

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 87

n r **5**

maart 2012

Kleine didactieken

W4Kangoeroe,
deel 1

NWO's keuken

Het WwF in Kenia

Bartjens
Rekendictee 2011

FvOv

Examenbesprekingen

Wiskundemeisjes



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 87

nr 5

maart
2012

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Michel van Ast

Rob Bosch

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Ernst Lambeck

Marjanne de Nijs, hoofdredacteur

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Marjanne de Nijs,

Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvbw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvbw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvbw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvbw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvbw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. E. van Dijk

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl



KORT VOORAF

[Marjanne de Nijs]

FvOv en registerleraar.nl

De start van 2012 viel samen met de aftrap van het FvOV, de Federatie voor onderwijsverenigingen, een overkoepelend orgaan van vakverenigingen waaronder de NVvW. We informeren u er over in deze *Euclides*. Daarnaast wil ik uw aandacht vragen voor de site www.registerleraar.nl. Zoals u weet is door het bestuur en leden van de NVvW een aantal jaar hard gewerkt om samen met andere vakverenigingen dit register op te zetten. Met als resultaat dat er op 15 februari j.l. een officieel startsein kwam. Het doel van dit register is om onze beroepsgroep te versterken en de kwaliteit van het onderwijs te waarborgen. Wilt u aantonen dat u actief werkt aan professionalisering, dan kan dat door in te schrijven en vervolgens uw gegevens actueel te houden.

Op onze eigen wijze proberen we met deze *Euclides* weer bij te dragen aan de kwaliteit van het onderwijs door zoveel mogelijk interessante, actuele en praktische artikelen aan te bieden. Gaat u er even voor zitten.

Didactiek

Heiner Wind schrijft 'zonder didactische vorming geen goed wiskundeonderwijs'. Hij klom in de pen naar aanleiding van zijn bezoek aan de ELWleR-dag en in plaats van een 'gewoon' verslag wil hij met u vreugde en zorg delen over het didactiekonderwijs. Direct aan de slag kunt u met de bijdragen van twee andere heren. Peter Kop deelt met ons zijn 'kleine didactieken', deze keer een handreiking voor mooie oefenopdrachten. Over het praktisch gebruik van posters in het leslokaal schrijft Frans Ballering. In zijn artikel verwijst hij naar het werk van Bram Lagerwerf; Frans is niet de eerste en ook niet de laatste die veelvuldig gebruik maakt van het erfgoed van Bram. Ik heb hem helaas niet persoonlijk gekend maar uit het 'in memoriam' van Bert Zwaneveld spreekt grote waardering voor de man als vakdidacticus en vooral als mens.

Wiskundemeisjes

In de categorie wiskundemeisjes zijn we deze keer goed bedeed. Joke Verbeek had een interview met deze dames naar aanleiding van het uitkomen van hun boek *Ik was altijd heel slecht in wiskunde*. U krijgt ook een recensie van dit boekje van Ger Limpens. Wiskundemeisje Ionica Smeets schreef een recensie voor Zebraboekje 33, *Ontwikkelen met kettingbreuken*.

Wedstrijden

We komen Birgit van Dalen in dit nummer twee keer tegen. Op 25 november 2011 toog ze naar Zwolle om mee te doen aan het Bartjens Rekendictee. Vrijwillig ging ze strijden tegen de klok om de rekenopgaven van Marjolein Kool correct – binnen de gestelde termijn – op te lossen. Daarnaast geeft Birgit een kijkje in de keuken van de Wiskunde Olympiade: Hoe komen de opgaven tot stand? Datzelfde doet Ernst Lambeck voor de Kangoerowedstrijd in het eerste deel van de W4Kangoeroe-serie. Bijzonder om zo'n kijk achter de schermen te krijgen en natuurlijk puzzelen we mee...

En verder

Ton Lecluse deelde op de verenigingsdag een meetkundeopgave uit waar jong en oud zich over gebogen hebben. Het resultaat vindt u terug in deze *Euclides* en, dankzij de vele reacties, ook op de website. Voor 'gewoon een leuke les' verwijs ik u naar het artikel van Peter Kruithof over wiskunde en moord. Zelf organiseerden mijn collega's en ik een dubbeluur op school waarin leerlingen werden uitgedaagd om het probleem dat Peter beschrijft op te lossen. Een begeleidende collega Engels vertelde me later 'Als ze dit in mijn tijd hadden gedaan in de wiskundeles had ik het vak waarschijnlijk wel gekozen; het is een aansprekend voorbeeld van een wiskundige toepassing.' Hopelijk ziet u dit als een aanbeveling. Dorien Lugt schrijft over het zelfstandig werken op de universiteit. Ik ben benieuwd of haar ervaringen en uw beeld van studeren in het hoger onderwijs overeenkomen. En – wat betreft inhoud op de grens van vo en ho – een artikel van Rob Flohr over het driedeuren-probleem (alweer!?) en de stelling van Bayes. Gelardeerd met mooie toepassingen voor de leerlingen.

Tot slot wil ik – mocht u het gemist hebben – verwijzen naar de inspirerende toespraak van Diederik Samsom bij de opening van de Nationale Wiskunde Dagen: *Docenten maken het verschil* (via www.fi.uu.nl/nwd/).

INHOUD

185	Kort vooraf [Marjanne de Nijs]
186	Kleine didactieken [Peter Kop]
188	Ik was altijd heel slecht in wiskunde / interview [Joke Verbeek]
190	In memoriam Bram Lagerwerf [Bert Zwaneveld]
192	Een kijkje in de keuken van de Wiskunde Olympiade [Birgit van Dalen]
195	Een jaar lang W4Kangoeroe, deel 1 [Ernst Lambeck]
199	Moord opgelost met wiskunde [Peter Kruithof]
201	Bayesiaanse evenredigheid [Rob Flohr]
205	Huisnummers en koperdieven [Birgit van Dalen]
206	Aankondiging / HKRWO Symposium XVIII
208	Bartjens Rekendictee 2011 / Internet-dictee
208	Aanvulling <i>Euclides</i> 87(3)
209	Het gebruik van posters in een wiskundelokaal [Frans Ballering]
210	Verschenen / De Ster van de dag gaat op en onder
211	Over ELWleR [Heiner Wind]
215	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
218	Differentialen en Diepvriespizza's [Dorien Lugt]
218	Erratum <i>Euclides</i> 87(4)
219	Het WwF steunde een school in Kenia [Juliëtte Feitsma]
220	Boekbespreking / Ontwikkelen met Kettingbreuken [Ionica Smeets]
221	Boekbespreking / Ik was altijd heel slecht in wiskunde [Ger Limpens]
222	Aankondiging / HBO-conferentie
223	Persbericht / In de vakantie lekker met wiskunde bezig [Vierkant voor Wiskunde]
224	Mededeling / Examenbesprekingen 2012
224	Bericht voor de leden / Regeling rechtshulp
225	FvOv
226	Recreatie [Sieb Kemme]
228	Servicepagina

Kleine didactieken

[Peter Kop]

Veel ervaren docenten hebben ‘kleine didactieken’ die zij met succes en plezier inzetten. Je kunt denken aan een bepaalde manier van uitleggen, een aparte opdracht om een klassendiscussie uit te lokken, een bijzondere oefenopdracht, een prachtige context,

KLEIN betekent hier dus ‘inzet op kleine schaal’ (het wordt door docenten gebruikt) en ‘het betreft een beperkte omvang in lestijd’ (vaak minder dan een les).

Kwartetten

Opdracht – In *figuur 1* zie je van zeven verschillende exponentiële functies steeds vier kaartjes. Knip deze uit en zoek het viertal kaartjes bij elkaar die bij dezelfde exponentiële functie passen.

Neem aan dat een maand uit 4 weken bestaat en een jaar uit 52 weken.

Toelichting – De opdracht is in eerste instantie bedoeld als groepsopdracht. De spelregel is eenvoudig: leg alle kaartjes op tafel en zoek de kwartetten (vier kaartjes behorend bij een functie) bij elkaar. Als vanzelf blijken er geanimeerde discussies te ontstaan. Het wedstrijdelement zit in de competitie met andere teams en de tijd om alles af te ronden. Maar ook zonder andere teams bevat deze opdracht (blijkbaar) een spelelement. Zonder dat leerlingen er erg in hebben oefenen ze de leerstof: ze argumenteren, leggen relaties tussen representaties en bedenken strategieën voor aanpak van dit wiskundige probleem. Na afloop is het wel verstandig om een en ander na te bespreken. Het is immers niet vanzelfsprekend dat iedere leerling zich nu bewust is van hetgeen hij geleerd heeft. Bij de bespreking komt de gebruikte strategie aan bod en een overzicht van de verschillende concepten die een rol spelen bij exponentiële functies. Deze kunnen dan verwerkt worden in een conceptmap, waarin de verbanden aangeven welke overgangen door leerlingen gebruikt zijn bij het kwartetten. Dan komt vanzelf de centrale rol van de groeifactor naar voren en dat deze een veel belangrijkere rol in berekeningen speelt dan het groeipercentage.

Een voorbeeld van een verwerkingsopdracht (het maken van een conceptmap) volgt hierna.

Opdracht – In *figuur 2* zie je begrippen die bij exponentiële functies een rol spelen. Geef door middel van pijlen aan of je rechtstreeks uit het ene het andere kan

berekenen. Bijvoorbeeld, als je rechtstreeks vanuit het ‘groeipercentage per jaar’ het ‘groeipercentage per maand’ kan berekenen, dan trek je een pijl van ‘groeipercentage per jaar’ naar ‘groeipercentage per maand’.

Toelichting – Deze opdracht gebruik ik als klassikale afsluiting van het kwartetten. In een onderwijsleergesprek trekken we dan verbanden met een voorbeeld erbij. Bijvoorbeeld, bij de verbanding tussen groeifactor per jaar en verdubbelingstijd komt $g^{\text{verdubbelingstijd}} = 2$. In het ontstane schema is duidelijk zichtbaar dat er geen directe verbanding is tussen groeipercentage per jaar en groeipercentage per maand; en dat een eventuele weg via de groeifactoren loopt.

Deze opdracht kan worden ingezet in alle klassen van de bovenbouw. Het is opgenomen in het boekje *Verbanden*, dat door cTWO ontwikkeld is (zie *ExpLog-2009-09-01.pdf* via de website van cTWO^[1]).

Hetzelfde idee van kwartetspel is ook in vele andere onderwerpen bruikbaar. Naast deze versie is er een versie met tweedegraads formules (zie hieronder), functies met hun afgeleiden, statistische representaties. Deze spelen staan als lessuggestie op de website van de *Wageningse Methode* ^[2] onder de tab ‘Docenten’.

Kwartet over kwadratische functies

Een opdracht voor 4/5-vwo wiskunde A (maar ook eind klas 3 lijkt haalbaar) is de volgende.

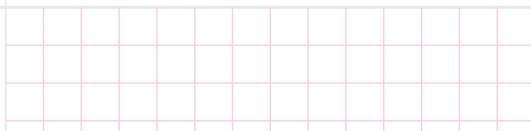
Opdracht – Van iedere kwadratische functie is een viertal kaartjes gemaakt; zie *figuur 3*. Zoek deze bij elkaar.

Toelichting – Bij nabespreking zal de focus liggen op de verschillende ‘soorten’ formules bij dezelfde kwadratische functie en hoe je dat kunt aantonen. Voor wiskunde B kan dit kwartet eventueel aangevuld worden met kaartjes met daarop bijvoorbeeld:

een tabel met een drietal punten waaruit de symmetrie-as af te leiden is:

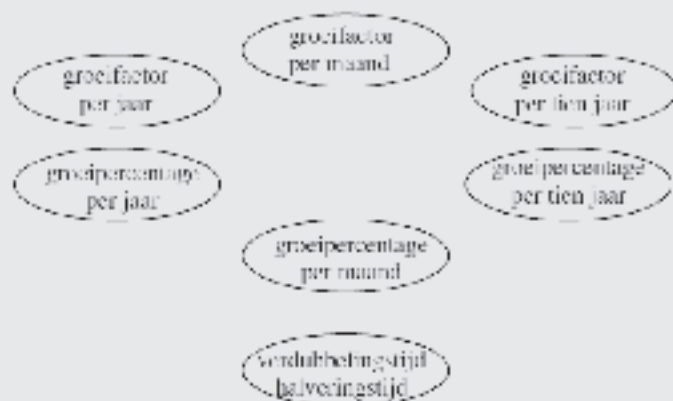
x	0	3	5
y	3	8	8

een top en een punt: de parabool met top (2, 6) die gaat door het punt (1, 4);
een raakpunt op de x-as en een punt: de parabool die raakt aan de x-as in (3, 0) en die gaat door het punt (0, 5).



Exemple 1: $y = 100 \times 1,03^x$ met x in weken	$x = 0$ $y = 100$	$x = 1$ $y = 103$	Afname van de groei (negatief) met 10% af	Groeipermantente per maand is 3,22%
Groeifactor per 10 weken is 3,28	Groeipermantente per 10 weken is 3,28	Groeifactor $r = 200 \times 0,95^x$ met x in maanden	Groeifactor $r = 200 \times 0,95^x$ met x in maanden	Groeipermantente per maand is 25%
Verdubbelingsduur is 11,2 weken	$f(x) = 1000 \times 1,06^x$ bij x = 2 is $y = 1120$	Groeifactor per maand is 1,18	Groeipermantente per maand is 18%	Groeifactor $r = 200 \times 0,95^x$ met x in maanden
Groeipermantente per week is 2%	Groeipermantente per week is 10%	Groeipermantente per maand is 1,18	Groeipermantente per maand is 18%	Groeifactor $r = 200 \times 0,95^x$ met x in maanden
Groeipermantente per jaar is 33,5%	Groeipermantente per week is 10%	Groeipermantente per 10,1 weken	Groeipermantente per 10,1 weken	Groeifactor $r = 200 \times 0,95^x$ met x in maanden
Exemple 2: $y = 100 \times 1,03^x$ met x in weken	Groeifactor per 10,1 weken	Groeipermantente per 10,1 weken	Groeipermantente per 10,1 weken	Groeifactor $r = 200 \times 0,95^x$ met x in maanden
Bij x = 2 is $y = 106$	Bij x = 2 is $y = 106$	Groeifactor per 10,1 weken	Groeipermantente per 10,1 weken	Groeifactor $r = 200 \times 0,95^x$ met x in maanden

figuur 1



figuur 2

$f(x) = x^2 - 2x - 24$	$f(x) = 4x^2 - 4x^2$	$f(x) = 4x^2 - 4x - 1$	$f(x) = 21x^2 - 1 - 4$
$f(x) = (x - 1)^2 - 2$	$f(x) = (2x - 1)^2$	$f(x) = (x - 1)(x - 4)$	$f(x) = 4x^2 - 8x$
$f(x) = 4x^2 - 8x - 2$	$f(x) = 16x^2 - 8x + 2$	$f(x) = 4x^2 - 8x - 4$	$f(x) = 4x^2 - 8x - 2$
$f(x) = -x^2 + 6$	$f(x) = -x^2 - 16x$	$f(x) = -4x^2 - 4x^2 - 24$	$f(x) = 12x - 10$
$f(x) = -4x - 4(10x - 4)$	$f(x) = (x - 4)(x + 4)$	$f(x) = x(16 - x)$	$f(x) = -4x - 4(10x - 4)$
$f(x) = 4x^2 - 32x + 64$	$f(x) = 4x^2 - 4x^2$	$f(x) = -4x^2 - 32x - 1$	$f(x) = -x^2 - 8x - 8$

figuur 3

Noten

- www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/
Kies dan de map 'VWO wiskunde A/' en vervolgens de map 'Verbanden/'.
- www.waageningse-methode.nl

Over de auteur

Peter Kop is docent wiskunde aan de Goudse Scholengemeenschap Leo Vroman in Gouda en vakdidacticus bij de universitaire lerarenopleiding ICLON in Leiden. Hij lid van en auteur bij cTWO, en ook lid van de Werkgroep HAVO/VWO van NVvW. Deze werkgroep wil onder andere de uitwisseling van kleine didactieken stimuleren.

E-mailadres: koppmgm@iclon.leidenuniv.nl

Ik was altijd heel slecht in wiskunde

INTERVIEW MET DE WISKUNDEMEISJES

[Joke Verbeek]

Het bestaan van de wiskundemeisjes zal u niet zijn ontgaan. U zag hen op tv, hoorde hen op de radio of bent een trouwe lezer van hun columns in *de Volkskrant*. Mogelijk bent u zelfs een fan en volgt u hen via de tweets of de blogs op de website www.wiskundemeisjes.nl. De wiskundemeisjes geven wiskunde een hip gezicht en het is niet ondenkbaar dat u in de les hun vlot geschreven columns gebruikt om een wiskundig probleem sappig onder de aandacht van uw leerlingen te brengen. Misschien gaat u zelfs verder en geeft u een bezoek aan hun website als huiswerk op. Kortom, de wiskundemeisjes horen erbij in wiskundig Nederland. In oktober 2011 kwam hun eerste boek uit: *Ik was altijd heel slecht in wiskunde*. Reden voor *Euclides* om aandacht te besteden aan Jeanine Daems en Ionica Smeets, want zo heten de meisjes in het dagelijks leven.



Jeanine Daems en Ionica Smeets bij de uitreiking van de Cath-prijs van de Universiteit Leiden in 2008

Druk, druk, druk

We maken de afspraak in Leiden, woonplaats van zowel Jeanine als Ionica. Aan de woonkamer van Ionica kun je aflezen dat ze een druk leven heeft: niet alleen veel boeken en tijdschriften, maar ook attributen die horen bij het moeder-van-een-eenjarige-peuter zijn. Ze is net terug van opnames van het televisieprogramma *De Rekenkamer*, waarin zij de vaste presentatrice Sofie van den Enk tijdelijk gaat vervangen. 'Dat is wel heel hectisch', vertelt Ionica. 'We waren wel eens te gast geweest in televisieprogramma's, bijvoorbeeld bij *De Wereld Draait Door*, maar dan word je heel erg in de watten gelegd. Als presentatrice moet je op allerlei plaatsen en tijden plotseling opdraven. Op dit moment maak ik de aflevering *Wat kost bloed*. Ik doe het rekenwerk niet zelf, al had ik dat van tevoren wel gedacht, maar dat doet de redactie. Ik presenteer. Ik leer heel veel van

zo'n klus, zoals hoe je een gesprek gaande houdt. Ook de techniek van het televisiemaken vind ik interessant. Je ziet hoeveel van de uitzending je in de montage bepaalt!' Ook Jeanine heeft een drukke werkdag achter de rug als docente op het Rijnlands Lyceum in Sassenheim. 'De brugklas kreeg les over kruisende lijnen. Ik vroeg wie er kruisende lijnen kon aanwijzen in het lokaal. Steekt er een bijdehand jongetje dat niet zo goed had opgelet, zijn vinger op en wijst het kruisbeeld aan dat aan de muur hangt. Moest ik gaan zeggen dat het kruisbeeld toch echt een voorbeeld was van snijdende lijnen. Hoe verwarrend kan taal zijn!'

Ik was altijd heel slecht in wiskunde

De titel van het boek heeft zeker geen betrekking op Drs. Jeanine en Dr. Ir. Ionica zelf.^[1] Ionica studeerde wiskunde aan de TU Delft, Jeanine in Leiden. Hun promotieonderzoek deden ze allebei in Leiden. Jeanine is nog bezig met haar proefschrift over de geschiedenis van de wiskunde, voor zover haar lesgevende taken in het vo en op de lerarenopleiding in Utrecht dat toelaten. Ook is ze betrokken bij het tijdschrift *Pythagoras* en de wiskundekampen van *Vierkant*, dus echt veel tijd blijft er niet over. Ionica combineert haar alfa- en bètakant in haar beroep als wetenschapsjournalist. Sinds januari 2012 is ze nergens meer in vaste dienst en bestaat haar werk uit presenteren, dagvoorzitter zijn, voordrachten en het schrijven van artikelen. Als wiskundemeisjes bestaat het duo sinds

2005. Ze leerden elkaar kennen door een gemeenschappelijke vriend. Die noemde hen 'wiskundemeisjes' en bracht hen met elkaar in contact. Al snel maakten ze samen een weblog, waarmee ze diverse prijzen wonnen. Daarna kwamen de columns, de optredens en het presenteren. En dan nu het boek.

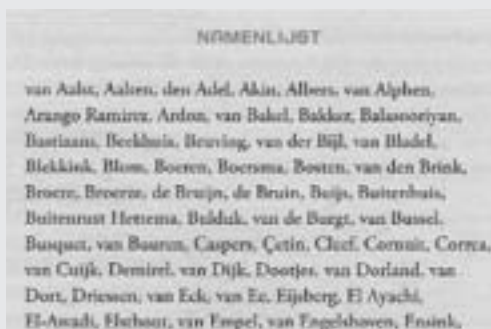
Jeanine: 'We vonden het leuk iets stabielers te maken dan een weblog of een stukje voor de krant, hè Ionica? Een uitgever benaderde ons. De doelgroep is dezelfde als die van de weblog: alfa's met een brede interesse, die nooit iets met wiskunde hebben gedaan.'

Ionica: 'De blog wordt gelezen door wiskundeleraars en leerlingen uit de bovenbouw van het havo en vwo. Die zullen het boek hopelijk ook leuk vinden.'

Jeanine: 'Het was leuk om te doen. De uitgever bemoeide zich er wel mee, maar als wij het ergens niet mee eens waren, liet hij zich toch overrulen. Er staat van alles in, net als in een vakantieboek: knutseldingen, raadsels en puzzels, tips voor uitstapjes, films en boeken en leesstukjes over wiskundigen die op een vreemde manier aan hun eind zijn gekomen. En natuurlijk uitleg van wiskundige principes.'

Ionica (trots): 'Het boek is aan een tweede druk toe. De eerste druk was 5000 exemplaren. Dat is al heel veel! Van sommige vergelijkbare boeken zijn maar 200 exemplaren verkocht. Ons boek doet het erg goed. Jeanine, wat vind jij het leukste stukje in het boek?'

Jeanine (lachend): 'Er zijn alleen maar leuke stukjes. Maar nu je het toch vraagt: het



figuur 1 Gedeelte van de namenlijst waarmee je kunt bepalen of je een allemansvriend bent.



figuur 2 Natuurlijk kennen we dit vraagstuk allemaal, maar wat was ook al weer de oplossing?

stukje over causaliteit en correlatie vind ik zelf wel erg leuk. En het gedeelte over de veelvlakkenstelling. Het is leuk, je komt het niet veel tegen en het gaat niet superdiep.’ In het boek komen Doe-het-zelf-stukjes voor waarin wordt gekleed, genaaid of een sinaasappel op ingenieuze wijze wordt afgepeld. Zijn de dames, pardon, meisjes, zelf ook handig?

Ionica: ‘We zijn niet echt knutselaars. We hebben het wel geprobeerd, maar sommige dingen lukken echt niet. Dan kun je dat beter anderen laten doen.’

Nick en Simon

Jeanine en Ionica zijn nog jong, begin 30. Ze hebben al van alles op hun naam staan. Is er nog iets dat ze willen bereiken als wiskundemeisjes?

Jeanine: ‘Bereiken? Nee, we zijn ooit begonnen omdat we gewoon een leuke website wilden maken. Daarmee hebben we wel veel voor elkaar gekregen.’

Ionica: ‘Daarna leek het ons mooi om een column in de krant te krijgen. Dat is inmiddels ook gelukt. Alles wat ik aan werk doe heb ik denk ik wel aan de wiskundemeisjes-weblog te danken. We hebben ook de tijd mee. Als we 30 jaar eerder hadden geleefd, hadden we geen weblog gemaakt maakt een krantje gestencild. Met een weblog bereik je veel meer mensen.’

Jeanine: ‘Bij mijn sollicitaties hielp het wel dat ik een van de wiskundemeisjes was. De school was er blij mee. En over bereiken: we doen wat we leuk vinden.’ Ondanks de naam ‘wiskundemeisjes’ hebben ze niet specifiek meisjes als doelgroep.

Ionica: ‘Meisjes én jongens moeten geïnteresseerd zijn in wiskunde. Ik vond het laatst wel schokkend om te zien dat bij een speelgoedwinkel een roze speelgoedteiltje werd aanprezen als leuk cadeautje voor meisjes, terwijl voor de jongens een microscoop werd aanbevolen. Meisjes willen toch ook wel zoiets interessants! Wij-zelf zijn zo niet opgevoed; we hadden

gewoon al het speelgoed dat we leuk vonden. Het is wel erg als meisjes wordt afgeraden om wiskunde te gaan doen, alleen maar omdat ze meisjes zijn, maar we willen niet de barricaden op.’

Hebben ze last van het feit dat ze, net als bijvoorbeeld Nick en Simon, altijd in één adem worden genoemd?

Jeanine: ‘De mensen denken vaak wel dat we bij elkaar wonen. Men beschouwt ons als onafscheidelijk en halen ons door elkaar, ondanks dat we niet op elkaar lijken. Ik moet soms zeggen “Nee, de baby is niet van mij”.’

Ionica: ‘Of ze bellen mij op en vragen: “Waar is Jeanine?” We schrijven apart, zetten er ook meestal onze eigen naam onder, maar we checken elkaars stukjes wel. We hebben ongeveer dezelfde schrijfstijl, maar mensen die ons goed kennen, weten toch wel welk stukje van wie is, ook zonder naam. De moeilijkere dingen zijn van Jeanine, bijvoorbeeld over meetkunde, en de statistiek is meestal van mij.’

Voor de klas

Jeanine combineert het wiskundemeisje zijn met 0,4 baan op het Rijnlands Lyceum en 0,5 baan aan de hogeschool Utrecht.

Jeanine: ‘Dit is mijn tweede jaar voor de klas. Ik vind het gewoon nog best moeilijk om goed les te geven en ben vooral nog van alles aan het uitvinden. Op het Rijnlands heb ik een brugklas havo/vwo en vwo-5 klassen voor wiskunde A en D. Op de lerarenopleiding doe ik van alles, bijvoorbeeld meetkunde, analyse en geschiedenis van de wiskunde.

Op het Rijnlands ben ik op dinsdag, woensdag en donderdag. Dat is vaak genoeg om alles van de school mee te krijgen. We hebben lessen van 50 minuten en dat vind ik prima.’

Is het voor de leerlingen leuk om les te hebben van een wiskundemeisje?

Jeanine: ‘Brugklassers weten het niet. De hogere klassen vinden het wel stoer. Of ik andere dingen doe dan de andere leraren?

Dat denk ik niet echt. Ik volg gewoon het boek, want volgend jaar hebben ze misschien van iemand anders les en dan moet het wel kloppen. We hebben een grote sectie van zo’n 16 docenten en we hebben afspraken over proefwerken en dergelijke. Ik denk dat mijn lessen er wel ongeveer zo uitzien als die van mijn collega’s. Ik probeer wel eens iets uit van dingen van Vierkant, puzzels of zo, maar niet te veel. Over de methode is ook nagedacht en er zit genoeg in. Ik volg dus gewoon de methode en probeer er leuke voorbeelden bij de te geven. Voor mijn werk in Utrecht weet ik ook niet of het uitmaakt. Ik heb gewoon veel dingen in mijn hoofd die ik kan gebruiken. Wiskundemeisje zijn hoort gewoon bij mijn werk, ik kan het niet goed scheiden.’

Doe het zelf

Nog even terug naar het boek. Veel informatie, weetjes, doe-dingen en adviezen. ‘Over alles wat leuk en interessant is aan wiskunde, voor mensen met en zonder wiskunde-knobbel’, staat op de achterkant. En dat is zo. Dus als wiskundeleraar haal je er puzzels, anekdotes en wetenswaardigheden voor jezelf uit. Tegelijkertijd kun je die inzetten in de les, want daar zitten naast bollebozen ook meestal aardig wat leerlingen zonder wiskundeknobbel. Zo sla je met de aankoop van dit boek twee vliegen in één klap. Q.E.D.

Noot [Red.]

[1] Zie voor een bespreking van het boek het artikel van Ger Limpens elders in dit nummer van *Euclides*.

Over de auteur

Joke Verbeek was tot september 2011 docent wiskunde op het Aretheem College in Arnhem.

Ze schrijft mee aan een wiskundemethode en is lid van de redactie van *Euclides*.

E-mailadres: jokeverbeek@chello.nl

In memoriam Bram Lagerwerf

[Bert Zwaneveld]



Bram Lagerwerf (1936-2011)

Op 11 december 2011 overleed Bram Lagerwerf. Hij was een begeistert leraren-opleider, nascholer, wiskundendidacticus en later steeds meer algemeen didacticus. Hij richtte zich vooral op het wiskunde-onderwijs voor leerlingen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs en het vmbo (en de voorgangers daarvan). Op een website over een van zijn boeken wordt Bram als volgt omschreven:

Opleider en coach van leraren. Was o.a. leraar wis- en natuurkunde in het middelbaar onderwijs en het hoger beroepsonderwijs, medewerker bij de stafafdeling automatisering van Philips, opleider en leerplanontwikkelaar bij de SOL, de SLO, de Universiteit Utrecht, de Universiteit van Amsterdam en het APS.

Bram probeerde in zijn werk steeds duidelijk te maken wat de verbinding is tussen de theorie van de vakdidactiek en de praktijk van het geven van wiskundeonderwijs. Dat deed hij niet alleen als lerarenopleider, maar ook in de boeken die hij schreef. Die waren niet alleen voor zijn studenten bedoeld, maar voor alle wiskundeleraars en in het voortgezet onderwijs.

In 1981 schreef hij *Wiskundeonderwijs nu*. En de eerste alinea ervan is meteen

illustratief over hoe hij tegen wiskunde-onderwijs en wiskundeleraars aankeek:

Dit boek gaat over het werk van wiskundeleraars. Het biedt allerlei ideeën over hoe een wiskundeleraar zijn werk al of niet zou kunnen aanpakken. Bij het schrijven van dit boek was de verleiding groot, om erg idealistisch te werk te gaan. Om te schrijven over hoe mooi het wiskundeonderwijs zou kunnen zijn als er geen dwangbuis van het examen was, als de leraar meer tijd had voor het voorbereiden van zijn lessen, als hij wat vaker de rust zou vinden om te filosoferen over wat hij nu eigenlijk zou willen, als ... Ik denk dat ik die verleiding meestal heb kunnen weerstaan. Vaak heb ik mij afgevraagd: 'Wat heeft een wiskundeleraar aan al dat geschrijf?' Bij die vraag heb ik ook antwoorden gevonden, die u al lezend vanzelf tegenkomt.

En een paar regels verder:

In dit boek heb ik mij daarom tot taak gesteld terughoudend te zijn met theorieën en die alleen te geven als ik een duidelijke verbinding met de onderwijssituatie kon geven: praktische aanwijzingen, voorbeelden, oefeningen.

In 1994 schreef Bram *Wiskundeonderwijs in de Basisvorming: een didactische ruggensteun voor wiskundeleraars*, dat in 2000 integraal door het APS herdrukt werd. Bij deze herdruk meldde Kees Hoogland als APS-projectleider dat 'de inhoud op dit moment relevanter dan ooit is. Er bestaat een toenemende aandacht voor de basisvorming als voorbereiding op het vmbo en de tweede fase van havo en vwo. De thema's die daarbij van belang zijn, zoals samenwerken in de klas, een onderzoekende houding, de zelfstandige leerling en rekening houden met individuele verschillen, komen in dit boek op een praktische manier aan de orde.' Ook in dit boek legt Bram opnieuw de verbinding tussen theorie en praktijk en heeft hij veel aandacht voor de wiskundig minder getalenteerde leerlingen. Aan de orde komen: getallen, ruimte, wiskunde bouwen en contexten. Vervolgens gaat het over de niveautheorie [van Pierre van Hiele; BZ], onderwijsleergesprek, voorbeelden en

modellen, samenwerken, een onderzoekende houding en de zelfstandige leerling. Ten slotte worden besproken: groepen die extra aandacht vragen, taalproblemen, rekening houden met verschillen, de wiskundesectie en een les voorbereiden. In dit boek geeft hij de niveautheorie van Van Hiele nadrukkelijk een plaats, terwijl hij in *Wiskundeonderwijs nu* Van Hiele's *Begrip en Inzicht* alleen maar noemt onder het kopje 'Voor wie meer wil'.

In *Wiskundeonderwijs in de basisvorming* neemt Bram expliciet een aantal ontwikkelingen uit de context van school en onderwijs mee: in de onderwijskunde 'het koppelen van het leren van leerlingen aan situaties die tot hun verbeelding spreken', in de maatschappij het fenomeen dat 'tieners een veel groter zelfbeschikkingsrecht hebben dan vroeger en hun daarbij horende grotere verantwoordelijkheid, wat lang niet altijd meevalt', en in school de leerlingenpopulatie met meer leerlingen in het voortgezet onderwijs, meer leerlingen in de wiskundes en meer leerlingengroepen die extra aandacht nodig hebben.

Wat in al het werk van Bram opvalt, maar heel speciaal in *Wiskundeonderwijs in de basisvorming* is de nadruk die hij legt op betekenisvol wiskundeonderwijs: wiskunde moet enerzijds praktisch zijn voor de leerlingen en anderzijds moeten zij zich een zodanig beeld van een wiskundig onderwerp vormen dat zij dat kunnen gaan schematiseren, zodat wat ze geleerd hebben, verankerd wordt. Aspecten die hierbij van belang zijn en die uitvoerig besproken worden, zijn de rol van eigen oplossingen van leerlingen, van voorbeelden, van samenwerken aan wiskunde, van het ontwikkelen van een onderzoekende houding en van zelfstandigheid van leerlingen ten aanzien van hun leren.

In 2001 werd Bram gepensioneerd. Hij gaf een afscheidscollege met als titel: *Kan een zendeling met pensioen gaan?* Niet dus, want hij bleef actief. Tegen het eind van zijn loopbaan kwam het accent in zijn

werk nog meer dan daarvoor te liggen op de algemene didactiek, of misschien nog breder, op leren en onderwijzen in het algemeen en de organisatie daarvan binnen scholen. Dit blijkt uit de twee boeken die Bram deze eeuw samen met Fred Korthagen schreef. In 2006 *Een leraar van klasse: een goede docent worden en blijven*, door Fred Korthagen het 'opus magnum' van Bram genoemd. In dit boek bieden de auteurs leraren in het voortgezet onderwijs steun bij hun dagelijks werk met betrekking tot didactiek, onderwijskunde en pedagogiek. De drie hoofdthema's van het leraarschap – didactiek, orde houden en de relatie van de leraar met de klas – komen grondig aan de orde. Een vierde hoofdthema van dit boek is de doorgaande professionele ontwikkeling van de leraar. Hun inspirerende visie op onderwijs is dat de verantwoordelijkheid voor het leren geleidelijk steeds meer bij de leerling moet komen. Leraren en leerlingen worden samenwerkingspartners die samen werken aan het doel dat er meer en beter wordt geleerd.

In 2008 kwam het tweede boek uit dat Bram samen met Fred Korthagen schreef: *Leren van binnenuit*. In 2011 beleefde dit boek zijn tweede druk. Ook hier gaat het om de vraag hoe leraren het beste uit hun leerlingen kunnen halen. In de traditionele onderwijsaanpak vallen er tot 'verdriet' van veel leraren leerlingen buiten de boot. Zij willen hun leerlingen stimuleren, hun leren leuk én effectief maken, kinderen helpen om op te groeien tot volwassenen die hun talenten optimaal kunnen ontplooiën. Het boek beoogt (aanstaande) leraren, schoolleiders en ouders hierbij te ondersteunen. Het legt een stevige theoretische basis en geeft, zoals van Bram verwacht mag worden, praktische aanwijzingen. Onderwijs moet uitgaan van de kwaliteiten die mensen al in zich hebben.

Bram Lagerwerf was een bevolgen aanhanger van de niveautheorie van Van Hiele en hij verstond als geen ander de kunst om die toe te passen in zijn talloze

boeken en artikelen. Daardoor zijn die erg goed leesbaar en worden ze nog steeds gebruikt door beginnende en ervaren leraren.

Bram Lagerwerf was een vakman, maar bovenal was hij een beminnelijk mens.

Noot

Met dank aan Kees Hoogland en Fred Korthagen voor hun informatie over Bram Lagerwerf.



Beatrix College

Betrokken.

Betrouwbaar.

Bevolgen.

Het Beatrix College in Tilburg zoekt vanwege de groei van de bovenbouw havo/vwo:

1e graads docenten
met vakkennis en goede resultaten

Open sfeer, uitstekende faciliteiten,
sterke en ambitieuze organisatie.
Meer info: www.beatrixcollege.nl

Een kijkje in de keuken van de Wiskunde Olympiade

[Birgit van Dalen]

Op vrijdag 27 januari j.l. ging een nieuwe editie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade van start, met de eerste ronde die werd gehouden op bijna 300 scholen in Nederland. Op deze pagina's vindt u enkele opgaven van deze wedstrijdronde nog eens terug. Eén van de organisatoren van de olympiade, Birgit van Dalen, geeft u bovendien een kijkje in de keuken van de samenstellers van de wedstrijd.

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd die jaarlijks door ruim 5000 havo/vwo-scholieren in heel Nederland wordt gemaakt. Het deelnemersveld is verspreid over klas 1 tot en met 5. Een speciale opgavencommissie is belast met de uitdagende taak om voor al deze leerlingen een leuke en geschikte wedstrijd samen te stellen. Deze commissie bestaat voornamelijk uit docenten en oud-docenten, aangevuld met enkele studenten die zelf aan de Internationale Wiskunde Olympiade deelgenomen hebben.

Al enkele maanden voordat de wedstrijd plaatsvindt, komt de opgavencommissie in het diepste geheim bij elkaar om een selectie te maken van de opgaven. Die tijd is nodig omdat er daarna nog zorgvuldig wordt gekeken naar de formuleringen van de opgaven, de antwoordopties bij de meerkeuzevragen en de plaatjes die erbij gegeven worden. Is de vraag wel duidelijk? Staan er geen termen in die onbekend zijn bij onderbouwleerlingen? Is het antwoord eenduidig? Wordt er niet per ongeluk iets weggegeven dat we niet weg willen geven? Kun je met behulp van de antwoordopties niet op een flauwe manier achterhalen welk antwoord goed is? Kun je uit het plaatje niet het antwoord aflezen, en is het plaatje niet misleidend?

Vaak gaan er wel een stuk of zes versies overheen voordat iedereen tevreden is. Pas dan worden er uitwerkingen gemaakt, en ook die worden minutieus bestudeerd. De uitwerkingen zijn bij voorkeur kort en elegant, maar moeten de leerlingen weer niet het gevoel geven dat ze dit nooit

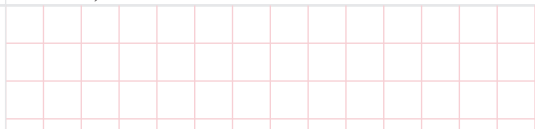
hadden kunnen bedenken. Bovenal moeten ze natuurlijk duidelijk zijn.

Ook de opgaven zelf moeten aan hoge eisen voldoen. Zo is het, om alle leerlingen met plezier te laten deelnemen aan de eerste ronde, essentieel dat de opgaven toegankelijk zijn, zeker de eerste paar opgaven. Dat een opgave toegankelijk is, wil nog niet zeggen dat hij makkelijk is, maar wel dat leerlingen er mee aan de slag kunnen en het gevoel hebben iets te kunnen bereiken bij de opgave. Neem bijvoorbeeld opgave A8 (die toevallig van mijn eigen hand is). Bij het verzinnen van deze opgave heb ik juist die toegankelijkheid in het achterhoofd gehouden. Als opgavencommissie vonden we dit wel een pittige opgave, maar dat neemt niet weg dat elke leerling iets kan met de opgave.

Met behulp van de eerste drie getallen van de rij, die al gegeven zijn, en de som van elke drie opeenvolgende getallen die bekend is, kun je het vierde getal in de rij uitrekenen. Als je dat vierde getal eenmaal berekend hebt, kun je ook het vijfde getal uitrekenen. En dan het zesde. Als je dan nog geen patroon ziet, kun je gewoon nog even doorgaan. Vroeg of laat zal elke leerling met een beetje doorzettingsvermogen het patroon in de rij herkennen. (Ik zal het patroon hier niet verklappen voor de lezers die graag zelf nog met de opgaven aan de slag willen.) Of de opgave uiteindelijk tot een goed einde wordt gebracht, hangt onder andere nog af van de nauwkeurigheid en rekenvaardigheid van de leerling, maar het belangrijkste is dat elke leerling tijdens de wedstrijd het gevoel zal hebben de opgave aan te kunnen.

Nog meer van die opgaven waar je zó aan kunt beginnen zijn A1 (enkele van de getallen op de sterretjes kun je direct uitrekenen), A3 (begin maar gewoon met tellen) en in iets mindere mate A2 (probeer zo klein mogelijke palindroomgetallen te verzinnen) en A7 (neem eens zes getallen en kijk hoeveel verschillende uitkomsten van de sommen je dan krijgt).

Het zijn allemaal opgaven waar daarnaast nog wel een wiskundige hobbelt genomen moet worden om hem helemaal te kraken; met alleen wat proberen kom je er niet. Ook dat is een belangrijke eigenschap van olympiadeopgaven, want daarmee wordt de verzameling opgaven een wedstrijd waarbij de meest getalenteerde leerlingen komen bovendrijven.



Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 27 januari 2012



- Beschikbare tijd: 2 uur.
- De A-vragen zijn vijfkeuzevragen. Bij elke vraag is één van de vijf mogelijkheden juist. Geef op het antwoordformulier duidelijk de letter van het goede antwoord aan. Voor een goed antwoord krijg je 2 punten, voor een fout antwoord 0 punten.
- Bij de B-vragen moet je een of meerdere getallen als antwoord geven. Voor een goed antwoord krijg je 5 punten en voor een fout antwoord 0 punten. Werk dus netjes en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{1}{2}$ of $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{2} + i$.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken, geen formulekaart en geen schaar; alleen pen en papier, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

A-vragen

- A1. Op de plaatsen van de sterretjes staan positieve gehele getallen op zo'n manier dat de vermenigvuldigings tabel hiernaast klopt.
Wat is het grootste getal dat meer dan één keer voorkomt in de 5×5 -tabel?

$\times$	*	*	*	*	7
*	24	*	*	*	56
*	*	36	8	*	*
*	*	27	6	*	*
6	18	*	*	*	42

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 18

- A2. Een palindroomgetal is een getal dat van links naar rechts gelezen hetzelfde is als van rechts naar links gelezen, zoals 707 en 154451. Leen maakt een lijst van alle palindroomgetallen van vijf cijfers (getallen beginnen niet met een 0), gesorteerd van klein naar groot.
Wat is het 12e getal op Leen's lijst?

A) 11111 B) 11211 C) 12221 D) 12321 E) 12421

- A3. Hiernaast zie je een regelmatige negenhoek met al zijn diagonalen.
Hoeveel gelijkbenige driehoeken zijn er waarvan de drie verschillende hoekpunten ook hoekpunten van de negenhoek zijn?
(Een driehoek is gelijkbenig als twee of drie zijden dezelfde lengte hebben.)

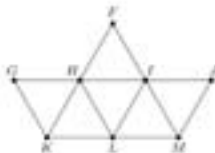


A) 27 B) 30 C) 33 D) 36 E) 39

- A4. Hieronder zie je een bouwplaat waarmee je een zogenaamde dipiramide zie je in het plaatje rechts.

Welke drie punten uit de bouwplaat worden na het vouwen de drie punten van de dipiramide?

A) F, G en L B) H, I en M C) G, I en M
D) H, K en L E) F, I en K

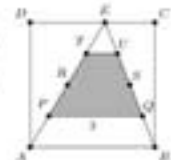


- A5. Frank heeft een tas waarin allemaal losse sokken zitten. Er zitten 10 rode sokken in en de rest van de sokken is blauw. Hij gaat blind een aantal sokken uit de tas pakken en wil daarna twee sokken van een bepaalde kleur hebben. Om zeker te zijn van minstens twee rode sokken moet hij twee keer zoveel sokken pakken als om zeker te zijn van minstens twee blauwe sokken.
Hoeveel sokken zitten er in totaal in de tas?

A) 14 B) 18 C) 20 D) 32 E) 40

- A6. Op zijde CD van een vierkant $ABCD$ ligt een punt E . Lijnstuk AE wordt door de punten P , R en T in vier gelijke stukken verdeeld. Lijnstuk BE wordt door de punten Q , S en U in vier gelijke stukken verdeeld. Gegeven is dat $|PQ| = 3$.
Wat is de oppervlakte van vierhoek $PQUT$?

A) $\frac{1}{2}$ B) 4 C) $\frac{17}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 5



- A7. Carry heeft zes kaarten. Op elke kaart staat een positief geheel getal geschreven. Zij kiest drie kaarten en rekent de som uit van de getallen op die kaarten. Zij doet dit voor alle 20 mogelijke combinaties van drie kaarten. Tienmaal krijgt Carry als uitkomst 16 en tienmaal uitkomst 18. Wat is het kleinste getal dat op de kaarten voorkomt?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

- A8. We bekijken een rij getallen die met 27, 1, 2012, ... begint. Voor deze rij getallen geldt het volgende. Als we de getallen op plek 1, 2 en 3 in de rij optellen, krijgen we 2040. Van de getallen op plek 2, 3 en 4 is de som 2039 en van de getallen op plek 3, 4 en 5 is de som 2038, enzovoorts. Algemeen geldt dus: de getallen op plek k , $k+1$ en $k+2$ samen zijn $2041-k$. Welk getal staat er op plek 2013 in de rij?

A) -670 B) -669 C) 670 D) 1341 E) 1342

B-vragen

- B1. We bekijken alle getallen van vijf cijfers. Hiervan zijn er a met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 25, en b met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 15.
Bepaal $\frac{a}{b}$.

- B2. Een gelijkzijdige driehoek ABC heeft zijde 12. Een halve cirkel met middelpunt AB snijdt de zijden AC en BC .
Bepaal de totale oppervlakte van het grijze gebied dat bestaat uit de twee cirkelsegmenten buiten de driehoek en het deel van de driehoek buiten de cirkel.



- B3. Een aantal hokjes van een vel ruitjespapier vormen samen een rechthoek. Van deze hokjes liggen er evenveel wit als niet aan de rand van de rechthoek.
Hoeveel hokjes telt de rechthoek in totaal? Geef alle mogelijkheden.

De leden van de opgavencommissie dragen elk diverse opgaven aan die zij mogelijk geschikt vinden voor de wedstrijd. Alles bij elkaar is er dan een grote collectie om uit te kiezen. Tijdens de vergadering van de commissie worden de opgaven allemaal langsgelopen en zorgvuldig beoordeeld op geschiktheid en moeilijkheid. Vervolgens selecteert de commissie twaalf opgaven die samen een gebalanceerde set vormen: voldoende variatie wat betreft onderwerpen (figuren, getallen, tellen, enzovoorts) en wat betreft moeilijkheidsgraad. We proberen de moeilijkheid van de opgaven zodanig te kiezen dat elke leerling die serieus aan de opgaven werkt, minstens één opgave correct op weet te lossen. Daarbij is het ook van belang dat er slechts enkele opgaven zijn waarbij voorkennis uit de derde klas nodig is; de rest moet zonder dergelijke voorkennis te doen zijn. Weliswaar hebben

leerlingen uit de onderbouw minder punten nodig om door te gaan naar de tweede ronde dan vierde- en vijfdeklassers, maar het is wel de bedoeling dat ze bijna alle opgaven in principe kunnen maken. Natuurlijk moet de wedstrijd ook weer niet te makkelijk worden: we willen getalenteerde leerlingen graag prikkelen en uitdagen met de opgaven. Bovendien moeten de scores van het hele deelnemersveld voldoende gespreid zijn om uiteindelijk de 800 leerlingen te kunnen selecteren die door mogen naar de tweede ronde. Daar zullen zij opnieuw pittige opgaven voor hun kiezen krijgen, die iets meer van hen vragen dan bij de eerste ronde. Opnieuw is dan de opdracht aan onze opgavencommissie om met een leuke, geschikte en zorgvuldig samengestelde wedstrijd te komen.

Over de auteur

Birgit van Dalen is docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag. Daarnaast is ze betrokken bij de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO).
E-mailadres: bevandalen@gmail.com

Leuk voorbeeld nodig?

Opfrissen of bijscholen?

Toepassingen van wiskunde?

Nu is er Wiskunde in Werking: van A naar B!

Een bijzonder inspirerend boek voor velen: eerstejaars studenten met wiskunde A die nu voor een exacte richting kiezen, studenten met wiskunde B die wat willen opfrissen, docenten op zoek naar verdieping of een origineel voorbeeld, en alle anderen met belangstelling voor toepassingen van wiskunde.

Deze tekst behandelt de basis van de "calculus". De stof wordt zo aangeboden dat de praktische bruikbaarheid zo groot mogelijk is; er wordt veel aandacht besteed aan het bestuderen van concrete voorbeelden uit diverse vakgebieden en het maken van oefeningen. Daarnaast wordt de stof zoveel mogelijk geïllustreerd aan de hand van toepassingen, waarbij de verbinding tussen de wiskunde en de toepassing zeker zo belangrijk is als de wiskunde zelf.

Deel 70

Wiskunde in Werking: van A naar B

M. de Gee

480 blz. (kleur), €34,-

ISBN 978-90-5041-127-1



Epsilon Uitgaven

bestellen bij boekhandel of via www.epsilon-uitgaven.nl

Een jaar lang W4Kangoeroe

DEEL 1, INTERNATIONALE KEUZES



[Ernst Lambeck]

W4Kangoeroe

WereldWijdeWiskundeWedstrijd Kangoeroe, W4Kangoeroe dus. In alle delen van de wereld hebben kinderen van (ruwweg) 8 tot 18 jaar plezier in het oplossen van uitdagende en originele wiskundeopgaven. Wereldwijd: Kangoeroe 2011 werd niet alleen gespeeld in Europa, maar bijvoorbeeld ook in Tunesië, Costa Rica, Pakistan, Kirgizië en Canada. In principe krijgen de kinderen per leeftijdscategorie dezelfde opgaven. Als je de opgaven in de verschillende landen bekijkt, dan zie je over het algemeen maar weinig verschillen. In **figuur 1 en 2 op pag. 196** staat een deel van de opgaven uit Benjamin van Oostenrijk en van Brazilië. **Figuur 3** toont de Nederlandse opgaven uit dezelfde categorie. Waar komen deze opgaven vandaan en hoe ontstaan de verschillen in tekst en in volgorde?

Aanleveren opgaven

In principe heeft elk deelnemend land de plicht om voor 1 september een aantal opgaven aan te leveren. Ieder land regelt dat op zijn eigen wijze. In Nederland verzamelt de voorzitter van de opgavencommissie in de loop van het jaar opgaven, redigeert die en stuurt ze in. De opgave met de zwarte en witte tegels uit de figuren 1, 2 en 3 is bijvoorbeeld door Nederland aangeleverd. Het aantal opgaven dat wordt ingezonden, is echter vele malen groter dan het aantal opgaven dat nodig is. Er moeten dus keuzes gemaakt worden.

Opgaven kiezen

Het kiezen van de opgaven gebeurt jaarlijks tijdens een internationaal congres waar alle deelnemende landen vertegenwoordigd zijn. In oktober 2011 werden in het Sloveense Bled de opgaven voor Kangoeroe 2012 gekozen. Nederland doet mee in de categorieën *Ecolier* (*wizKID*), *Benjamin* (*wizSMART*), *Cadet* (*wizBRAIN*) en *Junior* (*wizPROF*). Daarnaast wordt dit jaar geëxperimenteerd met *Pré-Ecolier*

(*wizFUN*), bedoeld voor leerlingen van groep 3 en 4 van de basisscholen. Tijdens het congres is er voor elke categorie een werkgroep. Nederland was in elke werkgroep vertegenwoordigd. **Op foto 1 op pag. 197** ziet u de Nederlandse delegatie, van rechts naar links Lonneke Boels (*Ecolier*), Jan Donkers (*Cadet*), Leon van den Broek (*Pré-Ecolier*), Martin Winkel (*Benjamin*) en Ernst Lambeck (*Junior*). In Bled werd in een tijdsbestek van twee dagen uit het aanbod van een paar honderd opgaven voor elke categorie een dertigtal opgaven gekozen. In elke werkgroep werden vergelijkbare routes gevolgd; daarom beperk ik me nu tot de gang van zaken in de werkgroep Junior. Tijdens de eerste sessie van ongeveer 3 uur werden de 20 deelnemers verdeeld over 5 groepjes. Elk groepje bekeek 40% van de opgaven, dus elke opgave werd door twee groepjes bekeken. Ieder groepje nomineerde de opgaven die het leuk en uitdagend vond. Enkele voorbeelden van opgaven die niet genomineerd werden:

- I know a 6-digit natural number that ends in a 4. When I move the 4 to the front of the number it becomes 4 times larger. Which digit is the third of the less number? (Reden: een bekende opgave)
- Let a , b and c be such positive integers, that $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. What is the minimum number of the divisors of abc (including 1 and abc)? (Reden: te gemakkelijk)
- How many ordered pairs $\{x, y\}$ of positive integers are there such that $x^2 - y^2 = 105$? (Reden: te moeilijk)
- If $a = 29$, $b = (11001)_2$ and $c = (33)_8$, then $a < b < c$, $b < a < c$, $c < b < a$, $b < c < a$ or $c < a < b$? (Reden: niet leuk)

De genoemde opgaven zijn onveranderd overgenomen uit de bundel aangeleverde opgaven. Erna staat tussen haakjes de reden waarom de betreffende opgave door een groepje niet werd genomineerd. Soms, bij een enkele andere opgave, vonden enkele andere deelnemers een opgave wel leuk, niet

te moeilijk of niet te gemakkelijk en werd de opgave alsnog genomineerd.

In de tweede sessie werd per genomineerde opgave gestemd: voor of tegen. Het saldo voor-tegen leidde tot een tweede schifting: de opgaven met een duidelijk negatief saldo (-8 of nog minder) werden direct afgevoerd, opgaven met alleen maar stemmen voor werden definitief geselecteerd. Dat laatste gebeurde overigens niet al te veel. Smaken verschillen en over smaak valt niet te twisten...

Aan het eind van de eerste dag waren dan ook nog maar slechts 6 opgaven geselecteerd. Voor de overige 24 opgaven waren nog ongeveer 50 genomineerd.

Intermezzo

Overigens worden er tijdens een congres niet alleen maar opgaven gekozen; er wordt ook vergaderd over tal van zaken. De data van Kangoeroe voor de komende jaren worden vastgesteld, er worden afspraken gemaakt over publicatie van antwoorden en opgaven (sommige landen kunnen Kangoeroe pas later organiseren; daarom mogen opgaven pas een maand na de wedstrijd gepubliceerd worden; de genoemde opgaven in dit artikel zijn dan ook vergelijkbare voorbeelden uit eerdere jaren) en het bestuur van de internationale organisatie wordt gekozen. Daarnaast wordt er in de wandelgangen veel informatie uitgewisseld over de gang van zaken in de diverse landen. **Op foto 2** informeren Leon en Lonneke de Fransman Gerard Martin over het Nederlandse experiment met duo's.

Materiaal uit andere landen

Ook materiaal (aandenkens, opgaven, prijsjes) wordt in grote getale uitgewisseld. Eén van de aanwezigen in Bled was John Webb (Zuid-Afrika), die zich oriënteerde op Kangoeroe, maar tegelijkertijd ook opgaven verspreidde van een soortgelijke Zuid-Afrikaanse wiskundewedstrijd. Tweetalig: Engels, maar ook het door ons redelijk tot goed te volgen Afrikaans. Kijk maar eens naar de volgende twee

- 11) Hanser Trieklein heeft door den afgebeelden ingang. Auf den Wegen liegen 16 Kürbiskerne. Er darf jede Kreuzung höchstens einmal betreten. Wie viele Kürbiskerne kann er höchstens aufheben?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

- 12) Alle einstelligen Zahlen mit denselben Ziffern wie 2011 (also 0, 1, 1, 2) werden in steigender Reihenfolge aufgeschrieben. Wie groß ist die Differenz der beiden Nachbarn von 2011 in dieser Liste?

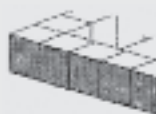
A) 890 B) 881 C) 900 D) 909 E) 990

- 13) Nina baut mit 36 identischen Würfeln einen Zaun um ein quadratisches Gebiet. Einen Teil des Zaunes sehen wir im Bild. Wie viele Würfel braucht sie, um das quadratische Gebiet vollständig aufzufüllen?

A) 36 B) 48 C) 64 D) 81 E) 100

- 14) Quadratische Böden werden wie im Bild mit schwarzen und weißen Fliesen ausgelegt. Wie sehen Böden mit 4 bzw. 9 schwarzen Fliesen im Bild befindet sich jeweils eine schwarze Fliese, und jede schwarze Fliese grenzt nur an weiße Fliesen. Wie viele weiße Fliesen benötigt man dann für einen Boden mit 25 schwarzen Fliesen?

A) 25 B) 39 C) 45 D) 56 E) 72



figuur 1 Opgave Oostenrijk

15. Nina possui 36 cubos iguais para construir um muro ao redor de um terreno quadrado. Um dos cubos, como se vê na figura, compõe o muro. Quantos cubos ela precisa para completar o muro?

(A) 36 (B) 48 (C) 64 (D) 81 (E) 100

16. Os pavimentos de um salão são quadrados. Um dos pavimentos, como se vê na figura, compõe o piso. Quantos pavimentos são necessários para completar o piso, se o salão for quadrado? Quantos pavimentos são necessários para completar o piso, se o salão for retângulo?

(A) 25 (B) 39 (C) 45 (D) 56 (E) 72



figuur 2 Opgave Brazilië

8. Een tunnel loopt door een berg met een helling van 10%. De tunnel gaat in twee keer door dezelfde tunnel en is 4 km lang. Hoe lang is de tunnel?

Wat is het gemiddelde aantal muggen dat op een klein stukje zit?

A. 11 B. 12 C. 13 D. 14 E. 15

11. Een klein stukje van een berg met een helling van 10% is 4 km lang. De tunnel gaat in twee keer door dezelfde tunnel en is 4 km lang. Hoe lang is de tunnel?

A. 20 B. 30 C. 40 D. 50 E. 60

12. Een klein stukje van een berg met een helling van 10% is 4 km lang. De tunnel gaat in twee keer door dezelfde tunnel en is 4 km lang. Hoe lang is de tunnel?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7



figuur 3 Opgave Nederland

voorbeelden.

- In die figuur (figuur 4) mag enige skuifstuk na enige leë vierkant beweeg word. Wat is die kleinste skuifstukke wat beweeg moet word om te verseker dat elke ry en elke kolom presies drie skuifstukke bevat?

(1) 1; (2) 2; (3) 3; (4) 4; (5) 5

- 'n Seun wat stroomop roei van A tot by B neem 30 minute. As hy stroomaf van B na A roei, neem dit hom 20 minute. As die rivier stil staan, hoe lank (in minute) sal dit hom neem om van A na B en terug te roei?

(1) 44; (2) 45; (3) 46; (4) 48; (5) 50

In het Verenigd Koninkrijk is Kangoeroe geen op zichzelf staande wedstrijd. Als ik het goed heb begrepen, is Kangoeroe één van de vervolgwedstrijden van de UK Intermediate Mathematical Challenge.

De beste deelnemers hebben zich echter geplaatst voor deelname aan de zogeheten Olympiad Cayley Paper, de Olympiad Hamilton Paper of de Olympiad Maclaurin Paper. Tijdens het congres in Bled kreeg ik boekjes met de opgaven van al deze vervolgwedstrijden. Om de lezer een idee te geven hierbij twee van de laatste opgaven uit deze Olympiad Papers.

- Uit de Hamilton Paper (bestemd voor leerlingen van School Year 10, hun klasgenoten maakten *Junior – wizPROF*); zie figuur 5:

Sam wishes to place all the numbers from 1 to 10 in the circles, one to each circle, so that each line of three circles has the same total.

Prove that Sam's task is impossible.

- Uit de Hamilton Paper (bestemd voor leerlingen van School Year 11, hun klasgenoten maakten ook *Junior – wizPROF*); zie figuur 6:

Three circles touch the same straight line and touch each other, as shown. Prove that the radii a , b and c , where c is the smallest, satisfy the equation

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Laatste keuzes

Terug naar de selectieprocedure. Bij de Kangoeroe moet het plezier in het maken van ongewone maar uitdagende opgaven voorop staan. Voor alle leerlingen! Dus zijn er zeker ook een aantal gemakkelijke beginopgaven nodig. Zoals hierboven al is gebleken worden opgaven vaak weggestemd met als motivatie 'niet leuk', 'te gemakkelijk',

‘niet interessant’. Dit betekent jaarlijks een gebrek aan gemakkelijke, en toch leuke opgaven. De tweede dag begon in Bled dan ook met het toevoegen van enkele opgaven van dit genre uit een ‘lagere’ categorie. Opgaven die enigszins op elkaar leken werden vervolgens kort besproken. Soms leidde dit tot het schrappen van een opgave; bijvoorbeeld, als teveel landen aangeven dat het wiskundig idee van de opgave bij hen pas later (of helemaal niet) in het curriculum zit. Voor Nederland zou dat bijvoorbeeld kunnen gelden voor opgaven die berusten op het ontbinden in priemfactoren (zoals de voornoemde niet genomineerde opgave dat $a^2 = 2b^3 = 3c^5$) of opgaven waarin cirkelmeetkunde (koordenvierhoek, omtrekshoek op een cirkelboog enz.) een rol speelde.

In een nieuwe stemronde werd over de overgebleven opgaven nogmaals gestemd. Na deze ronde moesten er nog vijf opgaven uit tien ongeveer even ‘sterke’ opgaven gekozen worden. Een besluit over deze opgaven werd via een ander stelsysteem geforceerd: iedere deelnemer aan de werkgroep gaf aan welke 5 van de 10 hij of zij prefereerde.

Na ruim anderhalve dag was de selectie van 30 opgaven voltooid. Het werk was hiermee overigens nog niet helemaal af...

Afronding

De afrondende werkzaamheden bestaan onder meer uit het zorgvuldig formuleren van de opgaven en de antwoordalternatieven. Door te zorgen voor een duidelijke Engelse formulering verklein je de kans op foute locale vertalingen als gevolg van het niet goed begrijpen van de opgaven. Internationaal zit het werk er nu op.

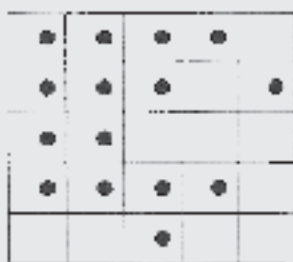
In de diverse landen kunnen de opgaven worden vertaald en aangepast aan de locale wensen. Dit leidt dan tot verschillende volgordes en verschillende aanpassingen in de tekst. Ook de Nederlandse opgavencommissie kan aan het werk, daarover meer in een volgend deel.



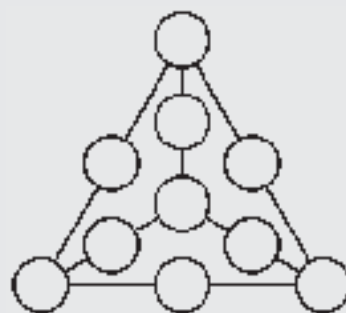
foto 1 Nederlandse delegatie in Bled (2011)



foto 2 Informatie-uitwisseling



figuur 4



figuur 5



figuur 6

Over de auteur

Ernst Lambeck is docent wiskunde aan het Newmancollege te Breda. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides* en voorzitter van de Nederlandse opgavencommissie van de Kangoeroe.

E-mailadres: elambeck@newmancollege.nl

Goedgekeurd door CvE voor
het Centraal Eindexamen

TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Een nieuwe visie vanuit meerdere wiskundige invalshoeken

Elke leerling leert op een andere manier.

De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

www.education.ti.com/nederland

**TI-Nspire™ CX kleuren
handheld + software
voor slechts € 59,-
Mail voor de aanbieding naar:
g-treurniet@ti.com**

(docentenaanbieding, 1 per docent)

**NU MET
KLEURENSCHERM,
EIGEN PLAATJES
DOWNLOADEN
EN OPLAADBARE
BATTERIJ**



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

Moord opgelost met wiskunde



[Peter Kruijthof]

Woensdag 16 november 2011 om 14:00 uur neemt het onderzoeksteam plaats op de stoelen in een lokaal van het NFI Field Lab in Den Haag. Nadat iedereen een plek heeft gevonden, kan de briefing van een moordzaak beginnen. In een nachtclub is het lichaam van een plastisch chirurg gevonden die handelde in organen. Tijdens één van de transacties is er iets fout gegaan met een dodelijke afloop. Degene die de plastisch chirurg heeft doodgeslagen, is opgepakt en heeft bekend. Tijdens de bekentenis beweert de verdachte dat hij uit noodweer handelde. Aan het team om te onderzoeken wat waarheid is...

Nee, dit is niet het nieuwe script van Baantjer of CSI maar een opzet voor een wiskundeles. Een wiskundeles die onderdeel is van de campagne: 'Meer succes met wiskunde'.

Deze campagne, opgezet door Wim Berkelmans (o.m. directeur van IMO 2011), is bedoeld om wiskunde populairder onder de scholieren te maken. In samenwerking met het Nederlands Forensisch Instituut (NFI) is er een lespakket samengesteld waarmee de bovenstaande zaak opgelost kan worden.

In het geval van deze moordzaak is het onderzoeksteam een groep havo/vwo-leerlingen van middelbare school 'de Populier' in Den Haag. Dit zijn de gelukkigen die de aftrap van het lespakket mochten meemaken in het NFI.

Gestart werd met het reconstructiefilmpje van de moord. In dit filmpje is te zien hoe een plastisch chirurg een orgaanhandelaar probeert op te lichten. Op het moment dat het duidelijk wordt dat de chirurg de boel probeert te belazeren, valt het beeld weg. Hiermee stopt het filmpje niet, maar gaat verder met de vraag of de leerlingen willen helpen met het oplossen van de moordzaak. De daders zijn opgepakt en hebben bekend, maar beweren te handelen uit zelfverdediging. Door naar de plaats delict te kijken kan men aan de hand van de bloedspetters berekenen wat er echt gebeurd is. Als de chirurg stond, dan is er inderdaad gehandeld uit zelfverdediging. Als de chirurg zat, dan ligt de orgaanhandelaar en heeft hij een moord op zijn geweten.

Na het filmpje krijgen de leerlingen een foto van de plaats delict te zien met de vraag wat ze verwachten. Ze vermoeden dat het uit zelfverdediging was, omdat op de foto is te zien dat de voet van de chirurg op de bank ligt (dit zou niet gebeuren als hij zat), dat de chirurg zelf een pistool vasthoudt en het lichaam erg ver van de zitplek ligt. Dit zijn volgens de instructeur van het NFI redelijk opmerkelijke dingen, maar lang niet overtuigend genoeg in de rechtszaal. Vandaar dat we gaan kijken naar de bloedspetters achter op de muur. Met behulp van de bloedspetters kunnen we de positie van het slachtoffer berekenen op het moment dat deze werd geraakt. Voordat de leerlingen aan dit onderzoek beginnen, bekijken we eerst hoe bloedspetters ontstaan.

Van het lokaal gaan we naar het 'laboratorium' waar twee uitverkoren leerlingen allebei een keer mogen inslaan op het 'slachtoffer'. De gelukkige leerlingen zijn Arjan uit 3-havo en Suzan uit 3-vwo. Ze worden allebei in een witte overall gehesen om hun kleding te beschermen tegen bloedvlekken (**foto 1**).



foto 1

Arjan mag op een staand slachtoffer (hoog paaltje met een plasje bloed) inslaan en Suzan mag op een zittend slachtoffer (laag paaltje met een plasje bloed) inslaan. Na een rake klap van Arjan en een twijfelachtige mep van Suzan zitten er twee – voor ons nietszeggende – bloedpatronen op de muur (**foto 2**).



foto 2

Personeel van het NFI legt uit dat aan een bloedspat te zien is waar hij vandaan komt en dat vroeger elke spat 'gestringed' werd. Stringing is het trekken van een draadje dat loopt van de bloedspat naar de verwachte oorsprong. Door genoeg bloedspetters te stringen kan er met een redelijke zekerheid gezegd worden waar de oorsprong zich bevond. Het is alleen een bijzonder arbeidsintensieve taak om honderden bloedspetters te stringen. Om deze reden worden de bloedspetters tegenwoordig digitaal geanalyseerd. En dit is waar de wiskunde voor de leerlingen begint. Met de computer zijn de hoeken van de twee bloedspetters berekend en op het plaats delict zijn de bijbehorende afstanden opgemeten. Deze data zijn uitgezet in een schematische tekening en aan de hand hiervan kunnen de leerlingen deze zaak oplossen. Terug naar het lokaal dus en aan het werk! Iedereen krijgt een werkblad waarop de schematische tekening te zien is met bijbehorende data. De opgave wordt kort toegelicht (**foto 3**) en leerlingen kunnen stapsgewijs werken naar de oplossing.



foto 3

Het doel van de opgave, *zie figuur 1*, is om BG (afstand vanaf de muur) en GH (hoogte van het slachtoffer) te berekenen. Allereerst wordt in de opgave gevraagd om driehoek BEG te tekenen en daarin BG uit te rekenen. Dit is een gelijkbenige driehoek waarbij $BE = 50\text{cm}$ en $\angle EBG = 90^\circ$; dus is BG ook gelijk aan 50cm . Hoewel niet alle leerlingen hier moeite mee hadden, was bij sommigen deze stof toch zo dusdanig weggezakt dat het niet direct lukte. Maar met een klein duwtje in de rug was niet alleen deze maar ook het volgende onderdeel snel opgelost. Bij de volgende opgave wordt gevraagd naar de afstand CB waarbij driehoek CBA weer een gelijkbenige driehoek is met $\angle CBA = 90^\circ$. Gegeven is de lengte van AB (200cm) dus is BC ook 200cm . De laatste opdracht van het eerste gedeelte is het berekenen van GH . Omdat de driehoeken CGH en CBA gelijkvormig zijn en CB (200cm), GB (50cm) en BA (200cm) bekend zijn, kan berekend worden dat GH gelijk is aan 150cm . Om te controleren of dit daadwerkelijk het punt

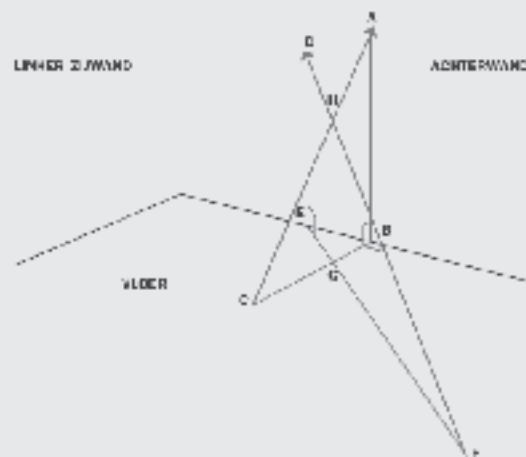
Afstanden:

BE	50cm
DE	180cm
AB	200cm

Hoeken:

$\angle EDF$	67°
$\angle BEF$	45°
$\angle BAC$	45°
$\angle EBC$	90°

figuur 1



is waar het bloed vandaan kwam, moet GH ook berekend worden via driehoek FED . Tot dit punt zijn de havo/vwo-leerlingen van de Populier ongeveer gekomen na 20 minuten. De rest van de opgave vereist nog het toepassen van de stelling van Pythagoras en 'soscastoa'. En dan kan het verlossende antwoord komen op de vraag: was het moord of zelfverdediging? Deze leerlingen weten het al...

Het lespakket is speciaal gemaakt voor een wiskundeles van ongeveer één lesuur in de derde klas havo/vwo. De bedoeling is om

eerst het reconstructiefilmpje te laten zien. Deze is samen met het overige materiaal terug te vinden op <http://succesformule.nu/> bij lespakket. Vervolgens krijgen de leerlingen het werkblad waarmee ze de zaak kunnen oplossen.

Over de auteur

Peter Kruithof is metrologisch medewerker bij VSL in Delft.
E-mailadres: pgkruithof@hotmail.com

APS-Exact

Ook in het schooljaar 2011-2012 organiseert APS-Exact diverse *cursussen* en *studiedagen*, zoals:

Donderdag 5 april

Studiedag *Wiskundige denkactiviteiten*

Maandag 16 april

Studiedag *Rekenen: eerst denken, dan doen!*

U kunt zich aanmelden via onze site
www.aps.nl/exact > Activiteitenagenda

informatie

Voor meer informatie kunt u contact opnemen met:
APS-Exact
voortgezetonderwijs@aps.nl
www.aps.nl/exact

Secretariaat:
030 28 56 722



leren
inspireren



Bayesiaanse evenredigheid

EN HET MONTY HALL PROBLEEM

[Rob Flohr]

Interessant aan het driedeuren- of Monty Hall probleem is, dat er verschillende manieren zijn om het juiste antwoord te vinden.^[1] Bovendien blijken er ook meerdere theoretische referentiekaders mogelijk te zijn op basis waarvan dit probleem benaderd kan worden (kans- resp. speltheoretisch).^[2] Het mag toch wel bijzonder genoemd worden dat dit vraagstuk, dat ruim 20 jaar geleden in de openbaarheid werd gebracht, de gemoederen nog steeds kan bezighouden.

In dit artikel beperk ik me tot het kans-theoretische referentiekader of, in termen van prof. Richard Gill, tot het Monty Hall probleem als *probability puzzle*. Zoals gezegd leiden ook in het geval van het Monty Hall probleem vele wegen naar Rome en dat brengt met zich mee dat er onderscheid gemaakt wordt tussen goede en minder goede oplossingen. Zo spreekt Rosenhouse van *casual treatments of the problem* die hij als onvolledig kwalificeert.^[3] Een voorbeeld van zo'n *casual* oplossing is de volgende: de kans dat de prijs zich achter de deur bevindt die de kandidaat in eerste instantie gekozen heeft, is $\frac{1}{3}$, en dus is de kans dat de prijs zich niet achter die deur bevindt gelijk aan $\frac{2}{3}$. Wanneer de quizmaster (Monty) vervolgens een van de andere twee deuren opent en er geen prijs te zien is, betekent dit dat de kans dat de prijs zich achter de resterende deur bevindt, gelijk is aan $\frac{2}{3}$. Rosenhouse noemt deze oplossing onvolledig omdat je niet zo maar mag veronderstellen dat de kans van $\frac{2}{3}$ overgaat van twee deuren naar de resterende deur.^[4] Tijdens het schrijven van mijn boek *De Bayesiaanse Benadering. Basisprincipes en -technieken van de Bayesiaanse statistiek*, dat binnenkort zal verschijnen bij Academic Service/SDU, kwam ik op het idee om het Bayesiaanse evenredigheidsprincipe te illustreren aan de hand van het driedeuren-probleem. Ik meen hiermee een 'volledige' (in de zin van Rosenhouse) oplossingsstructuur voor dit probleem geformuleerd te hebben op basis waarvan bovendien op vrij eenvoudige wijze een algemene formule is af te leiden voor de situatie met n deuren, waarbij de quizmaster k lege deuren opent.

Het Bayesiaanse evenredigheidsprincipe

Binnen de Bayesiaanse statistiek wordt gebruik gemaakt van het evenredigheidsprincipe dat geformuleerd wordt als:

$$\text{posterior} \propto (\text{prior} \times \text{likelihood})$$

De *posterior* kans op een gebeurtenis is de kans die wordt bepaald nadat de data verkregen zijn, terwijl de *prior* kans de kans is die wordt bepaald voordat de data bekend zijn. Het begrip *likelihood* verwijst naar de voorwaardelijke kans op de data, gegeven een bepaalde parameterwaarde of, wat voor dit artikel van meer belang is, gegeven dat een bepaalde gebeurtenis zich heeft voorgedaan of dat iets het geval is.

Volgens het evenredigheidsprincipe is de *posterior* kans evenredig ($\propto$) met het product van *prior* kans en *likelihood*. Dit principe volgt uit de regel van Bayes aangezien we bij het bepalen van alternatieve *posterior* kansen telkens door dezelfde noemer delen:

$$P(A_i | X) = \frac{P(A_i) \cdot P(X | A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j) \cdot P(X | A_j)}$$

Centraal staat het begrip *voorwaardelijke kans*. Een voorwaardelijke kans is de kans op een gebeurtenis (A), gegeven dat aan een bepaalde voorwaarde (B) is voldaan. Deze voorwaardelijke kans noteren we als $P(A | B)$. We illustreren de regel van Bayes aan de hand van een voorbeeld uit *Getal & Ruimte*.^[5]

Om na te gaan of iemand een infectie met tuberculose heeft gehad, wordt een huidtest gebruikt, de zogenaamde Mantoux-test. Uit ervaring is bekend dat van de personen die tuberculose hebben, 98% positief reageert op de test (dat wil zeggen dat het testresul-

taat de aanwezigheid van tuberculose bevestigt) en dat de overige 2% negatief reageert. Van personen die geen tuberculose hebben, vertoont 1% tóch een positieve reactie bij de Mantoux-test.

Van een groep van 10.000 personen, waarvan er 2 aan tuberculose lijden, ondergaat iedereen de huidtest.

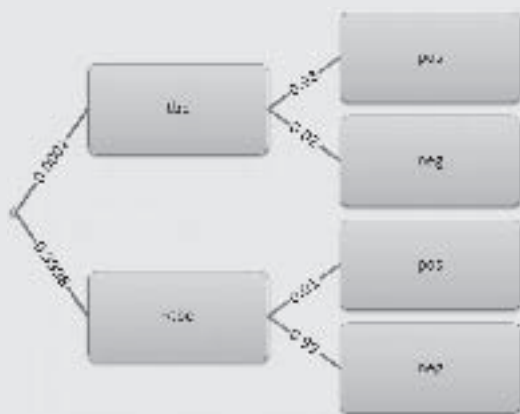
Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat iemand die positief op de test reageert, ook werkelijk tuberculose heeft.

Laten we de desbetreffende kansen op een rijtje zetten. Hierbij is *tbc* de gebeurtenis dat de persoon in het voorbeeld de ziekte heeft, $\neg tbc$ de gebeurtenis waarbij dat niet het geval is, en *pos* en *neg* de gebeurtenissen van een positief resp. een negatief testresultaat. De kansen zijn dan:

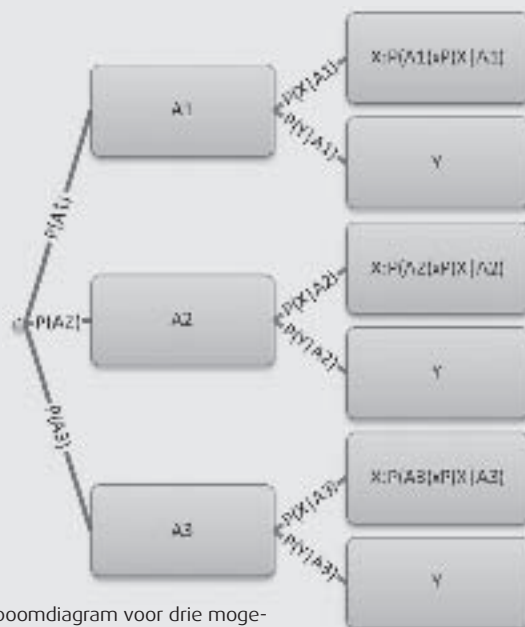
$$\begin{aligned} P(tbc) &= 0,0002 & P(\neg tbc) &= 0,9998 \\ P(pos | tbc) &= 0,98 & P(neg | tbc) &= 0,02 \\ P(pos | \neg tbc) &= 0,01 & P(neg | \neg tbc) &= 0,99 \end{aligned}$$

Deze kansen kunnen we in hun onderlinge samenhang weergeven met behulp van een boomdiagram; zie *figuur 1*.

We zien in dat boomdiagram twee takken die betrekking hebben op een positieve testuitslag waarvan er één verwijst naar het hebben van de ziekte. De kans dat iemand die positief op de test reageert ook werkelijk tuberculose heeft, $P(tbc | pos)$, berekenen we daarom als volgt:



figuur 1 Boomdiagram voor de uitkomsten van de Mantoux-test



figuur 2 Een boomdiagram voor drie mogelijke gebeurtenissen met elk twee uitkomsten

$$P(tbc | pos) = \frac{P(tbc) \cdot P(pos | tbc)}{P(tbc) \cdot P(pos | tbc) + P(\neg tbc) \cdot P(pos | \neg tbc)} = \frac{0,0002 \times 0,98}{(0,0002 \times 0,98) + (0,9998 \times 0,01)} = 0,0192$$

In het bovenstaande voorbeeld gaat het om twee gebeurtenissen, tbc en $\neg tbc$. Wanneer er drie mogelijke gebeurtenissen A_1 , A_2 en A_3 zouden zijn, waarbij we voor elk van die gebeurtenissen vervolgens weer twee mogelijke uitkomsten X en Y zouden onderscheiden, dan zou het boomdiagram er uitzien als **in figuur 2**.

De berekening van de kans dat bijvoorbeeld gebeurtenis A_2 zich voordoet, gegeven het optreden van gebeurtenis X , gaat dan als volgt:

$$P(A_2 | X) = \frac{P(A_2) \cdot P(X | A_2)}{P(A_1) \cdot P(X | A_1) + P(A_2) \cdot P(X | A_2) + P(A_3) \cdot P(X | A_3)}$$

Evenzo geldt:

$$P(A_1 | X) = \frac{P(A_1) \cdot P(X | A_1)}{P(A_1) \cdot P(X | A_1) + P(A_2) \cdot P(X | A_2) + P(A_3) \cdot P(X | A_3)}$$

en:

$$P(A_3 | X) = \frac{P(A_3) \cdot P(X | A_3)}{P(A_1) \cdot P(X | A_1) + P(A_2) \cdot P(X | A_2) + P(A_3) \cdot P(X | A_3)}$$

We zien dat de noemer telkens dezelfde is.

Gegeneraliseerd naar k gebeurtenissen A_1 tot en met A_k volgt voor de voorwaardelijke kans $P(A_i | X)$, dat

$$P(A_i | X) = \frac{P(A_i) \cdot P(X | A_i)}{P(A_1) \cdot P(X | A_1) + P(A_2) \cdot P(X | A_2) + \dots + P(A_k) \cdot P(X | A_k)}$$

of, korter:

$$P(A_i | X) = \frac{P(A_i) \cdot P(X | A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j) \cdot P(X | A_j)}$$

We illustreren de situatie met drie mogelijke gebeurtenissen aan de hand van vraag 14 uit de Wetenschapsquiz 2011.

Je hebt drie doosjes met bonbons. In het ene zitten twee witte bonbons, in het andere zitten twee pure bonbons en in het derde doosje zitten een pure en een witte bonbon. Je kiest willekeurig één van de drie doosjes en pakt daaruit ook weer willekeurig één van de twee bonbons. Die bonbon is wit. Wat is nu de kans dat de andere bonbon in het gekozen doosje ook wit is?

Het bijbehorende boomdiagram ziet er dan uit als **in figuur 3**.

De gevraagde kans is de kans dat we het eerste doosje gekozen hebben, gegeven dat we een witte bonbon gevonden hebben: $P(\text{doos1} | \text{wit})$.

Deze kans kan dan als volgt berekend worden:

$$P(\text{doos1} | \text{wit}) = \frac{P(\text{doos1}) \cdot P(\text{wit} | \text{doos1})}{P(\text{doos1}) \cdot P(\text{wit} | \text{doos1}) + P(\text{doos2}) \cdot P(\text{wit} | \text{doos2}) + P(\text{doos3}) \cdot P(\text{wit} | \text{doos3})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{(\frac{1}{3} \cdot 1) + (\frac{1}{3} \cdot 0) + (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

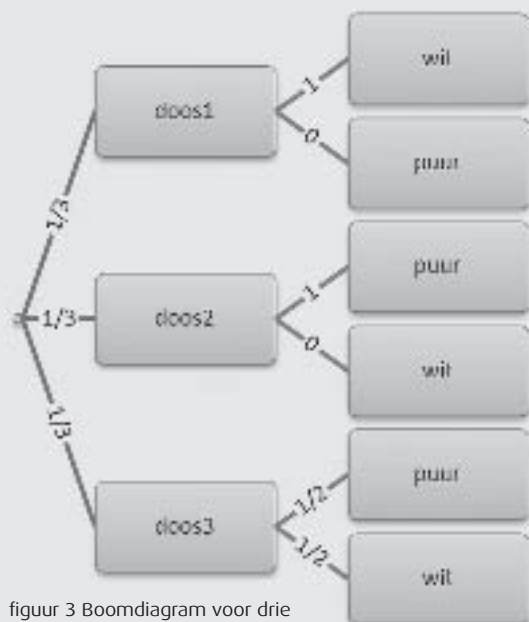
We zien dat de *prior* kans op het kiezen van een doosje1, dat wil zeggen de kans voordat we een bonbon uit het gekozen doosje gezien hebben, gelijk is aan $\frac{1}{3}$, terwijl de *posterior* kans, de kans op doosje1, gegeven een witte bonbon, gelijk is aan $\frac{2}{3}$.

In dit artikel laat ik zien hoe het evenredigheidsprincipe gebruikt kan worden bij het formuleren van een oplossing voor het drie-deuren-probleem.

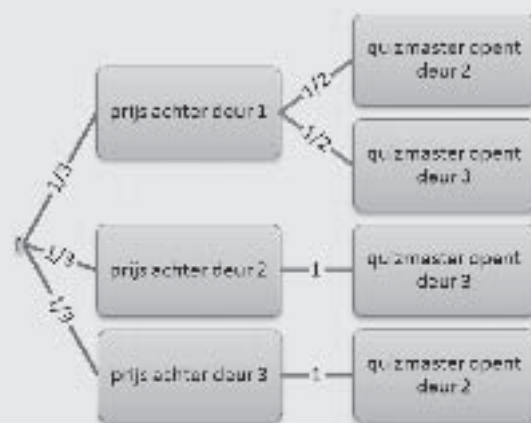
De *prior* kans $P(A_i)$ is dan de kans dat de prijs zich achter een bepaalde deur bevindt voordat de quizmaster een lege deur geopend heeft. De *likelihood* $P(X | A_i)$ betreft de voorwaardelijke kans dat de quizmaster een bepaalde lege deur opent, gegeven dat de prijs zich achter een bepaalde deur bevindt en de *posterior* kans $P(A_i | X)$ is de voorwaardelijke kans dat de prijs zich achter een bepaalde deur bevindt, gegeven dat de quizmaster een bepaalde lege deur geopend heeft.

Het openen van een lege deur door de quizmaster representeert in dit voorbeeld de nieuw verkregen informatie op basis waarvan de *prior* kans geactualiseerd wordt tot een *posterior* kans.

Vervolgens bespreek ik enkele variaties op het drie-deuren-probleem en tenslotte leid ik, wederom op basis van dit principe, een formule af voor de situatie waarin er n deuren in het spel zijn, waarvan k (lege) deuren door de quizmaster geopend worden. De condities zijn dezelfde: achter slechts één deur staat een prijs, achter alle andere deuren staat geen prijs ('lege' deuren), de quizmaster weet achter welke deur de prijs staat en wanneer de quizmaster uit meerdere lege deuren kan kiezen, bepaalt het toeval welke lege deur geopend wordt. De quizmaster opent alleen een *lege* deur of



figuur 3 Boomdiagram voor drie doosjes met bonbons



figuur 4 Boomdiagram bij het driedeuren-probleem

meerdere *lege* deuren en de door de kandidaat in eerste instantie gekozen deur wordt niet geopend.

Het driedeuren-probleem

In een quiz zijn drie gesloten deuren. Achter één van de drie deuren staat een prijs, achter de andere twee deuren staat niets. De deelnemer mag een deur kiezen, zonder dat deze geopend wordt. Daarna opent de quizmaster een andere deur: die is leeg! Hij vraagt vervolgens aan de deelnemer of deze nog van deur wil wisselen, dus de andere nog gesloten deur wil kiezen. De vraag is nu: wat moet de deelnemer doen om een zo groot mogelijke kans op een prijs te maken: bij zijn eerste keus blijven of van deur wisselen?

Als de deelnemer, zonder het te weten, de deur met de prijs gekozen heeft, dan heeft de quizmaster de keus tussen twee deuren. Het toeval bepaalt dan welke deur hij opent. Maar als de deelnemer een lege deur kiest, heeft de quizmaster geen keus en opent hij altijd de andere lege deur. Laten we aannemen dat de deelnemer deur 1 kiest en dat de quizmaster deur 2 opent. De vraag is dan wat verstandig is om te doen: moet de deelnemer bij deur 1 blijven of moet hij switchen naar deur 3? We kunnen een boomdiagram tekenen (*als in figuur 4*). We duiden de kans dat de prijs zich achter deur n bevindt aan met $P(\text{deur } n)$. In eerste instantie geldt dan dat:

$$P(\text{deur } 1) = P(\text{deur } 2) = P(\text{deur } 3) = \frac{1}{3}$$

Wanneer de prijs zich achter deur 1 bevindt, kan de quizmaster kiezen uit twee lege deuren: deur 2 (*opent2*) en deur 3 (*opent3*). Wanneer de prijs achter deur 3 staat, heeft de quizmaster geen keus en kan hij alleen deur 2 openen (*opent2*).

Dit betekent dat we de volgende voorwaar-

delijke kansen hebben:

$$P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{2}, \quad P(\text{opent } 3 \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{2} \quad \text{en} \quad P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3) = 1$$

waaruit volgt dat:

$$P(\text{deur } 1) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \text{resp.}$$

$$P(\text{deur } 3) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

De voorwaardelijke kansen waar het om gaat zijn echter:

- $P(\text{deur } 1 \mid \text{opent } 2)$, dat wil zeggen de kans dat de prijs achter deur 1 staat onder de voorwaarde dat de quizmaster deur 2 geopend heeft, en:
- $P(\text{deur } 3 \mid \text{opent } 2)$, zijnde de kans dat de prijs achter deur 3 staat onder de voorwaarde dat de quizmaster deur 2 geopend heeft.

Toepassing van de formule van Bayes geeft:

$$\begin{aligned} P(\text{deur } 1 \mid \text{opent } 2) &= \frac{P(\text{deur } 1) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1)}{P(\text{deur } 1) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1) + P(\text{deur } 3) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

respectievelijk:

$$\begin{aligned} P(\text{deur } 3 \mid \text{opent } 2) &= \frac{P(\text{deur } 3) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3)}{P(\text{deur } 1) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1) + P(\text{deur } 3) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Door te switchen naar deur 3 verdubbelt de deelnemer dus de kans op de prijs.

Dezelfde conclusie kunnen we echter ook trekken door te kijken naar de producten van *prior* en *likelihood*. Aan het begin van dit artikel zagen we immers dat:

$$\text{posterior} \propto \text{prior} \times \text{likelihood}$$

In dit geval gaat het om *prior* $P(\text{deur } 1)$ resp. $P(\text{deur } 3)$, en de *likelihood* $P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1)$ resp. $P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3)$. Daarmee komen we tot de volgende producten:

$$P(\text{deur } 1) \cdot P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{6} \quad \text{en}$$

$$P(\text{deur } 3) \times P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3) = \frac{1}{3}$$

Hoewel de *kansen* waar het om draait $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ zijn, kunnen we uit de *verhouding* van de producten van *prior* en *likelihood* al afleiden dat door het veranderen van deur de kans op de prijs verdubbelt, $\frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$.

Omdat in dit vraagstuk bovendien de *prior* kansen dezelfde zijn, schuilt de oplossing van het probleem in het vergelijken van het aantal lege deuren dat de quizmaster kan openen en volstaat het om de *likelihood* kansen te vergelijken:

$$P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{2} \quad \text{en}$$

$$P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3) = 1$$

Variaties op het driedeuren-probleem

1. In plaats van drie deuren zijn er nu 4 deuren, en de quizmaster opent 2 lege deuren.

Laten we veronderstellen dat de kandidaat weer deur 1 kiest en dat de quizmaster nu de deuren 2 en 3 opent (het maakt voor de berekening niet uit welke specifieke situatie je kiest; je mag net zo goed de kandidaat deur 4 laten kiezen en de quizmaster de deuren 1 en 3 laten openen). We moeten nu dus de *likelihood* kansen voor deur 1 en deur 4 bepalen: wanneer de prijs achter deur 1 staat, heeft de quizmaster drie lege deuren tot zijn beschikking waaruit hij er twee moet openen, dat geeft $\binom{3}{2} = 3$ mogelijkheden, namelijk de deuren 2 en 3, de deuren 2 en 4 of de deuren 3 en 4. (Je mag in plaats van combinaties ook met permutaties werken, dat zou hier dan 6 permutaties geven, maar omdat het allemaal om verhoudingen draait – evenredigheid! – maakt het geen verschil.) Wanneer de prijs zich daarentegen achter deur 4 bevindt, moet de quizmaster wél de deuren 2 en 3 openen. Met andere woorden, de kans op de prijs wordt drie keer zo groot door te wisselen van deur aangezien de betreffende *likelihood* kansen de volgende zijn:

$$P(\text{opent } 2 \text{ en } 3 \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{3} \text{ resp.}$$

$$P(\text{opent } 2 \text{ en } 3 \mid \text{deur } 4) = 1$$

2. Er zijn 4 deuren en de quizmaster opent 1 lege deur.

Stel de kandidaat kiest deur 1 en de quizmaster opent deur 2. Wat gebeurt er met de kans op de prijs wanneer de kandidaat van deur wisselt en voor (bijvoorbeeld) deur 3 kiest? Wanneer de prijs achter deur 1 staat zijn er drie lege deuren waaruit de quizmaster er een opent, dat geeft $\binom{3}{1} = 3$ mogelijkheden. Wanneer de prijs achter deur 3 staat, zijn er nog twee lege deuren beschikbaar; dat geeft $\binom{2}{1} = 2$ mogelijkheden. De betreffende *likelihood* kansen zijn dan:

$$P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{3} \text{ resp.}$$

$$P(\text{opent } 2 \mid \text{deur } 3) = \frac{1}{2}$$

Dus dan wordt de kans op de prijs bij wisselen wordt dan $1\frac{1}{2}$ keer zo groot.

3. Er zijn 15 deuren en de quizmaster opent 4 lege deuren.

Stel dat de kandidaat deur 1 kiest en dat de quizmaster de deuren 2, 3, 4 en 5 opent. Wat gebeurt er met de kans op de prijs indien de kandidaat van deur wisselt en (bijvoorbeeld) deur 6 kiest?

Indien de prijs achter deur 1 staat, kan de quizmaster uit $15 - 1 = 14$ deuren kiezen om er 4 te openen. Dat levert $\binom{14}{4} = 1001$ mogelijkheden op. Indien de prijs achter deur 6 staat, zijn er $\binom{13}{4} = 715$ mogelijkheden. De betreffende *likelihood* kansen zijn

dan:

$$P(\text{opent } 2, 3, 4 \text{ en } 5 \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{1001}$$

resp.

$$P(\text{opent } 2, 3, 4 \text{ en } 5 \mid \text{deur } 6) = \frac{1}{715}$$

Door te wisselen van deur wordt de kans op de prijs verhoogd met een factor die gelijk is aan $\frac{1001}{715} = 1,4$.

4. Er zijn n deuren en de quizmaster opent k deuren ($k \leq n - 2$).

Wat gebeurt er met de kans op de prijs wanneer de kandidaat van deur wisselt en voor één van de overgebleven deuren kiest?

Dezelfde redenering volgend krijgen we als *likelihood* kansen:

$$P(\text{opent } n_2, \dots, n_{k+1} \mid \text{deur } 1) = \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \text{ resp.}$$

$$P(\text{opent } n_2, \dots, n_{k+1} \mid \text{deur } : n_{k+2}) = \frac{1}{\binom{n-2}{k}}$$

De kans op de prijs bij wisselen van deur wordt dan vergroot met een factor die gelijk is aan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{n-2}{k}} : \frac{1}{\binom{n-1}{k}} &= \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-2}{k}} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \times \frac{(n-2-k)!}{(n-2)!} = \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \times \frac{(n-k-2)!}{(n-k-1)!} \\ &= \frac{n-1}{1} \times \frac{1}{(n-k-1)} = \frac{(n-1)}{(n-k-1)} \end{aligned}$$

Wanneer we deze formule toepassen op de hierboven beschreven situaties, vinden we,

bij 1: $(4-1) / (4-2-1) = 3$;

bij 2: $(4-1) / (4-1-1) = 1\frac{1}{2}$;

bij 3: $(15-1) / (15-4-1) = 14/10$.

Noten

- [1] Een mooi overzicht is te vinden in: Jason Rosenhouse (2009): *The Monty Hall Problem*. Oxford: Oxford University Press.
- [2] Richard D. Gill (2011): *The Monty Hall problem is not a probability puzzle*. In: *Statistica Neerlandica*, vol. 65, nr. 1; pp. 58-71.
- [3] Zie [1], pag. 38.
- [4] In het Nederlandse taalgebied komt in dit verband de term 'intuïtieve' oplossing voor. Ik zou liever van 'informele' oplossing willen spreken.
- [5] *Getal & Ruimte*, vwo A/B 1, 1e druk, 1e oplage (2003). Houten: EPN.

Over de auteur

De tekst van dit artikel is gebaseerd op de bespreking van het Bayesiaanse evenredigheidsprincipe in hoofdstuk 3 van zijn boek *De Bayesiaanse benadering. Basisprincipes en -technieken van de Bayesiaanse statistiek* dat binnenkort zal verschijnen bij Academic Service/SDU (Den Haag).

Drs. Rob Flohr is docent statistiek en wiskunde op Stenden Hogeschool Leeuwarden
E-mailadres: flohr028@planet.nl

Huisnummers en koperdieven

FINALE BARTJENS REKENDICTEE 2011

[Birgit van Dalen]

Zo'n 150 mensen die op een vrijdagavond in een sporthal in Zwolle hun hersenen kraken over veertien pittige rekenopgaven, met op het spel een glazen telraam als hoofdprijs: dat is de finale van het *Bartjens Rekendictee*. Is het een nieuw initiatief, bedacht in deze tijd waarin rekenvaardigheid overal hoog op de agenda staat? Nee hoor, het Bartjens Rekendictee is al jaren geleden ontsproten aan het brein van Marjolein Kool, zelf rekendocent aan de pabo van de Hogeschool Utrecht en natuurlijk welbekend als schrijver van wiskundige gedichten. Met haar gebruikelijke enthousiasme heeft ze dit jaar alweer voor de achtste keer het Bartjens Rekendictee georganiseerd.

Het Rekendictee is al jaren een succesformule. Dit jaar deden er weer 1000 mensen meer mee aan de online voorronde dan vorig jaar, nu 6200 in totaal. Slechts 70 van deze deelnemers werden uitgenodigd voor de finale op 25 november j.l. en vormden daar de grootste categorie. Daarnaast was er een categorie met pabo-studenten, winnaars van de pabo-voorronde die op hogescholen door het hele land is gehouden. Zo was er ook een voorronde voor scholieren uit 3-vwo en 3-havo: de beste leerling van elke school verdiende een plekje in de finale en ontving in Zwolle ook een mooie beker voor deze mooie prestatie. En er nam ook een groep van sponsors en een groep van prominenten aan het Rekendictee deel. Zo durfde dit jaar ook de burgemeester van Zwolle de uitdaging aan. Al met al waren er ruim 150 personen die plaatsnamen aan de klaptafeltjes in de sporthal van Hogeschool Windesheim. Zelf mocht ik namens *Euclides* tafel 29 bemensen.

Het grootste rekenwonder van Nederland, Willem Bouman, kreeg dit jaar ook een uitnodiging, maar sloeg deze af. Naar zijn mening hebben de opgaven in het Bartjens Rekendictee erg weinig met rekenen te maken. In zekere zin heeft hij gelijk: bij het Rekendictee zal je niet gevraagd worden

'met de hand' wortel te trekken uit een willekeurig getal van vijf cijfers, of uit het hoofd twee getallen van acht cijfers met elkaar te vermenigvuldigen. Maar bij één van de opgaven van de finale moest wel de wortel uit 3.600.000.000 getrokken worden en ook de tafel van 22 kwam goed van pas. Daarnaast draait het bij het Bartjens Rekendictee vooral om inzicht: hoe ga ik deze opgave aanpakken en wat moet ik daarvoor uitrekenen? Laten we als voorbeeld maar eens kijken naar opgave 1 van de finale.

Opgave 1 – Postperikelen. *Aan één zijde van een straat staat een rijtje van 15 huizen met 15 opeenvolgende even huisnummers. De som van die huisnummers is 300. Wat is het hoogste huisnummer van die 15 huizen?*

Als u hier even over nadenkt, kunt u vastwel diverse strategieën bedenken om tot het goede antwoord te komen. Ik noem er drie:

- Noem de huisnummers $2n$, $2n + 2$, ..., $2n + 28$. Tel ze op, stel het resultaat gelijk aan 300 en los hieruit n op. Het goede antwoord is dan $2n + 28$ met daarin de gevonden n ingevuld.
- Stel eerst dat het de nummers 2, 4, ..., 30 zijn. Met de somformule voor een rekenkundige rij vinden we als som hiervan $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 32 = 15 \cdot 16 = 30 \cdot 8 = 240$. Dat is 60 te weinig, dus de huisnummers moeten samen nog 60 opgehoogd worden. Dat is nog 4 erbij per huisnummer, want er zijn 15 huisnummers. Dus het hoogste huisnummer is niet 30, maar 34.
- De huisnummers zijn gemiddeld $\frac{300}{15} = 20$. Het middelste huis heeft dus nummer 20. Links daarvan staan nog zeven huizen en rechts ervan ook. Het hoogste huisnummer van dit rijtje is dus $20 + 7 \cdot 2 = 34$.

Nu denkt u misschien: 'Leuk puzzeltje, niet al te ingewikkelde oplossingen, kan ik ook wel eens aan een klas voorleggen.' Maar of je hiermee nou de beste rekenaars van

Nederland uitdaagt? Tja, toch wel, want bij de finale van het Bartjens Rekendictee was voor deze opgave precies 90 seconden beschikbaar... In die tijd moesten de finalisten de vraag lezen, een oplossingsstrategie bedenken, het antwoord uitrekenen en het dan ook nog intoetsen op een stemkastje.

Velen die voor de eerste strategie van hierboven kozen, waren dan ook pas halverwege hun berekening op het moment dat de tijd alweer om was. Zelf was ik wel zo begonnen, maar heel snel overgeschakeld op de tweede strategie. Echter, die kostbare seconden deden me toch de das om. Zelfs met het handig uitrekenen van $15 \cdot 32$ (voor rustig onder elkaar zetten en vermenigvuldigen was echt geen tijd) kwam ik zo'n vijf seconden te laat op het goede antwoord. Toen was het stemkastje al onverbiddelijk op rood gesprongen. Van medefinalisten hoorde ik later de derde strategie, die ongetwijfeld het meest efficiënt is. Ongeveer een derde van de deelnemers wist hier wel op te komen binnen de enkele seconden die ze hadden om een strategie te kiezen, en bracht deze opgave tot een goed einde.

De oplettende lezer vraagt zich misschien af wat de titel 'Postperikelen' van opgave 1 met de opgave zelf te maken heeft. Nou, niet zo gek veel, maar het biedt wel een leuke aanleiding om de opgave wat meer in te kleden. Marjolein Kool, die elk jaar eigenhandig het dictee in elkaar zet en zelf presenteert, zorgt bij elke opgave voor een inleiding met enkele leuke foto's of filmpjes en grappige nieuwsfeiten van het afgelopen jaar. In de inleiding van deze opgave werden we bijvoorbeeld weer even herinnerd aan de postbode die maandenlang post thuis had laten liggen in plaats van het te bezorgen, en werd de zoveelste naamverandering van het Nederlandse postbedrijf op de hak genomen.

Deze luchtige intermezzo's zorgden ervoor dat het Rekendictee een waar feest werd voor het publiek, zowel de mensen op de goedgevulde tribune in Zwolle als de



AANKONDIGING / HKRWO SYMPOSIUM XVIII VERGETEN VAKKEN

In dit symposium besteden we aandacht aan vakken die eens bloeiden op het voortgezet onderwijs, maar om wat voor redenen dan ook van het programma zijn verdwenen.

Na een algemene inleiding over de veranderingen in het leerplan bekijken we drie van die verdwenen vakken wat meer in detail: rekenkunde, stekunde en beschrijvende meetkunde.

De geschiedenis van de vergeten vakken – Inleiding op het thema van vandaag. Welke vakken zijn er zoal van het toneel verdwenen en waarom is dat gebeurd?

Spreker: Harm Jan Smid

Rekenkunde – Tot in de eerste decennia van de vorige eeuw stond rekenkunde (wat niet hetzelfde is als rekenen) op het programma van het voortgezet onderwijs. Bovendien vormde het de kern van het rekenprogramma op de kweekscholen voor onderwijzers. De nadruk daarbij lag op theoretische zaken zoals deelbaarheidskenmerken, g.g.d., k.g.v. en talstelsels.

Spreker: Brugt Krol

Stekunde – Misschien heeft u wel eens zo'n oud eindexamen stekunde van de HBS onder ogen gehad en was u maar blij dat u niet gevraagd werd dat ter plekke te maken. Want hoe doe je dat vereenvoudigen van al die ingewikkelde wortelvormen ook al weer, en wat zijn ook al weer onbepaalde of wederkerige vergelijkingen?

Spreker: Martin Kindt

Beschrijvende Meetkunde – Bijna anderhalve eeuw hét wiskundevak op de HBS en zijn voorlopers, en eveneens op allerlei technische opleidingen. Geen ingenieur kon er buiten, en toch verdween het vak rond 1960 spoorloos uit het Nederlandse onderwijs.

Spreker: Aad Goddijn

Datum en plaats

Symposium XVIII vindt plaats op zaterdag 12 mei 2012 in Cursus- en Vergadercentrum Domstad, Koningsbergerstraat 9 in Utrecht (een paar minuten lopen van CS).

Inloop en koffie vanaf 9:30u, start programma 10:15u, einde rond 15:30u.

Aanmelden en kosten

Aanmelding kan geschieden door het zenden van een e-mailbericht aan Harm Jan Smid (h.j.smid@ipact.nl) onder gelijktijdige overmaking van € 25,00 op girorekening 4657326 t.n.v. HKRWO te Leiden.

Inbegrepen zijn koffie, thee en fris, en een goed voorziene lunch.

mensen die thuis de *livestream* volgden.

Bovendien bood het de broodnodige ontspanning aan de finalisten, zodat die weer even op adem konden komen tussen de zenuwslopende minuten waarin ze aan opgaven werkten. Zelfs bij de enige kale rekensom (volgens traditie is er altijd precies één opgave zonder context in de finale) werden we getraakteerd op een verhaal, ditmaal over kale bekende Nederlanders. Dit was overigens de best gemaakte opgave van de finale: zo'n 110 mensen hadden deze opgave goed opgelost.

Opgave 11 – Kaal. Bereken:

$(0,1 : 0,05) \times (0,001 : 0,0005)$.

Zelfs deze kale rekenopgave vraagt eigenlijk meer denk- dan rekenwerk. Een handige manier om deze opgave aan te pakken is om $0,1 : 0,05$ te zien als breuk en dan boven en onder met 100 te vermenigvuldigen, zodat er $\frac{10}{5}$ staat. Het rekenwerk valt dan dus erg mee. De tweede breuk heeft boven twee nullen meer, maar onder ook twee nullen meer, dus ook daaruit komt 2. Antwoord: $2 \times 2 = 4$.

De opgave die door de finalisten het moeilijkste werd gevonden (slechts door 31 mensen goed beantwoord binnen 90 seconden), ging over koperdieven. Ook hierbij was weer een gemakkelijke inleiding van Marjolein Kool: over diverse opvallende gevallen van diefstal in het afgelopen jaar.

Opgave 9 – Koperdieven. *Op een nacht steelt Jan 3 kg koper langs het spoor en Piet steelt 5 kg koper. Ze besluiten hun buit eerlijk te delen met hun makker Kees, die te ziek was om mee te gaan. (Ieder krijgt dus een derde deel van de totale buit.) Kees betaalt als dank 24 euro voor zijn portie. Jan en Piet moeten dit geld eerlijk verdelen overeenkomstig de hoeveelheid koper die ze elk aan Kees hebben gegeven. Hoeveel euro krijgt Piet?*



foto 1 Rekenen



foto 2 De winnaars!

Mijn eerste gedachte was dat Jan en Piet geld krijgen in de verhouding 3 : 5, want dat is immers in verhouding met hoeveel koper ze gestolen hebben. Echter, dat zou alleen waar zijn als ze allebei een gelijk deel van hun buit aan Kees geven (bijvoorbeeld allebei de helft van wat ze gestolen hebben). Maar in de opgave staat dat alle drie de dieven evenveel koper krijgen, wat hier niet mee klopt. Dus de verhouding 3 : 5 is het in elk geval niet.

Wat is wel de juiste redenering? Kees krijgt een derde deel van de 8 kg gestolen koper, dus $\frac{8}{3}$ kg. Jan en Piet houden elk ook precies zoveel koper over, dus we kunnen uitrekenen hoeveel ze elk aan Kees geven. Jan geeft van zijn 3 kg slechts $\frac{1}{3}$ kg aan Kees, zodat hij zelf nog $\frac{8}{3}$ overhoudt. Piet houdt ook $\frac{8}{3}$ kg over en geeft dus $\frac{7}{3}$ kg weg aan Kees. We zien dat Piet 7 keer zoveel koper aan Kees geeft als Jan. Dan moeten we nu nog 24 euro verdelen in twee stukjes in de verhouding 7 : 1. Dat is 21 : 3. Dus Piet krijgt 21 euro.

Na afloop van de veertien finalevragen mochten de deelnemers even gaan uitblazen onder het genot van een hapje en een drankje. Dankzij de stemkastjes kon de uitslag direct berekend worden en keerde iedereen dus na een kwartiertje al weer terug naar de sporthal voor de prijsuitreiking. De spanning werd er even ingehouden door eerst de oplossingen van alle opgaven te behandelen. Dit werd gedaan door de diverse juryleden, die ook tijdens het dictee al scherp de deelnemers in de gaten hadden gehouden, onder leiding van schrijver, oud-minister en wetenschapper Jan Terlouw, die net zoals bij eerdere edities van het Rekendictee voorzitter van de jury was. Daarna werden dan toch echt de winnaars bekend gemaakt. In de categorie scholieren werd de eerste prijs in de wacht gesleept door Jelle Kuiper, leerling van het Hondsrug College in Emmen. Hij heeft een prachtig resultaat neergezet door 100 van de maximaal 200 punten te scoren. Ook

de beste pabo-student, Wesley Rood van Hogeschool Edith Stein, heeft geweldig gepresteerd door maar liefst 160 punten binnen te halen. Hiermee heeft hij een groot deel van de finalisten verslagen, ook in de andere categorieën; slechts 14 mensen hadden meer punten dan hij.

Bij de internetfinalisten won Roel Bakker uit Ede met 185 punten. Hij had slechts één vraag fout. Maar hij werd nog afgetroefd door twee deelnemers uit de categorieën prominenten en sponsors, die allebei alle vragen goed beantwoord hadden. Om te bepalen wie het felbegeerde glazen telraam mee naar huis mocht nemen, werd ook naar de tijd gekeken waarin zij deze bijzondere prestatie hadden geleverd. Pabo-rekendocent Douwe Jan Douwes van Stenden Hogeschool beantwoordde alle vragen goed in 720 seconden (dat is gemiddeld ruim 50 seconden per vraag). Maar Epi van Winsen, wiskundeliefhebber aan een middelbare school in Gulpen (Zuid-Limburg) wist dit voor elkaar te krijgen in slechts 603 seconden, dus hij werd de absolute winnaar. Hij verdiende bovendien eeuwige roem door de eerste te zijn die twee keer het Bartjens Rekendictee op zijn naam geschreven heeft: in 2007 was hij ook al de winnaar.

Zelf heb ik 155 punten gescoord en daarmee de 18e plek binnen het hele deelnemersveld behaald. Maar belangrijker dan winnen is het meemaken van deze prachtige avond in Zwolle, met veel reken- en denkplezier voor zowel deelnemers als publiek. Ik kan iedereen aanraden volgend jaar in oktober ook eens een poging te wagen bij de internetvoorrunde. En als u volgend schooljaar les geeft aan 3-vwo of 3-havo, overweeg dan ook eens om op school de voorrunde voor scholieren te houden. Informatie is te vinden op www.bartjensrekendictee.nl. Daar vindt u ook de finaleopgaven van dit jaar allemaal terug (en ook nog die van vorige jaren).

Over de auteur

Birgit van Dalen is docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag. Daarnaast is ze betrokken bij de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade. E-mailadres: bevandalen@gmail.com

Bartjens Rekendictee 2011

VRAGEN VAN HET INTERNET-DICTEE

Na elke vraag staat tussen haakjes de toegestane tijd in minuten en het antwoord.

1. Vroege Vogels – We doen mee met de teldagen van het radioprogramma Vroege Vogels. In onze tuin tel ik de vogels terwijl mijn vrouw de vlinders telt. We tellen samen 34 koppen en 140 poten. Hoeveel vlinders heeft mijn vrouw geteld? (N.b. Een vlinder heeft 6 poten.)
(2 / 18 vlinders)

2. Johnny Hoogerland – Johnny Hoogerland heeft in een donkere la een aantal wielrentruien liggen. Om precies te zijn: 3 gele, 5 witte, 7 groene en 9 bolletjes-truien. Hoeveel truien moet hij minstens zonder te kijken pakken om er zeker van te zijn dat hij van elke kleur tenminste één trui heeft gepakt?
(2 / 22 truien)

3. Mama Doutzen – Phyllon Joy, de zoon van Doutzen Kroes, wordt met de fles gevoed. Doutzen doet 30 ml melkpoeder in de fles en vult dit aan met 180 ml water. Phyllon drinkt de fles niet leeg. Hij laat 70 ml in de fles zitten. Hoeveel water heeft Phyllon binnen gekregen?
(2 / 120 ml)

4. Vliegen op frituurvet – Een KLM-vliegtuig vliegt op frituurvet van Amsterdam naar Parijs. Het vliegtuig heeft een tankinhoud van 24.000 kg brandstof. De KLM heeft een miniatuur van dit vliegtuig gemaakt op een schaal 1 : 20. Wat is de tankinhoud van dit kleine vliegtuig in kilogram?
(2 / 3 kg)

5. The Voice of Holland – Het publiek van het televisieprogramma 'The Voice of Holland' wordt in vakken gezet. Als men in zo'n vak 12 stoelen op een rij zet, heeft men 5 rijen meer nodig, dan wanneer men 15 stoelen op een rij zet. Hoeveel mensen gaan er in één vak?
(2 / 300 mensen)

6. Griekenland – Griekenland kreeg een lening van de eurolanden. Stel je voor dat het land na 1 jaar een derde deel van de lening aflost, een jaar later een kwart van de resterende schuld aflost, en weer een jaar later een vijfde deel van wat er dan nog aan schuld resteert aflost. Als er uiteindelijk 36 miljard aan schuld overblijft, hoeveel miljard was dan de oorspronkelijke lening? (Hou geen rekening met rente of mogelijke onkosten.)
(2 / 90 miljard)

7. Digidingen – 120 mensen doen mee aan een enquête over hun digitale bezittingen. Eén op de tien bezit een iPad. Een-vijfde deel bezit een laptop. Een kwart heeft een smartphone. 15% bezit een E-reader. Wat is het kleinst mogelijke aantal deelnemers dat geen enkele van deze artikelen bezit?
(2 / 36 personen)

8. 60 jaar televisie – In het Nederlands instituut voor beeld en geluid staan twee schaalmodellen van het allereerste televisietoestel. Het ene model is gemaakt op schaal 2 : 1, het andere model op schaal 1 : 4. Hoe vaak past het kleine model in het grote model? (Ga ervan uit dat het televisietoestel een balk is zonder uitsteeksels.)
(2 / 512 keer)

9. Politieke barometer – In juni werden 875 mensen ondervraagd; daarvan zouden er bij eventuele verkiezingen 420 op de VVD stemmen. In augustus werden 750 mensen ondervraagd; daarvan zouden er 324 op de VVD stemmen. Met hoeveel procent is het aantal VVD-kiezers gedaald in de periode van juni tot augustus?
(2 / 10%)

10. Zwaar tafelen – Rechter Schalken en arabist Hans Jansen steken tijdens een diner gelijktijdig twee kaarsen aan. De lengte van de kaars van Schalken is de helft van de lengte van de kaars van Jansen. De kaars van Jansen kan 2 uur branden. De kaars van Schalken is dikker en kan 5 uur branden. Na hoeveel minuten zijn beide kaarsen even lang?
(2 / 75 minuten)

AANVULLING EUCLIDES 87(3)

BIJ TWEE IMPULSEN TOT REACTIE

Naar aanleiding van een gesprek met Noordhoff Uitgevers plaatsen we de volgende aanvulling op het artikel *Twee impulsen tot reactie* van Louis Maassen in *Euclides* 87(3).

In de recente edities van *Moderne Wiskunde* is in de boeken voor 3-havo en 3-vwo het bewijs van de abc-formule opgenomen.

Het gebruik van posters in een wiskundelokaal

[Frans Ballering]

Posters in een wiskundelokaal kunnen kale muren opvrolijken.

We kunnen ze ook een rol laten spelen bij het leren. Een oude bekende is die van Bram Lagerwerf^[1]; *zie figuur 1*.

Als leerlingen zelf aan het werk zijn met opdrachten, is het goed voor de rust in de klas om een korte periode af te spreken waarin geen vragen mogen worden gesteld. Komt er toch een vinger, dan kun je volstaan met het wijzen naar de poster. Eventueel kun je die zo maken dat de onderste twee uitspraken tijdelijk bedekt kunnen worden.

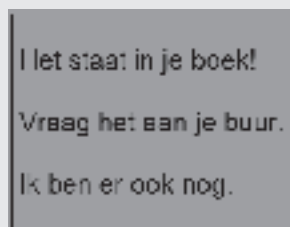
Bij een onderwerp als de abc-formule is een poster met de formule erop een mooi geheugensteuntje waarbij je met de leerlingen bijvoorbeeld kunt afspreken, dat bij de eerste overhoring de poster nog blijft hangen, maar bij het proefwerk niet meer.

‘Hoe moet ik het bij het proefwerk opschrijven?’, is een veel gestelde vraag. Een uitgewerkt voorbeeld op een poster kan dan goede diensten bewijzen en ervoor zorgen dat je bij het beantwoorden van individuele vragen alleen maar hoeft te wijzen; *zie figuur 2*.

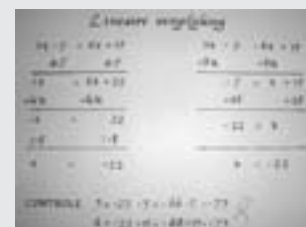
Om het begrip kreukellijn (zaagtand) bij grafieken te verduidelijken is een hele lange grafiek heel illustratief. Je zou er letterlijk een stuk tussenuit kunnen knippen. Jammer genoeg is de foto (*zie figuur 3*) niet zo duidelijk, maar het idee komt, naar ik hoop, vast wel over.

Ik heb een foto gemaakt van een vierkante meter met vierkante decimeters en centimeters erop, een briefkaart en een duimstok; *zie figuur 5*. Het ellipsvormige bierviltje (links onder de duimstok) is helaas vrijwel onzichtbaar. Ik denk dat leerlingen baat hebben bij dit soort beelden. Hoezo honderd vierkante centimeters in een vierkante meter? Je kunt toch zo zien dat het niet gaat lukken om met honderd van die kleintjes dit grote ding te bedekken! Ook een kubieke meter in het lokaal is een vorm van een poster die veel zegt zonder woorden.

Heb je al eens een kubieke decimeter gevuld met een liter water (gebruik een kartonnen literpak van de melk)? Zet ze dan naast elkaar zichtbaar in je lokaal. Ook een poster



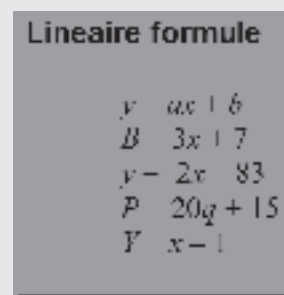
figuur 1



figuur 2



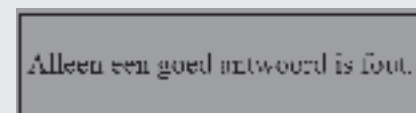
figuur 3



figuur 4



figuur 5 Vierkante meter met duimstok, dm² en cm² en briefkaart



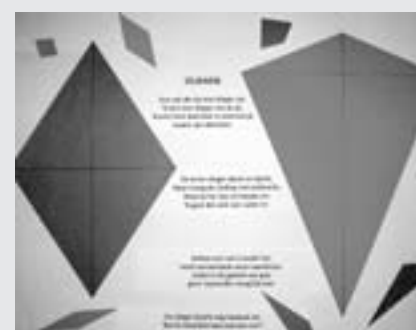
figuur 6



figuur 7



figuur 8 Een poster met hoeken maak je natuurlijk met de hele brugklas.



figuur 9 De gedichtenbundel van Drs. P en Marjolein Kool inspireert.^[2]

met verklaring van de woorden deci, centi, milli, enzovoort kan goede diensten bewijzen. Op diezelfde poster kan misschien ook de rest van de weetjes die bij maten en gewichten horen, een plaats krijgen: 1 liter = 1 dm³; 1 hectare = 100 meter × 100 meter; 1 cm³ = 1 cc. Meer lijkt me niet nodig, want de rest kun je bedenken.

Heb je zelf geen mooi handschrift? Vraag het een leerling!

Noten

- [1] Bram Lagerwerf (1994): *Wiskunde-onderwijs in de basisvorming*. Groningen: Wolters-Noordhoff (heruitgave door APS, Utrecht in 2000).
- [2] Drs. P & Marjolein Kool (2000): *Wis- en natuurlyriek*. Amsterdam: Nijgh & Van Ditmar

Over de auteur

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: fransballering@hetnet.nl

VERSCHENEN / DE STER VAN DE DAG GAAT OP EN ONDER



Ondertitel: Rekenen aan zonsopkomst en zonsondergang

Auteur: Aad Goddijn

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2012) / Zebra 34

ISBN: 978-90-5041-129-5

Prijs: € 10,00 (in de boekhandel),

64 pagina's (paperback)

Voor NVvW-leden geldt op

bijeenkomsten een gereduceerde prijs.

Van de achterkaft – De zon komt 's ochtend op en gaat 's avonds weer onder. Dat is een ding dat zeker is. Of niet? Er zijn streken waar de zon maandenlang op is en er zijn plekken op de wereld waar de zon op speciale dagen volgens de plaatselijke klokken pas rond 2 uur 's middags opkomt. In Nederland varieert het moment van zonsopgang bovendien gedurende één jaar zo'n vier uur en tien minuten. Net zo voor de zonsondergang. En ook staat in Nederland de zon niet elke dag op hetzelfde moment in het zuiden. Ondanks dit alles leer je met behulp van dit boekje bereken hoe laat de zon op jouw verjaardag in jouw geboorteplaats opkomt en ondergaat.

GECIJFERD!

VERNIEUWD

UITDAGEND TOT DE EINDSTREEP!



Succesvoller rekenen voor 2F en 3F!

Vraag een gratis demo van de nieuwe versie aan op www.gecijferd.nl



Over ELWleR

EN OVER M'N NACHTKASTJE EN WAKKER WORDEN

[Heiner Wind]

Op 11-11-11 werd er niet alleen veel getrouwd, er kwamen ook ongeveer 150 lerarenopleiders bij elkaar in Utrecht om ervaringen en ideeën uit te wisselen, bijgepraat te worden en nieuwe inspiratie op te doen. Dankzij de goede organisatie en het aantrekkelijke aanbod van sprekers en workshops is dat zeker gelukt. Zo'n dag meebeleven, ook als toeschouwer, daar kun je toch alleen maar vrolijker van worden. Grote opkomst van enthousiaste en geëngageerde deelnemers, zo slecht staat het er nog niet voor met het wiskundeonderwijs in Nederland.

Het ziet er veelbelovend uit.

Voor mogelijke vreemdelingen in dit Jeruzalem: ELWleR staat voor 'Expertise-centrum Lerarenopleiding Wiskunde en Rekenen'. ELWleR biedt ondersteuning aan de lerarenopleidingen wiskunde en rekenen in Nederland. Voor meer informatie, zie www.elwier.nl. Daar lezen we onder meer: 'Samengevat luidt de opdracht voor ELWleR II voor de komende twee jaar (tot voorjaar 2012):

Verzorg een efficiënte ondersteuning van de lerarenopleidingen wiskunde en rekenen in Nederland en zorg voor een kwaliteitsimpuls als het gaat om de uitwerking en implementatie van de kennisbases (uitgedrukt in onderzoek en ontwikkeling).'

Een verslag van 11 november 2011 kunt u lezen op de ELWleR-site (Alert 21).

Als je als verantwoordelijke bewinds-persoon 'de lat hoger wilt leggen', moet je dat faciliteren, immers 'De sleutel voor het verbeteren van de kwaliteit van het onderwijs ligt bij de leraren...'^[1]

De subsidie voor ELWleR lijkt me zeer op zijn plaats, gezien de doelgerichte en praktische invulling, die zij aan deze opdracht geven. Ik citeer uit het verslag van de conferentie van 2010:

'Met het definiëren van kennisbases van de verschillende lerarenopleidingen wiskunde en rekenen wordt een nieuwe stap gezet in het waarborgen dat een goede vakdidactische lijn in de opleidingen wordt gelegd. Het gaat dan enerzijds om gedegen vakkennis van de inhoud van rekenen/wiskunde zelf en het gaat

om gedegen vakdidactische kennis van het onderwijzen van rekenen/wiskunde.'

Daar draait het om. Gedegen vakkennis en gedegen vakdidactische kennis, dat moet de docent zich eigen maken!

Knelpunten

Oorspronkelijk was het de bedoeling 'gewoon' verslag te doen van deze dag. Die zijn, zoals gemeld, elders ook te vinden. Ik geef hier daarom slechts enkele indrukken en vragen weer van wat mij achteraf bezig hield na deze dag. Daarbij sprongen er enige knelpunten uit:

- aansluiting rekenonderwijs basisschool/voortgezet onderwijs;
- RRD en TRD (Realistische Reken Didactiek en Traditionele RD);
- didactiek theorie en praktijk, *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*.

Deze knelpunten zijn niet van vandaag of gisteren.

De overstap van de basisschool naar het voortgezet onderwijs is 'altijd' een grote stap. Het gewenste eindniveau van de basisschool kun je wel van bovenaf formuleren, maar de praktijk is weerbarstiger. De vo-docent krijgt te maken met een zeer gedifferentieerd gezelschap, terwijl hij/zij in de praktijk vaak niet op de hoogte is, op welke leest het rekenonderwijs op de basisschool geschoeid is. Natuurlijk hebben deze zaken de nodige aandacht gehad en zijn er activiteiten ontplooid om tot (ad hoc?) oplossingen te komen. Het is goed om te constateren, dat deze problematiek aandacht krijgt bij de opleiding.

In haar workshop liet Caroliene van Waveren Hogervorst zien op welke manier de wiskunde-lío's in aanraking worden gebracht – je zou kunnen zeggen: geconfronteerd worden – met reken-didactiek die op de basisschool gebruikt wordt. Vervolgens wordt gekeken wat voor effect dat bij deze lío's teweeg kan brengen. Achteraf vroeg ik me af, of dit element bij alle opleidingen in het curriculum zit, het hoort immers bij de uitrusting van iedere leraar.

Zijspoor

Een andere opvallende constatering die

tijdens haar workshop gemaakt werd, is dat er wel referentieniveaus zijn gedefinieerd, maar dat er nog geen doorlopende leerlijn rekenen vanaf de basisschool tot en met het voortgezet onderwijs bestaat.

Op zo'n moment schiet door mijn hoofd:

'En waar blijft een integrale visie op rekenen en wiskundeonderwijs vanaf de basisschool tot en met het eindexamen.'

Op vele fronten en in allerlei commissies en werkgroepen zetten enthousiaste collega's zich jaar in jaar uit in om problemen op te lossen, nieuwe programma's te ontwerpen, studiedagen te organiseren, leraren op te leiden, ... Maar het lijkt vaak een grote verzameling losse eilanden. Niet voor niets zijn het KWG en de NVvW overgegaan tot het in leven roepen van het Platform Wiskunde Nederland (PWN)^[2], een stichting met als doelstelling meer structuur aan te brengen in alle activiteiten die met onderzoek en onderwijs in de wiskunde te maken hebben.

De projectsubsidie voor ELWleR loopt in 2012 af. De activiteiten van ELWleR zijn belangrijk genoeg om gecontinueerd te worden. Ze zouden uitstekend passen onder de paraplu van het PWN, dat al in de 'stuurgroep' van ELWleR genoemd wordt.

's Middags

Jan Karel Lenstra hield de middaglezing 'Rekenonderwijs op basisschool en pabo'.

In hoog tempo gaf hij een overzicht van de diverse activiteiten van de commissies, die zich met deze problematiek beziggehouden hebben en over hun conclusies en aanbevelingen.

Een kleine greep hieruit:

- (Hoofdconclusie 3) De sleutel tot verbetering is het niveau van de leraar. (zie ook in de inleiding hierboven). Opleiding en nascholing zijn in ernstige mate geërodeerd.
- TRD en RRD zijn geen eenduidige begrippen. TRD anno 2009 kan kerndoelen niet negeren. RRD anno 2009 is 'RRD light'. RRD stelt hogere eisen aan de leraar dan TRD
- Over de relatie Rekendidactiek en Rekenvaardigheid:

- Onderzoek levert geen eenduidig beeld en rechtvaardigt geen gefundeerde uitspraak.

Ik haal deze opmerkingen aan, omdat het vlotte betoog van Lenstra niet alleen voorzien was van hier en daar een knipoog, waarmee hij de lachers op zijn hand kreeg, maar ook van enige prikkelende, voor sommigen wellicht wat te stevige, uitspraken.

Hoe het ook zij, hij gaf een – in mijn ogen – prachtig voorbeeld van synthese tussen RRD en TRD, met behulp van een bekend ‘icoon’ van deze ‘tegenstelling’: de staartdeling.

De kale staartdeling uit het TRD is onloochenbaar een schoolvoorbeeld van een algoritme, dat er vroeger werd ingestampd. Dat ‘wij’, die niet voor niets in deze richting een beetje hebben doorgeleerd, ons dat gemakkelijk eigen konden maken, doet daar niets aan af. De rest van de klas moest net zo lang oefenen tot ze het kunstje ook beheersten. Met behulp van de RRD-methode kun je eenvoudig laten zien, dat het één pot nat is. Door het noteren van wat nullen erbij, kan een kind begrijpen wat er gebeurt, en daar gaat het om.

Over Rekenvaardigheid:

- TIMMS 2007 – Nederland nr. 9 van de 36.
- PPON 2004 – vooruitgang bij getalbegrip, schatten, hoofdrekenen. Te weinig leerlingen halen een geavanceerd niveau.

Intermezzo

Er is veel discussie en zelfs maatschappelijke onrust over het niveau van de rekenvaardigheid van scholieren en studenten.

Het rekenen mag zich verheugen op warme belangstelling. Om te voorkomen dat heel Nederland ongefijfd dreigt te raken, behoort een rekentoets binnenkort tot een vast onderdeel van het eindexamen. Welke werkzaamheden en problemen dat allemaal met zich meebrengt, en welke emoties dat oproept, kunt u op veel andere plaatsen lezen. Dat het niveau kan worden opgekrikt is wel duidelijk, maar bij alle klachten over het niveau, en over het kennisniveau in het algemeen, past misschien ook enige relativering.

Vroeger, toen leerden we nog goed rekenen...

Even ongeveer 30 jaar terug in de tijd.

Onze dochter zit in de tweede klas van de

lagere school (groep 4 dus) en wij bezoeken de ouderavond. De ouders zitten in tafelgroepjes van vier personen. Het onderwerp rekenen komt ter sprake. De al wat oudere juf wordt door een van de ouders, met instemming en enthousiasme van de anderen, geprezen om haar ‘ouderwetse’ aanpak: de kinderen moeten de tafels van vermenigvuldigen uit het hoofd leren. ‘Dat is heel goed, want tegenwoordig leren de kinderen niet meer rekenen, zoals wij dat vroeger nog wel leerden, met breuken enzo, dat kunnen ze ook al niet meer...’

Ik knik en schrijf op een stukje papier $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \dots$, schuif het naar mijn buurman aan tafel en vraag: ‘Hoe moest dit ook nog maar?’ Hij wist het ook niet meer, misschien zijn vrouw? Maar die zag het aankomen en keek alvast neutraal een andere kant op. Het aanpalende tafelgroepje? Ook niemand. Het derde tafeltje was bingo; daar zat iemand die het wist: ‘Je moet de breuk omdraaien en dan keer doen’, en ze schreef achter het gelijkteken: $\frac{4}{3} \times \frac{2}{7}$. Opgelucht waren de andere toeschouwers het met haar eens. Ach ja natuurlijk, zo moest dat, nou wisten ze het weer ...

Over een integrale visie

Het derde aandachtspunt betreft de ‘kloof’ tussen theorie en praktijk wat betreft de didactiek.

Wat zijn centrale doelstellingen van ons wiskundeonderwijs en op welke manier kan daarover consensus worden bereikt? Geen sinecure, in de achter ons liggende jaren zijn we getuige geweest van een heuse richtingenstrijd. Je zou kunnen zeggen: niets nieuws onder de zon, lees het boek *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*^[3] er maar op na. Een boek dat sowieso op het nachtkastje van elke wiskundedocent thuis hoort. En als er overeenstemming is, hoe denk je dan deze doelstellingen te realiseren?

In de loop van 2012 verschijnt het nieuwe *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*, één van de vruchten van het ELWIEr-programma. In het eerste katern^[4] gaat Anne van Streun op deze vragen in.

Na afloop van de ELWIEr-conferentie heb ik dit katern herlezen en opnieuw realiseerde ik me, dat ik tijdens het lezen zo nu en dan instemmend zat te knikken. Ook de andere katernen mogen er zijn. Stuk voor stuk doorwrochte producties van deskundige mensen. Daar is goed over nagedacht, maar dat geldt ook voor bijvoorbeeld het werk

van Van Dormolen. Zijn ideeën en aanbevelingen hebben nog niets aan actualiteit ingeboet.

De katernen van het ‘Handboek’ zien er indrukwekkend uit, dat kan niet meer stuk, zou je denken...

Alvast maar een plekje op het nachtkastje reserveren?

Theorie en praktijk

Waar komt dan mijn twijfel vandaan?

Beginnende docenten krijgen immers gedegen werk gepresenteerd. Een van de doelstellingen van ELWIEr: het waarborgen van een gedegen vakdidactische vakkennis wordt hiermee nagestreefd. Was dit de enige doelstelling bij het schrijven van dit boek? Het bood en passant ook de mogelijkheid voor mede-auteurs zich persoonlijk verder te ontwikkelen in de vakdidactiek. Daar is niets mis mee, sterker nog, door onderlinge samenwerking kunnen des te betere resultaten worden bereikt. En daarnaast: je mag toch hopen dat iedere docent zich voortdurend blijft nascholen, want je raakt nooit uitgeleerd. Maar er schuilt ook gevaar als je deel uitmaakt van zo’n specialistische werkgroep. Op mijn vraag aan Anne van Streun over het gebruik van het nadrukkelijk aanwezige ‘jargon’ in het boek antwoordde hij: ‘Je hebt wel een taal nodig om je goed uit te drukken.’ Dat is zeker waar, maar wie spreken die taal? Is het alleen bedoeld voor de beperkte groep van ‘ingewijden’, of moeten de nieuwe leraren – en niet te vergeten de rest van de beroepsgroep – zich die taal ook eigen maken? Behalve dat er een enorme spraakverwarring kan ontstaan, raken de ‘beroeps’didactici (klinkt misschien een beetje vervelend, maar is beslist niet zo bedoeld) op die manier niet losgezongen van de dagelijkse realiteit? Het ligt voor de hand dat daar een heftige ontkenning op volgt, want de ervaringen met eigen studenten zijn echt anders; die laten zich er wel degelijk positief over uit.

Wake-up call

Dat laatste geloof ik graag, maar dat is een déjà vu. Daar heb ik mijzelf, en met mij ruim twintig andere kandidaten, destijds ook aan schuldig gemaakt, hoewel de hele groep van mening was, dat alle (!) didactiekcolleges, die wij ondergingen, geheel verloren tijd waren, wij werden er niets wijzer van. En die colleges werden nog wel (of ook!?) gegeven door een destijds

gerenommeerde vakdidacticus.

Wat is de positie van lio's? Ze zijn afhankelijk van de opleiders, best bereid om mee te doen (dat moet ook wel, anders krijgen ze hun papiertje niet), verstandig genoeg om er wat van op te steken, maar het risico, dat ze niet echt gemotiveerd raken voor de wiskundendidactiek is levensgroot, en dan bereik je precies het tegenovergestelde van wat je als doel gesteld hebt. Daarnaast moeten ze een praktijkstage doen, waarbij ze in het diepe (en voor de leeuwen) gegooid worden.

Het handboek lijkt uit te gaan van een ideale omgeving waar deze aanpak tot zijn recht kan komen, maar die ideale situatie bestaat niet, evenmin als de ideale leraar. Op de ELWleR-dag zat ik bij de werkgroep van de eerstegraads-opleiders: allemaal medewerkers van het handboek. Als vingeroefening schotelde Bert Zwaneveld ons een opdracht – een pagina, gebaseerd op het handboek – voor, waar we als 'lio's' in groepjes mee aan de slag konden;

zie figuur 1 op pag. 214.

Als ervaren(!), geïnteresseerde docent moet je dit eerst rustig doorlezen; je herkent dan een aantal zaken, die zeker van belang zijn. Maar nu door de ogen van een lio?

Laten we elkaar niks wijs maken – en misschien moet ik de handboekauteurs uit de droom helpen – maar die lio staat hier raar van te kijken. Die voelt zich meteen volledig onthand, want hier kan hij/zij praktisch niets mee.

Waar die wel schreeuwend behoefte aan heeft? Houvast! Herkenbaarheid, reddingsboeien, zoveel mogelijk praktische handreikingen, receptenboeken voor mijn part. De opleiders zijn toch niet vergeten hoe het henzelf verging toen ze voor het eerst voor de klas stonden?

De didactiek en het pedagogisch handelen zijn zeer nauw met elkaar verweven, die zijn niet te scheiden. Bij het observeren van een les kun je tot op de tweede nauwkeurig aangeven op welk moment het mis begint te lopen. Dat is de praktijk van alledag. Des te meer reden om goed na te denken over de manier waarop je de kandidaten op didactisch- en pedagogisch gebied wilt opleiden.

Keuzes bij de opleiding

Er speelt nog een ander aspect mee. De inzichten en conclusies die gepresenteerd worden in het handboek, zijn mede

gebaseerd op sommige onderzoeken die het 'laboratorium' nauwelijks ontstijgen en voor zover het grotere populaties betreft, zijn de conclusies zacht, voorzien van de nodige mitsen en maren. Dat kan ook niet anders, want als je vergelijkend onderzoek doet tussen leerlingpopulaties naar bijvoorbeeld leereffecten, geeft dat per definitie onzekerheden, daarvoor zijn die populaties leerlingen en docenten en omstandigheden te verschillend. Terecht merkt Lenstra op: 'Onderzoek levert geen eenduidig beeld en rechtvaardigt geen gefundeerde uitspraak.' Dat noopt op zijn minst tot enige terughoudendheid bij het formuleren van de aanpak voor de opleidingen van lio's.

Zoals boven opgemerkt is er wel degelijk sprake van op zijn minst gemengde gevoelens over de didactische vorming tijdens de opleiding. Dit lijkt in de loop van de jaren een constant probleem, ook de huidige lichting ontkomt daar niet aan. Ik heb de afgelopen weken een kleine steekproef gehouden, en collega's van verschillende cohorten, ook recente(!), gevraagd om een primaire reactie op hun ervaringen op dit terrein. De reacties waren in het algemeen zodanig, dat ik ze hier niet eens letterlijk weer wil geven. Die waren niet onverdeeld positief.

Proef op de som – Leg de pagina van de workshop voor aan een willekeurig gekozen groep wiskundeleraars en vraag ze om fris van de lever commentaar te leveren zonder concrete vragen te stellen. Kijk maar eens, wat dit losmaakt.

Ik besef heel goed dat dit een onthutsende mededeling kan zijn voor de betreffende opleiders c.q. handboekschrijvers, maar bij struivogelpolitiek is niemand gebaat en het wiskundendidactiek-onderwijs zeker ook niet.

Natuurlijk zijn de uitkomsten van deze kleine rondvraag niet voldoende om daar vergaande conclusies aan te verbinden, maar er is meer dan voldoende aanleiding om op grotere schaal onderzoek te doen naar de effecten van het vakdidactiek-onderwijs. Het didactiekonderwijs staat in elk geval bij een deel van de beroepsgroep niet goed aangeschreven en dat is doodzonde. Zonder goede didactische vorming geen goed wiskundeonderwijs. Om elk misverstand te voorkomen: de kwaliteit van het 'Handboek' en van de auteurs is boven elke twijfel verheven, daar

ligt het probleem niet.

Onderzoek naar de manier waarop het vakdidactiekonderwijs gegeven wordt zou er wellicht toe kunnen leiden, dat meer nieuwe collega's erdoor geboeid raken, en dat in een later stadium alsnog kunnen overbrengen op 'zittende' collega's. ELWleR lijkt me een uitstekend platform om de open discussie hierover aan te gaan. Als je kijkt naar alle talent dat afkomt op de NWD, NVvW-dagen, ELWleR- en andere conferenties, dan moet er veel moois te bereiken zijn.

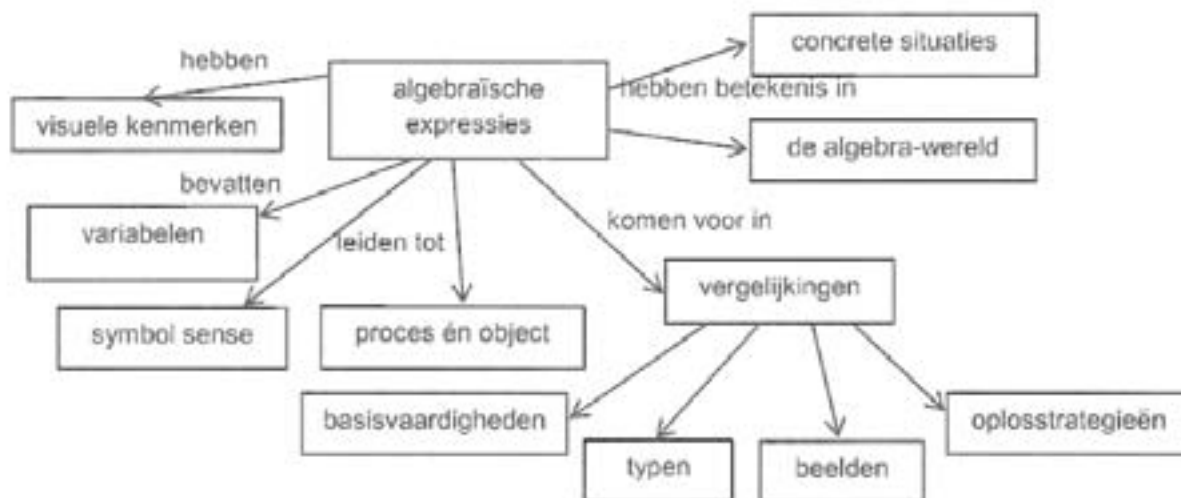
Noten

- [1] Onderwijsraad (2011): *Naar hogere leerprestaties in het voortgezet onderwijs*. Den Haag: Onderwijsraad; pag. 23.
- [2] Website PWN: www.platformwiskunde.nl/
- [3] F. Goffree, M. van Hoorn, B. Zwaneveld (2000): *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*. Leusden: NVvW (isbn 90-01-65958-6).
- [4] *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*. Katern 0, zie: www.f.uu.nl/wiki/index.php/Leren_en_onderrijken_van_wiskunde

Over de auteur

Heiner Wind is voorzitter van de redactie van *Euclides* en was docent wiskunde aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen tot hij op 1 januari 2008 met FPU ging. E-mailadres: hwind@home.nl

De volgende figuur geeft een overzicht van het *cognitieve schema bij variabelen en vergelijkingen*.



De belangrijkste elementen van een cognitief schema voor het oplossen van vergelijkingen (en algemener voor algebraïsche expressies):

- 1 het variabelenbegrip
- 2 de dualiteit proces-object
- 3 de visuele kenmerken van expressies
- 4 basisvaardigheden en symbol sense
- 5 de betekenis van algebraïsche expressies
- 6 het oefenen van vaardigheden, het herkennen van typen, het ontwikkelen van beelden en van oplosstrategieën.

Aanbevelingen voor de leraar

- ❑ Besteed aandacht aan de rol van variabelen bij het oplossen van vergelijkingen: variabelen zijn dan getallen die de vergelijking 'waarmaken' maar die we nog niet kennen. Daarmee is de vergelijking in feite de vraag naar die getallen.
- ❑ Besteed aandacht aan de dualiteit proces-object, bijvoorbeeld door globaal naar de voorkomende expressies te kijken en met leerlingen op zoek te gaan naar kenmerken en (deel-)objecten die een aanknopingspunt bieden voor het oplossingsproces.
- ❑ Bespreek met leerlingen de visuele kenmerken van vergelijkingen en de erin voorkomende expressies. Laat hen ervaren dat het soms goed is om in te gaan op de bewerkingen waartoe deze kenmerken 'uitnodigen', maar dat het soms ook verstandig is om dit juist niet te doen. Zo kunnen ze nagaan welke aanwijzingen of afleiders opvallen.
- ❑ Besteed aandacht aan basisvaardigheden én aan symbol sense: symbol sense bijvoorbeeld door expliciet over oplossingsstrategieën te praten met leerlingen, of door hen een overzicht van typen problemen en de bijbehorende oplossingsmethoden te laten opstellen. Basisvaardigheden samen met symbol sense kunnen worden onderhouden door veelzijdig en productief oefenen.
- ❑ Bevorder de betekenisontwikkeling van leerlingen, niet alleen algebra in context, maar ook abstractie stimuleren door de 'wereld van de algebra' met hen te verkennen. Deze ontwikkeling ondersteunen kan zinvol gebeuren door met leerlingen het domein te structureren. Zo'n structurering helpt hen van hoger standpunt vergelijkingen te bezien.

Vanuit de oude doos

DE OPGAVE 2011, UITGEDEELD OP DE JAARVERGADERING

[Ton Lecluse e.a.]

Deze keer een opgave die Dick Klingens me gaf om te verspreiden op de NVvW-jaarvergadering in november j.l. Er zijn een aantal mooie en verrassend verschillende bewijzen binnengekomen, zowel synthetische als goniometrische en analytische. Allereerst de opgave zelf.

De cirkels K_1 en K_2 snijden elkaar in de punten P en Q ; **zie figuur 1**. Een lijn door Q snijdt K_1 ook in het punt A en K_2 ook in het punt B , waarbij Q tussen A en B ligt.

De punten C en D zijn de middens van de cirkelbogen PA en PB waarop het punt Q niet gelegen is.

Het punt M is het midden van het lijnstuk AB .

Bewijs dat $\angle CMD = 90^\circ$.

(De opgave is ook omkeerbaar: verwissel het gegeven ' M is het midden van het lijnstuk AB ' met ' $\angle CMD = 90^\circ$ '. Sommige inzenders gaven ook hiervoor een bewijs. Vanwege de lengte van dit artikel laten we deze bewijzen achterwege.)

Er volgen hierna enkele fraaie bewijzen, waarbij gelijkvormigheid en congruentie opvallend vaak als gereedschap worden ingezet.

De bewijzen in dit artikel zijn van Sjoerd Zondervan, Jan van der Maas, Just Bent, Henk Visser en Floor van Lamoen. Deze bewijzen gebruiken stellingen die binnen de eindtermen vallen van het huidige vwo-wiskunde-B programma, en zijn dus te gebruiken in de les.

Maar er zijn nog meer bewijzen binnengekomen: van Sjoerd Zondervan (analytisch, past nog wel binnen het wiskunde-D programma), Agnes Verweij (met machten van cirkels en de bissectricestelling), Floor van Lamoen (met hoeksnelheid), Aad Goddijn (met hoeksnelheid), Ton Hengeveld (met vectorrekening en goniometrie), Dick Klingens (met inversie), Quintijn Puite in samenwerking met IMO-deelnemer Merlijn Staps (synthetisch, met gerichte hoeken) en nog twee van Just Bent (met vouwen cq. met draaivermenigvuldiging). Deze bewijzen zijn pittiger en/of gaan hier en daar een stukje boven

de eindtermen uit. Ze kunnen via de NVvW-website worden gedownload^[1]. De bewijzen zijn tussen de inzenders onderling uitgewisseld, hetgeen levendige discussies opleverde die een *Euclides*-special zouden rechtvaardigen, maar ook (in detail) fraaie verfraaiingen van de bewijzen zelf. Jan en Henk stuurden slechts een ruwe schets in van hun bewijs, die ik zelf mocht uitpluizen... heerlijk!

Het bewijs van Sjoerd Zondervan

Synthetisch met een puntspiegeling en congruentie

Puntspiegel de hele figuur in M . De beeldpunten geven we aan met een accent; **zie figuur 2**.

Dan is te bewijzen dat vierhoek $CDC'D'$ een ruit is, waarbij M het snijpunt van de diagonalen is en waarmee dan CM loodrecht staat op DM .

We bekijken eerst de driehoeken CPD en $C'BD$.

Door gebruik te maken van de stelling dat in dezelfde cirkel bij gelijke bogen gelijke koorden horen en door gebruik van de eigenschappen van de puntspiegeling kunnen we zeggen:

- $CP (= AC = A'C) = C'B$
- $PD = BD$

Verder met behulp van de hoeken in een koordenvierhoek en omtrekshoeken

- $\angle CPD = 180^\circ - \angle CPQ + 180^\circ - \angle QPD = \angle CAQ + \angle QBD = \angle C'A'Q' + \angle QBD = \angle C'BD$

Dus zijn de driehoeken CPD en $C'BD$ congruent (ZHJ). Hieruit volgt dat $CD = C'D$. Vanwege de puntspiegeling geldt $CD = C'D'$ en $C'D = CD$; dus:

$$CD' = C'D = CD = C'D'$$

Dus vierhoek $CDC'D'$ is een ruit.

Het bewijs van Jan van der Maas

Combinatie synthetisch en analytisch

Jan splitst het probleem op in twee fraaie deelproblemen, die afzonderlijk geformuleerd kunnen worden en elk een in de klas haalbare opgave opleveren.

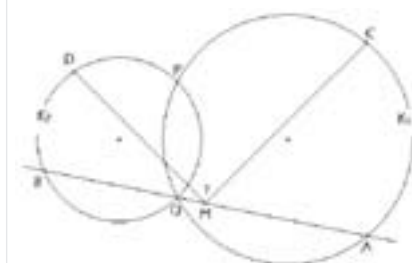
Kies de punten P' en P'' op de lijn door A en B , zo dat de driehoeken $P'QD$ en $P''QC$ gelijkbenig zijn met als top respectievelijk D en C ; **zie figuur 3a**.

Dan geldt: $BP' = AP''$.

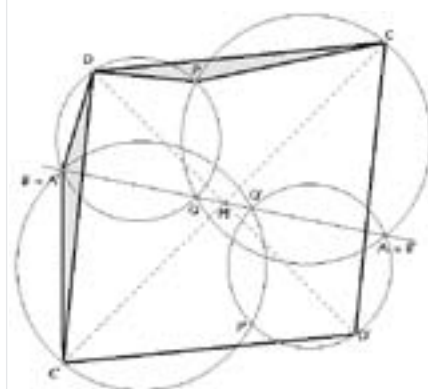
Kunt u zeggen waarom?

Verklaring – We zullen laten zien dat geldt: $BP' = AP'' = PQ$; **zie figuur 3b**.

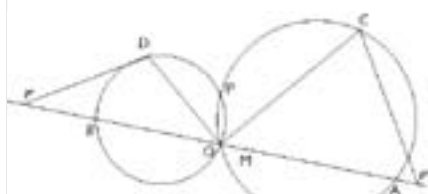
Omdat $DP = DB$ (volgt uit het gegeven) en $\angle DPQ = \angle DBQ'$ (beide zijn gelijk aan $180^\circ - \angle QBD$, koordenvierhoek en gestrekte hoek), kunnen we driehoek DPQ zó draaien om D dat PQ wordt afgebeeld op BQ' .



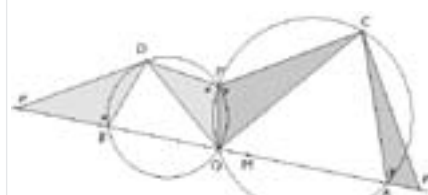
figuur 1



figuur 2



figuur 3a



figuur 3b

Omdat DQ' daarbij het beeld is van DQ is driehoek QDQ' gelijkbenig.
Aan de 'andere kant' doen we hetzelfde met de driehoeken CPQ en CAQ' .
Omdat $QB = PQ = AQ'$ is het midden M van AB ook het midden van $Q'Q$.

Een bewijs met congruente driehoeken is ook mogelijk.
Omdat DQ en CQ binnen- en buitenbissectrice zijn van $\angle BQP$, staat DQ loodrecht op CQ . Dus kan het oorspronkelijke probleem ook worden geformuleerd als:

Gegeven twee gelijkbenige driehoeken ABC en BDE met bases AB en BD , waarbij BC loodrecht staat op BE ; **zie figuur 4a**.
Punt M is het midden van het lijnstuk AD .
Te bewijzen: $\angle CME = 90^\circ$.

Lukt dit u?

Het kan op meerdere manieren; bijvoorbeeld als **in figuur 4b**.
Trek in beide driehoeken hoogtelijnen uit de top: CF en EG . Dan is:

$$- AD = 2AF + 2BG$$

$$- AM = AF + BG \text{ en } AM = AF + FM$$

Dus is: $FM = BG$. En net zo is: $MG = FB$.

Dan geldt:

$$\frac{CF}{FM} \cdot \frac{EG}{MG} = \frac{CF}{BF} \cdot \frac{EG}{BG} = -1$$

Dus staat CM loodrecht op EM .

Het bewijs van Just Bent

Synthetisch met (omtreks)hoeken en congruentie

DM snijdt K_2 in R . De lijn door P en R snijdt K_1 in E . De lijn door D , R en M snijdt AE in F ; **zie figuur 5**.

Bewijs – De hoeken A en B zijn gelijk, immers:

$\angle B (= \angle P) = \angle A$ (twee keer de *constante hoekstelling* met natuurlijk $\angle QPR = \angle QPE$)
Dan is: BR evenwijdig met EA (Z -hoeken).

Voorts is: $AM = BM$ (*gegeven*). Met $\angle BMR = \angle AMF$ blijkt dan dat de driehoeken BMR en AMF congruent zijn (HZH).

De volgende hoeken zijn gelijk:

$$- \angle R_4 = \angle R_1 \text{ (overstaand);}$$

$$- \angle R_1 = \angle R_2 \text{ ('kijken' op gelijke bogen);}$$

$$- \angle R_2 = \angle F_2 \text{ (dit zijn } F\text{-hoeken).}$$

Dus is driehoek RFE een gelijkbenige driehoek met top E . Dan zijn we er, want in die driehoek vallen zwaartelijn, hoogtelijn en bissectrice van de tophoek samen.

En M is het midden van RF , dus komt EM uit in C (want EM is bissectrice van hoek E) en dus staat EM loodrecht op DM (want EM is hoogtelijn in driehoek RFE).

Het bewijs van Henk Visser

Synthetisch

Henk vertaalde het gegeven dat C en D middens van bogen zijn in 'driehoeken BPD en APC zijn gelijkbenig'. Immers, D ligt op de middelloodlijn van BP en C op die van AP ; **zie figuur 6a**.

In een voorbereidende stap wordt u gevraagd te bewijzen dat de driehoeken BDE en PGC *gelijkvormig* zijn. Lukt het u? (Een prachtsom trouwens voor 6-vwo bij wiskunde-B.)

Zelf zeg ik altijd tegen mijn leerlingen: bij gelijkbenige driehoeken teken je *altijd* de symmetrieas, en bij elkaar snijdende cirkels *altijd* de gemeenschappelijke koorde. Die assen stonden er al, en vandaar dat in figuur 6a ook PQ erbij getekend is.

Stel $\angle BQP = q$. Druk nu hoeken uit in q .

Welnu. De bogen BD en PD zijn elk de helft van boog BP , waarop $\angle BQP$ staat.

Dus is $\angle DBE (= \angle DBP) = \frac{1}{2}q$.
 $\angle AQP = 180^\circ - q$ (*gestrekte hoek*), en deze hoek staat op boog AP , die door C in twee gelijke delen wordt verdeeld; dus:

$$\angle APC = \frac{1}{2}\angle AQP = \frac{1}{2}(180^\circ - q) = 90^\circ - \frac{1}{2}q$$

Omdat (vanwege de symmetrieassen) $\angle PGC = 90^\circ$ is, is dus $\angle GCP = \frac{1}{2}q$.

Dus bevatten de driehoeken BDE en CPG een hoek ter grootte $\frac{1}{2}q$ en een rechte hoek, en zijn deze driehoeken dus gelijkvormig.

Omdat (vanwege de symmetrieassen)

$$\angle PGC = 90^\circ \text{ is, is dus } \angle GCP = \frac{1}{2}q.$$

Dus bevatten de driehoeken BDE en CPG een hoek ter grootte $\frac{1}{2}q$ en een rechte hoek, en zijn deze driehoeken dus gelijkvormig.

We gummen nu PQ uit (**zie figuur 6b**),

voegen het midden M van AB toe, en nemen mee dat de driehoeken BDE en CPG gelijkvormig zijn.

In deze figuur zijn de driehoeken MED en MGC gelijkvormig. Kunt u zeggen waarom?

Allereerst, en zie nu **figuur 6c**, zijn ME , MG en EG middenparallelle in driehoek ABP , waaruit de gelijke hoeken aangeduid met p en q in die figuur volgen.

Het parallellogram $EMGP$ heeft zijden x en y .

We zien nu in driehoeken DEM en MGC al dat geldt:

$$(1) \dots \angle MED = \angle MGC = p + q + 90^\circ$$

Verder geldt $DE : EM = DE : PG$ en

$$MG : GC = BE : GC.$$

Uit de eerder aangetoonde gelijkvormigheid van de driehoeken BDE en CPG volgt dat

$$DE : PG = BE : GC.$$

Uit de eerder aangetoonde gelijkvormigheid van de driehoeken BDE en CPG volgt dat

$$DE : PG = BE : GC.$$

Dus is:

$$(2) \dots DE : EM = MG : GC$$

Met de betrekkingen (1) en (2) blijkt dus dat de driehoeken MED en CGM gelijkvormig zijn (*zhz*).

We laten een aantal 'overtollige' zaken uit de tekening weg, **zie figuur 6d**, en kijken naar de hoeken bij M :

$$- \angle M_1 + \angle M_2 = \angle MGC - 90^\circ \text{ (zie figuur 6c);}$$

$$- \angle M_3 + \angle M_4 = \angle MCG + \angle M_4 = 180^\circ - \angle MGC \text{ (gelijkvormigheid en hoekensom in driehoek } MGC).$$

$$\text{Dus: } \angle M_5 = 180^\circ - (\angle MGC - 90^\circ) - (180^\circ - \angle MGC) = 90^\circ.$$

Het bewijs van Floor van Lamoen

Met de cosinusregel en de stelling van Thales

We beginnen de oplossing met een lemma over twee driehoeken in een cirkel. Zij hebben een overeenkomende hoek en twee overeenkomende zijden, maar zijn desalniettemin niet congruent.

Lemma 1 – Laat PQR een driehoek en punt S het punt op zijn omgeschreven cirkel zodat QS de bissectrice is van hoek Q (met grootte q). Dan geldt dat:
 $PQ + QR = 2 \cdot QS \cdot \cos(\frac{1}{2}q)$

Bewijs – Laat $PS = RS = k$ (bij gelijke bogen horen gelijke koorden). We zien **in figuur 7a** met de cosinusregel dat:

$$k^2 = QS^2 + QR^2 - 2 \cdot QS \cdot QR \cdot \cos(\frac{1}{2}q)$$

en dat:

$$k^2 = QS^2 + PQ^2 - 2 \cdot QS \cdot PQ \cdot \cos(\frac{1}{2}q)$$

Dus zijn PQ en QR oplossingen zijn van de kwadratische vergelijking:

$$X^2 - 2 \cdot QS \cdot \cos(\frac{1}{2}q) \cdot X - k^2 + QS^2 = 0$$

De som van die twee oplossingen is inderdaad gelijk aan $2 \cdot QS \cdot \cos(\frac{1}{2}q)$.

De betekenis van dit lemma is dat de som van PQ en QR kennelijk alléén afhangt van de lengte van de bissectrice en van de hoek, en *niet* van de straal van de cirkel.

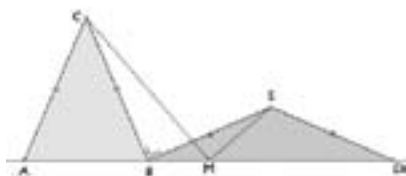
Lemma 2 (uitbreiding) – Nemen we in plaats van bissectrice QS de buitenbissectrice QS' van hoek Q , dan geldt met P en S aan dezelfde kant van QR en met $\frac{1}{2}q' = \angle RQS'$ dat:
 $QR - PQ = 2 \cdot QS' \cdot \cos(\frac{1}{2}q')$

In dat geval is, als P' het spiegelbeeld van P is in Q , QS' de 'echte' bissectrice van $\angle RQP'$; **zie figuur 7b**. Ook nu is het bewijs hiervan een invuloefening van de cosinusregel, met de opmerking dat:
 $\cos(\angle PQS') = \cos(180^\circ - \frac{1}{2}q') = -\cos(\frac{1}{2}q')$

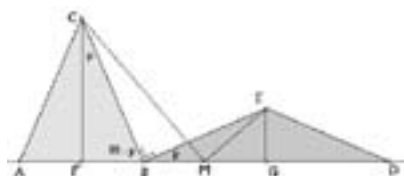
Nu de oplossing van de eigenlijke opgave; **zie figuur 8**.

We bekijken de situatie zonder het punt M . Omdat DQ de bissectrice is van $\angle BQP$ en CQ die van $\angle AQP$ geldt dat $\angle DQC$ recht is (de helft van een gestrekte hoek).

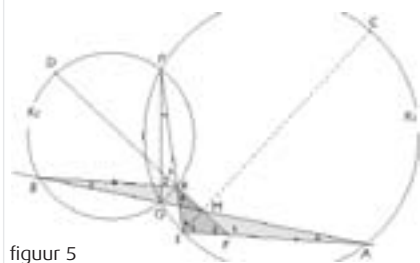
We kiezen het punt E zodat $DQCE$ een rechthoek is, met een omgeschreven cirkel (middenpunt F , het midden van CD). Die cirkel snijdt PQ naast Q ook in G . Uit de stelling van Thales blijkt daarnaast dat het voetpunt V van E op AB op deze cirkel ligt.



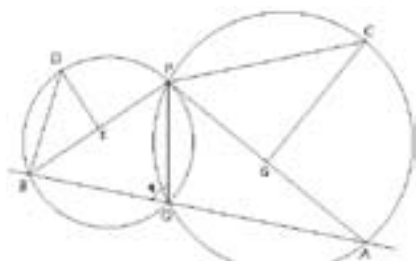
figuur 4a



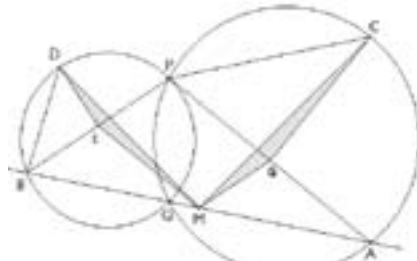
figuur 4b



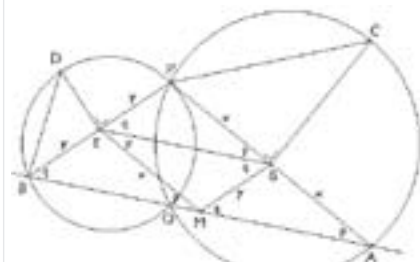
figuur 5



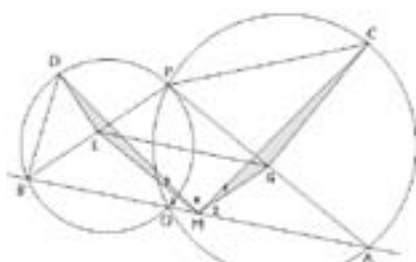
figuur 6a



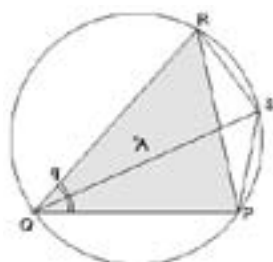
figuur 6b



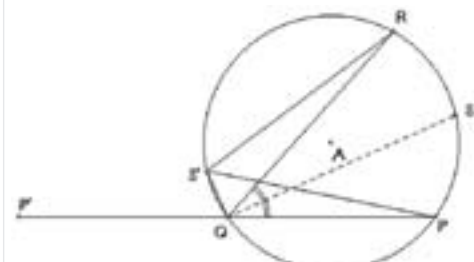
figuur 6c



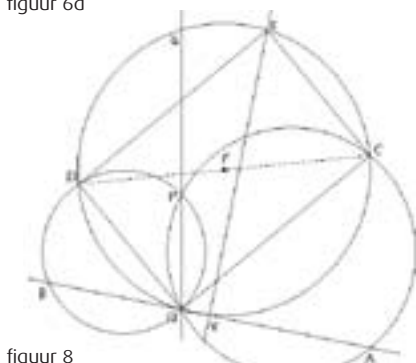
figuur 6d



figuur 7a



figuur 7b



figuur 8

We gaan er gemakshalve van uit dat V aan dezelfde kant ligt van Q als A (als V aan dezelfde kant ligt als B verloopt het bewijs analoog).

Uit lemma 1 volgt dat $GQ + QV = PQ + QA$.

Uit lemma 1 en 2 gecombineerd volgt bovendien dat $GQ - QV = PQ + QB$.

Hieruit leiden we af dat:

$$AV = QA - QV = GQ - PQ = QB + QV = VB$$

Dus is V het midden van het lijnstuk AB .

V valt dan samen met het punt M uit de opgave. Met de stelling van Thales volgt nu dat $\angle DVC$ recht is.

Noot

- [1] Andere bewijzen van de opgave (negen stuks) staan in PDF-formaat in een ZIP-bestand van 2,8 Mb op de NVvW-website:
www.nvvw.nl/media/downloads/najaar2011.zip

Over de auteurs

Sjoerd Zondervan was docent wiskunde aan het Bornego College te Heerenveen.
 Jan van der Maas is docent wiskunde aan het Jac.P. Thijsse College te Castricum.
 Henk Visser, oud-docent wiskunde, was ook verbonden aan de universiteiten van Maastricht, Tilburg en Rotterdam.
 Just Bent is docent wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium te Haarlem.
 Floor van Lamoen is docent wiskunde aan het Ostrea Lyceum te Goes.
 Agnes Verweij was docent wiskunde en

didactiek aan de Technische Universiteit Delft.

Aad Goddijn is verbonden aan het Freudenthal Instituut te Utrecht.

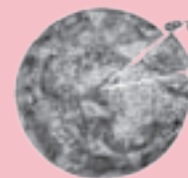
Ton Hengeveld is docent wiskunde aan het Murmelliusgymnasium te Alkmaar.
 Dick Klingens was docent wiskunde aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.

Quintijn Puite is als lerarenopleider verbonden aan de Hogeschool Utrecht (Instituut Archimedes) en voor de Wiskunde Olympiade verbonden aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Merlijn Staps nam afgelopen zomer namens Nederland deel aan de IMO en studeert nu wiskunde in Utrecht.

Ton Lecluse (e-mailadres: alecluse@casema.nl) is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.

Differentialen en Diepvriespizza's



[Dorien Lugt]

[Red.] Heeft u enig idee van het wiskundestudentenleven van tegenwoordig? Is wiskunde studeren nog was het was? Dorien Lugt is sinds augustus 2009 wiskundestudent aan de TU Delft en schrijft voor *Euclides* over haar belevenissen en observaties vanuit collegezaal en studentenhuus.

Huiswerkcijfers en deeltentamens

Mijn natuurkundeleraar zei ooit: 'Natuurkunde is net als seks, je kunt erover praten en naar kijken, maar je leert het pas echt door het te doen.' Wij waren als veertienjarige enigszins geschokt, omdat hij als een van de weinigen door leek te hebben dat je zo'n opmerking prima kunt maken tegen scholieren uit de tweede. Of misschien was hij een van de weinigen die dat accepteerde. In ieder geval had hij met zijn opmerking gelijk. Het is iets dat iedereen weet, maar waar veel scholieren en studenten nog wel eens onderuit hopen te komen. Natuurkunde (en wiskunde) leer je voornamelijk door er veel mee te oefenen.

In de onderbouw van de middelbare school werd er terecht vanuit gegaan dat leerlingen dat niet uit zichzelf deden. Met huiswerk en strafmaatregelen werd je gedwongen iedere week netjes je sommen te maken. Voor zover ik weet zijn de bruggers van nu niet anders en gaat dat nog steeds zo. Vanaf de vierde klas moesten we worden voorbereid op de universiteit en zelfstandig leren studeren. Sommen maken was je eigen verantwoordelijkheid en de toets was het enige toetsmoment. Volledig zelfstandig en verantwoordelijk verliet ik de middelbare school. Voorbereid op een universitaire opleiding waar je aan je lot, en vooral zelfstandigheid, zou worden overgelaten.

Daar bleek niet geheel het geval. Inmiddels in het laatste jaar van mijn bachelor word ik nog steeds netjes bij de hand gehouden. Al onze vakken duren een half jaar. Nooit naar college komen en dan met twee dagen voorbereiding een tentamen halen is maar voor weinig studenten weggelegd. Wel zijn er veel studenten die denken dat ze tot die weinigen behoren. Om hen voor zichzelf te

beschermen geldt bij vrijwel ieder vak een bonusregeling, waarmee soms tot wel 50% van je eindcijfer al bepaald wordt door de cijfers voor wekelijkse huiswerkopgaven en deeltentamens. Bij enkele vakken zijn die opgaven zelfs verplicht.

Het afgelopen semester heb ik een minor gevolgd. Een minor is een half jaar in de bachelor waarbij je de ruimte krijgt om een verbredend of verdiepend vakkenpakket samen te stellen. Dit mag binnen maar ook buiten je opleiding zijn. Ik heb een minor financiële wiskunde gevolgd. Deze minor wordt aangeboden door de opleiding wiskunde, maar studenten van bijna iedere studierichting in Delft zijn welkom. Omdat het voor mensen met een minder wiskundige achtergrond een behoorlijk pittig vakkenpakket is, willen ze de kans van slagen voor iedereen zo groot mogelijk maken. Dat deden ze niet alleen door de huiswerkregelingen voor ieder vak verplicht te maken, maar ook door de eis dat de huiswerkregeling alleen geldt in het geval dat het tentamencijfer minstens een vijf bedraagt, af te schaffen.

Doordat ik de wekelijkse huiswerkopgaven goed had gemaakt, hoefde ik voor geen enkel vak hoger dan een drie te scoren op het tentamen. Maar er waren mensen die het tentamen in het geheel niet hadden voorbereid omdat ze met een 1 voor het tentamen gemiddeld op een 6 uit zouden komen. Toch vreemd dat een vak te halen valt met een onvoldoende voor het tentamen. Een onvoldoende voor een tentamen betekent toch onvoldoende beheersing van de stof?

Zolang een voldoende voor het tentamen vereist blijft, vind ik het lastig om te zeggen of dit systeem nou goed of slecht is. Het doel, namelijk dat studenten de stof beheersen, wordt immers bereikt. Maar wel op een schoolse manier. Is het zonde van de tijd die

mijn middelbare school docenten hebben gestoken in het creëren van zelfstandige studenten?

Ach, wie weet komt dat later nog eens van pas.

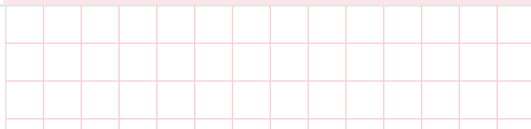
Erratum Euclides 87(4)

In het artikel van Gerard Koolstra in het februari-nummer, *Delen van veeltermen...*, staat op pag. 142 in de tekst in de rechter kolom op regel 17 van onder:

$$x^2 - 12x - 4$$

Dit moet natuurlijk zijn:

$$x^2 - 12x - \frac{4}{x}$$



Het WwF steunde een school in Kenia

[Juliëtte Feitsma]

In 2010 heeft het Wereldwiskunde Fonds (WwF) een bedrag van € 1200,00 aan een highschool in Ngong in Kenia beschikbaar gesteld voor het aanschaffen van wiskundeboeken.



Project Kenia – Ngong De Ngong Huruma Primary School

Huruma MEVA steunt projecten in Afrika die ten goede komen aan (wees)kinderen. Deze kinderen hebben vaak weinig kans op een goed bestaan. Door hun de mogelijkheid te geven gebruik te maken van huisvesting, voedsel, onderwijs en medische verzorging kunnen de kinderen zich ontwikkelen. Hierdoor krijgen ze kansen in de samenleving. Kans op een beter bestaan.

De Stichting Huruma richt zich onder meer op educatie: schoolgeld en alle bijbehorende schoolbenodigdheden (zoals wiskundeboeken), plus projecten die bijdragen aan de verbetering van de kwaliteit van het onderwijs. Huruma betekent 'genade' in het Swahili. De letters MEVA staan voor Met Elkaar Voor Afrika. We kunnen samen – mensen in Nederland en in Afrika – de kinderen in nood helpen.

Educatie

De toekomstkansen van kinderen in Kenia worden vergroot door educatie. Met een diploma hebben ze meer kans op een baan. Van het inkomen dat ze daardoor krijgen, kunnen ze zichzelf en hun gezin onderhouden. Naast kennis vinden we het ook belangrijk dat kinderen leren hoe ze zich staande kunnen houden in een land als Kenia, met veel drugs, criminaliteit, misbruik en financiële problemen.

Sponsoring high school kinderen

Jongeren in kindertehuizen die de *primary school* hebben afgemaakt, worden door sponsors van Huruma MEVA financieel ondersteund om naar de *high school* te kunnen. Ook kinderen uit de sloppenwijken en kinderen die uit tehuizen komen en op straat leven krijgen – mits ze erg gemotiveerd zijn om te leren voor een betere toekomst – de kans om naar de high school te gaan. Van de sponsorinkomsten van dit high school project betaalt Huruma MEVA voor de betreffende tiener het schoolgeld, een schooluniform, de vervoerskosten, het dagelijks onderhoud en een beetje zakgeld. Dit zakgeld is bedoeld voor zaken als extra schoolactiviteiten en kleding. Op deze manier leren de kinderen op een goede manier met geld om te gaan. Ook probeert Huruma MEVA door coaching en workshops deze kinderen te leren goede keuzes te maken en hun eigen verantwoordelijkheid te nemen. Ze worden in principe gesponsord voor de periode dat zij op de high school zitten. De high school kan vergeleken worden met middelbaar onderwijs in Nederland, alleen zitten de kinderen er intern. Ze wonen tijdens de schoolperiode op school. In de vakanties zijn ze in het kindertehuis of bij hun familie (als ze die hebben) of bij kennissen. Leerlingen die zeer goede resultaten behalen op de high school, komen in aanmerking voor een beurs om aan de universiteit te studeren.

Voor de leerlingen aan de high school in Ngong heeft het Wereldwiskunde Fonds een bedrag van ruim €1200,00 beschikbaar gesteld om wiskundeboeken aan te schaffen. De boeken blijven het eigendom van de school.

Hiermee hopen we bij te dragen aan de ontwikkeling van kinderen in een land waar de armoede een belemmering is om te studeren. De school is goedgekeurd door

het ministerie van Educatie en geregistreerd bij het department. Huruma Meva heeft samen met een niet-gouvernementele organisatie toezicht op het effectief maken van de gelden.

Info

Website Huruma MEVA:

<http://hurumameva.nl>

Website Huruma Children's Home &

School: www.hcngong.org/about-us/our-school

Het WwF, sinds 1993 een werkgroep van de NVvW, ondersteunt activiteiten in derdewereldlanden gericht op het wiskundeonderwijs in middelbare scholen. Veelal betreft het de aanschaf van leermaterialen, of het ondersteunen van de professionalisering van leraren. Het fonds krijgt zijn middelen door bijdragen van de leden van de NVvW en door de verkoop van 'oude' wiskundeboeken.

Zie ook de website van het WwF (www.nvvw.nl/page.php?id=1813).

Contactpersoon WwF in Nederland:

Juliëtte Feitsma

E-mailadres: juliettefeitsma@kpnplanet.nl

BOEKBESPREKING / ONTWIKKELEN MET KETTINGBREUKEN

[Ionica Smeets]



Auteurs: Martin Kindt, Piet Lemmens
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht
 (2011) – Zebra 33
ISBN: 978-90-5041-125-7
Prijs: € 10,00 (in de boekhandel),
 64 pagina's (paperback)
 Voor NVvW-leden geldt op
 bijeenkomsten een gereduceerde prijs.

Zoek de schoonheid van de kettingbreuk

Het nieuwste Zebra-boekje gaat over kettingbreuken, oftewel breuken in breuken in breuken. Martin Kindt en Piet Lemmens laten zien hoe je deze breuken vindt en waarvoor je ze allemaal kunt gebruiken. *Ontwikkelen met kettingbreuken* is een mooi boekje, maar is het ook geschikt voor scholieren?

Kettingbreuken zijn niet makkelijk om over te schrijven. Zelf promoveerde ik erop, maar ik heb me nooit gewaagd aan een populair artikel over dit onderwerp. Hoe mooi kettingbreuken ook zijn, het kost wat tijd om de elegantie ervan te leren waarderen.

De auteurs beginnen hun boek dan ook met een ander soort breuken: de stambreuken van de Egyptenaren, oftewel breuken met teller 1. De eerste opgave is om te laten zien dat je 8 broden onder 10 arbeiders kunt verdelen door iedere arbeider drie stukken te geven van $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, en $\frac{1}{20}$ brood.

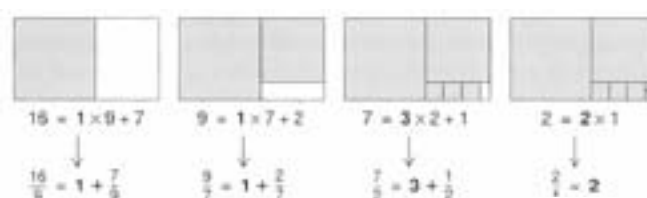
Daarna volgen breukbenaderingen van pi, waarbij de kettingbreuken gegeven worden zonder ze af te leiden. Zo zien leerlingen zonder al te veel gedoe hoe goed

de benaderingen van kettingbreuken zijn. Daarna leggen Kindt en Lemmens uit hoe je kettingbreuken kunt maken met de grafische rekenmachine. Ze beginnen met rationale getallen, waarbij je altijd een eindige kettingbreuk krijgt. In het volgende hoofdstuk geven ze een andere methode om kettingbreuken te maken: door rechthoeken op te vullen met steeds kleinere vierkanten (*zie figuur 1*). Daarmee kunnen ze elegant overstappen naar oneindige kettingbreuken. Verder volgen een aardig stukje over Fibonacci en de gulden snede, meer technische hoofdstukken over de gebroken lineaire functie en convergenten, toepassingen bij het berekenen van schrikkeljaren en tenslotte de vergelijking van Pell.

Dat laatste hoofdstuk begint met een leuke puzzel over het leger van koning Harold. Zijn manschappen stonden in dertien vierkanten van gelijke grootte. Toen de koning zelf kwam, vormde het leger één groot vierkant met de koning aan de top (*zie figuur 2*). Rara, hoeveel soldaten had koning Harold? Dit komt neer op het zoeken naar oplossingen van de vergelijking $x^2 - 13y^2 = 1$. En dat doe je dus met kettingbreuken.

Ontwikkelen met kettingbreuken is goed geschreven en de opgaven zijn netjes opgebouwd. Wel is de aanpak soms erg algoritmisch en kan de lezer allerlei procedures domweg nadoen zonder echt te begrijpen wat er gebeurt.

De grote vraag is natuurlijk of dit boekje leerlingen op het vwo aanspreekt. Ik vrees dat ik als zeventienjarige dit boekje niet voor mijn plezier naast de gewone stof had doorgewerkt.



figuur 1 Uit hoofdstuk 4 (pag. 12)

Voor mij zou het alleen gewerkt hebben als een enthousiaste leraar me eerst voor het bord iets had laten zien van de speelse manier waarop je met kettingbreuken kunt werken. Mijn advies is dan ook om leerlingen een klein stukje op weg te helpen, bijvoorbeeld door samen kettingbreuken af te leiden met rechthoeken. Degenen die dat leuk vinden, kunnen aan de slag met *Ontwikkelen met kettingbreuken*.

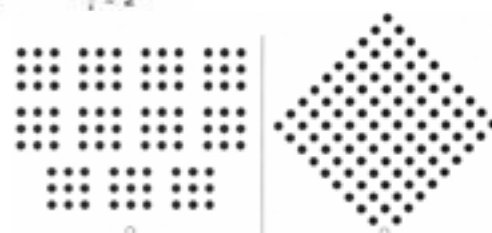
Over de recensent

Ionica Smeets promoveerde in 2010 op een proefschrift over kettingbreuken en werkt nu als wetenschapsjournalist voor o.a. *de Volkskrant*. Daarnaast vormt ze samen met Jeanine Daems de 'Wiskundemeisjes'. Hun boek *Ik was altijd heel slecht in wiskunde* verscheen eind 2011.

E-mailadres: ionica.smeets@gmail.com

Info [Red.]

Van de achterkant – Rekenen met breuken blijkt al eeuwenlang handig in allerlei alledaagse toepassingen en je leert het hoe dan ook al op de basisschool. Het wordt pas echt fascinerend als je breuken in breuken in breuken...gaat onderzoeken, de zogenaamde kettingbreuken. Daarmee kun je getallen als $\sqrt{2}$, pi en e goed benaderen, maar ook bij schrikkeljaren, rechthoeken en de Gulden Snede komen deze voortgezette breuken om de hoek kijken. Dit boekje over kettingbreuken biedt een blik op elementaire, maar niet alledaagse wiskunde die nog steeds onderwerp is van professioneel onderzoek. Natuurlijk bevat deze Zebra veel opgaven om je eigen kettingbreukvaardigheid te ontwikkelen, en ook twee grotere onderzoeksopdrachten.



figuur 2 Uit hoofdstuk 10 (pag. 40)

BOEKBESPREKING /

IK WAS ALTIJD HEEL SLECHT IN WISKUNDE

[Ger Limpens]



Ondertitel: Reken maar op de wiskundemeisjes

Auteurs: Jeanine Daems, Ionica Smeets

Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam (2011)

ISBN: 978-90-5712-336-8

Prijs: € 19,95 (206 pagina's; paperback)

Schoolbibliotheek

Wat een ontzettend leuk boek. Om maar met de deur in huis te vallen. Er zijn meer boeken die wiskunde – voor velen toch een ontoegankelijke discipline met nogal wat traumatische schoolherinneringen – wat dichterbij proberen te halen, maar de wijze waarop de wiskundemeisjes dat in *Ik was altijd heel slecht in wiskunde* doen, is behoorlijk toegankelijk en zorgt ervoor dat ik een pleidooi voor het opnemen van dit boek in de schoolwiskundebibliotheek wil houden. Bij dezen dus: het lijkt me heel verstandig als een docent wiskunde dit boek achter de hand houdt om deze of gene leerling die geïnteresseerd is (of juist niet) in aspecten van het vak die buiten het directe schoolcurriculum vallen, de mogelijkheid te bieden eens wat onvermoede doorkijkjes te kunnen plegen. En ook voor die docent zelf valt er ongetwijfeld nog wel wat te halen. Het zijn lang niet alleen de 'usual suspects' die hier de revue passeren, maar ook heel wat, voor mij althans, nieuwe en aardige invalshoeken die door Ionica Smeets en Jeanine Daems gehanteerd worden. De wiskundemeisjes wisselen wiskunde anekdotiek af met puzzels, bewijzen of aanzetten van bewijzen en aanstekelijke

recensies over wiskundeboeken/romans. Om maar eens een niet uitputtende opsomming te geven van de diversiteit aan invalshoeken die deze bundel kenmerkt. Een deel van de stukjes is al eerder gepubliceerd in, bijvoorbeeld, *Pythagoras* en *de Volkskrant*. Maar dat geeft in mijn ogen in het geheel niet. Ik ben al jaren geleden gestopt met het uitknippen en opsparen van dergelijke publicaties en een bundel als deze is daarmee een welkome aanvulling van mijn eigen bibliotheekje.

Acht hoofdstukken

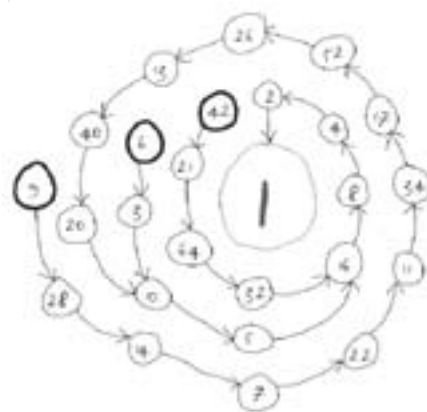
Het boek bevat een achttal hoofdstukken met titels als 'Getallenreeksen en behangpatronen' en 'Waarom je nooit de lotto wilt winnen'. Elk hoofdstuk behandelt aspecten rond de in de titel genoemde thematiek aan de hand van stukjes van allerhande opzet. Bij het zojuist genoemde hoofdstuk over kansen bijvoorbeeld treffen we onder andere een column over neerslagkansen, enkele min of meer kansgerelateerde leestips, een stukje biografie over Jan de Witt, een kijktip over een documentaire over Paul Erdős en een verhandeling over de Quetelet-index aan. Toegegeven, bij sommige hoofdstukken is de plaatsing van een bepaald stukje wat arbitrair, een enkel stukje in hoofdstuk X had ook heel goed geplaatst kunnen worden in hoofdstuk Y in mijn beleving, maar dat is klein bier en raakt niet de essentie van deze bundel.

Een ander aspect dat deel uitmaakt van de charme van deze bundel, vormen de illustraties (zie *figuur 1*). Er wordt gebruik gemaakt van een veelheid van plaatjes en dat maakt dit boek extra aantrekkelijk. Vermeldenswaardig is in mijn ogen trouwens dat de tekeningen die bedoeld zijn om wiskundige aspecten te verduidelijken juist, in tegenstelling tot gebruikelijk vandaag de dag, met opzet wat onbeholpen en niet 'strak' zijn opgezet. De suggestie die van deze plaatjes – op een enkel plaatje na – uitgaat, is alsof ze kladjes zijn van de hand van een wiskundige die bezig is zijn gedachten te vormen, en dat is een heel aardige suggestie die de materie erg verlevendigt.

Laagdrempelig

Het aardige van deze veelvormige aanpak is dat een en ander heel vaak behoorlijk laagdrempelig is en je al heel snel de indruk krijgt ook zelf iets te kunnen vinden van allerlei in het boek aangeroerde aspecten.

Dat heeft natuurlijk ook te maken met het feit dat de wiskundemeisjes in hun bewijzen lang niet altijd 'tot het gaatje' willen gaan: het spijkerhard dichttimmeren van wiskundige redeneringen zou de leesbaarheid niet altijd ten goede komen. De keerzijde is wel dat je vaak het gevoel krijgt dat je vragen kunt stellen bij de gehanteerde aanpak of een gat kunt schieten in de redenering. Bekijk bijvoorbeeld in dat kader de redenering die gebruikt wordt (op pagina 24) om te verklaren waarom treinen veel minder last hebben van het verschijnsel dat zich bij trams en bussen manifesteert, namelijk dat ze vaak direct na elkaar verschijnen ondanks een rijtjesschema dat veel grotere tussenpozen aangeeft. Volgens de wiskundemeisjes is dat waarschijnlijk een gevolg van het feit dat er bij treinen meer tijd gepland is voor het instappen of dat er minder haltes zijn dan wel de dienstregeling bij treinen veel sneller ontregeld is. Volgens mij is het veeleer een gevolg van het feit dat NS en aanverwanten veel meer rigide uitgaan van het 'tijd is tijd-idee' en te laat vertrekken vanwege een te groot reizigersaanbod nagenoeg niet voorkomt in het treinwoordenboek.

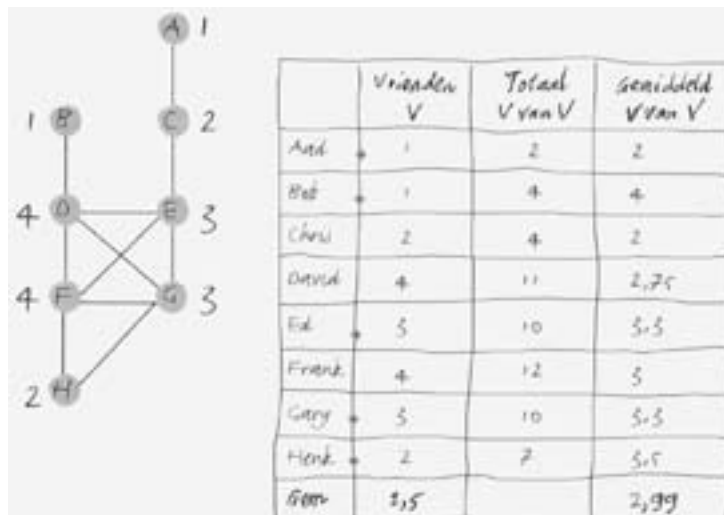


figuur 1 Vermoeden van Collatz (pp. 19-20)

Een enkele kanttekening

Een andere kanttekening zou ik willen plaatsen bij de gemiste kans om hier en daar gebruik te maken van media als YouTube. De wiskundemeisjes verwijzen weliswaar naar diverse YouTube-fragmenten als het gaat om, bijvoorbeeld, de beroemde documentaire rond Andrew Wiles of de al eerder genoemde televisieproductie

gewijd aan Paul Erdős, maar ik zou ervoor willen pleiten om bij zaken als de Doe-het-zelf-fles-van-Klein (pagina 72 en verder) niet zozeer een wat onduidelijke fotostrip te plaatsen maar naar een (zelf te vervaardigen) klein filmpje op YouTube te verwijzen. Ook de topologisch interessante sinaasappelschilprocedure (beginnend op pagina 165) verdient een dergelijke dynamische aanpak in mijn beleving. En nu ik toch bezig ben om aan te tonen dat ik het hele boekje grondig doorgelezen heb, kan ik het niet laten te verwijzen naar de in mijn ogen onvolledige beantwoording van de puzzel 'Hommes op een eiland', een variant op het raadsel van de kabouters met groene en rode haren (althans, zo leerde ik de puzzel ooit kennen tijdens een 1e-jaars-college econometrie). Bij het antwoord achterin ontbreekt de collectieve zelfmoord van alle bruinogige een dag na de gezamenlijke blauwogige suïcide, want ook de bruinogige zijn dan ongewild achter hun ware identiteit gekomen... En dan is er nog het foutje in de afbeelding op pagina 90 (zie *figuur 2*): de graaf, de vermelde aantallen vrienden en de tabel stroken niet met elkaar. Ik vermoed dat de verbinding EG niet getekend had moeten worden: dat lijkt de 'goedkoopste' correctie om de zaak kloppend te maken. Maar goed, dit alles is volslagen bijzaak, sterker nog, het maakte het lezen van het boekje alleen maar interessanter. Mijn exemplaar staat op dit moment vol met dergelijke kanttekeningen en dat is misschien wel het grootste compliment dat je de auteurs kunt maken.



figuur 2 Old-Boys-netwerk (pp. 89-91).

AANKONDIGING / CONFERENTIE WISKUNDE 2.0 – WAT WILLEN WE MET WISKUNDE OP HET HBO?

De Landelijke werkgroep HBO-wiskunde, een onderdeel van de NVvW, organiseert op 19 april a.s. een conferentie onder de in de kop staande titel.

Met de conferentie willen we aandacht geven aan vragen als 'Welke rol spelen wiskundige vaardigheden en wiskundige denkactiviteiten in de beroepspraktijk van H(B)O ingenieurs?', 'Hoe kunnen we hiermee de doorlopende leerlijnen van instroom tot uitstroom naar het beroepenveld verbeteren?' en 'Welk wiskundeonderwijs is daarvoor van belang in het vo, mbo en h(b)o?'. Hiermee sluiten we aan bij de discussie over de vraag, hoe we de huidige hoogwaardige kennis-economie in Nederland kunnen vasthouden. Onderdeel daarvan is het dreigende tekort aan 'kennisswerkers', dus de mensen die voor de daadwerkelijke innovatie moeten zorgen. Onze hypothese is dat er een verband bestaat tussen deze dreigende ontwikkeling en de kwaliteit en de kwantiteit van het wiskundeonderwijs in het secundair en tertiair onderwijs.

Plaats en tijd

De conferentie zal worden gehouden op **donderdagmiddag 19 april 2012** in het gebouw van de Hogeschool Domstad in Utrecht.

Tijd: 12:00 – 17:30 uur

Globaal programma

Na een lunch worden twee plenaire presentaties gehouden over de betekenis van wiskunde voor de hbo-beroepspraktijk. Roel van Asselt, oud-lector Saxion Hogescholen, zal verslag doen van een veldonderzoek naar de betekenis van wiskunde in het beroepsveld. De tweede spreker is Wil Schilders, hoogleraar wiskunde en informatica aan de TUE en directeur van Platform Wiskunde Nederland. Hij zal zijn visie geven op het probleem, aansluitend op het verslag van het veldonderzoek en vanuit zijn ervaring bij NXP.

Daarna volgen enkele parallele workshops, waarin specifieke beroepspraktijken centraal staan en de leerdoelen die daaruit volgen. Het gaat daarbij niet alleen om reken- en formulevaardigheden, maar ook om vaardigheden en denkactiviteiten als kritisch denken, methodisch probleemoplossen, algebraïseren enz.

In het afsluitende plenaire deel zullen we proberen te komen tot algemene conclusies.

Houdt u dus de middag van de 19e april vrij!

Info en inschrijven

Voor uitgebreidere informatie en inschrijving kunt u terecht op de website van de NVvW:

<http://www.nvvw.nl/page.php?id=8846>

Over de recensent

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito in Arnhem.

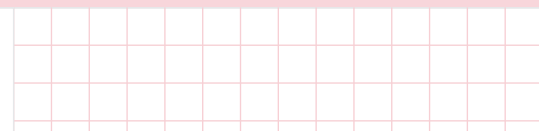
E-mailadres: ger.limpens@gmail.com

Info [Red.]

Van de achterkast – Hoe kun je het getal pi benaderen met tandenstokers? Hoe rekenden de Babyloniërs? Zijn er wel normale getallen? Hoeveel is een triljoen eigenlijk? Hoe bereken je de ware liefde? Wat is het vermoeden van Kepler? En wat is binair rekenen eigenlijk?

Ook voor iedereen die altijd heel slecht in wiskunde was, is er nu dit boek van de wiskundemeisjes. Over alles wat leuk en interessant is aan wiskunde, voor mensen met of zonder wiskundeknobbel.

Lees en leer alles over veelvlakken, getallen, kansrekenen, codes en grafen, logica, meetkunde, getaltheorie en rekenkunde. Vol kleurige illustraties en met een heleboel tips, knutselprojecten, puzzels en 'vallende sterren'.



In de klas sneeuwen ze helaas vaak onder: de leerlingen die het leuk vinden om met wiskunde bezig te zijn. In de zomervakantie is er voor hen de mogelijkheid om op wiskundekamp te gaan. In Lunteren komen zij een midweek samen om zich te verdiepen in onderwerpen, zoals logica, fractals, priemgetallen, grafen en nog veel meer.

Afgelopen zomer waren er maar liefst 172 deelnemers mee op Vierkant Zomerkamp. Zij zijn ingedeeld op leeftijd in 3 kampen:

- kamp A voor kinderen van groep 6, 7 en 8;
- kamp B voor klas 1, 2 en 3 (vo) en
- kamp C voor klas 4, 5 en 6 (vo).

De kampen vinden plaats in de eerste drie weken van augustus. Op iedere drie deelnemers is er een begeleider. De groep begeleiders bestaat uit vrijwilligers die veelal wiskunde studeren of wiskunde (of een andere bèta-studie) gestudeerd hebben. Iedere dag krijgen de deelnemers een onderzoeksprogramma waarin een onderwerp wordt uitgediept. Die zijn geschreven door de begeleiders; gedurende het jaar wordt er hard gewerkt aan het schrijven van interessante en uitdagende programma's. Daarnaast zijn er ook een stel korte problemen om aan te werken, en zijn er weekproblemen waarin deelnemers gevraagd wordt naar een strategie, een optimalisatie of om creativiteit.

Natuurlijk is er tussendoor ook tijd om te ontspannen. Het zwembad, bosspel, casino-avond en speurtocht zijn onderdelen die natuurlijk bij een kamp horen. Al hebben ze natuurlijk vaak wel een wiskundig tintje.



De deelnemers die op kamp komen, vinden het leuk om met wiskunde bezig te zijn. Ze houden ervan om aan moeilijke vragen te puzzelen, om niet meteen de oplossing te zien maar zich ergens in vast te bijten. Hun klasgenoten begrijpen deze interesse lang niet altijd; ze worden nogal eens uitgemaakt voor 'nerd' of 'stuudje'. Sommigen durven in de klas ook niet te vertellen dat ze op wiskundekamp gaan. Jammer, want waarom mag je niet gewoon zijn zoals je bent? Op kamp komen ze anderen tegen met dezelfde interesse als zij, en dat is vaak een verademing voor hen.

Vlak na het kamp vragen ouders wat de data van de kampen van volgend jaar zijn. Sommige deelnemers willen namelijk zo graag terug dat de vakantie van het gezin er omheen gepland moet worden.

Info

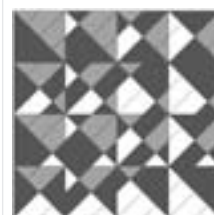
Meer informatie over de kampen is te vinden op www.vierkantvoorwiskunde.nl.

Twée voorbeelden van opdrachten tijdens kamp

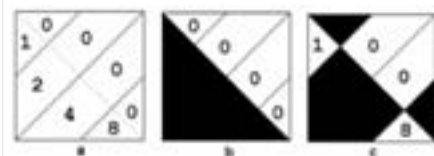
Voorbeeld 1. Een weekprobleem (optimalisatie, kamp C)

Geef een reeks getallen weer met verschillende kleuren – Voor dit probleem is het de bedoeling dat je een reeks getallen neemt die iets met elkaar te maken hebben, en deze reeks op een creatieve manier met verschillende kleuren weergeeft. Om het iets inzichtelijker te maken, geven we een voorbeeld.

foto 1 Maak een stapel van de vier kubussen zodat aan iedere kant vier verschillende kleuren te zien zijn. Met behulp van grafen wordt dit probleem tijdens een workshop opgelost.



figuur 1



figuur 2

Tellen in beeld – In **figuur 1** wordt van 0 tot en met 15 geteld. Voor deze manier van tellen is het binaire stelsel gebruikt, met in elk hokje één van die getallen. Een hokje ziet eruit zoals in **figuur 2a**. Je kleurt telkens de helft van iedere diagonaal in, zoals bijvoorbeeld in **figuur 2b en 2c**, zodat het getal daar niet meer zichtbaar is. Als we de getallen in de andere helft dan optellen, krijg je het getal dat dit hokje uitbeeldt (in **figuur 2b** is dat 0, in **figuur 2c** is dat 9). Het hokje beeldt zo een getal in het binaire stelsel uit van 0000 tot en met 1111, oftewel van 0 tot en met 15.

Als je op deze manier de getallen van 0 tot 15 tekent en ze naast en onder elkaar zet, krijg je het plaatje van **figuur 1**. De kleuring ontstaat door het inkleuren met een donkere kleur te doen en daarna alle zichtbare 'nullen' met een lichtere kleur.

Voorbeeld 2 . Een kort probleem (kamp B)

Bij het ontbijt blijkt dat alle melk op is. De kampleiding ondervraagt 4 verdachte begeleiders, die elk het volgende zeggen:

- Irene: Het was Hildo.
- Hildo: Het was Nick.
- Lesley: Ik was het niet.
- Nick: Hildo liegt als hij zegt dat ik het was.

Slechts één van hen heeft gelijk. Wie heeft er dus de melk opgemaakt?



MEDEDELING / EXAMENBESPREKINGEN 2012

Er worden dit jaar geen regionale examenbesprekingen gehouden voor vmbo-TGK, havo-B en vwo-B. Wel zijn er centrale besprekingen:

- op maandag 21 mei voor vwo-B;
- op woensdag 23 mei voor vmbo-TGB;
- op vrijdag 25 mei voor havo-B.

Wilt u meepraten op de centrale bespreking van vmbo-TGK en heeft u dit niet eerder gedaan, neem dan per e-mail contact op met Conny Gaykema (e-mailadres: c.gaykema@orange.nl).

Voor meepraten bij vwo-B of havo-B dient u contact op te nemen met Grada Fokkens (e-mailadres: gfokkens@onc.nl).

Het verslag van de centrale besprekingen kunt u lezen op de NVvW-website (www.nvvw.nl): voor vwo-B vanaf 22 mei, voor vmbo-TGK vanaf 24 mei en voor havo-B vanaf 26 mei.

Voor vwo-A/C en havo-A worden er wél regionale besprekingen georganiseerd. Het doorgaan van de besprekingen is echter afhankelijk van de beschikbaarheid van gespreksleiders.

Bent u niet benaderd, maar wilt u wel gespreksleider zijn van een bespreking van vwo-A/C of van havo-A, neem dan contact op met Grada Fokkens voor aanmelding en de benodigde informatie.

We streven ernaar besprekingen te houden in de volgende steden: Amersfoort, Amsterdam, Den Haag, Groningen, Nijmegen, Rotterdam en Zwolle.

De regionale besprekingen vinden plaats op de volgende dagen:

- van vwo-A/C op donderdag 24 mei van 15:30-18:00 uur;
- havo-A: op vrijdag 25 mei van 16:00-18:00 uur.

Wilt u een van deze besprekingen bezoeken, kijkt u dan in de loop van de maand april op de website van de vereniging om te zien of de bespreking waarnaar u toe wilt, doorgaat.

Ook voor deze examens geldt dat het verslag van de centrale bespreking op de website wordt gepubliceerd, en wel een dag ná de regionale bespreking.

Bericht voor de leden

WIJZIGING IN DE REGLING RECHTS- POSITIONELE HULP

Met ingang van 1 januari 2012 zijn de contractvoorwaarden voor rechtspositionele hulp veranderd.

Op het terrein van rechtspositionele hulp werkt de NVvW samen met het Rechtspositie-Adviesbureau te Culemborg. Samen met de vertegenwoordiger van dit bureau heeft het bestuur de gevraagde en geleverde diensten geëvalueerd en vastgesteld dat het aangaan van rechtszaken zelden of nooit voorkomt.

Om kosten te besparen heeft het bestuur besloten om deze dienst uit het contract met het bureau te halen en daar een eigen voorziening voor te maken.

Dit houdt in dat u nog altijd voor alle rechtspositionele vragen bij de helpdesk van het bureau terecht kunt. De contactgegevens vindt u op onze website en in het colofon van Euclides. Zij kunnen u helpen bij het oplossen van rechtspositionele problemen. Mocht dit een gang naar de rechter rechtvaardigen, dan zal het bureau hierover een positief advies aan het bestuur uitbrengen. Het bestuur geeft daarna opdracht aan het bureau om de zaak aanhangig te maken. De kosten die dit met zich meebrengt, zijn voor rekening van het bestuur tot een maximum van 1500 euro per geval.



FvOv

Elf onderwijsvakorganisaties, waaronder de NVvW, bundelen hun krachten onder een nieuwe naam: FvOv.

De Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP opereert vanaf 1 januari 2012 onder een nieuwe naam Federatie van Onderwijsvakorganisaties (FvOv). Elf vakorganisaties bundelen daarmee hun krachten in één slagvaardige organisatie. 'De FvOv vormt hiermee een unieke combinatie van vakinhoudelijke kennis en belangenbehartiging op het gebied van arbeidsvoorwaarden', aldus voorzitter Jilles Veenstra.



Jilles Veenstra, voorzitter FvOv

De FvOv behartigt uw belangen

De FvOv vertegenwoordigt onderwijspersoneel in alle onderwijssectoren. Wij behartigen uw belangen op zowel arbeidsvoorwaardelijk als vakinhoudelijk gebied. De FvOv onderhandelt over de cao's in de verschillende onderwijssectoren. Naast de collectieve belangenbehartiging bieden de vakorganisaties binnen de FvOv op toegankelijke wijze ondersteuning en rechtsbijstand bij zaken die betrekking hebben op uw onderwijsbaan. Uiteraard zijn alle aangesloten vakorganisaties bij uitstek dé vraagbaak voor vakinhoudelijke vragen, betrokken bij onderwijs- en curriculumontwikkeling en deskundig op het gebied van na- en bijscholing.



Samenwerken: meer invloed

Onderwijsbond FvOv vertegenwoordigt bijna 30.000 leden. De FvOv valt onder de CMHF, de Centrale van Middelbare en Hogere Functionarissen bij Overheid, Onderwijs, Bedrijven en Instellingen (met in totaal 57.000 leden). De CMHF zit voor ons in de Pensioenkamer en in het bestuur van ABP. Op haar beurt is de CMHF aangesloten bij de MHP, de vakcentrale voor middengroepen en hoger personeel. De MHP neemt deel aan de gesprekken tussen sociale partners in bijvoorbeeld de Sociaal-Economische Raad en de Stichting van de Arbeid over werkgelegenheid, pensioenen en sociale zekerheid.

In goed overleg zaken doen

Wij streven naar gelijkwaardige verhoudingen tussen werkgever en werknemer en hebben de kracht van het argument hoog in het vaandel staan. In principe proberen we conflicten te vermijden door in goed overleg zaken te doen. Zowel aan de overlegtafel (collectieve zaken) als bij individuele problemen. Uiteraard combineren wij de kracht van het argument indien nodig met daadkracht.

Overleg over uw arbeidsvoorwaarden

Cao-trajecten – De FvOv neemt deel aan het arbeidsvoorwaardenoverleg in de sectoren po, vo, mbo en hbo. Samen met

uw individuele arbeidsovereenkomst bepaalt de cao de voorwaarden waaronder u uw werk verricht.

Onderhandelingspartners – Samen met de overige onderwijsvakbonden onderhandelen we met:

- het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen en de PO-Raad over het primair onderwijs;
- de VO-raad over het voortgezet onderwijs;
- de MBO-Raad over de bve-sector;
- de HBO-raad over het hoger beroepsonderwijs.

Wanneer we met de andere partijen tot een akkoord zijn gekomen over een nieuwe cao, leggen we die als een onderhandelaarsakkoord voor aan u en de andere leden. Wanneer onze leden en die van de andere betrokken vakbonden hiermee instemmen, kan het onderhandelaarsakkoord worden omgezet in een definitief akkoord en vervolgens in een nieuwe cao.

Overleg bij uw werkgever – Naast het overleg over de sector-cao's voeren we ook lokaal overleg op basis van de cao met de verschillende onderwijsinstellingen afzonderlijk. Onderwerpen zijn dan onder andere: mogelijke afwijkingen van de cao, rechtspositionele consequenties van reorganisatie en fusie en sociale plannen. Onze onderhandelaars stellen leden die traceerbaar zijn bij deze werkgevers op de hoogte van het overleg en raadplegen hen over afspraken die ze willen maken met de werkgever.

Informatie

Meer informatie kan worden gevonden op de website van de FvOv (www.fvov.nl). De vertegenwoordiger van de NVvW bij de federatie is Dick Ottenbros (e-mailadres: dick.ottenbros@fvov.nl). Hij is in die functie sinds de jaarvergadering in 2011 de opvolger van Pim van Bommel.

Doordenker 87-5

Sam Loyd is één van de grootste producent van wiskundige puzzels. Ze verschenen in talloze boeken en tijdschriften en je komt ze nog voortdurend tegen. Ze zijn heel wisselend van aard, variërend van knip en plakwerk tot abstracte logische redeneringen.



Samuel Loyd (1841-1911) – bron: Wikipedia

Het aardige van het volgende vraagstuk is dat het een analogie heeft met de uitgangspunten van de speciale relativiteitstheorie van Einstein. Sam Loyd zal dit niet hebben geweten. Zou Einstein door de puzzel zijn geïnspireerd? Het is onwaarschijnlijk maar wel een mooie fantasie.

De boodschapper en het leger

Een leger is vijftig kilometer lang. Terwijl het leger met een constante snelheid voort marcheert, vertrekt er vanuit de achterhoede een boodschapper, die naar voren rijdt om een boodschap bij de voorhoede af te leveren. Daarna keert hij weer terug naar zijn positie in de achterhoede. Hij komt daar terug precies op het ogenblik dat het leger vijftig kilometer heeft afgelegd. Ga ervan uit dat de boodschapper met een constante snelheid heen en weer rijdt. Welke afstand legde de boodschapper af?



Inzenden

Oplossingen vóór 25 april a.s. op het blog van Rekenbeter.nl (of per e-mail naar info@rekenbeter.nl).

U kunt zich aanmelden op www.rekenbeter.nl als lezer van *Euclides*. U komt dan in een aparte groep terecht met een eigen klasement. Dagelijks ontvangt u een e-mailbericht met daarin een link naar de dagelijkse rekenopgaven. De prestaties van deze Euclides-rekenaars worden online in een apart klasement bijgehouden op basis van het percentage goed beantwoorde opgaven in combinatie met de snelheid waarin ze zijn opgelost.

De mooiste oplossing van Doordenker 87/3

Dit was de opgave:

Henk en Ingrid zijn broer en zus en zijn op dezelfde dag jarig.

Henk is ouder dan Ingrid.

Ze hebben elk een speciale 'verjaardagsspaarpot'.

Elk jaar krijgen ze in deze spaarpot een aantal euro's erbij dat gelijk is aan hun leeftijd.

En zo verandert alleen op hun verjaardag het bedrag in deze spaarpotten.

Als ze 18 zijn mogen ze de inhoud van de spaarpot hebben.

Gisteren waren ze jarig. Toen had Henk € 84,00 meer dan Ingrid.

Een paar jaar geleden was dat verschil nog € 49,00.

Hoe oud zijn Henk en Ingrid gisteren geworden?

Op de opgave kwamen zeven reacties binnen. Sommigen gaven alleen maar het juiste antwoord, anderen een raadselachtige oplossingsmethode die weliswaar het juiste antwoord opleverde. Opvallend is dat niemand heeft gekozen voor een algebraïsche oplossing of voor een oplossing met Excel. Bij dit soort opgaven zijn uiteraard alle middelen geoorloofd, al is het ene middel meer elegant dan het andere.

De snelste reactie kwam van Ptr.

'Het verschil in jaren moet oneven zijn, anders kom je niet op een oneven som (49). Beide getallen moeten door hetzelfde oneven getal deelbaar zijn. Het eerste getal dat daaraan voldoet is 7. Dat is de middelste van een reeks van 7. Dus: 4-5-6-7-8-9-10 ($= 3 \times 14 + 7 = 49$) en 9-10-11-12-13-14-15 ($= 3 \times 24 + 12 = 84$). Henk is dus 7 jaar ouder dan Ingrid. Hij is 15 geworden en Ingrid 8.

(Als je niet kunt slapen, is dit een goeie doordenker...!)

Gerhard Riphagen koos voor een frontale aanpak, passend bij de context van de opgave.

‘Oplossen met behulp van een paar vergelijkingen lukt vast wel (denk ik), maar de ambachtelijke methode heeft ook zo z’n charme.

De spaarpot van Henk bevat achtereenvolgens op zijn verjaardag de volgende bedragen:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153 en 171

(Het spaarvarken gaat maar 18 jaar mee, dus die bedragen noteren, dat is nog wel te doen.)

In de spaarpot van Ingrid komen dezelfde bedragen, alleen een paar jaar (2, 3, 5, 8 ?) later.

Als je binnen de reeks van Henk een paar stappen terugkijkt, komt er dan, zo kun je je afvragen, misschien een verschil van € 49 én van € 84 voor? Daarbij moet het aantal stappen terug in beide gevallen hetzelfde zijn, want het leeftijdsverschil blijft onderweg natuurlijk wel gelijk!

Meer mag ik niet zeggen van jan-zonder-achternaam, maar de oplossing komt zo wel dicht bij.’

Maar de meeste waardering gaat naar **Wobien Doyer** die de opgave oploste door slim te redeneren (helaas met een kleine misser aan het eind).

‘Een beetje redeneren zonder vergelijkingen, en zonder alles uit te schrijven kan ook.

Nadat Ingrid geboren is, neemt het verschil tussen de spaarpotten ieder jaar toe met hun leeftijdsverschil.

Omdat het verschil eerst 49 euro was en nu 84, moet het leeftijdsverschil oneven zijn.

Wat de kinderen in hun spaarpot hebben,

is altijd de helft van het product van hun leeftijd en hun leeftijd plus 1.

Als hun leeftijd oneven is, is dat een veelvoud van hun leeftijd.

Als Ingrid geboren wordt, is de leeftijd van Henk gelijk aan het leeftijdsverschil, en dus oneven.

Wat hij dan in zijn spaarpot heeft, is dus een veelvoud van het leeftijdsverschil.

Het verschil tussen de inhoud van hun spaarpotten is en blijft dus altijd een

veelvoud van het leeftijdsverschil en dus is het leeftijdsverschil een gemeenschappelijke deler van 49 en 84.

49 en 84 hebben twee gemeenschappelijke delers. Eén ervan levert een huidige leeftijd op waarop de ‘kinderen’ waarschijnlijk allang op hun verjaardag geen geld meer in hun spaarpot krijgen, de andere levert dezelfde oplossing op als de bijdragen van mijn voorgangers.’

Schaak en Gowinkel het Paard de meest complete denksportwinkel

- Boeken, spellen en software op het gebied van Go, Schaken en Bridge
- Vele andere denkspellen waaronder Shogi, Gipf, Set, Katamino
- Legpuzzels en breinbrekers
- Boeken over mathematische puzzels
- Gezelschapsspellen

Haarlemmerdijk 173
1013 KH Amsterdam
T (020) 624 11 71
F (020) 627 08 85
Paard@xs4all.nl
www.schaakengo.nl

geopend van 10.00 tot 17.30 uur, ma. vanaf 13.00 uur, do. tot 20.00 uur



**Examenbesprekingen**

Zie pag. 224 in dit nummer.

maandag 21 mei, Utrecht

Centrale bespreking examen vwo-B

woensdag 23 mei, Utrecht

Centrale bespreking examen vmbo-TGB

donderdag 24 mei

Regionale besprekingen examen vwo-A/C

vrijdag 25 mei

Centrale bespreking havo-B (Utrecht)

Regionale besprekingen examen havo-A

Voor overige internet-adressen zie:

www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:

www.nvww.nl/forum.html

Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook www.nvww.nl/page.php?id=7451 en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (dklingens@gmail.com). Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

jaargang 87

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	15 mei 2012	20 maa 2012
7	26 juni 2012	1 mei 2012

donderdag 29 maart, Zeist

Conferentie: Nationale Rekendag 2012
Organisatie Flsme (Rekenweb)

donderdag 12 april, Eindhoven

48e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en TU/e

woensdag 18 april, op de scholen

Grote Rekendag 2012 (De dierenwereld)
Organisatie Flsme (Rekenweb)

donderdag 19 april, Utrecht

Conferentie: Wiskunde 2.0
Organisatie LWHW (Werkgroep-HBO van de NVvW)
Zie pag. 222 in dit nummer.

donderdag 26 april, Utrecht

NVORWO: jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

zaterdag 12 mei, Utrecht

Symposium XVIII: Vergeten vakken
Organisatie HKRWO
Zie pag. 206 in dit nummer.

Examens, op de scholen

woensdag 16 mei: Examen vwo-B
maandag 21 mei: Examen vmbo-KB en examen vmbo-GL/TL
dinsdag 22 mei: Examen vwo-A/C
woensdag 23 mei: Examen havo-A
donderdag 24 mei: Examen vmbo-BB en examen havo-B
maandag 18 juni, en daarna: herexamens
Organisatie CvE

vrijdag 8 juni

Wiskunde D-dag
Organisatie cTWO

za. 30 juni, zo. 1 juli, Blankenberge (B)

16e Congres Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars
Organisatie VVWL

ma 30 juli t/m vr 3 aug (kamp C)**ma 6 t/m vr 10 aug (kamp A)****ma 13 t/m vr 17 aug (kamp B)**

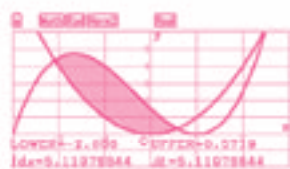
Zomerkampen 2012 in Lunteren
Organisatie Stichting Vierkant voor Wiskunde
Zie pag. 223 in dit nummer.

CASIO fx-CG20: Kleurrijke wiskunde!

De fx-CG20 van CASIO is de eerste van een nieuwe generatie grafische rekenmachines, die dankzij zijn hogeresolutie LCD-kleurenscherm en uitgebreide functionaliteit de ideale studiegenoot is voor iedere scholier of wiskundestudent.

De fx-CG20 van CASIO biedt als eerste ter wereld de functie 'Picture Plot' waarmee de gebruiker grafieken en curven over andere beelden heen kan plotten, zoals een parabool over de waterstralen van een fontein. Studenten kunnen experimenteren met het creëren van hun eigen grafieken over foto's heen. Vervolgens leren ze van de functies van deze zelfgemaakte grafieken. Grafieken die in kleur bovendien een stuk gemakkelijker te overzien zijn. Het hogeresolutie LCD-kleurenscherm toont alle beeldmateriaal in 65.000 kleuren en biedt daarmee dezelfde weergave als in een studieboek. De fx-CG20 introduceert een geheel nieuwe en meer intuïtieve manier van wiskunde leren.

Bekijk het in kleur op
www.casio-educatie.nl



3 jaar
garantie

CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf!

Op de Natural Textbook Display worden o.a. breuken en wortels weergegeven als in het leerboek. De fx-82ES Plus is ook geschikt voor het gebruik van tabellen.



CASIO fx-9860GII

Rekengemak:
de grafische rekenmachine fx-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB Flash-ROM-geheugen.



CASIO fx-82ES PLUS

Geniale oplossing:
de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine fx-82ES Plus met natuurlijke invoer en uitvoerfunctie, en met puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

Bestel nu uw speciaal geprijsde docentenexemplaar van de
Casio rekenmachines via e-mail educatie@casio.nl

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl

Een

10

voor rekenen?



Noordhoff Uitgevers



**Moderne Wiskunde
10e editie Rekenen**

Moderne wiskunde 10 sluit perfect aan op het referentie- kader Rekenen

Moderne Wiskunde Rekenen 10e editie biedt met de **Oefenboeken** en **Digitrainers Rekenen** een complete doorlopende leerlijn rekenen aan voor alle niveaus en alle leerjaren.

In 2012 is het klas 1 havo/vwo deel grondig herzien. In 2013 volgen klas 1 vmbo, klas 2 havo/vwo en de bovenbouw van het vmbo en havo/vwo.

Vraag een (digitaal) beoordelingsexemplaar aan op
www.modernewiskunde.noordhoff.nl

**MODERNE
WISKUNDE**

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent