Een tweede bewijs van Sjoerd Zondervan (analytisch)

Kies P (0 , p) en Q (0 , - p) en de middelpunten van de cirkels (- k , 0) en (l , 0)
De cirkels hebben dan de vergelijkingen

$$(x+k)^2+y^2=k^2+p^2 \quad \text{en} \quad (x-l)^2+y^2=l^2+p^2$$

Een willekeurige lijn door Q heeft een vergelijking : $y=ax-p$

Deze lijn geeft met de eerste cirkel snijpunt $A\left(\dfrac{-2k+2ap}{1+a^2},\dfrac{-2ak-p+a^2p}{1+a^2}\right)$

en met de tweede cirkel snijpunt $B\left(\dfrac{2l+2ap}{1+a^2},\dfrac{2al-p+a^2p}{1+a^2}\right)$.

-Het punt C is het snijpunt van de middelloodlijn van lijnstuk AP met de eerste cirkel.
Deze middelloodlijn gaat door het middelpunt (- k , 0) en heeft als vergelijking

$y=\dfrac{-k+ap}{ak+p}\cdot(x+k)$. Voor het snijpunt vinden we dan $C\left(-k-\dfrac{ak+p}{\sqrt{a^2+1}},\dfrac{k-ap}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

-Het punt D is het snijpunt van de middelloodlijn van lijnstuk BP met de tweede cirkel.
Deze middelloodlijn gaat door het middelpunt (l , 0) en heeft als vergelijking

$y=\dfrac{l+ap}{-al+p}\cdot(x-l)$. Voor het snijpunt vinden we dan $D\left(l-\dfrac{al-p}{\sqrt{a^2+1}},\dfrac{l+ap}{\sqrt{a^2+1}}\right)$.

- Voor het midden van lijnstuk AB vinden we $M\left(\dfrac{-k+l+2ap}{1+a^2},\dfrac{-ak+al-p+a^2p}{1+a^2}\right)$

- Een richtingsvector van CM is $\left(-l-ap-(ak+p)\cdot(a+\sqrt{a^2+1}),\, p-al+(k-ap)\cdot(a+\sqrt{a^2+1})\right)$

-Een richtingsvector van DM is

$\left(k-ap+(al-p)\cdot(a-\sqrt{a^2+1}),\, p+ak-(l+ap)\cdot(a-\sqrt{a^2+1})\right)$

We moeten nu nog aantonen dat het inproduct van deze richtingsvectoren gelijk is aan 0.
Ter vereenvoudiging stellen we

$\alpha=l+ap$	$\delta=k-ap$
$\beta=ak+p$	$\varepsilon=al-p$

Het inwendig product is nu $(-\alpha-\beta\cdot\gamma)\bullet(\delta+\varepsilon\cdot\varphi)+(-\varepsilon+\delta\cdot\gamma)\bullet(\beta-\alpha\cdot\varphi)$

Dit is te herleiden tot $-(\alpha\cdot\delta+\beta\cdot\varepsilon)\cdot(1+\gamma\cdot\varphi)$.

$\gamma\cdot\varphi=(a+\sqrt{a^2+1})\cdot(a-\sqrt{a^2+1})=a^2-(a^2+1)=-1$, dus het inproduct is gelijk aan 0.