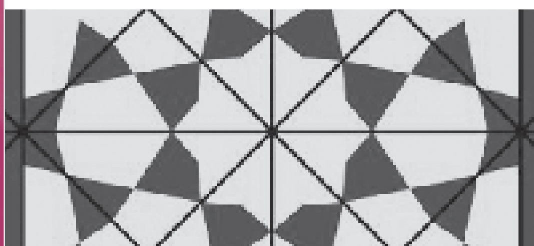
EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 87

nr 7

juni 2012



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 87

nr 7

juni

2012

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Rob Bosch
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Ernst Lambeck
Marjanne de Nijs, hoofdredacteur
Joke Verbeek
Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs,
Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

Exameneisen

Dit Kort Vooraf verwacht de drukker een kleine maand voordat *Euclides* bij u in de bus ligt. Op het moment van schrijven bevinden we ons dus nog midden in de examentijd. Eerste correcties worden ingeruild voor tweede, poststukken en telefoongesprekken vliegen over en weer. De leerlingen gaan beseffen wat de nieuwe exameneis inhoudt: 'Pas nu ik echt begonnen ben en het niet allemaal goed loopt, maak ik me toch zorgen over die 5,5 gemiddeld voor het CSE'. Tegen de tijd dat u dit leest, kennen we de uitslagen en is ook het effect van deze exameneis duidelijk. De volgende exameneis staat dan al voor de deur. Dat er slechts één tekortpunt mag zijn bij de vakken Nederlands, wiskunde en Engels was al een interne eis bij scholen maar zal, met ingang van volgend jaar, invloed gaan hebben op de slaag/zak-regeling. Een heikel punt bij veel bespreekgevallen. In schooljaar 2013/2014 wordt de rekentoets 2F/3F onderdeel van het examen. In een wijziging van het examenbesluit VO is opgenomen dat leerlingen uit de voor-examenklassen die slagen voor de pilottoets in 2012/2013, vrijgesteld zijn van de rekentoets in het examenjaar. Goed nieuws dus! De verwachting is dat alle scholen hun leerlingen in de gelegenheid zullen stellen om hier hun voordeel mee te doen. Op basis van de pilottoetsen van dit jaar heeft het Cito inmiddels voorbeeldtoetsen 2F en 3F gepubliceerd.

Vakantie

Na alle examens, laatste lessen, nakijkrondes en vergaderingen rest waarschijnlijk alleen nog het afscheid nemen van leerlingen en collega's en dan is daar die welverdiende vakantie. Tijd om te genieten van een goedgevulde *Euclides*. Ter ontspanning is er natuurlijk de doordenker van Sieb Kemme. En hoe zat het ook al weer met dat ellipsbiljart waarover Pauline Vos schreef in *Euclides* nummer 4… Heeft u het al ingezet in uw wiskundeles? Simon Biesheuvel deed dat en het inspireerde hem om na te denken over een bewijs dat de bal die gespeeld wordt vanaf een brandpunt naar de rand, door het andere brandpunt heen gaat. Lonneke Boels raakte geïnspireerd door Ban Har Yeap en zijn methode; ze schrijft over zijn masterclass en geeft concrete toepassingen voor in de les. In dit artikel komt de CPA-methode in beeld die vergelijkbaar is met de methode die in Nederland veel gebruikt wordt voor het opbouwen van rekenlessen op de basisschool. Daarop zoomen Ria Brandt en Henk Logtenberg in en zij geven u een mooi voorbeeld – met de stelling van Pythagoras in de hoofdrol.

Volgend jaar

Mocht u in het zonnetje willen mijmeren over de inhoud van de lessen het komende jaar, dan vindt u in deze *Euclides* voldoende ideeën. Ton Lecluse bespreekt opgaven Vanuit de oude doos. Meike Akveld is gefascineerd door knopen en schreef prachtig lesmateriaal om leerlingen hier ook enthousiast voor te krijgen. Of wat dacht u van een lessenserie over Perzische mozaïeken? Goossen Karssenberg laat u zien welke rol wiskunde speelt bij het ontwerpen van deze patronen. U kunt er zo mee aan de slag. Rob van Oord belicht het zebraboekje Schuiven met auto's, munten en bollen. Is het een idee om de Zebraboekjes volgend jaar in uw pta op te nemen? Voor veel collega's is dit vanzelfsprekend, net zoals het jaarlijks meedoen aan de Kangoeroewedstrijd en de Wiskunde Olympiade. Ook in deze *Euclides* komen beide competities weer aan bod. Ernst Lambeck laat zien wat het werk is van de opgavencommissie nadat de opgaven internationaal uitgekozen zijn en Theo Borne vertelt trots over zijn olympiadeleerlingen.

Het Geheugen

In dit nummer de laatste bijdrage van Harm Jan Smid voor zijn rubriek Het Geheugen. Vier jaar heeft hij ons deelgenoot gemaakt van historische ontwikkelingen die hij langs de lat van de actualiteit legde. Elk artikel was gebaseerd op degelijk onderzoek en dat zag je terug in de kwaliteit van zijn epistels. We bedanken hem namens de hele redactie.

Digitaal

Misschien gaat de laptop – of moderner: de tablet – wel mee op reis. Probeer dan vooral de app waarover Lonneke Boels schrijft. Marc de Hoog laat leerlingen kennis maken met het programma SketchUp. Hij deelt met u zijn geheim voor succes: de cursussen laten testen door leerlingen. In deze *Euclides* vindt u deel 1, na de vakantie krijgt u de toepassing in de klas. Digitaal gingen ook de meisjes bij de conferentie 'Every Women Digital'; Brechje Hollaardt geeft een impressie van de dag.

En alsof het nog niet genoeg is kunt u zich laten informeren over de reis naar Berlijn van Heiner Wind. En over het programma van de studiedag in november en de verwezenlijking van het register voor leraren. Kortom een *Euclides* waarmee u de vakantie wel doorkomt…
Ik wens u een fantastische zomer.

Inhoud

Perzische mozaïeken ontwerpen in de klas

LEERLINGEN IN HET CENTRUM VAN EEN MIDDELEEUWSE ONTWERPTRADITIE

[Goossen Karssenberg]

Een serie lessen waarin de leerlingen de rol aannemen van een middeleeuwse Perzische mozaïekontwerper en uiteindelijk zelf een origineel mozaïek maken, analyseren en presenteren. Is dat nog wel wiskunde? Jazeker! Goossen Karssenberg houdt een pleidooi voor een radicaal ander gebruik van een rijk stukje erfgoed uit de islamitische cultuur in de wiskundeles. Hij ontwikkelde een analysemethode van islamitische mozaïeken, onderzocht een Perzische ontwerpmethode waarin het begrip 'basispatroon' centraal staat en verwerkte dit in lesmateriaal voor de bovenbouw van vwo en havo.

Inleiding

Islamitische mozaïeken vormen een interessante categorie uit alle typen geometrische betegelingen van het platte vlak. Ze zijn sinds de 8ste eeuw ontworpen en uitgevoerd op tal van religieuze bouwwerken en pleinen en ook gebruikt als decoratie van manuscripten. De meetkundig meest intrigerende ontwerpen zijn in de 12de tot 16de eeuw gerealiseerd in tegelwerk. Prachtige uitvoeringen zijn te vinden in het Alhambra in Granada (Spanje), in Fez (Marokko), op moskeeën in Isfahan (Iran) en in Samarkand (Oezbekistan), maar ook op talloze andere locaties.

Een mooie toepassing van meetkunde

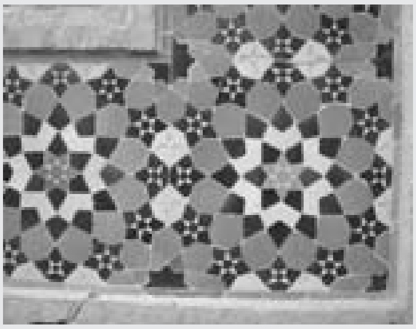
De in pastelkleuren uitgevoerde mozaïeken, vaak gecombineerd met bloemmotieven of teksten in sierlijke kalligrafie of juist strak en hoekig kufi, herbergen een schat aan meetkundige didactische toepassingen. Ze kunnen bestudeerd worden vanuit veel verschillende wiskundige invalshoeken waarbij vragen kunnen worden gesteld als: Welke symmetrieën herbergen ze? Welke hoeken komen er in voor en zou je die ook nauwkeurig kunnen berekenen? Hoe zijn de verhoudingen tussen oppervlaktes van de verschillende tegels?
Uitgaande van bepaalde patronen is ook bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras te bewijzen. Al deze invalshoeken sluiten goed aan bij de huidige wiskunde in het voortgezet onderwijs op elk niveau. Dan gaat het om onderwerpen als: leren werken met de kompasroos en geodriehoek, rekenen met hoeken, spiegel- en rotatiesymmetrie, goniometrie vanaf klas 2 en 3, voortgezet bij wiskunde-B op havo en vwo tot aan het geven van meetkundige bewijzen op vwo. Een enkele keer komt men bij deze onderwerpen vlakvullingen als voorbeeld tegen. Bijna nooit wordt het verband met islamitische mozaïeken gelegd. Een voor de hand liggende kans om een rijk stukje cultuurgeschiedenis met wiskunde in verband te brengen wordt daardoor gemist. Het zou nuttig zijn als hier meer mee gedaan werd in het wiskundeonderwijs, zeker nu een behoorlijk deel van de Nederlandse jeugd een islamitische achtergrond heeft. Daarbij komt dat het kunstzinnige element heel veel jongeren inspireert, wat een positieve uitwerking kan hebben op de interesse in het vak wiskunde.

Islamitische mozaïeken als centraal thema

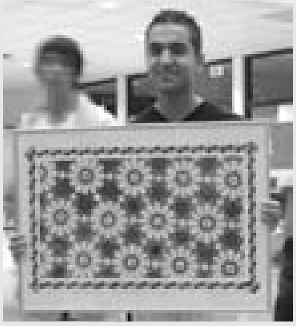
Hier ga ik niet verder in op de vraag hoe men mozaïeken als voorbeeld bij de bovengenoemde meetkundige onderwerpen zou kunnen gebruiken. Eén van de belangrijkste doelen van mijn onderzoek was namelijk het ontwerpen van een op zichzelf staande lesserie (lengte 8 tot 12 lessen, 15 tot 20 uur studie) voor vwo-leerlingen uit het C&M-profiel (wiskunde C) die ook geschikt is als keuzeonderwerp bij wiskunde-A . Daardoor kon veel radicaler gekozen worden voor islamitische mozaïeken als centraal wiskundig thema, niet als illustratie bij andere wiskundige onderwerpen. Ook kon ik kiezen voor een interessante centrale vraag:

Hoe ontwierp men destijds de vaak zeer complexe vlakverdelingen?

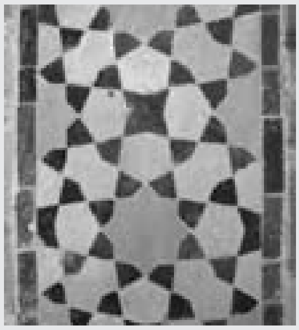
Deze vraag is moeilijk te beantwoorden. Er zijn talloze uitvoeringen van ontwerpen op gebouwen te vinden, maar als het gaat om originele ontwerptekeningen zijn de bronnen schaars. Daarbij komt dat deze tekeningen meestal geen begeleidende tekst hebben. Is die er wel, dan gaat het alleen om instructies hoe het mozaïek op de gewenste schaal kan worden getekend. Deze instructies zeggen vaak maar weinig over het ontwerpproces.
Wat wel blijkt uit één van de bronnen is, dat er destijds bijeenkomsten werden georganiseerd waaraan zowel mozaïekontwerpers als de zuiver wiskundig beter geschoolden (denk bijvoorbeeld aan astronomen/astrologen) deelnamen. Tijdens zulke bijeenkomsten werden meetkundige vraagstukken besproken zoals: Hoe construeer ik een regelmatige vijfhoek met passer en liniaal?
Deze informatie bracht me op het idee om de leerlingen in de lesserie te laten kennismaken met de islamitische ontwerptraditie door hen zelf nieuwe mozaïeken te laten ontwerpen. Door de leerlingen de rol van middeleeuws ontwerper te laten spelen zouden ze vanzelf geconfronteerd worden met meetkundige vraagstukken en kunnen ontdekken hoe de ontwerpers destijds zouden kunnen hebben gewerkt. De historische en creatieve context die zo ontstaat, maakt de lesserie zeer geschikt voor de doelgroep.



figuur 1 Detail van een mozaïek in Yazd (Iran)



figuur 2 Een leerling toont het door zijn groepje ontworpen mozaïek



figuur 3 Detail van een mozaïek op een imamschool in Isfahan (Iran)

Opzet van de lesserie

Om ervoor te zorgen dat de leerlingen zich kunnen verplaatsen in de rol van een middeleeuwse mozaïekontwerper moeten ze eerst kennismaken met bestaande mozaïeken en een aantal ontwerpvaardigheden onder de knie krijgen. De beschikbare tijd hiervoor is beperkt. Daarom ontwikkelde ik een toegankelijke methode om islamitische mozaïeken te analyseren. De behandeling van deze analysemethode vergt ongeveer vier lessen en bereidt de leerlingen voor op de fase waarin vaardigheden voor het zelf ontwerpen worden aangeleerd. Bij deze fase moest de keuze worden ingeperkt. Ik koos ervoor in te zoomen op de Perzische ontwerpmethode met behulp van het zogenaamde basispatroon, om een viertal redenen:

- omdat hierover uit enkele primaire bronnen en, indirect, via secundaire bronnen voldoende informatie is te achterhalen;
- omdat deze methode in de 16de eeuw geleid heeft tot vele prachtige, fascinerende resultaten;
- omdat er interessante toegepaste wiskunde bij komt kijken, en
- omdat met deze methode in relatief korte tijd mooie, unieke ontwerpen te maken zijn.

Ik geef hieronder een kort overzicht van de analysemethode die de leerlingen hanteren. Daarna volgt een uiteenzetting van de vaardigheden die worden aangeleerd om een Perzisch mozaïek zelf te kunnen ontwerpen. In de praktijk gaan deze zaken hand in hand: door te analyseren ontdekken leerlingen methodes om te ontwerpen, en door vaardigheden te oefenen herkennen leerlingen kenmerken uit bestaande mozaïeken gemakkelijker zodat ze die beter kunnen analyseren.

Analyseren van mozaïeken

De analysemethode wordt hier uiteengezet aan de hand van het relatief eenvoudige mozaïek van ***figuur 3.***

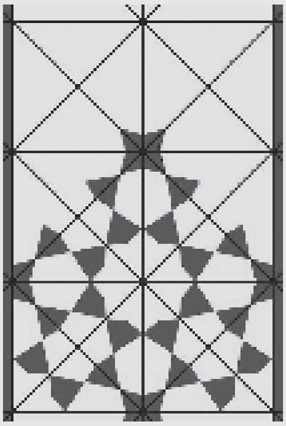
Spiegelsymmetrieën – ***In figuur 4*** op pag. 284 zijn de symmetrieassen getekend. Omdat het mozaïek denkbeeldig oneindig doorloopt, zijn er ook spiegelsymmetrieën langs lijnen die niet door het centrum van de figuur lopen en samen een nieuw, eenvoudig patroon vormen. (In dit voorbeeld een patroon opgebouwd uit geodriehoeken.) Dit is voor de meeste leerlingen een nieuw fenomeen dat om enige oefening vraagt.

Het begrip locale symmetrie – ***Figuur 5*** laat de rotatiesymmetrieën zien, ook de locale rotatiesymmetrieën. Bij de rotatiecentra wordt het soort rotatiesymmetrie aangegeven: T4 betekent bijvoorbeeld dat het gehele patroon een viervoudige rotatiesymmetrie heeft rond het aangegeven centrum (T staat voor ‘Totaal’). L8 betekent dat er een achtvoudige rotatiesymmetrie is die echter niet geldig is voor het gehele patroon, maar enkel locaal: binnen de aangegeven cirkel. Het begrip locale symmetrie wordt geïntroduceerd omdat dit een kenmerkende eigenschap is van vele islamitische mozaïeken.

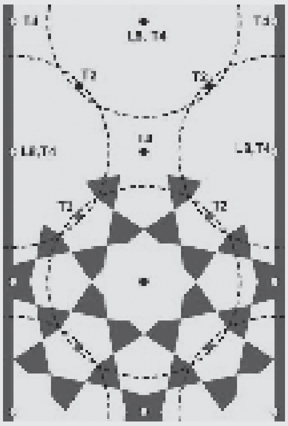
De begrippen cel en kleinste cel – Vrijwel elk islamitisch mozaïek heeft een zichzelf herhalende cel. Er wordt onderscheid gemaakt tussen een kleinste cel en een cel. Deze laatste is bij voorkeur rechthoekig en wordt in de weinige manuscripten die we kennen, veel aangetroffen. De afmetingen van een cel hangen nauw samen met de translatiesymmetrieën van het patroon. Een kleinste cel is een zo klein mogelijk gebiedje uit het mozaïek waarmee door middel van spiegelen en schuiven het gehele mozaïek kan worden opgebouwd. Het is vaak opmerkelijk hoe weinig er slechts hoeft te worden getekend om vervolgens daarmee, door middel van lineaire transformaties, het gehele mozaïek op te bouwen; ***zie figuur 6***.
Leerlingen worden uitgedaagd om in bestaande mozaïeken een cel en een kleinste cel te identificeren. De symmetrieassen zijn hierbij vaak een leidraad omdat het handig is de cel zo te kiezen dat enkele daarvan langs de rand van de cel lopen.

Een Perzische ontwerpmethode

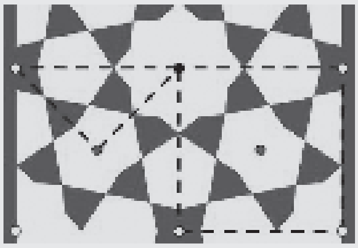
Basispatronen – Veel Perzische mozaïeken zijn ontworpen met behulp van een basispatroon. Dit basispatroon is een hulpmiddel bij het ontwerpen en is in het uitgevoerde mozaïek niet meer zichtbaar. Het is een patroon dat is opgebouwd uit veelhoeken met gelijke zijden. In de moderne literatuur worden deze veelhoeken vaak girihtegels genoemd (naar het Perzische woord girih, knoop). Vaak is er ten minste één type regelmatige veelhoek gebruikt. In de regelmatige veelhoeken worden vervolgens sterren geplaatst, en wel zodanig, dat de sterpunten samenvallen met de middens van de zijden van de veelhoek. Het mozaïek ***van figuur 3*** heeft ook een basispatroon, ***zie figuur 7***.
Dit basispatroon bestaat uit drie soorten girihtegels; een regelmatige achthoek, een vierkant en een zeshoek in de vorm van een strikje. Door de lijnen bij de sterpunten in de regelmatige veelhoeken te verlengen ontstaan in de strikjes vliegers die in vorm en grootte die van de vliegers in de regelmatige achthoeken benaderen. Zo ontstaat een evenwichtig mozaïek.
Soms leidt het plaatsen van sterren in een basispatroon echter niet tot een erg evenwichtig mozaïek. Zie bijvoorbeeld ***figuur 8***, waarbij ik in een ander basispatroon in de regelmatige veelhoeken sterren heb geplaatst. De strikvormige girihtegels zijn dan echter lastig in te vullen op een wijze die goed aansluit bij de rest van het mozaïek. Plaatsing van rozetten in plaats van sterren in de regelmatige veelhoeken blijkt hier tot een mooier resultaat te leiden. Dit is door middeleeuwse Perzische ontwerpers toegepast; ***zie figuur 1***.
De lezer wordt uitgenodigd het onderliggende basispatroon van dit mozaïek zelf te achterhalen.



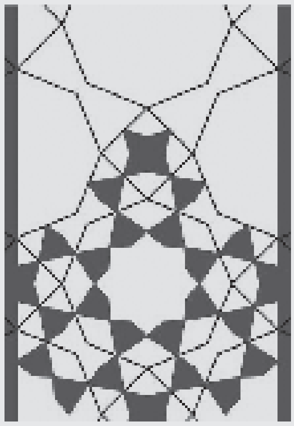
figuur 4 Symmetrie-assen



figuur 5 (Locale) Rotatiesymmetrieën



figuur 6 Cel (rechts) en kleinste cel (links)

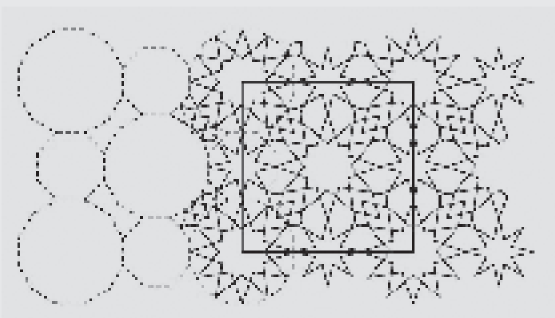


figuur 7 Basispatroon

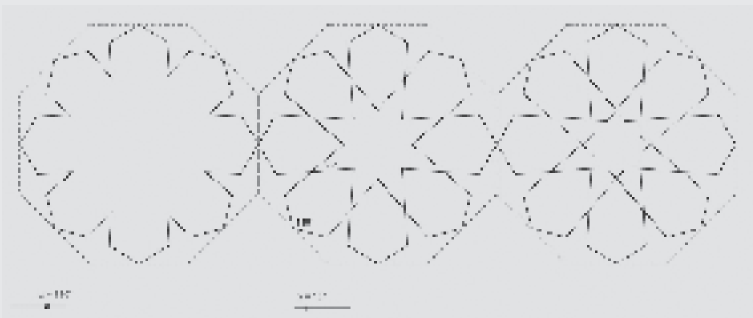
Sterren en rozetten – Omdat niet alleen sterren maar ook rozetten vaak worden gebruikt in Perzische mozaïeken, leert de leerling een eenvoudige typologie van rozetten. Ik maak onderscheid tussen drie typen rozetten; ***zie figuur 9***.
Veel rozetten uit Perzische mozaïeken hebben bepaalde extra eigenschappen die bijdragen aan een evenwichtig eindresultaat. Deze rozetten noem ik *standaardrozetten*. De kenmerken van een standaardrozet worden uiteengezet ***in figuur 10***. In de lesserie wordt behandeld hoe een standaardrozet met gebruik van passer en liniaal kan worden geconstrueerd.
Uiteraard zijn er nog vele andere typen rozetten die in de Perzische ontwerptraditie en elders voorkomen. De beperking tot deze groep volstaat echter om bij de ontwerpfase tot mooie resultaten te kunnen komen.

Mozaïeken ontwerpen en presenteren
Nadat leerlingen verschillende mozaïeken hebben geanalyseerd, hebben kennisgemaakt met het begrip *basispatroon* en geoefend hebben met het tekenen van sterren en rozetten in regelmatige veelhoeken, gaan ze in groepjes aan de slag met het ontwerpen van een nieuw mozaïek. Ze maken eerst een basispatroon. Vervolgens worden geschikte sterren of rozetten in de regelmatige veelhoeken getekend. Tot slot krijgen de veelhoeken die niet regelmatig zijn, een bijpassende invulling. Om een aantrekkelijk eindresultaat te kunnen presenteren wordt per groepje een gekleurd mozaïek, eventueel met een passende randversiering, extra bloemmotieven of een gekalligrafeerde tekst, op posterformaat gemaakt. Deze wordt samen met een poster met uitleg over het ontwerpproces en een analyse getoond in een korte eindpresentatie voor de klas of tijdens een presentatieavond voor een groter publiek. Het eindresultaat wordt beoordeeld door de docent of door een jury.

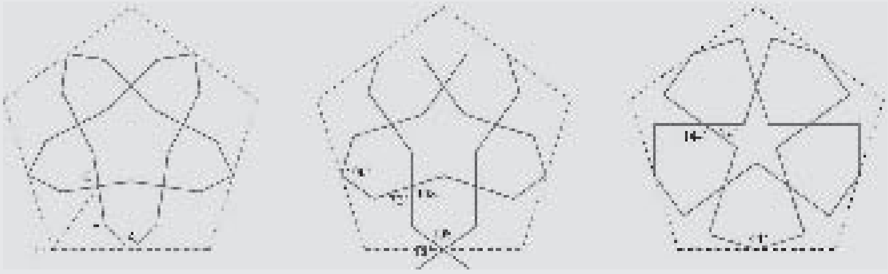
Ervaringen uit de praktijk
De lesserie is tot heden in vier klassen gedaan; tweemaal in Rotterdam, in een vierde klas vwo met wiskunde A, door leerlingen met een veelal islamitische achtergrond, en tweemaal op Texel door een vijfde klas vwo met wiskunde-A/C door leerlingen die bijna allemaal geen affiniteit hadden met de islam. In alle klassen werd met goede inzet aan de opdrachten gewerkt. Op beide scholen werd de cursus in het tweede jaar als praktische opdracht opgenomen in het PTA. Uit enquêtes achteraf aan de leerlingen bleek dat men de moeilijkheidsgraad van de lesserie gemiddeld normaal tot iets te moeilijk vond. Verder bleek dat men het idee had dat er iets minder wiskunde werd geleerd dan tijdens reguliere wiskundelessen, maar dat er meer algemene kennis werd verworven. Dit komt wellicht door het feit dat men zich vaak niet realiseert dat het gehele ontwerpproces een voornamelijk wiskundige activiteit is waarbij het gaat om een vorm van wiskunde die



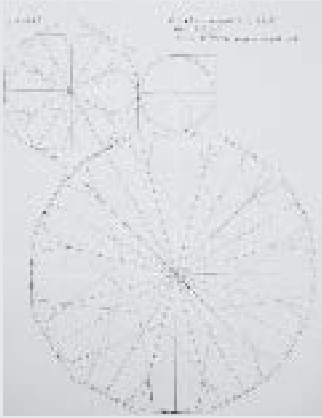
figuur 8 Een basispatroon met regelmatige 8- en 12-hoeken waarin sterren zijn geplaatst



figuur 9 Vlnr: (R0, D8, 118°, 36°) ; (R1, D8, 118°, 36°) ; (R2, D8, 118°, 36°).
Drie rozetten in een octagon die aan de ‘buitenkant’ gelijk zijn, maar aan de ‘ binnenkant’ verschillen. Vandaar de typering respectievelijk R0, R1 en R2. D8 verwijst naar de achtvoudige draaisymmetrie; de twee hoeken verwijzen naar twee kenmerkende hoeken van het rozet (zie figuur midden)



figuur 10 Vlnr: (SR1, 90°, 90°) ; (SR1, 108°, 72°) ; (SR1, 144°, 36°).
Deze figuur laat drie type-1-rozetten in een pentagon zien die voldoen aan de eisen voor een standaardrozet (SR). Volgens de eis voor lengtes van zijden moet daarvoor gelden: DA = DC en AB = BC (zie figuur links). Hieruit volgt dat de som van een naar buiten wijzende hoek van een zeshoek en van een punt van de centrale ster 180° is (figuur midden: 108° + 72° = 180°; figuur rechts: 144° + 36° = 180°; figuur links: beide hoeken zijn 90°). Een standaardrozet van een zeker type in een regelmatige veelhoek heeft dus slechts één vrijheidsgraad.



figuur 11 Oefenopdracht: Standaardrozetten, door een leerling geconstrueerd in regelmatige veelhoeken

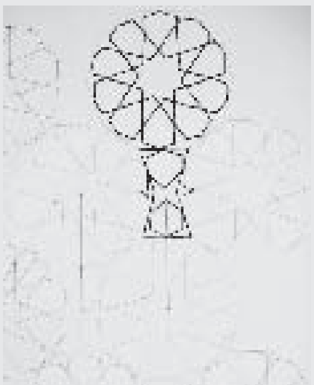
men niet zo gewend is. De opzet met eindpresentaties werkte goed; deze werden veelal met enthousiasme gegeven en er werd veel inzet getoond bij het maken van de posters. Hierbij was er geen merkbaar verschil tussen de houding van leerlingen met, en leerlingen zonder een islamitische achtergrond.
Door deze lesserie te doen hebben leerlingen niet alleen veel opgestoken over onderwerpen als geometrie, symmetrie en toegepaste wiskunde, maar ook over de culturele en historische achtergrond van geometrie en verbanden met architectuur in de islamitische cultuur.
Door de focus op de wiskundige inhoud is de islamitische ontwerptraditie van geometrische mozaïeken zeer goed bruikbaar in de wiskundeles voor elke leerling, wat zijn of haar culturele achtergrond ook is. Een breder gebruik ervan zou een verrijking zijn voor het wiskundeonderwijs in Nederland.

Literatuur

- Op « *www.patterninislamicart.com* » is een groot archief foto's van islamitische mozaïeken te vinden. Zie ook de links op deze site.
- Prof. J.P. Hogendijk heeft veel gepubliceerd over dit onderwerp. Zie diens website: « *www.jphogendijk.nl* »

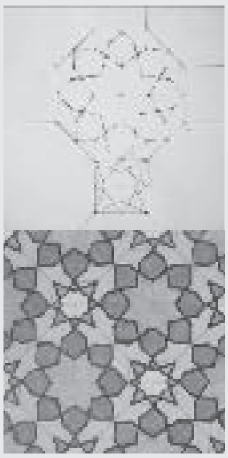
Over de auteur

Goossen Karssenberg was ruim twintig jaar werkzaam als docent wiskunde in het middelbaar onderwijs. In de jaren 2009-2011 was hij tevens als LIO (Leraar In Onderzoek, gefaciliteerd door NWO) verbonden aan de Universiteit Utrecht (Geschiedenis van de wiskunde, Freudenthal Instituut). Van zijn onderzoek is onder meer dit artikel het resultaat. Thans schrijft hij lesmateriaal, geeft hij workshops en lezingen over islamitische mozaïeken, maakt in samenwerking met beeldend kunstenaar Maria Roelofsen kunstvoorwerpen waarin hij mozaïeken verwerkt en is hij werkzaam als wiskundecoach op Texel.
Website: *www.goossenkarssenberg.nl*
E-mailadres: *gkarssenberg@live.nl*



figuur 12 Fase in het ontwerpproces. Het basispatroon bestaat uit decagons en strikjes. De getekende rechthoek is een cel van het ontwerp.

figuur 13 Een latere fase in het ontwerpproces. Dit wordt de poster van het mozaïek. Het basispatroon is niet meer zichtbaar.



figuur 14 Basispatroon met rozet en ster, eindresultaat (detail)

figuur 15 Leerlingen presenteren hun werk in de klas

figuur 16 Impressie van een presentatieavond

Uit de Zebrareeks...

DEEL 2

[Rob van Oord]

De redactie van de Zebrareeks valt onder verantwoordelijkheid van de NVvW. Deze reeks is bij uitstek geschikt om te gebruiken als basis voor een keuzeonderwerp of als aanzet voor een praktische opdracht. Vanwege de grote diversiteit van de onderwerpen is er voor elk wat wils maar dat maakt het ook lastig kiezen. Om het u makkelijker te maken zetten we in de komende nummers van *Euclides* telkens een andere Zebra in de schijnwerpers. Wie weet zet het u aan tot een (nog) intensiever gebruik van deze unieke boekjes.

Boekje 11 – Schuiven met auto's, munten en bollen

Auteurs: Hans Melissen en Rob van Oord
Onderwerpen: modelleren, bewijzen, redeneren, derdegraads formule opstellen.
Benodigde voorkennis: de 30°-60°-90° -driehoek met verhouding 1 : 2 : √3, oppervlakteformules van rechthoek, driehoek en cirkel, hoe teken je de hoogte van een piramide, ongelijkheden en vergelijkingen oplossen.

Waarover gaat het boekje en hoe zit het in elkaar?

Het boekje gaat over optimaal rangschikken van meetkundige objecten, zoals vierkanten, cirkels en bollen. Het bestaat dan ook uit drie verschillende delen, met telkens een geheel andere aanpak. De wiskunde die voorbij komt, is verassend anders dan gebruikelijk. In het eerste hoofdstuk wordt geprobeerd zo goed mogelijk ondergrenzen te berekenen voor de parkeerruimte die voor auto's nodig is. In het tweede hoofdstuk wordt gezocht naar een zo klein mogelijke (driehoekige) oppervlakte waarbinnen een aantal munten geschoven kan worden, en vervolgens wordt van enkele situaties het bewijs gegeven dat het niet kleiner kan. In het derde hoofdstuk worden bollen zo dicht mogelijk gestapeld, en wordt op een ongebruikelijke manier een formule gevonden voor het aantal bollen in zo'n stapel.

De behandelde stof in het kort

In het eerste hoofdstuk wordt gekeken naar vierkante parkeerterreinen met n^2 vierkante plekken en vierkante 'auto's' van 1 × 1. Eerst moet worden nagedacht over de voorwaarden waaraan een parkeerterrein zou moeten voldoen. De auto's moeten zo geparkeerd worden dat ze ook uit de parkeerplaats weggereden (= geschoven) kunnen worden. In het model van het boekje kan er slechts één auto tegelijk de parkeerplaats worden op- of afgereden. Dit is niet erg praktisch, maar onder andere voorwaarden kun je vergelijkbare redeneringen en berekeningen maken als in dit hoofdstuk worden gedaan. Dat is aan de lezer. Bij om en om een rij 'parkeerplaatsen' en een uitrijstrook kom je voor even waarden van n tot een minimale efficiëntie van $\frac{\frac{1}{2}n\cdot(n-1)}{n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$. Deze waarde nadert tot 50% voor toenemende waarden van n. Voor oneven waarden van n is de efficiëntie altijd groter dan de hierboven genoemde waarde. Voor de bovengrens geldt $1-\frac{n-1}{n^2}$. Hiermee kom je niet hoger dan 80%.

Het tweede hoofdstuk gaat over het tegen elkaar aan leggen van even grote cirkels (munten), ofwel het vullen van een driehoekig dienblad met glazen. Eenvoudig is aan te tonen dat bij een patroon waarbij de cirkels in regelmatige zeshoeken gedacht worden, het meest efficiënt is als je het hele vlak ermee gaat bedekken. In de praktijk zitten er altijd randen aan het 'dienblad'.
Het is duidelijk dat het aantal cirkels uit de rij van de driehoeksgetallen (1, 3, 6, 10, 15, …) strak binnen een gelijkzijdige driehoek passen. Bij een gegeven straal r van de cirkels kun je berekenen dat de zijde van een dergelijk driehoekig dienblad $4\sqrt{3}r$ is. Maar interessanter is het om eens te kijken naar het kleinste driehoekige dienblad dat strak zit om bijvoorbeeld 4 of 7 of 11 cirkels. Voordat er gerekend wordt, moet eerst met een aantal gelijke munten geschoven worden in een uit karton geknipte hoek van 60°. Bij het aandrukken van bijvoorbeeld vier munten totdat ze strak tegen elkaar zitten, in een gelijkzijdige driehoek, kunnen verschillende situaties optreden; ***zie figuur 1***. Er blijven natuurlijk altijd open ruimtes.
Bij het samendrukken van zeven munten blijkt dat zes munten de krapste stand bepalen, maar dat de zevende munt gewoon los geplaatst kan worden in de grootste opengebleven ruimte; ***zie figuur 2***.
Na metingen met de geodriehoek kun je het vermoeden krijgen dat de derde situatie bij de vier munten het krapst zit. Maar kan het krapper? Of kun je bewijzen dat het niet krapper kan?
Daarover gaat dit deel van het boekje. Dit is best een lastig stuk.
Het komt er op neer dat je vier middelpunten (van de vier munten) moet kunnen plaatsen binnen een gelijkzijdige driehoek. Die driehoek wordt verdeeld in drie gelijke oppervlakten (vliegers) die een grootste breedte $2r$ hebben. Omdat altijd twee middelpunten in een vlieger vallen is daarmee bewezen dat de vier middelpunten alleen op de hoekpunten van de driehoek en in het zwaartepunt (waar de vliegers samen komen) kunnen liggen; ***zie figuur 3***. Voor de zeven munten kun je een vergelijkbare redenering houden.
Het hoofdstuk eindigt met het probleem van Malfatti. Hij vroeg zich af hoe je in een driehoek drie cirkels kunt tekenen die samen een zo groot mogelijke oppervlakte van de driehoek bedekken. Hij stelde voor ze zó te tekenen dat ze twee aan twee aan elkaar raken en aan de randen van de driehoek. Als je dit in een gelijkzijdige driehoek doet dan krijg je drie even grote cirkels. Maar je kunt het ook anders aanpakken, namelijk door eerst een zo groot mogelijke cirkel te tekenen, en vervolgens in twee hoekpunten nog twee kleintjes die aan de grote raken en aan twee randen; ***zie figuur 4***. In het laatste geval blijkt de oppervlakte 1,364% groter te zijn.
De manier die Malfatti voorstelt, is dus niet de beste. Het is gebleken dat die manier zelfs nooit de beste is.

Het derde hoofdstuk van het boekje gaat over stapeling van bollen (***zie figuur 5***). Er worden twee compacte stapelingen bekeken:

een met een vierkante bodem, en een met een driehoekige bodem. Het aantal bollen in de lagen bij de vierkante stapeling is een kwadraat; het aantal bollen in een laag bij driehoekige stapeling is een driehoeksgetal. Omdat het om een inhoudsformule gaat, is het vermoeden dat het totaal aantal bollen in een stapel een derdegraads formule is van het aantal lagen n:

$B(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$

Bij de vierkante stapeling geldt dan $B(1) = 1$, $B(2) = 1 + 4 = 5$, $B(3) = 1 + 4 + 9 = 14, \ldots$

Door in te vullen in de formule kun je nu vier vergelijkingen in a, b, c en d maken, en dat stelsel oplossen.

$B(1) = 1$ geeft $a + b + c + d = 1$

$B(2) = 5$ geeft $8a + 4b + 2c + d = 5$

$B(3) = 14$ geeft $27a + 9b + 3c + d = 14; \ldots$

Bij de driehoekige stapeling vind je op vergelijkbare manier:

$a + b + c + d = 1$

$8a + 4b + 2c + d = 4$

$27a + 9b + 3c + d = 10; \ldots$

In dit boekje wordt gekozen voor een verrassend andere aanpak. Bij de vierkante stapeling gaat dat als volgt: Het verschil van twee opeenvolgende totalen is een kwadraat.

Begin met $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5, \ldots$ dan is $x_n - x_{n-1} = n^2$. Ervan uitgaand dat de formule derdegraads is, krijg je de gelijkheid:

$an^3 + bn^2 + cn + d - a(n-1)^3 - b(n-1)^2 - c(n-1) - d = n^2$

Na haakjes uitwerken vind je:

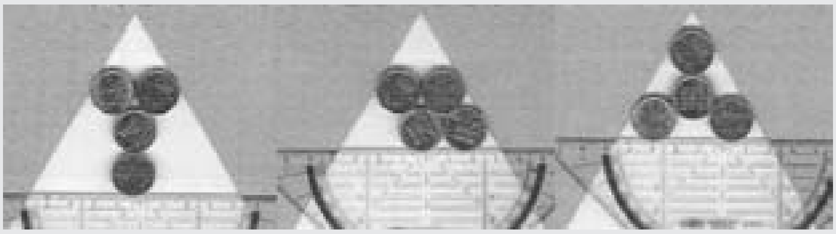
$a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0$

Even een controle: $n = 4$ heeft 30 bollen, en:

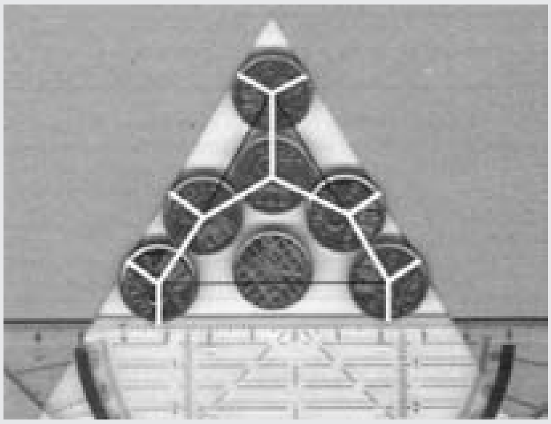
$\frac{1}{3} \cdot 64 + \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{6} \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 21\frac{1}{3} + 8 + \frac{2}{3} = 30$

Klopt.

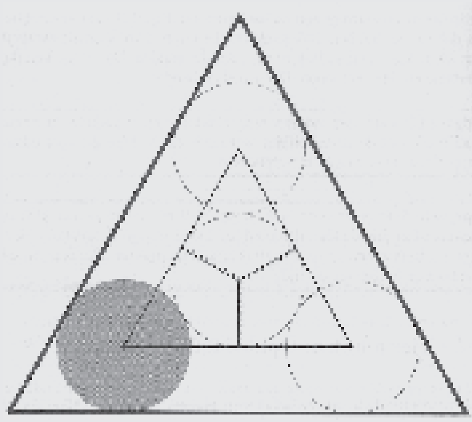
Het hoofdstuk eindigt met een beschouwing over stapelen in een oneindig grote ruimte. Hierbij kijk je naar de middelpunten van de bollen. Die vormen onderling piramides. Kepler vermoedde dat de driehoekige stapeling, waarbij elke volgende laag in de kuiltjes van de vorige wordt gelegd, de meest compacte is. In 1998 werd pas het bewijs hiervoor geleverd.



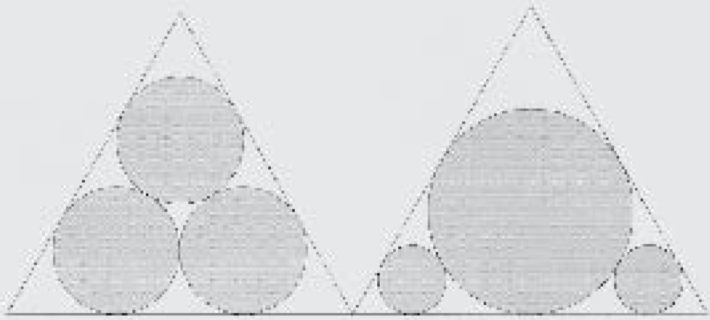
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

figuur 5

Hoe is het voor de leerlingen?

Wie dit boekje met plezier wil doorwerken, moet bereid zijn ook zelf wat te gaan uitzoeken. Tekenen van parkeervakken op ruitjespapier, maar ook schuiven met gelijke munten in een kartonnen hoekpunt van 60°. De behandelde stof is voor leerlingen begrijpelijk uitgelegd. Met negentien Opgaven, waarvan de antwoorden achterin het boekje zijn opgenomen, kan het boekje makkelijk binnen de gestelde tijd gedaan worden. Maar de paragraaf waarin het bewijs staat van de beste configuratie van de munten, is pittig. A-leerlingen raad ik aan het goed te lezen, maar het kan ook in het geheel overgeslagen worden. In elk hoofdstuk zijn Opdrachten en Suggesties opgenomen. In overleg met de leerling kies ik er daarvan eentje uit als eindopdracht. Vaak neem ik Opdracht 8, een variant van het Malfatti-probleem met de gelijkbenige rechthoekige driehoek met drie cirkels, of met een vierkant met twee cirkels. Ook Opgave 14, het vinden van de formule van de piramide van bollen met driehoekige stapeling, is een prima eindopdracht.

Enkele opmerkingen

Bij *Opgave 3* is de formule voor $\binom{n}{k}$ nodig. B-leerlingen kennen die niet meer. Er is dus korte uitleg nodig; of overslaan. Dit is echter niet essentieel voor het boekje.
In *Opdracht 8* wordt de gelijkbenige rechthoekige driehoek bedoeld, er staat gelijkzijdige rechthoekige driehoek.
Het antwoord van *Opgave 13* is wel correct, maar in de berekening staat $\frac{5}{54}\pi$, dit moet $\frac{11}{108}\pi$ zijn
Omdat de 30°-60°-90°-driehoek niet erg bekend is bij A-leerlingen, hebben die wel een zetje nodig. De berekeningen daarna zijn niet al te moeilijk. Het rekenen met wortels is voor hen niet eenvoudig.
Van de suggestie om de leerling als eindopdracht het Malfatti-probleem te geven van twee cirkels in een vierkant geef ik hierbij het antwoord.
De *Malfatti-manier* – Twee even grote cirkels die raken aan twee zijden van het vierkant en aan elkaar. De middelpunten liggen dus op een diagonaal van het vierkant. Neem zijden met lengte 1. De straal R van de twee even grote cirkels kan dan worden berekend met $2(R + R\cdot\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, dus: $R = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.[1] De oppervlakte van de cirkels samen is dan:
$2\pi\cdot(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = (3-2\sqrt{2})\cdot\pi$
De Greedy-manier – Teken eerst een zo groot mogelijke cirkel, dat is in dit geval de ingeschreven cirkel van het vierkant, en vervolgens in een van de open ruimten in de hoeken een cirkel die raakt aan de grote cirkel en twee zijden van het vierkant.
De straal van de grote cirkel is $\frac{1}{2}$, dus de oppervlakte is $\frac{1}{4}\pi$. Het middelpunt van het kleine cirkeltje ligt op een diagonaal van het vierkant; dus voor de straal r ervan geldt:
$r + r\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$, dus $r = 1\frac{1}{2} - \sqrt{2}$.[1] De oppervlakte van de kleine cirkel is dan:
$\pi\cdot(1\frac{1}{2}-\sqrt{2})^2 = (4\frac{1}{4} - 3\sqrt{2})\cdot\pi$
De oppervlakte van beide cirkels samen is $(4\frac{1}{2} - 3\sqrt{2})\cdot\pi$.
Vergelijken van beide methodes. Is $(4\frac{1}{2} - 3\sqrt{2})\cdot\pi > (3-2\sqrt{2})\cdot\pi$? Dat wil zeggen: is $1\frac{1}{2} > \sqrt{2}$? Ja, dus ook hier is 'Malfatti' kleiner dan 'Greedy'.

Noot

[1] Ik maak gebruik van de zogeheten worteltruc:
$$\frac{a}{\sqrt{2}\pm 1} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}\pm 1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-1^2} = a(\sqrt{2}-1)$$
Het gegeven antwoord in het boekje is niet helemaal correct.

Over de auteur

Rob van Oord gebruikt elk jaar vele boekjes in zijn klassen. Hij is sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoop College te Waddinxveen. Voor vragen, suggesties en opmerkingen kunt u hem een e-mailbericht zenden.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

ICT in de wiskundeles: Google SketchUp

DEEL 1

[Marc de Hoog]

Jaren geleden heeft Google het programma Google SketchUp op de markt gebracht. Met behulp van dit programma kunnen leerlingen tekenen in drie dimensies. Het gemak waarmee professionele tekeningen kunnen worden gemaakt, is verbazingwekkend. Dit alleen zou reden genoeg kunnen zijn leerlingen zo vroeg mogelijk te leren werken met dit programma. Het programma blijkt daarnaast, door de vele gereedschappen, weergaven en op te vragen eigenschappen, een goed hulpmiddel te zijn om onderwerpen uit de onderbouw van vmbo/havo/ vwo te verduidelijken. Denk hierbij aan oppervlakte en inhoud, de stelling van Pythagoras in de ruimte, (samengestelde) ruimtefiguren, aanzichten, perspectief, spiegelen en roteren, doorsneden…
In onderstaand artikel, gebaseerd op het hoofdstuk ‘Een Nieuwe Dimensie?’ uit mijn afstudeerwerk WISKUNDE@ELO (Hogeschool Rotterdam, lerarenopleiding wiskunde, 2009), beschrijf ik de wijze waarop ik leerlingen laat kennismaken met dit programma.

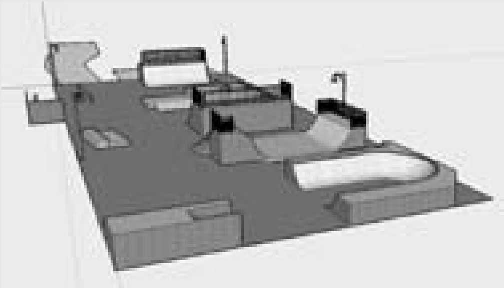
Voorbereidingen
Voordat op een succesvolle manier gewerkt kan worden met Google SketchUp, zal aandacht geschonken moeten worden aan het onderwerp perspectief. Google SketchUp maakt namelijk gebruik van perspectief om de ruimtefiguren weer te geven. Het behandelen van dit onderwerp voorkomt opmerkingen als: ’Hè, deze balk wordt steeds smaller!’ Zelf behandel ik het onderwerp perspectief aan de hand van een werkblad waarbij ik leerlingen allereerst met behulp van satéprikkers laat onderzoeken hoe bijvoorbeeld de staven van een spoorlijn op een foto ‘lopen’. Daarna laat ik de leerlingen, via enkele tussenopdrachten, een balk in tweepuntsperspectief tekenen; ***zie figuur 1***.

Het leren werken met SketchUp
De wijze waarop ik leerlingen leer werken met Google SketchUp, is ontstaan door veelvuldig de laatste twee stappen van het proces bedenken-ontwikkelen-testen-bijstellen te doorlopen. Hierbij moet men zich realiseren dat het weliswaar gaat om een programma dat gebruikt kan worden in een wiskundeles, maar dat het leren werken met het programma op zichzelf niet wiskundig van aard is. Het leren werken met dit programma gaat op dezelfde wijze als het leren werken met bijvoorbeeld Word. Uit ervaring blijkt dat de opzet van veel digitale cursussen niet strookt met de werkelijkheid. Veel ontwikkelaars gaan uit van de docent die het moet begrijpen en de ontwikkelaars vergeten daarbij dat leerlingen in dit digitale tijdperk heel snel bijleren en verbanden zien met andere websites en programma’s. Ter illustratie. Tijdens de studiedag liet ik collega’s een opdracht inleveren via de leeromgeving. Ze moesten de hele instructie lezen en merkten daarbij op dat leerlingen dit heel moeilijk zouden vinden. De dag daarna liet ik mijn leerlingen dezelfde opdracht inleveren. Wat bleek: ze lazen helemaal niets. 90% van de leerlingen reageerde ongeveer zo: ‘Ah, ik zie het al…, het is net Hyves.’ Dit voorbeeld illustreert de stelling dat een succesvolle inzet van ICT ter ondersteuning van het leerproces, grotendeels afhangt van de vaardigheid van de docent: de vaardigheid van de docent is vaak de beperkende factor, terwijl de leerlingen vrij gemakkelijk “meekomen”. De opdrachten moeten worden afgestemd op de leerling. Om dat te realiseren is het testen van essentieel belang. Het

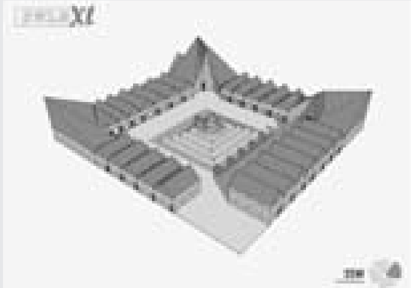
figuur 1

figuur 2

figuur 3



figuur 4



figuur 5

zal in het licht van het bovenstaande niet verbazingwekkend zijn dat ik mijn cursussen laat testen door leerlingen.
Deze cursus heb ik laten testen door een oud-leerling(nu 2-vmbo-TL). Deze leerling was erg vereerd met de opdracht en heeft me dan ook bruikbare tips gegeven. De tips waren van de vorm: ik kan het wel volgen, maar dat gaat voor andere leerlingen te snel / dat zou ik omdraaien / dit mag weg / dat zou ik zo doen. Na het ontwikkelen van een groot aantal cursussen en lessen, ben ik tot de volgende opzet gekomen.

Knoppencursus

Allereerst moeten leerlingen de belangrijkste functies kunnen bedienen. Het is net autorijden: 'Hoe de radio werkt, is niet interessant. Maar je moet wel kunnen sturen.' De leerling maakt, via een zelfgeschreven digitale leerroute in onze elektronische leeromgeving, kennis met de belangrijkste opties van het programma. Ik heb deze 'knoppencursus' opgebouwd als stripverhaal: veel plaatjes, weinig tekst; ***zie figuur 2*** op pag. 289. Voor de meer tekstueel en auditief ingestelde leerling heb ik verwijzingen toegevoegd naar artikelen en filmpjes.

Verwerkingsopdrachten

Na het aanleren van de basishandelingen moeten leerlingen iets complexere opgaven maken. Hierbij wordt af en toe iets meer gevraagd dan leerlingen geleerd hebben, omdat dit enerzijds vragen kan oproepen waardoor leerlingen uitgedaagd worden. Anderzijds worden leerlingen verplicht ook zelf de menu's te bekijken. Ze 'snuffelen' als het ware aan het programma. Dat is een belangrijke eigenschap om jezelf een programma eigen te maken. Om in termen van autorijden te blijven: 'Je hebt leren sturen, maar alleen op grote ruime wegen. Nu gaan we een wijk in met kleine straatjes. Daarnaast is het handig als je ook weet hoe je de koplampen aanzet.' Zo krijgt de leerling de opdracht een huisje en een slaapkamer te tekenen (***zie figuur 3***). Daarbij maakt hij impliciet kennis met veel wiskunde: (samengestelde) ruimtefiguren, roteren (van de meubels), spiegelen (enkele meubels zijn half getekend en door middel van spiegelen 'ontstaat' de andere helft), vergroten/verkleinen (om de meubels in de kamer te krijgen), enzovoort.

Eindopdrachten

Na de knoppencursus en de verwerkings-opdrachten is het tijd voor de eindopdracht. Ik geef vaak een vrije opdracht ('Maak een tekening. Ga je gang.'), omdat de ervaring leert dat veel leerlingen deze vrijheid gebruiken om de meest interessante zaken te tekenen, van brandblusser en wijnglas, tot caravan en skatebaan; ***zie figuur 4 en figuur 5.***
Deze opdracht biedt de mogelijkheid te differentiëren naar niveau. Sterker nog, leerlingen differentiëren zelf. Leerlingen die zich het programma niet geheel eigen hebben gemaakt, maken een tekening die lijkt op de verwerkingsopdrachten (elementair). De leerlingen die verder zijn, gaan vanzelf op zoek naar betere, mooiere en ingewikkeldere zaken om na te tekenen (complex).
Natuurlijk kan de docent afhankelijk van het niveau en de groep extra eisen stellen of tussentijds bijsturen, maar dat is mijns inziens een kwestie van aanvoelen. Uit ervaring weet ik dat een brugklas vmbo-TL/havo verder kan komen dan een tweede klas vwo. Dit heeft vaak te maken met de manier waarop leerlingen het aanpakken. Gaan ze proberen of gaan ze denken? Ook speelt mee hoe vaak ze dit soort opdrachten krijgen. In het begin van het jaar stellen leerlingen veel meer vragen tijdens dit soort lessen, omdat het een andere manier van werken is. Na verloop van tijd (2 à 3 lessen) zijn ze hieraan gewend en dan kun je als docent heel veel van de leerlingen vragen. Kortom, ze moeten het ervaren en ze moeten leren proberen.

Deel 2

In een volgende aflevering van *Euclides* geef ik aan op welke wijze dit programma het leerproces zou kunnen ondersteunen. Hierbij heb ik getracht dichtbij de lespraktijk te blijven, zonder daarbij expliciet de koppeling te maken met de literatuur die aan mijn keuzes ten grondslag ligt. Tenslotte geef ik aan hoe deze lessenserie is geëvolueerd tot zelfstandig 'vak' en hoe collega's en leerlingen tegen deze ontwikkelingen aankijken.

Info

- Filmpje Google SketchUp van Kevin van der Waal uit 1E op YouTube: *www.youtube.com/watch?v=q_TIeNqu_h0*
- Info op de website van ISW-Sweelincklaan ('s-Gravenzande): *www.hetisw.nl/sweelincklaan/nieuws/2612-nieuws-xl-lessen.html*

Over de auteur

Marc de Hoog is docent wiskunde, rekenen en informatiekunde aan de Interconfessionele Scholengroep Westland. Daarnaast is hij auteur ICT bij Moderne Wiskunde. Hij volgt een studie informatica aan de Open Universiteit.
E-mailadres: *hgm@isw.info*

Differentiëren naar instructiebehoefte

[Ria Brandt-Bosman en Henk Logtenberg]

Sterke en zwakke rekenaars verschillen onder andere omdat zij een verschillende instructiebehoefte hebben. Sterke rekenaars begrijpen de stof sneller en worden onrustig als van hen gevraagd wordt om toch te blijven opletten. Bovendien kunnen zij een ander soort instructie aan dan zwakke rekenaars. Over deze verschillen in instructiebehoefte en hoe dit toe te passen in de klas gaat dit artikel.

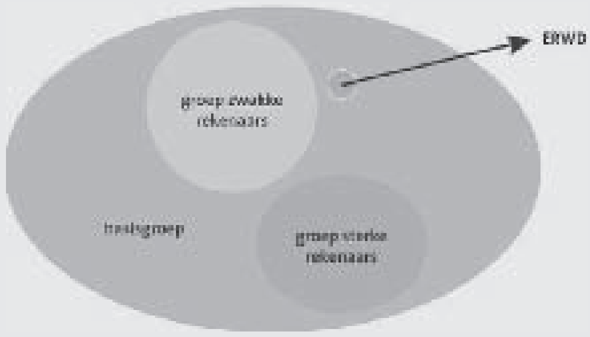
Om een eerste beeld te krijgen van de sterke en zwakke rekenaars, kunnen in eerste instantie de toetsgegevens of overdrachts-gegevens gebruikt worden. Het is onmogelijk om alle leerlingen in de klas individueel les te geven; het clusteren van leerlingen is daarom noodzakelijk.
Op basis van de beschikbare toetsgegevens is het mogelijk om elke klas te verdelen in een basisgroep, een groep sterke rekenaars en een groep zwakke rekenaars (***zie figuur 1*** op pag. 292). De basisgroep rekent op niveau, de groep sterke rekenaars rekent boven het niveau, en de groep zwakke rekenaars rekent onder het niveau. Door combinatie van leerlinggegevens kan elke leerling in een van deze drie groepen geplaatst worden. Vanzelfsprekend kan die indeling per rekendomein of per hoofdstuk verschillend zijn. Dus de wijze van clusteren wisselt door het jaar heen.

Toetsgegevens zijn niet alleen harde cijfers van bijvoorbeeld de basisschool, het leerlingvolgsysteem, de (digitale) methode of eigen toetsen. Een indeling op basis van alleen deze gegevens van leerlingen geeft onvoldoende informatie over de precieze rekenvaardigheid en al helemaal geen informatie over een effectieve aanpak. Hiervoor is aanvullende informatie nodig. Warme overdrachts-gegevens van de basisschool of van het vorige leerjaar, mentorgegevens, eigen observaties tijdens de rekenles of tijdens rekenactiviteiten, rekenwerkgesprekjes geven aanvullende betrouwbare informatie. De laatste gegevens zijn weliswaar wat zachter, maar voor ervaren docenten die bewust observeren en luisteren levert dit veel informatie op. De groepsindeling ontstaat uit een mix van cijfers ter signalering en uit gerichte observaties en kennis van de leerling. Elk van de groepen heeft een eigen instructiebehoefte.

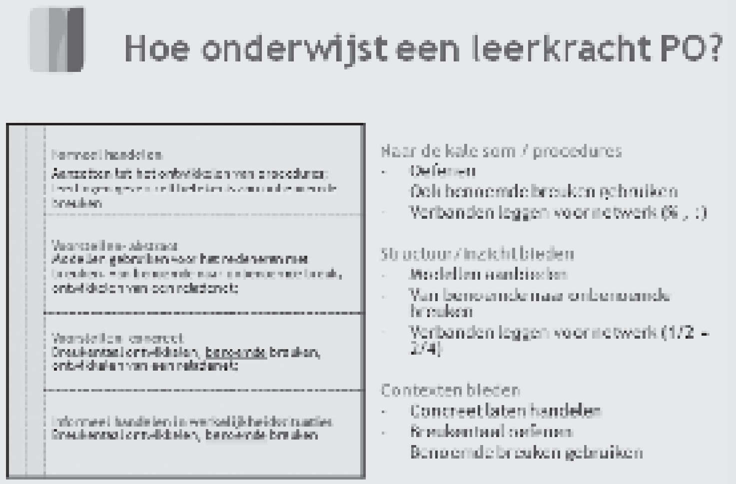
Bij het differentiëren naar instructiebehoefte is er enerzijds verschil in de lengte van de instructie. Zwakke leerlingen hebben behoefte aan meer uitleg, meer voordoen, meer samendoen voordat ze het zelf kunnen. Anderzijds hebben sterke en zwakke rekenaars ook behoefte aan een ander soort instructie. Om hierover iets te kunnen zeggen is het handelingsmodel (Van Groenestijn e.a.; 2011) een zeer bruikbaar didactisch middel. Voor sterke rekenaars kunt u bij de instructie bewust kiezen voor het formele niveau. Dit is voor zwakke rekenaars te hoog gegrepen, te abstract. Voor hen zijn de structurerende, modelondersteunende niveaus of zelfs het niveau van het informeel handelen (doen) geschikter. De opbouw van de rekenleerstof in het basisonderwijs is steeds van informeel handelen, via het werken met modellen naar formeel handelen. ***In figuur 2*** is dit voor de leerlijn breuken in grote lijnen weergegeven in het handelingsmodel. Het abstractieniveau neemt toe naarmate de activiteiten hoger in het model staan.

Om het handelingsmodel in de praktijk toe te passen is kennis vereist over de basis die in het primair onderwijs gelegd is. Maar de hamvraag is natuurlijk: wat heeft u aan die kennis in uw eigen onderwijspraktijk?
In het basisonderwijs is er vanaf groep 7 meer aandacht voor breuken (zowel 'kaal' als ondersteund door een context en door modellen). Voor leerlingen op niveau 1S (eind basisonderwijs) wordt de overstap van het modelondersteunende niveau van werken naar het formele niveau met standaardprocedures gemaakt.
Op referentieniveau 1F moet de leerling '⅔ pizza – ⅓ pizza' met hulp van een model (cirkel of rechthoek) kunnen oplossen. Op havo/vwo worden de bewerkingen met breuken op formeel niveau aangeboden (2S). Misschien merkt u in de praktijk dat breuken nog echt opnieuw aangeboden moeten worden. In dat geval begint u met begripsvorming op informeel niveau. Dat is echt de basis. De leerling moet begrijpen wat hij doet en waarom hij dat doet. De leerling moet zich iets voor kunnen stellen bij een rekenprobleem of rekenopdracht en begrijpen wat de bedoeling is. Contexten spelen daarbij een belangrijke rol: situaties uit de werkelijkheid waardoor de leerling betekenis kan verlenen aan het rekenen. Denk bijvoorbeeld aan de context van een reep chocolade of een pizza, die hij moet verdelen met zijn vrienden. Omdat de leerling zich daar iets bij kan voorstellen, wordt de brug geslagen naar rekenen in het dagelijks leven.

Op het Elstarcollege hebben 35 vierde klas leerlingen van de kaderberoepsgerichte leerweg in december 2011 een rekentoets gemaakt om te weten of er nog hiaten zijn op het gebied van rekenen. Uit de toetsgegevens blijkt dat er een groep van zo'n 12 leerlingen een onvoldoende scoort op het domein verhoudingen. De docenten herkennen in deze resultaten hun leerlingen, zij kunnen bij de analyse en interpretatie van de leerlinggegevens direct al meer specifieke informatie geven over motivatie, gedrag, studievaardigheid, bijzonderheden…
De docenten vragen de schoolleiding voor dit groepje leerlingen plus nog twee extra leerlingen wekelijks een extra lesuur rekenen op het rooster te plaatsen. Dit gebeurt. Bovendien zullen zij in hun wiskundelessen ook extra aandacht besteden aan verhoudingen. De docenten vragen begeleiding bij hun



figuur 1 Bron: Grijp de rekenkansen



figuur 2

didactisch handelen en klassenmanagement en training in het omgaan met verschillen. Er komen lesbezoeken en trainingen. Tijdens de training maken de docenten kennis met de verschillende niveaus van het handelingsmodel in combinatie met de samenhang tussen verhoudingen, breuken, kommagetallen en procenten. Door tegelijkertijd in de training ook te reflecteren op de lesbezoeken, komt er een gesprek op gang waar de docenten andere keuzes hadden kunnen maken bij hun uitleg in de wiskundeles, bijvoorbeeld over de stelling van Pythagoras; ***zie figuur 3***. *Wiskundedocent*: Bij de stelling van Pythagoras begin ik altijd met oppervlaktes, dat hoort dus bij het handelingsniveau voorstellen-concreet. En voor vmbo leerlingen werk ik altijd met een schematje bij de berekeningen, dat biedt structuur. Leerlingen van havo en vwo kunnen dat schematje soms ook wel gebruiken, maar moeten uiteindelijk naar een abstracter niveau van oplossen. Ik weet dat er op YouTube een filmpje bestaat waarin te zien is hoe een stratenmaker met een 3-4-5 driehoek een loodrechte hoek bepaalt voordat hij gaat tegelen. Daar kan ik ook een praktische opdracht van maken voor leerlingen.

Stelling van Pythagoras in het handelingsmodel

In figuur 3 (*a, b, c*) is het handelingsmodel ingevuld voor de stelling van Pythagoras (referentieniveau 2S). Hierin zijn een aantal screenshots weergegeven van het filmpje met de stratenmaker en van een animatie van 1 minuut. Het schema van het derde handelingsniveau komt in de huidige wiskundemethodes voor evenals de meest formele vorm van het vierde handelingsniveau.

Bewust kunnen schakelen tussen de diverse niveaus en zo inspelen op de verschillende instructiebehoeften van leerlingen is professioneel. Een inspirerende uitdaging om het rekenonderwijs vorm te geven!

Formeel handelen

$QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$QR^2 = 12^2 + 16^2$

$QR^2 = 400$

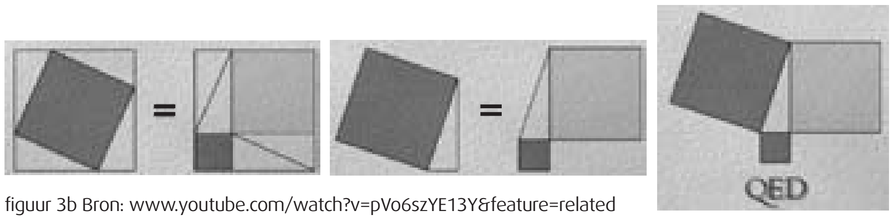
$QR = \sqrt{400} = 20$

Voorstellen – abstract

zijde	zijde²
PQ = 12	144
PR = 16	256 +
QR = 20	400

figuur 3a

Voorstellen – concreet



figuur 3b Bron: www.youtube.com/watch?v=pVo6szYE13Y&feature=related

Informeel handelen in werkelijkheidssituaties (Doen)

figuur 3c Bron: www.youtube.com/watch?v=JRTQZ_GUQM

Literatuur

- R. Brandt-Bosman, J. Kaskens (2012): *Grijp de rekenskansen - De referentieniveaus rekenen in het voortgezet onderwijs.* Amersfoort: CPS.
- M. van Groenestijn, C. Borghouts, C. Janssen (2011): Protocol Ernstige *Reken Wiskundeproblemen en Dyscalculie (bao, sbo, so).* Assen: Van Gorcum.

Over de auteurs

Ria Brandt-Bosman is managing consultant bij CPS en auteur van *Grijp de rekenkansen.* Henk Logtenberg is senior consultant bij CPS en ontwikkelaar van de rekenwerkgesprekken. Deze zijn te downloaden via: *www.cps.nl/nl/Diensten/Publicaties/Publicaties-Zoeken/Onderzoek.html?pid=Rekenwerkgesprek*

Knopen in het wiskundeonderwijs

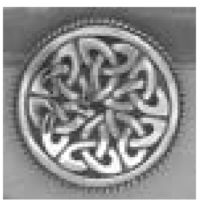
[Meike Akveld]

Knopentheorie is een actief deelgebied binnen de topologie. In dit artikel zullen we laten zien dat knopen heel goed passen in het middelbaar wiskundeonderwijs. Door met echte touwtjes te werken en praktische beschrijvingen uit te voeren, worden eigenschappen zoals zorgvuldigheid, geduld, grondigheid, fantasie, nauwkeurigheid en ruimtelijk inzicht ontwikkeld. Daarbij is een hoofdrol weggelegd voor het idee van de wiskundige invariant.

Knopen in het alledaagse leven
Iedereen weet hoe je een knoop in je veters legt en in Zwitserland, waar ik woon, worden je oude kranten alleen maar opgehaald als ze met een touwtje zijn vastgebonden (***zie figuur 1***). En ook daar heb je een knoop voor nodig. Je komt knopen in het dagelijks leven veel tegen, en dit artikel gaat dan ook over alledaagse knopen. Als je wel eens bent wezen zeilen of in de bergen hebt geklommen, dan weet je dat er heel veel verschillende knopen bestaan. Knopen zijn mooi en fascinerend en tegelijkertijd ook nuttig – en af en toe zelfs van levensbelang!

figuur 1

Geschiedenis van de knopen
De mensheid is al lang door knopen gefascineerd, hetzij vanwege hun schoonheid hetzij vanwege de praktische toepassingen. De eerste plaatjes van knopen dateren uit de oudheid (***zie figuur 2***).



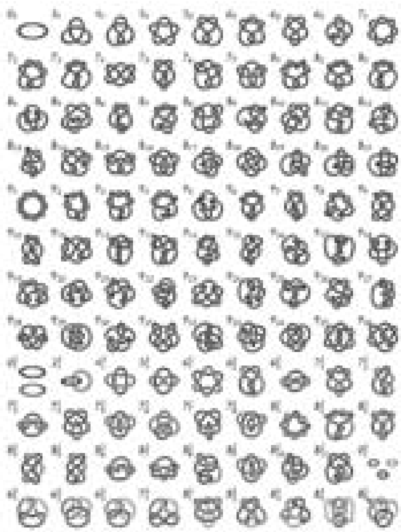
figuur 2

De wiskundige interesse voor knopen gaat niet zo heel ver terug, slechts een paar eeuwen. De eerste wiskundige die over knopen schreef, was de Duitser Carl Friedrich Gauss (1777-1855). De geboorte van de wiskundige knopentheorie was nog iets later, namelijk toen de natuurkundige Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907) de volgende hypothese opstelde: Atomen zijn stabiele samengeknoopte ether verstrengelingen (***zie*** [***6***]). Daarmee bedoelde hij dat ieder atoom gemodelleerd kan worden door een knoop. Alhoewel al snel bleek dat deze theorie niet klopte, was zijn stelling wel het begin van de knopentheorie. Andere wiskundigen begonnen zich voor knopen te interesseren en de Schotse wiskundige Peter Guthrie Tait (1831-1901) probeerde als eerste een tabel te maken met alle mogelijke knopen (***zie*** [***1***]).

Korte wiskundige inleiding
Wat bedoelen wiskundigen nu eigenlijk als ze over knopen spreken? Knopentheorie is een klein onderdeel van de topologie, een relatief jonge tak in de wiskunde, die in het Engels zeer passend als 'rubber geometry' bekend staat. Wiskundig gesproken zijn knopen stuksgewijs gladde inbeddingen van S^1 naar S^3 (***zie*** [***5***] ***en*** [***7***]). Maar dit is een behoorlijk complexe wiskundige definitie. We kunnen het ook zo omschrijven: Neem een stuk touw in je handen en knoop het zo ingewikkeld als je wilt. Maak uiteindelijk de beide touweindjes aan elkaar vast. (De plaats waar we ze aan elkaar vastgemaakt hebben, kunnen we zelfs vergeten). Dit is een knoop.

De tabel met alle knopen, waarmee Tait begonnen was, is de kern van de knopentheorie (***zie tabel 1***). Als je hem wat langer bekijkt, liggen de volgende twee vragen voor de hand:

- Hebben we echt alle knopen tot een bepaalde grootte in onze tabel?
- En hoe kunnen we zeker weten dat er zich geen dubbelgangers in onze lijst bevinden?



tabel 1

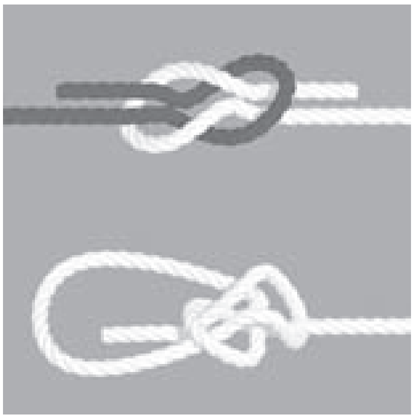
In de knopentheorie gaat het erom, knopen van elkaar te onderscheiden. Wiskundigen proberen eigenschappen van knopen (zogenaamde invarianten) te definiëren om te bepalen of twee knopen hetzelfde zijn, of niet. Vergelijk dit maar eens met de hoeken

van een driehoek: Wanneer twee driehoeken dezelfde hoeken hebben, dan noemen we deze driehoeken gelijkvormig.
De driehoeken zijn op deze manier een invariant voor gelijkvormigheid. Alle driehoeken met dezelfde hoeken zijn gelijkvormig en als de hoeken niet hetzelfde zijn, weten we zeker dat die driehoeken ook niet gelijkvormig kunnen zijn.
Dat het niet zo eenvoudig is om te bepalen of twee knopen verschillend zijn of niet, laat het volgende voorbeeld zien: de twee onderstaande knopen (***zie figuur 3***) worden het Perko-paar genoemd. Sinds 1899 kwamen deze beide knopen voor in de knopentabel als twee verschillende knopen, beide met kruisingsgetal 10. Pas in 1974 ontdekte de Amerikaanse advocaat Kenneth Perko dat deze twee knopen in werkelijkheid een en dezelfde knoop zijn.

figuur 3

Wat bedoelen wiskundigen nu eigenlijk als ze zeggen dat twee knopen hetzelfde of verschillend zijn? In de topologie zijn twee objecten gelijk als je de ene in de andere kunt veranderen zonder een schaar te gebruiken. Men trekt en schuift dus net zo lang aan de touwtjes van de ene knoop tot hij er net zo uitziet als de andere. Probeer dit maar eens met het Perko-paar!
Hoe kunnen we systematisch bepalen of twee knopen hetzelfde zijn? Dit is een van de kernvragen van de wiskundige knopentheorie – een actief onderdeel binnen de moderne wiskunde.

Een inleidend voorbeeld
Ik wil hier geen theoretische verhandeling houden over hoe knopen in het middelbaar onderwijs ingezet kunnen worden, maar aan de hand van een onderwijssequentie laten zien, hoe ik het onderwerp 'knopen' in mijn klassen heb behandeld. Om een eerste gevoel voor de complexiteit van knopen te ontwikkelen en de behoefte te wekken om het onderwerp systematisch te benaderen, gaan de scholieren eerst met de volgende twee opgaven aan de slag (***zie*** [***2***]). Daarbij moet gezegd worden, dat vooral opgave 2 door jongere scholieren met veel enthousiasme wordt gedaan, maar oudere scholieren vinden hem wat kinderachtig.



figuur 4

Opgave 1 – ***In figuur 4*** zie je twee knopen die nog niet af zijn. Bekijk beide figuren heel goed en maak dan deze knopen na met je touwtje (soms heb je meer dan een touwtje nodig).

Opgave 2 – Verzin zelf een knoop en maak die met je touwtje. Beschrijf nu jouw knoop door de telefoon aan een klasgenoot zó precies, dat hij of zij hem ook kan maken (natuurlijk zonder gebruik te maken van de cameramogelijkheid op je mobiele telefoon). Vergelijk later de beide knopen met elkaar. Zijn het dezelfde knopen of niet?

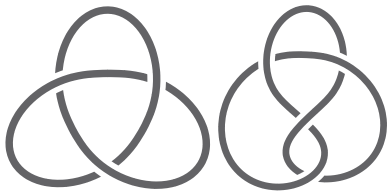
Zodra de behoefte ontstaat om knopen systematisch te benaderen, is het geen grote stap meer om het begrip *knopendiagram* in te voeren. Je kunt alleen op een zinvolle manier over knopen praten, als je een plaatje van de knoop hebt. Een projectie op het tweedimensionale vlak lijkt de oplossing te zijn. Maar let er wel op dat de projectie duidelijk is: je moet bij iedere kruising van twee touwtjes goed kunnen zien welk touwtje bovenlangs gaat en welk onderdoor. De volgende opgave lijkt misschien triviaal, maar is heel zinvol om knopen beter te begrijpen.

Opgave 3 – Maak zelf een niet al te ingewikkelde knoop en construeer ook de daarbij horende projectie op het horizontale vlak. Mocht je hier moeite mee hebben, houd je knoop dan onder een lamp en kopieer (met een potlood) de schaduw, die de knoop op een blad papier werpt. Nu moet je alleen nog bij alle kruisingen met een gum duidelijk maken welk touwtje bovenlangs gaat en welk touwtje onderdoor.

De volgende paragraaf bestaat uit een reeks opgaven. Hierin leren de scholieren knopendiagrammen beter kennen en worden ze geconfronteerd met het probleem hoe je kunt vaststellen of twee verschillende diagrammen projecties van dezelfde knoop zijn. En zo niet, hoe je dat dan zéker kunt weten.

Kleine kruisingsgetallen – een onderwijssequentie
De eenvoudigste en meest intuïtieve knopen-invariant is een knoop met het minimale aantal kruisingen. In de volgende onderwijssequentie (***zie*** [***2***]) ziet u hoe u de scholieren vertrouwd kunt maken met deze nieuwe invariant en hoe ze die ook kunnen berekenen.

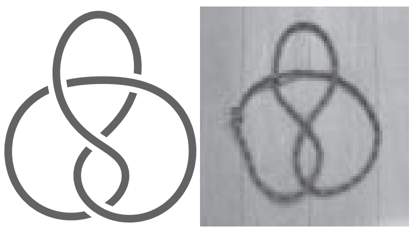
De centrale vraag is: Wanneer zijn twee knopen hetzelfde? Of anders gezegd: Hoe kunnen we vaststellen of twee knopen verschillend zijn? Laten we eens kijken naar de twee knopen ***in figuur 5***.



figuur 5

Iedereen kan waarschijnlijk zien dat dit twee verschillende knopen zijn.

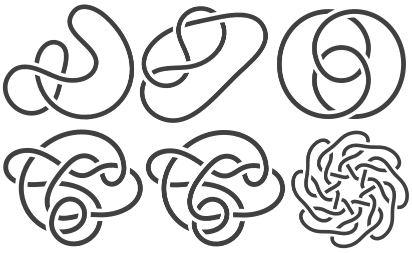
Opgave 4 – Beschrijf het verschil tussen de twee knopen ***in figuur 5***.
Opgave 5 – Bekijk nu het knopendiagram ***in figuur 6***. Hoeveel kruisingen tel je? Is deze knoop dezelfde als een van de knopen ***in figuur 5***? Zo ja, welke dan?



figuur 6

Hoewel de knoop ***in figuur 6*** lijkt op de knoop ***in figuur 5*** rechts, is het niet moeilijk om te zien dat het in werkelijkheid dezelfde knoop is als ***in figuur 5*** links. Het aantal kruisingen in een knopendiagram zegt nog niets over de knoop zelf. Wat telt, is het minimale aantal kruisingen, dat we door 'deformeren' (veranderen) in een knopendiagram kunnen bereiken. Dit getal noemen we het kruisingsgetal van een knoop. Het is per definitie een knopen-invariant.

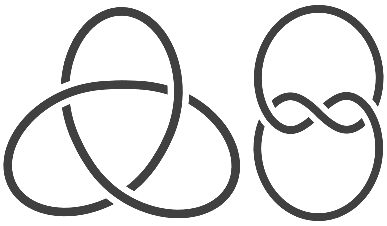
Opgave 6 – Bepaal het kruisingsgetal van de zes knopen ***in figuur** 7*. Mocht je daar moeite mee hebben, neem dan een touwtje en maak de knopen na. Je ziet nu sneller welke kruisingen overbodig zijn en wat het echte kruisingsgetal van de knoop is.



figuur 7

We hebben nu gezien dat iedere knoop een kruisingsgetal heeft. Maar je kunt de vraag ook omdraaien. Kan ieder natuurlijk getal het kruisingsgetal van een knoop zijn? Het is niet moeilijk om te zien dat een knoop met kruisingsgetal 0 gewoon een cirkel is. Wiskundigen noemen dat een niet-knoop.

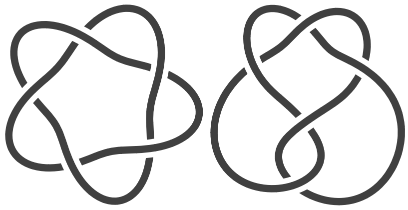
Opgave 7 – Bepaal of er knopen bestaan met kruisingsgetal 1, 2 of 3.
Opgave 8 – Laat zien dat de twee knopendiagrammen *in figuur 8* inderdaad een en dezelfde knoop representeren.



figuur 8

Omdat er geen knopen bestaan met kruisingsgetal 1 of 2, is de knoop in figuur 8 de eenvoudigste 'echte' knoop. Het is de overhandse knoop en hij wordt ook wel *klaverbladknoop* genoemd – Begrijp je waarom?

Opgave 9 – Maak met je touwtje zelf een knoop met kruisingsgetal 4 en teken een zo eenvoudig mogelijk knopendiagram van deze knoop. Deze knoop wordt ook wel de achtknoop genoemd (waarom?).
Opgave 10 – Bepaal nu *in figuur 7* welke knopendiagrammen de niet-knoop afbeelden, welke de overhandse knoop en welke de achtknoop.
Opgave 11 – Bekijk nu eens de twee knopendiagrammen *in figuur 9* en bepaal de kruisingsgetallen. Zijn deze knopen hetzelfde? Beschrijf in je eigen woorden het verschil tussen deze beide knopen.



figuur 9

Onderwijservaring

Ik heb het onderwerp knopen al een aantal keren in mijn wiskundelessen behandeld. Enerzijds heb ik een paar keer een inleiding in het onderwerp knopen gegeven aan leerlingen van 12-14 jaar. En iedere keer stelde ik vast dat de scholieren deze opgaven met veel enthousiasme te lijf gaan en veel plezier beleven bij het uitproberen van en puzzelen met knopen – het spreekt voor zich dat iedere scholier gewapend is met zijn eigen touwtje (***zie figuur 10***).

figuur 10

Tegelijkertijd kon ik ook zien dat de scholieren zich inderdaad met de wezenlijke vraagstukken van de knopentheorie bezighielden. In levendige discussies werd besproken of twee knopen nu wel of niet dezelfde knoop waren. Ook het namaken van knopen leidde tot interessante gesprekken en bleek veel minder eenvoudig dan het misschien op het eerste gezicht lijkt. In Zwitserland heeft de leraar op de middelbare school, hier gymnasium genoemd, veel vrijheid in de invulling van zijn lesprogramma. Deze vrijheid heb ik twee keer benut om met een eindexamenklas het thema knopen uitvoerig te behandelen. In het begin waren de scholieren, in tegenstelling tot hun jongere medestrijders, zeer sceptisch en namen ze de lessen niet echt serieus. De vraag of dit dan eigenlijk wel wiskunde is, werd meerdere malen gesteld. Het enige antwoord dat ik mijn leerlingen kon geven, was dat ze een beetje geduld moesten hebben en mij moesten geloven dat er inderdaad heel veel wiskunde bij knopen komt kijken. Ondanks het aanvankelijke wantrouwen realiseerden de scholieren vrij snel dat hier een echt touwtje ter hand genomen moest worden (in de eerste les, hadden de meesten hun touwtje 'vergeten' en duurde het niet lang of de veters werden uit de schoenen gehaald, vanaf de tweede les had dan iedereen een eigen touwtje bij zich). Na verloop van tijd veranderde de instelling ten opzichte van knopen compleet. De scholieren vonden het een leuk en interessant onderwerp. Ze begrepen dat het hier daadwerkelijk om wiskunde gaat en wel een tak van wiskunde die hen tot nu toe onbekend was. De idee van een invariant was een centraal thema bij het behandelen van knopen en ik geloof dat mijn scholieren dit wiskundig enorm belangrijke concept goed hebben begrepen. Het hoogtepunt van de eindexamenlessen was het *Jones-polynoom*. De regels, hoe het berekend kon worden, waren bekend. Maar wie zou het lukken om het polynoom van een ingewikkelde knoop zonder fouten te berekenen? Dit verlangt concentratie en een zeer nauwkeurige werkwijze. Enkele leerlingen slaagden erin ook het polynoom voor knopen met 6 kruisingen te bepalen. Ik vond het interessant, dat dit niet altijd degenen waren, die normaal de hoogste cijfers haalden.

Waarom knopen in het middelbaar onderwijs?

Het kruisingsgetal 5 is slechts het topje van de ijsberg. Het aantal verschillende knopen groeit exponentieel met het kruisingsgetal. Juist dat maakt de knopentheorie tot een interessant en spannend onderzoeksgebied binnen de wiskunde. Knopen horen echter niet alleen thuis binnen de universitaire wiskunde, maar kunnen ook in het middelbaar onderwijs besproken worden. Er zijn voor mij verschillende argumenten waarom we knopen al op de middelbare school kunnen (of moeten) behandelen.

- Vaak komt de schoolwiskunde niet verder dan de 17e of 18e eeuw. Wiskunde lijkt daardoor een afgesloten en daarmee dode wetenschap. Leerlingen denken dat alles binnen de wiskunde al wel ontdekt is, en dat ze hetzelfde moeten leren dat vele generaties voor hen al hebben geleerd, geoefend en gestampt. Knopen zijn anders. De grote ontdekkingen in de knopentheorie werden gedaan in de jaren '80 van de vorige eeuw en dit gebied ontwikkelt zich ook vandaag de dag nog verder. Desalniettemin kunnen middelbare scholieren deze ontdekkingen begrijpen. In de bovenbouw kunnen ze zelfs de nieuwste ontdekking (het

Jones-polynoom) leren begrijpen en op deze manier een stukje moderne niet-standaard wiskunde leren kennen.

- In het onderwijs van knopen is het concept van de invariant heel belangrijk. Dit idee komt volgens mij in het middelbaar onderwijs te weinig aan bod. Soms wordt het getal van Euler behandeld (tenminste bij ons in Zwitserland, het geboorteland van Leonhard Euler), maar of de scholieren nog andere wiskundige invarianten tegenkomen tijdens hun middelbare schoolcarrière, betwijfel ik. In de knopentheorie kan de idee van de invariant uitvoerig worden behandeld en verdiept. Leerlingen leren dan wat een invariant is (aan welke eigenschappen die moet voldoen), wat je met een invariant kunt bewijzen – en ook wat je er niet mee kunt bewijzen. In de omgang met invarianten komt automatisch het oefenen van de logica in de wiskunde voor.
- Knopen zijn ook zeer geschikt om het ruimtelijk inzicht te oefenen. Leerlingen krijgen tijdens de knopenlessen te maken met teksten, formules en figuren, maar ook met werkelijke driedimensionale objecten (de touwtjes). Op deze manier worden ze gedwongen zich met de ruimtelijke dimensie bezig te houden. Het wisselen tussen de tweedimensionale projectie van een knoop en de driedimensionale 'echte' knoop is goed voor de ontwikkeling van het ruimtelijke denken.
- Last but not least wil ik nog toevoegen dat knopen dwingen tot een exacte en nauwkeurige werkwijze. Op het eerste gezicht lijkt het knopen van touwtjes misschien banaal, maar binnen het onderwijs is nauwkeurig leren werken een belangrijke leeropdracht, die alleen bereikt wordt door veel en veelzijdig oefenen. En nauwkeurigheid is natuurlijk niet alleen binnen de wiskunde van groot belang. Het (na-)tekenen van een knopendiagram vergt een hoge concentratie en een zeer nauwkeurige werkwijze. Probeert u zelf maar eens een knoop met 10 kruisingen correct op het bord te tekenen!

Quo vadis?

Zoals ik heb beschreven kan men in de bovenbouw in de knopentheorie tot het Jones-polynoom komen. Dit polynoom werd in 1984 door de Nieuw-Zeelandse wiskundige Vaughan Jones ontdekt. Jones ontving er in 1990 de Fields Medaille voor, de hoogste onderscheiding binnen de wiskunde. Het Jones-polynoom is een algebraïsche invariant, niets meer dan een veelterm, een object dat de leerlingen al lang bekend is. Het ontdekken van dit polynoom kan door de scholieren stap voor stap worden gevolgd. (Alhoewel we dan niet de methode van Jones volgen, maar de stappen van Louis Kauffman, die dit polynoom één jaar later net iets anders interpreteerde en berekende).
In de behandeling van het Jones-polynoom leren de scholieren een totaal nieuwe toepassing van polynomen kennen, die niets te maken heeft met de tot dat moment in de les behandelde algebra.

De knopentheorie voert echter veel verder dan de wiskunde. Deze theorie, die ontstaan is door een denkfout in de scheikunde, kan uiteindelijk ook weer in de biologie en scheikunde worden toegepast. Ik noem hier slechts een paar voorbeelden: bij het verdubbelen van het DNA moet een (weliswaar niet-gesloten) knoop ontward worden. Om dit proces te begrijpen, kan de knopentheorie helpen. Een tweede toepassing is te vinden bij de eiwitten. Er bestaan bepaalde eiwitmoleculen die uit precies dezelfde atomen bestaan, maar afhankelijk van hoe het molecuul verknoopt is, heeft dit eiwit andere eigenschappen. Ook hier kunnen knopen helpen de dingen beter te begrijpen.
En ook in moderne wetenschapstoepassingen zoals stringtheorie of quantumcomputers blijken knopen bepaalde fenomenen uit te kunnen leggen. Knopen zijn dus geen hersenspinsel van de wiskundigen, maar vormen een belangrijk onderzoeksgebied. Afhankelijk van de interesse van een klas kan men een of meerdere van deze toepassingen wat preciezer bekijken.
Een heel andere toepassing van knopen is van decoratieve aard: vlechten, Moorse mozaïeken, zeemansknopen enzovoort bieden een enorm spectrum van mogelijkheden om met behulp van knopen iets moois te maken. Dit is waarschijnlijk geschikter voor de onderbouw, en ook hierbij beleven de scholieren veel plezier (***zie*** [*4*]).

Er is heel veel geschreven over knopen en een internet research levert snel vele verschillende boeken op verschillende niveaus op. Zelf heb ik twee boekjes over knopen geschreven, die in het middelbaar onderwijs te gebruiken zijn en direct door scholieren gelezen kunnen worden – ze kunnen ook als opstap dienen voor een eindexamenwerkstuk of voor een werkweek; ***zie*** [*2*] ***en*** [*3*] voor de titels.
Beide boekjes bestaan uit tekst (in het Duits of Engels) en worden begeleid door vele opgaven met uitgebreide oplossingen achter in het boekje.

Verantwoording

Dit artikel is eerder in het Duits verschenen als *Knoten im Mathematikunterricht* in *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* (MNU), Heft 2/2009.
Voor de hulp bij het vertalen in het Nederlands spreek ik mijn dank uit aan Barbara Mounier en Fransje Akveld.

Literatuur

[1] Colin C. Adams (1994): *The knot book*. New York: W.H.Freeman and Company.
[2] Meike Akveld, Andrew Jobbings (2011): *Knots unravelled – From strings to mathematics*. Shipley (UK): Arbelos. Zie: *www.arbelos.co.uk/KnotsUnravelled.html*
[3] Meike Akveld (2007): *Knoten in der Mathematik – Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln*. Zürich: Orell Füssli Verlag.
[4] Fransje Akveld, Meike Akveld (1997): *Knopen*. Leiden: Stichting Vierkant voor Wiskunde (Doeboek 11).
[5] W.B. Raymond Lickorish (1997): *An introduction to knot theory*. Graduate Texts in Mathematics; New York: Springer-Verlag.
[6] W.H. Thomson (1867): *On vortex motion*. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 25 (1867); pp. 217-260 (*zie: www.aos.princeton.edu/WWWPUBLIC/gkv/history/Kelvin1869.pdf*).
[7] [Red.] WikipediA: *http://nl.wikipedia.org/wiki/Knopentheorie*

Over de auteur

Meike Akveld is in 2000 gepromoveerd aan de ETH in Zürich op het gebied van de differentiaalmeetkunde. Vervolgens heeft ze tien jaar les gegeven op een Zwitsers gymnasium en sinds 2011 is ze wetenschappelijk medewerkster aan de leerstoel voor wiskunde didaktiek aan de ETH, Zürich.
E-mailadres: *meike.akveld@math.ethz.ch*

Singaporees rekenen

[Lonneke Boels]

Masterclass Ban Har Yeap

Bij de laatste internationale rekentest van PISA (Programme for International Student Assessment) kwam Singapore als beste naar voren (***zie tabel 1*** op pag. 301). Volgens HCO en Bazalt – de schoolbegeleidingsdiensten die zich hierin hebben verdiept – komt dit vooral doordat (potentiële) havo- en vwo-leerlingen daarin veel beter scoren. Maar wat is nu de oorzaak van deze veel hogere score? Op 27 en 28 september 2011 was Ban Har Yeap in Nederland om ons hierover te vertellen.
Ban Har Yeap is tien jaar lerarenopleider geweest in Singapore aan het Nationale Instituut voor Educatie en is nu directeur van o.a. het Cavendish instituut – ook een instituut dat opleidingen aan leraren verzorgt. Volgens hem zijn er drie belangrijke oorzaken voor het succes.
(1) Er is gebruik gemaakt van *evidence based* leertheorieën (***zie kadertekst***) en onderzoek naar wat werkt in onderwijs. Een gevolg hiervan is bijvoorbeeld de consequente invoering van de CPA-aanpak in de lessen en didactiek van het reken-wiskunde-curriculum gebaseerd op de theorie van Jerome Bruner (1973); ***zie kadertekst*** voor uitleg van CPA. Daarnaast is de theorie van Zoltan Dienes (1960) gebruikt over systematische variatie (opbouw) van taken – bijvoorbeeld leren optellen zonder en met groeperen van aantallen. De derde leertheorie die is gebruikt is die van Richard Skemp (1976) die onderscheid maakt tussen een procedure of algoritme kunnen uitvoeren enerzijds en dit kunnen verklaren anderzijds.
(2) Elke docent gaat elk schooljaar 100 uur op nascholing in zijn vak, ná het behalen van het diploma.
(3) Rekenen, wiskunde maar ook natuurkunde en eigenlijk elk vak in het curriculum wordt gezien als een voertuig voor het ontwikkelen van het denken. Een i-phone kan beter en sneller moeilijke sommen uitrekenen dan mensen ooit kunnen leren dus als we beter willen zijn dan machines heeft het geen zin om eindeloos te concentreren op het aanleren van rekenstrategieën voor lastige opgaven (zoals onder elkaar rekenen of cijferen). Wat mensen wel veel beter kunnen dan

Evidence based theorieën

Singapore had volgens Ban Har Yeap ten tijde van de invoering van het nieuwe curriculum geen geld voor eigen onderzoek. Daarom heeft Singapore gebruik gemaakt van drie evidence based leertheorieën. Dit is na te lezen in bron 2. De drie theorieën zijn van Jerome Bruner, Zoltan Dienes en Richard Skemp. Jerome Bruner heeft de basis gelegd voor de CPA-aanpak. Zoltan Dienes legde de grondslag voor systematische variatie in problemen; bijvoorbeeld verschillende representaties van een 2-cijferig getal in de vorm van takkenbossen die gebundeld zijn, 10 staven opgebouwd uit losse blokken, notatie in de vorm van 30 en 4 waarbij de vier over de 0 schuift, notatie als 34 en notatie met geld: 3 munten van 10 cent en 4 van 1 cent. Deze laatste is van de schematische weergaven de lastigste omdat er nu geen verband meer is tussen hoeveelheid en grootte van echt voorwerp.
Richard Skemp maakt onderscheid tussen een procedure beheersen, bijvoorbeeld het onder elkaar vermenigvuldigen, en een procedure kunnen uitleggen, bijvoorbeeld uitleggen hoe het werkt dat je bij delen door een breuk mag vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk. Kortom, Skemp legde de basis in deze aanpak voor het leren met begrip,het concept, in plaats van het leren van uitsluitend procedures. Vanwege deze drie leertheorieën spreekt Singapore zelf niet van Singaporees rekenen. De theorieën zijn immers niet uit Singapore afkomstig; ze zijn er alleen op een slimme manier toegepast.

CPA

CPA staat voor Concrete Pictorial Abstract. In goed Nederlands: concreet, schematisch, abstract of formeel. In Nederland wordt in het rekenonderwijs op de basisschool meestal ook deze methode gebruikt. In een eerder artikel schreef ik hier al over; zie bron 1. In Nederland wordt overigens ook wel het onderscheid gemaakt: concreet, schematisch, abstract en formeel. Concreet is dan met echt materiaal, schematisch is met plaatjes van het materiaal – eventueel gestileerd (kastanjes worden rondjes), abstract is een model dat los staat van de context – bijvoorbeeld het strokenmodel of een verhoudingstabel, en formeel is een kale opgave zonder gebruik te maken van modellen of schema's.
Wil je kleuters leren rekenen dan is het waarschijnlijk voor iedereen duidelijk dat het geen zin heeft om met kale sommen te beginnen. Kleuters beginnen met het tellen van concreet materiaal (***zie figuur 1a***). In groep 3 gaan basisscholen daarmee verder en wordt de overstap gemaakt naar plaatjes. In eerste instantie zijn dit plaatjes of tekeningen van voorwerpen. In een later stadium worden dit blokjes, vergelijkbaar met duploblokken. Dit biedt mooie gelegenheid om naar staven van basis 10 te gaan en dus richting MAB-materiaal (***zie figuur 1b***). Uiteindelijk resulteert dit in de notatie en de aanpak van kale (formele) opgaven.
Het voordeel van deze manier is dat je kunt differentiëren in aanpak van opgaven zonder direct te hoeven differentiëren in moeilijkheidsgraad.

Nascholing docenten

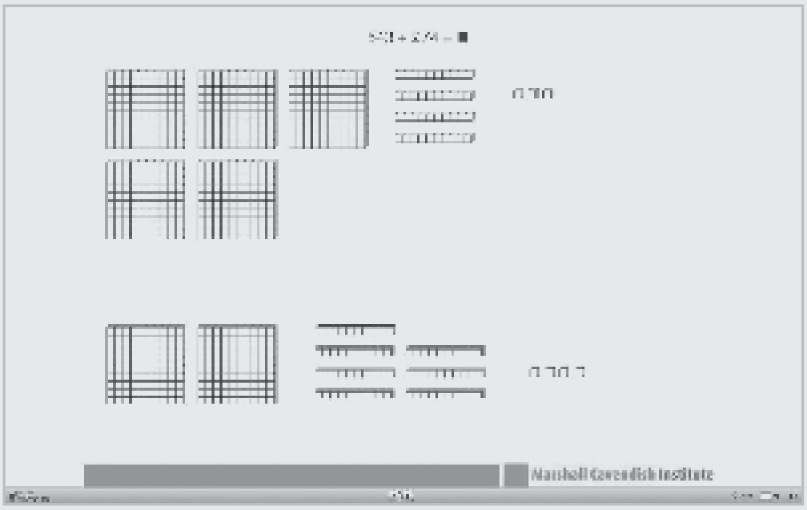
Wie echt wil begrijpen hoe anders het onderwijs is Singapore is, moet zien hoe het eraan toegaat in klaslokalen in Singapore. Pas dan wordt, in elk geval voor mij, duidelijk hoe anders het onderzoek in een klaslokaal eruitziet vergeleken met mijn eigen lessen. De docent geeft hier gewoon niet het antwoord op de vraag. Met eindeloos geduld en inzet en benutting van al zijn didactische vaardigheden helpt de docent de klas het probleem te onderzoeken, te ontdekken en te doorgronden. Helaas is de video die Ban Har Yeap ons toonde tijdens de masterclass niet via internet beschikbaar. U zult dus naar een masterclass moeten als u meer wilt weten. Het is namelijk o.a. dit wat in de nascholing aan leerkrachten verder wordt geleerd en verdiept. Hoewel de nascholing gericht is op leerkrachten van het basisonderwijs, is deze ook interessant voor docenten in het voortgezet onderwijs. Enerzijds omdat docenten van alle vo-scholen zich nu meer dan voorheen zullen (moeten) verdiepen in effectieve manieren om het rekenen te onderhouden en uit te bouwen. Anderzijds omdat met name op het vmbo een (groot) deel van de wiskunde bestaat uit rekenvaardigheden – afhankelijk van welk opleidingsniveau het precies betreft.

machines is denken. Dus dat moet je verder ontwikkelen. Dit idee is consequent in het curriculum doorgevoerd.

Wat betekent deze aanpak nu in de praktijk? Ten eerste wordt er veelvuldig gebruik gemaakt van het strokenmodel. Daarnaast wordt het denken ontwikkeld via zorgvuldig daarvoor uitgekozen opgaven. Bovendien wordt leerkrachten geleerd hoe je opgaven kunt verdiepen voor snelle leerlingen zonder hen aparte of extra stof te geven. Tot slot wordt er op een slimme manier geoefend op basisvaardigheden zoals de tafels, nadat deze met inzicht zijn geleerd.
Wat houdt het strokenmodel in? Bij het strokenmodel wordt een opgave omgezet in een strook waarbij op de plaats van de onbekende een vraagteken wordt gezet. Het is vooral een manier om de gedachten te ordenen.
Het voorbeeld dat Ban Har Yeap gaf, gaat over een schaal met suiker (***zie ook figuur 2a***).
Allan heeft een schaal met suiker. Het geheel weegt 110 gram. Bella doet driemaal de hoeveelheid suiker in de schaal erbij. Het geheel weegt nu 290 gram. Hoeveel gram suiker doet Bella erbij?

Voor deze situatie worden nu stroken gebruikt (***zie figuur 2b***). Ban Har Yeap had hiervoor enkele magneetjes in de vorm van rechthoeken met dezelfde breedte en verschillende lengten en kleuren. Allereerst plakte hij de strook (magneet) voor de schaal op het bord. Vervolgens kwam daar een strook (magneet) van een andere lengte voor de suiker bij. Dat is wat Allan heeft gewogen en is dus samen 110 gram.
Bella krijgt op vergelijkbare manier een strook voor de schaal en vier korte stroken voor de suiker. Op deze manier is voor leerlingen snel duidelijk dat het hier om het verschil tussen beiden gaat en dat dit het gewicht is van 3 delen suiker. Dat verschil is 180 gram en is het antwoord op de vraag. Bovendien zijn nog meer gegevens te vinden. Een deel suiker weegt bijvoorbeeld kennelijk 60 gram, dus weegt de schaal 50 gram. Deze opgave maken leerlingen van groep 6/7 en kennen wij als het oplossen van


figuur 1a Werken met concreet materiaal voor getallen als voorbereiding op het strokenmodel (bron: 6)



figuur 1b Schematisch niveau getallen(MAB-materiaal)

figuur 2a Bron: 6

figuur 2b Bron: 5

twee vergelijkingen met twee onbekenden. In het huidige wiskundecurriculum wordt dit – afhankelijk van de gebruikte methode – voor het eerst geïntroduceerd en behandeld in 5-havo (bijvoorbeeld in *Getal & Ruimte*, editie 2007, hoofdstuk 10, formules combineren) en 5-vwo. Overigens zijn er ook methodes (en scholen) die dit onderwerp al in de tweede klas behandelen (bijvoorbeeld op de Vrije School). De overstap naar de formele wiskunde met woordvergelijkingen (vmbo) en vergelijkingen met *x en y* kunt u hier vermoedelijk zelf nu wel maken. De methodiek laat zien hoe het mogelijk is om veel eerder in het curriculum wiskunde inzichtelijk te maken.

Oefening basisvaardigheden

Net als veel wiskundedocenten hier onderkennen de docenten in Singapore het belang van herhaling en inslijpen van basiskennis van bijvoorbeeld de optellingen onder en over het tiental (2 + 5 en 3 + 8) en de vermenigvuldig- en deeltafels. Daarom staan in Singapore de tafels op de opstaande zijden van traptreden (***zie figuur 3***). De tafel van 3 en van 6 worden hier bewust naast elkaar gezet. Leerlingen krijgen dan de mogelijkheid om zelf het verband hiertussen te ontdekken. Bovendien worden de tafels letterlijk op de trap gestampt van voor naar achter en terug. We weten allemaal dat het bewegen tijdens leren het leerproces ondersteunt, met name bij automatiseren en memoriseren van tafels e.d. Het aanleren van onbegrepen regels is echter uit den boze in Singapore. Hierdoor en door het feit dat slechts één onderwerp per keer wordt uitgediept, wordt veel tijdswinst behaald die anders zou opgaan aan herhaling van nog niet ingeslepen onderwerpen.

Het denken van leerlingen wordt verder ontwikkeld met zorgvuldig gekozen opgaven. Een leuk voorbeeld hiervan voor groep 6, 7 en 8 is het volgende.

Neem iemands naam, bijvoorbeeld DAVID. Nu gaan we de letters in deze naam nummeren op een speciale manier: D = 1, A = 2, V = 3, … De laatste D wordt zo nummer 5. Daarna gaat het verder in omgekeerde volgorde: de I wordt nu nummer 6 en de V wordt nummer 7, …

Het is leuker om eerst zelf hierover na te denken voordat u het schema ziet.

In figuur 4 is de nummering voor een aantal regels uitgeschreven. Een vragen die u uw leerlingen kunt stellen, is bijvoorbeeld: Welke letter komt overeen met het 99e getal? In de paragrafen hierna geef ik nog enkele voorbeelden van Ban Har Yeap aangevuld met ontdekkingen uit 5-vwo voordat deze klas het onderwerp rijen had gehad.

Verdieping van een opgave

Een vast onderdeel van het curriculum voor lerarenopleidingen en nascholing aan leraren met bevoegdheid is de vraag hoe je eenzelfde opgave kunt verdiepen voor snellere leerlingen. Nemen we bijvoorbeeld de opgave met de suiker. In plaats van de eerdere vraag zou u de leerlingen kunnen vragen hoe het antwoord zou luiden als Bella exact dezelfde schaal zou nemen als Allan en deze zou vullen met driemaal zoveel suiker als Allan. Een kleine verandering in de opgave ter verdieping van het onderwerp.

Bij de opgave over DAVID zijn de mogelijkheden voor verdieping schier eindeloos. Voor de snelle leerlingen, kunt u lastigere getallen vragen, bijvoorbeeld: Welke letter hoort bij 2011? Andere mogelijkheden vindt u bij 'Verdieping rijen'. Het is natuurlijk ook interessant om met de klas een andere naam te onderzoeken. En als verdiepingsvraag voor de hele klas: Welke letter is de 99e letter in jouw naam?

Verdieping rijen

Wie denkt dat de mogelijkheden met de naam DAVID nu wel verkend zijn, kan eens kijken naar de volgende vragen.

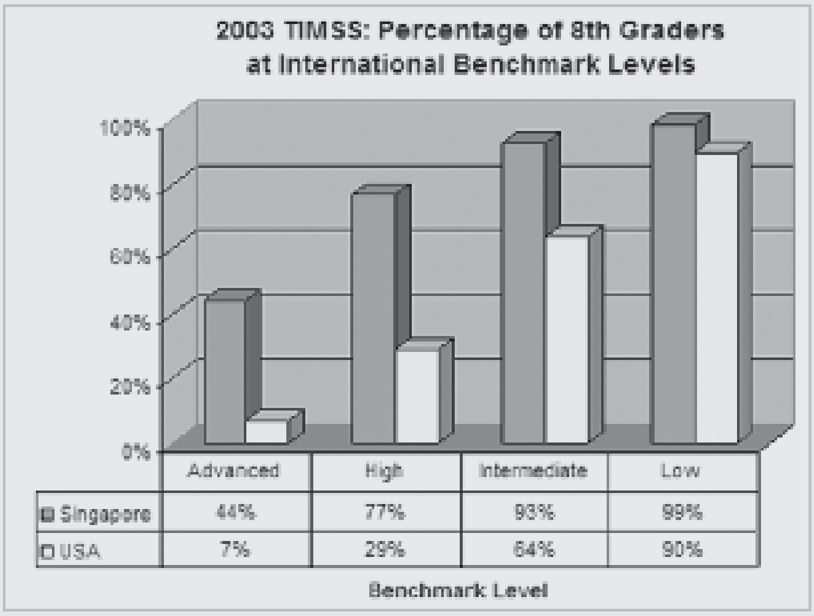
- Is u een bepaalde regelmaat in de getallen opgevallen?
- Heeft u ook al ontdekt dat er een tafel in de getallenstructuur onder een letter verborgen zit?
- Welke tafel zit er in uw naam?

Toen ik deze vragen aan mijn 5-vwo-klas stelde, als introductie op het onderwerp rijen, kwam er al snel een leerling die ontdekte dat in één van de door ons gekozen namen nog een tafel zat (niet alleen het dubbele van). Klopt dat? Zo ja, hoe kan dat? Is het bij elke naam zo dat er meerdere tafels in voorkomen (anders dan het dubbele van de oorspronkelijk gevonden tafel)? Een andere leerling ontdekte een verband tussen de namen en de daarin voorkomende tafel. Wat is dat verband en kun je dat verklaren?

Ik vraag me ondertussen af welke mogelijkheden we nog over het hoofd gezien hebben, aangezien er zoveel meer in dit probleem bleek te zitten dan op het eerste oog leek.

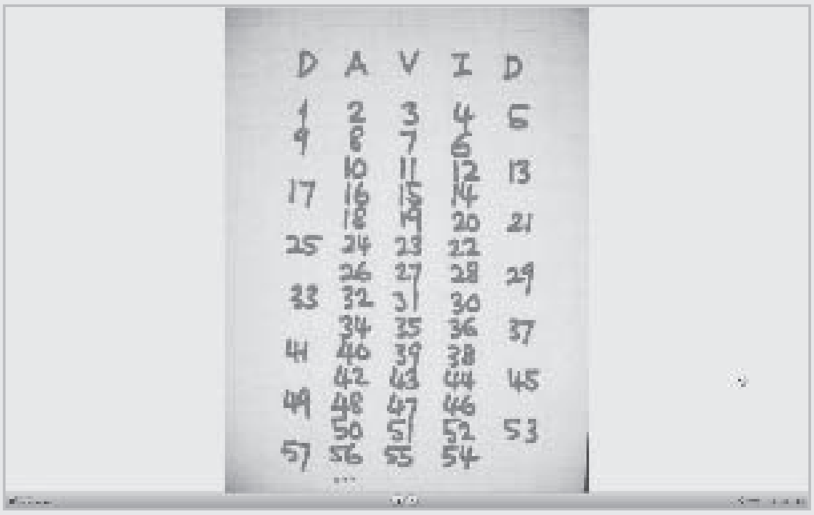
Zijn de voorbeelden die Ban Har Yeap gegeven heeft nu nuttig voor de zelfredzaamheid van een leerling in het dagelijks leven? Zijn ze realistisch of uit de leefwereld van de leerling? 'Nee, natuurlijk niet', zegt Ban Har Yeap. Dat moeten we dus ook niet pretenderen. Maar het scherpt wel het denken van leerlingen en nog meer: door het onderzoek brengt het het enthousiasme voor rekenen/wiskunde terug. Ze zijn een voorbeeld van hoe Singapore het (wiskundig) denken in het onderwijs centraal zet en niet het leren van onbegrepen regels.

Daarvan kunnen wij in zowel het reken- als het wiskundeonderwijs nog flink van leren!



Tabel 1 Feiten en cijfers (bron: 3). Nederland (bron: 4) en Singapore doen het bovengemiddeld als het gaat om de zwakste rekenaars. Het grootste verschil treedt juist op bij onze beste leerlingen op het vwo. Deze leerling scoren in Nederland gemiddeld t.o.v. internationaal, waar Singapore erin slaagt circa 40% van de leerlingen in groep 8 de lastigste opgaven correct te laten oplossen (bron: 4).

figuur 3 De tafel van drie en de tafel van zes op een trap in een school in Singapore (bron: 5)



figuur 4 In de naam DAVID zit onder andere de tafel van 8. Hiermee wordt bedoeld dat onder één van de letters een rij verschijnt waarin een tafel zit. Is de tafel van 8 de enige tafel in deze naam? Hoe komt het dat juist de tafel van 8 in deze naam voorkomt? Is er verschil in het aantal tafels in een naam met vijf en een naam met zes letters? (Bronnen: 5 en www.banhar.blogspot.com)

Bronnen

1. Lonneke Boels (2011): *Breuken op de basisschool*. In: *Euclides*, jaargang 86(6), mei 2011.
2. Singapore Mathematics for Teaching Professionals. MAP101. Fundamentals of Singapore Mathematics Curriculum. Marshall Cavendish Institute. Singapore 2011.
3. Utah's Math Future: *www.utahsmathfuture.com/singaporemathfacts.cfm*
4. Wegwijs in Rekenwonders. De Singaporese aanpak. Bazalt/HCO, 2011. Zie: *www.bazalthco.nl/rekenwonders*
5. Slideshare: *www.slideshare.net/jimmykeng/alabama-amsti*
6. Slideshare: *www.slideshare.net/jimmykeng/singapore-math-administrators-symposium-newark*

Info

Video 1: *www.youtube.com/watch?v=B93ZdpTyGEE*
Video 2: *www.youtube.com/watch?v=bk8ui3NidYc&feature=related*
Als u deze twee video's bekijkt, krijgt u vanzelf nog veel meer suggesties voor video's over de Singaporese aanpak.
Van het internet – Dr Yeap Ban Har taught at National Institute of Education, Nanyang Technological University in Singapore for more than ten years. Presently, he holds two concurrent positions as the director of curriculum and professional development at Pathlight School, an autism-oriented K-10 school in Singapore, and the principal of Marshall Cavendish Institute, a global teacher professional development institute.

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

Proefwerken en overhoringen

[Frans Ballering]

Rond proefwerken, overhoringen en de normering ervan hebben veel stagebegeleiders automatismen die studenten gemakkelijk overnemen. Dat leidt niet altijd tot kritisch kijken naar eigen onderwijs.

Overhoringen

Ik denk dat (korte) schriftelijke overhoringen heel nuttig kunnen zijn om te kijken of de leerlingen 'het al kunnen' en eventueel om ze te belonen omdat ze het al kunnen. In vrijwel elk hoofdstuk zitten een of meer vaardigheden die leerlingen onder de knie moeten krijgen en die zich goed lenen om te 'overhoren'. De leraar weet dan meteen hoever de leerlingen zijn en evalueert daarmee ook zijn eigen onderwijs. En het stimuleert enorm als je de leerlingen beloont omdat blijkt dat ze iets goed kunnen.

Om de hoeveelheid werk te beperken moeten zulke overhoringen heel kort zijn. Dan kost het niet teveel lestijd, niet veel tijd om het te bespreken, niet veel tijd om na te kijken en kan er snel feedback worden gegeven. Ik pleit altijd voor één opgave, die je soms ook door de buurman kunt laten nakijken. Ik heb ook wel eens een opgave die ze als huiswerk hadden gemaakt, laten overschrijven op een blaadje en thuis bekeken. Ook dat levert veel informatie op.

Bovenstaande werkwijze benadrukt dat de leerlingen in een leerproces zitten, fouten mogen maken en met een reactie daarop weer verder kunnen, hetgeen een prettige werksfeer in de klas ten goede komt. Als leerlingen begrijpen hoe dat werkt, worden cijfers voor zo'n overhoring ook veel minder belangrijk.

Proefwerken

'Is het een moeilijk proefwerk?' Een vraag die we allemaal kennen van onze leerlingen. Op een (goed) proefwerk is het woord *moeilijk* niet van toepassing. Ik wil immers weten wat een leerling kan. Is het proefwerk moeilijk, dan kan ik dat niet zien. Is het gemakkelijk, dan kunnen (sommige) leerlingen niet laten zien wat ze kunnen. Dus moeten er voldoende opdrachten in zitten die vrijwel elke leerling aankan. Zulke opdrachten noem ik graag *elementair*. Ze lijken veel op de oefeningen die al vaak gemaakt zijn en waarvan er één of twee misschien ook al in een overhoring zaten. Door de feedback op die overhoring(en) en het verder oefenen weten de leerlingen dus dat ze zo'n opgave wel kunnen maken. En de leraar weet dat ook en zorgt er met zulke opdrachten voor dat elke leerling dat ook kan laten zien.

Complexe opdrachten

Er zijn ook leerlingen die meer aankunnen. Daarom zitten er in een goed proefwerk ook opgaven die ik *complex* zou willen noemen. Ze zijn wat minder voor de hand liggend, vragen uitleg, inzicht of meerdere vaardigheden tegelijk. Ook het verhaal eromheen – de context – is nieuw voor de leerling.

Cijfers geven

Studenten van de lerarenopleiding vinden het soms vreemd dat je van een tentamen waar je 72 punten kunt halen er 48 moet hebben om een voldoende te krijgen. Dat is met hun ervaring een ongebruikelijke praktijk. Die 48 punten komen natuurlijk niet uit de lucht vallen. Ze vormen het totaal van die punten, die je gehaald moet hebben om voldoende van de doelen te hebben bereikt.

Normering

Een normering dient om te kunnen vaststellen of een leerling voldoende van de doelen heeft gehaald. Bij het vaststellen van de normering ga ik dus na welke van de elementaire opgaven een (ideale) leerling goed gemaakt moet hebben om een voldoende te halen. Daarbij komt het voor dat het om onderdelen van opgaven gaat of om een deel van het aantal punten. Helaas heb ik niet de garantie dat een leerling die voldoende punten heeft gehaald, ook echt genoeg heeft opgestoken. Hij kan op andere onderdelen punten hebben gehaald dan die op mijn lijstje van minimumdoelen. Gelukkig maar, want op die manier kan een leerling een fout ergens anders compenseren. En dan hoop ik maar dat er toch voldoende geleerd is om verder te kunnen.

(On)zekerheden

Waaruit maar weer eens blijkt hoe moeilijk het beoordelen van een proefwerk is. Of anders gezegd: hoe moeilijk het is om vast te stellen of een leerling voldoende heeft opgestoken. Hebben we niet allemaal de ervaring dat soms een leerling die een 6 krijgt, onvoldoende van de stof begrepen lijkt te hebben? Of dat omgekeerd, een leerling die een 5 krijgt, op essentiële punten goed begrip lijkt te hebben?

7,2

Gezien de twijfels die ik hierboven verwoord, hou ik niet van cijfers achter de komma. Voor veel leraren en leerlingen lijkt dat oneerlijk, omdat het een wijdverbreide praktijk is. Maar ik suggereer niet graag dat ik de prestaties van leerlingen zo nauwkeurig kan beoordelen. Dat het bij examens is voorgeschreven, verandert daar niets aan. Wat mij betreft hoeft dat niet door te werken naar de proefwerken van een brugklasser (of de tentamens op een lerarenopleiding)

Formules

De meeste proefwerkcijfers rollen uit een formule. Het is natuurlijk niet heel ingewikkeld om de puntenaantallen zodanig te kiezen dat ik een eenvoudige formule kan gebruiken. Dat is voor de leerlingen in elk geval heel duidelijk. Zij hoeven zich niet te bekommeren om mijn complexe voorbereiding daarvan.

Proefwerk van de uitgever

Is een proefwerk dat door de uitgever bij het boek wordt meegeleverd, vanzelf ook een goed proefwerk? Wel, als een collega een proefwerk maakt voor een hoofdstuk, ben ik daar ook niet altijd gelukkig mee. Dus ik zal daar altijd kritisch naar willen kijken. Dat is de praktijk van alledag.
Met de begrippen *elementair* en *complex* is van een proefwerk gemakkelijker na te gaan of het past bij het gegeven onderwijs. 'Kunnen mijn leerlingen dit?' en 'Hebben we dit voldoende geoefend?' zijn de vragen die ik wil beantwoorden.

En die poster met formules of tekeningen die bij de overhoring nog in het lokaal hing, haal ik die weg of mag die nog blijven hangen?

Over de auteur
Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*

Errata in Euclides 87(6)

Op pagina 243 van *Euclides* 87(6), mei 2012, zijn enkele formules door een technisch probleem gedeeltelijk weggevallen.
In de *linker* kolom op regel 16 vb moet in plaats van de beide horizontale strepen staan:

$$\frac{a}{\sin(50°)} = \frac{c}{\sin x}$$

en regel 17 vb in die zelfde kolom moet luiden:

$$\textbf{(1)...}\quad a = \frac{c \cdot \sin(50°)}{\sin x}$$

In de *middelste* kolom op regel 1 vo moet staan:

$$BD = \frac{c \cdot \sin(50°)}{\sin x \cdot \sin(x - 40°)} = g(x)$$

Met, vanzelfsprekend, onze excuses.

Rectificatie

[Hielke Peereboom]

In het artikel 'Veel enthousiasme op tweede Wiskunde-C dag!' (in *Euclides* nr. 6, mei 2012; pp. 239-240) is een storende fout opgetreden.
Een en andermaal komen de doorstroomrechten van leerlingen met wiskunde-C, dan wel van leerlingen (op havo) zonder wiskunde, ter sprake.
Deze doorstroomrechten zijn groter dan in het betreffende artikel opgemerkt wordt. Zo heeft bijvoorbeeld de havo-leerling zonder wiskunde, anders dan in het artikel wordt beweerd, wel degelijk formele doorstroomrechten naar pabo en hbo(v). Overeind blijft dat CM-leerlingen die de mogelijkheid van een vervolgstudie in bijvoorbeeld deze richtingen open willen houden, toch vaak wiskunde-A kiezen om hun kansen bij een dergelijke opleiding te vergroten. Het nieuwe wiskunde-C zal voor deze leerlingen hetzelfde moeten bieden.

Mededeling / Special 2012 – Getallen

Op verzoek van enkele lezers zijn de oplossingen van de tien VWP's (Vredenduin's Wiskundige Puzzels) die staan in de Euclides Special 2012, in een bestand opgenomen.

Dit bestand (in PDF-formaat; ca. 250 Kb) is te downloaden via de NVvW-website: *www.nvvw.nl/special12/vwp-opl.pdf*

De uiterste inzenddatum van de Kruisgetalpuzzel (pp. 86 en 87) is verschoven naar **11 september 2012.**

Met wiskunde Europa ontdekken

DEEL 2

[Heiner Wind]

In *Euclides*-4 van deze jaargang (pp. 148-151) hebt u deel 1 kunnen lezen, een verslag van Floor Nusink en Erik Atsma. Een zeer lezenswaardig en informatief artikel, waarin uit de doeken gedaan werd, wat *eTwinning* inhoudt. Vlak nadat dit verschenen was, werd bekend, dat het eTwinning-project *A Taste of Maths* van Erik de eerste Europese eTwinning-prijs had gewonnen in de categorie 12-15 jarigen. Deze prijs zou worden uitgereikt tijdens een driedaags congres in Berlijn en behalve Erik ontving ook de redactie een uitnodiging om daarbij aanwezig te zijn. Die uitnodiging werd met genoegen geaccepteerd.

Entree

In de foyer van het hotel is het een drukte van belang: ruim 500 docenten van allerlei vakken uit heel Europa nemen deel aan deze conferentie; er heerst meteen al een geanimeerde sfeer. De Hollandse delegatie, 16 man/vrouw sterk, komt volgens afspraak bij elkaar om kennis te maken. Onder leiding van Floor Nusink en Willy Koper van het Europees Platform, die hun zaakjes voortreffelijk voor elkaar hebben, wordt geïnventariseerd waarvoor je gekomen bent en wat je hoopt te bereiken.

Doelstelling

Voor mij is de doelstelling bij voorbaat duidelijk, een verslag van de prijsuitreiking op vrijdagmiddag.
Maar er blijken meer interessante dingen te beleven. Niet alleen het interview met Erik levert relevante informatie, er is ook een breed aanbod van workshops en presentaties, waarvan enkele, die voor alle lezers van *Euclides* van belang kunnen zijn, en die aansluiten op hetgeen Erik te melden heeft. Stuk voor stuk nascholingen, die voor de professionalisering van een wiskundedocent veel meer kunnen betekenen.
Als voorbeeld kan de volgende workshop genoemd worden.

How eTwinning can contribute to Teacher Professional Development, door *Cathy Francis en Sandra Underwood* (from the UK).
Bij nascholing denk je al gauw aan nieuwe ontwikkelingen op je vakgebied, maar als docent is het minstens zo belangrijk om ook buiten de muren van je vaklokaal te kijken. Je wilt toch immers ook bij kinderen niet beperken tot de gebruikelijke leerstof, maar als het even kan ook de 'ramen open zetten'? Sandra en Cathy gaven een vlotte inspirerende presentatie van wat deelname aan eTwinning betekent heeft voor hun persoonlijke ontwikkeling. Ze vertelden over hun status quo, voordat ze deelnamen aan eTwinning, hun verwachtingen en wat daarvan terechtgekomen is. Ze maakten daarbij gebruik van het programma Prezi [1]. Dit is meteen een illustratie op welke manier ze tegelijkertijd hebben geleerd om ICT in te zetten bij presentaties – een enorme verbetering ten opzichte van het vertonen van achtereenvolgende sheets, waar het publiek 'gewoon' de tekst, al dan niet afgedekt met een stuk papier, mee mag lezen [2]. Overtuig u door hun presentaties te bewonderen op de links in de noten [1] en [2].

Nascholingsmogelijkheden bij eTwinning
(kijk op *www.etwinning.nl/agenda*)

- Studiemiddag op school (gratis) – Leer als team op school hoe u eTwinning in kan zetten om uw lespraktijk te verrijken.
- Studiemiddag in Haarlem (gratis) – Leer als beginnende eTwinner hoe je een project opzet en hoe je gebruik kan maken van de mogelijkheden van eTwinning.
- Europese eTwinning bijeenkomsten – Ga naar een contactseminar of Professional Development Workshop ergens in Europa en ontmoet Europese collega's en leer de mogelijkheden van eTwinning kennen.
- Online eTwinning training (gratis) – Registreer bij eTwinning en volg een online Learning Event over uiteenlopende onderwerpen.
- Cursussen over internationaliseren – Op de website van het Europees Platform (*www.europeesplatform.nl/cursussen*) vindt u een uitgebreid aanbod aan cursussen over internationaliseren van beginnend tot gevorderd niveau

Interview met Erik Atsma

Hoe ben je met eTwinning in aanraking gekomen?
Mijn aanmelding bij eTwinning is gedaan tijdens een workshop van het Europees Platform (gegeven door Floor Nusink). Zij kwam bij ons op school omdat wij als tto-school [3] graag wat aan internationalisering wilden (en moesten) gaan doen. De workshop was alleen voor het tto-docenten team. Achteraf denk ik dat dat jammer is, want eTwinning is niet verbonden met tto alleen. Ook docenten die aan een Nederlandstalige klas lesgeven, kunnen met eTwinning aan de slag. Tijdens de workshop had ik na het aanmelden ook meteen gereageerd op een bericht met een oproep voor een wiskundeproject. Een dag later had ik de uitnodiging binnen voor mijn eerste project (*My Town in Numbers*). Een gelukkige zet is het wel geweest, maar

ik zat er dus ook meteen middenin. Het mooie was dat dit project uitgeroepen is tot achtereenvolgens project van de maand februari, project van het jaar in Nederland en Runner-up in de leeftijdscategorie 12-15 jaar in Sevilla bij de Europese eTwinning conferentie. Een mooiere start van eTwinning had ik dus niet kunnen wensen.

Hoe verliep de samenwerking met collega's in het buitenland?
De samenwerking bij dit eerste project met de mededocenten liep ook heel erg goed en ik denk dat dat één van de belangrijkste dingen is. Het project mag niet stil komen te liggen doordat de docenten onderling niet communiceren. Dit is wat ik soms hoor dat er gebeurt bij projecten. Gelukkig is dat bij mijn twee projecten (meer heb ik er namelijk nog niet gedaan…) nooit het geval geweest. Ook bij het tweede project (ATOM) was de communicatie altijd enorm vlot.

Welke verwachtingen had je als wiskunde-docent van deelname en in hoeverre zijn die uitgekomen?
Verwachtingen had ik eigenlijk niet echt toen ik mij als deelnemer had aangemeld. Probleem was namelijk dat ik nog nooit van eTwinning gehoord had en dat ik dus geen idee had wat er op mij af zou komen. Ik moet zeggen dat ik wel enorm tevreden ben over mijn deelname aan eTwinning (en dan niet alleen door de successen, hoewel dat wel helpt natuurlijk!). Het is enorm leuk om te zien hoe ze in de rest van Europa bezig zijn met school en met wiskunde. Cultuurverschillen ontdekken en zien hoe er in andere landen met onderwijs wordt omgegaan is interessant. Het zorgt er ook voor dat de horizon van de leerlingen een stuk verbreed wordt en ze verder kunnen kijken dan Amsterdam (wat voor veel Amsterdammers overigens al heel moeilijk is (;-)). Ze krijgen dus een bredere internationale blik en weten meer over andere landen en andere culturen, iets wat naar mijn mening hoort bij hun vorming

foto 1 Erik Atsma (geheel links) met zijn partners van het ATOM-project

als mens.
Naast het internationale deel is ook de wiskunde uit andere landen interessant. Opgaven worden op verschillende manieren opgelost. Zo heb ik de bij ons inmiddels zeer ingeburgerde verh oudingstabel nog niet terug gezien uit het buitenland. Notatie en oplosmethoden zijn abstracter en formeler dan hier. Leerlingen leren daar ook weer van, er zijn dus veel meer verschillende oplosmethoden dan dat zij zien en gebruiken en op deze manier vergroten ze ook weer hun wiskundekennis. Verder zijn de leeftijdsgroepen niet helemaal parallel. Dat zorgt er ook wel eens voor dat er een onderwerp aan bod komt dat iets boven hun pet gaat, maar daarin ligt vaak juist een uitdaging. Opgaven van een hoger niveau kunnen prikkelen aan hun nieuwsgierigheid. De motivatie van de leerlingen gaat door het gebruik van eTwinning zeker omhoog, ze vinden het namelijk leuk om te doen. Het is toch een andere manier van wiskunde dan het lesboek.

Heeft het bijgedragen aan je professionalisering als docent?
Ik denk dat ook de docent veel op kan steken van het zien van andere culturen en gebruiken. Maar meer nog dan dit, is het belangrijk dat je met een heleboel dingen in aanraking komt waar ik nog nooit eerder mee in aanraking was gekomen. Vooral veel vrij te gebruiken programma's op internet om dingen te presenteren of om kleine quizjes te maken. Een aantal van deze programma's (zeker die om een soort van quizjes te maken) zijn zo in mijn andere lessen te gebruiken. Het zorgt er sowieso al voor dat je zelf veel handiger wordt in allerlei ict-middelen. Verder is het ook zo dat het zien van andere oplosmethoden je repertoire van uitleg weer groter maakt en daardoor sta je als docent weer sterker voor een klas. Ook is de motivatie van mij groter geworden door het gebruikt van eTwinning. Ik heb meer zin in lesgeven door het contact met buitenlandse scholen. Ook denk ik dat je cv interessanter wordt als je kunt zeggen dat je met eTwinning bezig bent geweest.
Deelnemen aan de Europese conferenties zorgt altijd weer voor een enorme boost in motivatie, gezien het feit dat daar 500 mensen rondlopen die allemaal zeer gemotiveerd zijn. Daarna heb je altijd weer zin om een project te gaan doen. De kans is ook groot dat ik volgend jaar opnieuw een project ga doen.
Ook heeft eTwinning zogenoemde Learning Events waar je van een ervaren eTwiner allerlei dingen leert over een bepaald onderwerp. Zo heb ik in februari die van wiskunde gevolgd, met 99 deelnemers een behoorlijke groep docenten die online dingen leren. Het lezen van alle ervaringen, suggesties enzovoort, helpt weer enorm bij

het vergroten van je vakkennis, de indeling van je lessen en dat soort dingen. Dus zelfs zonder project kun je je met eTwinning professioneel ontwikkelen.

Prijsuitreiking

Je zou bijna vergeten bij al deze zeer leerzame ervaringen waarvoor ik eigenlijk gekomen was… Tijdens de plenaire bijeenkomst aan het eind van de eerste dag werden voor de verschillende leeftijdscategorieën de winnaars op het podium geroepen om hun prijs in ontvangst te nemen. Onder enthousiast applaus van de ruim 500 aanwezigen namen Erik en zijn partners hun oorkondes in ontvangst, wij 'Hollanders' natuurlijk ook trots meegenietend.
Nadat alle groepen aan de beurt geweest waren, volgde er nog een heel leuke verrassing… Uit alle prijswinnende projecten werd tenslotte ook een overall-winnaar verkozen: Erik c.s. mochten opnieuw opdraven: *A Taste of Maths* (beschreven in *Euclides* 87(4); zie ook de noten [4] en [5]) werd uitgeroepen tot het beste project.

Al tijdens de conferentie bekroop mij de gedachte: 'na het weekend ga ik gewoon weer naar school en meld me meteen aan als nieuwe deelnemer aan dit soort projecten.' Helaas kun je de klok niet terugzetten, maar deze geweldige ervaring neemt niemand mij meer af.

Noten

[1] *http://prezi.com/nuwalhvzh6fx/my-professional-development-trail/*
[2] *http://prezi.com/xa5geic_sjid/berlin-2012-etwinning-annual-conference-workshop-presentation/*
[3] tto = tweetalig onderwijs
[4] In de *Euclides Special* 2012 (*Getallen*) staan op de pagina's 160-163 onder de titel *Fibonacci gedichten / Fibonacci poems* enkele stukjes uit het ATOM-project.
[5] Zie ook het persbericht in *Euclides* 87(6) op pag. 275.

Over de auteur

Heiner Wind is voorzitter van de redactie van *Euclides* en was docent wiskunde aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen tot hij op 1 januari 2008 met fpu ging.
E-mailadres: *hwind@home.nl*

Theresialyceum wint NWO Scholenprijs

EEN WEDSTRIJDLEIDER ONTHULT Z'N GEHEIM

[Theo van den Borne]

Elk jaar wordt in januari de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. De beste 800 leerlingen stromen door naar de tweede ronde. Wat wellicht minder bekend is, is dat ook een school in de prijzen kan vallen. De school met de hoogste somscore van de beste vijf leerlingen wint de scholenprijs. In 2012 won het Theresialyceum in Tilburg deze prestigieuze prijs. De wedstrijdleider van deze school, Theo van den Borne, vertelt hoe zijn school zo ver heeft kunnen komen.

Vrijdag 9 maart 2012 is voor mij een dag geworden om nooit te vergeten. Op die dag werd namelijk op mijn school, het Theresialyceum in Tilburg, de scholenprijs van de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) uitgereikt. Vanaf 1984 heb ik elk jaar als wedstrijdleider op mijn school de eerste ronde van de NWO georganiseerd en elk jaar wel een of twee deelnemers naar de eindronde zien doorstromen. Maar de scholenprijs winnen, dat is natuurlijk de kers op de taart.

De Wiskunde Olympiade vroeger…

Terugblikkend op bijna dertig jaar NWO heb ik in de loop van de tijd veel zien veranderen. In de jaren tachtig was de NWO nog veel eenvoudiger van opzet dan tegenwoordig. Landelijk deden er al wel ongeveer 2000 à 3000 leerlingen mee aan de eerste ronde waarna de beste 100 leerlingen doorgingen naar de eindronde in september op de Technische Universiteit in Eindhoven.
De beste 15 daarvan werden daarna getraind voor de IMO, de Internationale Wiskunde Olympiade. Uiteindelijk werden er zes leerlingen geselecteerd voor de IMO. Begin jaren negentig heeft één van mijn leerlingen het team nét niet gehaald. Dat was lange tijd mijn beste resultaat en daar was ik best trots op.

… en nu

De laatste jaren is er qua organisatie rond de NWO vooral voor de deelnemers uit klas 2 en 3 veel ten goede veranderd. Een grote verbetering is het toekennen van prijzen in drie categorieën: klas 3 en lager, klas 4 en klas 5. Hierdoor hoeven derdeklassers niet meer op te boksen tegen leerlingen van vwo-5 die al veel verder in hun ontwikkeling zijn. Ook wordt de cesuur om door te gaan naar de volgende ronde per categorie vastgesteld, waardoor een derde- of vierdeklasser een grotere kans dan voorheen heeft om de volgende ronde te bereiken.
Een andere verbetering is het toevoegen van een extra ronde tussen de eerste ronde en de eindronde. Was vroeger succes in de eerste ronde voor maar een honderdtal leerlingen weggelegd, de laatste jaren gaan er ongeveer 800 leerlingen door naar de tweede ronde die op een universiteit in de buurt wordt gehouden. Hierdoor zijn deelnemers eerder geneigd om ook volgend jaar weer mee te doen. Na de tweede ronde gaan de beste 130 leerlingen door naar de eindronde.
Ook wordt er de laatste jaren veel meer energie gestoken in de begeleiding van de wiskundetalenten in Nederland. Er is een syllabus gemaakt waarmee leerlingen zich kunnen voorbereiden op de eindronde. Ze kunnen hieraan onder begeleiding werken tijdens speciale bijeenkomsten op diezelfde universiteit in de buurt. Na de eindronde worden de beste dertig leerlingen verder begeleid door voormalige deelnemers aan de IMO die nu wiskunde studeren of net afgestudeerd zijn. De namen van Quintijn Puite en Birgit van Dalen mogen hierbij zeker worden genoemd. De hele organisatie rond de NWO is in de loop der jaren veel professioneler geworden, waarschijnlijk mede mogelijk gemaakt door het aantrekken van meer sponsorgeld. Ook het internet speelt hierbij een belangrijke rol. Leerlingen kunnen tegenwoordig opgaven en informatie van *www.wiskundeolympiade.nl* halen.
Bovengenoemde verbeteringen hebben er ongetwijfeld aan bijgedragen dat het aantal deelnemers aan de eerste ronde in de afgelopen tien jaar ongeveer verdubbeld is van 2500 naar 5500.


foto 1 De winnaars van 2012

foto 2 De bokaal

Gang van zaken op het Theresialyceum
In de jaren negentig kwam de Kangoeroe-wedstrijd overwaaien uit Australië. De opgaven van deze wedstrijd waren veel eenvoudiger en meer bestemd voor een brede groep van leerlingen met belangstelling voor wiskunde en puzzelen. Heel veel middelbare scholen doen elk jaar aan deze wedstrijd mee. Op mijn school doen er elk jaar zo'n 200 leerlingen uit de onderbouw op vrijwillige basis aan mee. Overigens wel tijdens lestijd. De scores die leerlingen hierbij halen vormen een goede graadmeter of leerlingen geschikt zijn om mee te doen aan de NWO. Ik heb gemerkt dat leerlingen met veel talent voor wiskunde al in de tweede of derde klas aan de NWO mee kunnen doen. Wel moeten we deze onderbouwleerlingen, die gewend zijn altijd hoge cijfers voor wiskunde te halen, vertellen dat het resultaat wel eens tegen zou kunnen vallen omdat het op hun leeftijd nog moeilijk is om een hoge score te halen. Door al in de onderbouw mee te doen hebben deze leerlingen beduidend meer kans om in de jaren daarna hoog te scoren.
Op school vraag ik elk jaar in november en december aan mijn collega's welke leerlingen zij geschikt vinden om mee te doen aan de NWO. Natuurlijk mogen alle leerlingen meedoen, maar de praktijk leert dat een persoonlijke benadering het beste werkt. Ik neem persoonlijk contact op met potentiële deelnemers, leg uit wat de NWO inhoudt en zeg hun dat ik het fijn zou vinden als ze mee zouden doen. Dit streelt ongetwijfeld hun ijdelheid. Uiteraard benader ik ook de leerlingen die het jaar ervoor hebben meegedaan.
Maar hoe win je nu de scholenprijs? Allereerst heb je daarvoor een groepje leerlingen nodig dat heel veel aanleg voor wiskunde heeft en het fijn vindt om met wiskunde bezig te zijn. Aanleg voor wiskunde kan ik niet veranderen, wel kan ik talentvolle leerlingen begeleiden en stimuleren om met wiskunde bezig te zijn. Natuurlijk organiseer ik de eerste ronde op school en ga ik met leerlingen naar de tweede ronde op de universiteit. Verder regel ik dat de leerlingen vrij krijgen voor deelname aan de diverse rondes en trainingsdagen. Gelukkig staat de schoolleiding heel positief tegenover zulke buitenlesactiviteiten. Zeker als de Scholenprijs gewonnen wordt en het Theresialyceum de krant haalt!
Uiteindelijk moet je gewoon veel geluk hebben dat er binnen een tijdsbestek van twee, drie jaar genoeg bollebozen op school komen, die ook nog eens de *drive* hebben om er voor te gaan.
Welnu, dat alles is mij onlangs overkomen.

Talentvolle leerlingen

Vier jaar geleden kwam Jeroen Huijben op het Theresialyceum. Jeroen viel al in de eerste klas op door bij de Kangoeroewedstrijd heel hoog te scoren. In klas twee was hij zelfs de beste tweedeklasser van Nederland. In de derde klas werd hij opgepikt door de trainers/begeleiders van de NWO en draaide hij mee in het trainingsprogramma voor de IMO. Aan het einde van de derde klas is hij als belofte meegegaan naar de IMO in Kazachstan. Vorig jaar heeft hij deelgenomen aan de IMO in Amsterdam en we hopen natuurlijk dat hij dit jaar en volgend jaar nog naar de IMO in Argentinië en Colombia mag.
Het toeval wil dat een jaar na Jeroen ook Bas Verseveldt en Peter Gerlagh op school kwamen. Ook zij scoorden in de tweede klas erg hoog in de eerste ronde en zitten ondertussen al weer een tijdje in de trainingsgroep voor de IMO. Door die extra trainingen zijn zij met sprongen vooruitgegaan. Zo leverde Peter in de eerste ronde van de NWO zijn blaadje al na een uur bij me in, terwijl er twee uur aan gewerkt mocht worden. Eerst dacht ik dat hij zich niet goed voelde, maar toen ik zijn antwoorden had gecontroleerd en bleek dat hij alles goed had, heb ik de dokter maar niet gebeld! Maar goed, na Peter kwam diens broer Joris een jaar later ook naar het Theresialyceum. Joris bleek over dezelfde kwaliteiten als Peter te beschikken. Verder scoorde ook Teun Huijben (geen familie van Jeroen) erg hoog. Met dit kwintet was er een goede kans om de scholenprijs binnen te halen. Een paar jaar geleden was het Theresialyceum al eens op een vijfde en een zevende plaats geëindigd en vorig jaar zelfs op de derde plaats.
Dit jaar is het er dan inderdaad van gekomen. Joris uit klas 3, Bas en Peter uit vwo-4 en Jeroen en Teun uit vwo-5 haalden in de eerste ronde gezamenlijk 171 punten op een totaal van 180 punten.
Achteraf bleek dat het toch nog een nipte overwinning was, want we bleven het Stedelijk Gymnasium uit Nijmegen maar één puntje voor.

Over de auteur
Theo van den Borne is docent op het Theresialyceum in Tilburg.
E-mailadres: *theovandenborne@chello.nl*

Een jaar W4Kangoeroe

DEEL 2, NATIONALE KEUZES

[Ernst Lambeck]

Opgavencommissie

Zo… De opgaven voor W4Kangoeroe 2012 zijn in principe gekozen; zie deel 1 in *Euclides* 87(5).[1] Nu kunnen we in Nederland ook aan het werk. De opgaven moeten worden vertaald naar het Nederlands en vervolgens nauwkeurig en kritisch bekeken: zijn de opgaven duidelijk geformuleerd, zijn de opgaven geschikt voor de Nederlandse leerlingen, behoeft een enkele opgave nog een aanpassing, enzovoort.
Bij een van de versies, wizSMART, zijn internationaal 30 opgaven gekozen. In een aantal landen, waaronder ook Nederland, wordt de leerlingen slechts een set van 24 opgaven voorgeschoteld. In deze versie moeten dus nog 6 opgaven worden geschrapt. Dit werk, het schrappen en het aanpassen van de opgaven, wordt gedaan door de opgavencommissie. Deze commissie bestaat uit ongeveer 20 personen, die, verdeeld in vier deelgroepen, de diverse versies (wizPROF, wizBRAIN, wizSMART en wizKID) doornemen. De commissieleden zijn veelal docenten die lesgeven aan de betreffende doelgroep.
In dit deel bekijken we het werk van de opgavencommissie. Dit doen we aan de hand van verschillende redenen waarom de opgaven van 2012 zijn aangepast.

Duidelijker maken

Een draak heeft vijf koppen. Iedere keer als er een kop wordt afgehakt, dan groeien er vijf nieuwe. Als we zes koppen achter elkaar afhakken, hoeveel koppen heeft de draak dan?
Een duidelijke opgave, zo leek het. Maar, hoe kun je zes koppen afhakken als de draak er maar vijf heeft? Om dit misverstand bij de deelnemers aan wizBRAIN (onderbouw havo/vwo) te voorkomen, is het laatste deel van de tweede zin aangepast: 'dan groeien er meteen vijf nieuwe koppen'.

A, B, C, D, E, F, G en H zijn (op volgorde) de hoekpunten van een achthoek zonder inspringende hoeken. Kies willekeurig een van de hoekpunten C, D, E, F, G en H en trek het lijnstuk dat dit punt verbindt met A. Kies vervolgens weer willekeurig een van dezelfde zes hoekpunten en verbindt deze met B. Wat is de kans dat je de zeshoek nu hebt opgedeeld in precies drie gebieden?
Deze opgave uit wizPROF (bovenbouw havo/vwo) werd iets duidelijker door er een regelmatige achthoek van te maken en alleen lijnstukken vanuit de punten *D*, *E*, *F* en *G* te laten trekken.

Als het in Amsterdam 17.00 uur is, dan is het in San Francisco 8.00 uur op dezelfde dag. Emma ging dinsdag om 21.00 uur in San Francisco slapen. Welke dag was het en hoe laat was het toen in Amsterdam?
In de eerste versie van deze opgave voor wizSMART (vmbo 1, 2 en groep 7, 8 basisscholen) werd gesproken over gisteravond. In de antwoordmogelijkheden was onder meer sprake van gistermiddag en vannacht. Door over te stappen op dinsdag en woensdag werd een en ander concreter, dus duidelijker voor de leerling.

De hele getallen zijn rood, blauw of groen gekleurd. 1 is rood, 2 is blauw, 3 is groen, 4 is rood, 5 is blauw, 6 is groen, enzovoort. Welke kleur heeft het getal dat je krijgt als je een rood en een blauw getal optelt?
Met het doorgaan tot en met '7 is weer rood' werd de regelmaat nog duidelijker gemaakt voor de wizSMART-leerling.

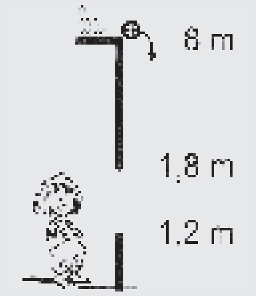
Plaatjes

Soms kan een plaatje helpen een opgave duidelijker te maken.
Bijvoorbeeld in wizSMART (***zie figuur 1*** op pag. 380):
Een stuiterbal valt van het dak van een huis. Het dak is 8 meter hoog. Iedere keer als de bal de grond raakt, stuitert hij weer omhoog tot de helft van de vorige hoogte. Hoe vaak zie je de bal voor een raam voorbij komen waarvan de onderkant op 1,20 meter en de bovenkant op 1,80 meter hoogte is?
Hierbij werden overigens ook de getallen enigszins aangepast om het rekenwerk wat te vereenvoudigen.

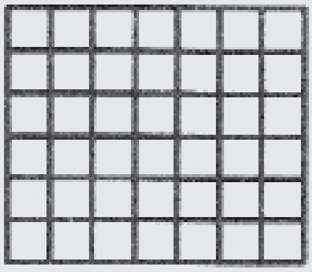
Of, ook in wizSMART:
Ismael wil een rechthoek met lengte 7 en breedte 6 in vierkanten knippen. De lengtes van de zijden van de vierkanten moeten gehele getallen zijn. Wat is het kleinste aantal vierkanten waarin Ismael de rechthoek zo kan knippen?
Figuur 2 werd als plaatje toegevoegd. Ook werd de tekst voor de vraag drastisch gewijzigd: 'Ismael knipt de rechthoek *in figuur 2* op de lijntjes in stukken. Alle stukken zijn vierkant.'
De deelnemers van wizKID (groep 5, 6 basisscholen) kregen de volgende vraag voorgeschoteld.
Op 15 tafels staat een kandelaar. Er zijn 6 kandelaars met 5 kaarsen. De andere kandelaars hebben 3 kaarsen. Hoeveel kaarsen staan er in alle kandelaars samen?
Niet alle kinderen kennen op die leeftijd het woord kandelaar. Door er een plaatje van een kandelaar bij de opgave te zetten werd dit probleem ondervangen.
Tot slot een voorbeeld uit wizBRAIN.
De getallen van 1 t/m 12 zijn in een kring geschreven. Elke twee getallen die naast elkaar staan verschillen 2 of 3. Welke van de volgende getallen staan zeker naast elkaar?
A) *3 en 5* ; **B)** *4 en 6* ; **C)** *5 en 8* ;
D) *6 en 8* ; **E)** *7 en 9*
De commissie heeft ook hier een plaatje ter verduidelijking toegevoegd (***zie figuur 3***).

Keuzemogelijkheden

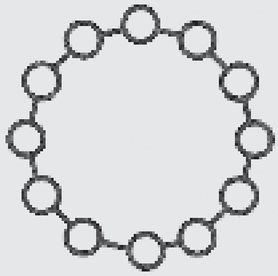
Ook aan de alternatieve antwoorden wordt soms gesleuteld. In principe worden de keuzemogelijkheden altijd van klein naar groot of in alfabetische volgorde geplaatst. Toch zijn er soms mogelijkheden om de volgorde te wijzigen, bijvoorbeeld als de alternatieven plaatjes betreffen. Daarmee is het dan mogelijk om het aantal juiste antwoorden A), B), … meer in balans te brengen.
Dit is bijvoorbeeld gebeurd bij een opgave die zowel in wizPROF als in wizBRAIN was te vinden.
*Een balk (**zie figuur 4**) bestaat uit vier stukken van elk vier kubusjes. Elk stuk heeft een eigen kleur. Welk is het witte stuk?*



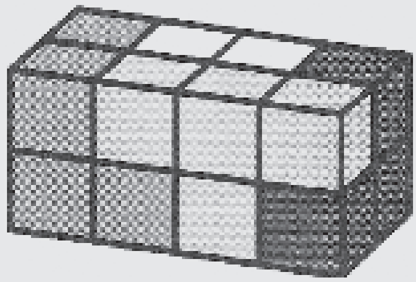
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Figuur 5 geeft de keuzemogelijkheden voor wizBRAIN, ***figuur 6*** die van wizPROF.
Een andere reden om aan de alternatieven te schaven is een overduidelijk onjuist antwoord. Een mooi voorbeeld hiervan is de volgende opgave uit wizBRAIN. Alternatief A) was oorspronkelijk 28, hetgeen overduidelijk fout is. Het werd vervangen door 64.
Elke keer als een pratend sprookjesvierkant de waarheid vertelt, worden zijn zijden 2 cm korter. Elke keer als het liegt, wordt zijn omtrek twee keer zo groot, maar het blijft een vierkant. Het vierkant heeft zojuist vier zinnen gesproken. Twee zinnen zijn waar, twee zijn leugens. We weten niet welke zinnen waar zijn. Het vierkant had vóór deze vier zinnen zijden van 8 cm. Hoeveel cm is de grootst mogelijke omtrek van het sprookjesvierkant nu?

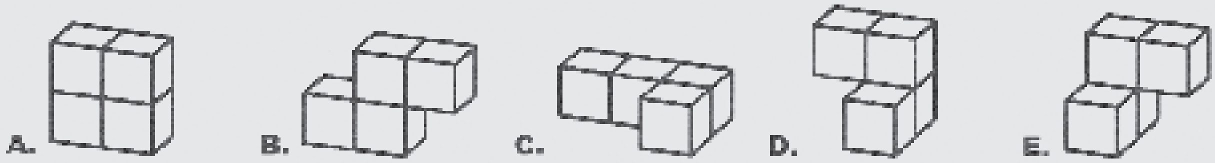
Niet duidelijk

Zo nu en dan wordt een opgave vervangen. Bijvoorbeeld omdat de opgave onduidelijk is en er geen acceptabele alternatieve formulering kan worden gevonden. Dit gebeurde met de volgende twee opgaven.
Een touw wordt dubbelgevouwen, daarna nog eens en nog een keer. Daarna wordt het gevouwen touw doorgeknipt. Van de losse stukjes die je krijgt is er een van 4 m en een van 9 m lang. Welke lengte kan niet van het touw zijn?
Probleem bij deze wizBRAIN-opgave: er zijn meerdere manieren te bedenken om het touw te vouwen.

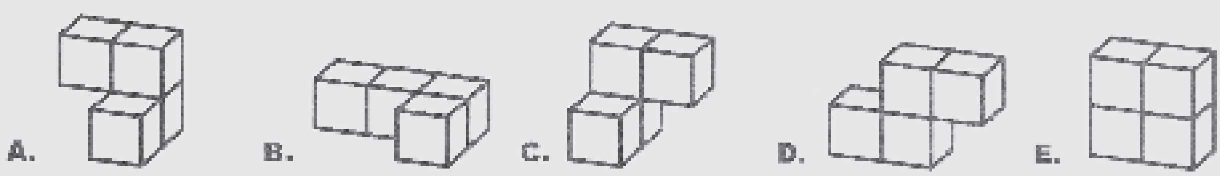
En uit wizPROF:
Van zes positieve gehele getallen is er precies één tweetal waarvan de kleinste van de twee de grootste van de twee niet deelt. Wat is de kleinste waarde die het grootste getal van de zes kan zijn?

Te simpel of te lastig

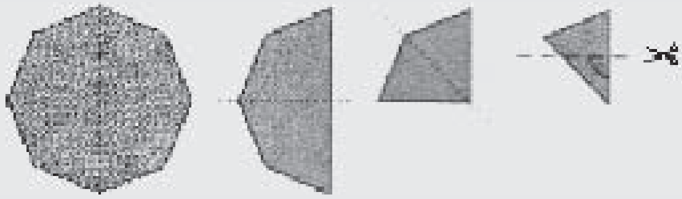
Een enkele keer is een opgave in de ogen van de commissie veel te simpel. Om die reden werd voor wizPROF de volgende opgave geschrapt.
In de volgende vijf sommen vervang je de 8 *door een ander positief getal. De uitkomst verandert bij vier van de sommen niet. Bij welke som verandert de uitkomst wel?*
A) (8 + 8 – 8) : 8 ; **B)** 8 + (8 : 8) – 8 ;
C) 8 : (8 + 8 + 8) ; **D)** 8 – (8 : 8) + 8 ;
E) 8 · (8 : 8) : 8
Veel vaker vindt de commissie een opgave te lastig voor de doelgroep. Bij wizSMART werden daarom de volgende opgaven weggelaten (er moesten er immers toch zes afvallen).
- *Je vouwt een regelmatige achthoek drie keer, zodat je een driehoek krijgt. Daarna knip je een punt af in een rechte hoek, zoals* ***in figuur*** **7**. *Hoe ziet de figuur eruit die je krijgt als je het papier weer openvouwt?* (***Zie figuur 8***.)
- *Rechthoek ABCD is gemaakt van vier kleinere rechthoeken als* ***in figuur 9***. *De omtrekken van drie van deze kleinere rechthoeken zijn* 11, 16 *en* 19. *De omtrek*



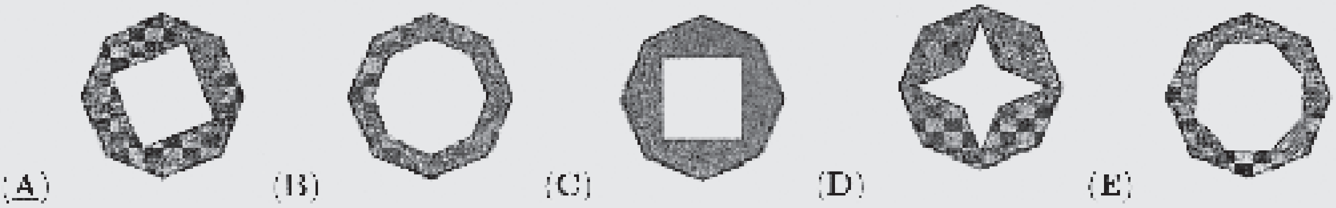
figuur 5



figuur 6



figuur 7



figuur 8

van de vierde rechthoek is niet de kleinste of de grootste van de vier omtrekken. Wat is de omtrek van rechthoek ABCD?
- Een vierkant stuk papier van 64 cm² wordt twee keer gevouwen zoals ***in figuur*** **10**.
Hoeveel cm² is de oppervlakte van de twee grijze stukjes samen?

Geen kangoeroe

En ook wordt er wel eens een opgave weggegooid onder het mom 'eigenlijk geen Kangoeroe-opgave, niet leuk'.
Dit jaar overkwam dat de volgende opgave uit wizSMART.
We tellen 3 op bij het getal 6. De uitkomst wordt met 2 vermenigvuldigd, waarna we er nog 1 bij optellen. Welke van de volgende berekeningen geeft hetzelfde antwoord?
A) $(6 + 3 \cdot 2) + 1$; **B)** $6 + 3 \cdot 2 + 1$;
C) $(6 + 3) \cdot (2 + 1)$; **D)** $(6 + 3) \cdot 2 + 1$;
E) $6 + 3 \cdot (2 + 1)$

Schattingen

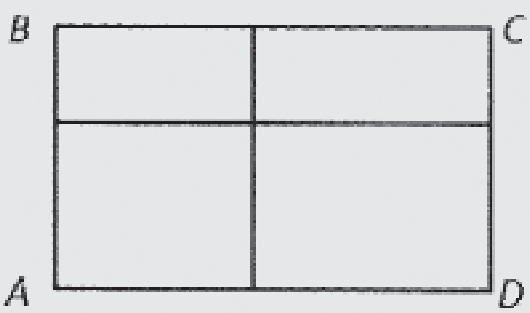
Het verschil in volgorde van de opgaven in de diverse landen – zie figuur 1 tot en met 3 van deel 1 (zie noot [1]) – is ook een gevolg van het werk van de opgavencommissie. Een laatste taak is het vastleggen van de definitieve volgorde van de opgaven. Het streven is om de opgaven te sorteren aan de hand van hun moeilijkheidsgraad, van eenvoudig tot lastig. Dit gebeurt aan de hand van schattingen die elk commissielid maakt van de te verwachten score van leerlingen voor elk van de opgaven.
Aan het einde vindt nog een laatste controle plaats. Deze wordt uitgevoerd door een drietal *screeners*, universitair wiskundigen, die met een heel andere blik naar de opgaven kijken. Daarna worden de opgaven nog weer vertaald naar het Engels (ongeveer 150 scholen gebruiken een Engelse versie). Ook deze vertaling wordt nog gecontroleerd.
Het werk van de opgavencommissie zit er op. Scholen en leerlingen kunnen op de derde donderdag van maart aan de slag met leuke en uitdagende opgaven op hun niveau.

Noot

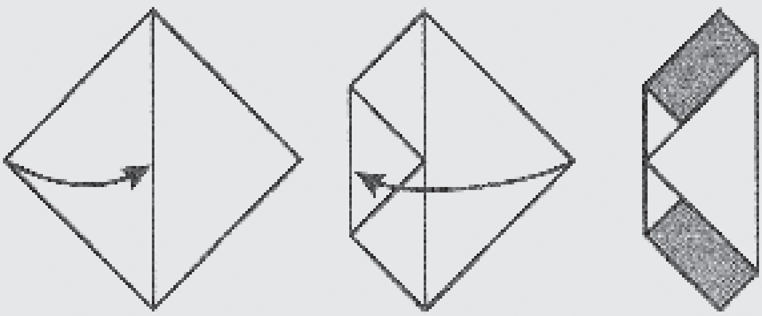
[1] Het eerste deel van deze artikelenreeks staat in Euclides 87(5), maart 2012, pp. 195-197.

Over de auteur

Ernst Lambeck is docent wiskunde aan het Newmancollege te Breda. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides* en voorzitter van de Nederlandse Opgavencommissie van de Kangoeroe.
E-mailadres: *elambeck@newmancollege.nl*



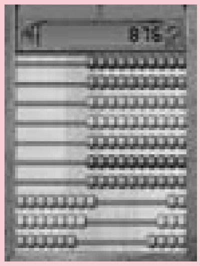
figuur 9



figuur 10

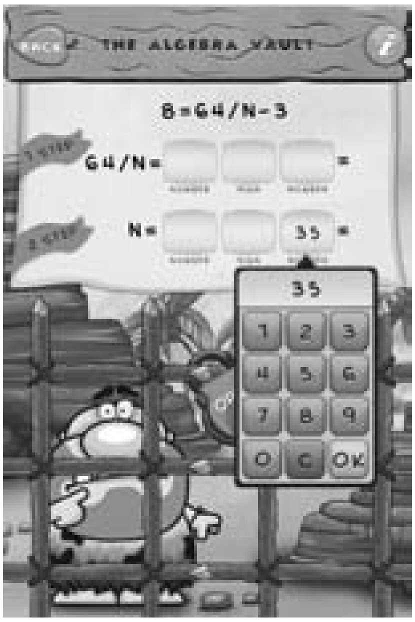
Wiskunde digitaal

MIDDLE SCHOOL MATH 2.3



[Lonneke Boels]

Geschikt voor iPad 2



Ordening Numbers

Middle School Math is een programma met meerdere spellen waarin je wiskundige basisvaardigheden kunt oefenen. Het programma bevat bijvoorbeeld het spel *Ordening Numbers-Fraction*. Dit spel oefent het snel schatten van lastige(re) breuken en past bij het 1S-niveau van rekenen. Het spel is educatief en toch leuk. Krabben lopen met breuken op hun schaal. De breuken (dus de krabben) moeten van klein naar groot worden afgetikt. Een voorbeeld van de breuken op 'level 1' is: $\frac{3}{10}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{50}\ \frac{49}{50}$. Wie inzicht heeft in getallen, ziet dat $\frac{1}{50}$ de kleinste breuk is en $\frac{49}{50}$ de grootste. $\frac{3}{10}$ is minder dan de helft en volgt dus na $\frac{1}{50}$, gevolgd door $\frac{3}{4}$. Precies uitrekenen is dus niet nodig en zelfs niet wenselijk. In de hogere *levels* gaan de krabben namelijk steeds sneller lopen waardoor ook het sneller schatten noodzakelijk is. Op een gegeven moment gaan de krabben zo snel dat het voor mijn ogen niet meer goed te volgen is – maar dat komt ook omdat ik nog te ijdel ben om een leesbril te pakken… Het breukenspel kent 9 levels en is door het S-niveau geschikt voor klas 1 havo en vwo. Mocht 2S toch het eindniveau worden van de mavo, dan is dit spel aan te raden voor klas 2 van de mavo. *Ordening Numbers-Integer* en *-Decimal* is geschikt voor klas 1 en 2 van het vmbo (rekenniveau 2F omvat negatieve getallen ordenen) en klas 1 van de mavo; *Decimal* is ook voor klas 1 van de havo geschikt. Negatieve getallen worden in dit spel op dezelfde manier geschreven als in Nederland gebruikelijk is.

Pinpoint Plotter

Een ander spel geschikt voor klas 1 mavo, havo en vwo is *Pinpoint Plotter*. In dit spel oefen je de coördinaten. Een assenstelsel wordt getoond [-10,10] × [-10,10]. Bij *Elephant* start het spel bij (-8, 3). Na aantikken van dit punt verschijnt een zwarte stip. Na het aantikken van het volgende punt (-6, 6) wordt automatisch een lijn tussen de punten getrokken. Er is geen tijdslimiet. Het aantikken van de punten is wat lastig en als je een fout punt aantikt, gebeurt er ogenschijnlijk niets. In de vorige versie verscheen er dan een kruisje wat eigenlijk beter was. De primitieve man die rechtsboven in beeld is, slaakt wel een kreet als je een fout maakt maar dat hoor je natuurlijk alleen als het geluid aan staat. Er lijkt geen maximum aan het aantal fouten te zitten. Als je klaar bent, verschijnt de tekst 'You did it! Congratulations!' en zie je een ruwe tekening van een olifant. Er zijn 8 verschillende dieren om te tekenen.

Overige spellen

Zoals gezegd, bevat het programma nog meer spellen.
» *Data Magnet* – Een programmaatje waarin je toetsen kunt maken. Vooralsnog zie ik hier nog niet de meerwaarde van in.
» *Place Value* – Een programma dat na het aantikken van 'hundreds' bijvoorbeeld 'eight hundred eighty five' schrijft en dan drie lege kaartjes laat zien waar je cijfers heen kunt schuiven. In de vorige versie waren de getallen met Nederlandse woorden geschreven maar daarin zat een bug. Mede naar aanleiding van de melding daarvan voor het schrijven van dit artikel is er een nieuwe versie verschenen. Op dit moment is die alleen in het Engels beschikbaar (met bijvoorbeeld een punt waar wij een komma zetten en andersom). Er is een vertaling naar een Nederlandse versie in de maak.
Het is geschikt voor vmbo klas 1. In een enkel geval zal een leerling uit havo klas 1 baat hebben bij dit 'spel' (bijvoorbeeld: 'millions'). Want hoe schrijf je het getal vijfhonderdzevenenzestig miljoen vijfhonderdtweeëntwintigduizend achthonderdtweeëndertig in cijfers? Het spel met decimale getallen zal ook voor een enkele leerling uit vwo klas 1 nog lastig zijn. Dit is niet zo gemakkelijk als het lijkt, omdat het spel een getal bijvoorbeeld niet als 'twee komma vijf' benoemt maar als 'twee en vijf tienden'. Deze koppeling tussen de positie van het cijfer achter de komma en zijn plaatswaarde, is bij veel leerlingen afwezig.
» *Shape Board* – Dit is een programma waarin je allerlei vormen kunt maken, vervolgens kunt inkleuren en de oppervlakte en omtrek kunt laten meten. Vrijwel elke veelhoek kan hiermee worden gemaakt en gemeten.
» *Sorting Multiples* – Dit is een spel op drie niveaus om snel tafels te herhalen en lijkt een beetje op Tetrix. Er komen krabben met daarin getallen naar beneden zeilen. Deze moeten in de juiste bakjes vallen, bijvoorbeeld: links veelvoud van 2, midden veelvoud van 2 en 3, rechts veelvoud van 3. Bij 2, 4, en 14 is het nog makkelijk. Maar waar hoort 39 of 57? Of 30? Wie erover nadenkt, weet natuurlijk het antwoord, maar de eerste neiging is toch om 30 bij de tafel van 3 in te delen. Maar pas op: na een aantal getallen, kom je in ronde 2. Dan gaat het om de veelvouden van 4, 5 of 4 en 5. In ronde 3 zijn het veelvouden van 2, 7 of 2 en 7. Het beginnersniveau geschikt voor klas 1 vmbo en havo. Het 'advance' niveau is geschikt voor leerlingen uit klas 1 vwo omdat de denktijd dan veel korter is. Bij drie fout is het 'game over' (met mogelijkheid om het opnieuw te proberen).
» *The Algebra Cage* is een spel om lineaire vergelijkingen op te lossen met één onbekende. De 'One-step Equations' zijn

vergelijkingen van de vorm $n + 2 = 3$ of $4n = 8$. De ‘Two-step Equations’ zijn van de vorm $2n + 3 = 5$ of $n/11 + 2 = 1$. De werking van dit programma is enorm verbeterd ten opzichte van de vorige versie. Mijn eerste vergelijking is bijvoorbeeld $8N = 88$. Eronder staat $N = \square\square\square =$. Onder deze drie vakjes (die veel groter zijn) moet je dan invullen: ‘number’ ‘sign’ ‘number’. Als je op het eerste vakje klikt, verschijnt er een mini-toetsenbord met cijfers en een OK-knop. Ik tik achtereenvolgens 88 / 8 in en dan verschijnt vanzelf het antwoord (11). De leerlingen kan zich hiermee concentreren op de soort bewerking in plaats van het rekenwerk. Daarmee is het een uitstekende oefening geworden voor het oplossen van lineaire vergelijkingen. Je moet namelijk steeds goed bedenken welke stap(pen) je moet zetten. Dat heeft natuurlijk alles te maken met de volgorde van de bewerkingen (die je bij het oplossen in omgekeerde volgorde afloopt).
Klik nu op ‘Open’ en het hek gaat open waarna een nieuwe vergelijking verschijnt. Klik je op ‘Open’ zonder de vergelijking op te lossen dan gebeurt er ogenschijnlijk niets, tenzij het geluid aan staat: het mannetje slaakt een kreet. Het enige nadeel van de nieuwe versie is dat het minder een spel is geworden dan een wiskundeoefening. Wiskundedocenten vinden het zo waarschijnlijk nuttiger, maar voor leerlingen blijven spellen toch het leukst.
» *Operations* – Dit is een programma waarbij de bewerkingen worden geoefend. In ‘proportions’ wordt het vereenvoudigen van breuken (of het omgekeerde) geoefend. In ‘adding and substracting integers’ wordt optellen en aftrekken van (negatieve) getallen door elkaar geoefend. Hierin zitten ook nog andere onderdelen, zoals de volgorde van bewerkingen, vermenigvuldigen en delen van hele getallen, en wortels en machten. Dit programma is geschikt voor bovenbouw vmbo en klas 1 en 2 havo en vwo.

Favorieten
Mijn favoriete spellen en programma’s *zijn Ordening Numbers-Fractions*, *Sorting Multiples* en *Pinpoint Plotter*. *The Algebra Cage* is in de nieuwe versie ook een prima oefening voor wie met apps in de klas werkt; voor thuisgebruik is het minder geschikt hoewel een stuk beter dan de vorige versie. Datzelfde geldt voor *Operations* dat een goede oefening is en zeker in de klas bruikbaar. Helaas lijkt het scoreboard voor eeuwige roem verdwenen. Hierop kon je voorheen je naam plaatsen na een foutloze score. Zo’n scoreboard hoort bij een spel en wordt door jongeren vaak belangrijk gevonden.

Wat vind ik goed aan deze spellen?
- Bij *Ordening Numbers* zit er echt een spelelement in. Dit spelelement vind je terug in de ‘levels’, het feit dat er een tijdslimiet is, het feit dat de denktijd steeds korter wordt (dus je vaardigheid moet toenemen voor een hoger level) en dat je na een aantal fouten ‘af’ bent. Overigens krijg je dan wel de mogelijkheid om het nog eens te proberen, zoals leerlingen ook gewend zijn van spellen. Dit maakt het ‘af’ zijn veel minder erg. Leerlingen vinden het spelelement erg leuk. Dit geldt ook voor bijvoorbeeld *Sorting Multiples*.
- Ik heb tot nu toe maar weinig programma’s gezien die boven de rekenstof van de basisschool uitstijgen. Dit spel is daarop een positieve uitzondering en oefent duidelijk een aantal basisvaardigheden van de wiskunde, zoals de volgorde van de bewerkingen, het plaatsen van punten in een assenstelsel aan de hand van hun coördinaten, het rekenen met negatieve getallen en het gebruik van machten en wortels.
- Naast algebraïsche vaardigheden biedt het programma ook (beperkt) mogelijkheden voor meetkundige vaardigheden (omtrek en oppervlakte van veelhoeken). Aangezien dit niet in een spelvorm is, zal je als docent zelf hier iets mee willen doen, wil het nut hebben.

Pluspunten
- Bevat echte wiskundeonderwerpen voor de onderbouw vmbo/havo/vwo;
- enkele spellen passen goed bij rekenen 1S en 2F;
- enkele spellen kennen *levels*;
- oefent een veelvoud van onderwerpen en vaardigheden;
- leerlingen vinden de spellen leuk.

Minpunten
- De notatie van negatieve getallen is in sommige spellen anders dan tegenwoordig in Nederland gebeurt – vroeger gebruikten we hier ook (-6) + 2 = … .
- Ook de notatie van breuken (1/3 bijvoorbeeld) en decimale getallen (met een punt) is anders dan in Nederland. Overigens moeten leerlingen deze laatste notatie ook kennen voor de rekentoets.
- Het competitie-element (scoreboard) uit de vorige versie lijkt te zijn verdwenen.
- Het programma *Place Value* is (nog) niet in het Nederlands verschenen, maar wordt wel verwacht. Mogelijk dat decimale getallen na de vertaling wel met een komma worden geschreven.

Eindoordeel: zinvol om aan te schaffen
Kostprijs: € 2,39
De maker van Middle School Math is Elementary Interactive, Canada.
Voor meer informatie: *www.interelem.com*

Over de auteur
Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

Every Woman Digital

[Brechje Hollaardt]

Begin maart organiseerde VHTO, landelijk expertisebureau meisjes/vrouwen en bèta/techniek, bij IBM in Amsterdam de conferentie 'Every Woman Digital'. De conferentie was voor zo'n honderdvijftig mensen uit bedrijfsleven, onderwijs en overheid én voor veertig meisjes van een aantal middelbare scholen. Een dag lang werden ze ondergedompeld in het onderwerp 'meisjes, vrouwen en ICT'.

Cocky Booy, directeur van VHTO, opent de conferentie: 'In Nederland is 10% van de ICT'ers vrouw. Nederland laat hierdoor een aanzienlijk potentieel aan talent en inzet onbenut. Het is enorm belangrijk om meisjes beter voor te lichten en op school in contact te brengen met vrouwelijke IT-professionals. We hebben de database 'Spiegelbeeld' opgezet, vol vrouwen die werkzaam zijn in bèta/techniek en die fungeren als rolmodel voor meisjes. Ze geven gastlessen op scholen en laten meisjes met hen speeddaten over hun werk. Met succes! Over het geheel genomen is de instroom van meisjes in bèta/technische opleidingen toegenomen. Maar helaas nog niet in de IT. Daarom is het goed dat het onderwerp nu weer op de agenda staat.'

Slecht in wiskunde

Twee vrouwen uit 'Spiegelbeeld' zitten de conferentie voor: Freena Eijffinger, CEO en oprichter van Autitouch, en Mirjam ter Linden, software engineer van LBI (voorheen Lost Boys). Ze gaan in gesprek met vier bovenbouwleerlingen van het Bredero College in Amsterdam. 'Weten jullie al wat je wilt gaan studeren?', 'Hoe kunnen we jullie overtuigen om een ICT-studie te doen?' Twee leerlingen reageren meteen dat het geen ICT gaat worden. Ze zeggen er niet zo'n beeld van te hebben. Eén leerlinge kiest er juist wel voor: 'Ik ga Lifestyle Informatics studeren, want in die studie combineer je van alles. Naast ICT krijg je psychologie en biomedische wetenschappen. Dat vind ik er zo mooi aan.' Eén leerlinge weet het nog niet: 'Misschien ga ik pedagogiek studeren. Hoe dan ook, ik zal altijd met ICT te maken krijgen want ICT komt overal in terug. Ik zou bijvoorbeeld een robot kunnen ontwerpen die ervoor zorgt dat kinderen minder agressief zijn.' Freena wil een misverstand wegnemen: dat je goed moet zijn in wiskunde om een ICT-studie te gaan doen. 'Ik was er heel slecht in, haalde een 1,3. Mijn wiskundeleraar zei dat ik maar iets 'sociaals' moest gaan studeren. Nadat ik cum laude was afgestudeerd in Informatica ben ik naar hem teruggegaan. Hij was apetrots op me!' De rolmodellen steken de meisjes een hart onder de riem: 'In de ICT heb je altijd werk én je hebt soms een streepje voor als vrouw.'

Mazzel?

Na het plenaire deel van de conferentie zijn er twee parallelle programma's: de volwassenen volgen lezingen en toespraken van onder andere Eurocommissaris Neelie Kroes, en participeren in ronde tafel discussies. De veertig meisjes uit de bovenbouw nemen deel aan speeddatesessies met vrouwelijke ICT-professionals en volgen masterclasses. Jessa Wegman van VHTO introduceert het programma voor de meisjes. Ze begint met een paar vragen, zoals: is 17%, 27% of 37% van de bètatechniek beroepsgroep vrouw? Er klinkt een 'oei' door de zaal als Jessa vertelt dat maar 17% vrouw is. Zeker als de meisjes horen dat Nederland daarmee een uitzonderingspositie inneemt. 'Er is ook onderzoek gedaan naar de oorzaak. Het blijkt dat meisjes in Nederland een laag zelfbeeld hebben als het gaat over bètatechniek. Halen ze een hoog cijfer voor wiskunde, dan denken ze 'mazzel'. Niet: ik ben er goed in.' De meisjes herkennen dit, ze knikken instemmend.

Speeddate

Zeven meisjes zitten in een kring om Evelien Fick. Het is wat onwennig, speeddaten… Maar de adviseur strategie & innovatie bij Wigo4it - een bedrijf dat ICT-diensten verleent – breekt meteen het ijs. Ze opent haar tas en legt alle spullen op tafel. 'Mijn OV-chipcard, telefoon, tablet, e-reader. Op een normale werkdag heb ik dit allemaal nodig.' Een meisje vraagt: 'Hoe zie die er uit?' Evelien pakt haar agenda erbij. 'Het is heel gevarieerd. Dinsdag zit ik in Amsterdam, Den Haag en Rotterdam. Ik moet met klanten overleggen en een cursus twitter geven. De meisjes bestoken haar met vragen: hoeveel meisjes werken er, reis je veel met de trein, hoeveel uur werk je, neem je vaak werk mee naar huis? De meisjes concluderen dat het werk toch wel heel anders is dan ze dachten: 'Dus je bent niet de hele dag bezig met cijfers op een pc.'

Masterclass mens-robot interactie

In een zaaltje neemt een groep meisjes plaats voor de masterclass van Birna van Riemsdijk en Rosemarijn Looije. Beide vrouwen zitten in de Spiegelbeeld database van VHTO. Birna geeft les op de TU Delft en heeft Medisch-technische Informatica gestudeerd, Rosemarijn werkt bij TNO en heeft Kunstmatige Intelligentie gestudeerd. Birna laat filmpjes zien van knuffelbare robots: '*Huggable social robot* is een project van een universiteit in België. De robot is bedoeld om kinderen uit te leggen welke therapie ze moeten ondergaan. Paco de zeehond is een robot in Japan voor demente bejaarden. Je kunt hem aaien en hij reageert. Ze worden er rustig en gelukkig van.' 'Wat schattig', zeggen de meisjes als de zeehond zich naar een

foto 1 Jessa Wegman introduceert het programma

foto 2 Speeddaten met rolmodel Eveline Fick

bejaarde buigt en haar lief aankijkt. Birna: ‘Je zou het bijna vergeten, maar er zit heel wat onder de motorkap van Paco. Hij zit vol sensoren om te horen, voelen en zien. Met de informatica erin worden de signalen van de sensoren verwerkt. Het zijn allemaal redeneer- en bewegingsmodellen. Die zijn weer gebaseerd op hoe mensen reageren.’ Rosemarijn werkt bij TNO aan sociale robots voor kinderen met diabetes. Ze vertelt dat ze maar een 5,6 voor wiskunde had en toch Kunstmatige Intelligentie ging studeren, een studie waarvoor wiskunde verplicht was.

De meisjes zeggen aan het eind van de dag dat ze toch wel een ander beeld hebben gekregen van wat je met ICT kunt. ‘Eigenlijk is het best wel leuk en het is zeker belangrijk!’

Info
Voor meer informatie de website van VHTO: *www.vhto.nl*

Fotografie
Liesbeth Dingemans

Over de auteur
Brechje Hollaardt is vanuit haar communicatiebureau Hypertekst en Communicatie (*www.hypertekst.nl*) betrokken bij onderwijsvernieuwingen in bèta en techniek, onder andere voor VHTO (Landelijk expertisebureau meisjes/vrouwen en bèta/techniek), Platform Bèta Techniek en het Landelijk Coördinatiepunt NLT.
E-mailadres: *brechje@hypertekst.nl*

platform wiskunde nederland

AANKONDIGING / VAKANTIECURSUS 2012

Eindhoven, vrijdag 24 en zaterdag 25 augustus
TU Eindhoven, Den Dolech 2 (5612AZ)
Amsterdam, vrijdag 31 augustus en zaterdag 1 september
CWI (Turing-zaal), Science Park 123 (1098XG)

De exacte benadering

vrijdagmiddag en -avond
- Intro ‘De exacte benadering’ - prof. dr. Jan Wiegerinck
- Hoeveel is oneindig minus oneindig - dr. Jeroen Spandaw
- Benaderen van irrationale getallen door ‘rationale’ getallen - dr. Cor Kraaikamp
- Random matrices en het Riemann-vermoeden - dr. Arno Kuijlaars
- Traitor tracing - dr. Boris Skoric

zaterdagmorgen en -middag
- Wiskunde voor dichters - dr. Michiel Doorman
- Een GeoGebra-ondersteunde benadering van sinus en cosinus - dr. André Heck
- Derdegraads vergelijkingen oplossen - prof. dr. Frans Keune
- Van meetkundige reeks naar Dirac-functies en Fourierreeksen - dr. Joop Kolk

De cursus is voor wiskundedocenten van elk niveau toegankelijk. De deelnemers ontvangen bij aanvang van de cursus een syllabus met teksten van de voordrachten. Het cursusgeld bedraagt € 95,00. Voor studenten van lerarenopleidingen is het cursusgeld slechts €35,00.

Bij de cursus is inbegrepen een warme maaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag.

Aanmelding
Een brochure van de cursus kan worden aangevraagd bij het bureau van het Platform Wiskunde Nederland,
tel. 020-5924006 dan wel 06-51892525 of e-mail: *vakantiecursus@platformwiskunde.nl*
Aanmelding voor deelname aan de cursus kan:
- door het aanmeldingsformulier achter in de brochure in te vullen en **vóór 1 augustus 2012** op te sturen aan het bureau van het PWN;
- via de website van het PWN: *www.platformwiskunde.nl/onderwijs_vakantiecursus_wiskunde.htm* waar een online registratieformulier ingevuld kan worden, eveneens **vóór 1 augustus 2012**.

De cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar.

Info
Website: *www.platformwiskunde.nl*
E-mail: *vakantiecursus@platformwiskunde.nl*

Aanvulling op Biljarten op een ellips

[Simon Biesheuvel]

In *Euclides* nummer 4 van deze jaargang (pag. 156) schreef Pauline Vos over het biljarten op een ellips. Het ellipsbiljart van ITS Academy kan samen met een lesbrief gebruikt worden in de wiskundeles. Het doel van dit lesmateriaal is leerlingen te leren dat je vormen naar formuletaal kunt vertalen en andersom. Simon Biesheuvel werd erdoor geïnspireerd en beschrijft hoe je, als aanvulling, in de les kan laten zien waarom de bal, geschoten vanaf een brandpunt via de rand altijd een bal in het andere brandpunt raakt.

Voor onze school heb ik bij Its Academy een ellipsvormig biljart geleend.[1] Eerst gaan leerlingen ontdekken waar je de ballen ongeveer moet leggen om via de rand altijd de andere bal te raken, waarbij het niet uitmaakt waar je de rand raakt.
In de lesbrief wordt uitgelegd hoe je uit de maten van het biljart de brandpunten kunt vinden.
Waarom de bal vanuit een brandpunt via de rand altijd de bal in het andere brandpunt raakt wordt niet uitgelegd. Daar heb ik het volgende bewijs voor bedacht. Dit is te volgen voor leerlingen die nog niet veel van ellipsen weten. Uit de lesbrief is alleen bekend dat een ellips ontstaat door de punten te zoeken met een vaste afstandensom tot de brandpunten.

In punt A (***zie foto 1***), het snijpunt van de ellips met de korte as, is het door symmetrie duidelijk dat de bal vanuit het ene brandpunt via de ellipsrand kaatst naar het andere brandpunt. Trek je door punt A een lijn die loodrecht staat op de korte as, en dus één punt gemeenschappelijk heeft met de ellips, dan noemen we die lijn een raaklijn. Op foto 1 is hoek 1 gelijk aan hoek 2, zoals ook bekend van de natuurkunde: de hoek van inval is de hoek van terugkaatsing.
Als we een willekeurig ander punt B kiezen (***zie foto 2***), kunnen we ons afvragen waarom een bal die vanuit het ene brandpunt (F_1) geschoten wordt via B ook door het andere brandpunt (F_2) gaat.
Er is een punt C op de lijn BF_2 dat even ver van punt B ligt als het linker brandpunt F_1. Je vindt dit met een passerboogje met de passerpunt in punt B.
Druk je nagel op het koord bij punt C en maak een nieuwe ellips, nu met de punten C en F_1 als nieuwe brandpunten; ***zie foto 3***.
De ellips die nu ontstaat, ligt binnen de eerste ellips, omdat voor elk punt D (***zie foto 4***), dat niet samenvalt met punt B, geldt dat de afstanden DF_1 en DF_2 samen kleiner zijn dan de lengte van het koord (door de knik bij punt C). Alleen punt B ligt op de twee ellipsen. De raaklijn door B staat loodrecht op de korte as van de nieuwe ellips en is tevens raaklijn aan de grote ellips.[2]
Kijken we naar de kleine ellips, ***op foto 4***, dan is het duidelijk dat hoek 3 en hoek 4 even groot zijn. De uitleg is gelijk aan de uitleg bij punt A van de eerste ellips.
Aangezien de bal op F_1 via B door C gaat, gaat deze ook door F_2 (en andersom).
Voor elk willekeurig punt B op de ellips is dus aangetoond dat een bal die geschoten wordt vanaf F_1, via B door F_2 gaat.

Leerlingen van zowel klas 4-vwo met wiskunde-B als van 5-vwo met wiskunde-C konden de redenering goed volgen. Ze waren ook geïnteresseerd in het verhaal. Maar misschien is dit vanwege mijn enthousiasme, omdat ik het bewijs zelf bedacht had.

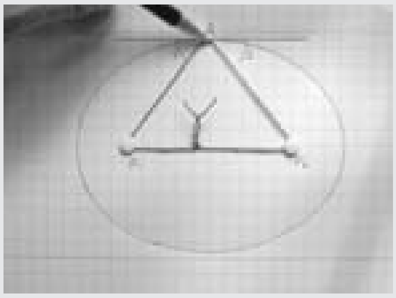


foto 1

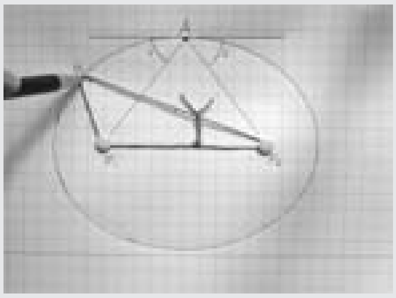


foto 2

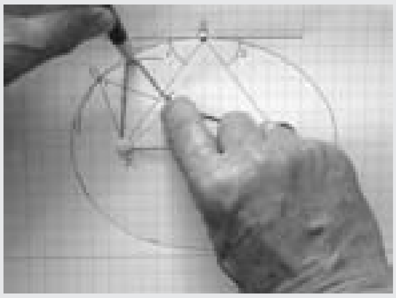


foto 3

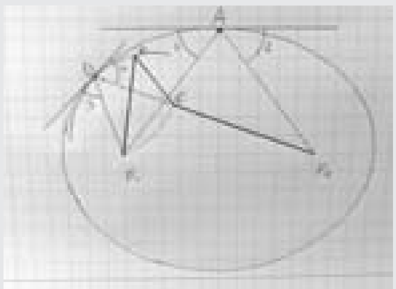


foto 4

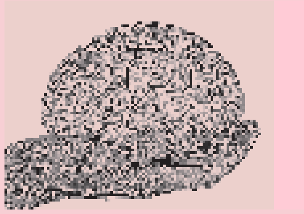
Noot

[1] Zie: *www.ITSAcademy.nl/leskisten*
[2] Hier gebruiken we de eigenschap: als twee ellipsen precies één punt gemeenschappelijk hebben, en elkaar dus in dat punt raken, dan hebben ze een gemeenschappelijke raaklijn in dat punt.

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum.
E-mailadres: *biesheuvel@zonnet.nl*

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pakt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

Zo'n kans krijg je nooit meer

Misschien bent u op 8 juni j.l. wel naar de Wiskunde D-conferentie van de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs geweest, maar ook als u daar niet geweest bent, heeft u vast wel eens van die commissie gehoord. Die cTWO, zoals de afkorting is, wordt ook wel de 'vernieuwingscommissie wiskunde' genoemd. Heel kort samengevat gaat de commissie over de nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo. Als u een beetje thuis bent in commissieland, dan weet u dat de letter O in dit soort afkortingen ook vaak voor Ontwikkeling staat, en ik vergis me dus wel eens door over de 'ontwikkelingscommissie wiskunde' te spreken. Een begrijpelijke vergissing, want een commissie met zo'n naam heeft wel degelijk bestaan: de COW, of wel de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs. Deze *laatste* aflevering van 'Het Geheugen' is aan die commissie gewijd.

De basisvorming

Op 25 november 1987 stelde staatssecretaris Ginjaar-Maas de 'Commissie Ontwikkeling Wiskunde-onderwijs 1e fase v.o.' in. Die commissie was kennelijk al een poosje bezig, want bij de instelling werd bepaald dat de beschikking terugwerkte tot 13 november 1986. Zo ziet u maar dat Nederlandse staatssecretarissen ook het verleden nog kunnen veranderen!
De voorzitter van de vakgroep OW&OC (het latere Freudenthal Instituut), prof. Van der Blij, werd de eerste voorzitter. Het secretariaat kwam bij de SLO, zodat het evenwicht tussen Utrecht en Enschede keurig bewaard bleef. Iedere organisatie die iets met het wiskundeonderwijs te maken had, kreeg een of meer vertegenwoordiger(s) in de club, die meer dan 20 leden telde.
De NVvW moest het met twee vertegenwoordigers doen, en hoewel er verder ook nog wel wat leraren in de commissie zaten, was de samenstelling van de COW een duidelijk teken dat de macht in onderwijsland inmiddels niet meer bij de leraren zelf, maar bij de organisaties daarom heen berustte.
Bij zo'n instellingsbesluit worden ook altijd de overwegingen om tot die instelling over te gaan aangegeven, en zo ook hier; ***zie figuur 1*** op pag. 318. Er werd gesproken over de noodzaak tot vernieuwing, er werd opgemerkt dat het wiskundeonderwijs meisjes meer kans op succes moest bieden, maar voor de staatssecretaris was het sleutelbegrip zonder twijfel de *basisvorming*. Wat was dat?
De basisvorming werd in 1986 voorgesteld door de Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid om de impasse in de discussie rond de Middenschool te doorbreken. De diverse schooltypes zouden blijven bestaan – de Middenschool kwam er dus niet – maar de schoolvakken en de inhoud daarvan zouden in vergaande mate gelijkgetrokken worden. Er kwamen maar liefst dertien voor alle schooltypes verplichte vakken, die met voor alle leerlingen verplichte toetsen moesten worden afgesloten. Daar kwamen, afhankelijk van het soort school, nog één tot vier theorievakken bij. Voor alle vakken werden commissies ingesteld om de programma's en de toetsen voor de basisvorming te ontwikkelen; de COW was dus niet uniek. Maar uit het instellingsbesluit, met die opvallende bepaling over de terugwerkende kracht, blijkt wel dat er met de COW toch iets meer aan de hand was.

Een omgebouwde Stuurgroep

In de loop van de jaren tachtig was het wiskundeprogramma in de bovenbouw van het vwo grondig verbouwd door de introductie van wiskunde-A, en met de bovenbouw van de havo zou spoedig hetzelfde gebeuren. Het rekenonderwijs op de basisschool had door de invloed van Wiskobas een ander gezicht gekregen. Maar het formele programma voor het wiskundeonderwijs op het lager beroepsonderwijs, de mavo en de lagere klassen van havo/vwo was nog hetzelfde als bij de introductie van de Mammoetwet eind jaren zestig, jaren waarin de abstractie van de *New Math* ook in Nederland niet zonder invloed was. En ook al was er in de praktijk, vooral op havo/vwo, wel het nodige veranderd, toch zat er voor de leeftijdsgroep van 12 tot 16 jaar een lelijk gat in de volgens velen hoogstnoodzakelijke vernieuwing van het wiskundeonderwijs. Om daar iets aan te doen werd er gewerkt aan een 'Stuurgroep Longintudinale Planning Reken/Wiskunde-Onderwijs', met als beoogd voorzitter Van der Blij.
Er was voor de groep van 12-16 jarigen ook een andere club actief: de AdviesGroep ExamenProgramma's, ofwel de AGEP. Dat was een min of meer officiële club uit de wereld van de examenmakers, en eind 1985 produceerde die een voorstel voor een wiskundeprogramma op C- en D-niveau voor lbo en mavo. Dat programma bracht echter niet veel nieuws, en als dat AGEP-programma enige status zou krijgen, kon dat de plannen voor een veel verdergaande vernieuwing lelijk in de weg zitten.
Het NVvW-bestuur besloot daarom het AGEP-programma onder de pet te houden. De inspectie hielp een handje: het AGEP-

De staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen,

Overwegende, dat het wiskunde-onderwijs voor leerlingen in de eerste fase voortgezet onderwijs vernieuwing behoeft, mede in relatie tot ontwikkelingen in het basisonderwijs en ontwikkelingen in het vervolgonderwijs; Overwegende, dat het wiskunde-onderwijs ook meisjes meer kans op succes moet bieden; Overwegende, dat het voornemen bestaat onder meer voor wiskunde voor de periode van basisvorming in het voortgezet onderwijs eindtermen in de Wet op het voortgezet onderwijs (stb. 1986, 552) op te nemen

Besluit

1. Er wordt een commissie ontwikkeling wiskunde-onderwijs eerste fase voortgezet onderwijs ingesteld voor de periode 13 november 1986 tot 1 augustus 1992.
2. Deze commissie heeft de volgende taken:
a. een advies aan mij uit te brengen in de vorm van eindtermen wiskunde bijlage bij deze beschikking;
b. een advies aan mij uit te brengen in de vorm van een concept-leerplan wiskunde voor l.b.o., m.a.v.o., de eerste drie leerjaren h.a.v.o. en v.w.o. aan en uitgaande van de eindtermen voor wiskunde basisvorming;
c. een advies aan mij uit te brengen in de vorm van een examenprogramma wiskunde voor l.b.o. en m.a.v.o. C- en D-niveau;
c. aan te geven welke aanpassingen in de opleiding en nascholing van docenten wiskunde nodig zijn als gevolg van de onder a, b. en c. genoemde adviezen.

figuur 1 De taak voor de COW was wel heel uitgebreid. Het advies over de eindtermen bracht de commissie in conflict met de staatssecretaris: de commissie hield zich niet aan het gewenste format en stelde bovendien doelen voor op drie niveaus, in plaats van op de voorgeschreven twee niveaus.

Inleiding

Om een beeld te krijgen van de diverse veranderingen in het algebraprogramma maken we eerst een vergelijking tussen de tijd die in het huidige programma voor algebra is ingeruimd en de beschikbare tijd in het W12-16 programma. Daarbij kijken we naar onderwerpen als: getalsregelmatigheden, grafieken, formules en vergelijkingen.

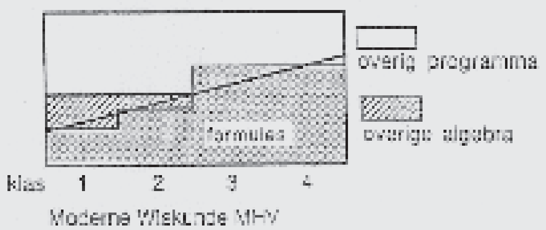
Een vergelijking tussen de beschrijving van het D-traject in W12-16 [2] en enkele moderne methoden levert het volgende beeld:

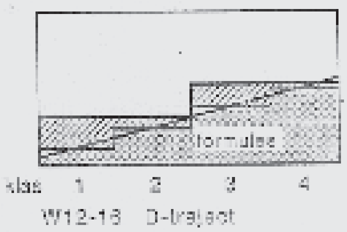
Tijd besteed aan algebra

	Moderne methoden	*W12-16*
klas 1	50%	33% (40 van de 120 uur)
klas 2	50%	33% (30 van de 90 uur)
klas 3/4	60%(praktijk ca 75%)	50% (65 van de 130 uur)

De hoeveelheid tijd die W12-16 reserveert voor algebra, is dus minder dan de bestede tijd in het huidige programma.

Dat geldt ook voor de hoeveelheid tijd die W12-16 aan formules en vergelijkingen toebedeelt. Ter illustratie vergelijken we het aandeel van formules en vergelijkingen in de methode *Moderne Wiskunde* en in het D-traject van W12-16 met elkaar:





figuur 2 Het terugdringen van het aandeel van de algebra, en dus van het oefenen van vaardigheden, was een omstreden element binnen de nieuwe leerplannen. De algebragroep W12-16 maakte die vermindering in een van haar publicaties ook zelf heel duidelijk

voorstel zou daar toch eerst langs moeten komen en daar zou men het in de la houden tot de Stuurgroep haar plannen kon presenteren. Die groep werd dus haastig opgetuigd en een jaar later werd de Stuurgroep met terugwerkende kracht als officiële Ontwikkelingscommissie in het kader van de basisvorming aangesteld.

De commissie Van der Blij had dus een dubbel doel. Ze was in eerste instantie ingesteld om wat te doen aan de verouderde programma's in de leeftijdsgroep van12-16 jaar, en dat natuurlijk in de geest van het realistisch wiskundeonderwijs – al was die term toen nog niet zo gangbaar. Daar kwam nu ook de basisvorming nog eens bij. De taak van de commissie werd daarmee wel heel omvangrijk. Het ging om het vaststellen van examenprogramma's, leerplannen en kerndoelen over de volle breedte van het onderwijs van 12-16 jaar, de leeftijdsgroep waarin iedereen nog leerplichtig was. Voor het lbo en de mavo, te combineren tot vmbo, moesten er nieuwe programma's op C- en D-niveau komen. Die (examen)programma's moesten natuurlijk precies kloppen met de kerndoelen van de basisvorming die de commissie ook moest opstellen, want voor het vmbo werd de basisvorming met de eindexamens afgesloten. Voor de havo en het vwo vielen de eindexamens natuurlijk niet samen met de afsluiting van de basisvorming. Daarvoor moesten dus aparte toetsen gemaakt worden, die ergens in het 3e cursusjaar – de scholen hadden daar een zekere vrijheid in – moesten worden afgenomen. Doordat die toetsen, zij het op twee niveaus, voor alle schooltypes hetzelfde waren, zou als vanzelf de onderbouw havo en vwo in de gewenste richting hervormd worden. En tot slot moesten de wiskundeleraren ook nog eens op het nieuwe programma voorbereid worden.

Dat allemaal was natuurlijk geen werk voor een commissie van ruim 20 personen; dus er kwam een uitvoerend team: de werkgroep W12-16, waarvan Marja Meeder en George Schoemaker de kern vormden.

Een radicaal andere aanpak

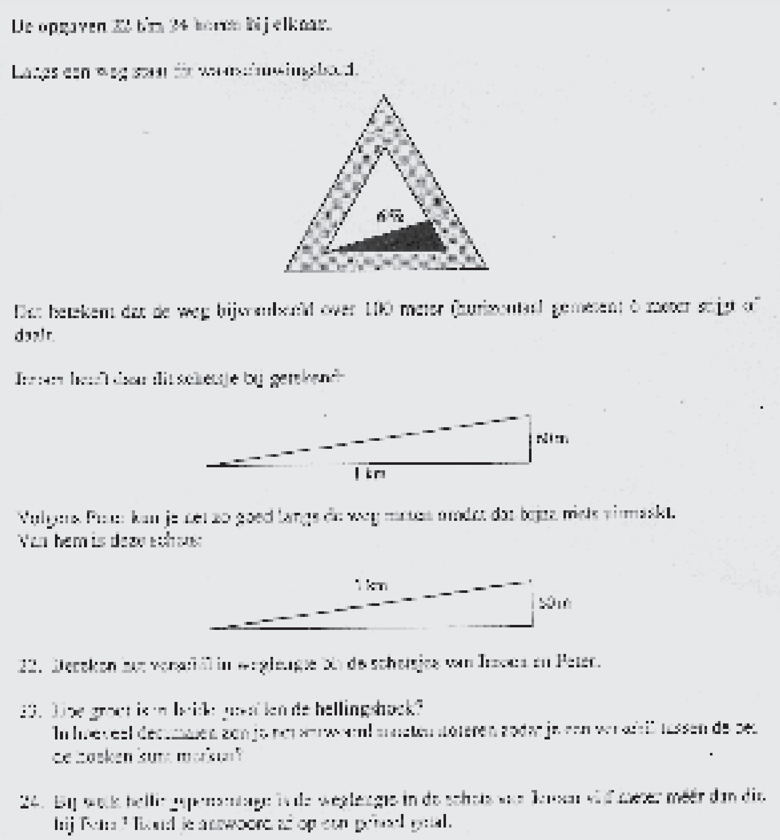
Er waren natuurlijk ook eerder commissies geweest die zich bezig hielden met leerplannen voor wiskunde, maar daarbij ging het eigenlijk altijd om eindexamenprogramma's. De eindexamenprogramma's van havo en vwo (en daarvoor van HBS en

gymnasium) waren richtinggevend voor wat er in de lagere klassen gebeurde. En wat er in die klassen gebeurde, was weer in hoge mate bepalend voor wat er op de mavo en het lbo aan wiskunde werd gegeven. Een echte *top-down* structuur dus, die natuurlijk wel zijn voordelen had: de onderbouw bereidde goed voor op de bovenbouw en getalenteerde leerlingen konden via het bekende proces van stapeling van diploma's hogerop komen in het onderwijsgebouw. Maar de meeste leerlingen stapelen nu eenmaal niet, en bij diegenen die vernieuwing wilden van het wiskunde-onderwijs, was de overtuiging gegroeid dat veel van de wiskunde die op mavo/lbo onderwezen werd, eigenlijk verspilde moeite was. De meeste leerlingen daar zouden veel meer baat hebben bij een praktische, in hun dagelijks bestaan
bruikbare wiskunde, in plaats van de abstracte wiskunde die maar voor een minderheid uiteindelijk nut had. Die leerlingen konden dat in de hogere jaren wel alsnog opdoen, was het idee.
Vanuit dat uitgangspunt was binnen het IOWO, later OW&OC, al jaren het Wiskivon-team actief, onder leiding van dezelfde George Schoemaker. Wiskivon (WISKunde In het Voortgezet ONderwijs) ontwikkelde op basis van bovengenoemd uitgangspunt ideeën en materialen voor de groep 12-16, maar had in de dagelijkse schoolpraktijk nog weinig voet aan de grond gekregen. Door de instelling van de COW en de werkgroep W12-16, waarin Schoemaker een leidende rol vervulde, lag daarvoor nu een unieke kans. Geen wonder dat de titel van de voordracht die hij in 1988 op de jaarvergadering van de NVvW hield dan ook luidde: *Zo'n kans krijg je nooit meer*.
Er waren van het begin af aan de nodige kritische geluiden vanuit het veld: over de werkwijze van W12-16, maar vooral over de doorstroming naar de bovenbouw en vervolgopleidingen. Wie nu, ruim twintig jaar later, nog eens de bezwaren van toen doorleest, ziet de hevige discussies over het gebrek aan vaardigheden en de aansluitingsproblemen van de laatste jaren eigenlijk al aankomen (***zie figuur 2*** en ***figuur 3***).
Het NVvW-bestuur stelde zich echter uitdrukkelijk achter het werk van de COW en W12-16, al waren er intern wel discussies en voelde men zich soms voor het blok gezet. Tussen idealen en werkelijkheid liggen altijd heel wat hindernissen, en natuurlijk werden

Algebra

Vooral het onderdeel algebra ontmoet kritiek vanuit de overweging dat het voorstel niet aansluit bij het vervolgonderwijs. Er wordt daarom gepleit voor het inruimen van meer tijd voor algebra en het aanleren van technische vaardigheden. 'Het trainen van technieken blijft belangrijk en zal meer tijd vragen,' merkt de werkgroep Etten-Leur op en vanuit Nuenen wordt daar aan toegevoegd dat minder letterrekenen de leerlingen bij hun vervolgonderwijs zal duperen. Het kunnen ontbinden in factoren wordt expliciet genoemd en ook noodzakelijk geacht voor het kunnen bepalen van snijpunten van grafieken evenals het kunnen oplossen van tweedegraads vergelijkingen in verband met natuurkunde. Het werken met de vorm $y = ax^2$ wordt wél, maar met $y = ax^n$ wordt in een reactie niet van belang geacht.

figuur 3 Juist die ingreep werd vanaf het begin af aan vanuit 'het veld' veel bekritiseerd. Dit commentaar is afkomstig uit het verslag van één van de regionale bijeenkomsten over het nieuwe programma. In hetzelfde verslag wordt ook gemeld dat bijna iedereen zich zorgen maakte over de aansluiting op de havo en het mto.



figuur 4 Een opgave uit het 'Experimenteel examen lbo-mavo-D' van 1991. Nu kijken we daar misschien niet meer zo van op, maar vergeleken met de meerkeuzevraagjes over oplossingsverzamelingen die tot die tijd op de mavo-examens voorkwamen, is het contrast enorm.

niet alle ideeën van Wiskivon zomaar door de COW binnen de schoolpraktijk gerealiseerd. Maar dat het wiskundeonderwijs, door de combinatie van basisvorming en inhoudelijke vernieuwing, begin jaren negentig een heel ander gezicht kreeg, en vooral vanuit het heel ander beginsel werd opgezet, staat buiten kijf (***zie figuur 4***).

Mislukt?!

Al een paar jaar na de invoering van de basisvorming in 1993 kwamen de eerste geluiden dat het hele project een mislukking was, en die geluiden werden alleen maar sterker. Het aantal van dertien verplichte vakken was veel te groot, voor de lbo-leerlingen was het programma bovendien veel te theoretisch. Voor veel leerlingen uit lbo/mavo greep het programma te hoog, voor havo- en zeker voor vwo-leerlingen was het te makkelijk. In 2006 werd de basisvorming grondig herzien, volgens velen, inclusief de verantwoordelijke minister, feitelijk afgeschaft. Het project basisvorming was mislukt.
Geldt dat dan ook voor al het werk van de COW? Volgens sommige critici van het huidige wiskundeonderwijs, bij wie de term *realistisch wiskundeonderwijs* als een rode lap op een stier werkt, is dat zeker zo. Mij lijkt dat veel te kort door de bocht. Wiskunde vervult binnen het voortgezet onderwijs nu eenmaal twee heel verschillende functies.
Voor een grote groep is het eindonderwijs, en is wiskundeonderwijs vooral zinvol als een steun in de rug om zich in de huidige maatschappij te kunnen handhaven. Heel lang is met deze groep nauwelijks rekening gehouden, en de voor hen nutteloze wiskunde die zij moesten leren, werd met een beroep op die ongrijpbare 'vormende waarde' gerechtvaardigd. Het lijkt me goed dat daar een eind aan is gekomen.
Voor een andere groep is wiskunde een belangrijk element waarop in latere opleidingen en in hun beroep wordt voortgebouwd. Beheersing van vaardigheden en het kunnen omgaan met abstracties is voor hen van groot belang. De benadering dat je in de onderbouw met die tweede groep niet zo veel rekening hoeft te houden, want dat het daarmee later vanzelf wel goed komt (of dat de vervolgopleidingen dat zelf maar moeten oplossen), heeft niet echt goed uitgepakt, en daar is wel wat misgegaan.
Bij de beoordeling van de resultaten van de basisvorming moet natuurlijk ook bedacht worden dat het succes voor de groep voor wie wiskunde eindonderwijs is, moeilijk meetbaar is. Bij diegenen die doorgaan met wiskunde, zijn eventuele gebreken veel makkelijker op te merken.
Ik vind, ook met de wijsheid van nu, het werk van de COW en het W12-16-team niet mislukt, maar wel onevenwichtig. Het accent is, misschien als reactie op de oude toestand, te veel op wiskunde als eindonderwijs komen te liggen. Dat werd toen al wel gesignaleerd, maar met die bezwaren werd niet zo veel gedaan.

De cTWO houdt zich weer, als vanouds zou ik haast zeggen, met de examenprogramma's van havo en vwo bezig. We zijn dus wel een beetje terug bij af, want wat er in de onderbouw gebeurt, zal weer sterk worden beïnvloed door de veranderingen in de bovenbouw, en alleen al daarom is de cTWO geen COW. George Schoemaker had gelijk: die kans komt niet meer terug. Dat hoeft ook niet zo erg te zijn, als er maar weer niet naar de andere kant wordt doorgeslagen. De kunst zal zijn voor de groep 12-16 tussen de legitieme belangen van alle partijen een goede balans te vinden, en natuurlijk moet iedereen daarvoor wat water in de wijn doen. Dat lijkt me helemaal niet erg, want zo doen wij dat toch altijd al in ons poldermodel?

Over de auteur
Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*.

Vanuit de oude doos

A° 1928

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.
Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer een relatief eenvoudige trigonometrische opgave en een m.p.-bepaling (m.p. = meetkundige plaats), beide uit 1928. Deze laatste is ook eenvoudig, en daarom juist goed bruikbaar in de klas, zeker als daarbij een dynamisch meetkundeprogramma wordt gebruikt.

Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

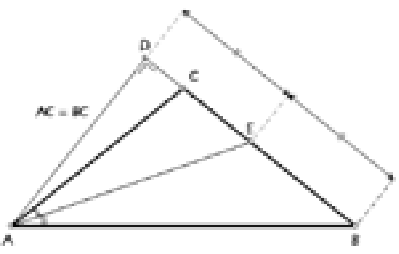
Opgave 1 (1928)

Van een gelijkbenige driehoek *ABC* is de tophoek *C* stomp, de hoogtelijn uit *A* is *AD*, de bissectrix van $\angle A$ is *AE*.
Indien *E* het midden is van *BD*, vraagt men de hoeken van de driehoek te berekenen.

Opgave 2 (1928)

Van driehoek *ABC* loopt *C* langs een lijn // *AB* op een afstand *h*. Welke is de m.p. van het snijpunt van de loodlijn uit *C* op *AB* neergelaten met de loodlijn in *A* op *AC* opgericht?

Uitwerkingen

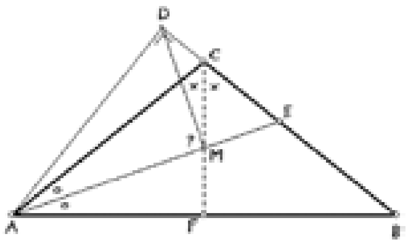


figuur 1

Opgave 1 – Stel $AC = BC = x$ en $CE = y$, dan is $CD = x - 2y$. Ook is:
- $AD = \sqrt{4xy - 4y^2}$ (stelling van Pythagoras in driehoek *ACD*), en:
- $AB = \sqrt{4x^2 - 4xy}$ (stelling van Pythagoras in driehoek *ABD*).

Pas nu de bissectricestelling toe in driehoek *ABC* vanuit hoek *A*:
$CE : BE = CA : BA$, of:
$y : (x - y) = x : \sqrt{4x^2 - 4xy}$
Waaruit na enig rekenwerk volgt:
$y = \frac{-1+\sqrt{17}}{8} \cdot x$, zodat:
$CD = x - 2y = x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \cdot x = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \cdot x$
Dus is $\sin(\angle DAC) = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{x} = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$, waaruit volgt:
$\angle DAC = 12{,}663435°$ en
$\angle ACD = 90° - \angle DAC = 77{,}336565°$.
Zodat $\angle C = 180° - 77{,}336565° = 102°39'48''$ en $\angle A = \angle B = 38°40'6''$.

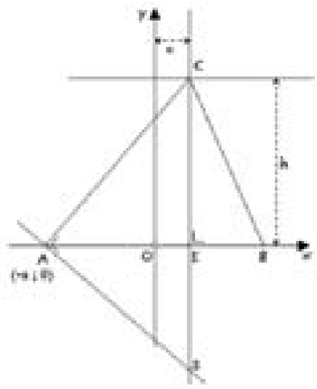
In de tekening zit nog meer fraais.



figuur 2

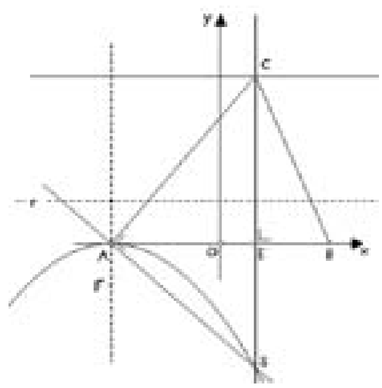
Ik vond met het programma *Geocadabra* (***zie figuur 2***):
Is *M* het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek *ABC*, dan geldt dat *DM* loodrecht staat op *AE*. Bewijs dit maar eens!

Opgave 2 – Eerst maar een werktekening waarin een (denkbeeldig) assenstelsel gekozen is met de lijn door *A* en *B* als horizontale en de middelloodlijn van *AB* als verticale as; ***zie figuur 3***.
Het punt *S* is het punt waarvan we de meetkundige plaats moeten bepalen.



figuur 3

Stel de afstand van *C* tot de *y*-as is *c* en *AB* = 2*a*, dan is:
$\text{rico}_{AC} = \frac{h}{c+a}$, dus $\text{rico}_{AS} = -\frac{c+a}{h}$.
Een vergelijking van de lijn *AS* is:
$y = -\frac{c+a}{h}(x+a)$. Snijden van *AS* met de lijn *CE* (met vergelijking $x = c$) geeft:
$y_S = -\frac{c+a}{h}(c+a) = -\frac{1}{h}(c+a)^2$
Met $x_S = c$ geldt dan: $y_S = -\frac{1}{h}(x_S + a)^2$. Dus ligt *S* op de *parabool* met vergelijking:
$y = -\frac{1}{h}(x+a)^2$



figuur 4

Deze parabool heeft als top *A*(-*a*, 0); ***zie figuur 4***. Het brandpunt van de parabool

is $F(-a, -h/4)$ en de richtlijn r heeft als vergelijking $y = h/4$. Dit zijn antwoorden op mogelijk aanvullende vragen.
De opgave loopt dan voor een leerling prettig wanneer bijvoorbeeld $a = 1$ en $h = 4$ gekozen wordt.

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

BOEKBESPREKING /

Apologie van een wiskundige

[Peter Lanser]

Auteur: G.H. Hardy
Oorspronkelijke titel: A Mathematician's Apology
Vertaling: Josephine Ruitenberg
Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam (2011)
ISBN: 978-90-5712-333-7
Prijs: €16,95 (144 pagina's; paperback)

In zijn wekelijkse column voor het *NRC Handelsblad* geeft Joris Luyendijk, cultureel-antropoloog, presentator van VPRO's *Zomergasten* en schrijver, een fascinerende kijk in de financiële wereld in Londen. Op 23 februari 2012 voert hij Wayne ten tonele, een student wiskunde die een stageplek probeert te krijgen bij een grote investeringsbank. Het soort banken dat op de dag van de terroris-tische aanslagen in Londen in 2005 ging *short sellen* – speculeren op een val van de koersen om zo enorme winsten te maken.
Wayne is, stelt Luyendijk, 'enorm analytisch begaafd, maar ook enigszins, hoe zeg je dat: niet van deze wereld'. Wayne: 'Wiskunde is een verslaving, zo kun je dat echt noemen. Ik zou niets liever willen dan mijn naam te verbinden aan theorema – om zelf een grote ontdekking te doen, iedere wiskundige heeft dat. Maar ik blijf "toegepast", zoals we dat noemen. Zo blijf ik verankerd in de werkelijkheid – en word ik hopelijk niet zoals sommige van mijn professoren.'

Verdedigingsrede

Toegepaste wiskunde, voor de Britse wiskundige G.H. Hardy (1877-1947) was daarin in ieder geval niet de schoonheid van de wiskunde te vinden. Vorig jaar verscheen bij Uitgeverij Nieuwezijds – eindelijk – een Nederlandse vertaling van *Apologie van een wiskundige*, een 'verdedigingsrede' die Hardy schreef aan het einde van zijn carrière als wiskundige en die oorspronkelijk in 1940 werd gepubliceerd.
Bijna een derde deel van deze uitgave wordt gevuld met een voorwoord van de Britse natuurkundige en schrijver C.P. Snow, dat in 1967 verscheen bij de heruitgave van het origineel. In zijn vijftig pagina's kom je aardig wat te weten over Hardy. Zoals dat Hardy als tweejarige reeds getallen tot in de miljoen kon opschrijven, dat hij – en dat is gezien de rivaliteit tussen de universiteiten best opmerkelijk – hoogleraar in zowel Cambridge als Oxford is geweest, hij het als een voorrecht beschouwde om te hebben samengewerkt met de Indische wiskundige Ramanujan, dat hij verlegen en tamelijk onbeholpen in de omgang was, hij een enorm liefhebber was van cricket, 'de mooiste maar tevens meest hypocriete sport', en zelf graag *real* tennis en – begrijpelijk – squash speelde.

Schoonheid als criterium

Snow, die achtentwintig jaar jonger was dan Hardy en met hem was bevriend, noemt Hardy's Apologie 'indien [gelezen] met de aandacht die het verdiend, een ontzettend droevig boek.' Wellicht vanwege zinnen als 'Ik schrijf over de wiskunde omdat ik, net als elke wiskundige van over de zestig, niet meer over de frisheid van geest […] beschik om mijn eigen werk doeltreffend voort te zetten.'
Wiskunde was in de ogen van Hardy een bezigheid van jonge mensen, die de ambitie hebben om iets van blijvende waarde te willen achterlaten.
Het boek heeft op mij echter een andere uitwerking, want het is een prachtig, elegant, soms enigszins hautain en scherp geschreven pleidooi voor de zuivere wiskunde. Net als een dichter en een schilder is een wiskundige een maker van patronen, en die patronen moeten mooi zijn, schrijft Hardy.
'Schoonheid is het eerste criterium, er is geen blijvende plaats in de wereld voor lelijke wiskunde.' Als voorbeelden geeft Hardy de bewijzen uit het ongerijmde voor de stellingen dat er oneindig veel priemgetallen bestaan en dat het getal $\sqrt{2}$ irrationaal is, waarbij beide stellingen inclusief hun bewijzen in zijn ogen 'verrassend, onontkoombaar en efficiënt' zijn.
Hardy onderscheidt twee soorten wiskunde, de toegepaste/triviale en de zuivere/echte wiskunde. Alleen de laatste zag hij als kunst, als een onschadelijke en onschuldige

bezigheid. Sterker nog, 'als de wereld krankzinnig is geworden, kan een wiskundige in de wiskunde een uitstekende pijnstiller vinden.'

Enorme vlucht

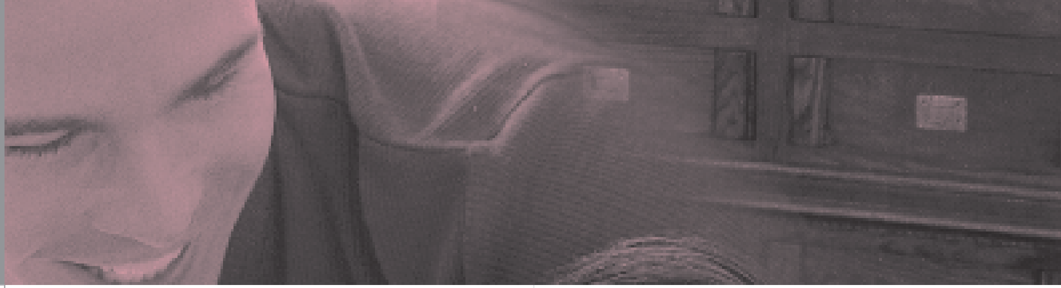
In de laatste decennia heeft de toegepaste wiskunde een enorme vlucht genomen. Zou Hardy daar op een zelfde manier tegen aangekeken hebben, en was hij dan, zoals Wayne het stelde, een van die professoren geweest die niet verankerd was in de werkelijkheid? In ieder geval zou Hardy zich op zijn kenmerkende manier vast hebben afgevraagd in wat voor een bizarre realiteit mensen als Wayne leven.

Over de recensent

Peter Lanser is docent wiskunde en lerarenopleider aan de Hogeschool van Amsterdam en auteur van *De laatste stelling van Fermat* (Epsilon Uitgaven, Zebra 7).

Info [Red.]

Van de achterkaft – G.H. Hardy werd door zijn tijdgenoten geprezen als 'een echte wiskundige, de zuiverste in zijn soort'. Deze 'apologie' […] is een aangrijpend verhaal over de schoonheid en het nut van de wiskunde en geeft een treffend beeld van het leven en denken van een ware wetenschapper. […] Toen deze klassieker in 1940 verscheen, roemde Graham Greene het – samen met Henry James' Notebooks – als 'het beste boek over wat het betekent om een scheppend kunstenaar te zijn'. Het is door onder andere Simon Singh en Marcus du Sautoy genoemd als hun favoriete wetenschapsboek.



Jaarvergadering / Studiedag 2012

[Henk van der Kooij en Marianne Lambriex]

Eerste uitnodiging
Dit is de eerste uitnodiging voor de Jaarvergadering/studiedag 2012 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 3 november 2012**.
Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal

Themagedeelte van de studiedag
Wiskunde: kernvak!?
Deze krachtige kreet wordt het thema van de studiedag in november 2012. Dat heeft het bestuur in zijn vergadering van 25 januari j.l. bedacht. Hieronder worden wat thema's besproken die genoeg stof voor de studiedag opleveren.
Graag nodig ik iedereen die een bijdrage wil leveren uit om mij – Henk van der Kooij – dat voor eind juni te berichten: *h.vanderkooij@uu.nl* .

Slagen/zakken – Zoals iedereen weet (of hoort te weten) is wiskunde weer stevig in beeld als een belangrijk schoolvak. In een tamelijk recent verleden was dat wel eens anders… En dat nieuwe beeld hebben we te danken aan de overheid die in de PISA-resultaten van 2009 aanleiding zag de onderwijslat voor vo hoger te gaan leggen. We doen het in PISA bij wiskunde goed tot heel goed als het gaat om de 'relatief zwakkere' en de 'gemiddelde' leerling, maar we blijven onder de maat met de 'beter' en 'best' presterende leerlingen. En daar moet uiteraard iets aan gedaan worden. Dit was voor de minister een belangrijke aanleiding voor de presentatie aan de Tweede Kamer, in het voorjaar van 2011, van haar 'Actieplan Beter Presteren: opbrengstgericht en ambitieus' met als ondertitel 'het beste uit leerlingen halen'. De tekst van dit plan is te vinden via de link op de website van de Rijksoverheid [1].
Wiskunde, Nederlands en Engels worden in dat plan aangewezen als *de* doorstroom-relevante vakken in het vo waarop voorlopig wordt gefocust.
Belangrijke punten in het plan, voor wat betreft wiskunde, zijn:
- meer specifieke tussendoelen voor de onderbouw van vmbo en havo/vwo;
- verplichte landelijke diagnostische toetsing op deze tussendoelen;
- de minister kan (op grond van een advies van de Onderwijsraad) zich niet voorstellen dat er minder dan eenderde van de onderwijstijd wordt ingeruimd voor de kernvakken wiskunde, Nederlands en Engels;
- de eerder genomen beslissing om voor de kernvakken de examenresultaten strenger te laten meetellen in de slaag/zakregeling blijft van kracht.

Sommige van deze punten lijken beloftevol (meer specifieke tussendoelen voor de onderbouw, wellicht meer onderwijstijd), terwijl andere (verplichte diagnostische toetsing, strengere slaag/zakregeling) een gevoel van onbehagen kunnen oproepen.
De strengere slaag/zakregeling maakt het beroep van wiskundedocent er niet gemakkelijker op. Wat vindt jouw directie ervan als 10% meer leerlingen niet slaagt vanwege deze regeling en dat komt door hun wiskundige 'wanprestatie' bij het examen? Zo'n maatregel zorgt ervoor dat je jezelf misschien verplicht voelt om meer te gaan inzetten op examentraining in plaats van bezig te zijn met het onderwijzen en leren van wiskunde.

Tussendoelen – Het meer gedetailleerd beschrijven van tussendoelen voor het einde van de onderbouw lijkt een goede zaak. Dat geeft meer duidelijkheid voor docenten en auteurs van methoden om greep te krijgen op de te behandelen leerstof in de onderbouw. De kerndoelen die een aantal jaren geleden zijn beschreven, waren te algemeen, en dus te vaag, geformuleerd.
De SLO heeft, in opdracht van OCW, deze tussendoelen geformuleerd op basis van een al eerder opgeleverd document van cTWO. In het najaar is daarover een internet-enquête gehouden onder docenten en andere 'experts'. Op 12 december 2011 heeft de SLO een zogeheten validatiebijeenkomst belegd met docenten en (apart daarvan) met 'experts'. Binnenkort zal de SLO met een definitief voorstel komen. Ik ben benieuwd hoe de, af en toe scherpe, discussie tijdens de *expert meeting* zal worden verwerkt.

Diagnostische toetsen – Omdat wiskunde een van de kernvakken is die aan het eind van de rit zwaar wegen in de zak/slaagregeling, wordt het nodig geacht om aan het eind van de onderbouw een beeld te krijgen of de leerling wel op de goede weg naar het eind is. En daarvoor is een landelijke toets bedacht, die onder verantwoordelijkheid van CvE wordt gemaakt door Cito. Met enige nadruk wordt gezegd dat die toets slechts diagnostisch is: scholen en leerlingen worden er niet op afgerekend. Wel moet duidelijk worden waar de leerling het goed doet en waar eventuele achterstanden zijn in de doorlopende leerlijn onderbouw-bovenbouw. Het feit dat deze nieuwe tussendoelen voor alle leerlingen in enig onderwijstraject (vmbo, havo of vwo) op dezelfde manier voor alle leerlingen, via een landelijke toets, worden gemeten staat volgens mij echter haaks op de doelstelling van het Actieplan. Daarin wordt gesproken over het 'beste uit leerlingen halen'. Maar elke leerling is een unieke persoon, met een eigen prestatieniveau. Dat moet je niet willen meten met een toets die voor alle leerlingen gelijk is. Dan is de kans groot dat je in dezelfde valkuil trapt als indertijd met de basisvorming toets: zeer frustrerend voor de 'matig presterende' leerling en met weinig waarde voor de 'goed presterende' leerling.

Het beste uit leerlingen halen – Op 31 maart 2011 was er een consultatiebijeenkomst over het Actieplan, belegd door OCW, waar het bestuur van de NVvW was vertegenwoordigd door Johan Gademan en Henk van der Kooij. Een verslag daarvan is te vinden op de website van het Actieplan [2]. In de discussie met een aantal deskundigen over 'opbrengstgericht werken' kwam op tafel dat toetsing van alle leerlingen met een landelijke toets en het stimuleren van individuele maximale leeropbrengsten bij leerlingen niet echt verenigbaar zijn. Ik was blij te horen dat de meeste aanwezigen daarmee instemden. In het verslag van die bijeenkomst is een uitspraak van mij letterlijk geciteerd: 'Voor de deelnemers staat opbrengstgericht werken vooral voor een continu verbeterproces op individueel niveau met de drive om *te kietelen aan het plafond van capaciteiten van de individuele leerling*.' Dat zou de uitdaging moeten zijn voor elke docent: haal het maximaal bereikbare uit elke individuele leerling, gegeven zijn/haar capaciteiten. Maar ik besef ook dat dit, binnen de huidige onderwijscultuur, een moeilijke opdracht is. En het wordt zeker niet gestimuleerd door landelijke toetsing die voor alle leerlingen gelijk is binnen het onderwijstraject wat zij doorlopen, ook al wordt die toets diagnostisch genoemd. Gelukkig zegt de minister in het Actieplan ook dat professionalisering van docenten op dit gebied (het beste uit de leerling halen) belangrijk is. Of dit ook wordt omgezet in financiële middelen om dat te bereiken moet nog maar worden afgewacht. In dit opzicht is de politiek meestal niet erg bereidwillig om te investeren met geld.

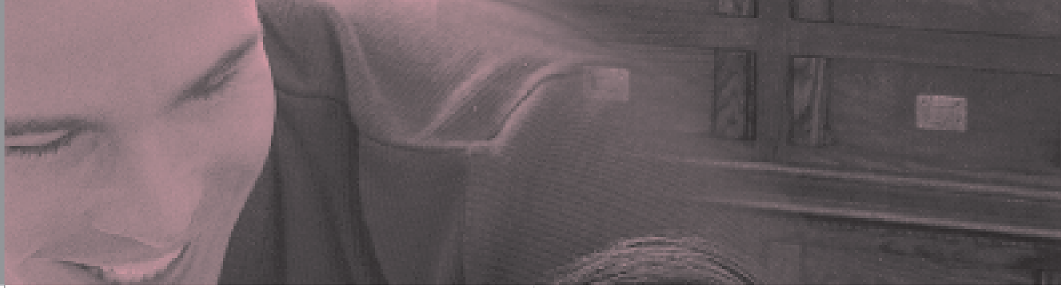
Kennisbasis hogescholen – Voor de lerarenopleidingen (hogescholen voor de tweedegraads opleiding van wiskunde-docenten en de pabo's) is er ook een kentering in de bestaande praktijk zichtbaar. Door de invoering van het competentiegericht onderwijs in het hbo is de aandacht voor de ontwikkeling van vakinhoudelijke kennis van toekomstige docenten behoorlijk in het gedrang gekomen. OCW heeft gedreigd in te grijpen als de HBO Raad niet zelf orde op zaken zou stellen. Aangestuurd door de HBO Raad is voor een aantal vakken (waaronder wiskunde) een vakinhoudelijke kennisbasis geformuleerd waarover een beginnende docent moet beschikken als hij/zij begint met lesgeven. En uiteraard wordt daaraan een landelijk te gebruiken toets gekoppeld. Items voor een toetsbank worden al ontwikkeld en er is, vanuit de HBO Raad, een vakcommissie ingesteld die de validiteit en correctheid van deze items en de daaruit gecomponeerde landelijke toetsen moet beoordelen. Dat gebeurt in het kalenderjaar 2012.

Digitale toetsing – Bij landelijke toetsing wordt in de discussies die voorafgaan aan invoering, steeds meer automatisch uitgegaan van digitaal toetsen. Dat geldt voor de diagnostische toetsing die bij het Actieplan is bedacht aan het einde van de onderbouw, voor de landelijke rekentoetsen 2F en 3F als onderdeel van het examen, voor de kennis-basis van de lerarenopleidingen en dat geldt al langer voor de examinering bij vmbo-BB en vmbo-KB. Bij de kennisbasis van de leraren-opleidingen wordt voorlopig *Questionmark Perception* als standaard gehanteerd; bij de andere genoemde toetsen, die in handen van Cito zijn, wordt nog steeds het zeer beperkte systeem *ExamenTester* van het Cito gebruikt. Wat je wiskundig kunt toetsen wordt door deze systemen behoorlijk ingeperkt: je bent in de vraagstellingen gedwongen sommige vragen, waarbij de strategie van aanpak belangrijker is dan het uiteindelijke antwoord, niet meer te stellen omdat de beantwoording daarvan niet mogelijk is. Multiple choice-vragen en numerieke antwoorden zijn vaak de enige mogelijkheden die dergelijke toetssystemen toestaan. En dat is een grote aanslag op wat wij gewend zijn bij het toetsen van wiskundige kennis en vaardigheden.

Agenda

Huishoudelijk gedeelte, 10:00-10:50u

1. Opening door de voorzitter, mevrouw M. Kollenveld
2. Jaarrede door de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2011 (zie een volgend nummer van *Euclides*)
4. Jaarverslagen NVvW en *Euclides* (zie een volgend nummer van *Euclides*)
5. Verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie
6. Bestuursverkiezing. Er zijn bestuursleden aftredend. Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vóór de vergadering in te dienen bij de secretaris (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*).
8. Sluiting van de jaarvergadering



Programma Studiedag:

10:50-11:00u	Inleiding op de studiedag
11:00-11:45u	Plenaire lezing
11:45-12:00u	Koffie/thee
12:00-13:00u	Workshops, 1e ronde
13:00-14:00u	Lunchpauze, marktbezoek
14:00-15:00u	Workshops, 2e ronde
15:00-15:20u	Koffie/thee
15:20-16:00u	Plenaire voordracht
16:00-16:10u	Afsluiting

Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 3 november NVvW-dag!
In een volgend nummer van *Euclides* krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op 3 november 2012. De omschrijvingen van de workshops worden vanaf midden september op de NVvW-site gepresenteerd. Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).

Noten

[1] *www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties/kamerstukken/2011/05/23/actieplan-vo-beter-presteren.html*

[2] *www.actieplanbeterpresteren.nl*

Van de bestuurstafel

[Marianne Lambriex]

Van WiVa naar Registerleraar.nl

Op 15 februari j.l. is door de minister *Registerleraar.nl* geopend en vanaf dat moment kunt u zich registreren als leraar. Intussen hebben al een paar duizend leraren dat gedaan. *Registerleraar.nl* is de verwezenlijking van jarenlange projecten waaraan de NVvW heeft meegewerkt en die tot doel hadden een register voor wiskunde- en alle andere leraren op te zetten. Het laatste project is het WiVa-project waaraan velen van u meegewerkt hebben en waarover u artikelen, eerder in *Euclides* gepubliceerd, hebt kunnen lezen.

Even bijpraten

Tijdens de laatste jaarvergadering van de NVvW heb ik u de laatste informatie gegeven over de stand van zaken met betrekking tot het Register. Met name dat er in het proces enige vertraging was geslopen door de oprichting van de Onderwijscoöperatie (OC) en ook het bouwen van een bijbehorende website. Intussen zijn deze ontwikkelingen in een stroomversnelling terecht gekomen. De OC werkt, mede door de goede samenwerking van de leraren, en *Registerleraar.nl* wordt ondergebracht op de site van de gezondheidszorg, bij het BIG register – van hun ervaring maken we dankbaar gebruik.
Ook de minister heeft aangegeven dat ze wil dat er dit jaar een register is.
De streefdatum was 1 januari, maar dat is niet gelukt, ondanks dat er achter de schermen keihard gewerkt is, ook door NVvW-leden, en veel van de uitkomsten van het WiVa-rapport en de pilot zijn en worden meegenomen in dit register, want het is nog niet helemaal klaar.
Registerleraar.nl is een register voor het hele po, vo en mbo en heeft een meer algemene opzet dan onze pilot, met een verdere indeling volgens de drie genoemde sectoren. Het algemene deel, dat voor alle drie sectoren geldt, is zo goed als klaar; de sectoren zijn nog niet helemaal klaar.
Er is veel tijd verlopen tussen de pilot en de start van *Registerleraar.nl*. Maar het draagvlak voor een register is er nu bij de politiek en bij de vakbonden, die allemaal vertegenwoordigd zijn in de OC, die de verantwoording draagt voor het *Registerleraar.nl*.
Intussen heeft de NVvW door de WiVa-pilot veel ervaring opgedaan met wat wiskundeleraren belangrijk vinden en met het inventariseren en valideren van professionaliseringsactiviteiten. Dat is ook terug te vinden in *Registerleraar.nl*. Namens het Platvorm VVVO zit ik in de RegisterCommissie VO, waar ik probeer de 'goede werken' van de NVvW voort te zetten voor alle vakdocenten.

www.registerleraar.nl

Hieronder staat de 'fact sheet' van de OC betreffende *Registerleraar.nl*. Namens het bestuur van de NVvW roep ik u op om u daar te registeren.

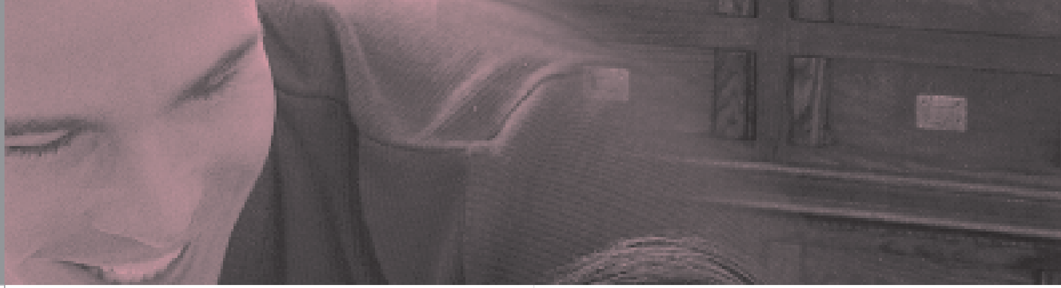
Onderwijscoöperatie
De Onderwijscoöperatie is een vereniging van onderwijsvakorganisaties (AOb, BON, CNV Onderwijs, Federatie van Onderwijsvakorganisaties en Platform VVVO). Tezamen vertegenwoordigen zij ongeveer 200.000 leraren.

Waarom een register?
Zonder goed gekwalificeerde leraren geen goed onderwijs. Leraren zijn trots op hun beroep en stáán voor de kwaliteit van hun werk. Met *Registerleraar.nl* nemen leraren verantwoordelijkheid en leggen verantwoording af. Zij laten zien dat zij bevoegd en bekwaam zijn, hun bekwaamheid onderhouden en verder ontwikkelen. Bovendien maken zij zich zo samen sterk voor mogelijkheid, middelen, zeggenschap en kwaliteit. Van, voor en door leraren, dat is de kracht van *Registerleraar.nl*.

Waarom vrijwillig?
Kwaliteit komt van binnenuit en onderop. De vrijwillige deelname garandeert betrokkenheid uit vrije wil en versterkt de kracht van het register van binnenuit. Alleen op basis van deze vrijwilligheid is de zorg voor kwaliteit werkelijk de zorg van, voor en door leraren.

Wat levert Registerleraar.nl op

- *Registerleraar.nl* is een krachtige manifestatie van de beroepsgroep leraren die een halt toeroept aan de voortdurende erosie van het beroep in de publieke en politieke beeldvorming.
- *Registerleraar.nl* versterkt de stem van de leraar als het gaat over de kwaliteit van ons onderwijs.
- *Registerleraar.nl* is een instrument waarmee leraren met elkaar duidelijk maken wat nodig is voor professionele ontwikkeling en dat regelen:
  - de mogelijkheden en de middelen voor professionele ontwikkeling;
  - de zeggenschap over de beroepskwaliteit en de professionele ontwikkeling;
  - de kwaliteit van opleiding en scholing.
- *Registerleraar.nl* ondersteunt de leraar in zijn professionele ontwikkeling, zijn ambities en zijn loopbaan.
- *Registerleraar.nl* is een handig hulpmiddel voor de leraar:
  - professionele ontwikkeling wordt met een minimale inspanning inzichtelijk;
  - wat er toe doet voor professionele ontwikkeling is in een handzaam en



- toegankelijk overzicht bijeen gebracht;
  - in één oogopslag is duidelijk welke opleidingen en scholing door collega's worden aanbevolen en waarom;
  - collega's kunnen elkaar moeiteloos vinden op de thema's die hen interesseren.

Kortom, *Registerleraar.nl* is hét medium waarmee leraren in het digitale tijdperk hun professionele kwaliteit en positie waarborgen.

Uitgangspunten van het register

- Registratie op basis van vrijwilligheid;
- Registratie op basis van 'high trust';
- Registratie is kosteloos;
- Deelnemers hebben zeggenschap en zichtbaarheid;
- Deelnemers uit de beroepsgroep zijn verantwoordelijk voor het beheer;
- De aard van het register is privaatrechtelijk.

Een ontwikkelingsgerichte opstart met een voorlopig reglement

Het register is van, voor en door leraren. De opzet van het register, de concretisering en toepassing van kwaliteitseisen voor de professionele ontwikkeling en de beoordeling en waardering van de inzet op het gebied van professionele ontwikkeling worden vanuit een voorlopig reglement samen met de leraren die zich registreren, verder ontwikkeld.

In 2012 groeit het register uit tot een serviceplatform waar leraren:

- met maximaal gemak kunnen administreren welke activiteiten zij in het kader van professionele ontwikkeling ondernemen;
- een overzicht vinden van kwalitatief hoogwaardig scholingsaanbod;
- zien hoe collega's dit aanbod en ook andere typen ontwikkelingsactiviteiten waarderen.

Het voorlopig reglement bevat criteria voor *eerste registratie*, te weten:

- de leraar is bevoegd;
- de leraar heeft een aanstelling als leraar in een onderwijsinstelling voor po, vo of mbo;
- de leraar werkt tenminste 0,2 fte;
- de registratie is 4 jaar geldig.

De criteria voor *herregistratie* (na vier jaar) zijn:

- de registratie is vier jaar geldig;
- de registratie wordt verlengd als in een periode van 4 jaar tenminste 160 uur aantoonbaar is geïnvesteerd in professionele ontwikkeling (aantoonbaar wil zeggen dat de leraar desgewenst documentatie kan overleggen waaruit blijkt dat de activiteit inderdaad verricht is (bijvoorbeeld een diploma of certificaat);
- tenminste 100 uur daarvan is gericht op de bekwaamheid die rechtstreeks verband houdt met het leren van de leerling: vakinhoudelijke en/of pedagogisch-didactische ontwikkeling (en voor de vakleraar in het vo is tenminste 40 uur daarvan specifiek vakgericht).

De organisatie van het register

Aan de 'voorkant' heeft *Registerleraar.nl* een team van medewerkers die zorgen voor een optimale toegankelijkheid voor de leraar.
Zij zijn via email en telefoon rechtstreeks te benaderen, zorgen ervoor dat uw vragen snel en doeltreffend worden beantwoord en uw opmerkingen bij de juiste personen terecht komen.

Voor de inhoudelijke werkzaamheden heeft *Registerleraar.nl* drie commissies (po, vo en mbo) met elk vijf leden. De leden worden benoemd door het bestuur van de OC op voordracht van de vijf organisaties die samen de OC vormen. De commissies beoordelen en waarderen het scholingsaanbod waarvan leraren gebruik kunnen maken. In 2012 worden daarvoor criteria, reglementen en protocollen ontwikkeld en afgestemd met aanbieders.

De commissies beoordelen steekproefsgewijs of de reglementen en de criteria voor registratie en herregistratie juist worden toegepast. In 2012 worden de voorlopige reglementen en criteria in overleg met de deelnemers van *Registerleraar.nl* verder gepreciseerd en wordt de toepassing daarvan, eveneens in overleg met de deelnemers, in protocollen vastgelegd. De commissies laten zich door subcommissies (bijvoorbeeld vakspecifiek) bijstaan.

Info

Voor vragen, e.d. kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex, e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*.

Meet je Rekenkracht met Rekenbeter!

WWW.REKENBETER.NL

[Sieb Kemme]

Doordenker 87-7

(Met dank aan **Kees Rijke**) In 1949 publiceert dr. Lastpost, pseudoniem van J.J.L. van Zuylen, zijn *Het grote puzzelboek van dr. Lastpost*. Hierin staat een mooie bloemlezing van puzzels die hij vanaf december 1945 publiceerde in onder andere *De Groene Amsterdammer*, *Het Vrije Volk* en *Vrij Nederland*.
Zijn opgaven zijn altijd gegoten in verhaalvorm. In *De Groene* waren het episodes uit het leven van Sir Patrick Youtellme en zijn butler Higginbotham, ook wel Higgins genoemd.
De ideeën voor zijn puzzels ontleende hij vaak aan beroemde puzzelexperts zoals H.E. Dudeney, A.F. Collins en Jerome S. Meyer.

Hieronder volgt zo'n verhaal.

Het was nog volop oorlog, toen op een morgen, tegen 12 uur, Higginbotham, de trouwe roodharige butler van Sir Patrick Youtellme, door de huisknecht naar de hall werd geroepen om raad te schaffen. Daar stonden namelijk 12 militairen voor de deur, een sergeant en 11 manschappen, moe van een lange mars. Ze hadden nog precies 20 km af te leggen, vertelde de sergeant, en ze moesten zich zo spoedig mogelijk en tegelijk in het naastbijgelegen dorp melden. Was hier soms een of ander vehikel te krijgen?
Sir Patrick was afwezig, maar dat was voor Higginbotham geen bezwaar om te zinnen op een oplossing.
'Wij hebben een afgedankt Fordje', zei de butler tot de sergeant. 'Er kunnen behalve de chauffeur 4 passagiers in en het loopt niet meer dan 20 km per uur. Hoe snel kunnen uw manschappen marcheren?'
'Ik vrees, dat 't wel niet meer zal zijn dan 4 km per uur. Ze zijn doodmoe en zwaar bepakt.'
'Dan zal ik u zeggen, wat we doen', zei Higginbotham. 'Ik ga rijden met vier van uw mannen, de andere acht gaan te voet. Ik zet de vier mannen onderweg ergens af, rijd terug en pik vier van de anderen op zodra ik die 8 voetgangers tegen kom. Ik zet ook die vier onderweg af en rijd terug om de laatste vier te halen. Alles wat ge te doen hebt is dus, dat ge te voet naar uw bestemming gaat tot ik u oppik. De rest doe ik.'
Aldus geschiedde. Het gezelschap, zowel als het aftandse Fordje met Higginbotham aan het stuur, vertrok om 12 uur.
Hoe laat waren ze allen op hun plaats van bestemming?

Inzenden
Oplossingen vóór **10 juli a.s.** op het blog van *Rekenbeter.nl* of per e-mail naar *info@rekenbeter.nl* .

U kunt zich aanmelden op *www.rekenbeter.nl* als lezer van *Euclides*.
U komt dan in een aparte groep terecht met een eigen klassement. Dagelijks ontvangt u een e-mailbericht met daarin een link naar de dagelijkse rekenopgaven. De prestaties van deze *Euclides*-rekenaars worden online in een apart klassement bijgehouden op basis van het percentage goed beantwoorde opgaven in combinatie met de snelheid waarin ze zijn opgelost.

De reacties op Doordenker 87-5

De opgave

Sam Loyd (1841-1911) is één van de grootste producent van wiskundige puzzels. Ze verschenen in talloze boeken en tijdschriften en je komt ze nog voortdurend tegen. Ze zijn heel wisselend van aard, variërend van knip en plakwerk tot abstracte logische redeneringen. Het aardige van het volgende vraagstuk is dat het een analogie heeft met de uitgangspunten van de speciale relativiteitstheorie van Einstein. Sam Loyd zal dit niet hebben geweten. Zou Einstein door de puzzel zijn geïnspireerd? Het is onwaarschijnlijk maar wel een mooie fantasie.

De boodschapper en het leger

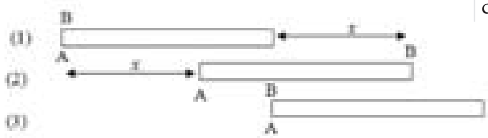
Een leger is vijftig kilometer lang. Terwijl het leger met een constante snelheid voort marcheert, vertrekt er vanuit de achterhoede een boodschapper, die naar voren rijdt om een boodschap bij de voorhoede af te leveren. Daarna keert hij weer terug naar zijn positie in de achterhoede. Hij komt daar terug precies op het ogenblik dat het leger vijftig kilometer heeft afgelegd. Ga ervan uit dat de boodschapper met een constante snelheid heen en weer rijdt.
Welke afstand legde de boodschapper af?

Reacties

Uit het aantal reacties af te lezen was deze doordenker een schot in de roos. Dit keer kwamen er tien reacties binnen. Daarvan vonden er zeven de juiste oplossing. Twee reacties gaven een intuïtieve redenering en zaten er helemaal naast. Zoals de volgende.
Als het leger 50 km heeft afgelegd bij terugkeer van de boodschapper, heeft het leger gedurende de heenreis 50/2 is 25 km afgelegd. Op de heenreis legt de boodschapper dus 75 km af. Totaal legt hij 2 × 75 km = 150 km af.

Met direct daarop een zelfcorrectie.
Herstel:
Op de terugweg komt het leger hem tegemoet met 25 km, de boodschapper legt dan 50 –25 km af. Totaal legt hij dus 75 + 25 = 100 km af.
En vervolgens een correctie daarop van iemand anders:
Helaas kun je de tijd niet simpel door 2 delen. De tijd dat de boodschapper naar voren rijdt (dus met het leger mee), is namelijk langer dan de tijd dat hij ertegenin rijdt.
Die 'iemand' geeft daarna wel een correcte oplossing.
Dat is ook het mooie van wiskunde, dat de werkelijkheid er anders uit kan zien dan je op het eerste gezicht zou denken.

De mooiste oplossing kwam van **Auke Smid**. Hij bracht de drie belangrijkste situaties in beeld; ***zie figuur 1***.



figuur 1

B is de plaats van de boodschapper.
A is de plaats van de achterhoede.
In situatie (3) is het leger precies zijn eigen lengte (= 50 km) opgeschoven.
In (2): A heeft x en B heeft 50 + x km afgelegd.
In (3): A heeft 50 en B heeft 50 + 2x km afgelegd.
Daarom: $\frac{50+x}{x}=\frac{50+2x}{50} \Leftrightarrow$

$$2500+50x=50x+2x^2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2=2500 \Leftrightarrow x^2=\frac{2500}{2} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{50}{\sqrt{2}}=\frac{50\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}$$

De boodschapper heeft 50 + 50√2 km afgelegd.

Een enkeling pakte de opmerking over Einstein op. Zoals **Herman Ligtenberg**.
Inderdaad heeft dit probleem 'iets' met Einsteins relativiteitstheorie.
Vervang het marcherende leger door een kamer (met lengte 1) die met snelheid naar rechts beweegt. We laten een lichtstraal (met snelheid 1) heen en weer kaatsen tussen de linker- en de rechterkant van de kamer en terug.
Dat is ook precies de situatie die Einstein heeft besproken bij zijn speciale relativiteitstheorie. Ligtenberg werkt dit verder uit en bespreekt daarbij de proef van Michelson en Morley die tot een schijnbaar paradoxale situatie leidde. Einstein loste de paradox in een klap op door te veronderstellen dat de lichtsnelheid constant is onafhankelijk van de relatieve beweging van de waarnemers. Net zoals de koerier een constante snelheid had.

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie:
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren

Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*).
Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 88

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	11 september 2012	17 jul 2012
2	23 oktober 2012	28 aug 2012
3	18 december 2012	23 okt 2012
4	8 februari 2013	4 dec 2012
5	26 maart 2013	29 jan 2013
6	14 mei 2013	19 mrt 2013
7	25 juni 2013	29 apr 2013

za. 30 juni, zo. 1 juli, Blankenberge (B)
16e Congres Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars
Organisatie VVWL

ma. 30 juli t/m vr. 3 aug (kamp C)
ma. 6 t/m vr. 10 aug (kamp A)
ma. 13 t/m vr. 17 aug (kamp B)
Zomerkampen 2012 in Lunteren
Organisatie Stichting Vierkant voor Wiskunde
Zie pag. 223 in *Euclides* 87(5).

ma. 20 t/m vr. 31 augustus, Utrecht
Summer School: Mathematics Education
Organisatie Universiteit Utrecht

vr. 24 en za. 25 augustus, Eindhoven
Vakantiecursus
Organisatie PWN
Zie pag. 315 in dit nummer.

vr. 31 aug en za. 1 sep, Amsterdam
Vakantiecursus
Organisatie PWN
Zie pag. 315 in dit nummer.

woensdag 26 september, Amersfoort (CPS)
NVORWO-jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

zaterdag 3 november, Veenendaal
NVvW-jaarvergadering en studiedag
Organisatie NVvW
Zie pag. 324 e.v. in dit nummer

zaterdag 17 november, Nijmegen
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis

vrijdag 23 november, Utrecht
ELWIeR-conferentie
Organisatie ELWIeR, Panama, SLW, Vadiwulo

dinsdag 27 november, Utrecht
Conferentie: Rekenbewust vakonderwijs in het vo
Organisatie APS