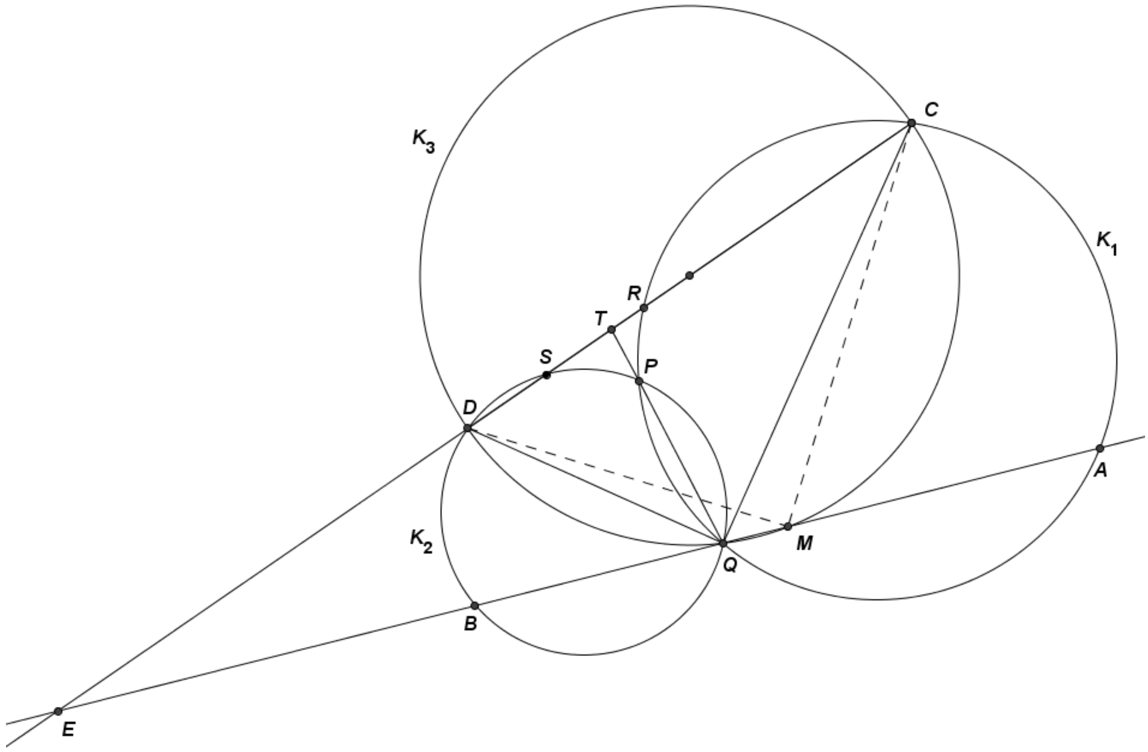
Oplossing Ton Lecluse's Kerstpuzzel 2011 door Agnes Verweij



Zij *E* het snijpunt van de lijn *CD* met lijn *AB*, *R* het snijpunt van *CD* met cirkel K_1, *S* het snijpunt van *CD* met cirkel K_2 en *T* het snijpunt van *CD* met het verlengde van *QP*. Zie de figuur.

C is het midden van boog *AP* en *D* is het midden van boog *BP*, dus m.b.v. gelijke *omtrekshoeken* vinden we: *QC* is de bissectrice van hoek *AQP* = hoek *AQT* en *QD* is de bissectrice van hoek *BQP* = hoek *EQT*, die samen met hoek *AQP* een gestrekte hoek vormt.
Hieruit volgt: hoek *CQD* is recht, dus de cirkel door *C*, *D* en *Q* heeft *CD* als middellijn (*Thales*). We noemen deze cirkel K_3. Zij *M* het 'tweede' snijpunt van K_3 .met *AB*, dan is hoek *CMD* ook recht (*Thales*).

Te bewijzen is: *MA* = *MB*.

Bewijs:

De *machtenstelling* toegepast op de lijnen *EA*, *EC* en cirkel K_3, geeft $EM \cdot EQ = EC \cdot ED$ (1)

De *machtenstelling* toegepast op de lijnen *EA*, *EC* en cirkel K_1 geeft

$EA \cdot EQ = EC \cdot ER$, dus $(EM + MA) \cdot EQ = EC \cdot ER$. Haakjes uitwerken en (1) gebruiken, geeft
$EC \cdot ED + MA \cdot EQ = EC \cdot ER$, dus $MA \cdot EQ = EC.(ER - ED)$ ofwel $MA \cdot EQ = EC \cdot RD$ (2)
Zo geeft de *machtenstelling* toegepast op de lijnen EA, EC en cirkel K_2:

$EB \cdot EQ = ED \cdot ES$, dus $(EM - MB) \cdot EQ = ED \cdot ES$. Haakjes uitwerken en (1) gebruiken, geeft
$EC \cdot ED - MB \cdot EQ = ED \cdot ES$, dus $MB \cdot EQ = ED.(EC - ES)$ ofwel $MB \cdot EQ = ED \cdot SC$ (3)
Uit (2) en (3) volgt: $MA / MB = (EC / ED).(RD / SC)$ (4)

De *bissectricestelling* geeft voor driehoek *EQT* met *QC* als buitenbissectrice en *QD als binnebissectrice*:
$TC : EC = TQ : EQ$ en $TD : ED = TQ : EQ$, dus $TC : EC = TD : ED$ ofwel $TC / TD = EC / ED$ (5)
Uit (4) en (5) volgt: $MA / MB = (TC / TD).(RD / SC)$, dus $MA / MB = (TC / TD) .(TR + TD)/(TS + TC)$ ofwel

MA / MB = (TC . TR + TC . TD) / (TD. TS + TD . TC) (6)

De *machtenstelling* toegepast op de lijnen TQ en EC en respectievelijk de cirkels K_1 en K_2 geeft:

TC . TR = TQ . TP en TD . TS = TQ . TP, dus TC . TR = TD . TS (7)

Uit (6) en (7) volgt MA / MB = 1 en dus MA = MB. Q.E.D.