worden in een tabel op het bord gezet. Al gauw kom je er achter welke leerlingen het nog niet snappen.
Daarna wordt de helling benaderd door twee punten die héééél (h) dicht bij elkaar liggen. We nemen 0,01.
Samen zoeken naar hoe dat moet, bij bijvoorbeeld $x = 1$:
$f(1{,}01) = 1{,}265025$ en $f(1) = 1{,}25$; dit geeft $\Delta y = 0{,}015025$.
Dus is de helling $\frac{0{,}015025}{0{,}01} = 1{,}5025$. Dit is ongeveer anderhalf; schrijf dit als $1\frac{1}{2}$ in de tabel. Het is belangrijk om de antwoorden op 'mooie' getallen af te ronden, ja zelfs als echte breuken te schrijven. Dit om later sneller de formule te zien die er achter steekt.
Ik gebruik altijd de benadering $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Ik laat deze formule in de grafische rekenmachine (een 'Texas Instruments') ook opnemen als:

$Y_0 = (Y_1(X + 0.01) - Y_1(X)) / 0.01$

Zo kan ik op elk gewenst moment van een functie die op de GR wordt ingetikt bij Y_1, via Y_0, een tabel laten produceren van benaderingen van de afgeleide voor geschikte waardes van x; zie tabel 1.

tabel 1

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	...	a
$f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$	0	$\frac{13}{36}$	$\frac{5}{8}$	$1\frac{1}{4}$	2,0625	3	4,0625	5,25	...	...
helling (gemeten)	1	-	0,75 $=\frac{3}{4}$	1,5 $=1\frac{1}{2}$	1,7 *	2	2,1 *	2,7 *		
helling (benaderd)	1,0025 $=1$	1,1666	1,2525 $=1\frac{1}{4}$	1,5025 $=1\frac{1}{2}$	1,7525 $=1\frac{3}{4}$	2,0025 $=2$	2,2525 $=2\frac{1}{4}$	2,502 $=2\frac{1}{2}$		?
Truc doe eens: helling–1	0	0,1666 $=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	...	**

* De metingen lopen uiteen, dus kunnen de benaderingen nogal verschillen. Ik kies een gemiddelde.

** Nu valt hier op dat dit gelijk is aan $\frac{1}{2}a$.

Samen met de klas leid ik dan in de volgende stappen voorschriften af van de afgeleide functie:

- ik laat eerst de grafiek tekenen van $f(x)$, bijvoorbeeld met domein [-3, 3];
- daarbij wordt al een begin gemaakt met een grote tabel:
  -- een rij met geschikte waardes van x (met ook nog wat lege vakken voor later) die eindigt met een a (*onder* deze a moet dan de uiteindelijke formule voor de afgeleide komen);
  -- een rij voor de waardes van $f(x)$;
- de tabel wordt meteen uitgebreid met een aantal rijen:
  -- één voor hellingen die worden gemeten (per leerlingenrij laat ik de helling in hetzelfde punt meten);
  -- één voor hellingen met de benaderingen door Y0 (per leerlingenrij laat ik voor dezelfde x de helling benaderen);
  -- één voor getallen die met een *Truc* (die ik meestal zelf aandraag) worden gevonden.

In de tabel bij mijn voorbeeld (tabel 1) wordt dan de *Truc*: trek 1 van de helling af. Dan vraag ik de leerlingen op te schrijven welk verband ze zien tussen de getallen in de rij van x en de getallen in de laatste rij; in het voorbeeld is dat $\frac{1}{2}a$. Daarmee kan dan de formule van de afgeleide in de regel erboven – op de plaats van het vraagteken – worden geschreven: $\frac{1}{2}a+1$, en bijgevolg wordt het met x dan $\frac{1}{2}x+1$.

De functie $\frac{1}{2}x+1$ noemen we $f'(x)$.

Voor de derde rij, het vinden van de helling door meten, moet een driehoekje worden getekend waarvan de toename van y wordt gemeten in mm, bij een toename van x van bijvoorbeeld 1 of 2 cm. Deze getallen zijn wel wat grof, maar geven al vast een goed beeld van de mate van stijging.
Dan de rij waarin benaderingen van hellingen worden berekend. Eerst laat ik voor enkele losse waardes van x de helling benaderen: voor x = 1 wordt dit $(\frac{1}{4}\cdot 1{,}01^2 + 1{,}01 - (\frac{1}{4}\cdot 1^2 + 1))/0{,}01 = 1{,}5025$. Omdat dit een benadering is, rond ik dit voor het gemak af op $1\frac{1}{2}$, en dat is ook ongeveer de waarde die door meting voor de helling bij x = 1 is gevonden. Wanneer ik de tabel uitbreid met enkele gebroken waardes van x, dan is meestal met de

optie 'MATH 1: ▶Frac' op de GR te vinden van welke breuken de gevonden getallen een benadering zijn. Heel handig om daarmee het verband met de waardes van x in de bovenste rij te zoeken.

Zo krijg je bij $x = \frac{1}{3}$ de helling 1,1666916667; en dat zou wel eens 1,1666... kunnen zijn.

Na MATH 1: ▶Frac komt 7/6 op het scherm.

Blijft nog over het bewijs van de formule. Dit kun je klassikaal doen met de benadering van de helling voor $x = a$ door:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{4}(a+h)^2+(a+h)-(\frac{1}{4}a^2+a)}{h}$$
$$= \frac{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{4}h^2+a+h-\frac{1}{4}a^2-a}{h} = \frac{\frac{1}{2}ah+\frac{1}{4}h^2+h}{h} = \frac{1}{2}a+\frac{1}{4}h+1$$

Als je bedenkt dat h héééél klein is – dus nul wordt – dan zie je dat de helling overblijft: $\frac{1}{2}a+1$.

Nog meer voorbeelden

Het bewijs voor de afgeleide van $f(x) = x^2$ staat als opgave in het boek.

Bij de afgeleide van $f(x) = x^3$ wordt het binomium van Newton ten tonele gevoerd; na haakjes uitwerken van $(x + h)^2$, $(x + h)^3$, $(x + h)^4$, enzovoort. Vervolgens worden de afgeleiden van x^5, x^{11} en x^n bepaald. En 'bewezen' door te wijzen op het wegvallen van de termen x^5, x^{11}, resp. x^n, en het overhouden van $5x^4h$, $11x^{10}h$, resp. $(n \cdot x^{n-1}h)$ + (allemaal termen met machten van h die groter dan 1 zijn in de teller). Bij het wegdelen van h blijft één term zonder h over, en verder alleen termen met minimaal één factor h erin. Dus als h gelijk aan 0 wordt, dan wordt de formule van de helling:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

De *Truc* bij de tabel van de afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x}$ is, dat je een extra rij neemt met *1/helling*. Al snel zien de leerlingen dat er een rij met $-a^2$ staat. Dus de hellingfunctie zelf is $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Deze laat ik uit het hoofd leren.

Het bewijs via het differentiequotiënt $\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ levert een mooie algebra-oefening met breuken op. Je krijgt dan:

$$\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{h \cdot x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

Voor héééél kleine h wordt dit $-\frac{1}{x^2}$.

De *Truc*-jes bij de tabel van de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$ zijn: neem het dubbele, kwadrateer, en neem het omgekeerde. Bij het bewijs kun je mooi een *act* invoegen met de worteltruc (d.w.z. met $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$). Tover die eens uit de hoge hoed!

Met:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

wordt eerst het differentiequotiënt van $f(x)=\sqrt{x}$ opgeschreven, vervolgens teller en noemer met $\sqrt{(x+h)}+\sqrt{x}$ vermenigvuldigd; daarmee wordt toegewerkt naar de worteltruc (hoe krijg je die wortels weg?). Oké, je krijgt in de noemer weer nieuwe wortels erbij, maar na vereenvoudigen, door h weg te delen in teller en noemer, blijft een breuk over met noemer $\sqrt{(x+h)}+\sqrt{x}$.
Als je nu weer bedenkt dat h héééél klein is, dan wordt de breuk:

$$\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Voilà.

Zo vind je de afgeleide van $f(x)=\sqrt{x}$ als $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. En ik laat mijn leerlingen ook déze formule uit hun hoofd leren. Die is veel handiger dan $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. Die gaat vaak fout.

Terug naar de geboorte van het getal e

Gaandeweg de les (in de stappen als bij het voorbeeld hierboven) ontstaat tabel 2 bij de hellingen van de functie 2^x.
We kijken met z'n allen eens goed naar de getallen. We constateren dat de hellingen ook verdubbelen. De hellingen zijn dus ook waardes van een exponentiële functie van $v(x)=2^x$ (de 'v' van vader): het moet iets zijn als $(getal\cdot 2^x)$. Om dat getal te vinden doen we de *Truc* van 'deel de helling door de functiewaarde'.

tabel 2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	a
$v(x)=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	...
helling (gemeten)	-	-	0,35 *	0,7 *	1,4 *	2,7 *	-		
helling (benaderd)	0,0867	0,1734	0,3467	0,6934	1,3868	2,7735	5,5471		?
Truc doen eens: helling/$v(x)$	0,693	0,693	0,693	0,693	0,693	0,693	0,693		**

* De metingen lopen uiteen, dus kunnen de benaderingen nogal verschillen. Ik kies een gemiddelde.

** En hier valt op dat dit gelijk is aan 0,693.

Het gevolg van de *Truc* is dat je nu $v'(x)$ kunt afleiden uit $\frac{helling}{v(x)}=0,693$. Er geldt:

$$v'(x)=helling=0,693\cdot 2^x$$

Als je hierover nadenkt, zie je dat de helling steeds 0,7 keer de functie 2^x zelf is; je zou kunnen zeggen dat de helling 70% is van de functiewaardes. De hellingrafiek komt dus geheel lager te liggen dan de grafiek van $y=2^x$; zie weer figuur 1.

Zo vind je met een vergelijkbare tabel bij $m(x) = 3^x$ (de 'm' van moeder) dat de hellinggrafiek er 10% boven ligt (zie figuur 2).
De 'ideale' exponentiële functie heeft dus een grondtal tussen 2 en 3.
Nu gaat het snel. Er is al 2,5 cm 'ontsluiting'. We gaan op zoek naar een functie g^x waarvan de hellinggrafiek precies op de grafiek zelf komt te liggen. Met de tabel van Y_1 en Y_0 (op de GR) zie je dat dit met $2{,}7^x$; $2{,}75^x$ en $2{,}72^x$ steeds beter lukt.
Het ideale getal (*kind*) heeft oneindig veel decimalen, die – net als bij pi – niet regelmatig verdeeld zijn. We noemen dit getal e.

En wat verder nog?

Maar dit getal e is pas het begin van heel veel nieuwe wiskunde. Het begint met: de afgeleide van e^x is e^x. Dat betekent dat in elk punt van de grafiek van $y = e^x$ de helling even groot is als de functie hoog is.
Daarna komt de afgeleide van 2^x. Die is dus $0{,}693 \cdot 2^x$. Maar welk getal is die 0,693 dan wel?
Probeer wat knopjes, en de leerlingen vinden snel dat dit ln 2 is.
Met de kettingregel bij $2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{\ln 2 \cdot x}$ kun je mooi aantonen dat 0,693 staat voor ln 2.
En zo blijkt 1,098 gelijk te zijn aan ln 3.
Daarna komt $y = {}^e\log x$ als spiegelbeeld van $y = e^x$. We noemen ${}^e\log$ vanaf nu ln.
Prachtig om door middel van spiegelen van de hellingen van de e^x- grafiek, de hellingen van de $\ln(x)$-grafiek te ontdekken. Om daarna te constateren dat de afgeleide van $\ln x$ gelijk is aan $\frac{1}{x}$.
Ook kan hierna een mooi bewijs volgen van deze afgeleide met behulp van de kettingregel bij de functie $y = e^{\ln x}$.
Kortom, er valt nog veel te beleven met het getal e.

Ik wens de lezers net zo veel plezier met dit getal als ik zelf altijd heb met mijn leerlingen.

Overigens, ik pleit ervoor om het getal e al in klas 5 ten tonele te voeren. Als je pas in 6-vwo met e begint, dan blijft het een voor de leerlingen moeilijk te vatten getal.
De functies met machten van e en met ln krijgen ze makkelijker onder de knie als ze er al in de 5e klas mee vertrouwd zijn geraakt.

Noten

[1] Zie: *http://nl.wikipedia.org/wiki/E_(wiskunde)*

[2] Zie bijvoorbeeld: *http://nl.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Betekenis geven aan getallen bij wiskunde C

[Peter van Wijk]

Inleiding

In dit artikel komt aan de orde op welke manier getallen betekenis krijgen voor leerlingen met wiskunde C in hun pakket.

figuur 1 Maya-getallen en -talstelsel (Uit: *Geschiedenis van getallen*)

Wiskunde C is een profielvak in de vernieuwde tweede fase van het vwo. Het richt zich op leerlingen in het profiel Cultuur en Maatschappij (C&M) en beoogt voor te bereiden op universitaire studies in de sociale, culturele, juridische en taal- en maatschappijwetenschappen. De Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO) heeft in opdracht van het ministerie van OCW voorstellen gedaan voor het nieuwe examenprogramma voor wiskunde C, dat ingevoerd gaat worden in 2014. Hierin krijgt het, veel meer dan nu het geval is, een eigen gezicht in vergelijking met de andere wiskundevakken: rekenvaardigheid, betekenis geven aan en het werken met getallen is daarbij een belangrijk aandachtspunt.

Binnen wiskunde C nemen contexten die passen in het C&M-profiel, een belangrijke plaats in. De nadruk ligt minder op het reproduceren van technieken en meer op de functie, de cultuurhistorische rol en de waarde ervan in onze maatschappij. Binnen de domeinen Logica en Vorm & Ruimte bijvoorbeeld ervaren de leerlingen de relevantie van wiskunde o.a. door logisch-wiskundige aspecten te koppelen aan correctheid van redeneren en meetkundige principes toe te passen in architectuur en beeldende kunst.
Maar binnen al deze contexten is het belangrijk rekenvaardig te zijn, betekenis te kunnen geven aan getallen en flexibel te kunnen werken met getallen.
Binnen het vernieuwde programma komt het werken met getallen, naast het domein A, Vaardigheden, heel expliciet aan bod bij domein B, subdomein B1 (zie de kadertekst hieronder).

Subdomein B1 – Rekenen en algebra

De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen en kan daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen.

De kandidaat kan:

4.1 berekeningen maken met en zonder variabelen waarbij gebruik gemaakt wordt van rekenregels, inclusief die van machten.
4.2 berekeningen maken met verhoudingen, breuken en procenten.
4.3 werken met haakjes en vereenvoudigen door haakjes wegwerken.
4.4 rekenregels gebruiken om algebraïsche expressies te herschrijven of te verifiëren.
4.5 werken met grootheden en samengestelde grootheden.
4.6 getallen in historisch perspectief plaatsen; denk hierbij aan π, de gulden snede en de rij van Fibonacci.
4.7 gebruik maken van de begrippen absoluut en relatief.

Lesmateriaal

Er zijn allerlei nieuwe modules ontwikkeld voor wiskunde C waarin expliciet aandacht is voor getallen en getalbegrip. We geven hiervan enkele voorbeelden ter illustratie.

Geschiedenis van getallen – In de module 'Geschiedenis van getallen' wordt de leerling een overzicht geboden over de ontwikkeling van het getalbegrip bij de 'oude' culturen. Motivatie voor deze duik in de geschiedenis van de wiskunde is:

- De leerlingen gaan beseffen dat wiskunde geen statische wetenschap is, maar zich voortdurend ontwikkelt.
- De leerlingen gaan reflecteren op de verworvenheden van de huidige wijze van getalnotatie, rekenwijzen en algebra en deze beter waarderen.

Opgave

7667 is (in het tientallig stelsel) een palindroom, dat wil zeggen dat het getal van links naar rechts gelezen hetzelfde is als van rechts naar links.
Onderzoek of het getal in het 6-tallig stelsel geschreven ook een palindroom is.

Uit: Toets vwo-4 (*Geschiedenis van getallen*)

Cyclisch rekenen – Deze module bevat heel veel herkenbaar materiaal voor de leerlingen: bioritmen, kalenders, seizoenen. In een groot deel van het materiaal staat *redenerend rekenen*, en daarmee ook *handig rekenen*, centraal. Er is bij dit materiaal bewust gekozen voor een 'positieve' benadering: leerlingen worden aan de hand van aansprekende onderwerpen uitgenodigd tot rekenen en redeneren, zonder dat uitdrukkelijk wordt stilgestaan bij zaken die ze 'eigenlijk al lang hadden moeten weten of kunnen'.

Uit: *Cyclisch rekenen*

Je hebt in het dagelijks leven te maken met allerlei cyclische verschijnselen die niet altijd op elkaar passen: zoals dagen, weken, maanden, jaren, en diverse bioritmen. Door te letten op de verschillende periodes is er wel goed mee te rekenen. Het is daarbij handig om met verschuivingen te werken.

Voorbeeld.
Je bent vandaag (zondag) lichamelijk top. Hoe is dat over 6 weken?
De lichamelijke cyclus heeft een periode van 23 dagen, dat is 3 weken plus 2 dagen.
Je volgende top is dus 3 weken en twee dagen later en valt op een dinsdag. De daaropvolgende topdag schuift weer 2 weekdagen op en valt op een donderdag. Over 6 weken en 4 dagen is er dus weer een top. Over precies 6 weken zit je dus nog 4 dagen vóór de top.

Deze 4 dagen vormen ongeveer een zesde periode van de lichamelijke cyclus: $\frac{4}{23} \approx \frac{1}{6}$. In figuur .. kun je zien dat je een zesde periode vóór de top (dus op tijdstip 1) op 50% zit, aan het begin van de gunstige tijd.

Het kalenderjaar telt normaal gesproken 365 dagen, dat is 52 weken plus een dag, maar om de 4 jaar telt een jaar een dag extra (schrikkeldag). Dit maakt het rekenen wat lastiger, maar als je sprongen van vier jaar maakt is er (tot 2100) weer een mooie regelmaat. Zo kun je eenvoudig nagaan dat als je dit jaar op woensdag jarig bent, die dag over vier jaar op een maandag valt.

Vorm en Ruimte – In het eerste hoofdstuk van deze module komt 'verhouding' aan de orde als uitdrukking in de Nederlandse taal, in de betekenis van 3 : 4 en in relatie tot breuken. Als voorbereiding op de hoofdstukken die volgen, geeft dit hoofdstuk de leerlingen een begrippenkader, zodat ze weten wat er bedoeld wordt als in het vervolg gesproken wordt over zijden die zich verhouden als '3 staat tot 4'.

Uit: *Vorm en Ruimte*

Opgave

Ik las in de krant dat Mars ongeveer half zo groot is als de aarde.

a Wat vind jij dat deze informatie je vertelt?

Je kunt de informatie over Mars op drie manieren interpreteren. Het kan namelijk over de diameter, de oppervlakte en het volume gaan.

Bij de volgende zinnen ligt één interpretatie voor de hand.

- *Duitsland is bijna 9 keer zo groot als Nederland.*
- *Een 'fluitje' bier is half zo groot als een 'emmertje'.*
- *Karel is anderhalf keer zo groot als Marietje.*

b Op welk aspect let je in deze drie voorbeelden: lengte, oppervlakte of inhoud?

c Wat bedoelen we met 'groter'? Hebben we het dan over lengte, oppervlakte of inhoud?

We vergelijken de aarde met de maan.

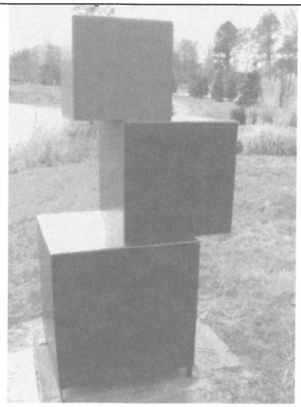
diameter	aarde: 12.756 km
	maan: 3.476 km
oppervlakte	aarde: 511.186.000 km^2
	maan: 37.959.000 km^2
inhoud	aarde: 1.086.781.300.000 km^3
	maan: 21.990.643.000 km^3

d Hoeveel keer zo groot is de aarde als de maan, in elk van de drie aspecten?

Een mooi voorbeeld vormen ook de verhoudingsrijen in de architectuur, waar met een vaste verhouding c gewerkt wordt. Bij een rechthoek betekent dit dat de hoogte hetzelfde blijft, maar de volgende rechthoek een breedte heeft die c keer zo groot is.

Uit: *Vorm en Ruimte*

Toetsopgave – Sacred Geometry



Hiernaast staat een foto van het kunstwerk *Sacred Geometry* van Julia Stout (artistiek pseudoniem *Giuilia*).

Een zijvlak van de bovenste kubus heeft een *oppervlakte* van (ongeveer) 33,6 dm^2.
Een zijvlak van de onderste kubus heeft een *oppervlakte* van (ongeveer) 58,8 dm^2.
We gaan ervan uit dat de kubussen van hetzelfde materiaal zijn. De bovenste kubus weegt (ongeveer) 20 kg.

- Bereken het gewicht van de onderste kubus, afgerond op een geheel aantal kilogrammen.

De middelste kubus is een vergroting van de bovenste kubus met dezelfde factor als de onderste kubus een vergroting is van de middelste kubus.

- Bereken deze vergrotingsfactor.

Slot

Er zijn nog meer voorbeelden te geven van materiaal dat ontwikkeld is in het kader van wiskunde C. Denk hierbij aan de gulden snede en de rij van Fibonacci. Maar alle voorbeelden geven aan dat rekenen, manipuleren en interpreteren van getallen een rol speelt bij wiskunde C. Het gaat er vooral om dat het werken met getallen gebeurt in voor leerlingen betekenisvolle situaties.
En hier ligt de kern: getallen krijgen betekenis, en deze aanpak zou wel eens erg goed uit kunnen pakken voor deze leerlingen. Op deze manier is wiskunde C zich aan het ontwikkelen tot een écht wiskundevak met heel eigen karakteristieken en is het geen afgeleide meer van wiskunde A.
Maar of het een kans krijgt zich in de toekomst als volwaardig vak te ontwikkelen, bij vermindering van het aantal profielen, blijft natuurlijk op dit moment de grote vraag.

Lesmateriaal

Zie: *www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Complexe getallen
VEELZIJDIG EN FASCINEREND

[Hans Sterk]

Complexe getallen vormen een fraai onderdeel van wiskunde D. Ze zijn toegankelijk, fascinerend, en uitstekend geschikt om allerlei facetten van wiskunde en wiskundeonderwijs in te verwerken: van het werken met definities, het geven van bewijzen, het uitvoeren van berekeningen, het werken aan toepassingen tot het kennismaken met open vragen. Uitstekend terrein om *zelf* de inrichting van je onderwijs ter hand te nemen, accenten te plaatsen en met je leerlingen in discussie te gaan. In lessenseries moeten immers keuzes gemaakt worden, afhankelijk van de beschikbare tijd, de leerlingen in je klas en je eigen voorkeur. Misschien kun je het ene jaar extra aandacht aan bewijzen schenken, het andere jaar aan toepassingen, of misschien kun je sommige leerlingen, individueel of in groepjes, wat verder op één van deze sporen zetten.

In onderstaande paragrafen licht ik een en ander toe. De paragrafen overlappen wel eens qua onderwerp, en wel in die zin, dat iets wat in de ene paragraaf aan de orde komt, ook wel bij een andere paragraaf ondergebracht zou kunnen worden.

Fascinatie en verwondering

In het reken- en wiskundeonderwijs raken leerlingen tot op zekere hoogte vertrouwd met (het rekenen met) gehele getallen, met breuken en met reële getallen, getallen die allemaal een plaats op de getallenlijn hebben en min of meer uit onze directe omgeving afkomstig zijn. Er worden bewerkingen geoefend, vergelijkingen bestudeerd en functies geïntroduceerd binnen deze wereld. Dat de vergelijking $x^2 = 2$ 'niet kan' binnen de rationale getallen, komt dan wel niet echt aan bod, maar dat vergelijkingen als $x^2 + 1 = 0$ en $x^2 + 2x + 2 = 0$ geen oplossingen hebben (binnen de reële getallen), is uiteindelijk bij iedere leerling bekend.

Toch pikken leerlingen wel eens signalen op dat 'de wortel uit -1 wel degelijk kan', maar de inwijding in deze materie moet wachten tot latere leerjaren. Doorgaans raken leerlingen gefascineerd door de vraag wat hier toch aan de hand zou kunnen zijn, waar die wortel dan toch is, maar blijft het zoeken door hen – heel begrijpelijk – beperkt tot de bestaande kaders van de getallenlijn. Voor een select gezelschap van leerlingen op havo en vwo worden de geheimen onthuld in de bovenbouw. Het gaat om een substantiële intellectuele sprong, waarbij intuïtief een niet zo voor de hand liggend terrein betreden wordt en grenzen van directer uit onze omgeving af te lezen wiskunde overschreden worden. Hier ontmoet men nieuwe kanten van de wiskunde, abstract en zelf gemaakt.

De complexe getallen worden namelijk geconstrueerd als punten in het platte vlak of op andere wijze. Leerlingen zijn onwennig dat 'dit zo maar mag', en worstelen misschien nog een tijdje met de vraag of we nu wel échte oplossingen van $z^2 = -1$ hebben gevonden, of toch een soort surrogaat.

Het doet denken aan de historische ontwikkeling van complexe getallen, van een schuchter begin met het nodige onbegrip naar een, eeuwen later, ingeburgerd stuk wiskunde, keurig gefundeerd.

Definities

Je kunt complexe getallen enigszins losjes introduceren met behulp van een nieuw getal, i geheten, waarvan je eist dat het voldoet aan $i^2 = -1$. Dat kun je bijvoorbeeld met een aanloop doen, waarin je andere bekende getallen zoals $\sqrt{2}$ de revue laat passeren: een getal waarvan het kwadraat 2 is. De onderbouwing berust op het modulair rekenen met polynomen (in het bijzonder met $X^2 + 1$), analoog aan het rekenen modulo n in $\mathbf{Z}$ en – vanuit een hoger standpunt gezien – op het werken met idealen en quotiënt-ringen uit de algebra:
$\mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$, waarin de klasse van X het complexe getal i representeert.
Dit is geen haalbare route voor de meeste leerlingen (vandaar de 'losse' wijze van introduceren), maar het is wel aardig om bij het uitvoeren van delingen met polynomen eens te kijken waarom het zo is dat voor polynomen $p(X)$ en $r(X)$, geldt $p(i) = r(i)$ als het polynoom $p(X)$ bij deling door $X^2 + 1$ rest $r(X)$ heeft. En, nadat de complexe vermenigvuldiging is ingevoerd, leerlingen eens te laten onderzoeken wat er gebeurt als je twee polynomen $aX + b$ en $cX + d$ met elkaar vermenigvuldigt en vervolgens de rest bij deling door $X^2 + 1$ bepaalt. Waarom lijkt dit sprekend op de complexe vermenigvuldiging?

Er is ook een voor leerlingen toegankelijke *precieze* definitie, uitgaande van paren reële getallen, een aanpak die teruggaat op Sir William Hamilton in de 19e eeuw. Dat was trouwens lang nadat men al met complexe getallen werkte. Zoals je wel vaker ziet in de wiskunde: het fundament komt pas als het gebouw er al min of meer staat.
Met deze verzameling van paren ga je aan de slag (met toelichting en discussie natuurlijk, want een nieuwe structuur definiëren is waarschijnlijk nog niet eerder aan de orde geweest):

- Je definieert een operatie 'optelling': $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- Je definieert een operatie 'vermenigvuldiging': $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
- Je introduceert en verantwoordt na enige tijd de handige notatie i voor het getal $(0, 1)$ en $a + bi$ voor het getal (a, b).
- Je introduceert het complexe vlak.

Natuurlijk kost het tijd en discussie om leerlingen hiermee vertrouwd te maken. Immers, zo'n definitie waarin je een structuur vastlegt, hebben leerlingen doorgaans niet eerder gezien. De discussie kan onder andere gaan over de vraag waarom andere definities niet doen wat je wilt, zoals de meer voor de hand liggende definitie voor een vermenigvuldiging $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$.
De discussie kan gaan over de vraag wat 'mag' in een definitie. Mag je zo maar iets definiëren? Het is illustratief om (na enige tijd) lichte variaties te bespreken en eventueel in opdrachten te verwerken, zoals de definitie $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - 2bd, ad + bc)$.
Wat voor getalsysteem ben je hier aan het maken, weer de complexe getallen?

Met de ingevoerde definities en notaties kunnen de rekenregels voor complexe getallen, zoals commutativiteit van optelling en vermenigvuldiging, precies nagelopen worden. Dat levert misschien geen spannende bewijsopgaven op, maar wel bewijzen waarin je oog leert krijgen voor de kleine stapjes die je moet zetten.
Die rekenregels zijn afgekeken van de wereld van de *gewone* getallen. In dit kader is het ook verstandig aan te roeren dat niet alles kan worden overgeheveld uit de wereld van de reële getallen. Denk bijvoorbeeld aan de ordening op de reële getallen. Deze valt niet voort te zetten naar de complexe getallen. In zo'n voortzetting van de ordening, ook weer aangegeven met >, zou ófwel $i > 0$ ófwel $i < 0$ gelden. In het eerste geval zou je moeten concluderen $i \cdot i > 0 \cdot i$ (beide zijden met een 'positief' getal vermenigvuldigen), maar dat levert $-1 > 0$, en dat kan niet. Het tweede geval leidt op soortgelijke wijze tot een tegenspraak.
Ook zijn er in de wereld van de complexe getallen nieuwe begrippen, en dus ook nieuwe rekenregels. Denk aan het reële en imaginaire deel van een complex getal. Er geldt voor alle complexe getallen z en w:

$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$

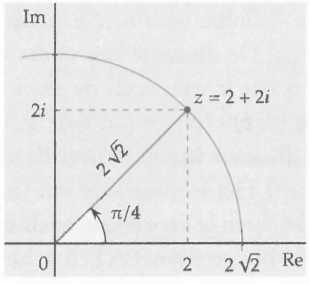
Maar $\mathrm{Re}(z \cdot w)$ is doorgaans níet gelijk aan $\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Re}(w)$, zodat je kunt ingaan op het geven van tegenvoorbeelden: neem $z = w = i$. Eén tegenvoorbeeld is genoeg.
Denk ook bijvoorbeeld aan de absolute waarde (modulus) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ van een complex getal $z = a + bi$ en de rekenregel $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
Een eenvoudig ogende regel met een 'uitschrijfbewijs', maar met een verrassend gevolg zien we hieronder.
Zijn m en n gehele getallen die allebei te schrijven zijn als som van twee kwadraten (van gehele getallen), zeg $m = a^2 + b^2$ en $n = c^2 + d^2$, dan is hun product mn ook een som van twee kwadraten:

$mn = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

Het tweede gelijkteken begrijp je goed als je de complexe getallen $z = a + bi$ en $w = c + di$ met hun moduli erbij haalt. Uit $m = |z|^2$ en $n = |w|^2$, volgt:

$mn = |z|^2 \cdot |w|^2 = |zw|^2 = |\ (ac - bd) + i(ad + bc)\ |^2$

(Bekijk zelf trouwens eens gehele getallen van de vorm $a^2 + 2b^2$; zie ook [1].)
Natuurlijk speelt de regel $|zw| = |z| \cdot |w|$ ook een rol bij de polaire notatie (dit is de schrijfwijze van een complex getal $z = a + bi$ als $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$), waarbij $r = |z|$).

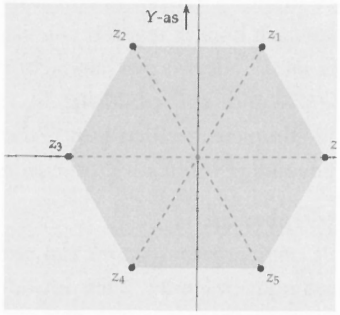


figuur 1 Modulus en argument van $z = 2 + 2i$, waarmee de polaire schrijfwijze van z luidt: $z = 2\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$. Bron: [5], pag. 35.

Het nut van de rekenregel voor de moduli blijkt uiteraard op een meer basaal niveau bij vragen als: wat zijn het argument en de absolute waarde van $(1+i\sqrt{3})^5$ of van $\frac{1+i}{5-12i}$?

Eerst de 5-de macht uitrekenen en het quotiënt en dan de moduli, of toch maar de rekenregel inzetten?

Is nu, na deze definities, $i = \sqrt{(-1)}$? Merk op dat het rechterlid nog niet gedefinieerd is en dat we dus nader moeten aangeven wat we met wortels bedoelen. Zo kom je al snel bij de vergelijking $z^n = a$ (met laten we zeggen n positief geheel). De n oplossingen ervan liggen regelmatig verdeeld op de cirkel met middelpunt 0 en straal $\sqrt[n]{a}$; zie figuur 2 voor $n = 6$.



figuur 2 De zes complexe oplossingen van $z^6 = 1$ zijn de hoekpunten van een regelmatige zeshoek in het platte vlak. Bron: [5], pag. 2.

Is er één daarvan die je met recht de n-de machtswortel uit a kunt noemen? En zo ja, is er dan een rekenregel voor zulke wortels? Geldt $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$? Deze vragen over wortels zijn relevant, bijvoorbeeld om de formule van Cardano goed te kunnen lezen.
Voor de vergelijking $z^3 + pz + q = 0$ luidt die formule:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Maar hoe moeten we deze expressie lezen? Staat hier één nulpunt? Of 9 (= 3 · 3) of nog meer? Of willen we dat hier in het algemeen drie nulpunten staan? En hoe moeten we dan die wortels lezen? Ook in verband met uitvoer van software is deze vraag relevant: wat moet je met een antwoord $(-1)^{2/5}$ van een computer?

Complexe getallen en rekenvaardigheid

Het getalsysteem der complexe getallen vormt een uitstekend terrein om rekenvaardigheden te oefenen. Omdat de complexe wereld toch anders is, worden leerlingen geconfronteerd met de vraag wat nog wel 'mag' en wat niet. Daarmee komen de rekenregels van de reële getallen ook weer in beeld. Bij het herschrijven van $\frac{1}{1+\frac{1}{1+i}}$ in de vorm $a + bi$ ga je toch weer nadenken over de rekenregels.
En zoals het voorbeeld van de absolute waarde al liet zien:

$$\left|\frac{1+i}{5-12i}\right| = \frac{|1+i|}{|5-12i|} = \frac{1}{13}\sqrt{2}$$

demonstreert handig gebruik van de rekenregels. Er zijn talloze mogelijkheden om voorbeelden te maken waarbij handige keuzes gemaakt kunnen worden. Zo kun je bijvoor-

beeld machten van $1 + i\sqrt{3}$ handig bepalen via de polaire notatie $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ van het getal.

Bewijzen met complexe getallen

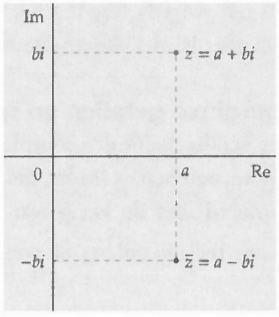
Zoals al gezegd, de complexe getallen roepen allerlei 'bewijsvragen' min of meer vanzelf op. Van verificaties van rekenregels die we eerder al noemden, tot 'spannender' bewijzen. Met de interpretatie van complexe getallen als punten in het platte vlak betreed je de (vlakke) meetkunde. Via deze link kun je meetkundeproblemen te lijf gaan met complex gereedschap. Dit is nauw verwant aan technieken uit de analytische meetkunde en het is zinvol hierop te wijzen: er zijn meer middelen om problemen aan te pakken.
Bewijzen kom je tegen bij de klassieke vlakke meetkunde (wiskunde B), maar je zou juist bij *meer* onderwerpen aandacht moeten besteden aan bewijzen om de rol van bewijzen in de wiskunde te verduidelijken.
Bij complexe getallen kun je daar aandacht aan besteden op diverse niveaus, van relatief eenvoudige verificaties tot meer gecompliceerde bewijzen.

Rekenbewijzen

De *complex geconjugeerde* van een complex getal $z = a + ib$ (met a en b reëel) is $\overline{z} = a - ib$; zie figuur 3. Zodra je iets introduceert in de wiskunde, kun je gaan kijken hoe het begrip zich verhoudt tot eerder geïntroduceerde begrippen en operaties.
In dit geval kun je kijken hoe complexe conjugatie zich gedraagt met betrekking tot de optelling en vermenigvuldiging, en dat leidt vanzelf tot bewijzen. Bijvoorbeeld de eigenschap:

Voor alle complexe getallen z en w geldt: $\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$.

En ook afgeleide vormen zoals $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ (met n geheel). In opgaven kunnen variaties als $\overline{z\cdot\overline{w}} = \overline{z}\cdot w$ aan de orde komen, of hoe de regel $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$ uit $\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$ is af te leiden.



figuur 3 De plaats van het getal z en van de complex geconjugeerde van z in het complexe vlak.
Bron: [5], pag. 32.

Een stapje verder: bewijs dat $z+\overline{z}$ (of, moeilijker: $e^{iz}+e^{-i\overline{z}}$) altijd reëel is. Of bewijs dat voor een polynoom $p(z)$ met reële coëfficiënten geldt: als z een nulpunt is, dan is $\overline{z}$ ook een nulpunt. Er zijn talloze varianten met verschillende moeilijkheidsgraad te bedenken. Een laatste voorbeeld. Gegeven de complexe veelterm $p(z)$. Laat zien dat het product $p(z)\cdot\overline{p(\overline{z})}$ een reële veelterm is (dat wil zeggen dat de coëfficiënten ervan reëel zijn).

Rotaties en spiegelingen

Spiegelen in de reële as is de meetkundige interpretatie van complex conjugeren. Al snel rijst dan de vraag naar een beschrijving van andere spiegelingen met behulp van complexe getallen. Bijvoorbeeld, spiegelen in de imaginaire as. In termen van reëel en imaginair deel is deze spiegeling niet zo moeilijk te beschrijven:

$z = x + iy \mapsto z' = -x + iy$

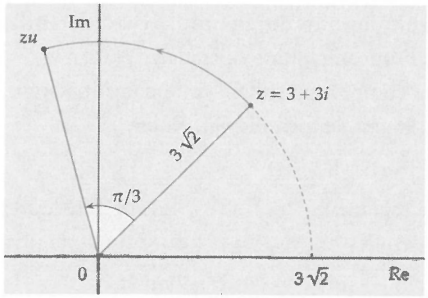
En dat betekent dat z wordt getransformeerd in $-\overline{z}$. Dan is het nog een hele stap om spiegelen in een willekeurige as (door 0) te beschrijven, want de beide speciale gevallen leveren niet meteen het idee om rotaties erbij te betrekken. Maakt de rechte lijn l een hoek α met de positieve reële as, dan kun je spiegelen in deze as als volgt beschrijven.

- Roteer eerst over een hoek $-\alpha$ door vermenigvuldiging met het getal $e^{-i\alpha}$ (of $\cos\alpha - i\sin\alpha$).
- Spiegel daarna in de reële as, en roteer vervolgens weer terug:

$z \mapsto z \cdot e^{-i\alpha} \mapsto \overline{z} \cdot e^{-i\alpha} = \overline{z} \cdot e^{i\alpha} \mapsto \overline{z} \cdot e^{i\alpha} \cdot e^{i\alpha} = \overline{z} \cdot e^{2i\alpha}$

En op een uitdagend niveau, maar nog steeds met 'rekenen' te bewerkstelligen: het product van twee spiegelingen (in assen door 0) is een rotatie over twee maal de hoek tussen de twee rechten (let op de draaizin). Bewijs (verkort genoteerd):

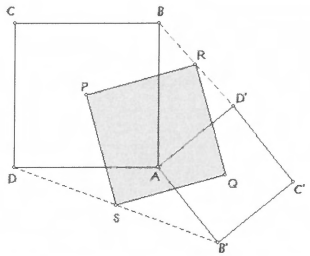
$z \mapsto \overline{z} \cdot e^{2i\alpha} \mapsto \overline{\overline{z} \cdot e^{2i\alpha}} \cdot e^{2i\beta} = z \cdot e^{2i(\beta-\alpha)}$



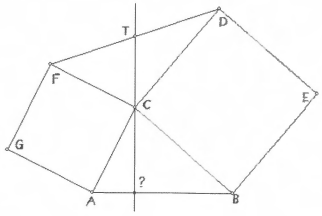
figuur 4 Vermenigvuldigen van $z = 3 + 3i$ met $u = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$: rotatie over $\pi/3$.
Bron: [5], pag. 38.

Klassieke meetkunde

Gegeven zijn de vierkanten $ABCD$ en $AB'C'D'$ (ze hebben hoekpunt A gemeen); zie figuur 5.



figuur 5



figuur 6

De centra van de twee vierkanten noemen we P en Q. De middens van BD' en $B'D$ noemen we achtereenvolgens R en S. Bewijs dat $PSQR$ een vierkant is.

Of:

Gegeven is driehoek ABC in het platte vlak. Men beschrijft buitenwaarts op de zijden AC en BC vierkanten; zie figuur 6. T is het midden van FD. Bewijs dat TC loodrecht staat op AB.

Zien we dit laatste als een figuur in het complexe vlak met oorsprong in C en geven we de punten aan met voor de hand liggende kleine letters, dan komt het gevraagde erop neer te laten zien dat $t = ri(b - a)$ voor een of ander reëel getal r. Nu is $f = -ia$ en $d = ib$, zodat $t = \frac{1}{2}(ib - ia)$. Op een factor 2 na staat hier $i(b - a)$.

Een hoger standpunt

Waarom de stap naar een hoger plan nuttig kan zijn, kun je prima met complexe getallen illustreren. Wat op het eerste gezicht verder van de realiteit af staat en abstracter is, blijkt je juist meer inzicht te geven.

Als je kwadratische vergelijkingen bespreekt, stuit je op uitzonderingen: als de discriminant negatief is, vind je geen (reële) oplossingen. Via complexe getallen vervalt deze uitzonderingspositie, de formule:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

werkt altijd, mits de wortel betekenis is gegeven. En dat is niet alleen handig bij het daadwerkelijk oplossen van veeltermvergelijkingen, maar ook handig bij het oplossen van zekere lineaire differentiaal- en differentievergelijkingen waarin polynoomvergelijkingen als hulpvergelijking optreden.

Via complexe getallen zie je dat e-machten en goniometrische functies verwant zijn; denk maar aan de formule van Euler:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

De rekenregel $(e^{it})^n = e^{i \cdot nt}$ (voor gehele n) levert bekende goniometrische formules.

Zo vinden we voor $n = 2$ door uitwerken van:

$$(\cos t + i \sin t)^2 = \cos 2t + i \sin 2t$$

dat:

$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \quad \text{en} \quad 2 \sin t \cos t = \sin 2t$$

Misschien is het dan niet meer zo verrassend dat de inverse van de e-macht, de logaritme, verwant is aan de inversen van de goniometrische functies (zoals de functie arctan), maar dat voert nu te ver.

Kortom, er zit meer structuur in de wereld van de klassieke functies dan je op het eerste oog zou denken, en complexe getallen helpen je dat in te zien.

Complexe getallen en generaliseren

Een klassiek onderdeel van de wiskunde is de getaltheorie. Enige kennis van gehele getallen zou elke bètaleerling moeten hebben. Bij het onderdeel complexe getallen kun je prima een typische wiskundige activiteit illustreren, in dit geval het onderzoeken of er binnen de complexe getallen een soort gehele getallen bestaan met vergelijkbare eigenschappen als de 'gewone' gehele getallen. Gauss sloeg met succes dat pad in. De zogenoemde *gehelen van Gauss*, complexe getallen van de vorm $a + bi$ met a en b gewone ge-

hele getallen, vertonen een opmerkelijke parallel met de gewone gehele getallen: begrippen als deler, veelvoud en priemgetal hebben zin in deze wereld, en ook stellingen, zoals de stelling over ontbinding in priemfactoren, blijven in deze wereld van kracht.
Deze twee werelden met elkaar vergelijken voor wat betreft begrippen en resultaten vergroot je inzicht, maar laat ook zien hoe grenzen in de wiskunde verlegd zijn.
Vermeldenswaard is ook dat je met deze nieuwe getallen resultaten kunt afleiden over de gewone gehele getallen. Zie daarvoor bijvoorbeeld het artikel van Bram van Asch in [1].

Aan het front

Verscheidene problemen aan het front van het wiskundig onderzoek vereisen kennis van de complexe getallen. Het is goed als leerlingen zien dat wiskunde ook nieuwe ontwikkelingen kent, met open vragen.

- De *Riemann-hypothese* is misschien wel het meest beroemde open probleem in de wiskunde. Het vindt zijn oorsprong in het probleem van de priemgetalverdeling en gaat over de complexe functie:

  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^z}$

  Het vermoeden spreekt uit dat alle (interessante) nulpunten van f op de rechte lijn $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ liggen. Meer hierover is te vinden in [3].
- Het zoeken naar rekensystemen heeft meer opgeleverd dan alleen complexe getallen: *quaternionen* (met vier componenten) en *octaven* (met acht componenten) zijn twee voorbeelden in het verlengde van de complexe getallen. De octaven worden tegenwoordig genoemd in verband met modellen van ons universum in de snaartheorie (zie [2]).

Tot slot

Het onderwerp 'Complexe getallen' biedt allerlei mogelijkheden in het onderwijs zoals boven beschreven (natuurlijk zijn niet alle facetten aan de orde geweest). Hieronder volgt nog een korte rij van kleinere en grotere vervolgopdrachten, waarover leerlingen op allerlei manieren kunnen rapporteren, bijvoorbeeld in postervorm.

- Onderzoek de volgende definitie van (complexe?) vermenigvuldiging:
  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - 3bd, ad + bc)$
  Wat is het verband met het schrijven van gehele getallen in de vorm $m^2 + 3n^2$?
- Onderzoek het verband tussen complexe vermenigvuldiging en het vermenigvuldigen van polynomen van graad 1 gevolgd door deling door $X^2 + 1$.
- Begin met de getallen modulo 3. Introduceer nu 'complexe getallen' bij deze getallen.
- Beschrijf spiegelingen (niet alleen in rechte lijnen door de oorsprong), translaties en rotaties (met als centrum een of ander complex getal) in termen van complexe getallen.
  Onderzoek ook samenstellingen van dergelijke transformaties.
- De quaternionen vormen een uitbreiding van de complexe getallen. Ga na hoe deze getallen gedefinieerd worden en ga na hoe ze gebruikt kunnen worden om rotaties in de ruimte te beschrijven.

Onderzoek hoe je quaternionen kunt gebruiken om stellingen in de ruimtemeetkunde te bewijzen.

- Onderzoek complexe oplossingen van tweedegraads vergelijkingen in twee variabelen. In het bijzonder de kwadratische vergelijking $z^2 = w$.

Literatuur

[1] Bram van Asch (2012): *Getallen als som van kwadraten*. In: *Getallen / Euclides Special 2012*.

[2] John C. Baez, John Huerta (2011): *The strangest numbers in string theory*. In: Scientific American; May 2011.

[3] Roland van der Veen, Jan van de Craats (2011): *De Riemann-hypothese*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

[4] ***www.ctwo.nl***
Via de cTWO-site zijn diverse materialen over complexe getallen te vinden.
Een NLT-module van de Universiteit Utrecht introduceert complexe getallen in de wereld van elektrische stromen.
Diverse universiteiten bieden activiteiten rondom complexe getallen aan.

[5] Kerngroep Wiskunde D (2007): *Wat? Nog meer getallen! / Complexe getallen en toepassingen*. Eindhoven: Faculteit Wiskunde en Informatica, TU/e.

Leerlingentekst

Wat? Nog meer getallen! – leerlingentekst (onder meer) te gebruiken bij dit artikel (zie [5]).
89 pagina's, PDF-bestand van ca. 4,1 Mb
Zie: *www.win.tue.nl/wiskunded/files/public/Complexe_getallen/complex-2007-06.1s.pdf*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

88

Nu maak ik eens van een getal gewag
'Dat wordt vervelend', zegt u bij u zelf
Of maakt het u misschien wat zenuwachtig?

't Is tweemaal vierenveertig, acht maal elf...
Komaan, u bent de rekenkunst toch machtig?
Of komt er een machientje aan te pas?

Het is – jawel, u weet het – achtentachtig
U had al zo'n idee dat dat het was
Zo blijkt weer wat goed onderwijs vermag

Dus achtentachtig is waarom het gaat
Lees door: ik ben nog lang niet uitgepraat.

Drs. P (2008): *88*. Amsterdam: Nijgh & Van Ditmar.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Phi als grondtal

LEER VERHOUDINGEN INTERACTIEF ZIEN!

[Gert Treurniet]

Kun je het *gulden-snede-getal* φ (*phi* ≈ 1,618) als grondtal van een talstelsel gebruiken? Dat kan. Het leidt tot fundamenteel denken over eigenschappen van talstelsels. En het kan worden toegepast bij het leren zien van verhoudingen. Daarvoor is dan wel een nieuw soort liniaal nodig: de *logaritmiaal*. Deze liniaal meet geen afstanden, maar verhoudingen. Je kan de logaritmiaal niet in je zak steken, maar je kunt hem wel gebruiken om architectuur te bekijken. En als we de basis van veel architectuur – de *Modulor* van Le Corbusier – bekijken, blijkt dat daarvoor gebruik gemaakt is van een bijzondere verhouding.

Talstelsels

Talstelsels zijn bedoeld als hulpmiddelen bij tellen, vergelijken, noteren en rekenen. Afhankelijk van de toepassing worden verschillende talstelsels ingezet. Computers werken veelal met het binaire stelsel, mensen werken bijna altijd met het tientallige stelsel.
Ons decimale talstelsel maakt gebruik van het grondtal 10 en van 10 cijfersymbolen: 0 tot en met 9. 0 is het symbool voor 'niets' en 1 tot en met 9 zijn de symbolen voor de eerste 9 hoeveelheden. De waarde van een getal hangt af van de positie van de symbolen in het getal. Zo betekent in het 10-tallig stelsel:

$$\begin{aligned} 34{,}76 &= 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} \\ &= 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}01 \\ &= 30 + 4 + 0{,}7 + 0{,}06 \end{aligned}$$

Phi als grondtal – welke cijfersymbolen?

Als we φ als grondtal willen gebruiken, hoeveel cijfersymbolen moeten we dan gebruiken? Net als bij het decimale stelsel willen we de cijfersymbolen 0 en 1 kunnen gebruiken voor 'niets' en de eenheid. Om aan te geven welk grondtal we gebruiken, gebruiken we de notatie 1_{10} voor 1 in het positiestelsel met grondtal 10 en 1_φ voor 1 in het positiestelsel met grondtal φ.
Dan geldt:
$0_{10} = 0 \cdot 10^0 = 0 \cdot \varphi^0 = 0_\varphi$ en
$1_{10} = 1 \cdot 10^0 = 1 \cdot \varphi^0 = 1_\varphi$
Ook geldt voor φ:
$\varphi_{10} = \varphi \cdot 10^0 = \varphi^1 \cdot 1 = 10_\varphi$
Het lijkt er dus op dat we met twee cijfersymbolen toekunnen. We kunnen het aannemelijk maken: voor grondtal 10 gebruiken we 10 cijfersymbolen. Voor grondtal 16 gebruiken we 16 cijfersymbolen. Algemeen lijkt te gelden: als n een geheel getal is en $n > 1$, gebruiken we n cijfersymbolen. Voor grondtallen die *niet* geheel zijn – bijvoorbeeld 5,5 –

hebben we in ieder geval 6 cijfersymbolen nodig. Het lijkt erop dat we voor φ (dat tussen 1 en 2 ligt) voldoende hebben aan 2 cijfersymbolen. Analoog aan de naam *binair talstelsel* wordt daarom de naam *φ-nair talstelsel* gebruikt.

1-regels

Laten we op een andere manier naar de omzetting $1_{10} = 1_{\varphi}$ kijken. Voor φ geldt in het decimale getalstelsel de relatie:

$\varphi^2 = \varphi + 1$

Links en rechts vermenigvuldigen met φ^{-2} levert:

$1 = 1 \cdot \varphi^{-1} + 1 \cdot \varphi^{-2}$ ...(1)

Bekijk deze relatie alsof het de omzetting is van 1_{10} naar het φ-naire talstelsel. Dan blijkt naast $1_{10} = 1_{\varphi}$ ook te gelden dat $1_{10} = 0{,}11_{\varphi}$. Dus:

$1_{10} = 1_{\varphi} = 0{,}11_{\varphi}$

Er zijn dus *meer* representaties in het φ-naire talstelsel van het getal 1_{10}. En gehele getallen in het decimale talstelsel kunnen breuken worden in het φ-naire talstelsel!

Zijn er nog meer representaties van 1 in het φ-naire stelsel? Er geldt:

$1_{\varphi} = 0{,}1_{\varphi} + 0{,}01_{\varphi}$ ...(2)

Bekijk nu (1) nog een keer. Deze relatie kan door links en rechts vermenigvuldigen met φ^{-2} worden geschreven als:

$1 \cdot \varphi^{-2} = 1 \cdot \varphi^{-3} + 1 \cdot \varphi^{-4}$ ...(3)

Dus $0{,}01_{\varphi} = 0{,}0011_{\varphi}$, en dus geldt, en zie ook relatie (2):

$1_{\varphi} = 0{,}1_{\varphi} + 0{,}01_{\varphi} = 0{,}1_{\varphi} + 0{,}0011_{\varphi} = 0{,}1011_{\varphi}$

Veralgemeniseren van deze procedure levert de volgende zogeheten **1-*uitbreidingsregel*:**

- de rij symbolen 100 in een φ-nair getal mag worden vervangen door de rij 011, zonder dat de waarde van het φ-naire getal daardoor wijzigt.

En andersom, de **1-*reductieregel*:**

- de rij 011 mag worden gewijzigd in 100; de waarde van het φ-naire getal wijzigt niet.

Zo geldt:

$0{,}101011_{\varphi} = 0{,}101100_{\varphi} = 0{,}1011_{\varphi} = 0{,}11_{\varphi} = 1_{\varphi}$

Het getal 1 kan in het φ-naire talstelsel op veel manieren worden geschreven! Op hoeveel manieren kan 1 in het *decimale* stelsel worden geschreven?

Het getal 2 met phi als grondtal

Hoe kunnen we 2_{10} schrijven in het φ-naire talstelsel? Anders gezegd: op welke posities moeten we de nullen en op welke de enen (als coëfficiënt) invullen in de volgende relatie:

$2_{10} = \ldots + ..\varphi^2 + ..\varphi^1 + ..\varphi^0 + ..\varphi^{-1} + ..\varphi^{-2} + \ldots$

De gebruikelijke procedure (hier *restmethode* genoemd) bij het converteren van een getal naar een ander talstelsel is:

1. Zoek de grootste macht en het grootste symbool van het nieuwe talstelsel waarvoor geldt dat het te converteren getal groter dan of gelijk is aan die 'term'.

2. Zoek de volgende macht en het grootste symbool die er nog bij kan worden geteld, waarbij geldt dat het te converteren getal groter is dan of gelijk is aan de som van de gevonden 'termen'.
3. Herhaal deze stappen totdat het verschil tussen het te converteren getal en de som van de termen klein is geworden. Als het verschil 0 is geworden, is de representatie exact.

In dit geval:

Stap 1: $2 \geq 1 \cdot \varphi^1$

Stap 2: $2 \geq 1 \cdot \varphi^1 + 1 \cdot \varphi^{-2}$

Stap 3: $2 = 1 \cdot \varphi^1 + 1 \cdot \varphi^{-2}$

Resultaat: $2_{10} = 10{,}01_\varphi$

Het resultaat van enkele andere conversies is:

$3_{10} = 100{,}01_\varphi$

$4_{10} = 101{,}01_\varphi$

$5_{10} = 1000{,}1001_\varphi$

Optellen en de overige gehele getallen

De kracht van een talstelsel zit onder andere in de uitvoering van de berekeningen. Hoe kunnen we optellen? Dat kan door gebruik te maken van de 1-regels.

$1_{10} + 1_{10} = 1_\varphi + 0{,}11_\varphi = 1{,}11_\varphi = 10{,}01_\varphi = 2_{10}$

In de eerste stap wordt gebruik gemaakt van de 1-uitbreidingsregel om ervoor te zorgen dat er geen enen op de overeenkomstige posities van de twee getallen staan. Daarna wordt opgeteld. In de derde stap wordt gebruik gemaakt van de reductieregel om op de eerder gevonden representatie van 2_{10} te komen.

Deze manier kan ook worden gebruikt om recursief de conversie van het volgende gehele decimale getal naar een φ-nair getal uit te voeren:

$3_{10} = 2_{10} + 1_{10} = 10{,}01_\varphi + 1_\varphi = 11{,}01_\varphi = 100{,}01_\varphi$

$4_{10} = 3_{10} + 1_{10} = 100{,}01_\varphi + 1_\varphi = 101{,}01_\varphi$

$5_{10} = 4_{10} + 1_{10} = 101{,}01_\varphi + 1_\varphi = 101{,}01_\varphi + 0{,}11_\varphi = 101{,}01_\varphi + 0{,}1011_\varphi$

$= 101{,}1111_\varphi = 110{,}0111_\varphi = 1000{,}1001_\varphi$

Ook is in te zien dat met deze procedure de decimale positieve gehele getallen geconverteerd kunnen worden naar een φ-nair equivalent met een eindig aantal cijfers achter de komma.

Tot slot volgt hier nog de conversie van $2\varphi_{10}$ naar φ-nair:

$2\varphi_{10} = 10_\varphi + 10_\varphi = 10_\varphi + 1{,}1_\varphi = 11{,}1_\varphi = 100{,}1_\varphi$

Dus niet alleen de decimale hele getallen, maar ook een veelvoud van het gulden-snedegetal wordt een breuk met een eindig aantal decimalen.

Minimale en maximale representatie

De verschillende φ-naire representaties van een getal kunnen leiden tot verwarring. In de regel worden dan ook afspraken gemaakt voor het gebruik daarvan. Hier zijn dat de zogenoemde *minimale* en *maximale representatie*. Met de 1-reductieregel en de 1-uitbrei-

dingsregel kunnen we afspraken maken over de minimale en maximale representatie van φ-naire getallen.
De minimale representatie is de representatie met het kleinst mogelijke aantal enen. Bij de maximale representatie kijken we naar het grootst mogelijke aantal enen *bij het minimaal aantal* (*niet opeenvolgende*) *nullen*. De 1-regels kunnen worden gebruikt voor de omzetting van minimale naar maximale representatie. Een voorbeeld:

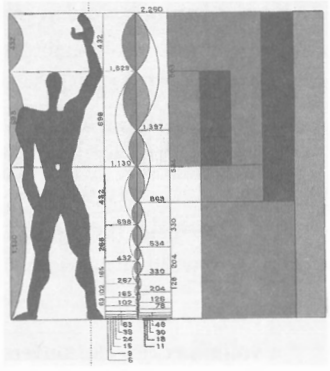
16_{10} = $101000{,}100001_{\varphi}$ (minimaal) = $100110{,}011001_{\varphi}$
= $11110{,}010111_{\varphi}$
= $11101{,}110111_{\varphi}$ (maximaal)

De eerder genoemde restmethode levert de minimale representatie op, want deze methode levert een representatie zonder opeenvolgende enen. Immers, veronderstel dat de rij 011 in de representatie voorkomt.
Uit relatie (2) volgt (door vermenigvuldigen met φ^n):
$\varphi^n = 1 \cdot \varphi^{n-1} + 1 \cdot \varphi^{n-2}$
Anders gezegd: als twee opeenvolgende symbolen in de rij 1 zijn, was in de voorgaande stap van de restmethode de rest voldoende groot om de 1 in plaats van de 0 te vinden.

Toepassingen met phi als grondtal

We hebben hierboven nagedacht over de gevolgen voor representatie van hele getallen met φ als grondtal. φ komt op veel plaatsen terug, onder andere in de architectuur. Is het interessant, mogelijk of zelfs nuttig om daar van φ als grondtal gebruik van te maken? Kunnen we leerlingen hiermee helpen om verhoudingen te leren zien? Laten we een poging doen.

De gulden snede wordt veel gebruikt in de architectuur. Le Corbusier heeft onder de naam 'Modulor' een harmonisch framewerk voor verhoudingen gemaakt, waarbij gebruik wordt gemaakt van de gulden snede (dus van φ). Daarbij is de lengte van de 'gemiddelde' mens als uitgangspunt genomen. De andere lengten zijn daarvan, gebruik makend van de gulden snede, afgeleid; zie figuur 1.



figuur 1 Modulor van Le Corbusier

In deze figuur geldt dat de verhouding tussen de lengte van het bovenlichaam en het onderlichaam (zoals aangegeven in de figuur) zich verhouden als 1 : φ. Hetzelfde geldt voor de lengte van het onderlichaam ten opzichte van de lengte van het lichaam.
Uiteraard zijn deze verhoudingen niet direct af te lezen, want de getallen die in de figuur staan, zijn lengtes en geen verhoudingen. Wat zou er gebeuren als we de verhoudingen in deze figuur zouden zetten, in plaats van de lengtes? Wel, een complicatie is dan, dat er veel verschillende verhoudingen in deze figuur komen. Zo is $1 : \varphi^2$ net de verhouding tussen lengte van het lichaam en het bovenlichaam is. Om nog maar niet te denken aan

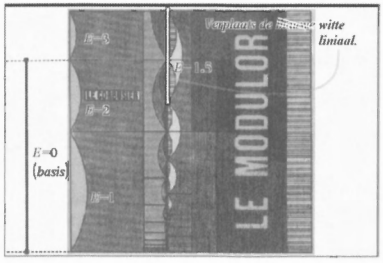
de verhouding van de lengte van onderbeen ten opzichte van lichaamslengte. Laten we eens kijken welke representaties we misschien kunnen gebruiken:

lengte (in mm)	verhouding ten opzichte van lichaamslengte	factor	factor uitgedrukt in φ	exponent van factor met φ als grondtal
1829	1 : 1	1	$1 \cdot \varphi^0 = 1_\varphi$	0
1130	1 : 1,62	0,62	$\varphi^{-1} = 0{,}1_\varphi$	-1
698	1 : 2,62	0,38	$\varphi^{-2} = 0{,}01_\varphi$	-2
432	1 : 4,23	0,24	$\varphi^{-3} = 0{,}001_\varphi$	-3

De eenvoudigste manier is gebruik te maken van de exponent van de factor, als die factor is uitgedrukt als macht van φ. En omdat we het er nog iets eenvoudiger uit willen laten zien, laten we het minteken nog weg. Dan betekent 3 niets anders dan 'de gulden snede is 3 keer toegepast'.
Wiskundig gezien ontstaat deze maat door de logaritme van de verhouding te nemen, met φ als grondtal. Deze logaritmische maat kan in de afbeelding worden gezet. De verhoudingen worden daardoor zeer eenvoudig weergegeven: er komen alleen gehele getallen in te staan. Tenminste, voor de in de tabel aangegeven lengtematen. En deze getallen zijn dan een maat voor de factor ten opzichte van een zelf te kiezen basismaat (in de tabel is dat de lichaamslengte). Een groot voordeel van deze maat is, dat de gevolgen van het kiezen van een andere basismaat eenvoudig zijn: bij elke verkleining van de basismaat met een factor φ, wordt de waarde van alle afgeleide maten met 1 verhoogd.

Is het mogelijk deze maat te meten? Dat zou betekenen dat voor elke basismaat er een aparte schaal moet komen. Dat meetgereedschap noem ik een *logaritmiaal*, omdat vanuit de basismaat met behulp van een logaritme de gemeten lengte moet worden omgezet naar de logaritmische maat.
Als we een geschikte afbeelding van het object hebben én een geschikt computerprogramma, kunnen we die berekening laten uitvoeren.
Een rekenmachine zoals de TI-Nspire is daarvoor ook geschikt. Dat programma biedt (interactief!) de mogelijkheden tot meten, berekenen en weergeven.

De logaritmische maat noemen we *E*, van exponent.
In figuur 2 zien we de instelling van de basismaat (*E* = 0), de *E*-waarde van enkele lijnstukken en ook een bijzondere *E*-waarde: 1,5. Ook de verhouding 1 : 2 komt voor.



figuur 2 Modulor met logaritmiaal

Waar komen deze verhoudingen vandaan? Misschien heeft Le Corbusier er wel aan gedacht toen hij schreef:

'De modulor is een stuk gereedschap, een precisie-instrument. Je kunt het zien als een klavier, een piano, een piano die gestemd is. De piano is gestemd; hoe goed je erop speelt hangt van jou af. De modulor verschaft geen talent of, nog minder, genialiteit. Hij scherpt een saaie geest niet aan. Wel geeft hij de gebruiker de voldoening met maten te werken die principieel goed zijn. Maar uit het onbeperkt aantal combinaties van de modulor moet je zelf een keus maken.'

En… heeft een piano ook niet een aantal niet-harmonische verhoudingen?

Zelf experimenteren

Op de website van *T³ Nederland*, de internationale organisatie die in Nederland de trainingen voor Texas Instruments laat uitvoeren door APS, staat een en ander online:
« *www.t3nederland.nl* » ; kies daarna, links in het menu, 'Materiaal'.

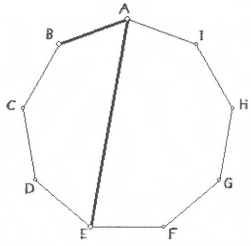
Gebruikte bronnen

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio_base*
- *www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phigits.html*
- *www.goldenmuseum.com*
- *www.pandd.demon.nl/logspiraal.htm*

Door de communicatie met Klaske Blom en Marjanne de Nijs is dit artikel beter geworden dan ik ooit had verwacht.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

EEN VERHOUDING IN EEN 9-HOEK



Van een regelmatige 9-hoek $ABC\ldots I$ is $\dfrac{AB}{AE} = s$.

Dan is $s^3 - 3s + 1 = 0$.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Breuken

DE SINGAPORESE METHODE

[Lonneke Boels, Marjanne de Nijs]

Introductie

De leerlijn breuken-verhoudingen-procenten-decimale getallen is op basisschool niet af (zie [1] en [5]). In dit artikel beschrijven we een leerlijn echte breuken met voorbeelden uit methoden van de basisschool. Daarbij kiezen we één schematische voorstelling, namelijk het strokenmodel uit de *Singaporese methode*.

Echte breuken en gemengde breuken

Bij vakdidactiek rekenen maken we onderscheid tussen echte breuken en gemengde breuken.

Echte breuken zijn breuken met alleen een teller en een noemer. Bijvoorbeeld: $\frac{6}{7}, \frac{2}{8}$.

Gemengde breuken (of gemengde getallen) zijn gehele getallen waarbij een breuk opgeteld is. Bijvoorbeeld: $1\frac{2}{3}, 3\frac{4}{8}$.

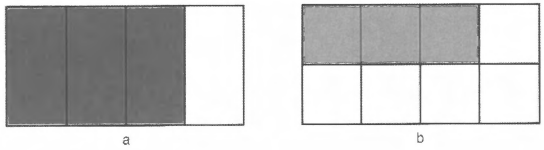
Soms worden ook *onechte* breuken nog apart onderscheiden. Als je de helen uit deze onechte breuken haalt, krijg je gemengde breuken: $\frac{14}{3}, \frac{7}{6}$.

Hoe kunt u dit artikel gebruiken? Als u eenmaal weet tot waar uw leerlingen zijn gekomen in de leerlijn breuken, kunt u dit artikel gebruiken om de leerlijn in de klas verder af te maken. Dat kan tijdens een lessenserie, een wekelijks bijspijkeruurtje of een projectweek. Het effectiefst is om – net als op de basisschool – een of twee weken lang elke ochtend 1½ uur aan rekenen te besteden, maar dat is op veel scholen praktisch onmogelijk. Toch noemen we het hier, omdat er nu eenmaal scholen zijn die deze mogelijkheid wél hebben, zoals bijvoorbeeld de middelbare Vrije Scholen (die hebben al zo'n rooster), scholen met dagelijkse keuzewerkuren of daltonuren, en scholen met themaweken. Ook op een aantal vmbo-scholen zijn er lesroosters die hierbij beter aansluiten.

In dit artikel werken we met het strookmodel uit de Singaporese methode. Waarom we hier kiezen voor dat strookmodel? Een aantal redenen:

- het strookmodel kent u al uit de wiskundeboeken; zie bijvoorbeeld figuur 1 (uit *Getal & Ruimte*; zie [14]);
- veel leerlingen kennen het model ook van de basisschoolmethoden;
- het model is zeer breed inzetbaar, veel breder dan alleen breuken;
- het model ondersteunt het abstracter leren denken;
- Singapore is in de wereld het best scorende land op rekengebied en gebruikt dit model als centraal model.

038 In figuur 2.13a is $\frac{3}{4}$ van de rechthoek rood.
In figuur 2.13b is $\frac{1}{2}$ van dit rode deel blauw.



figuur 2.13

a Het hoeveelste deel van de rechthoek is blauw?
b Hoeveel is $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$?

figuur 1

Als u het model wilt toepassen in uw lessen, is het goed om te weten dat het strookmodel niet de enige oorzaak is voor het uitstekende rekenresultaat in Singapore. Enkele andere zijn:

- Per rekenperiode wordt één onderwerp behandeld. Dat ene onderwerp wordt helemaal uitgediept gedurende een aantal lessen achter elkaar.
- Door het volledig uitdiepen van één onderwerp is weinig herhaling nodig van voorgaande stof, waardoor een grote tijdwinst wordt behaald.
- De leerlingen maken niet alleen sommetjes, maar onderzoeken het onderwerp ook echt.
- Alle leraren krijgen een uitgebreide en voortdurende nascholing van ca. 100 uur per schooljaar. Uit een onderzoek in de Verenigde Staten blijkt dit de belangrijkste factor te zijn die het succes verklaart. Zonder deze nascholing wordt het resultaat niet behaald (zie [1]).

Leerlijn breuken

Net als in Nederland is de leerlijn opgebouwd uit drie niveaus:

1. concreet;
2. schematisch;
3. formeel.

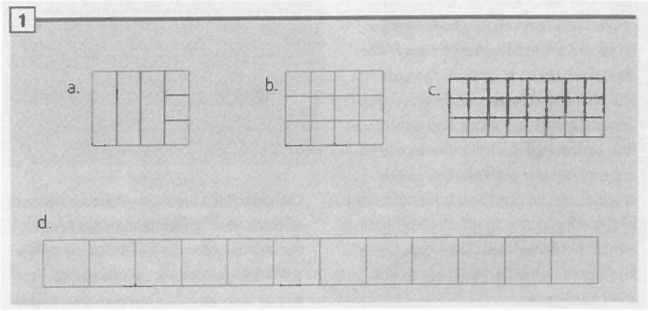
Het schematische niveau wordt ook wel *picturaal niveau* genoemd. Deze opbouw wordt overigens niet alleen voor breuken toegepast maar voor *alle* rekenonderwerpen. Vrijwel alle basisschoolboeken in Nederland gebruiken deze indeling, zoals *Wereld in Getallen*, *Pluspunt*, *RekenRijk*, *Wis en Reken*, *Rekenwonders* (gebaseerd op de Singaporese methode; zie [8]). De ene methode is hierin consequenter dan de andere. Alleen de methode *Reken Zeker* (van Noordhoff) kent een andere opbouw, maar die methode wordt nog nauwelijks gebruikt.

Deze indeling wijkt flink af van de opbouw van veel wiskundemethoden in het voortgezet onderwijs, waarin vaak met kale opgaven wordt begonnen (formele niveau). De concrete opgaven (toepassingsopgaven) worden als de lastigste beschouwd. Er zijn verschillende visies op dit onderwerp. Enerzijds is er een groep die stelt dat wij als wiskundedocenten verder moeten gaan met het geleerde van de basisschool en ons vooral moeten richten op het leren verder abstraheren van de kennis (zie [2] en [3]). Anderzijds is er een

groep die vindt dat we met kale sommen moeten beginnen en vooral niet met toepassingen (zie [4]). Het strookmodel is – naar ons idee – inzetbaar als lesmateriaal voor allebei.

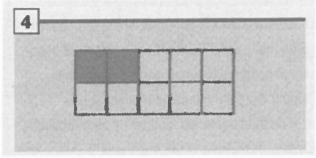
Introductie breuken aan de hand van het strookmodel

Wie met leerlingen werkt die helemaal niets van breuken hebben begrepen, zal op het concrete niveau willen starten. In een artikel in *Volgens Bartjens* staat hiervoor een heel leuk voorbeeld met een cake (zie [6]). Leerlingen krijgen de vraag hoe ze een cake 's ochtends moeten snijden, zodat ze deze 's middags bij thuiskomst met vrienden of vriendinnen, zowel met z'n drieën als met z'n vieren, kunnen opeten.
Aan een groep pabo-studenten is dezelfde vraag voorgelegd met moeilijker getallen: 8 of 9 studenten. Iedere leerling krijgt een blad met daarop verschillende lege even grote rechthoeken (de cake) met de vraag om te tekenen hoe je die zou verdelen. Overleggen mag! Dit levert veel verschillende oplossingen op (zie figuur 2). Omdat de auteur van het artikel geen vaste grootte had gebruikt, zijn de vormen verschillend, wat de nabespreking lastiger maakt. Natuurlijk wordt na afloop de cake aangesneden! Leerlingen ontdekken hier dan dat 3 stukken van de 12-cake evenveel is als 6 stukken van de 24-cake.



figuur 2 Enkele resultaten van een les over een cake

Een leerling at een stuk van een cake op; zie figuur 3 (donker op de tekening). In het artikel vraagt de auteur aan zijn klas welk deel is opgegeten. 'Sommige leerlingen spraken van tweetiende deel, andere leerlingen van een vijfde deel' (zie [6]). Wie heeft gelijk? Zo ontdekte de klas dat eenzelfde breuk blijkbaar verschillende namen kan hebben.



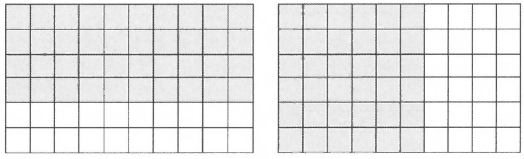
figuur 3 Welke naam hoort bij deze breuk?

Merk op dat we nu al beland zijn op het schematische niveau met dit strokenmodel. Vaak wordt in de loop van zo'n les ook al de formele notatie van een breuk behandeld.
Een andere moeilijkheid die leerlingen hebben met breuken, met name op het vmbo, is dat $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$: '*6 is toch meer dan 5?*'
Op de basisschool van mijn dochter (LB) had de juf daarvoor een uitstekende oplossing gevonden. Ze deelde de klas in groepen. Een groep van 2 leerlingen, een groep van 3

leerlingen, enzovoort, tot en met 7. Elke groep kreeg 1 pannenkoek, die ze onderling eerlijk moesten verdelen. Dat bracht nogal wat emoties te weeg, want de groep met 2 leerlingen kreeg natuurlijk veel meer pannenkoek dan de groep met 7 leerlingen, waarin uiteraard mijn zeer verontwaardigde dochter zat. Aan het einde kreeg iedereen nog een eigen pannenkoek, als pleister op de wonde. Maar mooi, dat zij nooit meer vergeten dat $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

Een van de krachtige onderdelen van de Singaporese methode is, dat leerlingen ook zelf onderzoekjes kunnen uitvoeren en daardoor allerlei ontdekkingen doen. Een – zelf bedacht – voorbeeld van zo'n onderzoek zou het volgende kunnen zijn. In figuur 4 is $\frac{4}{6}$ en $\frac{3}{5}$ ingekleurd. Om dit onderzoek te stimuleren zou u uw leerlingen de volgende vragen kunnen stellen:

- Hoeveel is er over?
- Kun je dat nog verder vereenvoudigen?
- Wat valt je op?
- Geldt dat altijd? Gebruik lege ruitjesbladen om nog een paar breuken te tekenen en deze vraag te onderzoeken.



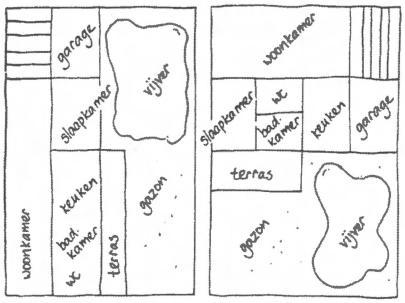
figuur 4

De bedoeling is, dat leerlingen hier ontdekken dat je er altijd '2' overhoudt. En omdat $\frac{2}{6}$ kleiner is dan $\frac{2}{5}$, is dus $\frac{4}{6}$ groter dan $\frac{3}{5}$.

Een vraag als 'Wat is meer, $\frac{25}{36}$ of $\frac{24}{35}$?', is een van de vele vragen over breuken die pabostudenten krijgen bij hun toelatingstoets. Net als veel leerlingen op het vmbo en mbo hebben studenten nogal eens moeite met deze vragen. Met de bovenstaande 'ruitjesmethode' hebben ze een hulpmiddel om deze en vergelijkbare vragen op te lossen. Maar er is nog een ander probleem dat o.a. Bruin-Muurling (zie [2]) in haar proefschrift ook benoemt. Leerlingen leren breuken op de basisschool vooral kennen als een relatieve maat. Een kwart van een cake is meer dan een derde van een klein koekje. Je mag breuken, net als procenten, dus niet zomaar vergelijken. Maar als wij, wiskundedocenten, over breuken praten, hebben we het vaak over rationale getallen waarmee je kunt rekenen; over absolute getallen dus, die je wél kunt vergelijken. In een eerder artikel in *Euclides* (zie [5]) is al aangegeven dat het noodzakelijk is, dat wij in het vervolgonderwijs de breukenleerlijn afmaken en zo dit gat dichten.

Een andere manier om verdieping aan dit onderwerp te geven is een verhaal te vertellen over een architect (zie [7]). Het verhaal gaat ongeveer zo. De architect mag een plan maken voor een stuk bouwgrond. Geef de leerlingen allemaal een A4 (de bouwgrond) en laat ze tijdens uw verhaal meevouwen. De eerste aanwijzing is bijvoorbeeld dat het huis

even groot moet worden als de tuin. Sommigen zullen het blad in de lengte vouwen, anderen in de breedte. Dat is prima! Vervolgens komt de indeling van het huis, te beginnen met het delen in vier even grote delen (eventueel via tweemaal halveren). Een van deze vier delen wordt voorlopig bestemd voor de garage, de andere drie delen worden woonhuis. De helft van het woonhuis wordt vervolgens woonkamer en in de rest komen de keuken, badkamer en slaapkamer die elk even groot zijn. De helft van de badkamer wordt wc; de andere helft blijft badkamer. De garage is te groot, daarom wordt de helft hiervan oprijlaan. De helft van de tuin is vijver; de andere helft is gazon en terras. Het gazon is hiervan driekwart deel en het terras een kwart deel. Daarna trekken de leerlingen de vouwen met een liniaal over en schrijven ze de namen in de delen. Het kan er dan uit zien als in figuur 5.



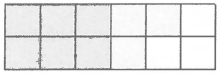
figuur 5

Meer didactische aanwijzingen bij dit breuken vouwen vindt u in het originele artikel. Het tijdschrift is in de bibliotheken van pabo's te vinden en in te zien.

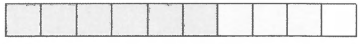
Rekenen met breuken

Optellen

Ook bij het optellen van breuken is het verstandig om eerst weer bij het concrete niveau te beginnen. Docenten uit vmbo weten al lang dat dit werkt, maar ook op de havo en het vwo kan dit een les leuker maken en tegelijkertijd een didactisch leerdoel dienen. Koop bijvoorbeeld eens repen chocolade (met 12 of 24 stukjes!) en geef die aan groepjes van 3 of 4 leerlingen. Bedenk samen met de klas enkele opgaven die je hiermee kunt maken, bijvoorbeeld: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ of $\frac{6}{12}+\frac{3}{12}=\frac{9}{12}$. Laat elke opgave tekenen op een strook. Zorg dat de stroken allemaal even lang zijn. Hiervoor zijn twee mogelijkheden, elk met hun eigen didactische voor- en nadelen; zie figuur 6 en 7.



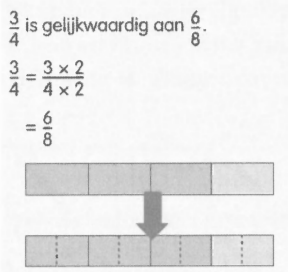
figuur 6



figuur 7

In de methode voor de basisschool gebaseerd op het Singaporese rekenen, die op dit moment ontwikkeld wordt, wordt figuur 7 gebruikt (zie [8]). Figuur 6 wordt bewaard voor het vermenigvuldigen van breuken.

In het vervolg van de les (of in de volgende les) kan dan met de strook zonder context worden gerekend. Naast makkelijke opgaven zoals $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$ komen ook lastiger opgaven aan bod, waarbij één of beide noemers eerst gelijknamig moeten worden gemaakt. Ook dit kan allemaal met stroken worden uitgerekend en uitgelegd. Een leerling heeft bijvoorbeeld uitgerekend dat $\frac{4}{8}+\frac{1}{4}=\frac{6}{8}$. Het strokenmodel laat nu duidelijk zien, waarom de ene leerling met vierden kan rekenen en de andere met achtsten (zie figuur 8).



figuur 8 Gelijkwaardige breuken uitgelegd met het strokenmodel (Bron: [8])

Wat ook hier weer opvalt, is dat het schematische en formele niveau hand in hand gaan. Uiteindelijk willen we dat leerlingen alleen het formele niveau beheersen, maar bij lastige opgaven is het prima als ze op het strokenmodel 'terugvallen'. Eindig de lessenserie altijd met de kale opgaven, zodat leerlingen ook de kans krijgen om tot het formele niveau te komen.

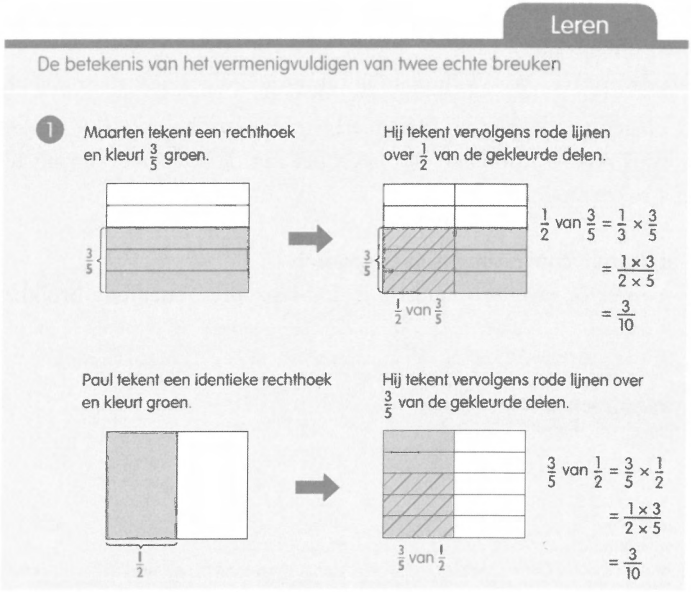
Aftrekken

Inmiddels zijn we bij het aftrekken aanbeland en kan het concrete niveau achterwege worden gelaten. Een aftrekking met het strokenmodel kan worden weergegeven als in figuur 9. Ook hier wordt de les afgesloten met kale opgaven om de gewenste niveauverhoging te bereiken.

figuur 9 Aftrekking met strokenmodel (Bron: [8])

Vermenigvuldigen met echte breuken

Bij het vermenigvuldigen van echte breuken komt het strokenmodel zeer goed van pas. Het voorbeeld in figuur 10 spreekt verder voor zich.



figuur 10 Vermenigvuldigen met echte breuken (Bron: [8]).

Wat opvalt aan de vragen die daarna worden gesteld, is dat ze leerlingen aan het denken zetten. Zo is de eerste vraag: Hebben Paul en Maarten hetzelfde antwoord? Verder laten ze leerlingen ook noteren dat $(\frac{1}{2}\text{van}\frac{3}{5}) = (\frac{3}{5}\text{van}\frac{1}{2})$. Er wordt gekeken naar hoeveel delen de rechthoeken bevatten en hoeveel delen gearceerd zijn. In de ideale methode volgen nu eerst enkele opgaven met het strokenmodel en daarna enkele kale sommen. Bijzonder genoeg wordt dit in [8] juist omgedraaid.

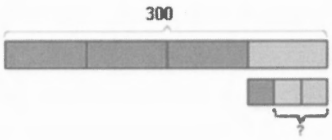
Een mogelijk onderzoek bij deze opgaven is leerlingen enkele producten van steeds twee getallen groter dan 1 te laten uitrekenen en evenzo enkele producten van twee getallen tussen 0 en 1. Wat valt op? Inderdaad: bij 5 × 17 is de uitkomst groter dan de afzonderlijke factoren, bij $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ is de uitkomst kleiner dan de afzonderlijke factoren. Met gebruik van het strokenmodel is dit ineens ook heel logisch. Het is belangrijk leerlingen regelmatig op een dergelijke manier over de opgaven te laten nadenken. In de wiskundeboeken wordt dit heel weinig gedaan, in de rekenboeken, voor zover bekend, eigenlijk nooit. De Singaporese methode is de eerste rekenmethode waarin we dergelijke opgaven tegenkomen (zie [8]).

Delen met echte breuken

Ook het delen met echte breuken is prima te doen met het strookmodel. Tijdens de masterclass Singaporees Rekenen (zie [9]) is Ban Har Yeap (leerkracht groep 4 en docentenopleider in Singapore) gevraagd naar hoe hij dit aanpakt. Een eenvoudig voorbeeld als $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ kunt u vermoedelijk zelf wel uitwerken met het strokenmodel. In veel basisschoolmethoden (zoals in *Wereld in Getallen*) wordt gewerkt met een verhoudingstabel. Dat komt natuurlijk op hetzelfde neer, maar is al veel abstracter. De regel die kinderen hierbij

aanleren, is: *Moet je delen? Zorg voor helen!* Zo wordt de deling $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ (al dan niet via een verhoudingstabel) omgezet in 2 : 1.
Maar wat nu als de opgave $24 : 3\frac{1}{3}$ luidt? Dus als er gedeeld wordt door een zogenoemd gemengd getal of gemengde breuk? Ook hierbij is het strokenmodel – en de verhoudingstabel trouwens ook – bruikbaar. We laten het aan de lezer over om uit te puzzelen hoe dit met het strokenmodel gaat.

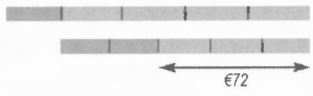
Toepassingen bij lastige contextopgaven en raadsels
Ook bij lastige contextopgaven en raadsels is de Singaporese methode bruikbaar; zie figuur 11 en 12.



Voorbeeld
Een bakkersbedrijf maakte 300 taarten. Daarvan werd 3/4 verkocht aan bakkerijen in de buurt. 1/3 van wat overbleef werd later door klanten opgehaald. Hoeveel taarten bleven er die dag over?
Het strookmodel maakt gegevens visueel en brengt orde aan in de informatie die de leerling wordt gepresenteerd. Het communiceert hierdoor grafisch met de leerling en laat zien hoe die informatie gebruikt dient te worden om een probleem

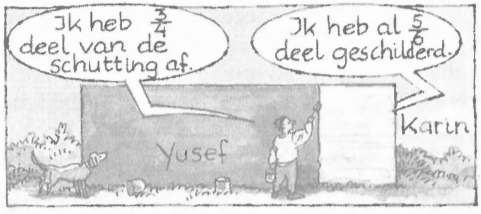
figuur 11 Uit: [10]

Laura besteedde 20% van haar geld aan een jurk. Zij gaf 2/5 van het overgebleven bedrag uit aan een boek. Zij had uiteindelijk nog €72 over. Hoeveel geld had Laura eerst?



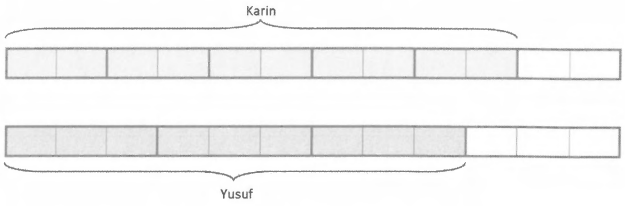
figuur 12 Uit: [11]

Een ander voorbeeld komt uit *Rekenen is leuker als je denkt* van Marjolein Kool en Ed de Moor (zie [12]): Wie is bij het schutting verven het verst gevorderd? En hoeveel verder is hij of zij?



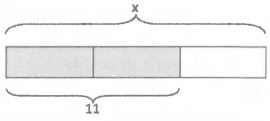
figuur 13 Schutting verven

Het strookmodel laat zich eenvoudig opstellen, zodra de gemeenschappelijke factor van 12 is 'ontdekt'. Het antwoord op beide vragen is dan direct af te lezen; zie figuur 14.



figuur 14

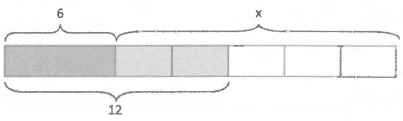
Het strokenmodel biedt ook een prachtige manier om leerlingen te helpen met het oplossen van lineaire vergelijkingen. Neem bijvoorbeeld het vraagstuk uit het artikel van Truus Dekker en Martin Kindt (zie [18]): $\frac{2}{3}x=11$. Met het strokenmodel (zie figuur 15) is het nu heel logisch dat je eerst 11 door 2 moet delen en daarna het antwoord maal 3 moet doen om x te vinden.



figuur 15

De regel 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' ligt dus nu voor het ontdekken. Maar pas op: niet voorzeggen! Laat leerlingen maar uitrekenen hoeveel $\frac{3}{2}\times 11$ is, en laat ze *zelf* verklaren hoe het komt dat beide antwoorden gelijk zijn.

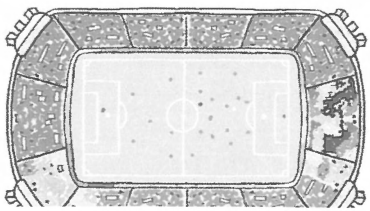
Of nog lastiger, lineaire vergelijkingen met een ander beginwaarde dan 0. Ook dit kan met het strookmodel. Neem bijvoorbeeld de vergelijking $\frac{2}{5}x+6=12$. Naar aanleiding van de vorige opgave kunnen leerlingen zelf gaan puzzelen hoe het strookmodel eruit gaat zien; zie figuur 16. De eerste stap naar de balansmethode is dan gezet.



figuur 16

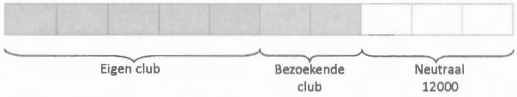
Tot slot een 'verhaaltjesopgave' uit een leerboek van *Getal @ Ruimte* (zie [14]) in figuur 17.

> Een stadion zit stampvol toeschouwers.
> De helft is supporter van de thuisclub.
> Een vijfde deel van de toeschouwers is supporter van de bezoekende club.
> De overige 12 000 toeschouwers zijn neutraal.
> Zoek uit hoeveel toeschouwers in het stadion zitten.



figuur 17 Een opgave uit [14]

Het bijbehorende strookmodel staat in figuur 18. Nadat leerlingen dit opgesteld hebben, is het berekenen van het totaal aantal toeschouwers geen probleem meer.



figuur 18 Totaal aantal toeschouwers het in stadion

Het moge duidelijk zijn dat we nog lang niet alle mogelijkheden van het strookmodel besproken hebben, of zelfs maar ontdekt.
Maar we hopen, dat u voldoende geïnspireerd bent om nu verder zelf aan de slag te gaan.

Bronnen en literatuur

[1] Brenda van de Fliert, Dook Kopmels (2011): *Naar een opbrengstgerichte rekendidactiek. Net als in Singapore.* In: *Jeugd School en Wereld*; jrg. 95, nr. 7 (maart 2011).

[2] Geke Bruin-Muurling (2010): *The development of proficiency in the fraction domain.* Proefschrift TU/e (december 2010).

[3] Een korte samenvatting van de resultaten uit het proefschrift wat betreft breuken. Zie: « *http://sync.nl/leerling-struikelt-over-breuk-in-het-breukenonderwijs/* ».

[4] Een onderzoek aan de universiteit van Ohio naar het gebruik van voorbeelden in de wiskunde. Zie: « *http://sync.nl/wiskunde-duidelijker-zonder-voorbeelden/* ».

[5] Lonneke Boels (2011): *Breuken op de basisschool.* In: *Euclides*; jrg. 86, nr. 6 (mei 2011).

[6] Michael Koren: *Een heldere kijk op cake.* In: *Volgens Bartjens*; jrg. 21, nr. 4 (2001/2002).

[7] *Kinderen vouwen breuken.* In: *Willem Bartjens*; jrg. 12, nr. 3 (1992/1993).

[8] *Rekenwonders* – rekenmethode voor de basisschool van Bazalt/HCO.
Zie: « *www.bazalthco.nl/rekenwonders* »

[9] Ban Har Yeap: *Masterclass Singaporees rekenen.* Utrecht, 27/28 september 2011. Organisatie: Bazalt/HCO (*www.bazalthco.nl*).

[10] Lionel Kole: *Rekenen volgens de Singapore aanpak.* Te downloaden via:
www.bazalthco.nl/brein-artikelen/doc_download/641-artikel-rekenen-volgens-de-singapore-aanpak

[11] Joost Maarschalkerweerd, Lionel Kole (2011): *Rekenen-wiskunde in Singapore / Het oplossen van problemen centraal.* In: *Volgens Bartjens*; jrg. 30, nr. 3 (januari 2011).

[12] M. Kool, E. de Moor (2010): *Rekenen is leuker ~~dan~~ als je denkt.* Amsterdam: Bert Bakker.

[13] T. Dekker, M. Kindt (2006): *Wat doen we (niet) met breuken.* In: *Nieuwe Wiskrant* 26(2), december 2006. Te downloaden via:
www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/7020.pdf

[14] *Getal & Ruimte*, deel 1 havo/vwo. Houten: Educatieve Partners Nederland BV; p. 47 (2002: eerste druk, eerste oplage).

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Over de auteurs
EN OVERIGE MEDEWERKENDEN

Bram van Asch werkt als universitair docent aan de Technische Universiteit van Eindhoven, op het Department of Mathematics and Computing Science. Hij is daar ondermeer betrokken bij de eerstegraads lerarenopleiding.
E-mailadres: *A.G.v.Asch@tue.nl*

Erik Atsma is docent wiskunde op het Hervormd Lyceum West in Amsterdam.
E-mailadres: *e.atsma@hlw.nl*
Barbara, **Bugra**, **Ismail**, **Manal**, **Oumaima** en **Wissam** zaten tijdens het ATOM-project in klas 2vt (vwo, tweetalig onderwijs) van het Hervormd Lyceum West.

Frits Beukers is hoogleraar algebra aan Universiteit Utrecht met als specialisaties getaltheorie, algebraïsche meetkunde en hypergeometrische functies.
E-mailadres: *f.beukers@uu.nl*

Rob Birkhoff heeft bijna 40 jaar als wiskundedocent gewerkt aan het Berlage Lyceum in Amsterdam en is daarnaast de laatste tien jaar in diverse andere functies binnen zijn school werkzaam geweest. Hij is nu met pensioen, en geniet ervan!
E-mailadres: *rob.birkhoff@gmail.com*

Frederik van der Blij was van 1955 tot aan zijn emeritaat in 1988 hoogleraar wiskunde aan de Rijksuniversiteit Utrecht. Hij was, in 1983, een van de oprichters van de Stichting Ars et Mathesis, die de belangstelling bevordert voor kunst die haar inspiratie vindt in de wiskunde.
Correspondentie over zijn artikel kan per e-mail verlopen via de *Euclides*-redactie [1].

Klaske Blom is docente wiskunde aan de Open Schoolgemeenschap Bijlmer te Amsterdam en was in de jaren 2008-2011 hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *klaskeblom@gmail.com*

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum in Delft, geeft nascholing aan basisschoolleerkrachten via de pabo van de Haagse Hogeschool en is directeur van Alaka. In haar bedrijf Alaka geeft zij onder meer nascholingscursussen rekenen aan docenten van scholen voor vmbo, mbo, havo en vwo.
E-mailadres: *info@alaka.nl*

Alex van den Brandhof was van 2001 tot 2010 docent wiskunde op het Vossius Gymnasium te Amsterdam. Sinds 2011 werkt hij op Gymnasium Leonhard te Basel. Daarnaast is hij sinds 2001 eindredacteur van het tijdschrift *Pythagoras* en sinds 2006 vakredacteur wiskunde van *Kennislink*.
E-mailadres: *brandhof@gmail.com*

Pim Diemitz is een pseudoniem. De naam van de auteur is evenwel bij de redactie van *Euclides* bekend.
Correspondentie over zijn artikelen kan verlopen via de *Euclides*-redactie [1].

Gerrie van Doren is docent lwt-aka (maatwerktrajekten in het vmbo, basis) op het Elde College in Schijndel.
E-mailadres: *gvandoren@gmail.com*

Gaston Dorren is schrijver, journalist en onder meer redacteur van *Jeugd en Co*, vakblad voor professionals in de jeugdzorg.
E-mailadres: *aan@gastondorren.nl*
URL: *www.gastondorren.nl* en *www.taaltoerisme.nl*

Maarten Evenblij is freelance wetenschapsjournalist en werkt als programmamaker. Zijn interessegebieden lopen uiteen van (bio)medisch/chemisch en milieu tot kleinste deeltjes en astrologie.
E-mailadres: *evenblij@xs4all.nl*

Luc Gheysens werd in 2006 zo oud als het getal gevormd door de laatste twee cijfers van zijn geboortejaar en heeft meer dan 30 jaar ervaring als wiskundeleraar. Hij studeerde Latijn-Griekse humaniora en wiskunde.
Hij werkt momenteel als pedagogisch adviseur wiskunde in Vlaanderen en heeft een levendige belangstelling voor recreatieve wiskunde, problem solving, euclidische meetkunde, wiskunde-didactiek en functioneel ict-gebruik. Je ontmoet hem op zijn wiskundeblog:
www.gnomon.bloggen.be
E-mailadres: *lucgheysens@yahoo.com*

Job van de Groep is amateur-goochelaar en was tot 2007 schooldecaan en docent wiskunde aan het Oosterlicht College in Nieuwegein. Met lesgeven begon hij in 1968 tijdens zijn studie in Leiden. Op jeugdige leeftijd is hij gefascineerd geraakt door het goochelen. Trucs met getallen hebben zijn speciale belangstelling. Hij schreef daarover het boekje *Gegoochel met getallen* (EPN, 2006), met de bedoeling collega-docenten iets in handen te geven om een ludieke draai aan een reken- of wiskundeles te geven.
E-mailadres: *jvdgroep@planet.nl*

Jan Hogendijk werkt aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht. Zijn onderzoeksinteresses zijn geschiedenis van de wiskunde en aanverwante wetenschappen in het Islamitisch cultuurgebied en in Nederland tot ca. 1850.
E-mailadres: *J.P.Hogendijk@uu.nl*
URL: *www.jphogendijk.nl*

Kees Hoogland werkt op het APS in Utrecht als senior onderwijsadviseur op het gebied van rekenen, wiskunde en gecijferdheid. Hij doet onder andere onderzoek naar gecijferdheid.
E-mailadres: *K.Hoogland@aps.nl*
URL: *www.gecijferdheid.nl*

Evi van Huuksloot is 8 jaar en zit in groep 5 van 'het Octaaf' in Krimpen aan den IJssel.
Toen haar opa iets over de *Euclides Getallen Special* vertelde, zei ze: 'O, daar kan ik ook wel een verhaaltje over schrijven.' En toen het klaar was: 'Ik heb het helemaal zelf bedacht en geschreven.'
E-mailadres: 'Dat heb ik nog niet!'

Dick Klingens is eindredacteur van *Euclides* en was, tot aan zijn pensionering (in mei 2010), lerarenopleider en schoolleider, en leraar wiskunde aan het Krimpenerwaard College in Krimpen aan den IJssel.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*
URL: *www.pandd.nl*

Paul Koene is docent en onderzoeker gedrag en welzijn van dieren bij Wageningen UR Livestock Research, en lid van het Wageningen Centre for Animal Welfare and Adaptation (CAWA).
E-mailadres: *paul.koene@wur.nl*

Anne Laning RA/RC is hoofd Investment Accounting & Control van TKP Investments in Groningen. Hij is een gedreven puzzelaar en o.a. deelnemer aan de jaarlijkse 'King Williams Trouw Test' en heeft, in samenwerking met anderen, een vergelijkbare puzzel samengesteld.
E-mailadres: *annelaning@hetnet.nl*

Hans van Maanen is wetenschapsjournalist. Hij verzorgt een wekelijkse rubriek over dubieuze wetenschap voor *de Volkskrant* en schrijft voor onder meer de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, *Plus Magazine* en *Natuurwetenschap & Techniek*. Hij doceert wetenschapsjournalistiek aan verschillende universiteiten.
E-mailadres: *hans@vanmaanen.org*
URL: *www.vanmaanen.org*

Marjanne de Nijs is docent aan het Cosmicus College te Rotterdam. Daarnaast is ze hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *marjanne.de.nijs@gmail.com*

Rob van Oord is docent wiskunde aan het Coenecoopcollege in Waddinxveen.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Bart de Smit is verbonden aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden.
E-mailadres: *desmit@math.leidenuniv.nl*

Daaf Spijker was achtereenvolgens actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider, schoolleider en (opnieuw) wiskundeleraar.
Nu is hij 'lijfrente-genietend', maar daarbij nog steeds geïnteresseerd in zijn 'eerste' vak en in andere deelgebieden van de wiskunde (zoals de meetkunde en de geschiedenis van de wiskunde).
E-mailadres: *spijker.daaf@gmail.com*

Hans Sterk is docent wiskunde en lerarenopleider aan de Technische Universiteit Eindhoven.
E-mailadres: *sterk@win.tue.nl*

Rob Tijdeman is als emeritus hoogleraar verbonden aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden. Zijn interessegebied beslaat delen van de getaltheorie en de discrete wiskunde. Verder vervult hij nog enkele bestuurlijke taken, o.a. als bestuurslid van het PWN (Platform Wiskunde Nederland).
E-mailadres: *tijdeman@math.leidenuniv.nl*

Gert Treurniet is docent wiskunde aan Christelijk Gymnasium Sorghvliet in Den Haag, educatief consulent voor Texas Instruments, en heeft gevoel voor verhoudingen.
E-mailadres: *g.treurniet@xs4all.nl*

Peter van Wijk is projectleider van cTWO en lid van de werkgroep APS-Rekenen.
E-mailadres: *P.vanWijk@uu.nl*

Bart Windels is lerarenopleider aan de Karel de Grote-Hogeschool in Antwerpen (België). Verder is hij coördinator van Kangoeroe Vlaanderen en leider van het Belgisch team op de Internationale Wiskunde Olympiade.
E-mailadres: *Bart.Windels@telenet.be*

Overige medewerkenden

Aan deze *Euclides Special 2012* werkten verder mee:

Michel van Ast
Rob Bosch
Wim Laaper
Joke Verbeek
Heiner Wind
allen redactielid van *Euclides*,

en ook:

Hans Daale
Maik de Feijter

Noot

[1] E-mailadres van de redactie van *Euclides*: *redactie-euclides@nvvw.nl*

≡ ≡ ≡ ≡ ≡

GETAL

o -len, -letje **1** hoeveelheid; aantal: een groot ~ aantal; *ten getale van 15*; *in groten getale*; (*rek.*) *een benoemd* ~ bijv. 10 appels: *gelijknamige ~len* uit gelijknamige eenheden samengesteld; *een even* ~; *een heel* ~; *een gebroken* ~ breuk; *een heilig* ~ met zeer bijzondere, goddelijke, heilige kracht en betekenis, één, drie, zeven e.a.; **2** voorstelling ener hoeveelheid door cijfers: *elf is een* ~ *van twee cijfers*; **3** (*gramm.*) vorm v.e. zin, uitdrukkend of er sprake is van één persoon of zaak of van meer: *het Nederlands heeft twee getallen, enkelvoud en meervoud.*

(Bron: *Koenen Verklarend Handwoordenboek*, 1983)

De hierboven onder 1 of 2 gegeven betekenis van **getal** (als 'hoeveelheid') is als het woord **getal** voorkomt in een artikel in dit boek, soms wel van toepassing, maar heel vaak niet.

Getallen worden immers ook gebruikt in andere dan die betekenissen.

- Het laagste cijfer voor het proefwerk over **getallen** was een 5.
- Op welk nummer woon je? Op 27.
- Onder welk nummer ben je vandaag bereikbaar? Gewoon, op m'n 06.
- Ik ben gisteren bij de hardloopwedstrijd twee geworden.
- Ik rijd meestal via de A12 naar Utrecht.
- Gaat het om een hoeveelheid als we de hoofdstuknummering (met de **getallen** 0, 1, 2, 3, …) in dit boekje bekijken?
- En, is er bij het 'gewone' tellen – waarmee we al heel jong beginnen – altijd sprake van hoeveelheden?

Binnen de rekenkunde en binnen de wiskunde is **getal** een (meestal) abstract begrip, en in het algemeen géén hoeveelheid.

En daarover gaat het in het bijzonder in dit boekje: **getallen** die in de wiskunde gebruikt worden. Over het verschil tussen **getal**theorie en **getallen**theorie, over rationale en irrationale **getallen**, ook over de magie van **getallen**, enzovoort. En natuurlijk is er aandacht voor speels gebruik van **getallen**, zoals **getallen** in sudoku's en in andere puzzels, én voor **getallen** in de poëzie!

Het is gebruikelijk eens in de zoveel tijd een aflevering van het tijdschrift *Euclides* te wijden aan een speciaal onderwerp. Zo zijn er 'nummers' verschenen over Kansrekening, over Bottema, over Kunst en wiskunde, over Onderzoeksvaardigheden.

Dit keer gaat het alleen maar over **getallen** …

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl