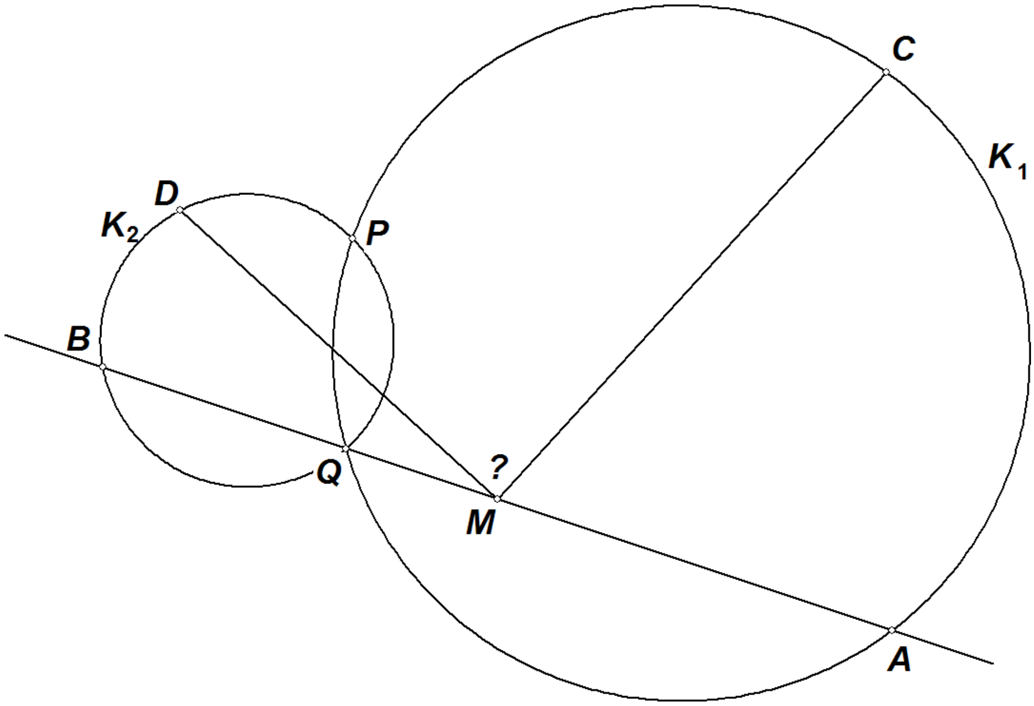
Een niet eenvoudige meetkunde-opgave

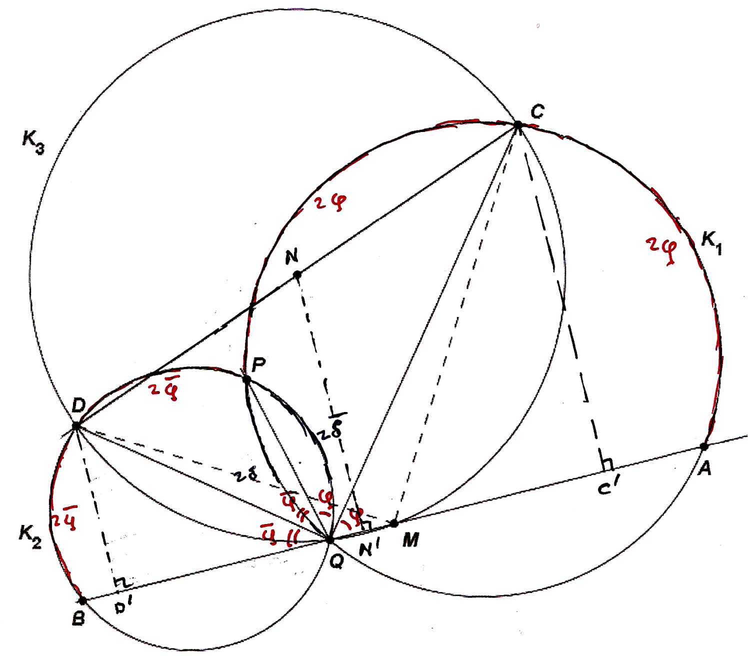
De cirkels K_1 en K_2 snijden elkaar in de punten P en Q.
Een lijn door Q snijdt K_1 ook in het punt A en K_2 ook in het punt B, waarbij Q *tussen* A en B ligt.
De punten C en D zijn de middens van de cirkelbogen PA en PB waarop het punt Q *niet* gelegen is.
Het punt M is het midden van het lijnstuk AB.



Bewijs dat $\angle CMD = 90°$.

Opmerking. In plaats van het gegeven dat M het midden van AB is, kan ook worden uitgegaan van hetgeen te bewijzen is: M ligt zó op AB dat $\angle CMD = 90°$. In dit geval moet dan aangetoond worden dat M het midden is van het lijnstuk AB.

Opmerking. Stel X en Y zijn de middens van de andere bogen PA en PB. Dan geldt ook dat $\angle XMY = 90°$. Hoezo?
(CX en DY zijn de middelloodlijnen van PA en PB en zijn middellijnen van de cirkels.)



Uitgangspunt van de oplossing:
Loodrechte projecties op de lijn AB

Als moet gelden dat $\angle DMC = \frac{\pi}{2}$ dan moet volgens *Thales* het punt M op een cirkel K_3 liggen met middellijn DC. Noem het middelpunt van deze cirkel N.

Laat D', N' en C' punten op de lijn AB zijn die door loodrechte projectie van resp. D, N en C hierop zijn ontstaan. De basis van onderstaande oplossing is een verband tussen de afstand QM en de afstanden van Q tot de andere punten op de lijn AB.

Stap 1: *Punt Q ligt op* K_3

In cirkel K_1 zijn volgens de opgave de bogen PC en AC gelijk. Dit betekent

$$\angle PQC = \angle AQC = \varphi$$

Analoog geldt in K_2 $\quad \angle PQD = \angle BQD = \bar{\varphi}$

Er geldt hierbij $\quad 2\varphi + 2\bar{\varphi} = \pi$

en dus $\quad \varphi + \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}$

Aldus $\quad QC \perp QD$

Volgens *Thales* ligt punt Q dus op K_3.

Stap 2: *Twee uitdrukkingen voor QM*

Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde dat M midden tussen A en B ligt is

$$QM = \tfrac{1}{2}(QA - QB)$$

Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde dat M, net als Q, op de cirkel K_3 ligt is dat M op dezelfde afstand van N' ligt als Q. N' is ook het midden van $C'D'$. Gevolg

$$\left.\begin{aligned} QN' &= \tfrac{1}{2}QM \\ QN' &= \tfrac{1}{2}(QC' - QD') \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad QM = QC' - QD'$$

In het volgende zal worden aangetoond dat

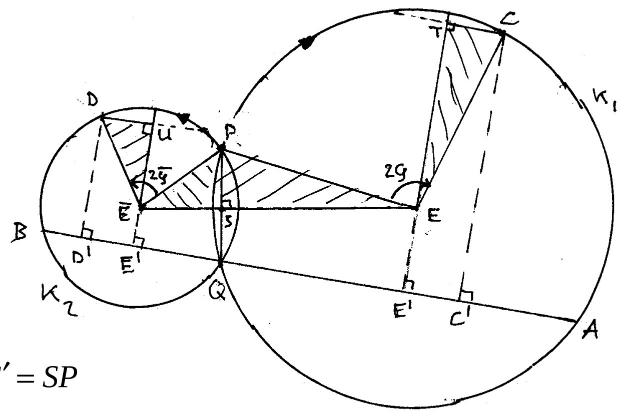
$$\tfrac{1}{2}(QA - QB) = QC' - QD'$$

waarmee het probleem is opgelost.

Stap 3: *Rotaties om de middelpunten van* K_1 *en* K_2

Laat E en $\bar{E}$ de middelpunten van resp. de cirkels K_1 en K_2 zijn, met E' en $\bar{E}'$ de resp. projecties van deze punten op de lijn AB. Verder is S het midden van PQ.

Roteer in K_1 de driehoek *ESP* rechtsom over een hoek 2φ om het middelpunt *E*.
Uit het gegeven $boog(PC) = boog(CA) = 2\varphi$ volgt dat *C* het rotatiebeeld van *P* is en dat het rotatiebeeld *ET* van *ES* langs de lijn EE' ligt.



Gevolg

$$\left.\begin{array}{ll} E'C' = TC & \text{(projectie op } AB\text{)} \\ TC = SP & \text{(rotatie)} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad E'C' = SP$$

Een analoog argument in K_2 levert: $\bar{E}'D' = SP$

Dit betekent
$$QC' = QE' + E'C' = \tfrac{1}{2}QA + SP$$
$$QD' = Q\bar{E}' + \bar{E}'D' = \tfrac{1}{2}QB + SP$$

Aftrekken geeft het gewenste resultaat
$$QC' - QD' = \tfrac{1}{2}(QA - QB)$$

Nawoord

Met dank aan *Just Bent* voor stap 3.

Oorspronkelijk verliep het bewijs na stap 1 via vectoren met inproduct en vervolgens de relatie boog-koorde en lastige trigonometrie. Vanwege het verzoek van *Aad Goddijn* over inzicht in de gevolgde denkstappen volgt hieronder dit oorspronkelijke bewijs.

Stap 2: *Via inproduct*

Loodrechte projecties ontstaan op een natuurlijke manier bij *vectoren* en *inproducten*. Dit leverde het uitgangspunt van het bewijs.

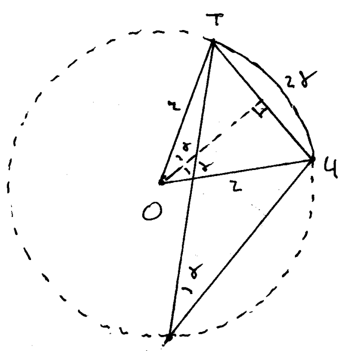
Verder is in het bovenstaande is stap 2 oorspronkelijke gevonden via:

M is het midden van *AB* betekent
$$\overrightarrow{QM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB})$$

Volgens het probleem moet worden bewezen $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{MD}$ dus moet voor het inproduct gelden
$$\langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD} \rangle = 0$$

Nu geldt
$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD} \rangle &= \langle \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QM} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{QC}, \overrightarrow{QD} \rangle - \langle \overrightarrow{QC}, \overrightarrow{QM} \rangle - \langle \overrightarrow{QD}, \overrightarrow{QM} \rangle + \langle \overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QM} \rangle \\ &= 0 - QC' \cdot QM + QD' \cdot QM + QM^2 \end{aligned}$$

Gevolg
$$QM = QC' - QD'$$



Stap 3: *De relatie boog-koorde en een verband tussen* K_1 *en* K_2

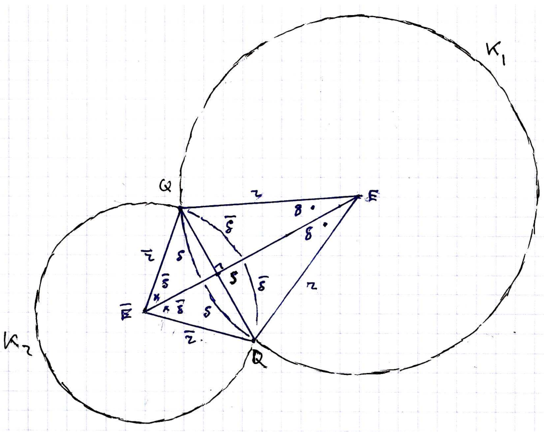
Om de laatste relatie aan te tonen hebben we het verband tussen een omtrekshoek of een middelpuntshoek hoek met de lengte van een koorde nodig:
Bogen bij cirkels zullen worden vastgelegd door middelpuntshoeken.

In de figuur boven $\quad boog(TU) = 2\gamma$

en $\quad TU = 2r\sin\gamma$

(Aldus geldt dus dat een omtrekshoek de helft is van de bijbehorende boog.)

Verder zal gebruik worden gemaakt van de volgende verband tussen de middelpuntshoeken 2δ en $2\overline{\delta}$ bij de koorde PQ van resp. de cirkels K_1 en K_2:



In de figuur zijn E en $\overline{E}$ de middelpunten van resp. deze cirkels, met $E\overline{E} = d$, en r en $\overline{r}$ als resp. stralen.

Via $\Delta EP\overline{E}$ valt in te zien $\quad r\sin\delta = \overline{r}\sin\overline{\delta} \quad (= TS)$

en (met $ES + \overline{E}S = E\overline{E}$) $\quad r\cos\delta + \overline{r}\cos\overline{\delta} = d$

<u>Stap 4</u>: *Berekening van* $\frac{1}{2}(QA - QB)$

Volgens relatie boog-koorde $\quad QA = 2r\sin(2\varphi + \delta)$

Verder
$$\begin{aligned} QB &= 2\overline{r}\sin(2\overline{\varphi} + \overline{\delta}) \\ &= 2\overline{r}\cos 2\overline{\varphi}\sin\overline{\delta} + 2\overline{r}\sin 2\overline{\varphi}\cos\overline{\delta} \\ &= -2r\cos 2\varphi\sin\delta - 2r\sin 2\varphi\cos\delta + 2d\sin 2\varphi \\ &= -2r\sin(2\varphi + \delta) + 2d\sin 2\varphi \end{aligned}$$

Dus $\quad \frac{1}{2}(QA - QB) = 2r\sin(2\varphi + \delta) - d\sin 2\varphi$

<u>Stap 5</u>: *Berekening van* $QC' - QD'$

We berekenen eerst QC en QD.

Volgens relatie boog-koorde $\quad QC = 2r\sin(\varphi + \delta)$

en
$$\begin{aligned} QD &= 2\overline{r}\sin(\overline{\varphi} + \overline{\delta}) = 2\overline{r}\cos\overline{\varphi}\sin\overline{\delta} + 2\overline{r}\sin\overline{\varphi}\cos\overline{\delta} \\ &= 2r\sin\varphi\sin\delta + 2(d - r\cos\delta)\cos\varphi \\ &= -2r\cos(\varphi + \delta) + 2d\cos\varphi \end{aligned}$$

Verder $\quad QC' = QC\cos\varphi$

en $\quad QD' = QD\cos\overline{\varphi} = QD\sin\varphi$

Resultaat
$$\begin{aligned} QC' - QD' &= 2r\sin(\varphi + \delta)\cos\varphi - \left(-2r\cos(\varphi + \delta) + 2d\cos\varphi\right)\sin\varphi \\ &= 2r\sin(2\varphi + \delta) - d\sin 2\varphi \end{aligned}$$

<u>Conclusie</u>

Er geldt dus inderdaad $\quad \frac{1}{2}(QA - QB) = QC' - QD'$