Kerstopgave 2011

De cirkels K_1 en K_2 snijden elkaar in de punten P en Q. Een lijn door Q snijdt K_1 ook in het punt A en K_2 ook in het punt B, waarbij Q tussen A en B ligt. De punten C en D zijn de middens van de cirkelbogen PA en PB waarop het punt Q niet gelegen is. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB. Bewijs dat $\angle CMD = 90°$.

Uitwerking (Merlijn Staps en Quintijn Puite)

Noem E het midden van AP en F het midden van BP. We gaan eerst bewijzen dat $\triangle PFD \sim \triangle CEP$. Allereerst geldt dat $\angle PFD = 90° = \angle CEP$. Verder geldt wegens koordenvierhoek $ACPQ$ dat

$$\angle EPC = \angle APC = \angle AQC = \tfrac{1}{2}\angle AQP = 90° - \tfrac{1}{2}\angle PQB = 90° - \angle DQB$$

terwijl wegens de hoekensom in $\triangle PFD$ en wegens koordenvierhoek $BQPD$ geldt dat

$$\angle FDP = 90° - \angle DPF = 90° - \angle DPB = 90° - \angle DQB.$$

Wegens (hh) geldt dus inderdaad dat $\triangle PFD \sim \triangle CEP$.

We gaan nu laten zien dat $\triangle CEM \sim \triangle CPD$. Uit de gelijkvormigheid $\triangle CEP \sim \triangle PFD$ en het feit dat ME middenparallel van $\triangle APB$ is, volgt dat

$$\frac{|CP|}{|PD|} = \frac{|CE|}{|PF|} = \frac{|CE|}{|EM|}.$$

Voor het bepalen van de tussenliggende hoek gaan we met gerichte hoeken werken (dat wil zeggen modulo 180°), omdat het niet bepaald is aan welke kant P t.o.v. CD ligt. We gebruiken hierbij dat wegens Z-hoeken geldt dat $\angle APB = \angle AEM = \angle PEM$ (gericht), wederom omdat ME een middenparallel is van $\triangle APB$.

Er geldt gericht dat

$$\begin{aligned}\angle CPD &= \angle CPA + \angle APB + \angle BPD \\ &= \angle CQA + \angle APB + \angle BQD \\ &= \tfrac{1}{2}\angle PQA + \tfrac{1}{2}\angle BQP + \angle AEM = 90° + \angle AEM\end{aligned}$$

terwijl

$$\begin{aligned}\angle CEM &= \angle CEP + \angle PEM \\ &= 90° + \angle AEM.\end{aligned}$$

Gericht zijn $\angle CPD$ en $\angle CEM$ dus hetzelfde. We willen bewijzen dat ze ook absoluut gezien hetzelfde zijn.

Met *georiënteerde* hoeken (waarmee we modulo 360° bedoelen) geldt $\angle CPD = \angle CEM$ of $\angle CPD = \angle CEM + 180°$, dus voor de werkelijke hoeken in $\triangle CEM$ en $\triangle CPD$ geldt $|\angle CPD| = |\angle CEM|$ of $|\angle CPD| = 180° - |\angle CEM|$. We gaan het laatste geval uitsluiten door te laten zien dat beide hoeken $|\angle CPD|$ en $|\angle CEM|$ stomp zijn.

Het is duidelijk dat $|\angle CEM| > 90°$, omdat M aan de andere kant ligt van de loodlijn AP op CE door E. Voor het stomp zijn van $|\angle CPD|$ onderscheiden we drie gevallen. Als P aan dezelfde kant van lijn CD ligt als Q, dan ligt P in het inwendige van de rechthoekige driehoek $\triangle CQD$. Maar dan ligt P ook binnen de cirkel met middellijn CD (waar Q op ligt) waaruit volgt dat $|\angle CPD| > 90°$. Als P op lijn CD ligt geldt $|\angle CPD| = 180° > 90°$. Als P aan de andere kant van lijn CD ligt dan Q, dan geldt $|\angle CPD| > |\angle CPA| + |\angle BPD| = 90°$.

Omdat blijkbaar zowel $|\angle CEM| > 90°$ als $|\angle CPD| > 90°$, vinden we nu dat $|\angle CPD| = |\angle CEM|$, waaruit met (zhz) volgt dat $\triangle CEM \sim \triangle CPD$. En omdat de hoeken $\angle CPD$ en $\angle CEM$ gericht hetzelfde waren, zijn deze driehoeken bovendien gelijk georiënteerd (alle corresponderende hoeken zijn gericht hetzelfde). Analoog zien we dat hetzelfde geldt voor $\triangle DFM$ en $\triangle DPC$, dus we krijgen zelfs $\triangle CEM \sim \triangle CPD \sim \triangle MFD$, met alle driehoeken gelijk georiënteerd.

Laatste stap in bewijs van Quintijn:

Omdat QC bissectrice is van $\angle AQP$ en QD bissectrice is van $\angle PQB$, zien we dat

$$\angle CQD = \angle CQP + \angle PQD = \tfrac{1}{2}\angle AQP + \tfrac{1}{2}\angle PQB = \tfrac{1}{2}\angle AQB = 90°.$$

Om te bewijzen dat ook $\angle CMD = 90°$, is het dus voldoende te laten zien dat M, Q, D en C op één en dezelfde cirkel liggen. We gaan hiertoe bewijzen dat $\angle QCM = \angle QDM$.

We vinden nu (gericht) dat

$$\begin{aligned}\angle QCM &= \angle QCP + \angle PCE + \angle ECM\\ &= \angle QAP + \angle DPF + \angle PCD\\ &= \angle BAP + \angle DPB + \angle PCD\end{aligned}$$

terwijl

$$\begin{aligned}\angle QDM &= \angle QDP + \angle PDF + \angle FDM\\ &= \angle QBP + \angle CPE + \angle PDC\\ &= \angle ABP + \angle CPA + \angle PDC.\end{aligned}$$

Te bewijzen is dus dat

$$\angle BAP + \angle DPB + \angle PCD = \angle ABP + \angle CPA + \angle PDC,$$

of te wel dat

$$\angle BAP + \angle PBA + \angle DPB + \angle APC + \angle PCD + \angle CDP = 0^\circ.$$

Wegens hoekensom in $\triangle ABP$ geldt $\angle PBA + \angle BAP + \angle APB = 180^\circ = 0^\circ$, dus $\angle PBA + \angle BAP = -\angle APB = \angle BPA$. Analoog vinden we dat $\angle PCD + \angle CDP = \angle CPD$. Dus te bewijzen dat

$$\angle BPA + \angle DPB + \angle APC + \angle CPD = 0^\circ,$$

wat evident is. □

Alternatief van Merlijn voor de laatste stap:

Omdat $\triangle CEM$ en $\triangle CPD$ gelijkvormig en gelijk georiënteerd zijn, is er een draaivermenigvuldiging met centrum C die E naar M en P naar D stuurt. Er volgt dat $\triangle CEP \sim \triangle CMD$, dus $\angle CMD = \angle CEP = 90^\circ$. □