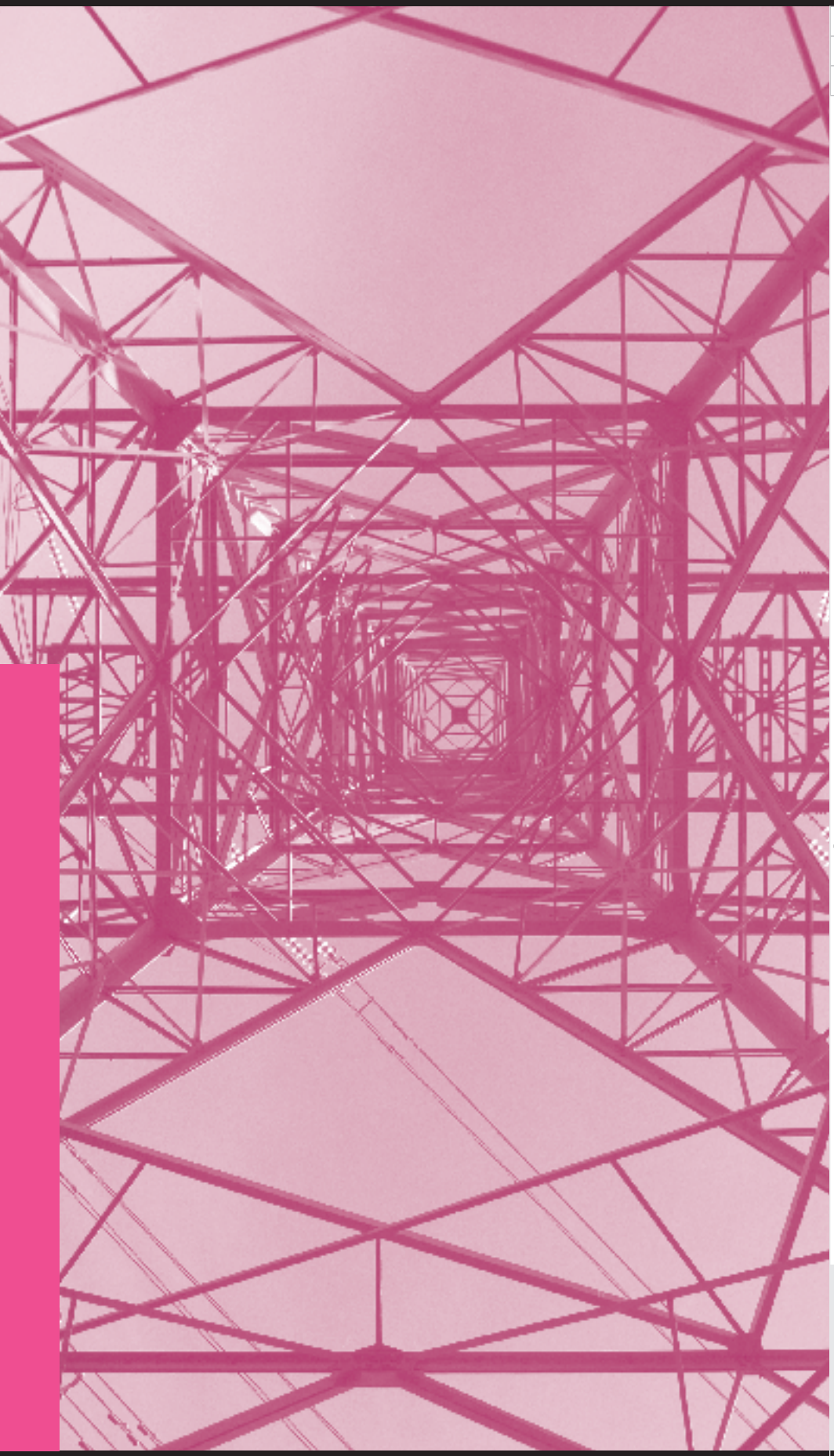
# EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 87

nr 2

oktober 2011



Terugblik op IMO2011

Meervoudige intelligentie, deel 5

Hoofdrekenen

Boekbesprekingen

Notulen en Jaarverslagen

De vormentaal van de natuur

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

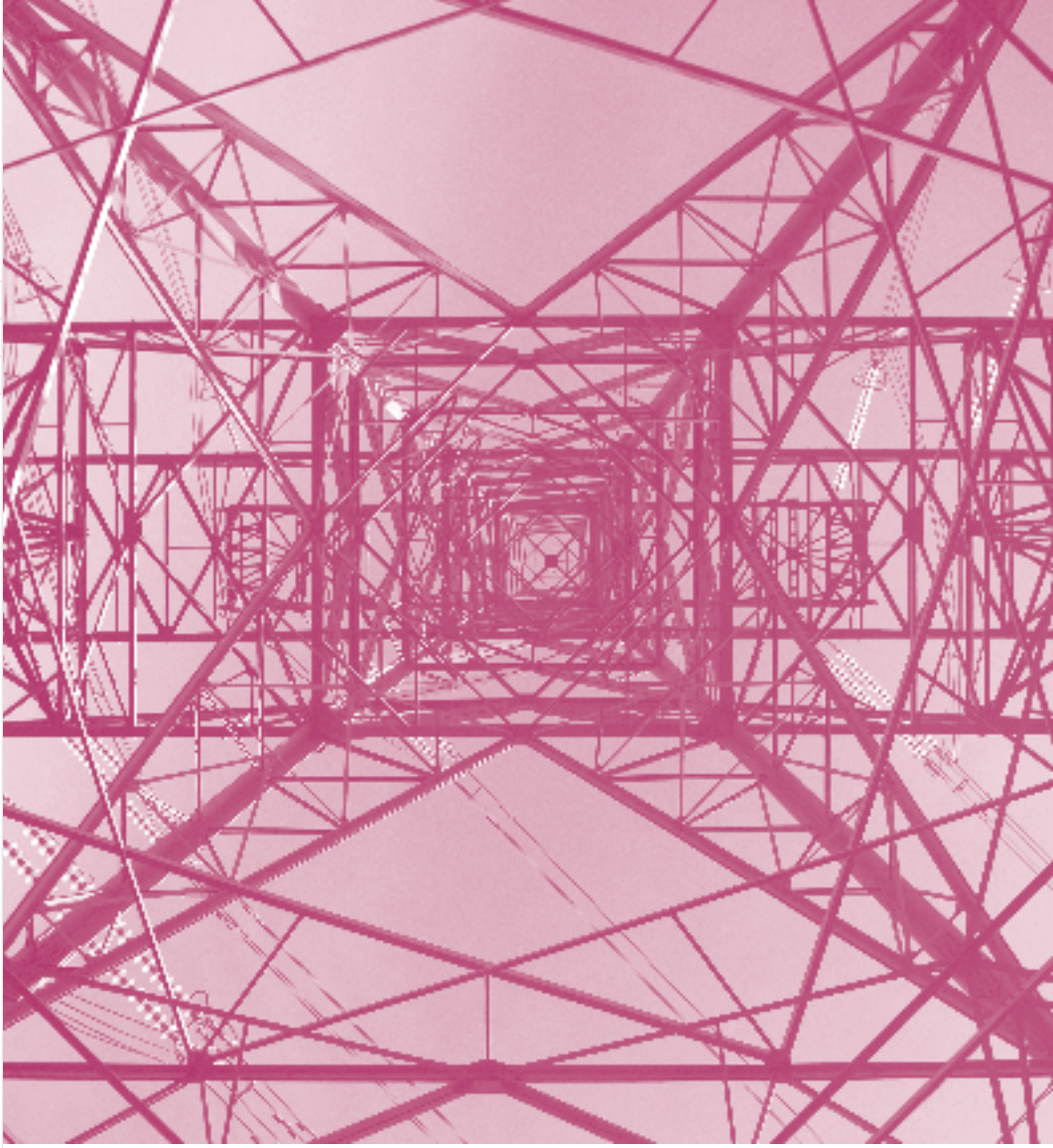
# COLOFON

jaargang 87

nr 2

oktober 2011

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



## Redactie

Michel van Ast
Rob Bosch
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Ernst Lambeck
Marjanne de Nijs, hoofdredacteur
Joke Verbeek
Heiner Wind, voorzitter

## Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs,
Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

## Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

## Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

## Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

### Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

### Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

### Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

### Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

### Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

### Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

### Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

# Kort vooraf

[ Marjanne de Nijs ]

### Hoofdrekenen

Op de eerste zaterdag van september zit ik met mijn twee jongvolwassen kinderen aan de ontbijttafel. Van de oudste hoef je normaal gesproken geen geluid te verwachten op dat tijdstip; je kan hem beter even met rust te laten. Dit keer moet hij echter zijn verontwaardiging kwijt. Bij een feestje, de avond ervoor, had hij iets – in zijn ogen – verbijsterends meegemaakt. 'Ongelofelijk mam, ze moest 28 : 4 uitrekenen en ze pakte haar iPhone om het in te toetsen.' En dan het onbegrip: 'En dat wil dan volgend jaar universiteit gaan doen…' Zijn deel is een berustende blik mijnerzijds.
Toch gaf deze gebeurtenis me stof tot nadenken. Natuurlijk is het – ook in mijn ogen – erg dat iemand de tafels niet beheerst. Persoonlijk denk ik dat je best gehandicapt bent bij de meest basale zaken die je in je leven tegenkomt als je niet een beetje kan hoofdrekenen. Waarom kan ik dan de verontwaardiging van mijn zoon niet delen? Omdat ik zelf niet zo goed weet waar ik die dan op zou moeten richten. Waar zou ik naar moeten wijzen?

Ik kijk graag naar positieve ontwikkelingen. Met het invoeren van de rekentoetsen in het vo gaat de muur tussen basisschool en vo meer omlaag. We kijken er steeds beter overheen. Kennis over het rekenonderwijs op de basisschool is essentieel om onze rekenlessen goed vorm te kunnen geven. Niet naar elkaar wijzen maar samenwerken, om te zorgen dat leerlingen aan het eind van de rit beschikken over voldoende rekenvaardigheden. Ook aan het andere einde van het vo worden drempels steeds lager. Samenwerkingsverbanden tussen hbo en universiteit zijn minder uitzondering en meer regel aan het worden. Hebt u goede, concrete ervaringen met deze ontwikkelingen? Schroom niet om ons te schrijven. Collega's in het land kunnen er hun voordeel mee doen.

En dat hoofdrekenen? Ik ben blij als mijn leerlingen de tafels tot en met 10 goed beheersen. Wim Bouman kan echter veel meer. Hij schrijft daarover in dit nummer van *Euclides* en roept u op om potentiële talenten bij hem aan te melden. De jongedame van het feestje komt daarvoor helaas niet in aanmerking.

### Kunst

Nu de Ars et Mathesis-dag weer in de agenda staat zijn we blij met de bijdrage van Carla Feijen over wiskunde en kunst. Deze veelzijdige kunstenares pleit voor meer kennis bij leerlingen over geometrische figuren. Kees Jonkers geeft een concrete voorzet: hij beschrijft hoe u het twintigvlak in een les kunt introduceren. Eerst knippen, vouwen en plakken en dan stilstaan bij de eigenschappen van dit veelvlak. Zelf ben ik in de gelukkige omstandigheid dat ik de artikelen eerder lees dan u. Mijn leerlingen heb ik al aan het werk gezet, de activiteit beveel ik hierbij van harte aan.

Ook is er de kunst van het bewijzen en redeneren, een onderdeel van de wiskunde dat een essentiële basis geeft voor het abstract denken en logisch redeneren. De opbrengst daarvan is meer dan alleen de waarde die het heeft voor het wiskundeonderwijs. Als leerlingen starten met dit onderdeel, dan moeten ze denkstappen maken die in eerste instantie lastig zijn. Kristie Ambrosius liep daar ook tegen aan en bedacht een alternatieve aanpak voor het nadenken over bewijsopgaven. Naar aanleiding daarvan ontwikkelde ze concreet lesmateriaal. U leest er alles over in haar artikel en op onze website kunt u haar werkblad vinden.

Dan zijn er ook deze keer weer bijdragen van een aantal vaste rubrieksauteurs die de kunst verstaan ons steeds weer uit te dagen en/of te verbazen: Ton Lecluse, Harm Jan Smid en Sieb Kemme.

### Laatste in de serie

En soms moet je afscheid nemen. We hebben heel lang genoten van de IMO-artikelen in *Euclides* en met het laatste artikel in de serie komt daar een einde aan. Birgit van Dalen en Quintijn Puite geven een terugblik op de IMO2011. Nog één keer genieten dus. Ingrid Berwald schreef afgelopen jaar een serie over meervoudige intelligenties. Met haar vijfde artikel, over Verbanden, sluit ze af. En, zoals u van haar gewend bent, ook in deze laatste weer veel concrete suggesties en inspiratie voor in de les.
Ik wens u veel leesplezier.

# Inhoud


57 Kort Vooraf
[Marjanne de Nijs]
58 Windmolens in de hoofdrol bij IMO2011
[Birgit van Dalen, Quintijn Puite]
61 Meervoudige intelligentie in de wiskundeles, deel 5
[Ingrid Berwald]
62 Aankondiging / Wintersymposium KWG 2012
63 Hoofdrekenen
[A.W. Bouman]
64 Aankondiging / Ars et Mathesis-dag 2011
65 Geometrie
[Carla Feijen]
67 Mededeling / WisBase
68 Het bewijzen van de stelling van Pythagoras
[Kristie Ambrosius]
71 Boekbespreking / De Pythagoras Code
[Ernst Lambeck]
72 Het Geheugen
[Harm Jan Smid]
75 Knippen, vouwen en plakken voor een twintigvlak
[Kees Jonkers]
77 Vanuit de oude doos
[Ton Lecluse]
79 Boekbespreking / Getallen zijn je beste vrienden
[Bert Zwaneveld]
82 Jaarverslag Euclides, jaargang 86
[Klaske Blom]
83 Aankondiging / WwF-Boekenveiling
84 Inhoud van de 86e jaargang (2010-2011)
86 Notulen van de NVvW-jaarvergadering op 6 november 2010
[Kees Lagerwaard]
87 Verslag van het verenigingsjaar 2010-2011
[Kees Lagerwaard]
90 Recreatie, Doordenker 87-2
[Sieb Kemme]
91 Recreatie, Oplossing 86-7
[Lieke de Rooij, Wobien Doyer]
92 Servicepagina

# Windmolens in de hoofdrol bij IMO2011

## TERUGBLIK OP DE INTERNATIONALE WISKUNDE OLYMPIADE 2011

[ Birgit van Dalen, Quintijn Puite ]

foto 1

Maandag 18 juli 2011, 08:55 uur. Er heerst een gespannen stilte in de drie hallen van de Sporthallen Zuid in Amsterdam. In elke hal zijn rechte rijen van tafels opgesteld en aan deze tafels zitten 564 jongeren te wachten. De één kijkt strak voor zich uit, de ander speelt met zijn pen en een derde verwisselt nog even zijn schrijfgerei en zijn flesje water van plek op zijn tafel. Dan delen in rood geklede vrijwilligers enveloppen uit. Als op elke tafel een envelop ligt en de klok naar 09:00 uur verspringt, wordt de mededeling omgeroepen dat iedereen zijn envelop open mag maken en mag beginnen. Eerst in het Engels, daarna in nog vier andere talen, maar dat is nauwelijks meer hoorbaar boven het geritsel van honderden enveloppen die tegelijkertijd opengemaakt worden.

foto 2 De wedstrijdhal

De jongeren in de sporthallen zijn deelnemers aan de IMO2011 (International Mathematical Olympiad). Maar liefst 101 verschillende landen hebben een team van maximaal zes scholieren afgevaardigd naar deze wedstrijd. Samen met een coach (de *deputy leader* in IMO-taal) zijn ze twee dagen geleden aangekomen in Amsterdam. Elk land heeft daarnaast ook nog een *leader* naar de IMO gestuurd. De leaders zijn al een week vóór de wedstrijd in Veldhoven (bij Eindhoven) bij elkaar gekomen om de zes opgaven (drie voor elk van de twee wedstrijddagen) te selecteren en te vertalen. Elke deelnemer krijgt namelijk de opgaven in zijn eigen taal, wat voor deze IMO betekent dat er vertalingen in 54 verschillende talen zijn.
Ook nu de vertalingen klaar zijn, is het werk van de leaders in Veldhoven nog niet afgelopen. De deelnemers mogen namelijk gedurende het eerste half uur van de wedstrijd vragen stellen. Schriftelijk, want de leaders bevinden zich aan de andere kant van het land. De vragen worden gescand en gemaild, waarna de leaders gezamenlijk besluiten wat het antwoord op de vraag moet zijn. Dat antwoord wordt dan weer teruggemaild naar de wedstrijd-locatie. Bij de ruimte met de scanner in de sporthallen is het dan ook het eerste half uur een af- en aanlopen van wedstrijd-begeleiders, allemaal gekleed in een herkenbaar rood IMO-shirt. De wedstrijd-begeleiders leveren de vragen af bij de scanner en brengen de antwoorden weer terug naar de juiste deelnemer.
Ook gedurende de rest van de wedstrijd zijn de 60 wedstrijdbegeleiders essentieel voor het goede verloop. Ze lopen met deelnemers mee naar het toilet en bezorgen hun extra papier of een nieuw flesje water. Communiceren met scholieren uit zoveel verschillende landen kan nog wel eens lastig zijn, maar gelukkig hebben de deelnemers gekleurde kaartjes gekregen waarmee ze duidelijk kunnen maken wat ze bedoelen.

foto 3 Kaartjes

Tegen half twee arriveren er enkele bussen bij de sporthallen met daarin de deputy leaders. Ze verzamelen zich verwachtingsvol voor de ingang. Stipt om 13:30, vierenhalf uur na het begin, eindigt de wedstrijd en kort daarna stroomt het plein voor de sporthallen vol met deelnemers. De deputy leaders zoeken hun eigen team bij elkaar en willen maar één ding weten: hoe is het gegaan? Al gauw wordt duidelijk dat de deelnemers van alle landen het roerend met elkaar eens zijn over één ding: opgave 2 was afschuwelijk. Zelfs de allerbeste landen zijn gestruikeld over deze ongebruikelijke opgave met een Nederlands tintje.
Gedurende de rest van de IMO blijven de *windmills* het gesprek van de dag.

Na de tweede wedstrijddag (met tot opluchting van de deelnemers niet nog meer windmolens) verandert de sfeer. Het werk zit erop en nu kan het plezier maken beginnen! Inmiddels zijn de leaders ook in Amsterdam gearriveerd en zit het Novotel tot de nok toe vol met IMO-mensen. De conferentiezalen zijn omgebouwd tot een mega-eetzaal die aan 500 mensen tegelijk een zitplaats biedt. In de spelletjesruimte is het op elk moment van de dag gezellig met talloze deelnemers die tafelvoetbal of airhockey spelen, of gewoon een bordspel of een kaartspel, aan tafels of – als die allemaal bezet zijn – op de grond.

**IMO2011 – de opgaven**

1. Voor een verzameling $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ van vier verschillende positieve gehele getallen noteren we de som $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ als $s_A$. We schrijven $n_A$ voor het aantal paren $(i, j)$ met $1 \leq i < j \leq 4$ waarvoor $a_i + a_j$ een deler is van $s_A$.
   Bepaal alle verzamelingen $A$ van vier verschillende positieve gehele getallen met de grootst mogelijke waarde van $n_A$.

2. Zij $S$ een eindige verzameling van ten minste twee punten in het vlak, waarvan er geen drie op één lijn liggen. Een *windmolen* is een proces dat begint met een lijn $l$ die door één punt $P$ van $S$ gaat. De lijn draait met de klok mee om het *draaipunt* $P$ tot er voor het eerst een ander punt van $S$ op deze lijn komt te liggen; we noemen dit punt $Q$ en dit wordt het nieuwe draaipunt. We zeggen dan dat $Q$ *een klap van de molen krijgt*. De lijn draait nu met de klok mee om $Q$, totdat opnieuw een punt van $S$ een klap van de molen krijgt. De windmolen deelt zo oneindig veel klappen uit.
   Laat zien dat we een punt $P$ van $S$ en een lijn $l$ door $P$ kunnen kiezen zodat er een windmolen ontstaat waarbij elk punt van $S$ oneindig veel klappen van de molen krijgt.

3. Zij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan $f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$ voor alle reële getallen $x$ en $y$.
   Bewijs dat $f(x) = 0$ voor alle $x \leq 0$.

4. Zij $n > 0$ een geheel getal. We hebben een balans en $n$ gewichten met massa $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. We moeten de $n$ gewichten, één voor één, op één van de twee schalen van de balans plaatsen zo dat de rechterschaal nooit zwaarder is dan de linkerschaal. In elke stap kiezen we een gewicht dat nog niet op de balans staat en plaatsen het op de linker- of op de rechterschaal, totdat alle gewichten op de balans geplaatst zijn.
   Bepaal het aantal manieren waarop we dit kunnen doen.

5. Zij $f$ een functie van de gehele getallen naar de positieve gehele getallen. Stel dat voor alle gehele getallen $m$ en $n$ het verschil $f(m) - f(n)$ deelbaar is door $f(m - n)$.
   Bewijs dat voor alle gehele getallen $m$ en $n$ met $f(m) \leq f(n)$ geldt dat $f(n)$ deelbaar is door $f(m)$.

6. Zij driehoek $ABC$ een scherphoekige driehoek met omgeschreven cirkel $\Gamma$. Zij $l$ een raaklijn aan $\Gamma$ en definieer $l_a$, $l_b$ en $l_c$ als de lijnen verkregen door $l$ respectievelijk ten opzichte van de lijnen $BC$, $CA$ en $AB$ te spiegelen.
   Toon aan dat de omgeschreven cirkel van de driehoek bepaald door de lijnen $l_a$, $l_b$ en $l_c$ raakt aan de cirkel $\Gamma$.

foto 5 Tijdens de excursie in een boot

foto 6 Tijdens de excursie bij een échte windmill

foto 4 Speelhal

Terwijl de volgende twee dagen het werk nagekeken wordt door enerzijds de leaders en deputy leaders, en anderzijds een 80-tal (Nederlandse) vrijwilligers, gaan de teams op excursie. Er is een excursie naar Den Haag, met een bezoek aan het Escher-museum, Panorama Mesdag en natuurlijk het strand. Voor tientallen deelnemers is dit de eerste keer in hun leven dat ze de zee zien. Minstens zo bijzonder is de zeilexcursie bij Monnickendam. Op zes grote zeilboten vaart de groep over de Gouwzee en brengt ook nog een bezoekje aan Volendam. Het weer werkt voor het eerst tijdens deze IMO mee en diverse deelnemers springen vanaf de boot het water in, dat volgens het IJslandse team heerlijk warm is.
Ook de fietsexcursie valt goed in de smaak bij de deelnemers. Voor degenen die niet kunnen fietsen, zijn er steps beschikbaar, maar de meeste enthousiastelingen proberen toch gewoon de fiets. De fietshelmen blijken daarbij geen overbodige luxe te zijn… De deelnemers genieten van het Noord-Hollandse landschap, inclusief diverse… windmolens! En twee jongens uit Nigeria en China worden hierdoor zo in beslag genomen dat ze een verkeerde afslag nemen. Gelukkig brengt een vriendelijke Amsterdammer de Chinees terug naar het hotel en vinden we de Nigeriaan terug op station Amsterdam CS.

De laatste excursiedag bestaat uit een wandeling en rondvaart door het centrum van Amsterdam, en eindigt met een gezamenlijk buffet in Science Center NEMO, dat exclusief voor de IMO open is die avond. De combinatie van proefjes doen, naar een rockbandje luisteren en een hapje eten, blijkt een schot in de roos voor al deze jonge onderzoekers.
Na de excursiedagen wordt de uitslag bekend. Er blijken slechts 29 deelnemers te zijn die het idee van de windmolenopgave door gehad hebben en daarmee 5 of meer punten (van de maximaal 7) gescoord hebben op deze opgave. Tot vreugde van de Nederlandse teamleden en hun begeleiders behoort Madelon de Kemp met 6 punten tot deze kleine groep. Madelon is dan ook de beste Nederlander met 23 punten in totaal, wat een zilveren medaille waard is. Ook Daniël Kroes wint een zilveren medaille, terwijl Jeroen Huijben, Merlijn

Staps en Jetze Zoethout een bronzen medaille in ontvangst mogen nemen. Ragnar Groot Koerkamp ten slotte zorgt er met een eervolle vermelding voor dat voor het tweede achtereenvolgende jaar (tevens voor de tweede keer in de historie) niemand van het Nederlandse team met lege handen naar huis gaat.
In het officieuze landenklassement wordt Nederland op deze manier 28ste van de 101 landen. Dat we nu bij de bovenste 30 procent zitten, is het beste resultaat sinds 1983 (toen we 7e van de 32 landen waren). Uiteraard gáán we ervoor om deze prestatie volgend jaar bij de IMO in Argentinië weer te overtreffen.

*Met deze aflevering komt er een einde aan de IMO-serie in Euclides. De afgelopen nummers hebben diverse oud-IMO-deelnemers hun licht laten schijnen over IMO-opgaven uit hun jaar. We hebben het erg leuk en bijzonder gevonden om op deze manier met elkaar te kunnen aftellen van IMO2002 tot en met IMO2011. Velen van u waren er ook bij afgelopen zomer, in de Sporthallen Zuid, in de RAI, in Novotel of bij één van de excursies. Dank aan allen die hebben meegeholpen IMO2011 tot een groot succes te maken!*

**Over de auteurs**

Birgit van Dalen is sinds november 2004 betrokken bij de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Ze was de vice-teamleider tijdens de IMO in Vietnam (2007), Spanje (2008), Duitsland (2009) en Kazachstan (2010). Ze was verder één van de hoofd-organisatoren van IMO2011 in Nederland. Ze heeft net haar promotie afgerond en is sinds 1 augustus 2011 wiskundedocent op het Aloysius College in Den Haag.
E-mailadres: *bevandalen@gmail.com*
Quintijn Puite is sinds november 2005 betrokken bij de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Hij was de teamleider tijdens de IMO in Slovenië (2006), Vietnam (2007), Spanje (2008) en Duitsland (2009). Hij was verder één van de hoofdorganisatoren van IMO2011. Voor de olympiade is hij twee dagen per week verbonden aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Daarnaast is hij docent bij de Vakgroep Wiskunde van Instituut Archimedes, de lerarenopleiding van Hogeschool Utrecht.
E-mailadres: *g.w.q.puite@tue.nl*


# APS-Exact

**Ook in het schooljaar 2011-2012 organiseert APS-Exact diverse *cursussen* en *studiedagen*, zoals:**

| | |
|---|---|
| **Maandag 7 november 2011** | studiemiddag *Rekenen in het vo getoetst* |
| **Maandag 14 november 2011** | studiedag *Rekenen: eerst denken, dan doen* |
| **Maandag 14 november 2011** | start cursus *(Hoog)begaafde leerkingen in de wiskundeles* |
| **Dinsdag 22 november 2011** | bijeenkomst *Leerlingen rekenvaardiger met SaLVO* |
| **Dinsdag 29 november 2011** | start cursus *Inspiratie voor de rekenles* |
| **Donderdag 1 december 2011** | studiedag *Rekenen geven op mijn school: hoe doe ik dat?* |
| **Vrijdag 2 december 2011** | studiemiddag *Rekenproblemen* |
| **Maandag 12 december 2011** | studiedag *Examentraining* |
| **Woensdag 14 december 2011** | start cursus *Leidinggeven aan de wiskundesectie* |
| **Donderdag 15 december 2011** | start cursus *Afstemming in bètapracticum* |
| **Donderdag 15 december 2011** | start cursus *Goed(e) toetsen* |
| **Vrijdag 16 december 2011** | start opleiding *Rekencoördinatoren* |

**U kunt zich aanmelden via onze site www.aps.nl/exact > Activiteitenagenda**

informatie

**Bel of schrijf voor meer informatie:**
**APS-Exact**
**Postbus 85475**
**3508 AL Utrecht**
**Tel.: 030 - 28 56 722**
**voortgezetonderwijs@aps.nl**
**www.aps.nl/exact**

aps leren inspireren

# Meervoudige intelligentie in de wiskundeles

## BIJ REKENEN, OPPERVLAKTE, VERGROTEN, GONIOMETRIE, VERBANDEN

[ Ingrid Berwald ]

### Deel 5 – Verbanden

Er zijn acht meervoudige intelligenties en ieder mens beschikt over alle acht, waarbij de ene intelligentie bij de één sterker is ontwikkeld dan bij de ander. Als een – voor een kind boeiende – intelligentie wordt verwerkt in een instructie of een andere verwerking van de leerstof, dan neemt het kind de leerstof beter op. Dit is gebleken uit onderzoeken van de Amerikaanse hoogleraar Howard Gardner.
Zijn motto is: 'Het gaat er niet om hoe intelligent je bent, maar om hoe je intelligent bent.' Iedereen is op zijn eigen manier knap. Vandaar de omschrijvingen bij de volgende intelligenties:

1. Verbaal – linguïstisch (taalknap)
2. Logisch – mathematisch (rekenknap)
3. Visueel – ruimtelijk (kijkknap)
4. Muzikaal – ritmisch (muziekknap)
5. Lichamelijk – kinesthetisch (bewegingsknap)
6. Naturalistisch (natuurknap)
7. Interpersoonlijk (samenknap)
8. Intrapersoonlijk (zelfknap)

In onderstaand artikel komt het gebruik van verschillende intelligenties bij het onderwerp verbanden aan bod. Het is het laatste deel in een serie van vijf artikelen.[1]
Als je werkt vanuit het principe van de meervoudige intelligentie, moet je de stof op verschillende manieren aanbieden. Verbanden is een van de onderdelen van wiskunde waarbij het wat makkelijker gaat. Zelf probeer ik naast de verschillende intelligenties er ook altijd verbazing en verwondering aan toe te voegen.

#### Mars en Venus

In de eerste klas gaat het vooral om lineaire verbanden. Hierbij hebben we een verhaaltje over een venusvrouwtje en een marsmannetje gemaakt. Een marsmannetje is, als hij geboren wordt, precies 77 cm lang; hij groeit 15 cm per jaar. Een venusvrouwtje is slechts 20 cm als ze geboren wordt, maar groeit 18 cm per jaar. Het leuke is, dat wanneer een marsmannetje en een venusvrouwtje kinderen krijgen, deze 48 cm zijn als ze geboren worden. Jongens groeien net zo snel als hun vader, terwijl meisjes net zo snel als hun moeder groeien. Dit is een opdracht waarbij vooral de taalkundige intelligentie aangesproken wordt om lineaire verbanden aan te leren.

#### Magisch vierkant

In ons wiskundeboek staan vrij veel opgaven waarbij tabellen moeten worden ingevuld: bereken $y$ als $x = 1$ tot en met 6. De tabellen bij deze opdrachten hebben we wat langer gemaakt, van $x = 1$ tot en met 9. Met deze negen getallen kun je altijd een magisch vierkant vullen, zolang de formule maar lineair is. We laten leerlingen ook zelf formules maken en daarmee magische vierkanten vullen. Het vullen van een magisch vierkant is heel eenvoudig als je eenmaal hebt ontdekt dat het vijfde cijfer altijd in het midden staat en de even cijfers in de hoeken.
Het vierkant ***in figuur 1*** (op pag. 62) hoort bij $y = 2x + 1$.

#### Voetafdruk

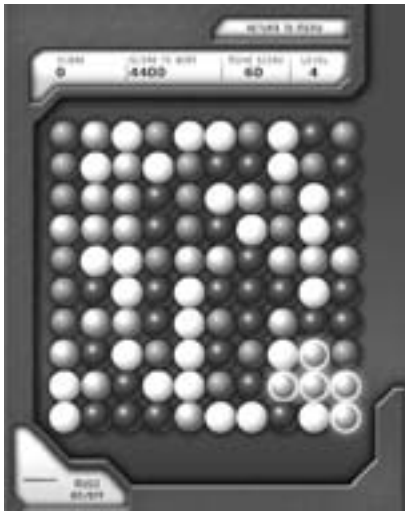
Voor de motorische kinderen hebben we tegeltjes en magneten in het lokaal, en zij moeten af en toe de plaatjes namaken en voelen hoe het zit met het hellingsgetal. Mijn man is rechercheur en tijdens het overhoren van de wetboeken vond ik een formule die in de 17e eeuw in Frankrijk werd gebruikt: (*lengte van een verdachte*) = 2 × (*zijn voetlengte*) / 0,287.
Zo maakten de Fransen een signalement na het vinden van voetsporen. Aan voetsporen kun je nog meer meten: de voethoek en de paslengte werd ook vastgelegd. Ik ga elk jaar op een mooie dag met mijn klas naar een zandbak om voetsporen te maken en voethoeken te meten. Twee jaar geleden had ik Tom in mijn klas; hij had kort geleden in het ziekenhuis een onderzoek gehad om te bepalen hoe lang hij ging worden. De arts kwam uit op 2,01m. Tijdens deze wiskundeles, waarbij in het mulle zand de afdrukken best wat groter worden, kwam Tom uit op een lengte van 2,16m. Zijn conclusie zal ik nooit vergeten, hij kwam met zijn rekenmachine naar me toe gehold en riep 'Kijk nou juf, die arts zat er gewoon 15cm naast!' Tja, wiskunde blijft een exact vak.

#### Formules

Bij de kwadratische formules laat ik de leerlingen de puntentelling van het spel 'bubble breaker' onderzoeken (***zie figuur 2***). Het spel is te spelen via *www.bubblebreaker.be*. De puntentelling is kwadratisch. De formule is niet zo heel makkelijk te vinden; dus best een uitdaging. De algemene formule die bij een level '$a$' hoort is: $\frac{1}{2}a(x^2 + x)$.
Bij exponentiële functies laat ik de leerlingen papier vouwen en berekenen hoe dik de stapel steeds is. Meestal kun je maximaal 8 maal vouwen. Daarna vraag ik of de leerlingen een schatting willen maken: stel dat je wel door kunt gaan met vouwen, hoe vaak moet je vouwen voordat de stapel zo dik is dat hij tot de maan reikt? De schattingen liggen altijd rond de miljoenen. Groot is de verbazing als het slechts 42× blijkt te zijn. Er zijn zelfs leerlingen die de 42 diktes helemaal uitschrijven omdat ze het niet kunnen geloven. Het gevoel bij een exponentiële functie probeer ik er zo in te krijgen.
Voor gevoel bij de omgekeerd evenredige functie heb ik twee spiegeltjes aan elkaar geplakt zodat ze kunnen scharnieren. Zet de spiegeltjes op 120° en leg er een stokje voor: je ziet een gelijkzijdige driehoek. Bij 90° ontstaat een vierkant. De leerlingen ontdekken dat het aantal graden maal het aantal hoeken altijd 360° is. Over het domein valt ook nog wel wat te zeggen;

| | | |
|---|---|---|
| 17 | 3 | 13 |
| 7 | 11 | 15 |
| 9 | 19 | 5 |

figuur 1 Tovervierkant



figuur 2 Startscherm Bubble breaker

dat komt doordat er geen 3,5-hoeken bestaan. Deze opdracht is heel geschikt voor leerlingen die motorisch of visueel leren.

### Kwartet

Een naturalistische manier om verbanden aan te leren is bijvoorbeeld die met een kwartetspel. Een kwartet bestaat uit vier kaarten. Op het eerste kaartje komt de grafiek, op het tweede kaartje het functie-voorschrift, op het derde kaartje staat de tabel en het laatste kaartje is voor de specifieke kenmerken. Als het kwartet gemaakt is door de leerlingen, laat ik de titel er afknippen zodat je alleen nog de grafieken en tabellen en zo ziet. Leerlingen moeten als ze het spel spelen, steeds eerst ontdekken wat ze in handen hebben en daarna kunnen ze naar een kaartje vragen ('Mag ik de grafiek van de exponentiële functie?') Van dit spel wordt altijd veel geleerd.
In de eerste klas laat ik de leerlingen ook al een keer een lineair kwartet maken, waarbij het startgetal en het hellingsgetal duidelijk moet worden. Zo heb een keer een spinnenweb met één spin en meerdere vliegen gehad, De woordformule luidde (*aantal poten*) = (*aantal vliegen*) × 6 + 8. Maar het kan ook voor een giraf met twee vlekken op elke wervel en drie op zijn kop. Dit zijn lessen waarbij je de opdracht alleen maar uit hoeft te delen; de rest gaat vanzelf.

### Slot

Dit was dus het laatste artikel uit de serie. Mijn leerlingen vragen steeds om meer van dit soort lessen.
Ik blijf dan ook doorgaan met zoeken en ontwikkelen.

### Noot

[1] De delen 1, 2, 3 en 4 van deze artikelenserie staan opvolgend in *Euclides* 86(4), pp. 154-155, in *Euclides* 86(5), pp. 189-190, in *Euclides* 86(6), pp. 240-241 en in *Euclides* 86(7), pp. 284-285.

### Over de auteur

Ingrid Berwald is docente wiskunde aan het IJsselcollege in Capelle aan den IJssel. Ze geeft les aan vmbo-, havo- en vwo-klassen en vindt het belangrijk dat alle leerlingen positieve ervaringen opdoen tijdens het vak wiskunde.
E-mailadres: *i.berwald@ijsselcollege.nl*

# Aankondiging / Wintersymposium KWG 2012

### Grootschalig Rekenen en Rekenen in onze Gezondheidszorg

Het Wintersymposium 2012 van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) combineert twee actuele onderwerp: rekenen en gezondheidszorg. Wiskunde als discipline en als toepassing komen beide aan bod. Dit symposium gaat over getaltheorie en wel het zoeken naar algoritmen, rekenregels, als hulpmiddel bij het verkennen van grote problemen, zoals het vermoeden van Goldbach en de Riemann-hypothese. De reductie van de wachttijd bij diagnose van kanker met behulp van Operations Research en het gebruik van statistische en analytische middelen bij het stellen van diagnoses in neurologische aandoeningen geven een rijk scala aan voorbeelden van gebruik van rekentechnieken op hoog niveau.

### Lezingen

**Herman te Riele**, onderzoeker bij het Centrum Wiskunde en Informatica in Amsterdam, is specialist op het gebied van computationele getaltheorie. Hij verricht onder meer onderzoek aan de Riemann-hypothese. Computationele getaltheorie is ontstaan dank zij de komst van steeds snellere computers, die doen waar computers goed in zijn: veel rekenwerk uitvoeren voor wiskundigen. *Grootschalig rekenen in de getaltheorie* is het onderwerp van de voordracht van Herman te Riele.
**Richard Boucherie**, hoogleraar Stochastic Operations Research aan de Universiteit Twente, werkt onder meer aan wachttijdentheorie, met toepassingen op het gebied van sensor-netwerken en gezondheidszorg. Twee weken korter wachten op de uitslag van onderzoek naar mogelijke kanker kan landelijk gezien miljoenen euro's schelen aan kosten. Daarover gaat zijn bijdrage: *Sneldiagnostiek voor kanker, een wiskundige oplossing voor een maatschappelijk probleem.*
**Natasha Maurits**, hoogleraar Klinische Neuro-engineering bij het Universitair Medisch Centrum Groningen (afdeling Neurologie), ging wiskunde studeren omdat je daarna nog alle kanten op kunt. Dat laat ze ook zien. Onderscheid tussen spier- en zenuwziekten met behulp van beschrijvende statistiek en differentiaalrekening bij het meten van effecten van veroudering op de motoriek zijn enkele voorbeelden van de vele en gevarieerde toepassingen van wiskunde in haar vakgebied. Daar gaat haar bijdrage over: *Patiënten in getallen, wiskunde toegepast in de neurologie.*

### Datum, plaats, kosten

Het symposium wordt gehouden op **zaterdag 7 januari 2012** in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein 29, 3512 JE Utrecht). Het programma start om 10:00 uur (koffie vanaf 9:30 uur) en eindigt ca. 15:00 uur. U wordt verzocht u van te voren *on line* aan te melden via de website van het KWG, *www.wiskgenoot.nl* (kies dan 'wat doet het KWG' en vervolgens 'congressen en symposia'). Op de website is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden.
De kosten voor het symposium bedragen evenals vorig jaar € 18,00 voor KWG-leden en € 23,00 voor niet-leden. Deze bijdrage is o.a. voor een lunch en consumpties gedurende de dag.

### Inlichtingen

Nadere inlichtingen: Jenneke Krüger / e-mail: *jenneke.kruger@gmail.com* / telefoon: 06-16420445

# Hoofdrekenen

[ A.W. Bouman ]

Om maar even flink egocentrisch te beginnen: mijn naam is Willem Bouman, ik ben 71 jaar oud, op afstand het oudste nog flink actieve rekenwonder op wereldniveau, bij de top vijf, met sinds kort een wereld-record factoriseren op mijn naam. Op mijn website (*www.willemboumanrekenen.nl*) vindt u enkele artikelen over mijn hoofdrekenbedrijf.
Tijdens het onlangs gehouden wereld-kampioenschap Hoofdrekenen voor scholieren van 10-17 jaar in Neurenberg mocht ik voor de tweede maal een workshop verzorgen, weer in het Duits en Engels. Nederlands was niet nodig, daar er ook dit keer helaas weer geen Nederlandse deel-nemers waren. In het kader van de te maken opgaven behandelde ik: de kruismethode voor (2×2)- en (3×3)-vermenigvuldigen, de 9-proef, de 11-proef, delen met de 'omgekeerde' kruismethode, de structuur in de kwadraten, kwadranten- en octantenlogica en de structuur in de derde machten.
En hier komen we bij mijn grote frustratie: ik heb een aantal officiële instanties aangeschreven om aandacht te vragen voor dit evenement, dit alles zonder enig resultaat. Daarentegen werd ik door wel vijf verschillende media gebeld. U hoeft geen rekenwonder te zijn om te kunnen vaststellen dat ik met mijn 71 jaar royaal over de helft ben. Ik ken nog een andere Nederlandse rekenaar, Wouter de Lange uit Wamel. Hij is 28 jaar oud, maar verder niemand die de Nederlandse driekleur te eniger tijd kan hooghouden.
In de 20ste eeuw hadden we Wim Klein, de snelste rekenaar uit die eeuw. Hij werd in augustus 1986 door een misdrijf om het leven gebracht. Men zou kunnen stellen dat het kunnen hoofdrekenen op topniveau een folkloristische bezigheid is. Wim Klein was aanvankelijk wetenschappelijk rekenaar bij het CERN in Genève. Al aan het eind van de 60-er jaren werd hij op elegante wijze op non-actief gesteld. Zijns inziens had ik het helemaal in me om wereldkampioen hoofdrekenen te worden: 'zo jong en al zo goed'. Ik ben blij zijn raad niet te hebben opgevolgd om als rekenaar beroepsmatig bezig te zijn, ik zou al heel snel brodeloos zijn. Daar komt nog bij dat iemand me in vertrouwen influisterde: 'Wim (Klein) is een aardige vent, maar je wordt knettergek van hem.' Hij maakte een erg gestreste indruk op mij. Nee, zo iemand wilde ik niet worden. Het boek over Klein's levensloop is vreugdeloze lectuur.
Als tussenfase ben ik, met diploma HBS-A en -B, een aantal jaren automonteur geweest, in de avonduren studeerde ik voor de akte praktijk autoherstellen. Daarna ging ik werken bij Michelin als vertegenwoordiger vrachtautobanden. Bij de transportbedrijven is altijd wat uit te rekenen: een asbelasting, de juiste verdeling van de belading, een kilometerkostprijs, een overbeladings-percentage, teveel om op te noemen. Hierbij was mijn rekentalent een nuttig accessoire.
Er is met (hoofd)rekenen geen droge boterham meer te verdienen, maar toch… Je hoeft maar een willekeurige krant op te slaan of een willekeurige TV-actualiteiten-rubriek te volgen om te zien dat het met het rekenen in ons land droevig gesteld is. Er is nauwelijks iets te vinden dat duidt op gevoel voor hoeveelheden of cijfers. Als je vandaag uit het hoofd kunt zeggen hoeveel 7 × 8 is, kun je al als rekenwonder worden aangeduid.
Mijn standaard sommetje over de broek wordt slechts door een enkeling correct beantwoord. Daar heb ik toch zo veel schik mee gehad! En nog steeds trouwens. Het gaat als volgt.
*Je bent helemaal blut, maar gelukkig staat in de straat waar je loopt, een geldautomaat en je pint € 50. Je loopt even verder en daar hangt me in de winkel toch een broek, een wereld-broek! Die wil je beslist kopen. Maar ja, er hangt een prijskaartje aan van € 72. Oh, gelukkig, er staat nog bij 'met 25 % korting'. Kun je die broek kopen ja of nee?*

Wat ik graag zou willen (doen) onderzoeken is of de kruismethode, een methode voor het vermenigvuldigen die zonder uitzon-dering door alle rekenwonders ter wereld wordt gebruikt, niet aan te leren zou zijn door wat ik noem de 'modale rekenaar'.
De voordelen van de kruismethode zijn mijns inziens evident:
- Er worden bewerkingen gecombineerd: vermenigvuldigen en optellen.
- Er is volledige betrokkenheid bij het werk, wat niet het geval is met alleen maar 'knopjes drukken'.
- Het geheugen wordt intensief getraind.

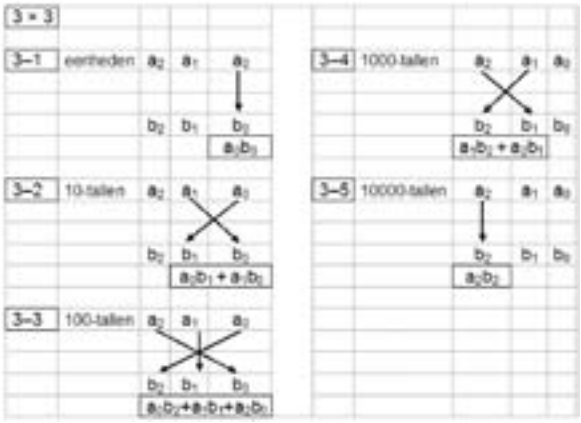
Over het geheugen bedacht ik nog een spreuk: 'Je geheugen is je schatkamer; zorg dat hij goed gevuld is.'
De kruismethode is volgens de litera-tuur ±1100 jaar geleden uitgedacht door de Indiërs en is een schoolvoorbeeld van eenvoudige logica. We nemen als begin twee getallen van twee cijfers. Als voorbeeld: als je bij het vermenigvuldigen de eenheden wilt weten, moet je de eenheden met de eenheden vermenigvuldigen. Wil je de tientallen weten dan moet je de eenheden met de tientallen vermenigvuldigen. En voor de honderdtallen vermenigvuldig je tientallen met tientallen.

**Voorbeeld**
58 × 93 = …
Daarbij zijn de 8 en de 3 de eenheden, en 5 en 9 de tientallen (***zie tabel 1***).
Welke zijn de uit te voeren bewerkingen en de combinaties daarvan?
3 × 8 is geen punt, 4 noteren en 2 transporteren.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | 5 | 8 | |
| | | | | | | | | | | | | | 9 | 3 | |
| | | | | | | | 3 | × | 8 | = | | | | (2)4 | |
| 9 | × | 8 | + | (2) | + | 3 | × | 5 | = | | | (8)9 | | | |
| | | | | 9 | × | 5 | + | (8) | = | 53 | | | | | |
| | | | | | | Eindantwoord | | | | = | 53 | 9 | | 4 | |

tabel 1

Dan komen de kruislingse vermenigvuldi-gingen. Het handigst is om eerst 9 × 8 te nemen, en dan bij de 72 de te transporteren 2 te tellen (even + even). We hebben dan 74 en daarbij moet dan worden opgeteld 3 × 5. Totaal 89: 9 noteren en de 8 transporteren. Tot slot 9 × 5 + 8 = 53. Dan hebben we het eindantwoord (5394) zonder een tussennotitie te maken. Het moeilijkst zal zijn de combinatie van vermenigvuldigen en optellen. Daarvoor is stellig oefening vereist.




tabel 2 Schema van een (3×3)-vermenigvuldiging

Met enige aarzeling behandel ik het vermenigvuldigen van twee getallen van drie cijfers (3×3; ***zie tabel 2***). Men moet hier zeker niet aan beginnen voor en aleer er met het vermenigvuldigen van twee getallen van twee cijfers een ruime ervaring is opgedaan. De achterliggende logica is precies eender. Alleen moet aandacht geschonken worden aan het volgende: niet alleen eenheden maal honderdtallen leveren honderdtallen op; dat is eveneens het geval bij het vermenigvuldigen van tientallen met tientallen.
Het belangrijkste verschil met de vorige som is dat bij deze te bedenken is dat de honderdtallen worden gevonden niet alleen door eenheden maal honderdtallen maar ook door tientallen maal tientallen.

Als er voldoende vaardigheid ontwikkeld is met het vermenigvuldigen, kan er toe worden overgegaan de kruismethode ook te gaan gebruiken bij het uitvoeren van delingen.

### Nog enkele slotopmerkingen

- Bij het toernooi in Neurenberg waren acht sprekers betrokken die, met uitzondering van mij, allen minstens de doctorstitel voeren. Zij keurden allen het gebruik van de rekenmachine door kinderen beneden 15 jaar in ongewoon felle bewoordingen af.
- Tijdens gesprekken met leraren hoor ik al heel snel 'O, nee, mijnheer Bouman, dat is veel te moeilijk voor hen.' Voor het bespreken van de kruismethode zou men bijvoorbeeld kunnen beginnen met de leerlingen uit het hoofd kleine optellingen te laten doen: 17 + 24 = ; 38 + 43 = ; enzovoort. Later: 12 + 17 + 39; 8 + 14 + 23, … Voor (2×2)-vermenigvuldigingen is de grootste optelling 8 + 9 × 9 + 9 × 9 (= 170). Dus ook oefenen bijvoorbeeld met 3 + 6 × 9 = … Zo gaat 5 + 8 × 2 + 3 × 4 als volgt: '5 + 8 × 2 = 21+ 3 × 4 = 33'.
- Mocht u een leerling treffen die voor wat hoofdrekenen betreft royaal boven het gemiddelde scoort, laat de betrokkene dan contact met mij opnemen.

| | | |

# Geometrie

## DE VORMENTAAL VAN DE NATUUR

[ Carla Feijen ]

**Geometrie, de 'vormentaal van de natuur', speelt een grote rol in het werk van Carla Feijen, beeldend kunstenaar en ontwerper. Hoe groot haar fascinatie voor de schoonheid van de meetkunde ook is, op de middelbare school deed ze destijds geen eindexamen in wiskunde.**

### Essentiële kennis

Van mijn eigen schooltijd herinner ik me de dankbaarheid voor het aanreiken van het alfabet. Nadat ik alle letters geleerd had met de bijbehorende klanken, besefte ik gereedschap in handen gekregen te hebben om zelf iets te lezen, te leren en te kunnen schrijven.
Op de middelbare school verwachtte ik dat wiskunde ook zulke essentiële kennis zou zijn waar je van alles mee zou kunnen doen. Van mijn opa had ik spannende dingen gehoord over meetkunde zoals het construeren van een vijfhoek met alleen een passer en liniaal, maar dat soort kennis paste blijkbaar niet meer in de moderne wiskunde. Ik liep aan tegen het begrip 'wiskundig bewijs' en vroeg de leraar hoe je iets kan bewijzen binnen zijn eigen systeem. Voor veel wiskundedocenten misschien een vraag om blij van te worden, maar deze leraar stelde mijn eigenwijsheid toen niet op prijs. De fundamentele onenigheid die ik opbouwde met deze leraar, leidde er toe dat ik uiteindelijk geen eindexamen in wiskunde gedaan heb.

### Verbeeldingskracht

Bij scheikunde werd ik ook teleurgesteld. Het periodieke systeem vond ik prachtig, maar had graag zelf wat meer willen ontdekken. Toen we eens de vraag voorgelegd kregen hoe de molecuulstructuur van $C_6H_6$ er uit zou moeten zien, ging ik enthousiast puzzelen en kwam ruim binnen de gestelde tijd uit op een cirkelvorm. Helaas ging de leraar er niet eens van uit dat iemand van de kinderen in staat zou zijn dit op te lossen. Hij kon niet wachten om de bekende anekdote te vertellen van de geleerde Kekulé, die zich suf gepeinsd had over deze structuur. In een droom zag hij een slang die zijn eigen staart opat en zo kreeg hij het vermoeden dat de benzeenmolecule wel eens een ring zou kunnen zijn. Verontwaardigd was ik, dat wij altijd op onze kop kregen als we zaten te dagdromen, terwijl nu toch weer bleek dat verbeeldingskracht zo belangrijk is bij het oplossen van vraagstukken.

### Gulden snede

Op de kunstacademie werd heel even de gulden snede genoemd, als ideale lengte-breedte verhouding, die in de Renaissance gebruikt werd voor een schilderij of de bladspiegel van een boek. Het werd ons afgeraden de gulden snede te gebruiken als een formule voor schoonheid. Ik vermoedde toch dat er meer achter zat. Deze verhouding bleef in mijn achterhoofd zitten als een spannend gegeven, evenals het gebruik van vaste verhoudingen in de Japanse architectuur, die ook heel even ter sprake kwam.

### Ontwerp breukenleermiddel

Verhoudingen speelden ook de hoofdrol in een ontwerp voor een breukenleermiddel dat ik als student bedacht vanuit het verdelen als handeling. Een onderwijzer die ik geraadpleegd had, adviseerde: 'Denk bij rekenen vanuit taal'. Het leermiddel bestond
uit een serie vierkante transparante puzzels, waarvan de kleur van de zijkanten als 'snijlijnen' de manier van verdelen en onderverdelen aangaven; ***zie figuur 1***.
Kinderen zochten al spelend zelf uit wat ze er van konden leren en schreven er boeiende verslagen over. Ze bleken er nog meer van te kunnen leren dan dat ik er in gestopt had. Hoewel er later verschillende uitgeverijen lovend waren over het concept, werd het nooit op de markt gebracht.
Dat was zowel om technische redenen als vanwege het feit dat het in geen enkele rekenmethode paste. Ik verdiende er op de Kunstacademie wel een prijs mee, als 'veelbelovende' student won ik een reisbeurs waarmee ik naar Japan kon.

### Onderzoek, creatie, educatie

Deze ervaringen hebben mij de uitgangspunten aangereikt dat je als docent je studenten het plezier moet gunnen zelf dingen te ontdekken en hun ruimte kan geven voor eigen interesses binnen het vak. Vooral niet in de weg te gaan staan, maar de weg wijzen, als blijkt dat een student al meer weet of meer talent heeft dan jijzelf. Als ik les geef, probeer ik zoveel mogelijk essenties aan te reiken en stimuleer studenten te gaan spelen met deze gegevens om zelf meer te ontdekken en iets te creëren.
In de eerste plaats ben ik beeldend kunstenaar en ontwerper. Onderzoek is nodig om inspiratie en kennis op te doen. Educatie aan anderen dwingt mij kennis en vaardigheden zo helder mogelijk te presenteren. Maar eigenlijk zijn deze drie aspecten voor iedereen handig om mee bezig te zijn. Ook een leerling steekt meer op door zelf iets te creëren met wat hij geleerd of ontdekt heeft en vervolgens die kennis leert delen.

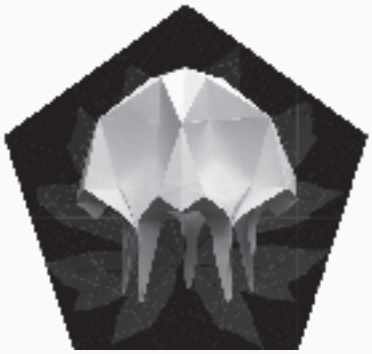
### Ruimte ervaren

In 1997 kreeg ik een opdracht een ruimtelijk kunstwerk te maken voor een festival in een park. Ik wilde daarin gulden snede verhoudingen gebruiken, geen solide bouwwerk met starre lijnen, maar meer een ruimtelijke schets. Ik voerde het uit met sisaltouw en spande het tussen de bomen en de grond. Het werd een vijfzijdige piramide van 5 bij 5 bij 5 meter, vol pentagrammen. Toen ik het voor de eerste keer opbouwde, voelde ik een bijzonder fysiek effect terwijl ik in het midden stond, als of er aan mijn kruin getrokken werd en ik tegelijk steviger op de grond kwam te staan. In die tijd ontmoette ik verder weinig belangstelling voor dit soort effecten, maar bij een expositie zeven jaar later wilden veel

figuur 1 Prototype breukenleermiddel (ontwerp uit 1979)

figuur 2
Structuur van Water, onderzoek van Cees Kamp

figuur 3
Spelen met geometrie



figuur 4
Gevouwen ruimte T5-1 (2009)

mensen in het kunstwerk gaan staan om dit te voelen, alleen, of er in groepjes mee experimenteren.
Om meer te kunnen uitproberen maakte ik een bouwpakket met bamboe stokken in 7 verschillende lengtes, van 16,7 cm tot 3 meter, in gulden snede verhoudingen. De kleinste stokken waren om ontwerpen te maken, de langere om ze in het groot uit te voeren om de ruimtelijke werking te kunnen ervaren.
Waarom deze essentiële verhoudingen behulpzaam zijn bij het ervaren van ruimte, heeft volgens mij te maken met het feit dat je ruimte op zich niet kan zien. Wat je wel kan doen is je positie relateren aan punten in die ruimte en aan de verbindende lijnen en vlakken tussen die punten. De verhoudingen die in de natuur voorkomen, zitten ook in de structuur van ons lichaam en worden door sommige mensen ook in ons elektromagnetisch veld waargenomen. Aangezien ik geen wetenschapper maar kunstenaar ben, richt ik me niet op het proberen te bewijzen van deze vermoedens, maar om dergelijke waarnemingen als inspiratie te gebruiken voor het maken van ruimtelijke ontwerpen en die aan te bieden als ervaringskunst.

## Spelen met geometrie

Albert Einstein stelde dat er geen logische manier is om achter fundamentele wetmatigheden te komen. Intuïtie is volgens hem de enige manier, geholpen door een gevoel van 'orde achter de verschijningsvorm'.
In 2004 organiseerde ik samen met een architecte een studiedag voor o.a. kunstenaars, architecten, yoga- en qi gong-leraren, allen mensen die zich goed bewust kunnen zijn van hun lichamelijke sensaties. Een van de oefeningen die we deden, was proberen waar te nemen wat er gevoelsmatig gebeurde als we ons opstelden in verschillende geometrische figuren. Iedereen vertelde welke fysieke veranderingen men voelde als deel van de figuur zijnde, als waarnemende buitenstaander, of als waarnemer binnenin de figuur. We raakten niet snel uitgespeeld, zo interessant was het om er achter te komen dat je geometrische vormen samen heel goed kan voelen. Later heb ik in workshops dergelijke oefeningen herhaald. In verschillende groepen van mensen werd ongeveer hetzelfde gevoeld in de geometrische vormen. Zo wordt een vierkant algemeen als star ervaren: personen staan lijnrecht tegenover elkaar. Daarmee vergeleken werd een vijfhoek dan vaak als vrijer en dynamischer ervaren, de zeshoek weer steviger en statischer. Vooral de zevenhoek en een Keltisch vlechtwerk met 14 mensen gaf een zeer speciale sensatie.
Onze taal schiet tekort om ervaringen bij zo een onderzoek uit te wisselen. Sommige mensen kunnen zich zeer poëtisch uitdrukken, maar welke woorden gebruik je om exacter uit te leggen wat je fysiek of emotioneel voelt? Daarnaast is de vraag: hoe noem je alle vormen, lijnen, verbindingen die je waarneemt? Je zou kunnen zeggen dat veel mensen 'vorm-analfabeet' zijn. Weinig mensen kunnen in één oogopslag zien of iets een vijfhoek of een zeshoek is. De platonische lichamen, als meest basale ruimtelijke vormen, zijn vaak onbekend, zelfs bij architecten en vormgevers. Het gebruik van rechte hoeken domineert in onze gebouwde omgeving en van de vijf platonische lichamen is alleen de kubus algemeen bekend. De andere vier hebben ook nooit een handigere naam gekregen dan de moeilijk te onthouden Griekse. Voor velen is het nog altijd een verrassing als je ze wijst op de geometrische structuren die zichtbaar zijn in natuurvormen.

## Taal van de creatie

Geometrie gaat over het indelen van ruimte. Het heelal bestaat, naast alle sterren en planeten, voor 99,9999% uit ruimte. Iedere atoom bestaat, naast de elektronen die om een kern draaien, voor 99,999% uit ruimte. Voor ieder deeltje van een deeltje geldt weer hetzelfde: grotendeels ruimte. De indeling daarvan is van wezenlijk belang. Niet los daarvan gaat geometrie ook over trillingsverhoudingen. Aangezien alles een elektromagnetische trilling is: licht, geluid, maar ook materie, is geometrie de basiskennis over de bouwstenen van alles in de natuur.
De geometrie van de natuur is echt een vormentaal. Als je de 'letters' (= getallen en verhoudingen) en de 'woorden' (= vormenidioom) kent, kan je er zowel mee 'lezen' als 'schrijven'. Zelf iets creëren vanuit de basale kennis van deze geometrie leert je iets over de essentie van alle creatie, zowel van de natuur als in bouwkunst, vormgeving en muziek. Het maakt ook iets duidelijk over biodiversiteit, of waarom zoveel mogelijkheden tot eigenheid besloten liggen in één sterke basisvorm. Het is moeilijk om in de grilligheid van de natuur onderliggende structuren te ontdekken als je de geometrische vormentaal niet kent.
Het is behulpzame kennis bij alle innovatie in techniek, kunst en wetenschap. Een voorbeeld. Plato koppelde de vijf ruimtelijke basisstructuren elk aan één van de vijf elementen. Moderne wetenschappers konden daar lange tijd niets mee.
Nu wordt ontdekt (o.a. door Cees Kamp, Wageningen UR) dat clusters van watermoleculen inderdaad een structuur hebben met de icosaëder als basis (***zie figuur 2*** ; zie ook [1]) en er is een studie (van Jean-Pierre Luminet, Laboratoire Univers et Théories, Parijs) naar de vorm van het heelal waar een model uitkomt dat de ruimte (bij Plato het element ether) er uitziet als een dodecaëder.

## Geometrie in het onderwijs

De kennis van geometrie van de natuur lijkt mij zo essentieel dat het me verbaast dat het geen vaste plek heeft in het onderwijs in Nederland. In Mexico is dat bijvoorbeeld van oudsher wel het geval. Toch blijken individuele kinderen en studenten er wel degelijk interesse in te hebben, gezien het enthousiasme tijdens een pilot geometriedag buiten schoolverband voor kinderen van 8 tot 12. Deze groep kinderen stormde bij binnenkomst direct op de boeken met natuurvormen af en stortte zich gretig op het aangeboden geometrisch speelgoed.
Het mooiste vonden ze het bouwen met de grote bamboestokken. In een zelfgebouwde ruimte kunnen gaan staan was voor hen net

zo interessant als ik dat zelf vind.
Bij een serie korte workshops aan middelbare scholieren bij een architectuurcentrum bleken een paar kinderen een fantastisch ruimtelijk inzicht te hebben. Binnen tien minuten construeerden ze een icosaëder met stokken van ruim een meter (***zie figuur 3***). Ook de begeleidende natuurkundeleraar werd enthousiast. Hij was van oorsprong sterrenkundige en wist aanvullend te vertellen dat clusters van sterrenstelsels ook geometrische vormen hebben.
Sommige kinderen die in het gewone onderwijs hinder ondervinden van hun dyslexie, adhd of vormen van autisme, ontdekken door het spelen met geometrie de talentvolle keerzijde van hun 'stoornis'. Geometrie is een studie waarvoor je beide hersenhelften nodig hebt, met elkaar in balans. Het gaat om een evenwicht tussen logisch denken en intuïtie, tussen structuur en vorm, tussen waarden en relaties.

### Van een 2d patroon naar een 3d gevouwen ruimte

Mijn recente werk is een onderzoek naar gevouwen ruimte. Jaren geleden had ik me al eens verdiept in de Japanse kunst van het papiervouwen, naar aanleiding van een ontwerpopdracht voor een verpakking die in een kleine oplage met de hand gemaakt moest kunnen worden. De spelregels voor dit werk zijn dat je niets hoeft op te meten om de vouwlijnen te bepalen; iedere vouwlijn kan je afleiden van de vorige vouwen. Knippen en plakken is er ook niet bij. Het lijkt een enorme beperking om deze regels te hanteren, maar al doende blijkt deze manier juist veel mogelijkheden te bieden om tot een ruimtelijke vorm te komen. Kijk voor ongelofelijke origami op de website van Robert Lang [2] en naar zijn lezing bij *TED.com* [3].
Twee jaar geleden begon ik architectonische vormen te ontwerpen: overkappingen, priëlen en paviljoens, gevouwen uit een plat stuk papier (***zie figuur 4***). Als je, geleid door enige kennis van geometrie, papier in de vorm van een vierkant of regelmatige vijf-, zes- of achthoek gaat vouwen, kom je vanzelf uit op de verhoudingen van de 'heilige geometrie'. Deze term klinkt wellicht wat beladen; 'heilig' betekent in feite 'heel' en het gaat om de geometrische structuur die je kan vinden in natuurlijke vormen. In verschillende tijdperken en culturen is deze geometrie gebruikt voor de bouw van tempels, kathedralen en moskeeën. Liever gebruik ik de term 'vormentaal van de natuur'. Deze manier van ontwerpen levert een logische structuur en tegelijkertijd een esthetische vorm op. Bijzondere ruimtes, waarin o.a. de gulden snede, de (1:√2)- en (1:√3)-verhouding gebruikt zijn en die blijkbaar meespelen in de beleving van ruimte.

### Wiskundeleraar

Mijn eerste expositie met dit ruimtelijke vouwwerk was in het architectuurcentrum van dezelfde stad waar ik 36 jaar geleden op de middelbare school de wiskunde verruilde voor een vak dat mij totaal niet interesseerde, maar wel door een aardige leraar gegeven werd. Even kwam de gedachte in mij op: 'Stel, dat mijn oude wiskundeleraar nog leeft, en stel dat hij dit ziet?' Die gedachte was alweer weggezakt, toen ik na een workshop, die ik in een naastgelegen zaaltje had gegeven, door de suppoost geroepen werd met de mededeling dat meneer O. er was. Hij was onder de indruk. Het was duidelijk dat dit niet de soort wiskunde was die hij zelf beheerste. Hij merkte licht schertsend op dat ik dus toch nog wat van hem geleerd had. Deze ontmoeting was bijzonder voor ons allebei. Hij kwam na ons afscheid nog even terug met een cadeautje. Ik realiseerde me welke rol hij onbedoeld heeft gespeeld in mijn pad naar zelfstudie op dit terrein, dat voor mij tot nieuwe uitkomsten en inzichten leidt. Maar ik denk dat, voor kinderen van nu, het aanbieden van basiskennis van de 'geometrie van de schepping' heel waardevol zou kunnen zijn, zeker als dat op een creatieve en eigen manier verwerkt mag worden.

### Aanbevolen literatuur


- Prya Hemenway (2010): *De geheime code*. Kerkdriel: Librero Nederland b.v.
- Stephen Skinner (2006): *Geheime Geometrie*. Kerkdriel: Librero Nederland b.v.
- Michael S. Schneider (1994): *Ontdek en creëer zelf het universum*. Haarlem: Altamira-Becht.


Meer aanbevolen boeken en websites staan op *www.carlafeijen.box.nl* .

### Noten

[1] *www.sbu.ac.uk/water/index.html* (website van Martin Chaplin)
[2] *www.langorigami.com*
[3] *www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami.html*

### Over de auteur


Carla Feijen (1957) is beeldend kunstenaar en ontwerper, en organiseerde o.a. het kunst-educatieve project 'Dromenatlas' over de verbeeldingskracht van dromen en de workshops 'Spelen met geometrie'.
E-mailadres: *carlafeijen@box.nl*


## Mededeling / Wisbase.nl - een toetsenbank

*WisBase.nl* is een website voor wiskundeleraren en door wiskundeleraren en is al ruim 10 jaar dé plaats waar wiskundetoetsen uitgewisseld worden. Het delen van gemaakte toetsen staat centraal, maar er is ook steeds meer materiaal toegevoegd dat in lessen gebruikt kan worden.
Deelnemers van WisBase leveren bij inschrijving drie zelfgemaakte toetsen in, die vrij zijn van auteursrechten. Deze inschrijving geeft gedurende 1 jaar toegang tot al het materiaal in WisBase. Na dat jaar kan het lidmaatschap telkens verlengd worden door één nieuwe toets in te leveren. Vrijwilligers beheren de verschillende onderdelen van de website, en controleren de toetsen op authenticiteit.

Het komende jaar gaat er veel veranderen: er is een nieuwe website in ontwikkeling die het zoeken van toetsen eenvoudiger moet maken.
En, voor leden van de NVvW is er nu een *speciale aanbieding*: op de pagina *http://nvvw.wisbase.nl/* kunt u zich aanmelden voor gratis deelname tot 1 maart 2012! Indien u deelnemer wenst te blijven, levert u vóór 1 maart 2012 slechts twee toetsen in (natuurlijk vrij van auteursrecht).

Meer informatie? Schrijf daartoe een e-mailbericht aan de beheerder, Erik van den Hout (*evdhout@wisbase.nl*).

# Het bewijzen van de stelling van Pythagoras

## EEN LESSENSERIE MET EEN BESCHRIJVING VAN HET GEMAAKTE MATERIAAL, UITVOERING EN EVALUATIE

[ Kristie Ambrosius ]

**Het opstellen van bewijzen binnen de synthetische meetkunde is voor leerlingen van vwo-5 en vwo-6 een pittig examenonderdeel. In dit artikel beschrijft Kristie Ambrosius haar ervaring met het geven van een extra lessenserie op het gebied van het bewijzen binnen die meetkunde. Deze lessenserie heeft zij geschreven voor haar eindopdracht voor het vak vakdidactiek van de master wiskunde aan de HAN.**

### Inleiding

'*Als u het voordoet op het bord, dan snap ik het wel, maar hoe moet ik nu zelf op een idee komen om een begin te maken met een bewijs?*'
Dit is een vraag die waarschijnlijk veel wiskundedocenten te horen krijgen van hun leerlingen tijdens het behandelen van een hoofdstuk over de synthetische meetkunde. Ook ik heb deze vraag geregeld van leerlingen gekregen. Dit bracht mij op het idee om extra lesmateriaal te maken over het komen op ideeën die nodig zijn om een stelling te bewijzen. Omdat ook het correct opschrijven van een bewijs sterk samenhangt met het begrijpen van wat je wel en niet nodig hebt om een stelling te bewijzen, is daar ook veel aandacht aan geschonken in de lessenserie.
In dit artikel wordt een beschrijving van de ontworpen lessenserie gegeven; welke ideeën daaraan ten grondslag liggen, een beschrijving van de uitvoering en een evaluatie van de lessenserie.
De klas waarmee gewerkt is, is een vwo-5 klas met het vak wiskunde D, bestaande uit 14 leerlingen.

### Uitgangspunt: de stelling van Pythagoras

Als uitgangspunt voor de lessenserie is gekozen voor de stelling van Pythagoras. De stelling is eenvoudig toe te passen en wordt door leerlingen ook geregeld toegepast. Het aardige van deze stelling is dat zij op heel veel verschillende manieren te bewijzen is en dat er veel verschillende bewijzen van diverse moeilijkheidsgraad zijn.
Een goede keuze maken voor de bewijzen die behandeld worden in deze lessenserie, was natuurlijk essentieel. Daarbij is gelet op voldoende variatie in de verschillende onderwerpen binnen de synthetische meetkunde, zoals de cirkel (de stelling van Thales, koordenvierhoeken), gelijkvormigheid en congruentie, vlakke figuren en hun oppervlakte en het rekenen met letters.

### De start van een bewijsopgave

Na dit stadium kwam eigenlijk het belangrijkste, namelijk het doel van deze lessenserie: 'Hoe kan ik ervoor zorgen dat leerlingen de ideeën om te beginnen met een bewijs zelf bedenken?'
Daarvoor heb ik achtergrondinformatie uit het *Elwierkatern Meetkunde* van het *Handboek vakdidactiek* (zie: *www.fi.uu.nl/elwier/materiaal/handboek*) gebruikt en verschillende methoden naast elkaar gelegd (*Getal & Ruimte*, *Moderne Wiskunde*, *de Wageningse Methode* en *Pascal*).
Uiteindelijk was mijn conclusie dat de leerlingen heel bewust bezig moeten zijn met het vraagstuk door te kijken naar wat gegeven is en wat bewezen moet worden.
Als docente heb ik met de leerlingen veelvuldig gesproken over de vraag hoe zij vooruit moeten denken (wat moet bewezen worden) en dat zij terug moeten denken (wat gegeven is). Dit moet als het ware bij elkaar uitkomen en dan is het een kwestie van het bewijs netjes op papier schrijven. Het schema dat leerlingen telkens gestructureerd moesten volgen ziet er als volgt uit.

**Hoe pak je een bewijs aan?**

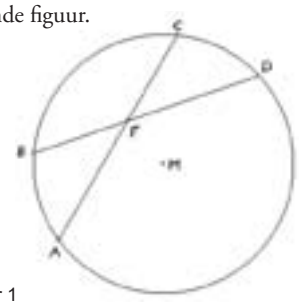
1. *Verkennen.* Maak een tekening met de gegevens erin. Dit heet een *Analysefiguur*. Misschien zie je nu meteen al hoe je bewijs eruit moet zien. Geef het bewijs, als dat het geval is.
Zo niet, ga dan naar stap 2.
2. *Analyseren.* Het analyseren bestaat uit drie onderdelen:
- *Vooruitdenken:* Probeer uit de gegevens meteen een volgende stap af te leiden.
- *Terugdenken:* Bedenk uit wat bewezen moet worden, wat de voorlaatste stap zou moeten zijn.
- *Plan maken:* Probeer een verband te leggen tussen de resultaten van het vooruitdenken en het terugdenken.
3. *Bewijs geven.* Noteer het bewijs volgens het bewijsschema (gegeven, te bewijzen, bewijs).

### ICT als hulpmiddel

Bij deze lessenserie is het gebruik van ICT ingezet. Leerlingen zijn bij ons in vwo-4 op het Dendron College gewend om bij het meetkundehoofdstuk te werken met Geogebra. Bij het lesmateriaal hoorde een werkblad voor de leerlingen om het vermoeden te ontwikkelen met betrekking tot de constante hoek en ze moesten het vermoeden over de machtstelling ontwikkelen.
De opgave over de machtstelling zag er als volgt uit.

---

**Opgave 1** – Teken een cirkel met middelpunt $M$ en op de cirkel de punten $A$, $B$, $C$ en $D$. Verbind vervolgens $A$ met $C$ en $B$ met $D$. Het snijpunt noem je $F$. Zie onderstaande figuur.




figuur 1

**Opgave 2** – Vervolgens laat je achter elkaar de lengtes van $AF$, $BF$, $CF$ en $DF$ berekenen met Geogebra.

**Opgave 3** – Gebruik nu het invoerveld om de volgende twee berekeningen te maken.
- De lengte van $AF \times$ de lengte van $CF$.
- De lengte van $BF \times$ de lengte van $DF$.
(*Bedenk goed hoe je dit precies moet invoeren.*)
Bekijk de uitkomsten hiervan. Wat valt je op?

**Opgave 4** – Bekijk nu wat er gebeurt als je de punten $A$, $B$, $C$ of $D$ gaat verslepen. Schrijf op wat er gebeurt.

**Opgave 5** – Probeer het vermoeden dat je hebt gekregen met behulp van de bovenstaande opdrachten zo duidelijk mogelijk te formuleren.

---

Vervolgens hebben ze ook de bewijzen van deze twee stellingen moeten geven. In het begin is het even lastig voor de leerlingen om meteen te zien welke kant het bewijs op gaat. Maar in eerdere lessen zijn we al heel bewust bezig geweest met alle kennis die ze tot dat moment kunnen gebruiken. Leerlingen moeten als het ware hardop nadenken en zich het volgende afvragen:

- Heb ik te maken met een cirkel?
  - Misschien kan ik in deze figuur wel een koordenvierhoek zien? Wat zou een koordenvierhoek mij opleveren?
  - Of is de diameter van de cirkel getekend, zodat ik de stelling van Thales kan gebruiken?
- Herken ik driehoeken in de gegeven figuur?
  - Misschien herken ik gelijke hoeken of gelijke zijden?
  - Hierdoor zijn er misschien wel gelijkvormige driehoeken of congruente driehoeken?
- Heeft datgene wat bewezen moet worden te maken met hoeken of lengtes?
  - Welk 'gereedschap' heb ik om een bewijs te leveren over gelijke lengtes?
  - Waar doet mij datgene wat bewezen moet worden aan denken?

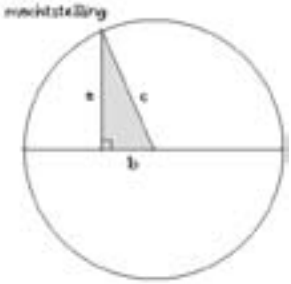
Door op deze manier over een opgave na te denken zijn er verschillende dingen die uitgesloten kunnen worden om een mogelijk bewijs te leveren en blijft in dit geval gelijkvormigheid van driehoeken als 'gereedschap' over.

In het geval van de opgave over de machtstelling zijn de leerlingen met behulp van Geogebra alleen maar bezig geweest met het tekenen van een cirkel en lengtes van lijnstukken. Zo zijn ze als het ware in een voorstadium al bezig geweest met onderdelen van wiskunde die in het bewijs terugkomen.

ICT heeft hier een meerwaarde gehad, omdat de leerlingen heel bewust bezig zijn met de stelling; zij ontdekken zelf wat de stelling is, ze gaan deze bewijzen en vervolgens kunnen ze deze ook weer direct toepassen bij een andere bewijsopgave (zodra er namelijk een bewijs geleverd is van een stelling, mag je vervolgens deze stelling gebruiken in een ander bewijs).
Doordat ze in Geogebra actief met de stelling bezig zijn geweest, kunnen ze deze stelling waarschijnlijk ook beter onthouden en zullen eerder op het idee komen om deze stelling in te zetten bij een bewijsopgave.

## Vooruitdenken, terugdenken, doorzettingsvermogen

Bij het geven van het bewijs van de machtstelling kwam het vooruitdenken en het terugdenken heel goed uit de verf. Leerlingen weten namelijk dat ze de machtstelling moeten bewijzen, ze zien dat de vermenigvuldiging van twee lengtes aan elkaar gelijk moet zijn; dit lijkt op verhoudingen, dus waarschijnlijk moet je iets doen met gelijkvormigheid.
Voor leerlingen werkte het erg verhelderend om telkens de nadruk te leggen op het vooruitdenken en het terugdenken.
Na deze les hebben de leerlingen de stelling van Pythagoras bewezen met behulp van de machtstelling.
Het plaatje dat de leerlingen kregen staat ***in figuur 2***.




figuur 2

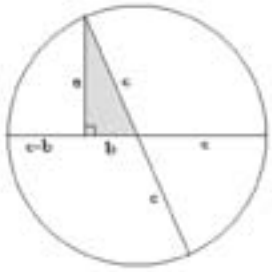
Leerlingen kregen dus een cirkel gegeven met daarin een rechthoekige driehoek met de letters *a*, *b* en *c* bij de zijden.
In deze bewijsopgave speelde ook doorzettingsvermogen een rol. Leerlingen moesten namelijk op zoek gaan naar twee koorden die elkaar binnen of buiten de cirkel snijden, maar ze moesten ook beseffen dat ze de letters *a*, *b* en *c* moesten gebruiken om uiteindelijk tot de stelling van Pythagoras, $c^2 = a^2 + b^2$, te komen.
In eerste instantie heb ik als docente de koorden zelf in de figuur getekend, leerlingen moesten de machtstelling toepassen en hierbij kwamen ze uit op $c^2 = c^2$. Dit leverde dus niets op, dus moesten ze op zoek gaan naar twee andere snijdende koorden. Leerlingen gaven niet op, ze zijn heel intensief bezig geweest met het zoeken naar geschikte koorden om te kunnen gebruiken.
Twee dingen hebben hier dus een rol gespeeld:

- Het op zoek gaan naar twee geschikte koorden die uiteindelijk, met de toepassing van de machtstelling, de stelling van Pythagoras op zou leveren.
- Het uitdrukken van de lengtes van lijnstukken in *a*, *b* en *c*.

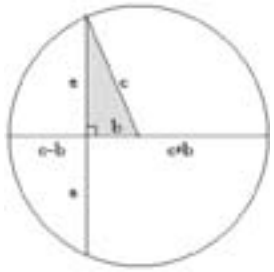
Wanneer een leerling niet op de twee juiste koorden uitkwam, heb ik concreet vragen gesteld:

- Waar zou je een lijnstuk kunnen verlengen zodat er twee koorden ontstaan?
- Wijs de twee koorden nu eens aan, probeer deze koorden uit te drukken in de letters *a*, *b* en *c* en pas de machtstelling toe.
- Levert dit de stelling van Pythagoras op?

Leerlingen moeten dus ook niet meteen verwachten dat zij bij de eerste poging het bewijs meteen vinden, maar ze moeten soms langer zoeken naar de oplossing, meerdere mogelijkheden proberen. En daarom is doorzettingsvermogen bij het onderdeel meetkunde toch wel belangrijk.
Uit een klassikaal gesprek bleek ook dat ze het interessant vonden om te zien dat de eerste twee gekozen koorden niks opleverden; ***zie figuur 3*** en ***figuur 4***.




figuur 3 Deze twee koorden leveren niets op




figuur 4 Het kiezen van een andere koorde leidt wél tot de stelling van Pyhtagoras

Er zijn natuurlijk tal van verschillende bewijzen aan bod gekomen, maar waar het hier in deze lessenserie om gaat is de manier waarop je ermee omgaat met de leerlingen.

## Afsluiting lessenserie met een werkstuk

Ik heb de lessenserie afgesloten met het opgeven van een werkstuk.[1]
Leerlingen kregen 4 opgaven om te bewijzen. De opgaven waren zo gemaakt, dat er ook van alles uit de lessen in terugkwam. Opgave 1 was niet voor alle leerlingen hetzelfde. Opgave 2, 3 en 4 wel. In de les hebben ze hieraan in tweetallen gewerkt. Ze hebben vervolgens een week de tijd gehad om dit thuis of op school af te maken.
Inmiddels waren ze er wel achter dat ze niet allemaal dezelfde opgaven hadden. Er is dus veel overlegd met elkaar. Maar dit vond ik geen probleem, want iedereen deed actief mee en wat is nou mooier om te zien: 14 leerlingen die bij elkaar zitten in de mediatheek aan een ronde tafel met alle losse papieren, aantekeningen, kladblaadjes uitgestald op tafel die druk met elkaar overleggen? Ook hoorde ik van

Bewijzen van de stelling van Pythagoras

Eindopdracht

**De opdracht:**
1. Je gaat bij deze opdracht werken in tweetallen (je mag zelf bepalen met wie je werkt).
2. Je hebt een week de tijd om hieraan te werken.

mijn collega, die wiskunde B geeft aan deze klas, dat de leerlingen in het begin van haar lessen telkens bezig waren met de opgaven van het werkstuk.
Dit is wat ik met wiskunde, in dit geval meetkunde, wil bereiken: leerlingen laten puzzelen en overleggen over bewijsopgaven. Deze opgaven waren allemaal open opdrachten met bij elke opgave de vraag: 'Bewijs de stelling van Pythagoras'.

### Evaluatie

Naar mijn mening is de lessenserie geslaagd, leerlingen hebben door middel van een vragenlijst en een klassikaal evaluatiegesprek met mij hun mening gegeven over de lessen en het lesmateriaal. De volgende opmerkingen werden door de leerlingen gemaakt:

- Dit is de eerste keer dat ik wiskunde interessant vind.
- Volgens mij hebben we hier heel erg veel aan gehad voor straks in vwo-6.
- Je leert bepaalde denkstappen, die je anders niet zou nemen.
- Ik heb nu zelf ideeën bedacht om een opgave te bewijzen; eerst kon ik het alleen volgen als de docent het voordeed.
- Dit is veel leuker en uitdagender dan werken uit een boek.

Kortom, deze lessenserie is een goede aanvulling geweest op de reguliere lesstof van de synthetische meetkunde.
Met behulp van de evaluatie is inmiddels het lesmateriaal aangepast, zodat deze lessenserie volgend jaar weer ingezet kan worden.
Als aanvulling zou het mooi zijn om de lessenserie af te sluiten met primitieve pythagoreïsche drietallen. Het benodigde lesmateriaal is daarvoor in ontwikkeling.

### Tot slot

Het verdient aanbeveling om extra tijd en aandacht te schenken aan het onderwerp 'bewijzen in de vlakke meetkunde'. Het lesmateriaal is te bekijken en aan te vragen via het onderstaande e-mailadres.

### Noot

[1] Deze tekst is te downloaden via: *www.nvvw.nl/media/files/euclides/werkblad872.pdf* (PDF-formaat, ca. 210 kB)

### Over de auteur

Kristie Ambrosius is docente wiskunde aan het Dendron College te Horst en tweedejaarsstudent van de master wiskunde van de HAN.
E-mailadres: *amb@dendron.nl*

**Leuk voorbeeld nodig?** **Opfrissen of bijscholen?** **Toepassingen van wiskunde?**

## Nu is er Wiskunde in Werking: van A naar B!

*Een bijzonder inspirerend boek voor velen:* eerstejaars studenten met wiskunde A die nu voor een exacte richting kiezen, studenten met wiskunde B die wat willen opfrissen, docenten op zoek naar verdieping of een origineel voorbeeld, en alle anderen met belangstelling voor toepassingen van wiskunde.
Deze tekst behandelt de basis van de "calculus". De stof wordt zo aangeboden dat de praktische bruikbaarheid zo groot mogelijk is; er wordt veel aandacht besteed aan het bestuderen van concrete voorbeelden uit diverse vakgebieden en het maken van oefeningen. Daarnaast wordt de stof zoveel mogelijk geïllustreerd aan de hand van toepassingen, waarbij de verbinding tussen de wiskunde en de toepassing zeker zo belangrijk is als de wiskunde zelf.

Deel 70
**Wiskunde in Werking: van A naar B**
**M. de Gee**
480 blz. (kleur), €34,-
ISBN 978-90-5041-127-1

**Epsilon Uitgaven** **bestellen bij boekhandel of via www.epsilon-uitgaven.nl**

# Boekbespreking / De Pythagoras Code

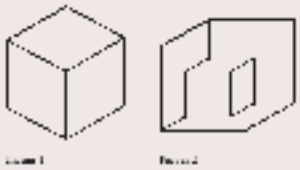
[ Ernst Lambeck ]

**Auteurs: Alex van den Brandhof, Jan Guichelaar, Arnoud Jaspers**
**Ondertitel: Het beste uit een halve eeuw wiskunde voor liefhebbers**
**Uitgever: Prometheus/Bert Bakker, Amsterdam (2011)**
**ISBN13: 978 90 3513646 5**
**Prijs: € 19,95 (272 pagina's, paperback)**

### Een ezelsbruggetje

U die de zevens wilt zeven. Ik ben het ezelsbruggetje nooit vergeten. Tel de letters van ieder woord (1, 3, 2, 6, 4, 5) en je krijgt het kenmerk om 'snel' te kunnen zien of een getal *fedcba* deelbaar is door 7. Dat is het geval precies dan als
$1 \times a + 3 \times b + 2 \times c + 6 \times d + 4 \times e + 5 \times f$
te delen is door 7. Zo is bijvoorbeeld 4111 niet deelbaar door 7, want
$1 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 1 + 6 \times 4 = 30$ is het ook niet. De regel is gebaseerd op het rekenen modulo 7: $1 \equiv 1$, $10 \equiv 3$, $100 \equiv 2$, enzovoort. Ik heb het ezelsbruggetje voor het eerst gezien in *Pythagoras*, ergens in de jaren '70. Als middelbare scholier had ik destijds een abonnement op het blad. Ik zou het artikel over de delingskenmerken graag nog eens terug willen zien. Bij het verschijnen van *De Pythagoras Code*, een bloemlezing van de beste artikelen en puzzels uit 50 jaar *Pythagoras*, heb ik dan ook gekeken of dit artikel misschien in het boek zou staan. Helaas. Maar ja, als je uit veel moet kiezen… De samenstellers hebben wel een mooie, gevarieerde selectie gemaakt. Om u daarvan een idee te geven volgen hier zo maar drie voorbeelden van artikelen en puzzels.

### Hol en bol



Wat is er volgens u te zien ***in figuur 1***? Ik vermoed dat velen van u er een kubus in zien. De getekende regelmatige zeshoek met drie halve diagonalen wordt door ons direct herkend als een kubus. We kunnen er zelfs op twee manieren een kubus in zien. Het middelpunt van de zeshoek is in de eerste manier een hoekpunt van de kubus dat naar ons is toe gericht, in de tweede manier is het het verst van ons afliggende hoekpunt. In het eerste geval zouden we de figuur bol, in het tweede geval hol kunnen noemen. ***In figuur 2*** zijn twee van dergelijke figuren in elkaar getekend. In deze afbeelding zijn vier verschillende interpretaties mogelijk. Bruno Ernst gebruikte zo'n vijftig jaar geleden dit plaatje om de prent 'Hol en bol' van Escher te bespreken in *Pythagoras*. Nu ook te vinden in dit boek.

### Competitie

Vijf teams spelen onderling een voetbalcompetitie. Elke twee teams spelen precies eenmaal tegen elkaar. Voor iedere gespeelde wedstrijd krijgt een team 3 punten als het wint, 1 punt als het gelijk speelt en 0 punten als het verliest. Nadat alle wedstrijden zijn gespeeld, zijn de totale scores van de vijf teams 2, 4, 5, 6 en 7 punten. Kunt u de uitkomst van elk van de tien gespeelde wedstrijden achterhalen? Eén van de meer dan 150 puzzels of opgaven in *De Pythagoras Code*. Het antwoord op het voorgaande probleem? De oplossingen van alle puzzels staan achterin het boek.

### Een touwtje om de aarde

We spannen een (niet rekbaar) touw strak langs de evenaar precies om de aarde. We knippen het touw open en voegen een stuk van één meter lang in. Als we het touw overal even ver van de aarde willen houden, hoe ver van de aarde moeten we het touw dan houden? Ongeveer 16 cm. Een bekend vraagstuk met een bekend antwoord.

Maar weet u ook het antwoord op de volgende vraag? Stel dat we dat 1 meter langere touw op één plaats optillen. Hoe ver komt het verste punt dan van de aarde? Klaas Pieter Hart schreef voor *Pythagoras* een artikel over dit probleem.

### Lezen en doen

Het boek bestaat uit zeven hoofdstukken, getiteld Denkertjes, Geschiedenis van de wiskunde, Puzzels en spellen, Wiskunde en kunst, Meetkunde, Getallen en Dionigma's. Vier hoofdstukken bevatten artikelen, drie hoofdstukken puzzels. Er is dus wel het nodige om te lezen, maar er is vooral veel te doen. Hoewel de lay-out niet echt uitnodigend is – van een uitgave bij een jubileum verwacht je toch iets veel kleuriger – is de inhoud precies wat je van *Pythagoras* zou verwachten. Het biedt de wiskundeliefhebber dan ook veel blader- en puzzelplezier. Een aanrader.

**Over de recensent**
Ernst Lambeck is docent wiskunde aan het Newmancollege te Breda. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides* en voorzitter van de Nederlandse Opgavencommissie van de Kangoeroe.
E-mailadres: *elambeck@newmancollege.nl*

# Het Geheugen

[ Harm Jan Smid ]

**Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pakt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.**

## De inspecteur komt!

### 'Voortgezet onderwijs in de gevarenzone!'

Dat was even schrikken, die kop in de NRC van 20 april van dit jaar. Het gemiddelde van de eindexamencijfers voor Nederlands, Engels en wiskunde schijnt de afgelopen jaren iets gedaald te zijn, en dus slaat de inspectie alarm. Gelukkig weet de inspecteur-generaal ook al wiens schuld dat is: het ligt aan de leraren die niet goed lesgeven. Het is maar dat u het weet!

Ik heb geen idee meer wie 'de inspectie' is. Als je op de website van de inspectie kijkt vind je daar alleen de namen van de inspecteur-generaal en twee hoofdinspecteurs, 'gewone' inspecteurs worden daar niet genoemd. Zouden die nog bestaan? Vroeger kenden we onze eigen inspecteurs wel. Inspecteur werd je na een carrière in het onderwijs, bekroond met een benoeming als directeur of rector, en sommigen werden daarna nog uitverkoren tot het inspectoraat. De eerlijkheid gebiedt te zeggen dat zoiets niet altijd gebeurde omdat betrokkene het zo goed gedaan had als rector of directeur. Het was ook wel eens een manier om een vastgelopen situatie op een school op te lossen; wegpromoveren kwam natuurlijk ook vroeger voor.

Hoe dan ook: inspecteurs waren bekende personen in de onderwijswereld. Ze waren leraar geweest en werden verondersteld zich in het bijzonder met hun vroegere vak bezig te houden. Wiskunde-inspecteurs werden uitgenodigd op de jaarvergadering van Wimecos of NVvW, waarvan ze trouwens vaak lid waren geweest. Er was regelmatig overleg tussen het verenigingsbestuur en die inspecteurs, en dat was ook heel verstandig want ze hadden heel wat invloed op zaken betreffende het wiskundeonderwijs.

Wiskunde-inspecteurs zijn er geloof ik niet meer, in ieder geval kan ik ze niet aan u voorstellen. Gelukkig is dit een historische rubriek en inspecteurs uit het verleden ken ik wél. Graag laat ik u daarom kennismaken met twee inspecteurs die een belangrijke rol in de beginfase van ons wiskundeonderwijs hebben gespeeld.

### De eerste Inspecteur der Latijnse scholen

De allereerste inspecteur van wat we nu het voortgezet onderwijs noemen was **Henricus Wijnbeek**, die leefde van 1772 tot 1866. Hij begon zijn loopbaan als ondermeester op een eenvoudige school in Leiden. In zijn vrije tijd – 's avonds en 's nachts dus – studeerde hij ijverig verder, kreeg een beurs voor de Leidse universiteit en promoveerde in de rechten. In 1816 werd hij benoemd als de eerste (en tientallen jaren de enige) inspecteur van de Latijnse scholen. In die functie bezocht hij ieder jaar een flink aantal van de circa 60 Latijnse scholen die er toen in de Noordelijke Nederlanden waren. De verslagen die hij voor zijn minister van die bezoeken schreef, zijn grotendeels nog bewaard in het Nationaal Archief: fascinerende lectuur!

Wijnbeek was geen wiskundige, maar hij had wel veel belangstelling voor het wiskundeonderwijs. Dat was in 1816 op de Latijnse scholen verplicht gesteld, maar het stelde in die beginjaren vaak nog niet veel voor. Dat beviel Wijnbeek allerminst, en hij nam daarover bepaald geen blad voor de mond. Zo schreef hij in 1825 over het wiskundeonderwijs aan de Amsterdamse Latijnse school:

*'Maar met het wetenschappelijke, vooral het wiskundige onderwijs, is het ellendig gesteld. Curatoren hebben goed gevonden al dat onderwijs op te dragen aan elk der leraars voor zijne klasse, hetzij hij daartoe de nodige bekwaamheid bezit ofte niet. Er zijn er die de wiskunde onderwijzen zonder enig denkbeeld van wiskunde te hebben.'*

Wijnbeek pleitte daarom voor 'afzonderlijke onderwijzers' in de wiskunde. Daar voelde de overheid niets voor. Voorlopig hield ze nog vast aan de gedachte dat de docent klassieke talen de bijvakken, zoals wiskunde, er maar bij moest doen. Wel werd Wijnbeek op studiereis naar Pruisen gestuurd om daar de lerarenopleiding te bestuderen. Hij schreef daarover een enthousiast rapport, en even leek het erop dat zoiets ook in Nederland tot stand zou komen. Er kwam niet veel van terecht, en toen na enige jaren bleek dat er geen enkele verplichting tot het volgen van die opleiding was, verliep de hele zaak.

Niet alleen de leraren, ook het programma was in die beginjaren een probleem. Het voorgeschreven programma bestond uit vier woorden: 'de beginselen der wiskunde', en daar kon iedere school van maken wat ze wilde. Mede door de aandrang van Wijnbeek kwam er in 1826 een wat uitvoeriger programma tot stand, met zelfs een aanbeveling tot het gebruik van bepaalde schoolboeken (***zie figuur 1***). In 1828 bezocht Wijnbeek de scholen in Noord- en Zuid-Holland en Utrecht, en richtte daar bij 'zijn bijzondere opmerkzaamheid' op het wiskundeonderwijs. ***Figuur 2*** geeft een stukje van zijn verslag van de stand van het wiskundeonderwijs op de Latijnse school te Delft. Door het nieuwe programma werd het voor leraren klassieke talen zonder speciale wiskundekennis vrijwel ondoenlijk om wiskunde te blijven geven. Dat programma werd een stimulans om aparte docenten voor dat vak aan te stellen, en zo kreeg Wijnbeek via een omweg toch zijn zin.

### De eerste Inspecteur van de HBS

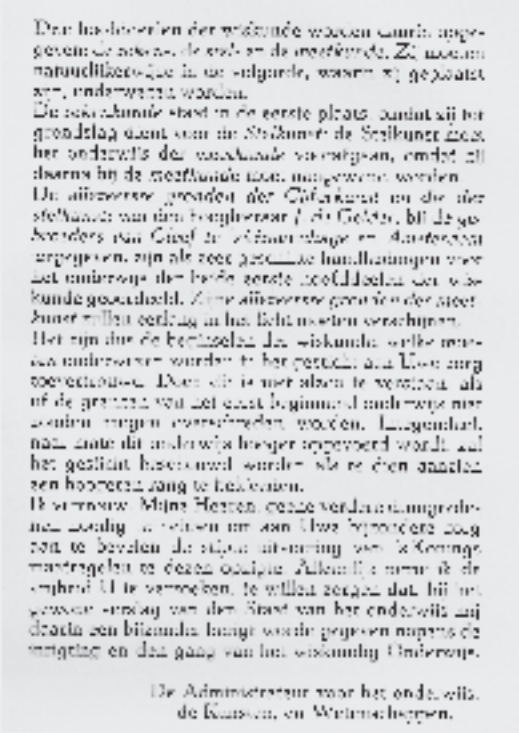
**Daniel Jan Steyn Parvé** (1825-1883) was wél een echte wiskundige. Na zijn promotie in Groningen werd hij in 1848 leraar aan het Koninklijk Atheneum in Maastricht. Die school had twee afdelingen: een traditionele Latijnse school en een moderne vierjarige afdeling, een soort voorloper van de HBS. Steyn Parvé werd al snel de rector van die laatste afdeling. Later werd hij commies op de afdeling onderwijs van Binnenlandse Zaken, waar hij een belangrijke rol speelde bij de voorbereiding van de wet van 1863, waarbij de HBS werd ingevoerd. Hij en nog twee anderen werden benoemd als de eerste inspecteurs voor deze nieuwe schoolsoort.

Steyn Parvé heeft als ambtenaar en als inspecteur veel voor de HBS betekend,

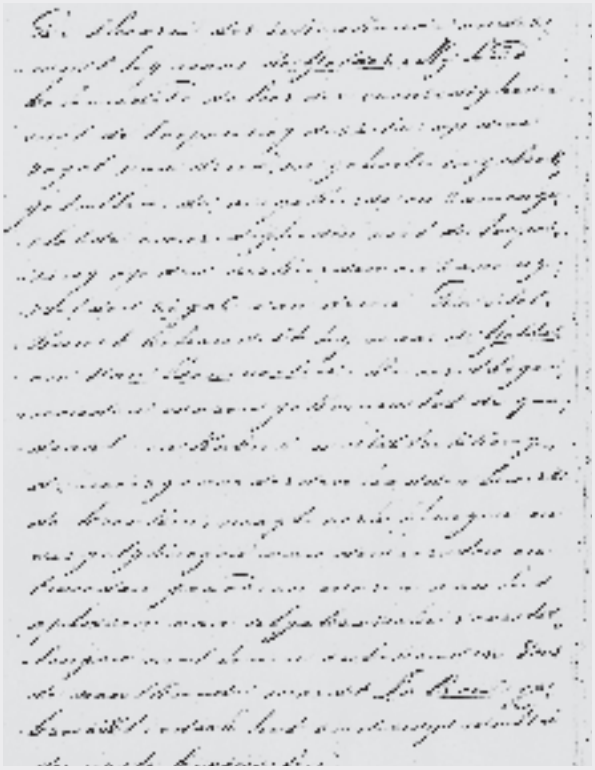
maar het interessante is dat hij zijn opvattingen, die hij later grotendeels in de praktijk zou brengen, al als piepjong docent op papier zette. Hij deed dat in een brochure *Het Wiskundig Onderwijs in Nederland*, van 1850. Die brochure was een polemische reactie op een positief verslag over de stand van het wiskundeonderwijs, op grond van de resultaten van het staatsexamen van 1849. Steyn Parvé was het daar helemaal niet mee eens en schreef een brochure waarin hij een somber beeld van het Nederlandse wiskundeonderwijs schilderde; ***zie figuur 3***. Steyn Parvé had beslist geen last van valse bescheidenheid, want toen hij die brochure in het najaar van 1849 schreef had hij nog maar amper een jaar onderwijservaring, en je kunt je met reden afvragen waarop hij al die wijsheid eigenlijk baseerde. Zijn brochure werd dan ook grondig afgekraakt door J.H. van Sillevoldt, de auteur van het positieve verslag uit 1849; ***zie figuur 4***. Maar Steyn Parvé had niet alleen kritiek, hij schetste ook de contouren voor een moderner Nederlands wiskundeonderwijs. Zijn voorstellen leken sterk op wat er op het Atheneum in Maastricht inmiddels was ingevoerd, en dat leek weer sterk op wat er vlak over de grens, toen een onderdeel van Pruisen, gebeurde. Op de uitvoerbaarheid van die voorstellen had Van Sillevoldt heel wat gerechtvaardigde kritiek, en het programma dat Steyn Parvé voorstelde, en volgens hem best in vier jaar kon worden afgewerkt, werd uiteindelijk op de HBS over vijf jaar verdeeld. Jaren later moest Steyn Parvé zelf toegeven dat ook dat nog een overladen programma opleverde.
Met zijn brochure echter, hoe veel daarop ook aan te merken was, vestigde Steyn Parvé zijn naam en dat heeft hem ongetwijfeld geholpen bij zijn verdere loopbaan.

**Rekenfoutje...**

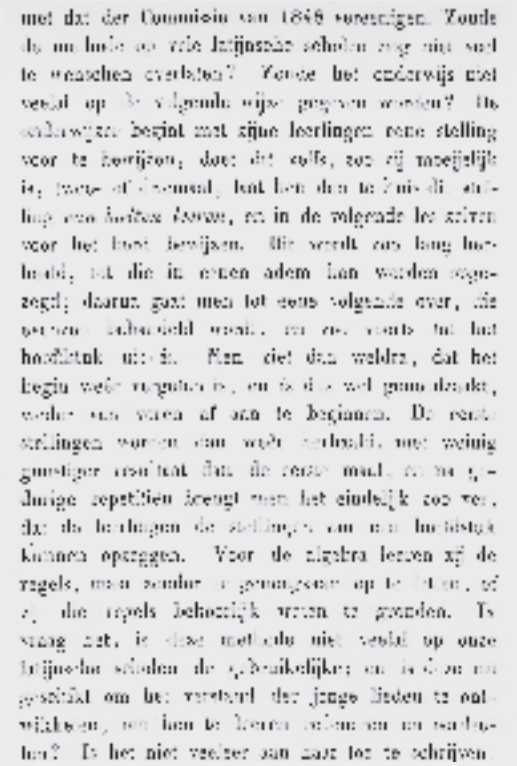
De inspecteurs Wijnbeek en Steyn Parvé hebben een belangrijke rol gespeeld bij de bevordering van het wiskundeonderwijs in Nederland. Nu moeten we de rol van de inspectie in het verleden ook weer niet idealiseren, want de machtige positie die deze heren hadden, werkte ook wel eens negatief. Bekend is het voorbeeld van inspecteur Jensema. Hij was inspecteur in het begin van de vorige eeuw en hij wordt er voor aangezien dat hij zo'n beetje in zijn eentje alle vernieuwingen in het wiskundeonderwijs tegenhield.
Ik heb een beetje mijn twijfels bij het alarmerende verhaal van de huidige inspectie over de stand van het wiskunde-



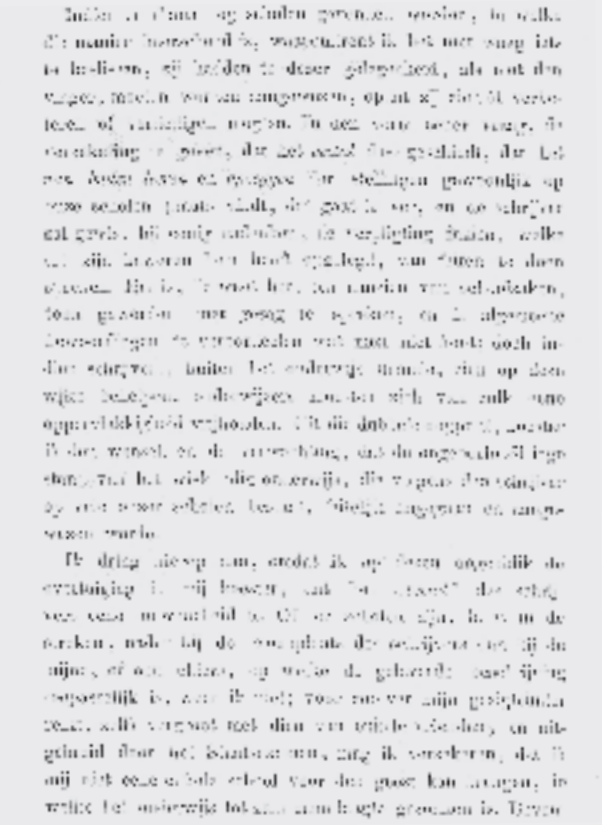
figuur 1 Deel van de circulaire met een toelichting op het voorgeschreven programma uit 1826. De aanbevolen boeken van Jacob de Gelder werden in de decennia hierna ook het meest gebruikt.



figuur 2 Zie ook Noot [1]. De wiskunde in Delft werd onderwezen door de 'schoolonderwijzer' Van der Schaft, volgens Wijnbeek 'wel berekend' voor zijn taak. Uit het verslag blijkt dat de gebruikte boeken en het programma van behoorlijk niveau waren.



figuur 3 Steyn Parvé schetst hier een droevig beeld van het wiskundeonderwijs. Het is de vraag of dat allemaal wel klopte, maar dit beeld is wel blijven hangen.



figuur 4 De gepeperde reactie van J.H. van Sillevoldt. Hij werd later de eerste directeur van de gemeentelijke HBS in Den Haag, en kreeg toen ongetwijfeld het nodige met inspecteur Steyn Parvé te maken.

onderwijs, maar één ding moeten we ze nageven: ze hebben *zelf* bewezen dat het niet goed gaat met het rekenonderwijs. Vlak nadat immers inspecteur-generaal Annette Roeters de alarmbel luidde, werd ze op het matje geroepen bij haar minister. Die had namelijk de Tweede Kamer maandenlang verteld dat bezuinigingen op het buitengewoon onderwijs echt noodzakelijk waren omdat de kosten de pan uitrezen. Volgens gegevens van de inspectie waren de laatste jaren wel 65% meer leerlingen daarheen verwezen! Pas toen enkele kamerleden volhielden dat zoiets gewoon niet kon kloppen, werd er nog eens naar die cijfers gekeken en ja hoor: foutje! Het ging om 15%, en het treurige is natuurlijk niet dat er een fout gemaakt werd, maar dat kennelijk niemand bij de inspectie eens ging nadenken toen er zo'n onwaarschijnlijk percentage uitkwam.
Toch maar eens een cursusje realistisch rekenen volgen…

## Noot

[1] Transcriptie van de tekst ***in figuur 2***.
De theorie der rekenkunde onderwijst hij naar de Gelder. Hij had behandeld de leer der evenredigheden met de toepassing derzelve op den regel van drien, in geheele en gebroken getallen, de omgekeerde en zamengestelde evenredigheden met de toepassing op den verkeerden en zamengestelden regel van drien. De stelkunst behandelt hij naar de Gelder en van Bemmelen. De eerstbeginnenden waren gekomen tot de quadraat- en Kubiek- worteltrekking, de meergevorderden hadden bewerkt de breuken, magtsverheffingen en vergelijkingen van den eersten en tweeden graad, en waren aan het oplossen van algebraïsche voorstellingen met éénen onbekenden.
Voor de meetkunde wordt La Croix gebruikt, edoch het onderwijs was nog in de eerste beginselen.

## Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO).
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*

# Knippen, vouwen en plakken voor een twintigvlak

[ Kees Jonkers ]

## Inleiding

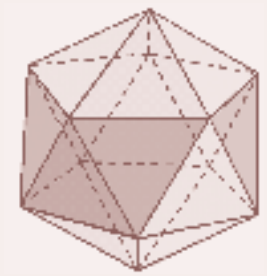
'Jongelui, je weet wel wat een vierzijdige piramide is. Laten we nu aannemen dat het grondvlak een vierkant is en de top precies zo hoog ligt dat er vier gelijkzijdige driehoeken ontstaan.'
De docent die hier aan het woord is, gebruikt zijn aanwezige voorraad modellen van ruimtelichamen en laat bij zijn uitleg de bedoelde vierzijdige piramide zien.
Door twee van die vierzijdige piramides op elkaar te plakken kun je laten zien hoe je een regelmatig achtvlak kunt krijgen.
De jongelui lijken geboeid; ze zien inderdaad een ruimtelichaam dat wordt begrensd door acht gelijkzijdige driehoeken. Daarna volgt de vraag:
'Bestaat er ook een lichaam dat begrensd wordt door *twintig* gelijkzijdige driehoeken?'
Een enkeling komt wel met een antwoord maar geeft geen motivatie. Tot er een slimmerik opmerkt:
'Natuurlijk bestaat die figuur wel, want anders was u er niet over begonnen.'
Komt dit in de buurt van een bewijs uit het ongerijmde? Hoe dan ook, de docent deelt opdrachten uit waarbij hij de leerlingen zelf een regelmatig twintigvlak laat maken.
Ze reageren wel wat verbaasd: is dit een meetkundeles of een knutselexperiment?
Het is de bedoeling van de docent dat de leerlingen ervaren hoe een twintigvlak is opgebouwd. Bovendien kunnen ze enkele eigenschappen van dit veelvlak ontdekken.

## Uitvoering

Om het twintigvlak te maken gebruiken we zacht karton. We gaan een lijnenpatronen tekenen. Passer en liniaal zijn noodzakelijk.
Het te maken twintigvlak is verdeeld in drie stukken: bovenstuk, middenstuk en onderstuk (***zie figuur 1***).
Het bovenstuk is een regelmatige vijfzijdige piramide. Het grondvlak van deze piramide zal dus een vijfhoek met vijf gelijke zijden zijn.
Het middenstuk is een figuur die bestaat uit tien aansluitende gelijkzijdige driehoeken.
Het onderstuk heeft dezelfde vorm als het bovenstuk.

## Tekenen, knippen en plakken

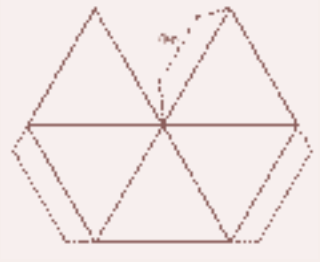
**Middenstuk** – Teken op het karton tien aansluitende gelijkzijdige driehoeken met zijde 45 mm (***zie figuur 2***).
Teken ook de 'flappen': drie boven, drie onder en één opzij.
**Bovenstuk** – Construeer in een cirkel met straal van 45 mm een zeshoek waarvan alle zijden ook 45 mm zijn. Je begint in een willekeurig punt van de cirkelomtrek en gebruikt de passer om steeds meer gelijke koorden langs de cirkel te construeren. Je komt dan na zes koorden precies in het beginpunt uit (***zie figuur 3***).
Nu ga je één driehoek gedeeltelijk 'uitknippen', maar aan één zijde wordt nog een flap aangebracht; ***zie figuur 4***.
Het bovenstuk en het onderstuk zijn nu klaar om te worden gevouwen.
Het middenstuk moet nog afgesloten worden met twee 'plateaus'. Elk plateau heeft de vorm van een *regelmatige vijfhoek*.
**Plateau** – Teken een cirkel met straal 38 mm en daarin een vijfhoek die vijf gelijke zijden van 45 mm heeft. Begin in een willekeurig punt op de cirkel en pas gelijke koorden van 45 mm af; ***zie figuur 5***.
**Vouwen** – Het vouwen van de uitgeknipte figuren moet precies langs de lijnen gebeuren. Elk driehoekje moet scherp maar niet te sterk gevouwen zijn. De vouwlijnen kun je rillen met een liniaal en een stomp mes. De flappen moeten sterker, tot ruim 90 graden, gevouwen worden.
**Plakken** – Rol het middenstuk op en plak de eerste en de laatste driehoek met de flap aan elkaar. Als de driehoeken voldoende zijn omgevouwen zul je aan de boven- en onderkant een regelmatige vijfhoek zien.
Neem nu één van de uitgeknipte plateaus en zet dit op de bovenkant van het middenstuk.
Als er nauwkeurig is geknipt, zal het precies passen (anders iets bijknippen).
Plak dit plateau vast met de drie flappen. Zorg ervoor dat de lijm aan de *onderkant* van het plateau zit. Doe dit ook met het onderplateau.
We moeten het nu nog vlakke bovenstuk voorzichtig ombuigen tot een vijfzijdige piramide. Laat de beide randdriehoeken goed aansluiten en plak ze met de extra verbindingsflap stevig aan elkaar. Het onderstuk wordt net zo gerealiseerd.



figuur 1 Regelmatige 20-vlak (Bron: Wikipedia)

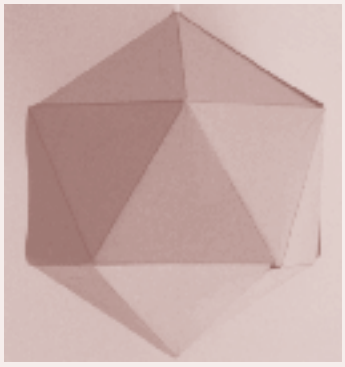
figuur 2 Knip deze figuur langs de buitenranden uit. De tien driehoeken blijven dus aan elkaar.

figuur 3 Knip vier cirkelbogen weg en teken twee flappen erbij.



figuur 4 Teken deze figuur nog eens (voor het onderstuk) en knip het resultaat uit.

figuur 5 Knip de cirkelranden weg en maak daarna nog zo'n tweede vijfhoek.



figuur 6

figuur 7 Een twintigvlak als 'kerstbal' (foto: José Jonkers-de Groot)

Er hoeft nu niet meer geplakt te worden! De twee flappen van elke piramide kunnen eenvoudig in de spleten tussen het plateau en het middenstuk geschoven worden. Het twintigvlak is klaar; ***zie figuur 6***.

### Opmerkingen

1. De docent kan de uitvoering van de opdracht bekorten door het tekenen van de figuren zelf op papier uit te voeren en dit uit te delen. De leerling kan het papier dan op zacht karton plakken en meteen gaan knippen.
2. Het aanbrengen van de plateaus is niet beslist noodzakelijk. Het bevordert wel de stevigheid van het resultaat en vermijdt enkele lastige plakhandelingen.

### Toepassingen

Het ligt voor de hand de leerlingen nog wat eenvoudige opdrachten te laten maken. Door nauwkeurige waarneming van het model zijn allerlei telprobleempjes op te lossen. Bijvoorbeeld: Hoeveel diagonalen heeft een twintigvlak en hoe zit het met hun lengte?
Door het twintigvlak op tafel te laten rusten is te begrijpen dat het tien paar evenwijdige vlakken heeft. Maar liggen de driehoeken van deze vlakken recht onder elkaar of zijn ze ten opzichte van elkaar gedraaid?
Een geïnteresseerde bovenbouwleerling zou met enige hulp van de docent het volgende probleem kunnen aanvatten: Geef een formule voor de inhoud van een regelmatig twintigvlak met zijde *a*.[1]
Ook in huiselijke kring kan het gemaakte model een toepassing als *kerstboomversiering* krijgen. Ieder jaar weer die saaie kerstballen. Waarom voor de verandering niet eens iets anders? Of nog beter: schaf de kerstbal af en vervang hem door het twintigvlak!
Je kunt het twintigvlak 'pimpen' door het te beplakken met verschillend gekleurde driehoekjes. Er zijn hier met gemak heel wat meer variaties te maken dan bij de kerstbal. Hoe 'mooi' het wordt is ***in figuur 7*** te zien.

### Noot

[1] Kees Jonkers: *De inhouden van regelmatige veelvlakken, hun omgeschreven bol en hun IQ*. In: *Euclides*, jaargang 86(6); pp. 253-255.

### Over de auteur

Kees Jonkers was van 1963 tot 1997 leraar aan het Petrus Canisius College in Alkmaar.
E-mailadres: *cbjjonkers@planet.nl*

MEESTERLIJK ONDERWIJS

BEVOEGDHEID
1E GRAAD HALEN?

Bij Hogeschool Utrecht kunt u doorstuderen voor een Master of Education voor de vakken aardrijkskunde, biologie, Duits, Engels, Frans, Nederlands, natuurkunde en wiskunde.

Kom naar een van de open dagen of kijk op **www.ca.hu.nl > masters** voor meer informatie.

ER VALT NOG GENOEG TE LEREN

INSTITUUT
ARCHIMEDES
HOGESCHOOL
UTRECHT

# Vanuit de oude doos

A° 19 26/27

[ Ton Lecluse ]

**In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.**
**Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!**

Deze keer twee zeer elegante opgaven:
- een probleem met een meetkundige inslag maar op te lossen met wat trigonometrie;
- een zuiver analytische opgave.

Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgaven wel erg eenvoudig voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Na de opgaven treft u mijn uitwerking aan.

### Opgave 1 (1927)

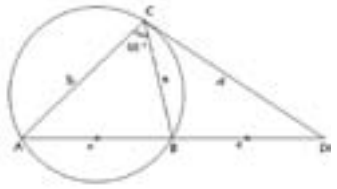
Van driehoek $ABC$ is $\angle C = 60°$. In $C$ trekt men de raaklijn aan de omgeschreven cirkel, deze snijdt het verlengde van de zijde $AB$ in $D$. Indien $DB = AB$ vraagt men de hoeken $A$ en $B$ van de driehoek te berekenen.

### Opgave 2 (1926)

Van een gelijkbenig trapezium, waarin een cirkel kan worden beschreven zijn de evenwijdige zijden $a$ en $b$. Bepaal van de parabool, die om het trapezium kan worden beschreven, de top en de parameter.

### Uitwerkingen

**Opgave 1** – De stelling van de hoek tussen raaklijn en koorde zegt dat $\angle A = \angle BCD$, beide op boog $BC$; ***zie figuur 1***.



figuur 1

Dus zijn de driehoeken $ADC$ en $CDB$ gelijkvormig ($hh$).
We maken een verhoudingstabel:

| | | |
|---|---|---|
| $BC = a$ | $BD = c$ | $CD = d$ |
| $AC = b$ | $CD = d$ | $AD = 2c$ |

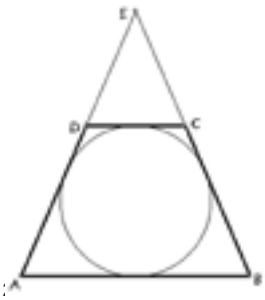
Uit die tabel volgt dat $b = a\sqrt{2}$.
De cosinusregel in driehoek $ABC$ (vanuit hoek $C$) geeft:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 60° = a^2 + b^2 - ab$
Substitutie van $b = a\sqrt{2}$ geeft dan:
$c^2 = a^2 + 2a^2 - a^2\sqrt{2} = (3 - \sqrt{2}) \cdot a^2$
Zodat:
$c = a\sqrt{3-\sqrt{2}}$
De cosinusregel in driehoek $ABC$ (vanuit hoek $A$) geeft:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = \\ = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{3-\sqrt{2}})^2 + \\ - 2\cdot a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot\cos A$$

Dus: $\cos A = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}}$, zodat:

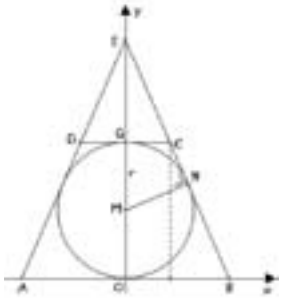
$\angle A \approx 43{,}449° \approx 43°26'58''$ en:
$\angle B = 180° - 60° - 43{,}449° = 76{,}551 \approx 76°33'2''$

**Opgave 2** – De gegevens zijn ***in figuur 2*** in een plaatje verwerkt.



figuur 2

$CD$ is raaklijn aan de ingeschreven cirkel van de gelijkbenige driehoek $ABE$. Dan is $ABCD$ het betreffende trapezium.
Er is precies één parabool die door de hoekpunten van het trapezium gaat. Van deze parabool moet de *top* en de *parameter* (zie verderop) worden bepaald.
We doen het analytisch, met als assenstelsel: de $x$-as is de lijn door $A$ en $B$, de $y$-as is de middelloodlijn van $AB$; ***zie figuur 3***.



figuur 3

Nu is $OB = ½a$ en $GC = ½b$ (met $a > b$).
Stel de (lengte van de) straal van de cirkel is $r$.
De parabool heeft, gezien de symmetrie in de $y$-as, als vergelijking $y = px^2 + q$.
We zullen $r$, $q$ en $p$ uitdrukken in $a$ en $b$.
Probeert u het eerst even zelf?

.....

De driehoeken $EGC$ en $EOB$ zijn gelijkvormig ($hh$), waaruit volgt dat:
$EG : EO = ½b : ½a = b : a$
Substitueer nu $EO = EG + 2r$; dan volgt, na vrijmaken van $EG$:
**(1)…** $EG = \dfrac{2rb}{a-b}$

De driehoeken $EMN$ en $EBO$ zijn eveneens gelijkvormig ($hh$), waaruit volgt:
$EM : MN = EB : BO$, dus:

$$\frac{EG+r}{r} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + (EG+2r)^2}}{\frac{1}{2}a}$$

Elimineer met (1) de waarde $EG$ uit deze vergelijking. Daarna is de vergelijking te herschrijven tot:
$r = ½\sqrt{(ab)}$
Een verrassend eenvoudige uitdrukking voor $r$, waarmee we de coördinaten van het punt $C$ kunnen uitdrukken in $a$ en $b$. (De middellijn van de ingeschreven cirkel is hier blijkbaar het *meetkundig gemiddelde* van $a$ en $b$. Een juweel van een opgave op zich!)

Terug naar de parabool die door de punten $B = (\frac{1}{2}a, 0)$ en $C = (\frac{1}{2}b, \sqrt{(ab)})$ gaat. In de vergelijking $y = px^2 + q$ vullen we in:
- de coördinaten van $B$. Die geven:
$p \cdot \frac{1}{4}a^2 + q = 0$, zodat:
**(2)…** $q = -\frac{1}{4}pa^2$
- de coördinaten van $C$. Die geven dan:
$p \cdot \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}pa^2 = \sqrt{(ab)}$ zodat:

**(3)…** $p = \frac{4\sqrt{(ab)}}{b^2 - a^2} = -\frac{4\sqrt{(ab)}}{a^2 - b^2}$

Substitutie van (3) in (2) levert:
$q = \frac{a^2\sqrt{(ab)}}{a^2 - b^2}$.

De **top** van de parabool heeft dus de coördinaten $(0, q) = (0, \frac{a^2\sqrt{(ab)}}{a^2 - b^2})$.

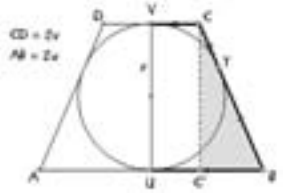
Even op de website van Dick Klingens [1] gezocht naar de definitie van de *parameter* van een parabool: de parameter is de afstand van het brandpunt van de parabool tot de richtlijn.
In formulevorm: in de paraboolvergelijking $x^2 = 2my$ is (de absolute waarde van) $m$ de parameter.
Via herschrijven van de vergelijking $y = px^2 + q$ tot:
$x^2 = \frac{1}{p}(y - q)$
waarin $\frac{1}{p} = 2m$, blijkt dat voor de parameter $m$ van de parabool geldt:
$m = \frac{1}{2p}$.
Substitutie van de absolute waarde van $p$, zie (3), geeft als waarde van de **parameter** van de gezochte parabool nu $\frac{a^2 - b^2}{8\sqrt{(ab)}}$.

Wanneer de waardes van $a$ en $b$ bekend zijn, kan hiermee dus gelijk in de tekening worden aangegeven waar de top, het brandpunt en de richtlijn van de parabool liggen.

Nog even het 'juweel' in bovenstaand betoog als afzonderlijke opgave geformuleerd:
**Bewijs**: *Als een gelijkbenig trapezium een raaklijnenvierhoek is, dan is de diameter van de ingeschreven cirkel het meetkundig gemiddelde van de lengtes van de evenwijdige zijden.*

### Naschrift van de Redactie

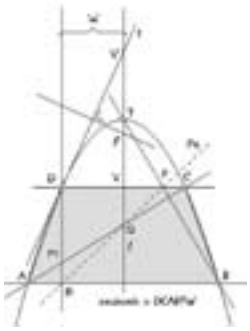
**1.** De juistheid van de hierboven als 'juweel' beschreven eigenschap kan ook – en met minder rekenwerk dan in het artikel – worden aangetoond door gebruik te maken van de raaklijnstukken uit $B$ en $C$ aan de cirkel. Immers, de lengtes daarvan zijn twee aan twee gelijk: $BT = BU = u$ en $CT = CV = v$ (***zie figuur 4***).



figuur 4

Is $C'$ het voetpunt van de loodlijn uit $C$ op $AB$, dan is in driehoek $C'BC$:
$(CB)^2 = (CC')^2 + (C'B)^2$
Zodat: $(u + v)^2 = (2r)^2 + (u - v)^2$, waaruit we vinden: $2uv = (2r)^2 - 2uv$.
En dan blijkt:
$UV = 2r = \sqrt{(4uv)} = \sqrt{(2u \cdot 2v)} = \sqrt{(AB \cdot CD)}$

**2.** Bij een gegeven *gelijkbenig* trapezium (dat niet noodzakelijk een raaklijnenvierhoek is) kan de *top* van de bedoelde parabool met passer en liniaal worden geconstrueerd. Daarbij gebruiken we de stelling van Pascal uit de projectieve meetkunde: *Als de hoekpunten van een zeshoek op een kegelsnede liggen, dan liggen de (drie) snijpunten van de overstaande zijden van die zeshoek op dezelfde lijn, de Pascal-lijn van de zeshoek.*[2] Deze lijn is ***in figuur 5*** aangegeven met $Pa$.
De parabool door de punten $C$, $D$, $A$, $B$ raakt (per definitie) aan de *oneigenlijke rechte* van het vlak, zeg in het punt $W$. Dit punt is het *oneigenlijk punt* van de as van de parabool, dus van de middelloodlijn $l$ van $AB$ (en van $CD$). Is nu $T$ de top van de parabool ($T$ ligt op $l$), dan bekijken we de zeshoek $DCABTW$. Volgens de stelling van Pascal zijn bij deze zeshoek de volgende punten collineair (het teken & tussen de namen van twee meetkundige objecten betekent 'het snijpunt' van die objecten):
$CA$ & $TW = Q$, $AB$ & $WD = R$,
$DC$ & $BT = P$



figuur 5

De punten $Q$ en $R$ zijn direct construeerbaar, immers $TW \equiv l$ en $WD \equiv m$ ($m$ is de lijn door $D$ evenwijdig met $l$). Het punt $P$ kan gevonden worden als snijpunt van de lijn $QR \equiv Pa$ met de lijn $DC$.
Voor de top $T$ van de parabool geldt dan: $T = BP$ & $l$.
Is $V'$ het spiegelbeeld van $V$ (het midden van het lijnstuk $CD$) in $T$, dan snijdt de middelloodlijn van het lijnstuk $V'D$ de lijn $VV'$ in het brandpunt $F$ van de parabool (de lijn $V'D \equiv t$ raakt overigens in $D$ aan de parabool).[3] Daarmee is dus ook het brandpunt van de parabool met passer en liniaal te construeren.

### Noten

[1] Zie: *www.pandd.demon.nl/kever.htm#1*
[2] Voor een bewijs zie:
M. Kindt (1996): *Lessen in Projectieve Meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (2e druk); pp. 115-116.
En eventueel ook:
*www.pandd.demon.nl/transvers.htm#75*
[3] Voor een bewijs zie: *www.pandd.demon.nl/parab/parab.htm#3*

### Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

### Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

# Boekbespreking / Getallen zijn je beste vrienden

[ Bert Zwaneveld ]

**Ondertitel: Ontboezemingen van een nerd**
**Auteur: Vincent van der Noort**
**Uitgever: Atheneum–Polak & Van Gennep, Amsterdam (2011)**
**ISBN: 978 90 253 6777 0**
**Prijs: € 18,95 (310 pagina's; paperback)**

In het begin van lezing van dit boek dacht ik dat het om wiskunde ging die ten minste elke wiskundeleraar of wiskundelerares zou moeten weten om zijn of haar lessen te verlevendigen en de leerlingen te motiveren. Een voorbeeldje hiervan in het tweede hoofdstuk is het bekende '64 = 65' waarbij een vierkant van 8 bij 8 verknipt wordt en de stukken neergelegd worden als een rechthoek van 13 bij 5 (***zie figuur 1***).
Allengs blijkt dat het niet alleen over getallen gaat, maar om de fascinatie van Van der Noort voor zijn vak. En dat vak is voor hem als 'beroepswiskundige' oneindig veel meer dan alleen getallen. Al is het natuurlijk wel zo dat het getalsmatig beschrijven van allerlei wiskundige objecten een zeer krachtig hulpmiddel blijkt te zijn, zoals in de laatste hoofdstukken meer en meer blijkt. Daar gaat het om in oorsprong meetkundige problemen en dan vooral rondom symmetrie die met behulp van getallen worden opgelost. Soms worden daarvoor zelfs getallen als de *quaternionen* gebruikt. Ik kom hier nog op terug.

## Fascinatie voor wiskunde

Die fascinatie voor wiskunde weet Van der Noort heel goed op de lezer over te brengen, in ieder geval op mij. Dat komt enerzijds door zijn schrijfstijl, enthousiasmerend en met grote regelmaat ook relativerend, maar meer nog door de inhoud. Geen droog verhaal over de wiskundige objecten, maar door ze juist zeer begrijpelijk te introduceren, door ook weer te geven wat er achter die objecten zit (of oorspronkelijk zat) en door hun relaties met andere wiskundige objecten te geven, gaan ze veel meer leven. Hoe verder ik in het boek vorderde, hoe vaker ik iets tegenkwam dat ik op zich wel wist, maar waarvan mij op college bijvoorbeeld nooit het verband met andere wiskundige objecten was verteld. Een van de meest sprekende voorbeelden hiervan was voor mij de isomorfie van de symmetrische groep van vier elementen $S_4$ en de groep van de 24 draaiingen van een kubus. En dat zonder de termen 'isomorfie', 'symmetrische groep' en 'groep' te noemen. Het begrip 'groep' komt overigens later wel expliciet ter sprake. Ik laat het, net als Van de Noort, graag aan de lezer over zelf na te gaan dat dit zo is, bijvoorbeeld door vast te stellen welke vier onderdelen van de kubus door de draaiingen van plaats verwisselen.

## Globale inhoudsbeschrijving

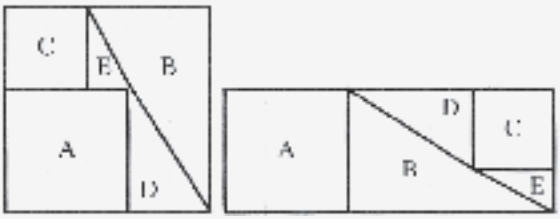
De titel van het boek suggereert dat het over getallen gaat. Op zich klopt dat wel, maar in relatie tot getallen komen ook allerlei andere wiskundige zaken aan de orde. Dat maakt het boek juist zo interessant. Denk bij die andere zaken vooral aan meetkunde, maar ook aan de wiskundige analyse van spelletjes (is er een winnende strategie en hoe ziet die er dan uit?), kansrekening, prooi-roofdiermodellen (het Lotka-Volterra-model), de meest efficiënte verbinding tussen een aantal punten (met zeepsop, en dat een eencellig organisme dit ten minste zo goed als de mens kan), het wiskundige begrip 'existentie', wiskunde en onbegrip, astronomie, wiskunde en kunst (onmogelijke figuren, Escher).

## Getallen en meetkunde

Het verband tussen meetkunde en getallen loopt als een rode draad door het boek. Om dat verband goed tot zijn recht te laten komen gaat het relatief vaak over meetkunde. De auteur gaat daarbij meteen de diepte in met de vierdimensionale kubus, met als verrassend uitstapje het verband met de bekende sudoku-puzzels. 'Pure' meetkunde zijn de stukken over constructies met passer en latje en over de (on)mogelijkheid om bepaalde regelmatige veelhoeken te construeren. Het verband meetkunde-getallen komt al iets meer tot uiting bij het afstandsbegrip. Interessant hier is de afstand tussen woorden: het aantal plaatsen waarin twee woorden een verschillende letter hebben en hoe dat gebruikt wordt in spellingcheckers. In het hoofdstuk over complexe getallen ligt het verband meetkunde-getallen op de stip en er wordt dan ook gescoord. De constructie van de regelmatige vijfhoek die nauw verbonden is met de gulden snede, wordt met behulp van de complexe oplossingen van $x^5 = 1$ gedemonstreerd (***zie figuur 2***).

## Symmetrie

Om het verband meetkunde-getallen 'voorbij' de complexe getallen naar voren te kunnen brengen zijn een aantal hoofdstukken aan symmetrie gewijd. Eerst komen de platonische lichamen aan de orde. Maar vooral gaat het over de wiskundige manier om symmetrie te beschrijven: met behulp van groepen, bijvoorbeeld de groep van de 24 draaiingen van een kubus. Het hoofdstuk daarna generaliseert Van der Noort de platonische lichamen naar hogere dimensies




figuur 1 Waar is het verdwenen vierkantje?

figuur 2 De complexe oplossingen van $x^5 = 1$ bij de constructie van de regelmatige vijfhoek

Goedgekeurd door CvE voor het Centraal Eindexamen

TI-nspire TECHNOLOGIE

# Een nieuwe visie vanuit meerdere wiskundige invalshoeken

**Elke leerling leert op een andere manier.** De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

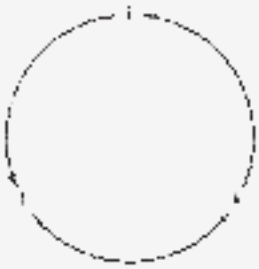
www.education.ti.com/nederland

**TI-Nspire™ CX kleuren handheld + software voor slechts € 59,-**
**Mail voor de aanbieding naar: g-treurniet@ti.com**
(docentenaanbieding, 1 per docent)

**NU MET KLEURENSCHERM, EIGEN PLAATJES DOWNLOADEN EN OPLAADBARE BATTERIJ**

TEXAS INSTRUMENTS

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.




figuur 3 Quaternionvermenigvuldiging: i·j = k, j·k = i, k·i = j

(althans voor zover daar iets over bekend is): vanaf de vijfde dimensie bestaan er alleen de generalisaties van het tetraëder, de kubus en de octaëder. Maar nog opmerkelijker is dat er in de vierde dimensie nog drie andere regelmatige lichamen voorkomen: de 24-, de 120- en de 600-cel, mooie objecten, waarvan de ribben even lang, de hoeken even groot, de vlakken en de cellen regelmatig zijn, die echter niemand kan zien. Je kunt je zelfs afvragen of ze wel bestaan. Van der Noort heeft het over 'mooie dingen waar niemand om gevraagd heeft'. Dat leidt naar de Lie-groepen van Sophus Lie, die de symmetrie van objecten met oneindig veel symmetrieën, zoals cirkel en bol, generaliseerde naar hogere dimensies. Met als bijzondere eigenschap dat die groepen zelf ook weer een meetkundige structuur hebben. Later zijn die Lie-groepen geclassificeerd: vier oneindige families basisgroepen en vijf uitzonderlijke groepen waarvan de laatste, $E_8$, de merkwaardigste is.

### Kusgetal

Er is een eerbetoon aan Kepler, niet alleen vanwege diens verdiensten voor de astronomie, maar vooral vanwege zijn bijdrage aan het probleem: 'is de manier waarop de groenteman de sinaasappelen stapelt inderdaad de manier om het efficiëntst de ruimte met identieke bollen te stapelen?' De gang van het uiteindelijke, lang niet triviale, bewijs dat dit inderdaad zo is, wordt heel begrijpelijk uit de doeken gedaan. Uiteraard wordt ook dit naar hogere dimensies gegeneraliseerd. Dat geldt ook voor het zogeheten kusgetal: het aantal bollen dat een gegeven bol tegelijk kan *kussen* (dat wil zeggen: raken). In dit verband komt $E_8$ weer terug.

### Quaternionen

Fascinerend is het om te lezen hoe Hamilton een groot aantal jaren van zijn werkzame leven geprobeerd heeft om voor de driedimensionale ruimte iets te doen, dat vergelijkbaar is met het complexe vlak en de complexe getallen; met de punten van het complexe vlak kan worden gerekend: opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd en gedeeld, niet door 0). Op een gegeven moment realiseerde hij zich dat dit niet voor de driedimensionale ruimte mogelijk is, wél voor de vierdimensionale. De bijbehorende getallen noemde hij de quaternionen: naast de reële as met de eenheid 1 en de imaginaire as met de eenheid $i$ (net als bij de complexe getallen) zijn er nog twee loodrechte assen met de eenheden $j$ en $k$. Hiervoor geldt
$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$ en
$i \cdot j = k$, $j \cdot k = i$, $k \cdot i = j$ (***zie figuur 3***). Eén rekeneigenschap gaat bij de quaternionen verloren: de vermenigvuldiging is niet meer commutatief. En zoals in het complexe vlak een vermenigvuldiging met een complex getal met een draaiing correspondeert, correspondeert ook de vermenigvuldiging met een quaternion met een draaiing van de vierdimensionale quaternionenruimte. Later werd bedacht dat met weglating van het 'reële deel' van de quaterionen met de overblijvende driedimensionale quaternionen in zekere zin Hamilton's streven gerealiseerd werd: een driedimensionale ruimte waarin met de punten gerekend kan worden.

### Gulden-snedequaternionen

De finale van het boek heeft als titel *Alles heeft met alles te maken*. Veel van wat in de vorige hoofdstukken aan de orde is geweest, wordt bij elkaar gebracht. Het hoogtepunt voor mij was het bij elkaar brengen van 'gulden-snedegetallen' ($p + q \cdot \varphi$, met $p$ en $q$ rationaal, $\varphi$ de gulden snede) en de quaternionen: de gulden-snedequaterionen $a + bi + cj + dk$ met $a$, $b$, $c$ en $d$ gulden-snedegetallen en $i$, $j$ en $k$ de basisgetallen van de quaternionen. Daarmee vallen in één keer allerlei meetkundige zaken op hun plaats door middel van getallen. Zij blijken inderdaad je beste vrienden!

### Een fout van Harry Mulisch?

In een van de hoofdstukken bespreekt Van der Noort onder andere de regelmatige vijfhoek en het pentagram. Daar horen natuurlijk de Fibonacci-getallen en de gulden snede bij. Hij noemt ook een verhaal van Harry Mulisch. Daarin beargumenteert Mulisch waarom klokken in klokkenwinkels altijd op tien over tien staan, of liever negen over tien, het moet namelijk symmetrisch ten opzichte van de verticale as: als de grote wijzer over de 12 is, is de kleine over 10 en dan is het niet meer symmetrisch. Mulisch, althans de hoofdpersoon uit het verhaal van Mulisch, beweert dat de wijzers 'in deze volmaakte stand een hoek van honderdacht graden vormen' (de grootte van een hoek in een regelmatige vijfhoek). Helaas is de bewering niet waar. Van der Noort geeft drie manieren om dat aan te tonen. Hij eindigt deze passage met de droge mededeling dat Mulisch tijdens het schrijven het onderhavige boek is overleden en hij het dus niet meer in de gelegenheid was Mulisch te vragen of die er zich bewust van was dat hij een onwaarheid opschreef en of hij dat expres had gedaan en waarom dan.

### Existentie in de wiskunde: weten dat, maar niet weten hoe

In het hoofdstuk over existentiestellingen en constructieve stellingen gaat het natuurlijk over Brouwer, de grondlegger van een vorm van wiskunde die alleen maar constructieve stellingen toelaat. Een mooi voorbeeld van een probleem waarbij (met behulp van continuïteit) bewezen kan worden dat er een oplossing is, maar waarbij met geen mogelijkheid kan worden berekend waar die oplossing ligt, is het volgende. Een monnik beklimt op zekere dag in twaalf uur, van zes uur 's morgens tot zes uur 's avonds een berg. Omdat hij onder andere het uitzicht zo mooi vindt en af en toe zelfs even terugloopt, doet hij de volgende dag weer precies twaalf uur over de terugtocht, weer van zes uur 's morgens tot zes uur 's avonds. Er is een moment op beide dagen waarop de monnik zich op precies dezelfde hoogte bevond.

### Tot slot

Voor mensen die iets van het fascinerende van wiskunde willen begrijpen, is dit boek een must. Ik ga ervan uit dat wiskundeleraren en wiskundeleraressen in ieder geval tot deze groep horen. Van harte aanbevolen!

**Over de recensent**
Bert Zwaneveld is emeritus-hoogleraar professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en het informaticaonderwijs.
E-mailadres: *bert.zwaneveld@ou.nl*

# Jaarverslag Euclides

## JAARGANG 86 (2010/2011)

[ Klaske Blom ]

**In dit jaarverslag wordt een overzicht gegeven van de werkzaamheden van de redactie in de periode van 1 augustus 2010 tot en met 31 juli 2011.**

### Redactie

De redactie van *Euclides* bestond het afgelopen jaar uit tien personen, ieder met een eigen aandachtsgebied en/of eigen taak op het gebied van het becommentariëren en genereren van artikelen: Bram van Asch (boekbesprekingen), Michel van Ast (ict), Rob Bosch (wiskundige artikelen), Hans Daale (hbo), Wim Laaper (havo/vwo), Marjanne de Nijs (didactiek), Joke Verbeek (vmbo), Heiner Wind (redactievoorzitter), Dick Klingens (eindredactie) en Klaske Blom (hoofdredactie). Enkele redactieleden waren, vanwege privé-omstandigheden, niet in de gelegenheid om veel tijd te investeren in *Euclides*. Mede daardoor werd het duidelijk dat het goed is dat de redactie uit redelijk veel mensen bestaat, zodat dergelijke situaties opgevangen kunnen worden.
De redactie kwam driemaal plenair ter vergadering bijeen. De kernredactie (die bestaat uit de voorzitter, eindredacteur en hoofdredacteur) kwam buiten die plenaire bijeenkomsten ook nog enkele malen bij elkaar. In juni is er een overleg geweest met de producent, De Kleuver bedrijfscommunicatie bv.
De kernredactie heeft met het bestuur overleg gevoerd over het faciliteren van de taken van de kernredactieleden omdat met name het werk van de hoofdredacteur te omvangrijk is voor de daarvoor beschikbaar gestelde tijd. Het bestuur heeft besloten de facilitering voor de hoofdredacteur te verhogen van 0,2 naar 0,3 fte, met ingang van juli 2011.
Aan het einde van het seizoen hebben drie leden afscheid genomen: Bram van Asch, Hans Daale en Klaske Blom. Bram is als redacteur boekbesprekingen opgevolgd door Ernst Lambeck; Klaske is als hoofdredacteur opgevolgd door Marjanne de Nijs.

### Inhoud

*Euclides* is gewijd aan het Nederlandse wiskundeonderwijs. De artikelen hebben een vakinhoudelijke, informerende, didactische, opiniërende en/of actueel-journalistieke inhoud. De redactie streeft naar een breed aanbod in artikelen zodat alle lezersdoelgroepen zich herkennen in het blad. Bijdragen worden voor een deel spontaan ingezonden en voor een ander deel op uitnodiging geschreven.
De kopijlijst telde gedurende de hier beschreven periode 161 inzendingen: concept-artikelen, boek-, software- en filmbesprekingen, interviews, verslagen van prijsuitreikingen en conferenties, redactionele kopij, aankondigingen en mededelingen, en daarnaast NVvW-bestuursbijdragen voor de Verenigingspagina's. Buiten deze inzendingen ontving de redactie een groot aantal persberichten.

*Euclides* kende het afgelopen jaar een aantal vaste – en inmiddels bekende – rubrieken. Elk nummer werd voorzien van een hoofdredactionele inleiding, *Kort Vooraf*, door Klaske Blom. Harm Jan Smid verzorgde vier afleveringen van zijn rubriek *Geheugen* waarin hij parallellen liet zien tussen discussies binnen het wiskundeonderwijs van vroeger en nu. Elk nummer bevatte een aflevering *Vanuit de oude doos*, verzorgd door Ton Lecluse; hij ging op zoek naar oude examenopgaven, niet meer alleen meetkundig, ook analytisch en getaltheoretisch. Van de column *Differentialen en diepvriespizza's* van Dorien Lugt verschenen drie afleveringen en in de rubriek *Verschenen* werd weer regelmatig melding gemaakt van nieuwe publicaties. Achterin elk nummer van *Euclides* vond u de rubriek *Recreatie* van Frits Göbel met wiskundige puzzels, oplossingen en 'de ladderstand'. Hoewel de redactie zich realiseerde dat er trouwe puzzelaars waren die steeds weer met groot enthousiasme uitkeken naar de puzzels van Frits, is besloten deze rubriek na negen jaar te beëindigen. We hopen dat de nieuwe puzzelrubriek, *Meet je rekenkracht!*, de oude, maar vooral ook nieuwe puzzelaars zal aanspreken. Vanwege gezondheidsredenen moest Frits afgelopen mei zijn werk voor *Euclides* staken. Lieke de Rooij en Wobien Doyer hebben het correctiewerk van de inzendingen van de laatste puzzels van hem overgenomen en de verslagen hiervan geschreven.

Het streven *Euclides* meer leesbaar te maken voor vmbo-docenten heeft zich vertaald in een groter aantal artikelen met een concreet aanbod voor de lespraktijk van het vmbo. De redactie was in dit kader zeer verheugd met bijdragen van studenten van lerarenopleidingen die hun ervaringen beschrijven en werkbladen leveren die collega's direct kunnen gebruiken in hun eigen lespraktijk.

In jaargang 86 vond u een aantal langlopende series artikelen. Allereerst was daar de serie over Ludolph van Ceulen, gestart in jaargang 85 vanwege het feit dat deze rekenmeester 400 jaar geleden overleden is. Met nog drie artikelen in jaargang 86, is een

tijdsbeeld geschetst van de periode waarin Ludoph van Ceulen en zijn collega's leefden en werkten. De artikelen zijn nog te vinden op 'zijn' website (*www.ludolphvanceulen.nl*). Daarnaast publiceerden we de IMO-serie die gedurende de hele jaargang doorliep, als opmaat naar de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) die in juli 2011 plaatsvond in Amsterdam. Ook deze serie is digitaal terug te vinden (zie: *www.wiskundeolympiade.nl/cms/lezen-over-wiskunde/artikelen*).
De artikelen in bovengenoemde series werden verzorgd door steeds andere auteurs. Er waren ook nog twee auteurs die elk diverse artikelen instuurden en hun eigen serie maakten: Frans Ballering met korte 'overdenkingen' over de wiskundedidactiek en Ingrid Berwald met artikelen over het inzetten van meervoudige intelligenties in de wiskundeles.

### Omvang

*Euclides* heeft in principe een vaste omvang van 40 pagina's per nummer. We kunnen hierin iets variëren, tot een maximum aantal pagina's van 320 per jaargang. In het afgelopen jaar telde nummer 1 (de gebruikelijke *examenspecial*) 60 pagina's; de nummers 2, 3, 4 en 7: 40 pagina's; nummer 5: 52 pagina's en nummer 6: 48 pagina's. De steunkleur was paars. De opmaak en verdere productie van *Euclides* werd verzorgd door 'De Kleuver bedrijfscommunicatie bv' in Veenendaal.

### Publicatieprocedure

Ingezonden bijdragen worden in eerste instantie beoordeeld (dat wil zeggen geaccepteerd of afgewezen) door de hoofdredacteur. In geval van acceptatie wordt de inzending van commentaar voorzien door de hoofdredacteur en enkele andere redactieleden; de auteur krijgt vervolgens de gelegenheid zijn/haar artikel op basis van dit commentaar bij te stellen.
Voor becommentariëring wordt incidenteel ook een beroep gedaan op personen buiten de redactie. De namen van deze referenten worden vermeld op de eerste pagina van het nummer waarvan zij een bijdrage becommentarieerden. Nadere informatie over de publicatieprocedure en een aantal richtlijnen voor de aanlevering van bijdragen voor *Euclides* staan vermeld op *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

### *Euclides* als Verenigingsorgaan

*Euclides* is 'vakblad voor de wiskundeleraar', maar tegelijkertijd 'orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren'. Als Verenigingsorgaan kent het tijdschrift daarom een aantal geoormerkte pagina's ten behoeve van het Verenigingsnieuws. Het bestuur van de NVvW kan deze Verenigingspagina's, zonder inhoudelijke bemoeienis en buiten verantwoordelijkheid van de redactie, vrijelijk gebruiken om zich tot de leden te richten. Dit gebeurde onder meer in de vorm van Bestuurstafels, waarin het bestuur van de NVvW de leden informeert over lopende kwesties en besluiten. Daarnaast hebben diverse bestuursleden het afgelopen jaar verslag gedaan van hun werkzaamheden voor de Vereniging.

### Voor en door wiskundedocenten

Wiskundedocenten en andere betrokkenen bij het Nederlandse wiskundeonderwijs vormen een brede en tamelijk heterogene doelgroep, ondanks hun gemeenschappelijke affiniteit. Uiteraard streeft de redactie van *Euclides* ernaar een ieder een ruime sortering aansprekende, informatieve en lezenswaardige artikelen aan te bieden. Feedback van u als lezer is daarom voor de redactie van groot belang, en ook *uw* inhoudelijke inbreng (in de vorm van een artikel voor collega's in het land) wordt met veel belangstelling door de redactie tegemoet gezien. Stuur daarom uw opmerkingen en bijdragen naar die redactie (voor adressen zie het Colofon).


### Over de auteur

Klaske Blom was tot 1 juli 2011 hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *klaskeblom@gmail.com*

## Aankondiging / WwF-Boekenveiling

Op 1 oktober j.l. is de boekenveiling van het Wereldwiskunde Fonds (WwF) weer van start gegaan.
Op die veiling worden ongeveer 250 wiskundeboeken geveild, alle ten bate van de projecten die door het WwF worden ondersteund.
Het einde van de veiling is op **maandag 31 oktober** 2011, om **24:00** uur.
Tot die tijd kan er dus geboden worden!

**DOEN!**

Website van de veiling:
*www.wereldwiskundeboeken.nl*

Verdere informatie op de website van de NVvW:
*www.nvvw.nl/page.php?id=1813*

# Inhoud van de 86e jaargang

## 2010/2011

**Bijdragen**


*Anouk Adang, Rob Adriaens:* Rekenen met aardrijkskunde, 84
*Martin Alberink, Heleen Muijlwijk, Mark Timmer:* De sinus, 250
*Joeri van Ast, Harrie Broekman:* Tangram tekenen, 287
*Frans Ballering:*
- Waarom hebben vmbo-leerlingen problemen met haakjes?, 161
- Waarom rekenen thuishoort in de wiskundeles, 199
- Kwadraten uit het hoofd geleerd en nog leuk ook, 263
- Verhoudingstabellen, 294

*Ingrid Berwald:*
- Meervoudige intelligentie in de wiskundeles, deel 1, Rekenen, 154
- id., deel 2, Oppervlakte, 189
- id., deel 3, Vergroten, 240
- id., deel 4, Goniometrie, 284

*Rik Biel:* Twee paradoxen van Zeno, 242
*Simon Biesheuvel, Juan Dominguez:* De grafische rekenmachine, 40
*Klaske Blom:* Collegiaal overleg rond de vmbo-examens, 23
*Lonneke Boels:* Breuken op de basisschool, 244
*Christian Bokhove:* Digitaal werken aan algebraïsche vaardigheid en inzicht, 186
*Christiaan Boudri:* Wiskunde D, wat moet ik er mee, 48
*Leon van den Broek:* Kangoeroe blijft jong, 144
*Harrie Broekman:* In memoriam – Pierre Marie van Hiele, 107
*Kees Buijs:* Lesmap 'Verder met rekenen' voor het vmbo beschikbaar, 286
*Paul Dillo:* Een merkwaardige stelling over incirkels, 119
*Paul Drijvers, Nora Niekus:* Algebra op het scherm, 113
*Thomas van der Elsen:* Rekenen in het mbo: ramp of zegen?, 217
*Jan van Eijck:* Redeneren over communicatie, 214
*Juliëtte Feitsma:* Het WwF steunde een organisatie in India, 305
*Carel van de Giessen:* Statistiek leren met een metronoom, 256
*Wout de Goede:* Machtsfuncties – Wiskunde leeft!, 201
*Koeno Gravemeijer:* Wat is het probleem?, 62
*Brechje Hollaardt:* ICT als tool voor algebra (interview), 184
*Brechje Hollaardt, Bert Zwaneveld:* Promotieonderzoek en leraarschap combineren, 260
*Martinus van Hoorn:* G. Krooshof en de didactiek van de wiskunde, 220
*Kees Jonkers:* De inhouden van regelmatige veelvlakken, 253
*Harrie Jorna:* Wiskunde met de vingers, 291
*Metha Kamminga:* De tien valkuilen van digitaal toetsen, 207
*Sieb Kemme:* Rubriek – Moet dat zo? Kan het niet anders?, 51 en 122
*Dick Klingens:*
- Enkele benaderingen van pi, 158
- Toeval(lig) in 'die Wurzel', 310

*Erik Korthof:* Amerika schat continu en China geeft discreet uit, 18
*Jan Kroesen:* Een uitbreiding van de rij van Fibonacci, 308
*G. Krooshof:* Voordracht gehouden voor het wiskundig dispuut $W^4$ op 28 september 1937, 221
*Robin de Kruijff:* Werkblad prisma's en piramiden, 50
*Wim Laaper:* AlgebraKIT ontwikkeld door Martijn Slob (interview), 126
*Wim Laaper, Heiner Wind:* Wiskundig actief, ondersteunen van onderzoekend leren (interview), 151
*Ton Lecluse:* Rubriek – Vanuit de oude doos (deel 16 t/m 22), 47 (1925), 87 (1925), 124 (1925/26), 164 (1927), 224 (1925), 265 (1925) en 303 (1925/26)
*Ger Limpens, Paul van der Molen, Jos Remijn, Melanie Steentjes, Ruud Stolwijk*: Examens wiskunde 2010, 1e tijdvak, 2
*Dorien Lugt:* Rubriek – Differentialen en diepvriespizza's (deel 4 t/m 6)
- Al dan niet gewenst, zeer vruchtbaar, 129
- Studeren is concurreren, 216
- Computers waren eng en economie niet boeiend, 302

*Jan van der Maas:* Waarom moeten we onredelijk zijn?, 32
*Ed de Moor:* Rekenkampioen van Nederland 2010; 'Bartjens' rekendictee, 191
*Rob van Oord:* Geboeid door wiskunde, 168
*Hielke Peereboom:*
- Wat is er mis met het Centraal Examen HAVO wiskunde B?, 26
- Het nieuwe wiskunde C; daar is niet veel mis mee!, 236

*Ineke van Pol-Frijters:* VWO – wiskunde C, 31
*Henk Rozenhart:* De waarheid over het Wintersymposium?, 203
*Karen Ruedisueli:* Computerexamens wiskunde voor de KB'ers, 105
*Victor Schmidt:* Rekenen – de stand van zaken, 195
*Harm Jan Smid:* Rubriek – Het Geheugen (deel 9 t/m 12)
- Een stem uit het verleden, 76
- De ondergang van een keuzevak, 146
- Van mei tot mei, 267
- De docent en zijn vak, 299

*Jeroen Spandaw:* De kunst van het verwaarlozen, 132
*Daaf Spijker:* We worden ouder…, 117
*Melanie Steentjes:* Pilot computerexamen

vmbo-KB 2010, 102
*Ruud Stolwijk, Jacques Jansen:* Nederland leeft met water, 210
*Mieke Thijsseling:* VWO – wiskunde A, 34
*Joke Verbeek, Gert de Kleuver:* Verbazen, verbinden en gebruiken in de wiskundeles, 248
*Jolanda Vriend:* Het WwF steunt een school in Kenia, 156
*Eline de Vroome:* Smarties eten tijdens wiskunde, 149
*Harmen Westerveld:* VWO – wiskunde A, 33
*Heiner Wind:*
- Babyboomer met fpu, 35
- 50 jaar Pythagoras, 296

**Serie: Ludolph van Ceulen**
*Danny Beckers:* Het rekenen meester, 71
*Jan Hogendijk:* Van Ceulen tegen de wiskunde van Scaliger, 108
*Liesbeth C. de Wreede:* Leermeester en leerling in gesprek, 41

**Serie: Op weg naar IMO 2011**
*Floris van Doorn:* IMO 2008 – opgave 5, 142
*David Kok:* IMO 2009 – opgave 2, 182
*Daniël Kroes:* IMO 2011 – opgave 1, 234
*Julian Lyczak:* IMO 2006 – opgave 4, 80
*Maarten Roelofsma:* Een schooljaar lang trainen, 282
*Sietske Tacoma:* IMO 2005 – opgave 4, 45
*Wouter Zomervrucht:* IMO 2007 – opgave 4, 111

**Recreatie**
*Frits Göbel:*
- Cijfersommen, 58 en 139
- Rangeren, 98 en 179
- Partities van *s* met product ook *s*, 138 en 231
- Shuffle-exchange graphs, 178 en 279
- De afstand tussen rechthoek en vierkant, 230
- Een kwadratisch attractiepunt, 278
- Verdelingen in vierkanten, 318
- Oplossing 85-6 (Een familie symmetrische grafen), 59
- Oplossing 85-7 (Ziggurats), 99

**Boekbesprekingen e.d.**
*Frans Ballering:* Examentraining VMBO-GT Wiskunde 2010, 31
*Danny Beckers:* René Descartes, Meetkunde, 85
*Dick Klingens:* Meester Ludolphs koordenvierhoek, 162
*Ger Limpens:* Elegance with subtance, 130
*Monique Stienstra:* Elementaire getaltheorie en asymmetrische cryptografie, 53
*Joke Verbeek:* Kan wiskunde de wereld redden (Pythagoras en de rechtvaardige rechters), 226

**Verschenen**
*D.P.G. van As, J. Klouwen, L.J. van de Leur:* Levensverzekeringswiskunde en pensioencalculatie, 79
*Alex Bellos:* Getallen ontraadseld, 135
*Jan Helmer:* Pythagoras en de rechtvaardige rechters, 136
*Ad Meskens:* Travelling Mathematics, 136
*Leonard Mlodinow:* De dronkemanswandeling, 88
*Alfred S. Posamentier:* The Pythagorean theorem, 97
*Marcus du Sautoy:* The num8er my5teries, 241

**Aankondigingen, mededelingen e.d.**
Aankondiging activiteiten, 137
Centrale examens 2011, 1e tijdvak, 205
Docenten gezocht voor deelname aan onderzoek, 70
HKRWO-symposium XVII, 204
Kansrekening en dynamica als basis voor breed wiskundeonderwijs, 83 en 170
KWG-Wintersymposium 2011, 70
Lerarendag op NMC 2011, 225
Nieuwe NLT-modules gecertificeerd, 55
NOT 2011, 125
Studiereis voor wiskundedocenten naar Roemenië, 298
Tijd voor ICT in de wiskundeles?, 203
Veilingmeester Wereldwiskunde Fonds, 157
Vrijgegeven software Geocadabra, 167
Wiskunde C conferentie, 134
Wiskundetoernooi 2011, 252
Wiskundig zomerkamp, 298

**Van de redactie**
Inhoud van de 85e jaargang (2009/2010), 91
*Klaske Blom:*
- Jaarverslag *Euclides* / jaargang 85 (2009/2010), 89
- Kort vooraf, 1, 61, 101, 141, 181, 233 en 281
- Van recreatierubriek naar Meet je rekenkracht!, 319

**Servicepagina**
60, 100, 140, 180, 232, 280, 320

**Verenigingsnieuws**
*Johan Gademan:* Van de bestuurstafel, 315
*Marian Kollenveld:* Jaarrede 2010, 172
*Metha Kamminga:* Foto-impressie van de Jaarvergadering / studiedag 2010, 176
*Douwe van der Kooi:* De kennisbasis van de masteropleidingen wiskunde, 228
*Henk van der Kooij:*
- Van de bestuurstafel (2), 271
- Wiskunde werkt; reken maar!, 274
*Kees Lagerwaard:*
- Notulen van de NVvW-jaarvergadering (7-11-2009), 93
- Verslag van het verenigingsjaar 2009-2010, 94
- Van de bestuurstafel (1), 270
*Marianne Lambriex:*
- Jaarvergadering / Studiedag 2010, 57
- Jaarvergadering / Studiedag 2011, 314
*Henk Rozenhart:*
- De NVvW en de vakbond, 174
- Kleine didactieken, 275

# Notulen van de NVvW-jaarvergadering

## ZATERDAG 6 NOVEMBER 2010, NIEUWEGEIN

[ Kees Lagerwaard ]

**Opening**
Voorzitter Marian Kollenveld opent de vergadering. Ze heet alle aanwezigen hartelijk welkom. Een speciaal welkom is er voor enkele vertegenwoordigers van zustervereningingen en de ereleden. Ze is blij dat er opnieuw sprake is van een groter aantal aanmeldingen voor de studiedag.

**Jaarrede**
De voorzitter spreekt de jaarrede uit. De volledige tekst van de jaarrede is terug te lezen in *Euclides* nummer 4, jaargang 86.

**Notulen**
De notulen van de jaarvergadering 2009 worden zonder vragen of opmerkingen vastgesteld.

**Jaarverslagen**
Ook over het jaarverslag van *Euclides* jaargang 85 en het verslag van het NVvW-verenigingsjaar 2009-2010 wenst geen van de aanwezigen het woord. De voorzitter dankt de auteurs Klaske Blom en Kees Lagerwaard.

**Financiën**
De aanwezigen kregen voor de vergadering de exploitatierekening over boekjaar 2009-2010 uitgereikt, samen met de balans per 31 juli 2010 met een toelichting. Bij de exploitatierekening is ook de begroting voor de jaren 2010-2011 en 2011-2012 gevoegd. Penningmeester Frank van den Heuvel dankt Elly en Pim van Bemmel voor het financieel beheer in de afgelopen periode. Hij geeft een toelichting op de jaarcijfers. Het is niet de bedoeling dat in het komende jaar het eigen vermogen opnieuw toeneemt. Dat houdt in dat er financiële ruimte is voor nieuwe initiatieven. Hij roept de leden op zich met plannen en ideeën tot het bestuur te wenden.
De Vereniging heeft veel nieuwe leden gekregen, waarschijnlijk vooral door uitsluitend leden toegang te geven tot een deel van onze website.
De kascontrolecommissie, bestaande uit mevrouw Van Haastrecht en de heer Keemink, heeft de financiële administratie in orde bevonden. Voor komend jaar wordt weer een nieuw lid gezocht voor deze commissie.
De penningmeester stelt voor de contributie voor het komende jaar gelijk te houden. De vergadering stemt daarmee in. Ook over de exploitatierekening met begroting en balans zijn geen opmerkingen.
De penningmeester wordt gedechargeerd.

**Bestuursverkiezing**
Alleen bestuurslid Marianne Lambriex is aftredend. Zij is herkiesbaar en wordt zonder tegenkandidaten herkozen. De voorzitter spreekt waarderende woorden over Marianne, in het bijzonder over haar inbreng bij de organisatie van de studiedag. Metha Kamminga beëindigt haar bestuurslidmaatschap. De voorzitter spreekt haar dank en waardering uit. Metha was de drijvende kracht achter de website en voorzitter van de actieve HBO-werkgroep. Deze werkgroep binnen de Vereniging heeft onder Metha's voorzitterschap elke twee jaar een succesvolle conferentie georganiseerd met thema's rond de aansluiting.
Het bestuur draagt voor de vervanging van Metha twee nieuwe bestuursleden voor. Christiaan Boudri is lid van de HBO-werkgroep en werkzaam als docent wiskunde in het hbo. Daarnaast is hij betrokken bij cTWO en wiskunde D. Johan Gademan was 13 jaar wiskundedocent, won ooit de didactiekprijs, was uitgever en is zelfstandig ondernemer. Hij is ook bekend vanwege *Math4all*. In het bestuur zal Johan zich met name bezighouden met zaken rond digitalisering, PR en de NVvW-site.
Er zijn geen tegenkandidaten. Christiaan en Johan worden onder applaus opgenomen in het bestuur.

**Rondvraag**
Hiervan wordt geen gebruik gemaakt.

**Sluiting**
De voorzitter sluit de jaarvergadering en draagt de microfoon over aan de organisatoren van de studiedag. Een van hen is bestuurslid Henk van der Kooij die de aanwezigen eerst even bijpraat over de betrokkenheid van de Vereniging bij een tweetal rekenprojecten, 'RekenVOort' en 'Rekenen over de vakken heen'.
Vervolgens leidt hij de studiedag in.

# Verslag van het verenigingsjaar

## 1 AUGUSTUS 2010 – 31 JULI 2011

[ Kees Lagerwaard ]

**Bestuur**

Het bestuur bestond dit verenigingsjaar uit voorzitter Marian Kollenveld, secretaris Kees Lagerwaard, penningmeester Frank van den Heuvel en de leden Marianne Lambriex, Henk Bijleveld, Christiaan Boudri, Johan Gademan, Douwe van der Kooi, Henk van der Kooij en Henk Rozenhart.

Het dagelijks bestuur werd gevormd door de voorzitter, de secretaris en de penningmeester.

Er waren dit jaar zeven bestuursvergaderingen. In de tussenliggende periodes kwam het dagelijks bestuur een viertal keren bijeen. Ook is het bestuur in juni 2011 twee dagen bijeen geweest om zich te beraden op doelen en middelen voor de komende jaren. Wat willen we, wat komt er op ons af, hoe pakken we dat aan? Een deel van deze studiebijeenkomst stond onder extern voorzitterschap.

**Ledental**

In dit verenigingsjaar is het totale ledenaantal vrijwel niet veranderd. Het merendeel van de ongeveer 2700 leden is tussen 45 en 65 jaar oud. Het aantal gepensioneerde leden groeit licht.

Een omvangrijke wervingsactie in maart middels een mailing naar vmbo-scholen was niet erg succesvol: we schreven slechts enkele tientallen vmbo-docenten in als nieuw lid.

**Algemeen**

Het bestuur heeft ook dit jaar op diverse plaatsen zijn zorg geuit over de spanning tussen het gewenste eindniveau en de beschikbare contacttijd voor wiskunde in het voortgezet onderwijs. Door de eindexamenresultaten van 2011 lijkt deze zorg overdreven, ja zelfs misplaatst. Maar dan moet ook gekeken worden naar het keuzegedrag van de eindexamenkandidaten. Vooral in het havo is de deelname aan wiskunde B erg laag. De strengere zak/slaagregeling kan de keuze voor een 'gemakkelijkere' wiskunde of helemaal geen wiskunde nog aantrekkelijker maken. Daarbij komt dan nog dat volgens de formele toelatingsvoorwaarden voor alle technische en exacte hbo-studierichtingen (behalve de lerarenopleiding wiskunde) leerlingen uit het N&G-profiel met wiskunde A even toelaatbaar zijn als die met wiskunde B. Hierdoor wordt wiskunde B steeds minder aantrekkelijk en wordt ook het keuzevak wiskunde D op havo in zijn voortbestaan bedreigd.

In mei bracht het ministerie het Actieplan Beter Presteren uit. Een van de doelen is het bevorderen van excellentie en ambitie. Liggen hier kansen voor het wiskundeonderwijs? Ook wil men opnieuw nadenken over de profielenstructuur inclusief de plaats van wiskunde. Voorts zijn er plannen voor tussendoelen wiskunde/rekenen inclusief toetsing. Ook de toetsing van de rekenvaardigheid past in dit plan. Het bestuur wil hierover, samen met de leden, graag meedenken en meepraten.

Het bestuur denkt, samen met de Werkgroep VMBO, na over de wenselijkheid van een herziening van de examenprogramma's wiskunde. Ondanks de komst van digitale examens, een grotere aandacht voor rekenen, doorlopende leerlijnen en meer aandacht voor algebraïsche vaardigheden, zijn die programma's al heel lang ongewijzigd.

**Platform Wiskunde Nederland**

Formeel is het Platform Wiskunde Nederland (PWN) in het najaar van 2010 opgericht. In april ging het platform daadwerkelijk van start met een symposium in Leiden. Het platform opereert onder de koepel van NVvW en KWG en beoogt een betere behartiging van de belangen van de wiskunde, zowel voor het eigen veld als daarbuiten. Onze voorzitter zit in het bestuur van PWN en de NVvW is met name sterk vertegenwoordigd in de commissie Onderwijs.

**Federatie Onderwijsbonden**

Als vakinhoudelijke vereniging is de NVvW lid van de Federatie Onderwijsbonden. De Federatie Onderwijsbonden is aangesloten bij de CMHF (Centrale voor Middelbare en Hogere Functionarissen) teneinde aan de CAO-onderhandelingstafels te komen. Een van de belangrijke taken is immers het afsluiten van CAO's. Voor de Vereniging zijn, gezien de samenstelling van het ledenbestand, de CAO-VO, CAO-BVE en CAO-HBO van belang. Binnen de Federatie trekken we vaak samen op met de NVON. Via onze website houden we de leden op de hoogte.

De afgelopen jaren werd de NVvW in de Federatie Onderwijsbonden steeds vertegenwoordigd door Pim van Bemmel. Pim heeft aangegeven met dit werk te willen stoppen. Het bestuur is verheugd te kunnen melden dat Dick Ottenbros bereid is gevonden deze taak van Pim over te nemen. Het bestuur dankt Pim hartelijk voor het vele werk dat hij als vertegenwoordiger van de NVvW heeft verricht.

Een aantal individuele leden met

problemen inzake rechtspositie en andere arbeidszaken heeft gebruik gemaakt van het NVvW Rechtspositie Adviesbureau.

**VVVO**

Ook dit jaar heeft de NVvW weer deel uitgemaakt van het Platform VVVO.
Bij dit platform voor Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs spreken vertegenwoordigers van deze verenigingen met elkaar en met derden over ontwikkelingen binnen het onderwijs. Het bestuur van het platform heeft regelmatig overleg met o.a. het ministerie, de VO-raad, SLO, inspectie en andere instanties. Het deelnemen van de NVvW in dit platform is dus van groot belang om onze visie onder de aandacht van deze instanties te brengen. Het VVVO is ook een van de partners in de op te richten Onderwijscoöperatie, waarin de VVVO de verantwoordelijkheid zal krijgen voor het beroepsregister voor het middelbaar onderwijs.

**Jaarvergadering/studiedag**

De jaarvergadering/studiedag van 6 november 2010 was voorlopig de laatste die in het Anna van Rijn College plaats vond. Omdat de aula echt te klein is voor het plenaire deel, wordt voor de komende jaarvergadering/studiedag een nieuwe locatie gezocht.
De jaarrede van de voorzitter kunt u nalezen in *Euclides* nummer 4 van jaargang 86.
De notulen van de jaarvergadering vindt u elders in dit nummer van *Euclides*.
Het thema 'Geboeid door wiskunde' bleek een paraplu waaronder plaats was voor een groot aantal zeer gevarieerde lezingen en workshops. Er waren in dit thema vier deelgebieden onderscheiden: binnen het examenprogramma, buiten het lesgebeuren om, in samenwerking met andere vakken en de wiskunde zelf.
Voor het eerst was er een speciaal programma opgezet voor studenten aan lerarenopleidingen, met name LIO-ers. Voor hen was er een eigen ochtendprogramma en daarna namen ze deel aan 'onze' studiedag.
Het bestuur had, net als vorig jaar, nieuwe leden uitgenodigd voor een lunch tijdens de studiedag. Zo konden bestuursleden kennismaken met een veertigtal nieuwe leden.

**Website**

Vooral dankzij de inzet van Lennart de Jonge en Erik Korthof is onze website steeds actueel en informatief. Op de achtergrond is ook Dick Klingens nog actief.
Op het examenforum is weer uitgebreid gediscussieerd over de inhoud en de correctie van de eindexamens.
Meteen na de regionale eindexamenbesprekingen die de NVvW organiseert, worden de lijsten met afspraken die tijdens die examenbesprekingen zijn gemaakt, op de site gezet. Helaas neemt het aantal docenten dat die examenbesprekingen bezoekt, af.
Het bestuur communiceert sinds kort ook via Twitter.

**Euclides**

Klaske Blom legde aan het eind van jaargang 86 haar functie van hoofdredacteur neer. Ze slaagde er, samen met de redactie onder voorzitterschap van Heiner Wind, weer in om 7 nummers te vullen met nieuws, informatie en artikelen die geen enkele wiskundeleraar zou mogen missen.
Een uitnodiging aan de lezers om mee te praten over de toekomst van *Euclides* leverde heel weinig respons op. Een enquête op de website over de huidige vorm en inhoud van *Euclides* en de al dan niet digitale toekomst werd wel door vele tientallen lezers ingevuld.

**Rekenen**

Het door OCW gefinancierde project 'RekenVOort' is afgerond. De ontwikkelde modules zijn via de website te downloaden. Ook is de NVvW betrokken bij een project 'Rekenen over de vakken heen'.
Over enkele jaren zullen alle leerlingen in vo en mbo een afsluitende landelijke rekentoets moeten afleggen. De Vereniging is vertegenwoordigd in rekentoetswijzercommissies voor de niveaus 2F en 3F voor het vo (een rekentoetswijzer is vergelijkbaar met een syllabus bij een eindexamenprogramma). Ook heeft de NVvW een lid mogen voordragen voor elk van de vaststellingscommissies 2F en 3F.

**Hbo**

De Werkgroep HBO heeft het laatste jaar enkele veranderingen ondergaan. Metha Kamminga heeft haar voorzittershamer doorgegeven aan Christiaan Boudri, en Jan Blankespoor heeft zijn secretarispen doorgegeven aan Hans van Walen, die deze september 2011 weer doorgeeft aan Tanja Groenendaal. Daarnaast is de naam van de werkgroep met ingang van november 2011 gewijzigd in Landelijke werkgroep HBO-wiskunde (LWHW), dit met het oog op haar landelijke activiteiten. De werkgroep houdt zich bezig met de (bedreigde) plaats van wiskunde als zelfstandig vak in het brede scala van hbo-studies. En natuurlijk ook met de aansluitingsproblematiek bij de overgang van vo en mbo naar hbo.
De werkgroep heeft het afgelopen jaar een voorstel ontwikkeld voor een wiskundekennisbasis ten behoeve van de aansluiting mbo – technisch/economisch hbo. Dit in vervolg op de conferentie van 9 april 2010 over dit onderwerp. De werkgroep is in gesprek met o.a. het Sectoraal Adviescollege Techniek van de HBO-raad om deze kennisbasis een officiële, maar uitdrukkelijk niet-verplichte, status te geven. Tegelijkertijd wordt er overlegd met de MBO-raad over de wijze waarop een dergelijke kennisbasis een plaats kan krijgen binnen het doorstroomprofiel van de MBO-BOL4 leerlingen. Verwacht

wordt dat deze kennisbasis in het schooljaar 2011-2012 een formele status zal krijgen. De werkgroep is van plan in het voorjaar van 2012 een conferentie te houden met als onderwerp: Wat willen we met wiskunde op het hbo?

**Havo/vwo**
Er ligt inmiddels een nomenclatuurlijst klaar bij de door cTWO ontwikkelde nieuwe eindexamenprogramma's per 2015 voor havo en vwo. De NVvW heeft tot nu toe altijd gezorgd voor publicatie van de nomenclatuurrapporten die weliswaar geen officiële status hadden, maar door examenmakers en leerboekauteurs wel als uitgangspunt werden genomen. Wellicht worden de nieuwe nomenclatuurlijsten wel als 'lijst van vaktermen' opgenomen in de syllabi bij de nieuwe programma's.

**Vmbo**
Op BB-niveau doen de meeste leerlingen hun eindexamen al een paar jaar op de computer. Voor KB was er dit jaar opnieuw een pilot digitale examens. De meeste digitale examens worden niet gepubliceerd. Bovendien is voor het inzien van digitale examens een programma nodig dat alleen aanwezig is op deelnemende scholen. Het bestuur heeft er bij het CvE op aangedrongen ook de digitale examens na afname openbaar te maken omdat ze onmisbaar zijn voor een optimale voorbereiding op het eindexamen.
Een punt van zorg blijft het feit dat in het vmbo heel veel wiskundelessen worden gegeven door docenten die niet in de eerste plaats docent wiskunde zijn maar naast hun eigen vak ook nog wiskundelessen verzorgen. Wellicht verklaart dit (deels) waarom zo weinig vmbo-docenten lid zijn van de NVvW.

**ICT-ontwikkeling**
De NVvW is betrokken bij de pilot 'Open Leermiddelenbank Wiskunde'.
Ook is de NVvW (via PWN) betrokken bij het project ONBETWIST dat maart 2011 is gestart. In dit project wordt verder gewerkt aan een betere aansluiting vo-ho. Het project duurt tot maart 2013.
Het bestuur continueert de financiële ondersteuning van de projecten WisBase en WisClass en heeft ook een bedrag geschonken ter ondersteuning van de website *rekenbeter.nl*.
Mede dankzij een donatie van de NVvW werd een grote verzameling Kangoeroe-opgaven digitaal toegankelijk.

**Lerarenregister**
Het bestuur is al jarenlang betrokken bij activiteiten die betrekking hebben op het optimaliseren van de kwaliteit van wiskundeleraren. Denk hierbij aan het formuleren van bekwaamheidseisen en het certificeren van nascholingsactiviteiten.
Na WiVa (Wiskundeleraar Vakbekwaam) en de vakoverstijgende SBL-projectgroep (Stichting Beroepskwaliteit Leraren) worden deze activiteiten nu voortgezet onder de paraplu van de Onderwijscoöperatie. De NVvW zal hierin via de VVVO betrokken zijn bij het vormgeven en beheren van het lerarenregister voor wiskundedocenten.

**WwF**
Dankzij de vrijwillige bijdrage van de leden en de opbrengst van de boekenveiling kon door de werkgroep Wereldwiskunde Fonds (WwF) een project worden uitgevoerd in Kenia. Op de website is hieraan aandacht besteed.

**IMO 2011**
De Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) vond in juli van dit jaar voor het eerst in Nederland plaats. De NVvW was sponsor van deze grote gebeurtenis. Een aanzienlijk aantal leden heeft als vrijwilliger bijgedragen aan organisatie en uitvoering van dit succesvolle evenement.

**Vakantiecursus**
Ook in augustus 2010 was er weer een Vakantiecursus in Amsterdam en Eindhoven, de 64e, ook nu georganiseerd door het CWI in samenwerking met de NVvW.

**HKRWO**
Het bestuur heeft een gesprek gevoerd met de Historische Kring Reken-Wiskunde Onderwijs. De uitkomst is dat de HKRWO over enige tijd een werkgroep van de NVvW zal worden, de Permanente Werkgroep Geschiedenis van het Reken-Wiskunde Onderwijs.

**Tot slot**
Artikel 2 van de statuten zegt dat het doel van de Vereniging is *aan de leden de gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen betreffende het wiskundeonderwijs en voorts het behartigen van de belangen van dit onderwijs.*
Het bestuur nodigt de leden van harte uit bij te dragen aan die gedachtenwisseling. Dat kan op de jaarvergadering/studiedag of bij de examenbesprekingen. Dat kan middels bijdragen in *Euclides* of op een forum op de website. En het kan door mee te praten in een van de werkgroepen. In vele gevallen levert u dan meteen een bijdrage aan het andere doel: het behartigen van de belangen van het wiskundeonderwijs. Dat kan ook door zitting te nemen in het bestuur of door het bestuur/de vereniging te vertegenwoordigen in diverse overkoepelende organisaties.
Wilt u daar eerst iets meer over weten? Neem dan contact op met een van de bestuursleden, bijvoorbeeld via *secretaris@nvvw.nl*.

# Meet je Rekenkracht met Rekenbeter!

WWW.REKENBETER.NL

[ Sieb Kemme ]

## Doordenker 87-2

Frater Isidorus Nieland
(potloodtekening: Frater Hilarius de Booy, 1996)

### Een koeiensom

De bundel *Rekenopgaven* (4de druk) van Isidorus Nieland bevat tal van rekenopgaven, bestemd voor de vroegere kweekschool. De volgende 'koeiensom' heeft weinig met de huidige praktijk van het boerenbedrijf te maken, maar is als rekenopgave beslist de moeite van het doordenken waard.

*Acht koeien hebben twaalf weken nodig om een wei kaal te vreten.*
*Twaalf koeien hebben er zes weken voor nodig.*
*Hoeveel koeien houden het gras op gemiddeld dezelfde hoogte?*

### *Euclides*-rekenaars

De oplossing van deze Doordenker kunt u **tot 14 november a.s.** kwijt in een forum op de website van Rekenbeter (*www.rekenbeter.nl*).

Om op dit forum te komen meldt u zich aan bij *www.rekenbeter.nl* als lezer van *Euclides*. U komt dan in een aparte groep terecht met een eigen klassement. Dagelijks ontvangt u een e-mailbericht met daarin een link naar de dagelijkse rekenopgaven. De prestaties van deze *Euclides*-rekenaars worden on line in een apart klassement bijgehouden op basis van het percentage goed beantwoorde opgaven in combinatie met de snelheid waarin ze zijn opgelost.

De puzzelredacteuren van *Rekenbeter.nl* zullen in een volgende aflevering van *Euclides* een bloemlezing publiceren van de ingestuurde oplossingen van deze Doordenker.

NIEUW

## Oplossing 86-7

# Verdelingen in vierkanten

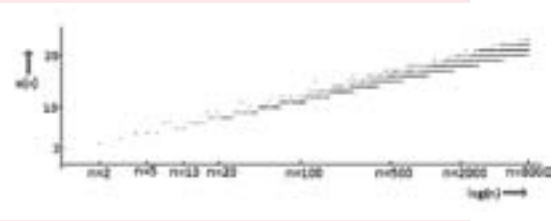
[ Lieke de Rooij i.s.m. Wobien Doyer ]

Het aantal inzendingen is helaas gedaald, wellicht een gevolg van de vakantie. Of heeft het ontbreken van de stimulans om hoger op de ladder te kunnen komen een rol gespeeld?
De opgaven van deze laatste, weer uitdagende, puzzel van de serie van Frits Göbel gaan over de functie $a(n)$, het minimale aantal vierkanten waarmee 'bijna-vierkanten' van $n$ bij $n + 1$ kunnen worden betegeld. Het totale oppervlak is een pronikgetal (= *het dubbele van een driehoeksgetal* of *een kwadraat + z'n wortel* of *gewoon* $n(n + 1)$, *met* $n$ in **N**).
In navolging van Frits gebruik ik hier voor het gemak de term pronik($n$) voor een 'bijna-rechthoek' van $n(n+1)$.

**Opgave 1** gaf geen problemen. Elke pronik($n_k$), met $n_k = k(k + 1)$, is te verdelen in:
$k \times (k + 1)^2 + 1 \times (k^2)^2 + k \times k^2$
Dus totaal $2k + 1$ vierkanten. Gevolg:
$a(n_k) \leq 2k + 1 < 3k \leq 3\sqrt{n_k} = O(\sqrt{n_k})$

Bij **opgave 2** moest worden gezocht naar een rij $n_k$ met $a(n_k) = O(\ln(n_k))$.
De pronik($n_k$) met $n_k = 4k + 1$ is te verdelen in:
$2 \times (2k + 1)^2 + 1 \times (2k)^2 + 2k \times (2k + 2)$.
In de laatste rechthoek passen $a(k)$ vierkanten, dus totaal: $3 + a(k)$.
Als $n_k = 4k + 2$ is deze pronik te verdelen in:
$2 \times (2k + 2)^2 + 1 \times (2k + 1)^2 + 2k \times (2k + 2)$.
In beide gevallen geldt: $a(n_k) = 3 + a(k)$.
Meer algemeen:
Als $n_{k+1} = 4n_k + 1$ of $4n_k + 2$ geldt:
$a(n_{k+1}) = 3 + a(n_k)$, of $a(n_k) = a(n_0) + 3k$.
Met volledige inductie is nu te bewijzen:
$a(n_k) \leq 4 \times {}^4\log(n_k) = O(\ln(n_k))$

**Opgave 3** was een vrije opdracht om naar believen voor zoveel mogelijke waarden van $n$ de bovengrenzen van $a(n)$ te vinden, uiteraard zo scherp mogelijk. Hier was het zinvol in bepaalde gevallen af te wijken van het *strokenprincipe*.
*Voorbeeld*. Met het strokenprincipe heb je voor pronik(16) minimaal 9 vierkanten nodig. Maar het kan beter: $a(16) = 8$. De oplossing is:
$16 \times 17 = 10^2 + 7^2 + 2 \times 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2$
Notatie volgens de Bouwkamp-code [1]:
8, 16, 17 , (10, 7), (3, 4), (6, 6), (1), (5)
Harm Bakker schreef een computerprogramma om eerst de pronikgetallen in een som van kwadraten uit te drukken en vervolgens te zoeken naar mogelijke oplossingen. Zo'n programma duurt al gauw heel lang, maar toch wist hij de oplossingen te vinden voor $n \leq 70$.
Opvallend is dat naarmate $n$ groter wordt, de oplossingen steeds vaker *niet* volgens het strokenprincipe te realiseren zijn.
Met een computerprogramma dat alleen volgens het strokenprincipe werkt, kom je al snel veel verder. ***In figuur 1*** ziet u de resultaten uitgezet tegen log($n$), tot en met $n = 8000$.



figuur 1

De vrijwel rechte lijn doet vermoeden dat zelfs bij gebruik van het strokenprincipe voor alle waarden van $n$ zou gelden $a(n) = O(\ln(n))$. Door van die verdeling in stroken af te wijken lijkt de helling van de grafiek wel iets kleiner te worden, maar geeft geen directe aanleiding tot een ander vermoeden.

Kortom, er blijft nog genoeg te onderzoeken en te bewijzen.

En dan was er nog een toegift: Betegel vierkanten met proniks.
De verrassende oplossing is niet moeilijk te verklaren. Pronikgetallen zijn altijd even, dus daar kan je nooit een oneven vierkant mee betegelen. Als het vierkant zijden heeft van $2k$, is hij te verdelen in twee maal pronik($k - 1$) en twee maal pronik($k$), dus altijd hoogstens 4 proniks.

### De laatste Ladderstand

J. Hanenberg 573
T. Kool 566
H. Linders 533
H. Bakker 497
K. Verhoeven 436
K. van der Straaten 435
W. van den Camp 422
J. Remijn 387
H.J. Braskamp 352
J. Verbakel 321
R. Stolwijk 287
J. Meerhof 269

De allerlaatste ladderprijs, een boekenbon ter waarde van € 30,00, is gewonnen door Jozef Hanenberg. Gefeliciteerd!

**Noot**

[1] Zie: *www.squaring.net/downloads/downloads.html#bouwkampcode*

# SERVICEPAGINA

# Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren

**Zebraboekjes**

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken

Zie verder ook *nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

**Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo**

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

**Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php***

# Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*). Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

**jaargang 87**

| nr. | verwachte verschijningsdatum | deadline |
|---|---|---|
| 3 | 20 december 2011 | 25 okt 2011 |
| 4 | 7 februari 2012 | 6 dec 2011 |
| 5 | 27 maart 2012 | 31 jan 2012 |
| 6 | 15 mei 2012 | 20 maa 2012 |
| 7 | 26 juni 2012 | 1 mei 2012 |

**Nog t/m maandag 31 oktober, 24:00u**
WwF-Boekenveiling via Internet
Zie pagina 83 in dit nummer.

**zaterdag 5 november**
Jaarvergadering/Studiedag NVvW
Ichthus College, Veenendaal
Organisatie NVvW
Zie pagina 48 in Euclides 87(1) en de pagina's 82-89 in dit nummer.

**maandag 7 november, Utrecht**
Studiemiddag: Rekenen in het vo getoetst
Organisatie APS
Zie ook pagina 60 in dit nummer.

**vrijdag 11-11-11, Amsterdam**
Eerste dag Nascholing VU
Organisatie Afdeling wiskunde VU Amsterdam
Zie pagina 33 in Euclides 87(1).

**maandag 14 november, Utrecht**
Cursus: Hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles
Organisatie APS

**wo 16 nov en wo 30 nov, Amsterdam**
Mastercourse TopWis Poincaré
Organisatie De Praktijk
Zie pagina 15 in Euclides 87(1).

**vrijdag 18 november, op de scholen**
Wiskunde A-lympiade (voorronde) & Wiskunde B-dag
Organisatie FIsme

**zaterdag 19 november, Universiteit Delft**
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis i.s.m. Faculteit Bouwkunde
Zie ook pagina 64 in dit nummer.

**vrijdag 25 november, Leeuwarden**
Studiedag: Zekerheden in waarnemingen
Organisatie Obe Postma Selskip

**donderdag 1 december, Utrecht**
Studiedag: Rekenen geven op mijn school
Organisatie APS

**2012**

**zaterdag 7 januari, Utrecht**
Wintersymposium: Grootschalig rekenen en gezondheidszorg
Organisatie KWG
Zie pagina 62 in dit nummer.

**vr 3 feb en za 4 feb, Noordwijkerhout**
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme

**donderdag 15 maart, op de scholen**
W4 Kangoeroe
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

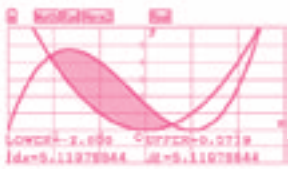
# CASIO *fx*-CG20: Kleurrijke wiskunde!

De *fx*-CG20 van CASIO is de eerste van een nieuwe generatie grafische rekenmachines, die dankzij zijn hogeresolutie LCD-kleurenscherm en uitgebreide functionaliteit de ideale studiegenoot is voor iedere scholier of wiskundestudent.

De *fx*-CG20 van CASIO biedt als eerste ter wereld de functie 'Picture Plot' waarmee de gebruiker grafieken en curven over andere beelden heen kan plotten, zoals een parabool over de waterstralen van een fontein. Studenten kunnen experimenteren met het creëren van hun eigen grafieken over foto's heen. Vervolgens leren ze van de functies van deze zelfgemaakte grafieken. Grafieken die in kleur bovendien een stuk gemakkelijker te overzien zijn. Het hogeresolutie LCD-kleurenscherm toont alle beeldmateriaal in 65.000 kleuren en biedt daarmee dezelfde weergave als in een studieboek. De *fx*-CG20 introduceert een geheel nieuwe en meer intuïtieve manier van wiskunde leren.

**Bekijk het in kleur op www.casio-educatie.nl**

Colour Display



# CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf!

Op de Natural Textbook Display worden o.a. breuken en wortels weergegeven als in het leerboek. De *fx*-82ES Plus is ook geschikt voor het gebruik van tabellen.

## CASIO *fx*-9860GII

Rekengemak: de grafische rekenmachine *fx*-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB Flash-ROM-geheugen.

## CASIO *fx*-82ES PLUS

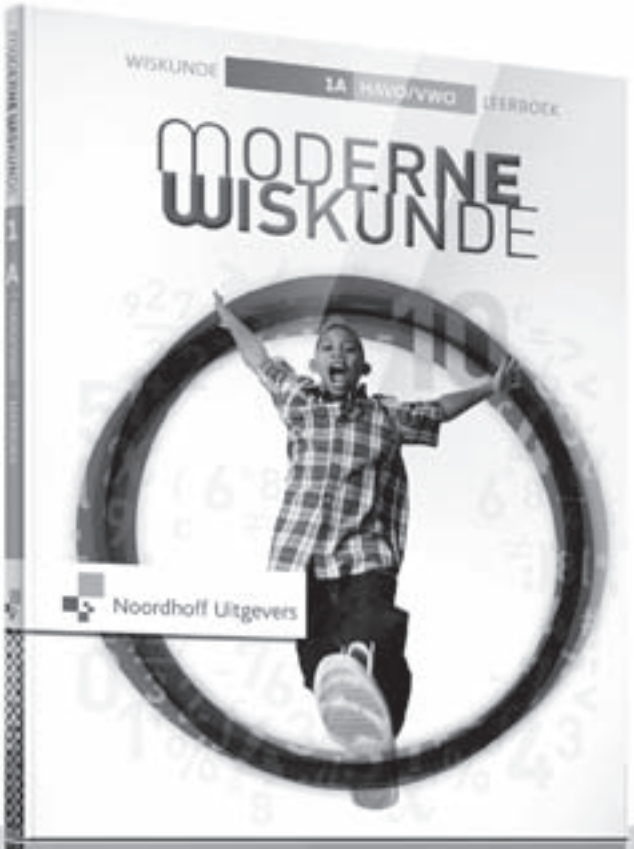
Geniale oplossing: de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx*-82ES Plus met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie, en met puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

**3 jaar garantie**

**Bestel nu uw speciaal geprijsde docentenexemplaar van de Casio rekenmachines via e-mail educatie@casio.nl**

**CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.**

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl




# Nieuwsgierig naar de **10 verbeterpunten** van Moderne Wiskunde 10e editie?

Noordhoff Uitgevers

Meld u dan aan voor één van de informatie-bijeenkomsten in november of december. Vraag meteen uw beoordelingsmateriaal aan via **www.modernewiskunde.noordhoff.nl**.

## Nieuw!

**Moderne Wiskunde**
**10e editie**
**havo/vwo onderbouw**

**10**
**Sterke punten**

MODERNE WISKUNDE

MODERNE WISKUNDE

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent