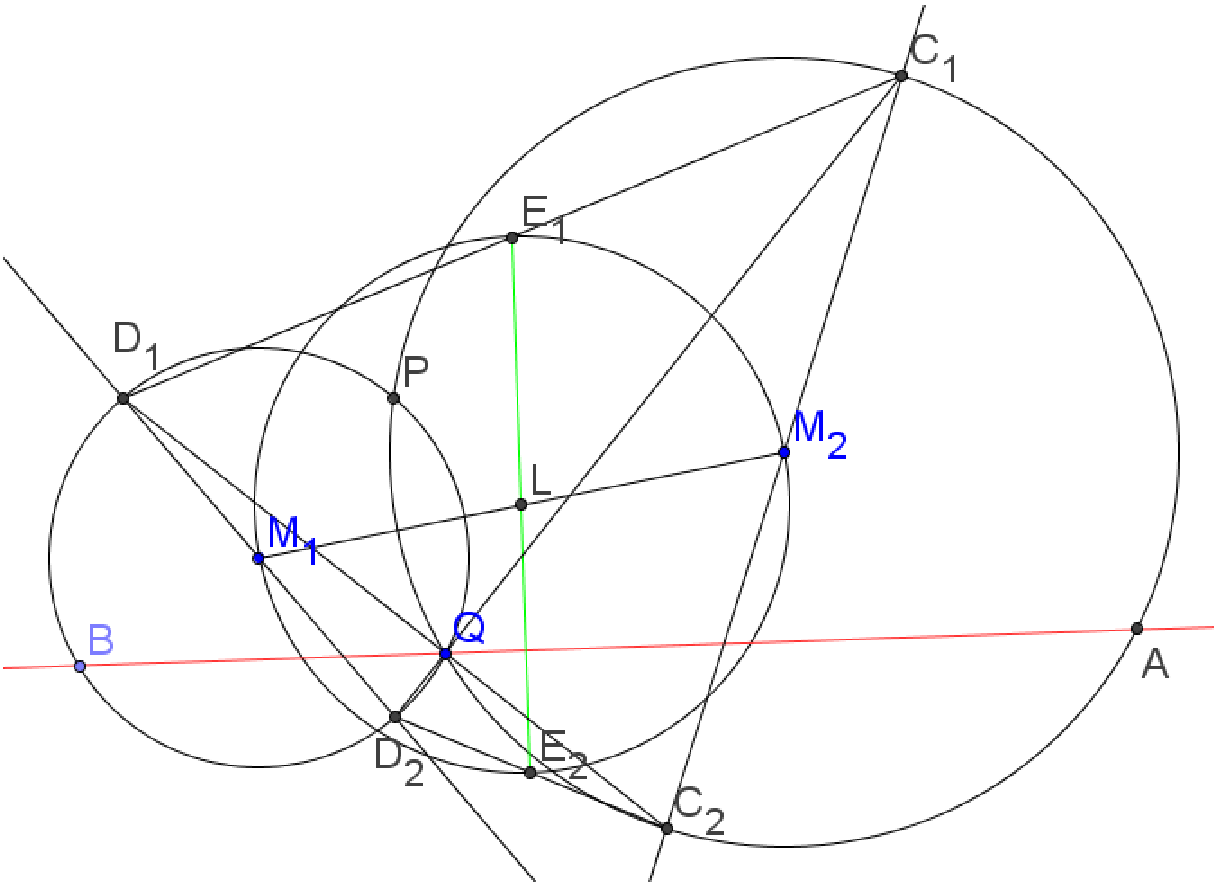
Tweede oplossing kerstpuzzel Ton Lecluse
door Floor van Lamoen



In bovenstaande figuur zijn D_1 en D_2 de punten zoals in de opgave, D_2 en C_2 zijn de alternatieve punten die de bogen PB en PA in twee gelijke delen delen. Uiteraard zijn D_1D_2 en C_1C_2 diameters van de cirkels K_1 en K_2. Hoek D_1QC_1 is recht, want bestaat uit de helften van BQP en AQP die samen gestrekt zijn. Hoek D_1QD_2 is ook recht, vanwege de stelling van Thales. Daarmee zijn de punten D_2, Q en C_1 collineair, en dat geldt evenzo voor D_1, Q enC_2.
Laat E_1 en E_2 de middens zijn van C_1D_1 en C_2D_2. Dan is M_1E_1 evenwijdig met C_1D_2 en M_2E_1 evenwijdig met C_2D_1, dus $M_1E_1M_2$ is rechthoekig. En E_1 ligt dus op de cirkel K_3 met M_1M_2 als diameter. Het middelpunt van deze cirkel noemen we L. Uit symmetrie-overwegingen ligt ook voor E_2 hierop. Bovendien blijkt uit evenwijdigheid van E_1M_1 en E_2M_2 (met D_2C_1) dat $M_1E_1M_2E_2$ een rechthoek moet zijn en dat E_1E_2 een diameter is van K_3.
Stellen we ons nu voor dat B met een hoeksnelheid van 2α over K_1 beweegt (ik heb geloof ik de nummering K_1 en K_2 andersom als in de opgave) dan draait BQ natuurlijk met een hoeksnelheid van α om Q en zo beweegt A met een hoeksnelheid van 2 α over K_2. Ook punt D_1 en D_2 bewegen dan beweegt dan met een hoeksnelheid van α over de respectievelijke cirkels, en dientengevolge loopt hun middelpunt met dezelfde hoeksnelheid over K_3. De diameter E_1E_2 draait dus met hoeksnelheid α om L. Daarmee maken AB en E_1E_2 een vaste hoek. Valt B samen met P, dan valt die ook samen met A, D_1 en C_1. Dan vallen E_1 en E_2 samen met M_1 en M_2. Omdat PQ loodrecht staat op M_1M_2, blijkt hieruit dat AB en E_1E_2 loodrecht op elkaar staan.
Bekijken we nu een willekeurig punt X op K1 en laten we Y het tweede snijpunt zijn van XQ met K2 en nemen we tenslotte Z het midden van XY zijn, dan is de meetkundige plaats van Z een cirkel met middelpunt L. Dat de meetkundige plaats een cirkel moet zijn met middelpunt L is eenvoudig te zien. Zijn immers X en Y twee willekeurige punten die met gelijke hoeksnelheid K1 en K2 doorlopen, dan ligt hun midden op een cirkel met L als middelpunt - dit blijkt meteen als we X en Y schrijven met een parametervergelijking:

$$\begin{cases} x_X = a + r\cos(\alpha + \varphi) \\ y_X = b + r\sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$$

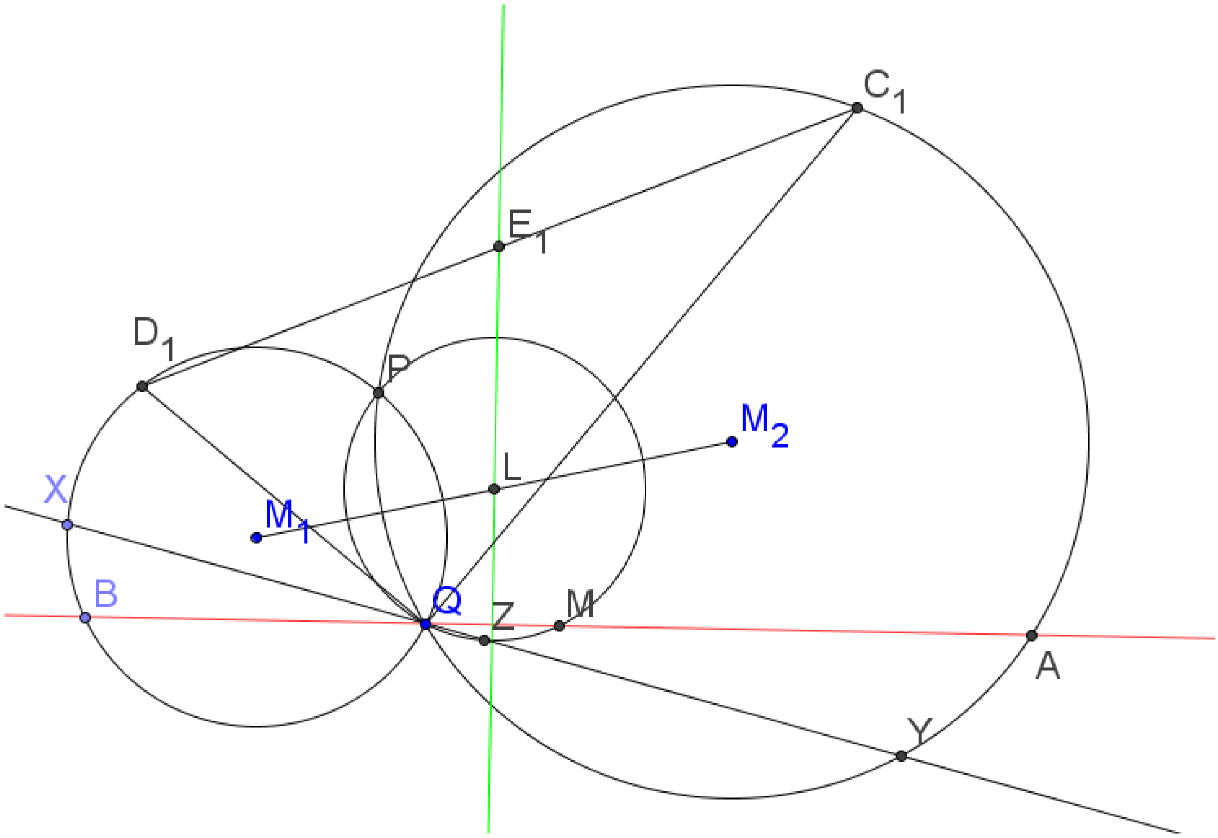
en

$$\begin{cases} x_Y = c + s\cos(\beta + \varphi) \\ y_Y = d + s\sin(\beta + \varphi) \end{cases}$$

geeft als midden

$$\begin{cases} x_Z = \dfrac{a+c}{2} + \dfrac{r\cos(\alpha+\varphi) + s\cos(\beta+\varphi)}{2} \\ y_Z = \dfrac{b+d}{2} + \dfrac{r\sin(\alpha+\varphi) + s\sin(\beta+\varphi)}{2} \end{cases}$$

een cirkel met middelpunt het midden van de twee cirkels waarmee is begonnen.



Laten we X samenvallen met P, dan is duidelijk dat Y ook met P moet samenvallen, dus de betreffende meetkundige plaats is de cirkel K_4 met middelpunt L door P en dus ook Q. Het punt M ligt op deze cirkel. Merk nu op dat de omgeschreven cirkel van D_1QC_1 middelpunt E_1 moet hebben (rechthoekige driehoek). Omdat E_1L loodrecht op AB staat, gaat deze omgeschreven cirkel ook door M. En dus is hoek D_1MC_1 recht (stelling van Thales).

Floor van Lamoen.