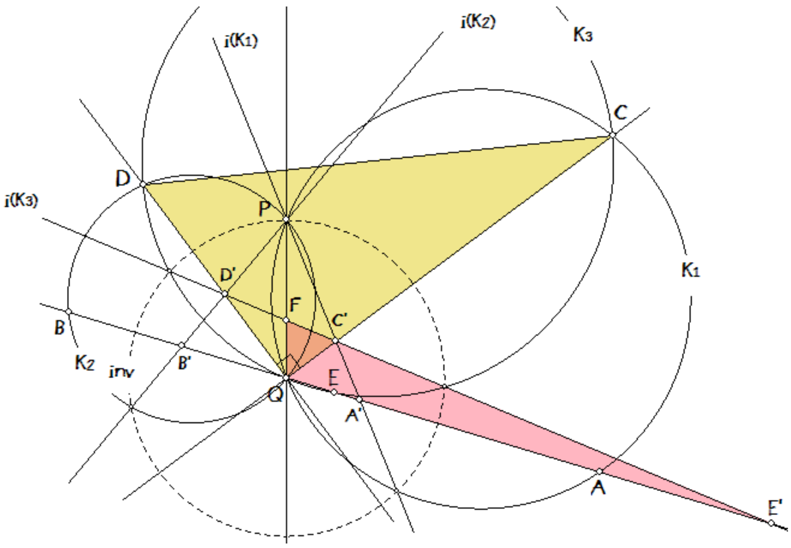
NVvW 2011
Ton's opgave

Oplossing van
Dick Klingens



Ik gebruik bij het bewijs *cirkelinversie* en *dubbelverhoudingen*, waarbij ik ervan uit ga dat de lezer met de eigenschappen daarvan bekend is.

Allereerst concluderen we uit het gegeven dat $\angle AQC = \angle CQP$ en $\angle BQD = \angle DQP$ (*omtrekshoeken op gelijke cirkelbogen*).
Daaruit volgt dan dat $\angle CQD = 90°$. Met andere woorden: het punt Q ligt op de cirkel K_3 waarvan CD middellijn is (*Thales-cirkel*).
Deze cirkel snijdt de lijn AB behalve in Q ook in het punt E.

We zullen aantonen dat het punt M (het midden van het lijnstuk AB) samenvalt met het punt E.

We kiezen het punt Q als centrum van een cirkelinversie i waarbij QP de straal is van de inversiecirkel (*inv*). Daarmee is $i(P) = P$.
Omdat K_1, K_2, K_3 door Q gaan zijn, zijn de i-beelden $i(K_1)$, $i(K_2)$, $i(K_3)$ van die cirkels rechte lijnen. Daarbij: de lijnen $i(K_1)$ en $i(K_2)$ gaan door P.
$i(C) = C'$ ligt op $i(K_1)$ en op $i(K_3)$, $i(D) = D'$ ligt op $i(K_2)$ en op $i(K_3)$, en per definitie opvolgend op QC en op QD.
$i(E) = E'$ ligt op $i(K_3)$ en per definitie ook op de lijn QE ($\equiv AB$).
Verder is F het snijpunt van $i(K_3)$ en PQ.

De lijnen QC en QD zijn nu binnen- en buitenbissectrice van hoek Q van driehoek $QE'F$.
Schrijven we $(UVXY) = \frac{XU}{XV} : \frac{YU}{YV}$ voor de dubbelverhouding van de collineaire puntenparen U, V en X, Y, dan is, op grond van de bissectricestelling(en):
$(C'D'E'F) = -1$
Met $i(A) = A'$ is A' het snijpunt van $i(K_1)$ en AB, en is $i(B) = B'$ het snijpunt van $i(K_2)$ en AB.
Bij een centrale projectie is de dubbelverhouding invariant. Dit betekent dat via de centrale projectie met centrum P van de lijn $i(K_3)$ op de lijn AB geldt:
$(A'B'E'Q) = -1$
De dubbelverhouding is óók invariant bij cirkelinversie op de lijn AB zelf. Met $W = i(Q)$ – W is het *oneigenlijk punt* (*punt op oneindig*) van de lijn AB – is dan:
$(ABEW) = -1$
Maar dit betekent dat E het midden is van het lijnstuk AB ! Met andere woorden: $E \equiv M$.
M is dus een punt van de Thales-cirkel met CD als middellijn. Dus: $\angle CMD = 90°$.

Hetgeen te bewijzen was.