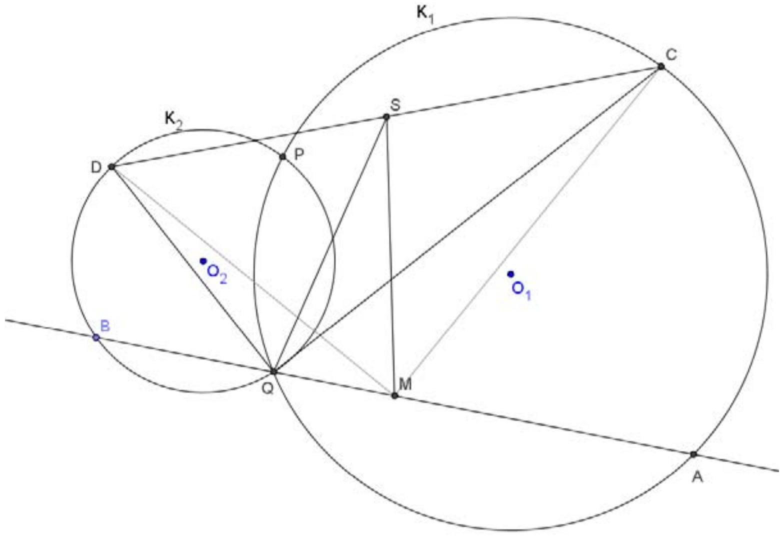
Najaarsopgave Ton Lecluse; reactie Aad Goddijn, verbeterde versie

Gegevens en startpunt van het bewijs



Dit is de uitgangsfiguur, met namen zoals gegeven met namen toegevoegd voor de middelpunten van de cirkels. We moeten bewijzen dat $\angle CMD$ recht is.

(I) Eerste stap van het bewijs: $\angle$***CQD*** **is recht**
Dat volgt direct uit het feit dat *CQ* en *DQ* de deelllijnen zijn van $\angle AQP$ en $\angle PQB$.

Laat nu *S* het midden van *DC* zijn. We weten nu: ***DS = SQ***. Resteert te bewijzen dat *SM* = *SQ*.

In het verdere bewijs beschouwen we *A* als bewegend over cirkel K_1. *B*, *C* en *D* bewegen dan ook maar we zijn uiteraard het meeste geinteresseerd in de banen van *M* en *S* en hoe die in onderlinge samenhang doorlopen worden.

(II) Hoe bewegen M en S als A cirkel K_1 doorloopt?

Ik ga - dat blijkt- allerlei zaken formuleren in termen van beweging en draaing. Daarbij horen termen als eenparige cirkelbeweging en hoeksnelheid.
De bewegingsterminologie kan vermeden worden door steeds twee liggingen van de figuur te vergelijken en te wijzen op hoekverschillen, maar dat is erg lomp; dat ga ik niet doen.

Karakterisering van de bewegingen van M en S:

Als A in een eenparige cirkelbeweging over K_1 beweegt, bewegen M en S in eenparige cirkelbeweging over cirkels die concentrisch zijn, waarbij het gemeenschappelijk middelpunt T het midden van O_1O_2 is. M heeft dezelfde hoeksnelheid als A, S heeft de halve hoeksnelheid van die van A.

[Terzijde, niet noodzakelijk voor het bewijs: *M* zal blijken een hele cirkel te doorlopen.
S doorloopt maar een halve cirkel ; de ander helft van die cirkel vinden we door in plaats van *D* en C met de punten te werken die da ander bogen *AP* en *BP* halveren.]

De bewegingskarakterisering volgt uit het volgende lemma.

Lemma van de twee even snelle draaimolens

Als G en H met gelijke hoeksnelheid over respectievelijk cirkel K met middelpunt V en L met middelpunt W lopen, loopt het midden van GH met de zelfde hoeksnelhioed over een cirkel met als middelpunt het midden U van lijnstuk VW.

[Opmerkelijk: het middelpunt U van de cirkel is onafhankelijk van de startposities; de grootte van de cirkel is dat wel, zoals uit het bewijs dadelijk wel te zien is .]

[Terzijde, maar van belang: let erop dat gelijke hoeksnelheid en halvering van hoeksnelheid gelijke draairichting impliceert].

Voor toepassen van het lemma in de karkaterisering van de bewegingen van *M* en *S* hebben we nodig dat *B* met dezelfde hoeksnelheid als *A* beweegt en *D* en *C* met de halve hoeksnelheid van A. Dat is allemaal heel simpel, ik laat het hier achterwege.

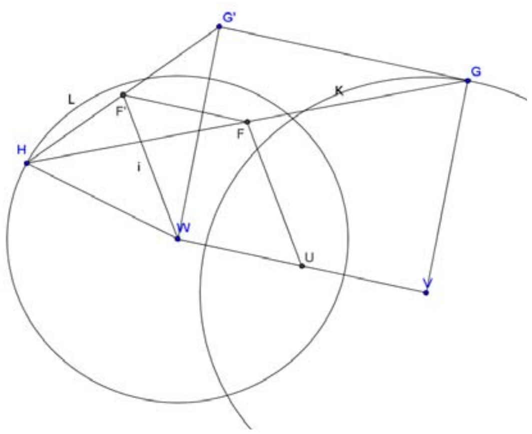
[Terzijde, want zodadelijk volgt een synthetisch bewijs van het lemma.
Het lemma volgt direct uit een krachtige stelling over gelijkvormigheid, de zogenaamde stelling van Petersen-Schoute. Die zegt dat als *G* en *H* verbonden zijn door een gelijkvormigheidsafbeelding *f*, waarbij dus steeds *f(G) = H*, dat dan een punt *F*, dat zodanig loopt dat driehoek *FGH* steeds (direct) gelijkvormig is met een gegeven driehoek *KLM*, een figuur doorloopt die gelijkvormig is met de figuren doe *G* en *H* doorlopen.
"Doorlopen" maar even niet continu opvatten. Als G een sprong maakt, maakt H de gelijkvormige sprong. Zo mag de oorspronkelijke figuur ook een cirkel met middelpunte zijn. de beeldfiguur is dat dan ook.
Petersen-Schoute kan heel elegant bewezen worden door het vlak op te vatten als het compleze vlak; de afbeelding *f* is dan een lineaire functie *f(z) = a z + b* en de gelijkvormigheid van *FGH* en *KLM* wordt uigedrukt in bijvoorbeeld

$$\frac{F-G}{H-G} = \frac{K-L}{M-L}$$

Eenvoudige algebra leidt er nu toe dat ook het paar *F* en *G* verbonden zijn door een lineaire functie; uiteraard een andere dan *f*.]

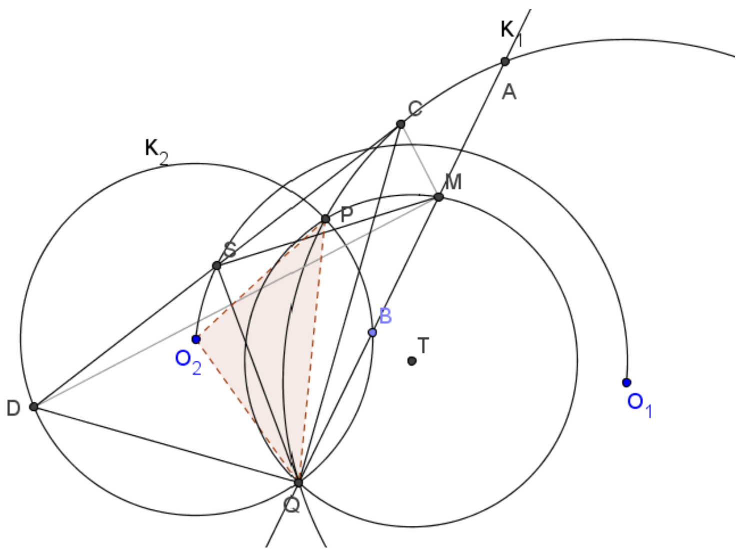
Bewijs van het lemma

In de figuur hier naast is *F* midden van *HG* en *U* midden van *VW*. Voeg *G'* toe, zodat *WVGG'* een parallelogram is. Zij F' het midden van HG'.
Omdat G en H dezelfde hoeksnelheid hebben is ∠*G'WH* vast en driehoek *G'WH* is een vast om W draaiende driehoek. *F'* draait dus ook eenparig om W met dezelfde hoeksnelheid als *H* en *G'*.
WUFF' is ook een parallelogram; direct volgt nu dat *F'* ook een eenparige cirkelbeweging om *U* maakt met dezelflfde hoeksnelheid.
Het lemma is bewezen!



(III) Nader onderzoek van de situatie waarin M met P samenvalt.
Het voorgaande vertelt al veel over de bewegingen van *S* en *M*, ze bewegen over cirkels met een gemeenschappelijk middelpunt, dat midden tussen de middelpunten van de uitgangscirkels ligt. *M* loopt over een volle cirkel; maar *S* slechts over een halve cirkel.
Als *A* zich in *P* bevindt, vallen *A* en *B* in *P* samen, maar zijn *C* en *D* twijfelachtig gedefinieerd in het vraagstuk. Voor *D* kunnen bijvoorbeeld zowel *P* als het punt diametraal tegenover *P* kiezen.
We onderzoeken het grensgedrag wat nader.
Laten we in de eerste figuur punt *A* tegen de klok in draaien naar *P*, dan nadert *C* tot *P* en nadert *B* naar het punt van K_2 diametraal tegenover *P*. *S* nadert dan tot O_2.
Draaien we *A* via de ander kant naar *P*, dan nadert *D* tot *P* en *C* naar het punt op K_1 diametraal tegenover *P*. *S* nadert dan tot O_1.
De baan van S is de halve cirkel op middellijn O_1O_2 aan de *P*-kant en de eindpunten van die cirkelboog zijn de limietstanden die ontstaan bij bewegen van *A* naar *P* in de twee draairichtingen.

We kiezen (willekeurig) de limietstand waar *S* in O_2 ligt. De andere standen worden nu bereikt door A rechtsom te bewegen.
Hieronder een situatie waarin *A* niet in P ligt *P*. De meetkundige plaatsen van *S* en *M* zijn aangegeven.



In de limietstand ligt *M* op *P* en is driehoek *QSM* gelijk aan driehoek QO_2P. Die is gelijkbenig en de deellijn vanuit *S (ofwel O*2*)* in die driehoek gaat evident *T*. Deze driehoek is in de figuur gestippeld aangegeven.
Als *A* beweegt draaien de lijnstukken *TS* en *TM* ook om *T*, maar *TM* beweegt met de dubbele hoeksnelheid. Dat betekent dat *TS* symmetrieas blijft van driehoek *QSM*!

Daaruit volgt onmiddelijk dat steeds geldt *QS* = *SM*.

(IV) Afronding van het bewijs
Aansluitend bij het begin volgt nu direct dat *SM* = *SD* = *SC* en dus is $\angle CMD$ recht.

Hetgeen te bewijzen was ....