

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

maart

11
nr **5**

jaargang 86

Op weg naar IMO2011

Digitale algebraïsche
vaardigheid

Rekenen – de stand
van zaken

Wiskunde en water

G. Krooshof en de
didactiek

“Bartjens” rekendictee



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

m a a r t

1 1
n r 5

j a a r g a n g 8 6

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch

Michel van Ast

Klaske Blom, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Marjanne de Nijs

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Klaske Blom,

Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. Sepideh Moosavi

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: s.moosavi@dekleuver.nl



KORT VOORAF

[Klaske Blom]

Rekenen

Twee nummers geleden schreef ik dat er soms bij toeval iets ontstaat dat op een 'themanummer' lijkt. Deze keer is dat het geval, met als thema 'rekenen'. Hoort dat wel thuis in *Euclides*? Wie gaan er eigenlijk rekenen geven in het vo? Wie wordt rekendocent? Gaat de vakgroep wiskunde het onder haar hoede nemen of ...?

Op de startconferentie van de regionale netwerken, georganiseerd door het Steunpunt VO, bleek dat deze discussie nog niet is uitgewoed: op sommige scholen wordt rekenen onder gebracht bij verschillende vaklessen zoals economie of aardrijkskunde; op andere scholen is er tijd ge-kaas-schaafd bij veel vakken en zijn er aparte rekendocenten aangesteld.

Frans Ballering pleit, in zijn tweede bijdrage die hij schrijft als vakdidacticus-in-ruste, voor het opnemen van rekenen in de wiskundelessen. Omdat rekenen ons wiskundeleraars niet vreemd – en sommigen zelfs lief – is, lijkt het zinvol en wenselijk om er in *Euclides* ruimschoots aandacht aan te besteden. Zo vind ik het zelf erg belangrijk te weten dat het voornemen van de rekentoetswijzer-commissie is om slechts 20% 'kale' rekensommen op te nemen in de rekentoetsen.

In het artikel van Victor Schmidt vindt u veel meer wetenswaardige informatie over de invoering van het rekenen in het vo. Sla het dus niet over! En deze oproep zou ik ook willen doen voor het artikel van Thomas van den Elsen. Hij spreekt zijn zorg uit over de stand van rekenzaken in het mbo.

Metha Kamminga schreef over de valkuilen van het digitaal toetsen in het hbo. Het gaat hier niet speciaal om rekentoetsen, maar iedereen die overweegt te gaan werken met digitale rekentoetsen, kan ik dit artikel wel van harte aanbevelen.

Dat we ook een jaarlijkse rekenkampioen hebben in Nederland, ontgaat ons niet doordat Ed de Moor – net als vorig jaar – deze kampioen heeft geïnterviewd.

Symposia en conferenties

Maar er is meer. Er waren symposia waarover we u kond doen: Henk Rozenhart geeft een korte impressie van het KWG-wintersymposium (8 januari jl.). Jan van Eijck hield daar een lezing over de logica van het redeneren en maakte er voor ons een artikel van. Gert de Kleuver en Joke Verbeek nemen u mee naar de 9e wiskundeconferentie van 31 januari jl. met als thema 'Verbazen, verbinden en gebruiken in de wiskundeles'.

Bent u ooit op een HKRWO-symposium (HRWO = Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs) geweest? De organisatie van dit symposium heeft patent op een hete zomerse zaterdag in mei. Thema dit jaar: De geschiedenis van tijdschriften voor wiskundeleraars en leerlingen. Ook de geschiedenis van *Euclides* zal daar aan de orde komen, voor het voetlicht gebracht door Martinus van Hoorn, oud-hoofdredacteur van *Euclides*. Voor dit nummer stuurde hij een voordracht in van Gerrit Krooshof, ook een oud-hoofdredacteur van *Euclides*. Krooshof was tevens de man die ervoor zorgde dat ook mavo- en lbo-leraren lid konden worden van de NVvW.

Over voormalig hoofdredacteurs gesproken ...

U vindt op pagina 202 een advertentie waarin een *nieuwe* hoofdredacteur van *Euclides* gevraagd wordt. Ik wil per 1 juli a.s. het stokje graag doorgeven. Hopelijk reageert u snel en enthousiast: *Euclides* is de moeite waard.

En nog meer

Wat u verder nog vindt: het tweede deel over meervoudige intelligenties, een zeer bruikbaar idee voor een praktische opdracht over wiskunde en water, een kreet over verdwijnende wiskunde, een onderzoeker over het doen van algebra met de computer. Onze rubrieksauteurs heb ik deze keer niet eens apart genoemd, maar uiteraard zijn ze er. Ik hoop dat u weer geniet van een mooi nummer.

Tot slot wil ik nóg een oproep doen. Wilt u schrijven over uw examengroep(en), dan houden we ons aanbevolen en zien graag uw bijdrage tegemoet voor het examennummer, nummer 1 van jaargang 87. Hoe heeft u uw examenklas voorbereid op het komend examen? Wat deed u en wat liet u achterwege? Bent u gerust op wat komen gaat of vreest u het ergste? Hoe zullen straks de ervaringen zijn met het CE? Als u denkt een artikel te kunnen schrijven voor bedoeld examen-nummer, neemt u dan contact met mij op (redactie-euclides@nvvw.nl).

INHOUD

181	Kort Vooraf [Klaske Blom]
182	Op weg naar IMO2011 [David Kok]
184	ICT als tool voor algebra / Interview [Brechtje Hollaard]
186	Digitaal werken aan algebraïsche vaardigheid en inzicht [Christian Bokhove]
189	Meervoudige intelligentie in de wiskundeles, deel 2 [Ingrid Berwald]
191	Rekenkampioen van Nederland 2010 [Ed de Moor]
195	Rekenen – de stand van zaken [Victor Schmidt]
199	Waarom rekenen thuis hoort in de wiskundeles [Frans Ballering]
201	Machtsfuncties – Wiskunde leeft! [Wout de Goede]
202	Gezocht / Hoofdredacteur <i>Euclides</i>
203	De waarheid over het Wintersymposium? [Henk Rozenhart]
203	Gezocht / Tijd voor ICT in de wiskundeles?
204	Aankondiging / HKRWO- symposium XVII
205	Mededeling / Centrale examens 2011, 1e tijdvak
207	De tien valkuilen van digitaal toetsen [Metha Kamminga]
210	Nederland leeft met Water [Ruud Stolwijk, Jacques Jansen]
214	Redeneren over Communicatie [Jan van Eijck]
216	Differentiaal en diepviespizza's [Dorien Lugt]
217	Rekenen in het mbo: ramp of zegen? [Thomas van den Elsen]
220	G. Krooshof en de didactiek van de wiskunde [Martinus van Hoorn]
221	Voordracht [G. Krooshof]
224	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
225	Aankondiging / Lerarendag op NMC 2011
226	Kan wiskunde de wereld redden? / Boekbespreking [Joke Verbeek]
228	De kennisbasis van de master- opleidingen wiskunde [Douwe van der Kooij]
230	Recreatie [Frits Göbel]
232	Servicepagina

Op weg naar IMO2011



IMO2009 - OPGAVE 2

[David Kok]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zetten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

Aan het eind van het schooljaar 2009 vertrok ons IMO-team naar Bremen om daar Nederland te vertegenwoordigen op de IMO. Hoewel Bremen niet bijzonder exotisch is, hadden we er allemaal erg veel zin in: het was van tevoren al duidelijk dat het leuk zou worden. In Bremen probeerden we in twee keer, in $4\frac{1}{2}$ uur tijd, zes lastige problemen op te lossen. Het lukte mij om hiervan één probleem compleet op te lossen, en één grotendeels – een resultaat waarmee ik meer dan tevreden was. In dit artikel wil ik mijn aanpak van de tweede opgave beschrijven.

De opgave

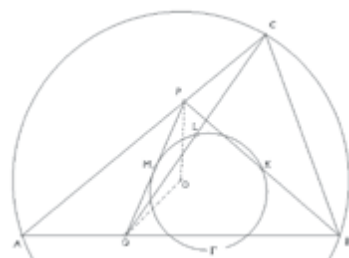
Zij ABC een driehoek en O het middelpunt van de omschreven cirkel. Laat P en Q inwendige punten zijn van respectievelijk de zijden CA en AB . Laat K , L en M de middens zijn van respectievelijk de lijnstukken BP , CQ en PQ en zij Γ de cirkel door K , L en M .

Veronderstel dat de lijn PQ raakt aan de cirkel Γ .

Bewijs dat $|OP| = |OQ|$.

Het eerste dat opvalt is, dat we heel veel informatie hebben, waarvan het niet duidelijk is wat we er mee moeten doen. Om eens een goed overzicht te krijgen beginnen we met het maken van een schetsje, en daarna een net plaatje; **zie figuur 1**.

Hoewel erg nuttig, lost dit plaatje niet meteen het probleem voor ons op. Daarom gaan we stuk voor stuk onze gegevens doorlopen om te kijken wat we er mee kunnen. Misschien lopen we wel per ongeluk tegen de oplossing aan bij het op een andere manier opschrijven van onze informatie.



figuur 1

Alleen met het midden van een lijnstuk kan je niet zo heel veel. Met lijnen zelf daarentegen wel, dus we trekken de lijntjes KM , ML en LK . Omdat M het midden is van PQ , en L het midden van CQ , is ML een middenparallel in driehoek PQC . We weten nu dus dat ML en CP evenwijdig lopen en dat $|CP|$ precies twee keer zo groot is als $|ML|$.

Net zo goed is MK een middenparallel in driehoek PQB , want K is het midden van BP , en M nog steeds het midden van PQ . We weten dus dat MK en QB evenwijdig lopen en dat $|QB|$ precies twee keer zo groot is als $|MK|$. Zo hebben we uit een klein deel van onze gegevens toch al veel nuttige informatie gehaald!

Dan nu onze volgende (en tevens laatste) gegevens: PQ raakt aan Γ . Er is een handige stelling die we kunnen gebruiken om met dit gegeven iets te doen: de *Raaklijn-Omtrekshoekstelling*. Deze stelling zegt ons dat, omdat PQ een raaklijn is in M , de hoeken MKL en PML gelijk moeten zijn. Ook zegt dezelfde stelling (om dezelfde reden) dat de hoeken MLK en QMK gelijk moeten zijn. Nu we al onze informatie hebben omschreven naar (hopelijk nuttigere) informatie, maken we een nieuw plaatje, waarin we alles noteren; **zie figuur 2**. We zien dat LM en AC evenwijdig zijn, dus



figuur 2

hebben we Z -hoeken: $\angle PML = \angle MPA$. Maar omdat we ook al wisten dat $\angle PML = \angle MKL$, weten we nu dat $\angle MKL = \angle MPA$. Ook weten we dat MK en AB evenwijdig zijn, en opnieuw hebben we Z -hoeken: $\angle AQM = \angle QMK$. Alweer weten we al iets over die hoek, want $\angle QMK = \angle MLK$. Hieruit krijgen we: $\angle MLK = \angle AQM$. Na dit in het plaatje genoteerd te hebben, zien we iets heel leuks: twee van de hoeken in driehoek AQP zijn gelijk aan twee van de hoeken in driehoek MLK ! Hieruit volgt een gelijkvormigheid: $\triangle AQP \sim \triangle MLK$. We weten nog niet wat we er precies mee moeten, maar het is een mooi tussenresultaat.

Inmiddels hebben we al onze informatie gebruikt en omschreven. Dan wordt het nu tijd om te kijken wat we eigenlijk willen bewijzen: $|OP| = |OQ|$.

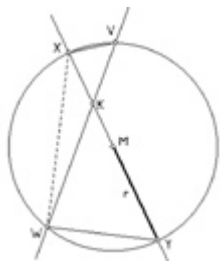
In ons plaatje lijkt het wel waar te zijn, dat is een goed teken. De meest voor de hand liggende manier om te bewijzen dat twee lengtes, $|OP|$ en $|OQ|$, gelijk zijn, is door te bewijzen dat driehoek POQ gelijkbenig is met $\angle OPQ = \angle PQO$.

Alleen weten we eigenlijk helemaal niks van punt O , en die hoeken komen verder niet in ons plaatje voor. We kunnen ze natuurlijk zelf invoeren, maar we weten te weinig over punt O om deze hoeken uit te rekenen. Daarom moeten we iets slims verzinnen om $|OP|$ en $|OQ|$ uit te rekenen, met behulp van een stelling die te maken heeft met het middelpunt van onze cirkel.

Nu leren IMO-deelnemers in de voorbereiding op deze wedstrijd een aantal heel nuttige stellingen, waaronder de *Machtstelling*. Deze zegt dat, als we een cirkel nemen en een punt K binnen de



cirkel en dan een lijn door dat punt trekken die de cirkel twee keer snijdt, in V en W , dan het product $|KV| \cdot |KW|$ gelijk is aan $r^2 - |KM|^2$, met M het middelpunt van de cirkel en r de straal. Hieronder even een kort bewijs (zie figuur 3).



figuur 3

Er geldt $\angle XVK = \angle KYW$ wegens de *constante-hoekstelling* (op koorde WX). Ook geldt $\angle XKV = \angle YKW$ (*overstaande hoeken*). Dus geldt $\triangle VKX \sim \triangle YKW$ (*hh*). Dus:

$$\frac{|KV|}{|KY|} = \frac{|KX|}{|KW|}$$

oftewel:

$$\begin{aligned} |KV| \cdot |KW| &= |KX| \cdot |KY| = \\ &= (r - |KM|)(r + |KM|) = \\ &= r^2 - |KM|^2 \end{aligned}$$

Dit getal heet de *macht* van K bij de cirkel. Wat opvalt bij deze stelling is dat het product $|KV| \cdot |KW|$ alleen afhankelijk is van $|KM|$ voor een gegeven cirkel.

Dit kunnen we goed gebruiken bij de opgave: in plaats van naar de lengtes $|OP|$ en $|OQ|$ te kijken, kunnen we ook naar $r^2 - |OP|^2$ en $r^2 - |OQ|^2$ kijken, dus naar de machten van P en Q ten opzichte van een of andere cirkel met middelpunt O en straal r .

Door deze stelling toe te passen hoeven we niet te gaan zoeken naar een manier om de lengte $|OP|$ uit te rekenen; we zijn heel handig van dat onbekende punt O afgekomen! Dat wil zeggen, als we een geschikte cirkel kunnen vinden met O als middelpunt. Dus we pakken het plaatje er weer eens bij.

De omgeschreven cirkel van driehoek ABC heeft middelpunt O , en dat is verder ook de enige cirkel waarover we een beetje informatie hebben. Daarom gaan we eerst proberen te kijken of ons trucje met juist deze cirkel gaat werken.

We hebben precies één lijn door P die de cirkel (nu al) twee keer snijdt, AC , en omdat het niet aantrekkelijk is om nieuwe dingen in te voeren, gaan we maar eens gewoon met deze lijn werken. Hetzelfde

geldt voor Q : opnieuw is er één lijn, AB , die er aantrekkelijker uitziet dan andere mogelijkheden. Wat we met ons trucje dus eigenlijk zouden willen bewijzen, is dat:

$$\begin{aligned} |AP| \cdot |PC| &= r^2 - |OP|^2 = r^2 - |OQ|^2 \\ &= |AQ| \cdot |QB| \end{aligned}$$

Als we die twee buitenste delen aan elkaar gelijk kunnen praten, is het bewijs rond.

Even kijken hoe we er tot nu voor staan: wat we weten en wat we willen. Na een lange tijd puzzelen weten we dat de driehoeken AQP en MLK gelijkvormig zijn, en door *als wilde gok* de machtstelling toe te passen weten we dat de uitspraak:

$$|AP| \cdot |PC| = |AQ| \cdot |QB|$$

equivalent is aan het gevraagde; dus dat willen we nu gaan proberen te bewijzen.

Uit onze gelijkvormigheid kunnen we halen dat:

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|MK|}{|ML|}$$

Dus kunnen we kunnen het te bewijzen nog verder omschrijven:

$$\frac{|QB|}{|PC|} = \frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|MK|}{|ML|}$$

Als deze buitenste twee termen gelijk zijn,

Schaak en Gowinkel het Paard

de meest complete denksportwinkel



- Boeken, spellen en software op het gebied van Go, Schaken en Bridge
- Vele andere denkspellen waaronder Shogi, Gif, Set, Katamino
- Legpuzzels en breinbrekers
- Boeken over mathematische puzzels
- Gezelschapsspellen

Haarlemmerdijk 173
1013 KH Amsterdam
T (020) 624 11 71
F (020) 627 08 85
Paard@xs4all.nl
www.schaakengo.nl

geopend van 10.00 tot 17.30 uur, ma. vanaf 13.00 uur, do. tot 20.00 uur

zijn we ook al klaar. Omdat we opnieuw niet zien wat we hiermee moeten, pakken we het plaatje er dus weer bij.

In ons plaatje staat nog dat MK en ML middenparallelle zijn! En daarom geldt: $|QB| = 2 \cdot |MK|$ en $|PC| = 2 \cdot |ML|$

Dus geldt ook:

$$\frac{|QB|}{|PC|} = \frac{2 \cdot |MK|}{2 \cdot |ML|} = \frac{|MK|}{|ML|}$$

Dat is precies wat we nog moesten bewijzen! Met deze laatste stap is het bewijs rond; we hebben het gevraagde bewezen.

Info

Website 2011: www.imo2011.nl

Over de auteur

David Kok is eerstejaars student wis- en natuurkunde aan de Universiteit Leiden. In 2009 heeft hij meegedaan aan de IMO in Bremen, en in 2010 ging hij mee naar de IMO in Astana (Kazachstan), waar hij een bronzen medaille behaalde.

E-mailadres: daviduitdelft@gmail.com

ICT als tool voor algebra

INTERVIEW MET CHRISTIAN BOKHOVE

[Brechje Hollaardt]

Christian Bokhove is docent wiskunde en heeft ICT-taken op het St. Michael College in Zaandam én doet een promotieonderzoek aan de Universiteit Utrecht. Zijn onderzoek gaat over de manier waarop je ICT kunt inzetten bij het verwerven van algebraïsche vaardigheden, en wordt gehouden onder vwo-6 leerlingen. Het onderzoek wordt gefaciliteerd binnen Dudoc (zie kadertekst).

Dudoc: Didactisch Universitair onderzoek van DOCenten naar vernieuwing van de bètavakken

Het Dudoc-programma biedt negentien docenten de mogelijkheid vier jaar lang een onderzoek uit te voeren naar vernieuwingen in de bètavakken. De docenten werken 40% van de tijd op hun school en 60% op een universiteit. Dudoc is ingesteld door het Platform Bèta Techniek met steun van het ministerie van OCW. Het is een uniek experiment in vakdidactisch en onderwijskundig Nederland. Dudoc is onder andere opgezet om het werk te ondersteunen van de bèta-vakvernieuwingscommissies, die de minister van OCW adviseren over nieuwe examenprogramma's. Dudoc is in twee fasen gestart met een groep docenten in 2007 en een groep in 2008. Meer info via « www.dudocprogramma.nl ».

In een volgend nummer van *Euclides* leest u een verslag van een rondetafel gesprek met een aantal Dudoc'ers.

onderwijs komen er best wat negatieve geluiden over het niveau van de leerlingen die binnenstromen: ze kunnen slecht vergelijkingen oplossen, ze snappen niet waarom uit een wiskundige som een bepaalde uitkomst heeft. Mijn onderzoek gaat in op zowel inzichten als vaardigheden van leerlingen in 6 vwo, zaken die elkaar kunnen versterken. Ik heb digitale activiteiten voor leerlingen ontwikkeld, die daarop zijn gebaseerd. Tevens wordt ICT gebruikt voor diagnostische toetsen om voortgang te meten bij leerlingen.'

Voordelen van ICT

Het onderzoek startte met het expliciet maken van de te gebruiken wiskundige tool: wat is er nodig voor een goede tool? Christian Bokhove: 'Ik heb criteria geformuleerd waaraan de tool moet voldoen, zoals gebruikersvriendelijkheid en stabiliteit. Die criteria maakten dat experimentele tools afvielen voor het onderzoek. Een ander belangrijk criterium was het hebben van de juiste auteursomgeving, zodat ik zelf activiteiten en inhoud zou kunnen ontwerpen. Vervolgens heb ik alle mij bekende tools geëvalueerd aan de hand van de criteria. Daarmee kon ik de tool selecteren die het beste zou passen voor het onderzoek. De volgende stap was het ontwerpen en maken. Doordat ik bepaalde uitgangspunten had genomen voor de te gebruiken software, waren er automatisch al pijlers neergezet. Zoals dat feedback belangrijk is: de computer moet de leerling feedback kunnen geven op de stappen die deze maakt in een activiteit.'

Het model waarvoor in het onderzoek is gekozen, is communicatie tussen computer en leerlingen. Christian Bokhove voegt

hier direct aan toe: 'Uiteraard besef ik dat leerlingen prima kunnen leren in groepen en van elkaar. Reden voor dit model vormen een aantal voordelen van ICT, bijvoorbeeld dat een leerling thuis aan wiskunde kan blijven werken, ook al loopt hij ergens in vast. Met een slimme feedback in het programma, kan hij namelijk direct geholpen worden. Voordeel is dat de leerling niet hoeft te wachten tot hij de volgende dag uitleg kan vragen aan een docent. Het gaat hierbij om het inzetten van ICT, aanvullend op lessen in de klas. Dus niet als vervanging.'

Laagdrempelig

Het in de praktijk uitproberen en werken met het model begon heel kwalitatief en werd steeds meer kwantitatief. Christian Bokhove legt uit: 'Eerst werden er zes één-op-één sessies gehouden met leerlingen die wiskunde B hebben, waarbij ze hardop moesten denken. Zo'n sessie duurde twee uur. Leerlingen werkten met een eerste prototype en ik ging erg de diepte in met een paar cases. Bij de sessies was ik aanwezig als observator. Die eerste sessies waren een soort existentiebewijs: is het mogelijk dat... Aan de tweede ronde deden 31 leerlingen van een school mee. Daarbij werd één module gebruikt die bestaat uit een lessenreeks van ongeveer zes klokuren. Praktische uitgangspunten waren: het moet voor een docent laagdrempelig zijn om te gebruiken en niet lastig zijn om uit te voeren. Het kan natuurlijk niet zo zijn een docent een heel curriculum omver moet gooien om één module te doen. Docenten moeten er intuïtief mee kunnen werken. In deze tweede ronde heb ik een prétest en posttest gehouden, vooral om na te gaan in hoeverre de onderzoeksmethode juist is om het effect te kunnen meten en te gebruiken is voor de data analyse. In de derde ronde heb ik de module getest op vijftien klassen van elf scholen. Op de achtergrond draaiden logfiles mee die alle activiteiten van leerlingen bijhielden.'



Brechje Hollaardt

Christian Bokhove

Het onderzoek van Christian heet voluit: ICT voor het verwerven en toetsen van doorstroomrelevante wiskundige vaardigheden. Hij licht toe: 'Vanuit het hoger

Uitkomsten: ontwerpprincipes en effecten

Een van de ontwerpprincipes bij de hele lessenserie was: beginnen met veel feedback en eindigen met weinig feedback. 'Dat was een bewuste keuze', aldus Christian Bokhove, 'Deze afbouw werkt goed voor de transfer bij leerlingen: de overdracht van kennis en vaardigheden. Het moet ertoe leiden ze aan het eind "op eigen benen kunnen staan". Zonder een dergelijke afbouw zie je namelijk dat leerlingen er sterk op blijven vertrouwen dat er feedback gegeven wordt. Wat ook goed werkte, een tweede ontwerpprincipe, was zekerheden ter discussie stellen. Dus naast zekerheden, zoals een logaritme dat altijd werkt, moet je onzekerheden hebben. Dit blijkt nodig indien je zowel vaardigheden als inzicht wilt kweken. Door zekerheden kunnen leerlingen een eigen strategie kiezen om ergens naartoe te werken. Ergens halverwege de opdrachten hebben we een crisisopgave gestopt, die leerlingen niet kunnen maken volgens de manier die ze zichzelf hebben aangeleerd. Ze lopen dan vast. "Mislukken is de snelste weg naar succes", zei John Keats, een beroemde Engelse dichter in de 19e eeuw. Dat is wat er gebeurt. En de leerling zal dan *out of the box* moeten gaan denken. Een derde ontwerpprincipe is gebaseerd op het geven van een bepaald type feedback in combinatie met ICT.

Van de school van de tweede ronde heb ik de gegevens geanalyseerd, van de scholen van de derde ronde moet ik de uitkomsten van de posttest nog ontvangen. De docent van de tweede ronde was redelijk positief. Zowel vaardigheden als inzicht leken veel beter bij leerlingen dan in de pretest. Bij de derde ronde heb ik aan het eind ook een evaluatie onder leerlingen gehouden naar motivatie, nut van de computer feedback-, ed. Die gegevens ben ik nu aan het analyseren.'

Weer lesgeven

Christian Bokhove is erg enthousiast over de kans die hij heeft gekregen om dit onderzoek te doen: 'Het onderzoek is me op het lijf geschreven. Veel wat ik intuïtief al deed met lesgeven – iets uitproberen in een klas, bijstellen en weer uitproberen – zoek ik nu gestructureerd uit. Ook deed ik al dingen met applets bij algebra. Maar om uit te zoeken waarom iets werkte of niet, ontbrak me de tijd.' Hij vindt het bijzonder om de onderzoekswereld en de praktijkwereld te combineren. 'Het zijn twee redelijk afzonderlijke werelden. Het is heel persoonsgebonden of zo'n combinatie

iets voor je is. Je moet kunnen schakelen. Voor mijn gevoel is er bij mijn onderzoek ook beetje een paradox. Voor de werkvloer wilde ik een redelijk gepolijst eindproduct hebben waarmee docenten aan de slag kunnen. Mijn experiment moest daarom ook redelijk voldragen zijn, een volwassen interventie zijn. Terwijl het er bij het onderzoek ook om gaat om na te gaan of iets werkt en waarom. Dat impliceert al dat helemaal niet duidelijk is of het werkt. Het is soms strijdig met elkaar.'

Christian Bokhove gaat ervan uit dat hij in 2011 kan promoveren. En hij hoopt daarna weer vooral les te geven: 'Het liefst van de eerste tot en met de zesde klas. Ik vind het een verkeerde ontwikkeling dat docenten ofwel geconcentreerd in de bovenbouw ofwel geconcentreerd in de onderbouw lesgeven. Als eerstegrader moet je weten wat er gebeurt in de eerste en in de zesde. Het liefst zou ik het lesgeven blijven combineren met onderzoek doen. Want dat bevalt me heel goed. Het FIsme heeft inmiddels aanvragen lopen bij NWO

Haak aan

Ideaal voor elektronisch schoolbord, thuisgebruik en voor maatwerk op papier. Gratis praktische ondersteuning voor elke docent en leerling:

- Theorie
- Uitleg
- Voorbeelden
- Applets
- AlgebraKIT
- GeoEnZo
- Rekenen



Gratis! maar niet goedkoop



voor postdoc-onderzoeken. Persoonlijk zou ik het jammer vinden als een deel van de Dudoc-onderzoekers datgene waarin ze het beste zijn – lesgeven – kwijtraken doordat ze bevorderd worden in management-functie op school. Carrière maken binnen het onderwijs is nog steeds het management in gaan. Ook ben ik er bang voor dat de Dudoc'ers binnen vijf jaar na hun promoveren worden binnen gesloten in de kring van wetenschappers. Ik hoop juist dat wij Dudoc'ers vooral in de praktijk laten voortleven wat we hebben geleerd als onderzoeker.'

Over de auteur

Brechje Hollaardt is vanuit haar communicatiebureau *Hypertekst en Communicatie* (www.hypertekst.nl) betrokken bij onderwijsvernieuwingen in bèta en techniek, zoals het Dudoc-project, onder andere voor het Platform Bèta Techniek en het Landelijk Coördinatiepunt NLT (voorheen Landelijk Ontwikkelpunt NT). E-mailadres: brechje@hypertekst.nl

Digitaal werken aan algebraïsche vaardigheid en inzicht

[Christian Bokhove]

Het DUDOC-programma stelt docenten in staat promotieonderzoek te doen op vakdidactisch gebied (zie www.dudocprogramma.nl). Christian Bokhove is bezig met een dergelijk onderzoek; hij doet er verslag over.

Aanleiding

Mijn onderzoek combineert twee actuele thema's: de belangstelling voor algebraïsche vaardigheden en de inzet van ICT in het onderwijs. Door het hoger onderwijs is de afgelopen jaren vaak geklaagd over een gebrek aan algebraïsche vaardigheden bij hun beginnende eerstejaars studenten. Ook in het voortgezet onderwijs was onvrede over het niveau van die vaardigheden bij leerlingen, voornamelijk op havo en vwo. Voor deze schooltypes zijn in reactie hierop allerlei initiatieven genomen met als doel het niveau van de algebraïsche vaardigheden van de leerlingen te verhogen. Voorbeelden hiervan zijn de instaptoetsen van het hoger onderwijs, het toevoegen van extra algebra-hoofdstukken in de diverse methodes, het overleg tussen de NVvW en het hoger onderwijs, de exit-toetsen en de Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde. Voor wat betreft de inzet van ICT zien we een toenemend gebruik van computers in het onderwijs. Vooral bij afstandslernen en het inoefenen wordt veel gezien in de inzet van ICT. Zou het niet mooi zijn als we deze voordelen van ICT kunnen gebruiken in een omgeving die geen afbreuk doet aan de eisen die we stellen aan het wiskunde-onderwijs, waar nu nog vooral pen en papier worden gebruikt? Het gebruik van ICT kent namelijk wel enkele voordelen, vooral op het vlak van het overal kunnen gebruiken en het geven van feedback. In mijn onderzoek komen beide zaken samen: 'Op welke wijze kan de computer (ICT) ingezet worden bij het verwerven, oefenen en toetsen van doorstroomrelevante algebraïsche vaardigheden.' Ik zal niet op alle onderdelen van de theoretische achtergrond ingaan; ik licht er enkele zaken uit.

Keuze van de tool

Al in een vroeg stadium werd duidelijk dat het onderzoek het beste langs de lijnen van het ontwikkelingsonderzoek, zogenoemd *design research*, kon plaatsvinden. Door een interventie, een digitale lessenserie te ontwikkelen, zou ik goed kunnen zien welke eigenschappen van een interventie nou echt zouden bijdragen aan verbeterde, algebraïsche expertise, maar vooral ook *waarom* dit zou werken. Dit bracht meteen de eerste keuze ten aanzien van die interventie met zich mee, namelijk welke tool ik daarvoor zou gebruiken. Leek het eerst nog prettig om simpelweg de voor mij meest bekende software te gebruiken, al snel knaagde bij mij het gevoel dat ik ook zou moeten kunnen onderbouwen waarom ik de software gebruik die ik gebruik. En om die vraag te beantwoorden moest eerst duidelijk zijn aan welke criteria dergelijke software moest voldoen. Op basis van de bestaande literatuur (voor een overzicht zie [2]) heb ik een lijst met 27 criteria voor algebra-software opgesteld, en deze gevalideerd door de mening van algebra-, ICT- en toets-experts te vragen. De lijst werd vervolgens gebruikt om ruim 60 verschillende tools voor het leren van algebra te beoordelen. Hierbij werd het resultaat ook nog door een expert beoordeeld. Uit dit vooronderzoek bleek dat de vijf belangrijkste criteria voor goede algebra software de volgende te zijn:

1. Stabiliteit en snelheid;
2. Goed gebruiksgemak voor de leerling (o.a. invoer van formules);
3. Wiskundige formules worden op de juiste manier getoond;
4. De tool moet wiskundig correct zijn;
5. Antwoorden van leerlingen worden opgeslagen.

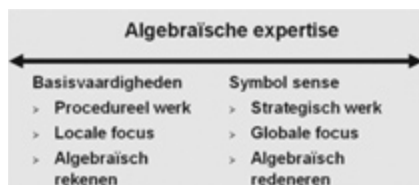
Vaardigheden versus inzicht

Na keuze van de tool was het zaak om te kijken of het mogelijk was om een rijke, digitale oefenomgeving neer te zetten, waarbinnen genoeg ruimte was voor zowel het ontwikkelen van algebraïsche vaardigheden, als voor het ontwikkelen van inzicht. Als uitgangspunt heb ik het verschil tussen basisvaardigheden en zogenaamde *symbol sense* (Arcavi; zie [1]) genomen. **In figuur 1** wordt algebraïsche expertise voorgesteld als een dimensie die loopt van basisvaardigheden (het procedurele werk met een locale focus, algebraïsch rekenen) tot symbol sense (het strategische inzicht met een globale focus, algebraïsch redeneren). In het kort zou je kunnen zeggen dat onderscheid wordt gemaakt tussen de 'procedures', bijvoorbeeld het vlot kunnen herschrijven en oplossen van expressies, en het daadwerkelijke inzicht in (de structuur van) een formule: vaardigheden versus – of in dit geval juist *naast* – inzicht. Symbol sense wordt door Arcavi niet streng gedefinieerd, maar beschreven in termen van eigenschappen. In de praktijk zal het vaak neerkomen op een combinatie van vaardigheden én inzicht, die op elkaar inwerken. Dat is een belangrijk uitgangspunt: het één sluit het ander niet uit; sterker nog, het één versterkt het ander, en vice versa.

In drie stappen dacht ik te kunnen komen tot een eerste ontwerp.

1e stap – Uitkiezen van relevante opgaven. Daar het doel was om zowel inzicht als vaardigheid te kunnen oefenen, is gekozen voor oefeningen met een van de volgende eigenschappen:

- *Gestalt*, als onderdeel van symbol sense, waarbij het 'zien' van gemeenschappelijke factoren het efficiënt oplossen van een vergelijking een stuk makkelijker kan maken. Dit kan omdat vergelijkingen sneller kunnen worden opgelost, maar



figuur 1 Algebraïsche expertise
(gebaseerd op [3])

$$(x^2 - 7x + 12)(3x - 11) = (x^2 - 7x + 12)(3x + 14)$$

$$3x^3 - 11x^2 - 56x^2 + 77x + 36x - 132 = 3x^3 + 14x^2 - 21x^2 - 98x + 36x$$

$$3x^3 - 67x^2 + 173x - 132 = 3x^3 - 7x^2 - 62x + 168$$

$$5x^2 - 60x^2 + 235x = 300$$

$$5x(x^2 - 12x + 47) = 300$$

figuur 2 De leerling loopt vast bij het oplossen van een vergelijking

$$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$$

$$v = (1 + 2v\sqrt{1+u}) \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$v = \frac{1 + 2v\sqrt{1+u}}{\sqrt{u}}$$

$$v = \frac{\sqrt{1+u} \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} + 2v \right)}{\sqrt{u}}$$

figuur 3 De expressie wordt eerder ingewikkelder dan makkelijker

ook soms omdat vergelijkingen dan wel kunnen worden opgelost, en anders niet. Het eerste praktijkvoorbeeld hieronder laat dit zien.

- Opvallende aandachttrekkende elementen, zoals wortels en kwadraten. In de literatuur wordt dit *visual salience* genoemd. Deze elementen 'roepen' er als het ware om, om aangepakt te worden (zie de paragraaf Tweede praktijkvoorbeeld). Het kan hier ook gaan om een patroon, bijvoorbeeld een expressie met haakjes die 'schreeuwt' om uitwerking.

2e stap – Opgaven in een digitale omgeving zetten.

3e stap – De oefenomgeving uitproberen. In deze uitprobeersfase komen twee zaken samen: symbol sense en het gebruik van ICT. Zes wiskunde-B leerlingen uit 6-vwo zijn in hardop-denken-sessies aan de slag gegaan in de eerder beschreven omgeving. Het betreft hier 'gemiddelde' leerlingen uit de B1-groep, met gemiddeld voor het onderwerp analyse een cijfer tussen de 6 en de 8. Aan de hand van enkele praktijkvoorbeelden wil ik laten zien dat een rijke, digitale omgeving voor algebra gebruikt kan worden om zowel symbol sense (of gebrek er aan) te signaleren. Elke ronde in het onderzoek diende als bouwsteen voor een volgende revisie. Na de één-op-één sessies betrof dit een experiment in twee klassen wiskunde-B op één school, en uiteindelijk negen scholen in den lande.

Eerste praktijkvoorbeeld

Het eerste voorbeeld gaat over het herkennen van overeenkomstige factoren aan de linker en rechter kant van een vergelijking.

De leerling, bedoeld in *figuur 2*, reageert op het zien van haakjes met de reactie 'die moet ik uitwerken'. Dit doet de leerling – hij staat een 8 gemiddeld – feilloos. Het vervelende in dit geval is dat de opgave eindigt in een derdegraads vergelijking. Hij overweegt nog even of hij de *abc*-formule kan toepassen, maar ziet al snel in dat die alleen voor kwadratische vergelijkingen

geldt. Dan maar herschrijven door een term buiten haakjes te halen. Aan de linker kant is $5x$ een gemeenschappelijke factor. Nu strandt de leerling toch echt bij deze opgave. De leerling ziet in dat de 300 aan de rechterzijde van het gelijkteken betekent dat de opgave niet verder kan worden opgelost.

Na afloop kijken de leerling en ik terug op de opgave. Ik wijs hem op de gelijke termen aan de linker en rechter zijde. Hij begrijpt dat dit de opgave wel oplosbaar maakt. Eerst nog door te delen door de kwadratische term, maar daardoor gaan twee oplossingen verloren en blijft alleen $x = 5$ over. Daar de oefenomgeving aangeeft dat oplossingen ontbreken, beseft de leerling dat er door delen oplossingen verloren zijn gegaan. Vervolgens lost de leerling de vergelijking helemaal correct op.

Deze opgave laat zien dat een goede *Gestalt*-vaardigheid kan leiden tot het beter kunnen oplossen van vergelijkingen. Het is mijns inziens ook interessant om te zien dat het stellen van eisen aan ICT het mogelijk maakt om een net zo rijke omgeving aan te bieden als met pen-en-papier, maar met behoud van enkele voordelen van webgebaseerde, digitale middelen.

De vraag is nu of leerlingen door een uitgekende opbouw van verschillende soorten vragen, gestimuleerd kunnen worden om automatisch 'even stil te staan' bij de opgaven die ze doen.

Kijkend naar deze sessie wordt duidelijk dat:

- juist als de leerling tegen een probleem aanloopt, het leren begint;
- problemen expres kunnen worden opgeroepen door 'ongewone opgaven' te gebruiken;
- de leerling dan toch verder kan als er feedback gegeven wordt;
- dit feedback van de docent kan zijn, maar ook feedback van ICT. In *figuur 2* is elke stap gepaard gegaan met een indicatie fout, goed of 'goed op weg', en in sommige gevallen ook feedback die bijvoorbeeld wijst op een onhandige methode;

- goed ontworpen vragen en reeksen van vragen dit 'even stil staan' kunnen stimuleren.

Tweede praktijkvoorbeeld

Het tweede voorbeeld is een klassieke opgave van Wenger (zie [5]) en behelst het herschrijven van de expressie $v \cdot \sqrt{u} = 1 + 2v \cdot \sqrt{1+u}$ in de vorm $v = \dots$. De leerlinge die met het probleem *van figuur 3* bezig is, heeft de vorm $v = \dots$ in gedachten als ze uitsprekt dat ze de wortel links wil kwijtraken. Om die reden vermenigvuldigt ze beide kanten met de '1 gedeeld door' de wortelterm. Hierna herschrijft ze de rechterzijde tot één breuk. Ze merkt op – door langdurig met de muispijl over de term $2v$ te bewegen – dat rechts nu nog steeds een v staat. In de volgende stap probeert ze die v te isoleren. Het is overduidelijk dat de expressie zelf steeds complexer wordt. Op de vraag 'Wat is je strategie?' antwoordt ze onder meer 'Vaak doe ik dat ook om misschien een soort van ingeving te creëren. Dat ik het dan misschien op een andere manier bekijk en dat ik het dan zie: wat beter kan of wat niet.' Aan het einde ziet ze niet hoe ze dit moet 'oplossen'.

Zou ze zich hebben geconcentreerd op het samennemen van de termen met v en daarna het isoleren, dan had ze de expressie kunnen herschrijven. Wat wel opvallend was dat simpelweg het (foutief) herschrijven van de expressie leidde tot meer inzicht in de structuur van de expressie. Het feit dat de digitale omgeving een willekeurige strategie toelaat, heeft op zichzelf al tot gevolg dat een leerling 'al doende' inzicht opdoet.

Deze cyclus leverde als resultaat op dat een goed ontworpen, digitale oefenomgeving het mogelijk maakt dat leerlingen symbol sense, of een gebrek eraan, laten zien. Dit was vooral van belang om bevestigd te krijgen of de insteek die gekozen was, potentieel zou kunnen leiden tot meer inzicht. Nu dit het geval bleek te zijn, kon gewerkt worden aan een verbeterd prototype.

Verbeteringen aan het prototype

Na analyse van de één-op-één sessies konden drie verbeterpunten worden geconstateerd: één ten aanzien van de opbouw in de opgaven, één voor wat betreft de feedback en één voor wat betreft *scaffolding* (dit begrip wordt verderop toegelicht).

Ten aanzien van het eerste verbeterpunt is het van belang om een gebalanceerde opbouw van de opgaven te maken, met het accent op symbol sense en variërend van 'oplosbaar met algoritmes' tot 'alleen oplosbaar met inzicht'. Het eerste praktijkvoorbeeld toonde dit principe, waarbij gebruik gemaakt werd van *crises*. Immers, de meeste leerlingen kunnen niet verder met het algebraïsch oplossen van een derdegraads vergelijking. In de opgave na deze crisis krijgt de leerling extra feedback en ondersteuning, onder andere in de vorm van instructiefilmpjes. Het idee is al eeuwen oud. De dichter John Keats (1795-1821) schreef: '*Failure is, in a sense, the highway to success, inasmuch as every discovery of what is false leads us to seek earnestly after what is true, and every fresh experience points out some form of error which we shall afterwards carefully avoid.*' We zullen in onze revisie nog nadrukkelijker gebruik maken van het idee van een 'crisis'.

Bij het verbeteren van de feedback, het tweede verbeterpunt, maken we gebruik van de resultaten van de één-op-één sessies. We zien voordelen in betere computerfeedback: het toevoegen van gedetailleerde stappen, het bepalen van de hoeveelheid feedback en tevens het type feedback (zie [4]). Hierbij hoort uiteraard ook de timing en de kwaliteit van de feedback.

Ten derde scaffolding: eerst de activiteit aanbieden in een gestructureerde opbouw met zelftoets mogelijkheid en veel feedback, later een eenvoudiger modus om transfer te faciliteren. Op deze manier leert een leerling echt 'op eigen benen' te staan. Immers, bij een schriftelijke toets verdwijnen voordelen, zoals feedback, en moet een leerling een opdracht nog steeds kunnen maken.

Experiment in Enkhuizen

Het tweede prototype van de software *Algebra met inzicht* (zie www.algebrametinzicht.nl) bevatte deze drie verbeteringen, en werd begin 2010 ingezet aan de RSG Enkhuizen in twee groepen wiskunde B in 6-vwo. Kenmerken van de verbeterde module zijn:

- Het samengaan van vaardigheden en inzicht. Leerlingen verwerven inzicht in algebraïsche problemen.
- Het is een digitale lessenserie.
- De serie opgaven kennen qua didactiek een opbouw: eerst worden de leerlingen aan de hand genomen, daarna staan ze op eigen benen.
- Er zijn diverse vormen van feedback opgenomen, met onder andere filmpjes.
- Doordat gebruik gemaakt wordt van *randomisering* zijn er steeds andere opgaven.

Het doorwerken van de module kost een leerling ongeveer zes klokuren. De resultaten van deze ronde laten zien dat zowel het idee van een *crisis* als *scaffolding* bijdragen aan vaardigheden en begrip. Het was interessant om te zien dat de betere leerling relatief minder leek te hebben aan de lessenserie. In de derde en laatste cyclus, waar de korte lessenserie op negen andere scholen werd ingezet, bekijken we of we deze voorzichtige resultaten van de vorige ronde bevestigd kunnen zien of niet.

Afsluiting

Ik heb een overzicht willen geven van mijn onderzoek op het gebied van algebraïsche expertise. Uit de resultaten volgt dat ICT een rol kan spelen in het oefenen en toetsen van algebraïsche expertise. Het onderzoek beweegt zich van meer kwalitatief naar meer kwantitatief: het is heel mooi dat de gedetailleerde analyse van het gedrag van enkele leerlingen inzichten geeft in het gebruik van ICT bij het verbeteren van algebraïsche expertise, maar nader onderzoek is nodig om algemenere conclusies te trekken.

Ik kan niet het hele onderzoek op deze pagina's uit de doeken doen, maar denk dat u als lezer een beeld heeft gekregen van de wijze waarop ICT bij het leren van algebra kan worden ingezet.

Noten en literatuur

- [1] A. Arcavi (1994): *Symbol sense, informal sense-making in formal mathematics*. In: *For the Learning of Mathematics*, 14(3); pp. 24-35.
- [2] C. Bokhove, P. Drijvers (2010): *Digital tools for algebra education, criteria and evaluation*. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1); pp. 45-62.
- [3] P. Drijvers, P. Kop: *Katern 1 – Vergelijkingen vergelijken*. In: *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*. Digitaal beschikbaar via: www.fi.uu.nl/elwier/materiaal/handboek/documents/2008-10-13VergelijkingenVergelijken.pdf
- [4] J. Hattie, H. Timperley (2007): *The Power of Feedback*. In: *Review of Educational Research*, 77(1); pp. 81-112.
- [5] R.H. Wenger (1987): *Cognitive science and algebra learning*. In: A. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates; pp. 217-251.

Over de auteur

Christian Bokhove is wiskundedocent en ICT-coördinator op het St. Michaël College in Zaandam. Hij doet sinds 2007 een promotietraject in het DUDOC-programma van het Platform Bèta Techniek.
E-mailadres: cbokhove@stmichaelcollege.nl

Meervoudige intelligentie in de wiskundeles

BIJ REKENEN, OPPERVLAKTE, VERGROTEN, GONIOMETRIE, VERBANDEN

[Ingrid Berwald]

Deel 2 – Oppervlakte

Er zijn acht meervoudige intelligenties; ieder mens beschikt over al deze acht intelligenties, waarbij de ene intelligentie bij de één sterker is ontwikkeld dan bij de ander. Als een intelligentie een kind boeit en de intelligentie wordt verwerkt in een instructie of een andere verwerking van de leerstof, dan neemt het kind de leerstof beter op. Dit is gebleken uit onderzoeken van de Amerikaanse hoogleraar Howard Gardner. Diens motto is: 'Het gaat er niet om hoe intelligent je bent, maar om hoe je intelligent bent'.

Iedereen is op zijn eigen manier knap. Vandaar de omschrijvingen bij de volgende intelligenties:

1. Verbaal – linguïstisch (taalknap)
2. Logisch – mathematisch (rekenknap)
3. Visueel – ruimtelijk (kijkknap)
4. Muzikaal – ritmisch (muziekknop)
5. Lichamelijk – kinesthetisch (bewegingsknap)
6. Naturalistisch (natuurknap)
7. Interpersoonlijk (samenknap)
8. Intrapersoonlijk (zelfknap)

In onderstaand artikel komt het gebruik van verschillende intelligenties bij het onderwerp oppervlakte aan bod.

Activerende didactiek

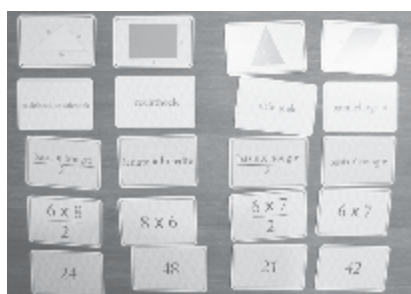
Het gebruik van meervoudige intelligentie in de les werkt vaak activerend. Dat komt volgens mij doordat je de leerlingen op hun eigen manier problemen op laat lossen. Voor het aanleren van de formules en berekeningen van oppervlaktes maak ik veel gebruik van de verschillende intelligenties.

Oppervlakte Kaartspel

Na het winnen van de Wiskunde Scholen Prijs in 2008 heeft onze school (het IJsselcollege in Capelle aan den IJssel) in samenwerking met het FI (Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en

Natuurwetenschappen) het *Oppervlakte Kaartspel* laten drukken. We speelden het spel al een aantal jaar met geprinte kaartjes, maar wilden voor onze school een aantal spellen laten drukken. Het FI vond dat een leuk idee en heeft meegedaan en de spellen uitgedeeld bij de Nationale Wiskunde Dagen.

Het spel bestaat uit kaarten met daarop plaatjes van verschillende vierhoeken en driehoeken. Bij elk plaatje horen vier kaarten waarop de naam van de figuur, de formule, de berekening en het antwoord staan; *zie figuur 1*. Bij het FI zijn de spellen nog te bestellen zolang de voorraad strekt (www.fi.uu.nl/nl/winkel/).



figuur 1

Met de kaarten kun je meerdere opdrachten doen. Ik begin met de opdracht de kaarten te ordenen, de leerlingen maken hierbij gebruik van de naturalistische intelligentie. Veel leerlingen vragen of ze een foto mogen

maken van het eindresultaat, want het is echt een overzicht van alle figuren en formules. De les erna laat ik ze een soort rummikub-achtig spel met de kaarten doen; *zie figuur 2*. In dit geval spreek je de motorische intelligentie aan, want het is een wedstrijd, maar ook de interpersoonlijke intelligentie wordt hier gebruikt. De spelregels zijn niet zo moeilijk. Elke speler krijgt zeven kaarten. Als je aan de beurt bent, mag je één plaatje neerleggen of, onder één plaatje dat er al ligt, zoveel mogelijk kaarten die erbij horen. Als je niet kan, pak je een kaart van de stapel. Leerlingen leren vooral de stappen die er gemaakt moeten worden bij het berekenen van oppervlaktes. Ze worden uitgedaagd om goed te kijken: alleen aan de getallen kun je niet zien of een kaartje erbij hoort. Er ontstaan ook leuke discussies als de groep het niet eens is of een kaartje goed of fout is: moet je nu wel of niet delen door twee? Dit spel wordt nog wel eens zo maar uit de kast gehaald om even te spelen, dat vind ik nooit zo erg, zo blijven de formules tenminste hangen. We gebruiken dit kaartspel van lwoo tot en met vwo, al halen we er in lwoo-klassen wel een paar kaarten uit. Ik heb het spel bedacht om de leerlingen echt te laten voelen dat een berekening er ook bij hoort. Daarnaast zijn de kaartjes zo gemaakt dat je alleen door naar de getallen te kijken niet zomaar de juiste berekening kan vinden. Zo is er

Oppervlakte rummi 1.10

- Schud de kaarten.
- Geef elke speler 7 kaarten.
- Leg de overgebleven kaarten omgekeerd op een stapel.
- De speler links van de deler begint.
- Als je aan de beurt bent kun je 2 dingen doen:
 1. Je legt een plaatje op tafel.
 2. Je legt onder één van de plaatjes zoveel mogelijk kaarten die bij het plaatje horen.

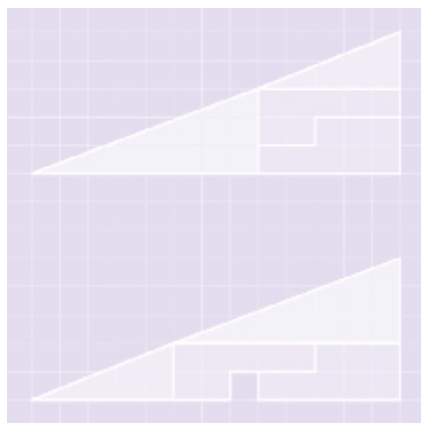
Kaarten die bij een plaatje horen zijn:

- Naam van de figuur
- Formule van de oppervlakte
- Berekening
- Antwoord
- Als je aan de beurt bent en je kunt niet, dan pak je een kaart van de stapel. Deze mag nog meer gelegd worden.
- Wie het eerst geen kaartjes meer heeft is de winnaar.

Voorbeeld

Rechthoek
Lengte x breedte
 3×7
21

figuur 2



figuur 3

visuele kinderen zien dat vaak als ze bezig zijn. Wiskundige kinderen slaan aan het rekenen en vinden dan dat de oppervlaktes niet kloppen. Door al deze vindingen te bespreken in een groepje kunnen de meesten het raadsel wel ontrafelen. Het is een van de weinige opdrachten die ik ken waarbij de leerlingen ook echt de oppervlaktes willen weten.

Oppervlakte cirkel via Pythagoras

Bij de oppervlakte van de cirkel gebruik ik *De maantjes van Hippocrates*; zie **figuur 4**. Eerst ga ik terug naar de stelling van

gaan met de oppervlaktes. De leerlingen kiezen zelf welke aanpak ze gebruiken, en vergelijken die met elkaar.

Passen alle Nederlanders op Ameland?

In de eerste klas heb ik wel eens gemeten hoeveel leerlingen er in een vierkante meter passen. Dat waren er twaalf. Kort daarna gingen we op kamp naar Ameland. Ik stelde dat alle Nederlanders, net als wij op Ameland waren, ook naar het eiland kwamen. Past dat? De eerste reactie is nee, natuurlijk niet: Ameland is heel klein. Kaarten werden erbij gehaald en de kinderen waren erg verbaasd dat het makkelijk past. Er passen al één miljoen mensen op een vierkante kilometer. Op mijn vraag of het logistiek (denkend aan de veerboot) ook mogelijk was, antwoordde een leerling 'Natuurlijk niet, dan zinkt het eiland!' Ook laat ik zien hoe groot een vierkante meter is en vraag de leerlingen vervolgens om met schilderstape een vierkant op de vloer te maken dat een halve m^2 groot is. Ze beginnen allemaal met een vierkant van $50 \times 50 \text{ cm}$. Deze opdracht is ook leuk met een kubieke meter: hoe groot is een kubus met een inhoud van $\frac{1}{2} \text{ m}^3$?

A4-tjes, 80 grams

Het begrip *vierkante meter* wordt trouwens toch snel geassocieerd met een vierkant. Daarom deel ik in de klas wel eens een stapel A4-papier uit en vraag de leerlingen daarvan 1 m^2 te maken. Dat kan vrij eenvoudig door 16 velletjes neer te leggen. Als je die 16 velletjes weegt, is het 80 gram, daarom heet het 80 grams papier. Dit is een motorische les, leerlingen meten, rekenen, leggen de vellen in een rechthoek, wegen de vellen en leren veel over oppervlaktes.

Info

Deel 1 staat in *Euclides* 86(4), pp. 154-155.

Over de auteur

Ingrid Berwald is docente wiskunde aan het IJsselcollege in Capelle aan den IJssel. Ze geeft les aan vmbo-, havo- en vwo-klassen en vindt het belangrijk dat alle leerlingen positieve ervaringen opdoen tijdens het vak wiskunde. E-mailadres: i.berwald@ijsselcollege.nl

De stelling van Pythagoras werkt niet alleen met vierkanten op de zijden, maar ook met andere figuren.



Van $\triangle ABC$ is gegeven dat $\angle B = 90^\circ$, $AB = 8$ en $BC = 6$

1 Toon aan dat de stelling van Pythagoras met de halve cirkels ook klopt.

Hippocrates bedacht in het jaar 440 voor Christus het volgende: In plaats van een halve blauwe cirkel tekende hij een hele cirkel. Zo ontstonden er twee groene maantjes. Hippocrates ontdekte dat de oppervlakte van de twee maantjes gelijk was aan de oppervlakte van de driehoek.

2 Toon aan dat Hippocrates gelijk had. Dit kan door rekenen, maar ook door redeneren.

3 Teken een vierkant met vier maantjes, zodat de maantjes dezelfde oppervlakte hebben als het vierkant.



figuur 4

een driehoek met basis 8, hoogte 3 en zijde 4, maar ook een rechthoek van 8 bij 3 en een driehoek met basis 8 en hoogte 4. Ze moeten dus echt goed opletten.

Raadsel van het verdwenen vierkant

Een andere opdracht bij het hoofdstuk oppervlakte is die van het *Raadsel van het verdwenen vierkantje*; zie **figuur 3**. Door de puzzelstukjes anders neer te leggen ontstaat er een oppervlakte die 1 cm^2 groter lijkt. Het leuke van deze opdracht is dat het tegen het gevoel van de kinderen in gaat, en ze willen weten hoe dit mogelijk is. Je kunt met allerlei intelligenties achter de oplossing komen. De motorische kinderen voelen tijdens het knippen al dat er een knik zit in de diagonaal van de grote driehoek. De

Pythagoras. De leerlingen ontdekken dat de stelling van Pythagoras ook met halve cirkels kan in plaats van de bekende vierkanten. Vervolgens komen de maantjes van Hippocrates erbij. De visuele intelligentie wordt hier gebruikt. Er ontstaat niet alleen een mooi plaatje, het verbaast de meeste leerlingen dat de twee maantjes dezelfde oppervlakte hebben als de driehoek. Vervolgens krijgen de leerlingen de opdracht om een vierkant te tekenen met daaromheen vier maantjes die samen de oppervlakte van het vierkant hebben. Nu ontstaan er kunstwerkjes. Het leuke is dat je met de stelling van Pythagoras met een vrij eenvoudige redenering kunt laten zien dat de oppervlaktes inderdaad gelijk zijn. Je kunt echter ook lekker aan het rekenen

Rekenkampioen van Nederland 2010

“BARTJENS” REKENDICTEE

[Ed de Moor]



Juryvoorzitter Jan Terlouw en winnaar Douwe Buursma

Douwe Buursma heeft het eigenlijk aan zijn moeder te danken dat hij de winnaar is geworden van het “Bartjens” Rekendictiee 2010. Zij had in een van de regionale bladen een oproep gelezen voor deze landelijke wedstrijd, die nu al voor de zevende keer werd gehouden. ‘Is dat niet iets voor jou, Douwe?’. Met deze vraag had ze haar zoon wel even geprikkeld. Douwe had weinig tijd en er nauwelijks zin in, maar om zijn moeder te plezieren deed hij toch maar mee aan de voorronde. Van de 5600 andere rekenaars van de internetvoorronde werden de 63 besten toegelaten tot de finale op 19 november 2010. Douwe hoorde daarbij, maar hij vertelde het niet aan zijn moeder. ‘Het kost me een avond, ik heb een OV-kaart, ik kan misschien een cadeaubon winnen, laat ik het maar proberen’, zo dacht hij en reisde af naar de Hogeschool Windesheim in Zwolle. Toen hij daar aankwam, hoorde hij van de beste rekenaars van vorig jaar hoe ze zich hadden voorbereid, wat hem eerder nog laconieker – ‘we zien wel’ – dan zenuwachtig maakte. Toen de wedstrijd echter begonnen was, sloeg zijn wil om te winnen toch toe. In 511 seconden loste hij 13 van de 14 reken-denkvragen, waar de deelnemers 23½ minuten tijd voor was gegund, foutloos op. Helaas bleef een fiks aantal tafeltjes in de grote sportzaal onbezet, omdat ProRail juist die avond de treinenloop bij Utrecht weer eens in de soep had laten lopen. De jury werd ook dit jaar weer op

charmante en deskundige wijze door Jan Terlouw voorgezeten en het was opnieuw een heerlijk festijn onder de bezielende leiding van Marjolein Kool. Zij is de initiator van dit evenement en stelt in samenwerking met de andere juryleden ook de opgaven samen. Dankzij de gezamenlijke provinciale bladen, het dagblad *De Pers* en *Het Financieele Dagblad* krijgt het Rekendictiee steeds meer bekendheid. Op 4 december 2010 reisde ik opnieuw naar Zwolle (weer problemen bij NS!) en ontmoette ik in Hotel Wientjes de rekenkampioen van Nederland 2010.

Wie is Douwe Buursma?

De 23-jarige Douwe Buursma is een vrolijke, openhartige Fries, wiens passie schaatsen is. Hij komt uit Ferwerd, een dorp vlak bij de Waddenzee, tussen Leeuwarden en Dokkum. De avond voor onze ontmoeting had hij daar met zijn vader (accountant) en moeder (verpleegkundige) nog Sinterklaas gevierd. Hij had zijn ouders de vragen van het rekendictiee voorgelegd en ze hadden behoorlijk goed gescord. Niet alleen dat zijn ouders niet wisten dat hij in de finale zat, ook verraste hij ze pas later via internet met een foto, waar hij samen met Jan Terlouw op staat. Douwe zat in Ferwerd op de Christelijke basisschool *Op Streek*. Omdat het leren hem makkelijk afging, mocht hij groep 4 overslaan. Voor de rekenlessen werd de methode *De Wereld in Getallen*, een van de eerste realistische methoden, gebruikt. Douwe herinnert zich van de rekenlessen eigenlijk weinig, behalve dat het hem makkelijk afging en dat hij aldoor de ‘groene pagina’s achterin’ met extra opgaven mocht maken. Heerlijk was het als de meester uit de bovenbouw een blad met 80 sommen gaf dat in zo kort mogelijke tijd moest worden gemaakt. Daarmee was hij altijd de snelste. Maar dan opeens barst hij uit over de tafels, die steeds maar opgedreund moesten worden: ‘Echt stom, sloeg nergens op,

zelfs de tafel van 1.’ Ik repliceer dat voor sommige kinderen die dreun wel goed is, en dat over die didactische aanpak verschillend gedacht wordt. Maar ik begreep ook wel dat dit voor Douwe, die kennelijk van nature al een goed getalinzicht had, geen enkele uitdaging was.

Daarna ging hij naar het *Dockinga College* in Dokkum, waar hij gymnasium deed. Het was elke dag 15 km heen en weer fietsen, maar dat maakte niet uit. Het was een goede school, hij zat in een gezellige klas en het ging hem goed af, zowel met de talen als de bètavakken. Hij deed wiskunde A en B en kreeg les van verschillende leraren, van wie hij zich de heer Miedema het best herinnert. Deze docent gaf regelmatig puzzels op, waarmee je prijzen kon verdienen. Hij was geen lid van *Pythagoras*, maar deed wel tweemaal aan de Wiskunde Olympiade mee. Beide keren mocht hij door naar de finale. Eén keer verkoos hij een reis naar Rome boven deelname aan de finale, de andere keer eindigde hij bij de besten, maar werd geen prijswinnaar. Samen met een vriend besloot hij om informatica te gaan studeren aan de Universiteit Twente in Enschede. Deze studie beviel hem maar gedeeltelijk. Vooral de logische en taalaspecten van de informatica, waarbij het om probleem-oplossen en strategieën ontwerpen gaat, vindt hij interessant en uitdagend. De meer technische kanten van computers en computersystemen trekken hem minder aan. Daarom is hij van studierichting veranderd en gaat hij afstuderen in de wiskunde. Passend bij zijn interesses gaat dat over stochastische processen, wachttijdproblemen en Markov-beslissingsketens. Wanneer ik hem vraag wat hij daarmee later wil gaan doen, vertelt hij dat hij zijn expertise graag zou willen aanwenden in de wereld van de sport. Ik kan me er iets bij voorstellen. Als ik wel eens naar schaats- of zwemwedstrijden kijk, ben ik altijd getroffen door hoe fantastisch al die cijfermatige gegevens supersnel en overzichtelijk gepresenteerd worden.

Visueel inzicht en rekenvaardigheid

Bij proefjes in mijn familie- en kennisskring is mij gebleken dat de opgaven van het dictee behoorlijk lastig worden gevonden. Dit lijkt te stroken met de gemiddelde scores van de finalisten. Maar Douwe vond de opgaven over het algemeen makkelijk. Van een aantal vraagstukken zag hij het antwoord binnen enkele seconden, dat hij dan ook meteen op het stemkastje intypte om het daarna nog eens te controleren. De meeste opgaven deed hij uit het hoofd. Het enige vraagstuk waarop hij een fout antwoord gaf, was het krantenvraagstuk (nummer 8), waar hij dacht dat het om het aantal pagina's van het ene vel ging. Deze opgave had overigens een goedscore van 38%.

Het moeilijkste maar ook het leukste vraagstuk vond hij opgave 4 over het grote TV-scherm. Nu is dit niet eens een echte doordenker. Wel wordt een beroep gedaan op een aantal specifieke reken- en wiskunde-vaardigheden en op visueel inzicht. Je doet er verstandig aan om op decimeters over te stappen, immers in die maat wordt het antwoord gevraagd. Dus eerst kennis van het metrieke stelsel ingezet: $70,56 \text{ m}^2 = 7056 \text{ dm}^2$. De kern zit hem nu in het feit dat je binnen de rechthoek van het grote scherm een kleine gelijkvormige rechthoek van 9 dm bij 16 dm moet 'zien'. Nu rekenen: die 'kleine' rechthoek heeft een oppervlakte van $9 \times 16 = 144 \text{ dm}^2$. Daarvan zitten er $7056 : 144 = 49$ in de grote rechthoek, oftewel 7 rijen van 7 rechthoeken. Anders gezegd, de kleine rechthoek is met de factor 7 'opgeblazen'. De hoogte van het scherm is dus $7 \times 9 \text{ dm} = 63 \text{ dm}$. En al die inzichten en overwegingen moeten binnen twee minuten in rekenacties omgezet worden. Slechts 8 van de 109 aanwezige finalisten brachten dit tot een goed einde. Echt heel makkelijk vond hij opgave 11 over Bram en Eva. '2/3 deel van 27 jaar is 18 jaar', zei Douwe. Hij zag de leeftijden 0, 9 en 27 als het ware afgebeeld op een getallenlijn. Het kostte hem slechts enkele seconden. Zo'n visuele manier van oplossen paste hij ook toe bij opgave 5. Als hij mij die opgave uitlegt, neemt hij een denkbeeldige strook van 100% tussen duim en wijsvinger en 'markeert' die op tafel. Daarna paste hij op dezelfde manier 'stroken' van 76% en 24% links en rechts op de 100%-strook af en concludeert dat die elkaar voor 18% overdekken.

Ook bij de opgave 13 rekende Douwe niet, maar maakte gebaren van opschuiven op de getallenlijn en gaf het juiste antwoord $54 - 11 = 43$.

We zien hier de kracht van het gebruik van aanschouwelijke modellen. Zo krijgt het

begrip *inzicht* een bijna letterlijke betekenis. Daarnaast moet je natuurlijk ook over een flexibel getalinzicht en een vlotte rekenvaardigheid beschikken om het feitelijke rekenwerk uit te kunnen voeren. Ook daaraan ontbreekt het Douwe niet. Tijdens het feitelijke rekenen bekijkt hij een getal eerst even en afhankelijk van de situatie ontbindt hij het in factoren, splitst handig of rekt eerst even schattend.

Verrast was ik over zijn aanpak bij het kale breukenvraagstuk $16\frac{3}{4} : 2\frac{2}{3} + 11\frac{1}{8} : 2\frac{2}{3}$. Door de opstellers was hierbij gedacht aan de mogelijkheid om de opgave te herleiden tot $(16\frac{3}{4} + 11\frac{1}{4}) : 2\frac{2}{3}$. Maar Douwe pakte het in eerste instantie als volgt aan: $16\frac{3}{4} : 2\frac{2}{3}$ is meer dan 7 en $11\frac{1}{8} : 2\frac{2}{3}$ is minder dan 5, en omdat op de stemkastjes alleen gehele getallen mochten worden ingetypt, koos hij 12. Daarna rekende hij de som nog eens na volgens bovenstaande methode.

Belang van basisvaardigheden

Douwe bleek niet op de hoogte te zijn van de discussies over de kwaliteit van het huidige rekenonderwijs. De term 'realistisch rekenen' kwam hem niet bekend voor. Hij vindt het belangrijk dat er gedegen onderwijs op de basisschool gegeven wordt met aandacht voor inzicht en hoofdrekenen in de basisvaardigheden. De leraar moet vooral goed kunnen uitleggen. Een rekenmachine had hijzelf op de basisschool nooit gebruikt. Niet dat hij daar op tegen is, maar hij vindt het raar en onwenselijk dat je bij ieder eenvoudig rekensommetje een rekenmachine zou moeten gebruiken. Als voorbeeld vertelt hij dat een caissière niet kon reageren op handig bijpassen en teruggeven. Iets kost € 7,20 en je betaalt met een biljet van 10 euro. Je hebt geen munt van 20-cent om bij te passen, maar wel een van 50 cent, waarop het meisje achter de kassa eerst € 10,50 als ontvangen invoert en daarna de kassa het rekenwerk laat doen. En dan te bedenken dat het soms minder tijd kost om iets uit je hoofd uit te rekenen dan het intikken van die getallen op een rekenmachine. Er wordt in de praktijk van alledag nog maar zelden op deze manier gerekend. Zelf doet hij dat in allerlei situaties. Soms ook maar gewoon voor de lol, zoals het ontbinden van de nummers van de treinrijtuigen. 'Ik houd van getallen en logica', zo vat Douwe zijn opvatting over rekenen en wiskunde samen.

Deelnemende groepen en scores

Tot de finale waren 133 deelnemers toegelaten. Deze waren in vijf categorieën ingedeeld: 11 prominenten (onder wie 5 eerdere winnaars), 13 sponsors, 27

scholieren (derde klas vwo), 19 pabo-studenten en de 63 besten van de internetvoorrunde. De scholieren en pabo-studenten hadden zich geplaatst via een aparte voorronde, die andere opgaven bevatte dan die bij de voorronde van de internetters. De prominenten en sponsors waren speciaal uitgenodigd. 24 finalisten konden niet aanwezig zijn door de trein-storing van die avond.

Er waren in totaal 200 punten te behalen. Dit jaar was er niemand die alle opgaven foutloos beantwoordde.

De top 5 luidde als volgt:

1. Douwe Buursma (190p / 511 sec)
2. Kees Gondrie, winnaar in 2008 (190p / 687 sec)
3. Allard Veldman, winnaar in 2009 (185p / 541 sec)
4. André Kooy (185p / 569 sec)
5. Henk Don (185p / 665 sec)

Voor de prominenten was de gemiddelde goedscore 73%. Van deze groep was Kees Gondrie de winnaar. Het gemiddelde van de sponsors was 48% met als winnaar Erwin Bruinsma (185p). De scholieren scoorden 40% met als beste de 14-jarige Gideon de Hoop (140p) van de *OSG West-Friesland te Hoorn*. De pabo-studenten scoorden 36% met als beste deelnemer Stef Mijer (165p) van de *Hogeschool Windesheim te Zwolle*. Bij de internetdeelnemers was de gemiddelde score 67% met Douwe Buursma als winnaar en overall-winnaar.

Reflectie

'Word jij het nieuwe rekenwonder van Nederland?' Zo luidde de advertentie met de oproep tot deelname aan de voorronde van het "Bartjens" Rekendictee 2010. Het zou mij niet verbazen dat velen bij een rekenwonder aan iemand denken die razendsnel twee 5-cijferige getallen uit het hoofd kan vermenigvuldigen. In 2004 heb ik in Duitsland, waar toen het wereldkampioenschap hoofdrekenen plaatsvond, met enkele fenomenale hoofdrekenaars gesproken.^[1] Daar ging het om puur rekenen met kale getallen. Al deze bollebozen hadden hierop hun hele leven enorm getraind. Ze hadden een ijzersterk geheugen voor getallen en blonken uit in concentratievermogen, snelheid en accuratesse. Zonder denigrerend te willen zijn zou ik deze bollebozen toch eerder 'reken-zonderlingen' noemen dan rekenwonders.^[2] Natuurlijk moet je ook voor het rekendictee vlot kunnen rekenen, maar het gaat toch hoofdzakelijk om getalinzicht en om het oplossen van problemen. De nadruk ligt dus meer op denken dan op puur rekenen. Of het nu om de pure rekenaar of de probleemoplosser gaat, beide typen



Deel 68

Topologie Door Zien

Jan M. Aarts

212 blz., €27,-

ISBN 978-90-5041-121-9

Het vakgebied topologie is rijk aan leuke onderwerpen om over te vertellen: de Möbiusband, kleuren van landkaarten, drie gebieden met één gemeenschappelijke grens, de formule van Euler, Droste effect, fractals en wilde sferen. In dit boek wordt topologie uitgelegd in de vorm van een strip, waarbij het verhaal in de tekeningen zit, aangevuld met een toelichtende tekst.



Epsilon Uitgaven

bestellen bij boekhandel of via www.epsilon-uitgaven.nl

beschikken over een bijzondere gave, zoals er ook lieden bestaan met een uitzonderlijke gave voor piano spelen, voetballen, schaken, gedichten schrijven, schilderen en zo meer. Maar over wat voor gave zo iemand ook beschikt, hij of zij kan daarin slechts de top bereiken als je die gave ook verder ontwikkelt. En daar helpt oefening zeker bij. Alleen al daarom zou ik er voor zijn dat we de kinderen al op de basisschool uitdagen, zowel met puur rekenen als met nadenken over problemen. Maar ja dan moet de leraar daar zelf ook zin in hebben en enige expertise in ontwikkeld hebben. We besteden enorm veel aandacht en tijd aan de zwaklerende kinderen en terecht. Maar ik vraag me wel eens af of we daardoor de uitblinkers en de kinderen met een speciaal talent niet wat te kort doen. Er bestaan tegenwoordig talloze mooie boeken, tijdschriften en websites, waarmee je deze kinderen (en volwassenen!) zou kunnen plezieren. Er wordt heel wat wetenschappelijk onderzoek gedaan naar kinderen met dyscalculie, waaruit we leren hoe moeilijk rekenen en denkend rekenen voor sommigen kan zijn.

Maar zou systematisch neuropsychologisch onderzoek naar methoden en denkwijzen van zowel die snelle hoofdrekkenaars als de

briljante probleemoplossers ook niet nuttig kunnen zijn voor de didactiek van het reken- en wiskundeonderwijs?

Dit is wat nog bij mij opkwam toen ik nog eens terugdacht aan het WK hoofdrekenen, en nu weer bij dat fantastische rekendictee in Zwolle.

Zie verder pagina 194.

Noten

- [1] Chris Zaal (2005): *Weltmeisterschaft Kopfrechnen 2004*. In: *Euclides* 80(4); pp. 160-165.
- [2] Ed de Moor (2005): *Uit of mét je hoofd. Drie westrijden in (hoofd) rekenen*. In: *Volgens Bartjens* 24(3); pp. 14-17.

Over de auteur

Ed de Moor is reken-wiskundendidacticus in (on)ruste.

E-mailadres: e.w.a.demoor@planet.nl

Opgaven finale "Bartjens" Rekendictee 2010

Na elke opgave staat tussen haakjes het aantal te behalen punten, de toegestane tijd in minuten en de goedscore in procenten.

1. Camiel Eurlings

Camiel Eurlings had op zijn kamer in Den Haag een massief houten bijzettafel in de vorm van een kubus. Hij gebruikte 48 cl verf om deze kubus CDA-groen te verven. Bij zijn vertrek liet hij de tafel in 8 identieke kubusjes zagen, als krukjes voor zijn toekomstige kinderen.

Hoeveel centiliter verf heeft hij nodig om alle ongeverfde vlakken groen te verven? (10 / 1,5 / 38%)

2. Van de kook

Drie chef-koks pellen garnalen. Robert Kranenburg begint. Zijn gemiddelde snelheid is 10 garnalen per minuut. Na 1 minuut komen Peter Lute en Gordon Ramsay hem helpen. Lute pelt gemiddeld 15 garnalen per minuut en Ramsay gemiddeld 12 garnalen per minuut. Het drietal stopt als Kranenburg en Lute evenveel garnalen hebben gepeld.

Hoeveel garnalen zijn er dan in totaal gepeld?

(20 / 1,5 / 64%)

3. Yuri van Gelder

De normale prijs voor 400 g magnesium-poeder is € 16,00. Yuri van Gelder kan kiezen uit twee aanbiedingen:

A. 50% extra inhoud;

B. 50% korting in de prijs.

Wat is het prijsverschil tussen de twee aanbiedingen als hij 1200 g magnesium koopt?

(15 / 1,5 / 67%)

4. WK-voetbal 2010

Tijdens het WK-voetbal kon men in het Philipsstadion in Eindhoven de wedstrijd Nederland-Japan op een groot breedbeeld-plasmascherm volgen. De oppervlakte van het scherm was 70,56 m². De verhouding van een breedbeeldscherm is 9 : 16.

Hoeveel decimeter was het scherm hoog? (15 / 2 / 7%)

5. Binnenhof

Het publiek op het Binnenhof kreeg twee vragen voorgelegd.

Vraag 1: Denkt u dat dit kabinet de volledige regeerperiode zal uitzitten? 76% koos 'nee'.

Vraag 2: Denkt u dat Koningin Beatrix tijdens dit kabinet-Rutte met pensioen zal gaan? 42% koos 'nee'.

Minstens hoeveel procent van het publiek heeft op beide vragen 'nee' geantwoord?

(20 / 1,5 / 62%)

6. Paul de Leeuw

Op welke van de onderstaande foto's is Paul de Leeuw (geboren op 26 maart 1962) ongeveer 1 miljard seconden oud?



Noteer het nummer van de foto.

(10 / 2 / 34%)

7. Breuken

Bereken: $16\frac{3}{4} : 2\frac{1}{3} + 11\frac{2}{8} : 2\frac{1}{3} =$

(10 / 1,5 / 47%)

8. Ben Knapen



Dit is een vel krantenpapier

Staatssecretaris Ben Knapen trekt een dubbele pagina uit het *NRC Handelsblad*.

De linkerpagina heeft nummer 8, de rechterpagina heeft nummer 21.

Uit hoeveel vellen krantenpapier is deze krant samengesteld?

(10 / 1,5 / 38%)

9. Erica Terpstra

Een astronaut van 64 kg weegt op de maan 28 kg. Als Erica Terpstra tijdens haar spectaculaire dieet op de maan zou hebben gewoond, zou ze daar 17,5 kg zijn afgevallen. Ze deed haar dieet echter gewoon op aarde.

Hoe groot is haar 'aardse' gewichtsverlies?

(15 / 1,5 / 50%)

10. Chileense mijnwerkers

De reddingscapsule gaat naar beneden. Nadat hij in beweging is gekomen duurt het precies 6 seconden voordat hij geheel onder de grond is. Vervolgens duurt het 14 minuten totdat hij geheel door de geboorde schacht heen is, en beneden in de ruimte

van de mijnwerkers is gearriveerd. De schacht is 700 meter lang.

Wat is de gemiddelde daalsnelheid van de capsule in km/uur?

(20 / 2 / 55%)

11. Bram Moszkowicz

Bram Moszkowicz is 50 jaar en zijn geliefde Eva Jinek is 32 jaar. Ooit was Bram drie keer zo oud als Eva.

Hoe oud was hij toen?

(20 / 2 / 73%)

12. The Cycle of Life

In één uur tijd bezochten 400 mensen de tentoonstelling 'The Cycle of Life' in Rotterdam. De entree bedraagt € 16,00.

Studenten en ouderen betalen slechts

€ 14,00. Tijdens dit uur werd in totaal

€ 6224,00 aan entreegeld ontvangen.

Hoeveel bezoekers hebben in dat uur het gereduceerde tarief betaald?

(15 / 2 / 62%)

13. Het grijze kabinet

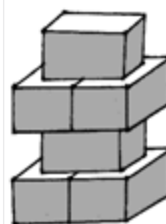
De gemiddelde leeftijd van de ministers-ploeg is 54 jaar. Er zijn 12 ministers inclusief de minister-president. Als we Mark Rutte buiten beschouwing laten stijgt de gemiddelde leeftijd naar 55 jaar.

Hoe oud is Mark Rutte?

(10 / 1,5 / 62%)

14. Oh, oh, Cherso ...!

Sterretje en Joker stapelen kratten. Ze plaatsen 2 kratten met de lange zijde tegen elkaar en zetten daar 1 krat dwars bovenop. Daarop weer 2 kratten en dan weer 1 krat dwars, enzovoort. Elk krat is 23 cm hoog.



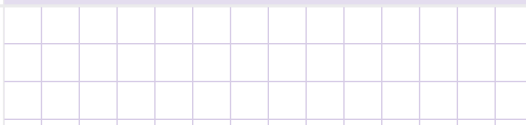
Als hun stapel 9,43 m hoog is, hoeveel kratten zijn er dan opgestapeld?

(10 / 1,5 / 44%)

De antwoorden van het dictee vindt u hieronder.

Antwoorden Finale "Bartjens" Rekendictee 2010

1: 48 cl	8: 7 vellen
2: 84	9: 40 kg
3: 8 euro	10: 3 km/uur
4: 63 dm	11: 27 jaar
5: 18%	12: 88 personen
6: foto 5	13: 43 jaar
7: 12	14: 62 kratten



Rekenen – de stand van zaken

[Victor Schmidt]

Op het moment dat ik dit schrijf, is het drie jaar geleden dat op de Panamaconferentie het *Referentiekader rekenen* gepresenteerd werd. Sindsdien is er veel gebeurd. Uitgevers brachten rekenboeken voor het voortgezet onderwijs op de markt en de overheid begon een wetgevingstraject, dat heeft geleid tot de Wet op de Referentieniveaus. Deze wet is sinds augustus j.l. van kracht en bepaalt onder andere welke referentieniveaus voor welk schooltype gelden en dat alle leerlingen van het voortgezet onderwijs een rekentoets moeten afleggen. Ook scholen zijn druk in de weer met rekenen. Er worden rekenlessen geroosterd en een goede bestemming gezocht voor de kwaliteitsgelden voor het taal- en rekenonderwijs. Kortom, verschillende partijen beijveren zich voor verbetering van het rekenniveau van leerlingen. Dit artikel beoogt u te informeren over de meest recente ontwikkelingen en u enkele adviezen te geven over de wijze waarop u als school het rekenen op uw school kunt vormgeven.

Over de drempels met rekenen



Het referentiekader

Het *Referentiekader rekenen* is in eerste aanleg ontwikkeld als een soort meetlat waarlangs examenprogramma's, kerndoelen, enzovoorts gelegd kunnen worden met als doel het 'rekengehalte' in de examenprogramma's, kerndoelen en/of leerplannen te kunnen bepalen. Gaandeweg echter heeft het Referentiekader meer de status van toetskader gekregen met rekendoelen waarvan beheersing door leerlingen op bepaalde momenten in hun schoolloopbaan vereist is.

Het rekenreferentiekader bestaat uit zes *referentieniveaus*. Deze niveaus dragen elk een nummer (1, 2 of 3) en een letter (F of

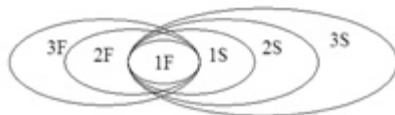
S). Het nummer verwijst naar het moment in de schoolloopbaan waarvoor het betreffende referentieniveau van toepassing is en de lettercode staat voor fundamenteel niveau of streefniveau.

In tegenstelling tot het *Referentieniveau taal* vormen de streefniveaus geen surplus op de fundamentele niveaus. De opeenvolging van streefniveaus 1S – 2S – 3S vormt naast de opeenvolging van fundamentele niveaus 1F – 2F – 3F een afzonderlijk spoor.

Leerlingen bereiken in het primair onderwijs referentieniveau 1F of 1S en vervolgen hun weg langs het hetzij het F- hetzij het S-spoor. Referentieniveau 1S bevat het huidige leerstofaanbod van het primair onderwijs. Referentieniveau 1F bevat een deel van dit leerstofaanbod.

De onderlinge relaties tussen de referentieniveaus wordt *in figuur 1* beschreven.

Daaruit blijkt dat elk referentieniveau in een spoor zijn onderliggend niveau omvat. Bovendien omvat referentieniveau 1S het niveau 1F. Verdere overlap tussen een F- en een S-niveau kan zich bij gelegenheid voordoen, maar wordt niet beoogd in het Referentiekader.



figuur 1 Onderlinge samenhang van rekenreferentieniveaus

Consequentie van *figuur 1* is dat een leerling die geacht wordt een bepaald referentieniveau te beheersen, ook de onderliggende referentieniveaus dient te beheersen. Dat heeft op zijn beurt tot gevolg dat onderhoud van rekenkundige kennis, inzicht en vaardigheden uit een onderliggend referentieniveau noodzakelijk is.

De Expertgroep heeft verder gekozen voor een brede interpretatie van het reken-domein. Rekenen is niet alleen het kunnen uitvoeren van rekenbewerkingen zonder rekenmachine, maar ook het functioneel gebruik en het weten waarom van rekenbewerkingen. Ook strekt het Referentiekader zich uit over domeinen Getallen, Verhoudingen, Meten & meetkunde en Verbanden. Vooral meetkunde en verbanden worden in het algemeen niet gauw met 'rekenen' geassocieerd. Deze brede interpretatie leidt soms tot begripsverwarring, vooral bij hen die de smalle interpretatie van rekenen zonder rekenmachine hanteren.

Over het gebruik van de rekenmachine doet het Referentiekader weinig uitspraken. Er bestaat enige *common sense* dat de lijst met parate vaardigheden uit het domein Getallen van referentieniveau 1F zonder rekenmachine uitgevoerd moet kunnen worden. In de hogere referentieniveaus is soms sprake van een verstandige keuze moeten kunnen maken tussen gebruik van de rekenmachine of een uitkomst zonder rekenmachine bepalen. In de rekentoetswijzers – zie vervolg – worden nadere vereisten omtrent het gebruik van de rekenmachine bij de rekentoetsen beschreven.

Wet- en regelgeving

Nadat de Expertgroep rekenen zijn resultaten had gepubliceerd, heeft de Rijksoverheid een wetgevingstraject gestart met als doel een wettelijke verankering van het Referentiekader te bewerkstelligen. In de Wet op de Referentieniveaus wordt onder andere bepaald welk referentieniveau

in welke onderwijssector door de leerlingen beheerst dient te worden. Volgens deze wet dient de leerling:

- referentieniveau 1F of 1S te beheersen aan het einde van de basisschool;
- referentieniveau 2F te beheersen aan het einde van alle leerwegen van het vmbo en bovendien aan het einde van een niveau 2-opleiding in het middelbaar beroepsonderwijs;
- referentieniveau 3F te beheersen aan het einde van havo en vwo en van een niveau 4-opleiding in het middelbaar beroepsonderwijs.

De overheid wijkt hierin af van de aanbevelingen van de Expertgroep, die voor de theoretische leerweg, havo en vwo referentieniveaus uit het S-spoor voorstelt.

Ijking

Een vraag van de overheid was in hoeverre de vereisten uit het Referentiekader al deel uitmaken van de huidige examenprogramma's en kerndoelen onderbouw. Want wat een leerling in een regulier schoolvak leert, hoeft hij niet in aparte rekenlessen te leren. SLO heeft in het voorjaar 2010 een zogenoemd ijkingsonderzoek uitgevoerd op de examenprogramma's van het vak wiskunde en voor het vmbo ook voor de andere sectorvakken economie en biologie en op de kerndoelen onderbouw. De conclusie is dat de examenprogramma's vmbo en de onderbouwkerndoelen de rekendoelen uit referentieniveau 2F voor het grootste deel afdekken. Voor havo en vwo vormen de rekendoelen uit referentieniveau 3F in veel gevallen noodzakelijke voorkennis voor het examen van een van de wiskundevakken. Een belangrijke uitzondering hierop vormt het rekenen zonder rekenmachine uit referentieniveau 1F, omdat in het voortgezet onderwijs de rekenmachine in alle gevallen toegestaan is.

In tabel 1 staat aangegeven welk(e) referentieniveau(s) een leerling – althans op papier – bereikt op basis van het reguliere (wiskunde)onderwijs en wat hij nog moet bijleren buiten de wiskundevakken om. Wordt in die tabel een referentieniveau tussen haakjes vermeld, dan betekent dat dat het niveau gedeeltelijk aangeboden wordt.

Voor een school houdt dit in dat het aanbieden van nieuwe leerstof in aparte

Leerling-groep	Beheerst naar verwachting bij binnenkomst	Verwerft in de onderbouw	Verwerft in de bovenbouw	Dient daarnaast nog bij te leren	Dient onderhouden te worden
vwo	1F + 1S	2S	3S	3F (incl. 2F)	1F
havo met wiskunde	1F + 1S	2S	3S	3F (incl. 2F)	1F
havo zonder wiskunde	1F + 1S	2S		3F (incl. 2F)	1F
vmbo-tl met wiskunde	1F + 1S	(2S)	2S	2F	1F
vmbo-tl zonder wiskunde	1F + 1S	(2S)		2F	1F
vmbo-bb/kb met wiskunde	1F	(2F)	2F		1F
vmbo-bb/kb zonder wiskunde	1F	(2F)		2F	1F

tabel 1

rekenlessen alleen noodzakelijk is voor leerlingen die geen examen wiskunde afleggen. Naar verwachting zal dat vooral voor leerlingen vmbo-bb en vmbo-kb zonder wiskunde niet probleemloos zijn. Niet zelden betreft dit leerlingen die moeite hebben met rekenen. Mogelijk hebben deze leerlingen baat bij een andere didactische aanpak en aan een koppeling tussen rekenen met hun aanstaande beroepspraktijk. Het lesmateriaal uit het project RekenVOort kan dit uw leerlingen bieden (zie Literatuur).

Ook leerlingen die een S-niveau hebben bereikt en getoetst worden op een overeenkomstig F-niveau, zal een onderwijsaanbod gedaan moeten worden. Naar verwachting zullen deze leerlingen weinig moeite hebben met deze overgang.

Rekontoetsen en rekentoetswijzers

Alle leerlingen uit het voortgezet onderwijs wordt in het laatste jaar van hun schoolloopbaan een rekentoets afgenomen; leerlingen uit het middelbaar beroepsonderwijs leggen een centraal ontwikkeld examen rekenen/wiskunde af. Om scholen en toetsconstructeurs duidelijkheid te verschaffen over de rekentoetsen worden zogenoemde *rekentoetswijzers* ontwikkeld door een rekentoetswijzercommissie. Deze commissie is ingesteld door het Ministerie van OCW en doet een voorstel aan het ministerie voor twee rekentoetswijzers. Er komt een rekentoetswijzer voor het vmbo en een voor havo/vwo.

De rekentoetswijzers geven een tamelijk gedetailleerde beschrijving van vorm en inhoud van de rekentoetsen. Aan de orde komen onder meer:

- Welke rekendoelen uit het Referentiekader rekenen worden in een rekentoets getoetst?
- De commissie kan voorstellen niet alle rekendoelen uit een bepaald referentieniveau in de rekentoets op te nemen. In

het bijzonder geldt dat voor rekendoelen uit onderliggende referentieniveaus.

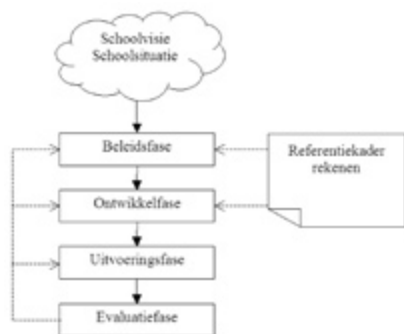
- Krijgen leerlingen tijdens de toetsafname beschikking over een (digitale) rekenmachine? Wanneer wel? Wanneer niet? Het heeft er de schijn van dat in beide rekentoetsen rekenmachineloze opgaven zullen voorkomen. Welk deel van de opgaven het hier betreft is punt van nadere discussie.
 - Zijn alle toetsopgaven contextopgaven of kent een rekentoets ook contextloze ('kale') opgaven? Zo ja, hoeveel? Hoe moeilijk zijn die dan?
- Een contextopgave vereist van een leerling dat hij een praktijkprobleem kan omzetten naar een rekenkundig probleem, die weet op te lossen en vervolgens de uitkomst kan vertalen naar het oorspronkelijke praktijkprobleem. Bij een kale opgave gaat het enkel om de oplossing van het rekenkundig probleem. Discussiepunt is welk deel van de opgaven kaal zal zijn. Een ander discussiepunt is of bij contextopgaven de rekenmachine altijd toegestaan is. Dat zou het mogelijk maken meer authentieke contexten te kiezen en de eerste en laatste fase van het probleemoplossingsproces zuiverder te toetsen.
- Moeten alle vragen computerscoorbaar zijn of moet een docent vragen met de hand nakijken? Zo ja, hoeveel?

Rekenen in de school

Veel scholen worstelen met de vraag hoe ze rekenen het beste in hun schoolleerplan kunnen onderbrengen. Niet zelden roostert een school een rekenuur in de eerste brugklas waarin de stof uit het primair onderwijs met behulp van een rekenboekje opnieuw aan bod komt, vaak op een meer formele wijze dan op de basisschool geleerd is. Over een vervolgtraject heeft ze nog weinig nagedacht. Een dergelijke school

denkt in sterke mate in snelle oplossingen. Het probleem dat zich aandient, wordt zonder al te veel overwegingen vertaald naar een snelle oplossing. Gegeven de huidige aandacht voor taal en rekenen is een dergelijke handelwijze voorstelbaar, maar deze scholen zien zich voor het tweede leerjaar voor de vraag gesteld: hoe nu verder, zeker als blijkt dat het schoolbudget voor rekenen al uitgeput is. Er blijkt dan toch behoefte te ontstaan naar een meer systematische aanpak.

Uitgangspunt daarbij is de school al een rekencurriculum heeft. Rekenen komt voor bij wiskunde, maar ook bij vakken als economie, aardrijkskunde, natuur- en scheikunde. Zelfs een vak als geschiedenis kent, als je goed kijkt, een paar rekenkundige componenten. Al dat rekenen tezamen vormt het rekencurriculum van de school. Misschien volstaat dat curriculum wel en zijn de leerlingen aan het einde van hun schoolloopbaan voldoende toegerust. Een systematische aanpak bestaat uit een aantal fasen, die *in figuur 2* vermeld staan.



figuur 2 Globaal stappenplan voor de totstandkoming van een rekencurriculum

In de beleidsfase doet de schoolleiding – in overleg met betrokkenen – beleidskeuzen over het rekenonderwijs in de school. Te denken valt aan de rekenambitie van de school, welke problemen staan deze ambitie in de weg en vereisen een oplossing, welke doelgroepen van leerlingen onderkent de school daarbij en welke vakken denkt de school te betrekken in haar rekenonderwijs. Vooral de schoolambitie is van belang. Volstaat het enkel haar leerlingen voor te bereiden op de rekentoetsen of zijn er daarnaast ook andere redenen (meer) aandacht aan rekenen te schenken.

In de ontwikkelfase brengt de school verbeteringen aan in het huidige reken-

curriculum. De basis hiervoor vormen de beleidskeuzen, met name de schoolambitie en de problemen die deze ambitie in de weg staan. Vooral beheersingsproblemen kunnen door verbetering van het huidige rekencurriculum aangepakt worden. Na een analyse van het huidige rekencurriculum kunnen verbeterdoelen geformuleerd worden en bij deze doelen verbetermaatregelen bedacht worden. Verbeterdoelen kunnen betrekking hebben op leerinhouden ('We moeten meer aandacht besteden aan het domein Getallen' of 'We moeten meer aandacht schenken aan het Weten waarom'), maar ook op leeractiviteiten ('Het consolideren van rekenkundige vaardigheden verdient meer aandacht' of 'Aan het activeren van voorkennis moeten we voor doelgroep ... meer aandacht schenken'). In veel gevallen gaat het om een combinatie van leerinhoud en leeractiviteiten ('Het consolideren van rekenkundige vaardigheden uit het domein Getallen voor doelgroep ... verdient meer aandacht').

De verbetermaatregelen komen op hun beurt voort uit de verbeterdoelen. Van belang is het om de relatie tussen maatregelen en doelen in de gaten te houden. Als voor (een deel van) de leerlingpopulatie bijvoorbeeld meer aandacht geschonken moet worden aan consolidatie van bepaalde leerinhouden, dan is een oefencursus een geschikt middel. Als echter het beheersingsniveau van (een deel van) de leerlingpopulatie onvoldoende is, verdient het aanbeveling meer in te steken op het (bij)leerproces van de leerlingen en heeft een oefencursus minder zin.

Verbeteringen kunnen vervolgens geïmplementeerd worden in het rekencurriculum. Daarbij komen aspecten aan bod zoals die in elk leerplan voorkomen en door middel van een spinnenweb in beeld gebracht kunnen worden; *zie figuur 3*.



figuur 3 Tien aspecten van leerplanontwikkeling

Het verbeterd curriculum wordt vervolgens uitgevoerd en geëvalueerd op basis van zijn leerresultaten. De evaluatieresultaten kunnen aanleiding zijn beleidskeuzen, rekencurriculum of de uitvoering daarvan bij te stellen.

Rekenen in bestaande vakken

Bij de implementatie van verbetermaatregelen kan een school in sommige gevallen gebruik maken van bestaande vakken. Denk daarbij niet alleen aan wiskunde, maar ook aan economie, natuurkunde, scheikunde, aardrijkskunde, Rekenen binnen bestaande vakken is een uitdaging die aantrekkelijk is, maar niet eenvoudig te realiseren valt. Een school kan voor dit concept kiezen omdat dat past in het rekenbeleid; de school heeft een hoge rekenambitie en meent dat niet alleen wiskunde aan de realisatie daarvan hoeft bij te dragen. Andere scholen hanteren vooral kostenoverwegingen; wat je in andere vakken kan doen, hoef je niet apart te roosteren.

Er is inmiddels onderzoek verricht naar welke rekenkundige kennis, inzicht en vaardigheden bij andere vakken dan wiskunde vereist is dan wel tot de mogelijkheden behoort. Hoe een school met deze informatie aan de slag kan, is onderwerp van nadere studie. Een aantal aandachtspunten dringt zich hierbij op.

- Welke rekenleerinhouden andere vakken bevatten, wordt bepaald door examenprogramma's, kerndoelen, lesmethoden en hoeveel rekenen een vakdocent in zijn lessen aanbiedt. Examenprogramma's en vooral examensyllabi van enkele vakken buiten wiskunde geven soms strikte vereisten op het gebied van rekenen; *zie figuur 4*. Van andere vakken bevatten de examensyllabi enkel vermelding van rekenvaardigheden in domeinoverstijgende eindtermen; *zie figuur 5*. Daarnaast bieden examenprogramma's soms mogelijkheden om rekenleerinhouden met een of meer eindtermen in verband te brengen, zonder dat die in eindexamenprogramma's genoemd zijn;
- Naast leerinhouden verdient het ook aanbeveling te overwegen welke *leeractiviteiten* zich lenen voor andere vakken. Het aanleren van rekenkundige kennis, inzicht en vaardigheden vergt meestal kennis van (reken)didactiek, die bij reken- en wiskundecenten

de BTW:

- de kandidaat moet de volgende berekeningen kunnen uitvoeren:
 - vanuit de verkoopprijs exclusief BTW de verkoopprijs inclusief BTW kunnen bepalen
 - vanuit de verkoopprijs inclusief BTW de verkoopprijs exclusief BTW kunnen bepalen
 - $\text{verkoopprijs inclusief BTW} = \text{inkoopprijs exclusief BTW} + \text{brutowinstmarge (in geld of in procenten)} + \text{BTW}$
 - $\text{verkoopprijs exclusief BTW} - \text{inkoopprijs exclusief BTW} = \text{brutowinst}$
 - $\text{brutowinst} - \text{bedrijfskosten} = \text{resultaat (nettowinst of nettoverlies)}$

figuur 4 Uit de examensyllabus 2011 Economie vmbo-kb (CEVO, september 2009)

basisrekenvaardigheden binnen biologie toepassen:

- schatten en afronden
- efficiënt rekenen
- rekenregels gebruiken:
 - verhoudingstabellen

rekenen met grootheden en eenheden:

- eenheid bij gemeten of berekende grootheid aangeven

figuur 5 Uit de examensyllabus 2011 Biologie vmbo-bb (CEVO, september 2009)

doorgaans voorhanden is. Het aanleren van vaardigheden op het gebied van functioneel gebruik – bijvoorbeeld: het analyseren van een contextprobleem, het specificeren van de noodzakelijke berekeningen die tot een oplossing leiden, het correct afronden van uitkomsten – kan desgewenst bij andere vakken ondergebracht worden. Vaak worden andere vakken ook genoemd bij onderhoud van rekenkundige kennis, inzicht en vaardigheden.

- *Interne afstemming* tussen vakdocenten is een belangrijk aandachtspunt. Afstemming dient plaats te vinden over naamgeving van begrippen en concepten, notaties en vooral oplossingsmethoden of rekenstrategieën. Dat laatste is ingewikkeld, want elk vak lijkt zijn eigen oplossingsmethoden voor een rekenkundig probleem te hanteren. Wil een school dat er bij een bepaalde probleemstelling telkens één methode wordt gehanteerd of laat de school de leerlingen vrij in hun keuze? En als ze leerlingen vrij laat in hun keuze, hoe zorgt de school er dan voor dat leerlingen oplossingsmethoden van voldoende kwaliteit hanteren?
- Verder is *afstemming in de tijd* noodzakelijk om te voorkomen dat een ander vak behoefte heeft aan een bepaalde rekenkundige vaardigheid of concept die een leerling nog niet is aangeleerd. Er zal een uitgekookte planning moeten worden gemaakt, waarbij het leren van kennis, inzicht en vaardigheden vooraf gaat aan gebruik en daarmee onderhoud. Dit lijkt ingewikkeld, maar andere

vakken kennen meer speelruimte in hun leerplan dan een vak als wiskunde.

Daarvan kan gebruik gemaakt worden.

- Ten slotte leidt rekenen in andere vakken tot enkele *organisatorische* vragen. Onderdeel daarvan is het 'eigenaarschap' van het rekencurriculum of onderdelen daarvan. Wie houdt overzicht? Wie bewaakt de planning? Wie spreekt een vakdocent er op aan als hij zich niet aan de afstemmingsafspraken houdt? Moet een vakdocent aan de eigenaar toestemming vragen om rekenkundige onderdelen in zijn leerplan te wijzigen?

Tot slot

Langzaam maar zeker ontstaan er meer contouren van wat rekenen behelst, zowel in de regelgeving als bij scholen. Desondanks hebben veel scholen moeite handen en voeten te geven aan hun rekencurriculum. Belangrijk obstakel daarin is dat rekenen op meerdere vakken in het schoolcurriculum voorkomt. Omdat een school vaak op basis van schoolvakken werkt en de wet- en regelgeving ook rondom vakken georganiseerd is, is het moeilijk vakoverstijgende leerdoelen te bereiken. Dat geldt niet alleen voor rekenen, maar ook voor leerdoelen op het terrein van taal en ict. Hopelijk zijn scholen in de toekomst in staat hier goede oplossingen voor te bedenken.

Aanvulling van de redactie

In het najaar van 2010 vroeg het Steunpunt Taal & Rekenen VO, in samenwerking met de Stichting Platforms VMBO (SPV), de VO-raad en de VVVO, aan docenten taal en rekenen én leidinggevenden vmbo, havo en vwo om, via een tweetal enquêtes, hun mening te geven over de referentiekaders taal en rekenen.

De resultaten van die enquêtes zijn inmiddels bekend en uitgewerkt in twee rapportages (voor vmbo en havo/vwo).

Zie daarvoor:

www.steunpunttaalenrekenen.vvo.nl/nieuws/resultaten-enqu%C3%AAtes-referentiekaders-taal-en-rekenen

Literatuur

- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008): *Over de drempels met rekenen*. Enschede: SLO.
- Project RekenVOort (2010); zie www.nvvw.nl/page.php?id=7789. Amsterdam: NVvW.
- V. Schmidt, N. den Braber, C. Buys (2010): *Rekenen: op niveau komen en blijven*. Enschede: SLO.

Over de auteur

Victor Schmidt is leerplanontwikkelaar rekenen, wiskunde en informatica bij SLO en onder andere betrokken bij de totstandkoming van de rekentoetswijzers in het voortgezet onderwijs.

E-mailadres: v.schmidt@slo.nl

Waarom rekenen thuis- hoort in de wiskundeles

EN NIET IN APARTE REKENLESSEN

[Frans Ballering]

Omdat ik – ondanks mijn pensionering als vakdidacticus – nog steeds niet ben uitgedacht over het leren van wiskunde door kinderen, blijf ik schrijven. Voor mijn stukjes ben ik geïnspireerd door het grote enthousiasme van wiskundeleraren die het kunnen opbrengen om 's avonds ook nog lessen vakdidactiek bij te wonen.

Rekenen binnen of buiten de wiskundeles?

Ik hoor van veel scholen dat er aparte rekenlessen komen die vaak worden gegeven door andere dan wiskundeleraren. Dat lijkt me een gemiste kans. Er zijn zoveel momenten in wiskundelessen waarop rekenen zinvol en betekenisvol een plaats kan krijgen en dat zijn even zoveel argumenten om rekenen binnen de wiskunde te houden en de tijd die voor rekenen beschikbaar is, toe te voegen aan de wiskundelessen. Ik geef enkele voorbeelden die ik heb geput uit lessen die ik bijwoonde bij studenten van de lerarenopleiding in Rotterdam.

Kwadraten en wortels

In dit voorbeeld wordt de interactie in een les beschreven. De beschrijving is kort gehouden maar er gebeurt veel. Bij een les over kwadraten en wortels komt de volgende tabel op het bord.

Getal	...	3	...	...	5	$\sqrt{26}$	...
Kwadraat	4	...	16	17	...	...	81

Zoals gebruikelijk komen de antwoorden uit de klas. Boven de 4 hoort 2. Want je deelt door 2. Onder de 3 komt 9. Boven de 16 komt eerst 8, want je deelt door 2. Er komen natuurlijk protesten: er moet 4 komen. Hoe zit dat dan met delen door 2? Dat is niet goed juf, want je moet wortel-trekken! Juf glimt. Wat komt er boven de 17? Meteen komen de rekenmachines tevoorschijn: 4.123105626. Dat is goed. Doe nu even je rekenmachine weg. Ja doe maar in je tas, want de rest kunnen we wel *met* ons hoofd. Wat betekent dat rare getal dat zojuist is voorgelezen? Wat stelt de juf nu weer voor een rare vraag. Ik snap de vraag niet, juf.

Dat is niet raar. Juf veegt het getal weg. Als je nu met je verstand open kijkt, wat moet er dan boven de 17 komen? ...

Er komt nog even niks.

Ongeveer, Peter? Oh, nu snap ik het: iets meer dan 4. Wat denk je 4,1? Ja dat zal wel goed zijn. Hoeveel is 4,1 $\times$ 4,1? Ja pak maar even een kladblaadje, nee geen reken-machine, want we doen het met ons hoofd. Ik leer jullie straks dat dit zelfs *uit* je hoofd kan. 16,81 komt er uit. Eén leerling schrijft de berekening op het bord. Wat betekent dit? Dat er boven 17 iets meer dan 4,1 moet komen. Dat wortel 17 iets meer is dan 4,1. En wat stond er daarnet ook al weer? Dus dat betekent: 4,123105626 $\times$... ?

Juf aarzelt en de leerlingen vullen aan 4,123105626 $\times$ 4,123105626 = 17. Is dat precies 17? Geen reactie.

Ik weet zeker dat het niet precies 17 is, zegt de juf; kunnen jullie bedenken waarom ik dat zeker kan weten? Na enige onduidelijke reacties komt er een leerling die zegt: in het antwoord waar nu 17 staat komt zestien-komma-zoveel. De leerling krijgt een compliment. Een andere leerling mag het nog op zijn manier zeggen. Jullie kunnen heel goed denken!

Oké, dan nu 5 kwadraat; is een eitje. Daarna wordt het heel stil. Die 81 is natuurlijk 9 zegt een leerling, maar hoe kun je weten wat $\sqrt{26}$ is? Oh, maar dat is iets meer dan 5 dus 5,1. Moet er dan 5,1 onder $\sqrt{26}$? Ja.

Juf begint vooraan en wijst naar 2.

2 $\times$ 2 = ?, 3 $\times$ 3 = ?, 4 $\times$ 4 = ?, 4,1 $\times$ 4,1 = ?, 5 $\times$ 5 = ?, $\sqrt{26} \times \sqrt{26}$ = ? Nee dat is niet 5,1; maar 5,1 $\times$ 5,1 Het kwartje valt nog niet.

Juf maakt een nieuwe tabel.

...	...	3	...	...	5	$\sqrt{26}$	...
...	...	4	...	16	17	...	81

Als ik hier nou 'getal' schrijf – ze wijst links onder in de tabel – wat komt er dan hierboven? Ja, dat is natuurlijk wortel; dat hadden ze al eerder gezien. Haar hand dwaalt langzaam naar de kolom met $\sqrt{26}$. Aarzelend komen er reacties. Dus daar moet 26 komen? Maar hoe kan dat dan?

Er komt een derde tabel.

Wortel	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{17}$	5	$\sqrt{26}$	...
Getal	4	...	16	17	...	...	81

Juf sluit af.

$\sqrt{4}$ is een *schuilnaam* voor 2; omdat 2 $\times$ 2 = 4; is dus ook $\sqrt{4} \times \sqrt{4}$ = 4.

$\sqrt{25}$ is een schuilnaam voor 5; omdat 5 $\times$ 5 = 25; is dus ook $\sqrt{25} \times \sqrt{25}$ = 25.

Dus: $\sqrt{26} \times \sqrt{26}$ = 26.

Het is nog wel moeilijk verzucht een leerling. Juf zegt dat dat mag en dat dit nog wel eens terugkomt.

Uit het hoofd

Juf vergeet haar belofte om 4,1 $\times$ 4,1 uit het hoofd uit te rekenen. De les was ook al een aardig eind om. Wat zou daarbij niet allemaal aan de orde kunnen komen? Bijvoorbeeld het volgende.

4 $\times$ 4,1 = 16,4 en 0,1 $\times$ 4,1 = 0,41, dus 4,1 $\times$ 4,1 = 16,81. Waarom is 0,1 $\times$ 4,1 = 0,41? Komma opschuiven. Ja dat weet juf ook, maar kun je dat ook begrijpen?

Daar komen verschillende reacties op: delen door 10; je neemt 'een tiende'; 10 $\times$ 0,41 = 4,1 is ook komma opschuiven; eerst bereken je 1 $\times$ 41, het antwoord daarvan is 100 keer zo groot, dus 41 gedeeld door 100 is goed.

Rekenen? Ja, maar vooral: denken! En als het ons lukt om de leerling aan het denken te krijgen is dit vast niet saai.

Schuilnamen

Huiswerkbepreking. 'Esmee, wat komt er uit $\frac{1}{-1}$?' Ze kijkt verschrikt in haar schrift en gelooft haar ogen niet. 'Eh, -1; nee, 0!' Het is de beurt van de leraar om te schrikken. 'Eén', roept ze tenslotte ook nog.

Er komen vier 'sommen' op het bord. 'Niet roepen, alleen denken!'

$$\frac{7}{7} = \frac{27}{27} = \frac{-23}{-23} = \frac{-34587}{-34587} =$$

Gelukkig vinden ze dit niet moeilijk. Maar de meester is pas tevreden nadat ook een drietal leerlingen onder woorden heeft gebracht waarom het zo is. (Bij hetzelfde probleem in een volgende klas kan hij afsluiten met de conclusie dat $\frac{p}{p}=1$; kan niet schelen welk getal p is.)

Een mooi intermezzo uit zomaar een les. De leraar had ook nog kunnen vragen: 'Is $\frac{7}{7}$ een getal?' 'Is $\frac{7}{7}$ een breuk?' 'Waarom wel, waarom niet?' Er kan dan aan de orde komen dat $\frac{7}{7}$ een schuilnaam is voor het getal 1, en dat het daarom nog niet zo gek is om ook het getal 1 een breuk te noemen, zonder dat je een teller of een noemer ziet. De kinderen kunnen dan vast andere voorbeelden geven, zoals: $\frac{4}{2}$ en $\frac{6}{3}$ zijn schuilnamen voor het getal 2. En later kan ook $\sqrt{4}$ in dat rijtje komen en weer later $^2\log 16$.

Vermenigvuldigen

In een andere les komt er zomaar onverwacht $7 \times \frac{3}{14}$ op het bord. Wat nu ...? Verschillende antwoorden: $\frac{21}{98}$, $1\frac{7}{14}$, $\frac{21}{14}$, $\frac{3}{2}$ en $1\frac{1}{2}$ komen allemaal voor. De meester volstaat niet met het geven van *het goede antwoord*. 'Zijn dit allemaal schuilnamen voor hetzelfde getal?' Eerst even allemaal zelf ermee aan de slag op een kladje. Dan samen.

Vereenvoudigen

Nee, de laatste vier zijn hetzelfde, maar de eerste is anders. Maar $1\frac{7}{14}$ is toch niet goed, daarvoor moet je toch $1\frac{1}{2}$ schrijven? Zijn het verschillende getallen? Nee het is hetzelfde getal. Dus: goed of niet? Leerlingen in de war. Ja, kinderen in groep 8 moest je vooral leren hoe je breuken moet vereenvoudigen. Nu je dat eenmaal kunt, moet je vooral nadenken. Maar de meester vindt het altijd prettig om getallen eenvoudig te schrijven.

Wegdelen

Hoe kom je eigenlijk aan $\frac{3}{2}$? Wegstrepen, meester. Ho, ho, niks wegstrepen! In de wiskundeles strepen we niet, nee, we delen. Strepen is toch geen wiskunde? En delen wel. Dus voortaan wegdelen; en op het bord komt:

$$7 \times \frac{3}{14} = \frac{7}{1} \times \frac{3}{14} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{14} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Hoe komt u aan de $\frac{7}{1}$?

Er komt een rijtje sommen op het bord, ongeveer zoals in het voorbeeld hierboven van $\frac{1}{1}$. En omdat voor elk getal geldt dat $\frac{\text{getal}}{1} = \text{getal}$, kan ik in plaats van 83 ook schrijven $\frac{83}{1}$, want dat is een schuilnaam voor 83.

Variabelen

Op heel veel momenten in de schoolloopbaan zijn er problemen met het rekenen met variabelen. Ineens wordt $a + a$ gelijk aan a^2 , omdat het denken even werd uitgeschakeld, het uiterlijk van de opgave te verleidelijk was en het antwoord er al stond voordat het denken was ingeschakeld. Iedere wiskundeleraar kent vele variaties op dit voorbeeld.

Op elk van die momenten kan er gerekend worden, ongeveer zoals in onderstaande tabel, zodat er vervolgens nagedacht kan worden over het waarom van $a + a = 2a$. We geven leerlingen daarmee een instrument in handen om hun eigen denken te controleren door het invullen van getallen.

a	$a + a$	$2 \times a$	$2a$	$-3a$	b	$a + b$	$a + 2b$	ab	$3a - 2b$
1	...	...	...	...	2	...	...	...	...
3	...	...	...	...	1	...	...	...	...
-2	...	...	...	...	-7	...	...	...	...
0	...	...	...	...	-13	...	...	...	...
31	...	...	...	...	2	...	...	...	...
0,25	...	...	...	...	25	...	...	...	...
-15	...	...	...	...	$\frac{1}{6}$	...	...	...	...

En de getallen kunnen natuurlijk soms eenvoudiger en mogen misschien ook wel eens wat ingewikkelder (wortels in 2-havo, logaritmen in 4-vwo). Ook de kop van de tabel moet natuurlijk zijn aangepast aan de klas, aan de aanleiding voor het maken van de tabel en het niveau van de leerlingen. Een andere reactie bij dit probleem kan een rijtje zijn zoals:

$$2 \times 3 + 9 \times 3 = 11 \times 3$$

$$2 \times 7 + 9 \times 7 = 11 \times 7$$

$$2 \times 1 + 9 \times 1 = 11 \times 1$$

$$2 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{2} = 11 \times \frac{1}{2}$$

$$2 \times -5 + 9 \times -5 = 11 \times -5$$

Enzovoorts, eindigend met:

$$2 \times a + 9 \times a = 11 \times a$$

Alleen wordt er dan niet gerekend.

'Concluderend'

Als rekenlessen wiskundelessen worden, dan kunnen zulke kansen in de les (beter) worden benut, leren de kinderen beter omgaan met getallen en krijgen een betere basis voor ons prachtige vak. We hoeven ze dan niet te vermoeien met rijtjes van 'dezelfde' sommen. En dat het rekenen nuttig is, hoeft niet meer verklaard te worden. Het rekenen wordt veel meer denken en komt veel vaker aan de orde. En als we vinden dat het te lang geleden is dat er is gerekend, kunnen we bij vrijwel elk onderwerp wel een rekenintermezzo verzinnen.

Over de auteur

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: fransballering@hetnet.nl

Machtsfuncties – Wiskunde leeft!

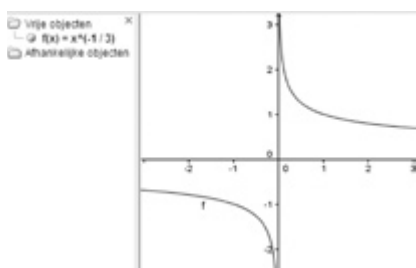
[Wout de Goede]

Wie denkt dat de wiskunde niet verandert en dat afspraken die al jaren oud zijn, blijven gelden, heeft het mis! Jarenlang heb ik mijn leerlingen en studenten voorgehouden dat er wiskundig nauwelijks iets verandert in de loop der tijden, maar ik ontdekte recentelijk dat ik mijn mening moet herzien!

Ooit (midden zestiger jaren van de vorige eeuw) leerde ik dat een machtsfunctie, dus een functie van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R}$ van de vorm $x \rightarrow k \cdot a^x$, alleen voor positief grondtal, dus voor $a > 0$, betekenis heeft, en dat het domein dan $\mathbf{R}$ is en het bereik afhangt van k . Ik had daar destijds alle begrip voor: als je namelijk een negatief grondtal toestaat krijg je rare dingen. Wat te denken van de volgende bewering:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2$$

De uitdrukking $p^{\frac{1}{3}}$ heeft dus voor mij alleen betekenis voor positieve p , en $\sqrt[3]{x}$ is daarmee, meen ik zeker te weten, alleen voor positieve x gelijk aan $x^{\frac{1}{3}}$. Immers $\sqrt[3]{x}$ is het getal waarvan de derde macht gelijk is aan x , dus een derdemachts wortel kun je best uit een negatief getal trekken: een derde macht kan tenslotte wel negatief zijn! Maar in $x^{\frac{1}{3}}$ moet x positief zijn.



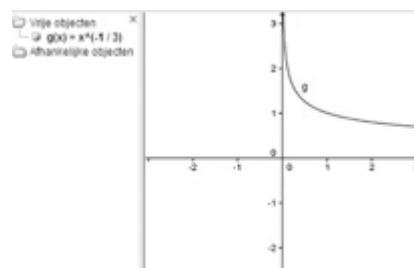
figuur 1 Geogebra met Invoer: $f(x) = x^{(-1/3)}$

De eerste rekenmachines (die batterijen-vreters met een led-display) gaven dan ook, als je bijvoorbeeld $(-3)^{1/5}$ wilde uitrekenen, al een 'error' na $(-3)^{\wedge}$... Je kon nota bene $(-17)^4$ niet eens met zo'n apparaat uitrekenen zonder te weten dat je het minteken gewoon weg kunt laten. Maar tot mijn ergernis kunnen latere generaties rekenmachines dat wel en de grafiek van $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$ wordt gewoon op $\mathbf{R}$ getekend.

Herhaal: Nu kan ik billijken dat de grafiek van $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ met domein $\mathbf{R}$ getekend wordt, immers $\sqrt[3]{-8}$ is gedefinieerd als het getal, dat tot de derde macht verheven -8 oplevert, dus gewoon -2 . Dat wil zeggen dat $\sqrt[3]{a}$ met $a < 0$ wel gedefinieerd is, maar $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$ moet domein $\mathbf{R}^+$ hebben, denk ik altijd.

Lang heb ik volgehouden dat de rekenmachine het domweg fout doet en ik had voldoende gezag om geloofd te worden (denk ik; in elk geval werd ik niet tegengesproken!).

Maar inmiddels zie ik ook in schoolboeken dat $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$ domein $\mathbf{R}$ krijgt.



figuur 2 Geogebra met Invoer: $g(x) = x^{(1*(-1/3))}$

Gekeken hoe dat bij Geogebra gaat. Dit programma doet het voor mij wat onbegrijpelijk; zie figuur 1 en figuur 2.

De functie $f(x) = x^{(-1/3)}$ krijgt, evenals de functie $h(x) = x^{(-2/6)}$ domein $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$, maar de functie $g(x) = x^{(1*(-1/3))}$ krijgt als domein alleen $\langle 0, \rightarrow \rangle$, ofschoon in de lijst in het Algebravenster van Geogebra gewoon $g(x) = x^{(-1/3)}$ komt te staan, net als bij $f(x)$ en $h(x)$.

Op Internet gezocht, en wie schetst mijn verbazing toen ik op <http://oregonstate.edu/instruct/mth251/cq/FieldGuide/power/lesson.html> vond:

Domains of Power Functions

If p is a non-zero integer, then the domain of the power function $f(x) = kx^p$ consists of all real numbers. For rational exponents p , x^p is always defined for positive x , but we cannot extract an even root of a negative number.

Thus $x^{(1/4)}$ is not defined for any negative real numbers. Neither is $x^{(3/4)}$ (the fourth root of x cubed).

Any rational number p can be written in the form $p = r/s$ where all common factors of r and s have been cancelled. When this has been done, f has domain

- All real numbers if s is odd
- All non-negative real numbers if s is even.

If p is a real number which is not rational (called an irrational number), then the domain of f consists of all non-negative real numbers.

Kijk, met deze definitie doet de rekenmachine het vrijwel goed.

Uitsluitel gevraagd aan een emeritus hoogleraar Klassieke Analyse, die ik een paar keer in de week tref. Hij wees mij op Apostol II en verbaasde zich eveneens over de internetdefinitie.

Apostol I^[1] definieert eerst $x \rightarrow e^x$ en vervolgens $x \rightarrow a^x$ als $x \rightarrow e^{x \cdot \ln a}$, waardoor inderdaad moet gelden $a > 0$. ('Zie je wel!', dacht ik.)

Apostol II^[2] breidt dit via de hoofdwaaide van de logaritme uit naar machten met complexe exponent en complex grondtal, en dan blijkt bijvoorbeeld $(-1)^i$ een verrassende uitkomst te hebben!

Nu kun je uiteraard zeggen dat de nieuwe (internet)definitie vergelijkbaar is met de afspraak die je in de brugklas met je leerlingen maakt:

'Natuurlijk is $(\pm 2)^2 = 4$, dus je zou kunnen zeggen dat $\sqrt{4} = \pm 2$, maar $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$

heeft dan al 8 mogelijke uitkomsten; dus om de zaak simpel en met name om de boel eenduidig te houden, spreken we af dat $\sqrt[4]{4} = 2$.

In analogie hiermee kun je in de vierde klas zeggen:

'Natuurlijk kun je een rationaal getal op oneindig veel manieren schrijven, maar we spreken af dat je in a^x met q rationaal de onvereenvoudigbare vorm van q moet hebben, anders krijg je dingen als:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2.$$

Ik vrees echter dat de hier gesignaleerde stuip trekking van de wiskunde een gevolg is van pure gemakzucht.

De oorspronkelijke definitie van a^x was zonder meer uitbreidbaar naar grotere verzamelingen en daarmee beter.

Ik blijf het vreemd en onnodig vinden dat het wel of niet bestaan van het getal a^x voor rationale x gaat afhangen van de keuze van de representant voor de equivalentieklasse die het betreffende rationale getal vertegenwoordigt.

Overigens krijgt de rekenmachine ook uit $(-8)^{(2/6)}$ gewoon -2 , en tekent de GR gewoon $x \rightarrow x^{\frac{2}{6}}$ net als $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$

op $\mathbb{R}$, terwijl je daar gezien de moderne definitie toch eigenlijk een foutmelding zou verwachten. Om die reden vind ik dat het 'vrijwel' goed gaat. Kennelijk vereenvoudigt het ding ook al ongevraagd breuken!

Maar waar je vroeger je leerlingen moest leren dat $\sqrt[5]{-40} = -\sqrt[5]{40}$, zodat ze op de rekenmachine $\sqrt[5]{40}$ konden intypen en zelf het minteken erbij moesten bedenken, als ze een benaderde waarde van $\sqrt[5]{-40}$ nodig hadden voor een berekening, kunnen ze nu op de TI gebruik maken van $(5 \text{ Math } \sqrt[5]{-40})$; en op de Casio zal ongetwijfeld iets soortgelijks kunnen. Ook werkt het domweg intoetsen van $(-40)^{\wedge}.2$ of van $(-40)^{(1\div5)}$. In het laatste geval hoeft je niet eens meer te weten dat je $\frac{1}{5}$ door $.2$ kunt vervangen. Je moet dan wel om de haakjes denken, maar als je ze leert onder alle omstandigheden flink haakjes te zetten, ook al zijn die volstrekt overbodig, dan gaat er zelden wat mis!

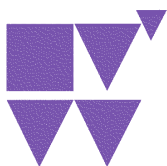
Al met al is hier, geloof ik, weer een (aardige) brok (aardige) wiskunde onder een knop van de black box geplaatst en dat hebben we gewoon laten gebeuren!

Noten

- [1] Apostol I = Tom M. Apostol (1966): *Calculus. Volume 1: One-variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. John Wiley & Sons.
- [2] Apostol II = Tom M. Apostol (1969): *Mathematical Analysis. A modern approach to advanced calculus*. Addison-Wesley Publishing Company.

Over de auteur

Wout de Goede was tot 2006 docent wiskunde aan het Willem Lodewijk Gymnasium te Groningen en aan het Instituut voor Wiskunde en Informatica van de RuG. Hij werkt nog mee aan de methode *Moderne Wiskunde* en is eigenwijs genoeg om zich ook anderszins nog flink met het vak te bemoeien.
E-mailadres: w.h.v.de.goede@rug.nl



GEZOCHT WORDT

hoofredacteur van *Euclides*

MET INGANG VAN 1 JULI 2011

De taak van de hoofredacteur bestaat uit:

- het initiëren van redactioneel beleid;
- de algehele leiding over de redactionele werkzaamheden;
- de algehele zorg voor de redactionele kopij, in het bijzonder het toezien op voldoende toevoer van kopij;
- het besluiten of binnengekomen kopij kan worden geaccepteerd;
- het organiseren van de feedback ten aanzien van schrijvers van artikelen;
- het onderhouden van contacten met auteurs;
- het aanzoeken van schrijvers over interessante onderwerpen;
- het volgen van ontwikkelingen die van belang zijn voor de leden en het wiskundeonderwijs;
- het verzamelen van de directe kopij;
- het schrijven van een 'Kort Vooraf';
- het schrijven van het jaarverslag van de werkzaamheden van de redactie;
- het per jaargang verzorgen van een overzicht van verschenen artikelen in de betreffende jaargang;
- het bijwonen van de vergaderingen van de kernredactie en van de redactievergaderingen;
- het driemaal per jaar verslag uitbrengen aan de redactie over het gevoerde beleid;
- overleg met de eindredacteur over de samenstelling van de inhoud van het blad.

Informatie over de werkzaamheden van de hoofredacteur kan verkregen worden bij de voorzitter van de redactie, Heiner Wind (e-mail: hwind@home.nl / telefoon: 050 5263 742).

Belangstellenden kunnen **tot 15 mei 2011** per e-mail contact opnemen met Heiner Wind.

Euclides is het orgaan van NVvW voor leraren wiskunde van vmbo tot hbo. *Euclides* verschijnt 7 maal per schooljaar.

Het bestuur van de Vereniging delegeert statutair de verantwoordelijkheid voor de inhoud van *Euclides* aan de hoofredacteur. De redactie bestaat uit vrijwilligers. De kernredactie bestaat uit de hoofredacteur, de eindredacteur en de voorzitter van de redactie.

Een indicatie voor de benodigde tijd is gemiddeld een dag per week, met pieken rond de deadline van de nummers.

De huidige hoofredacteur is één dag gedetacheerd. Een vergoeding in plaats van een detachering is mogelijk.

De definitieve vorm en omvang zal in overleg worden bepaald.

De waarheid over het Wintersymposium?

[Henk Rozenhart]

Voor de lunch

Traditioneel is de eerste zaterdag van het nieuwe kalenderjaar gereserveerd voor het Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG). Ook dit jaar hadden zo'n 130 belangstellenden zich in Utrecht verzameld voor een drietal sprekers die hun een beter inzicht in het moeilijke vakgebied van de Logica probeerden te geven.

De eerste spreker, Jan van Eijck, gaf met goede voorbeelden inzicht in onderwerpen, die in de logica 'publieke aankondiging' en 'collectief weten' worden genoemd. De publicatie van dit artikel in *Euclides*^[1] is een publieke aankondiging voor de groep lezers van dit blad. Of ik daarbij de volledige waarheid beschrijf, weten alleen zij die aanwezig waren, voor die groep is wat daar gebeurd is, 'collectief weten'. De rest gaat er waarschijnlijk van uit dat ik de waarheid spreek, maar zijn daar niet zeker van. Bij de lezing van Jan van Eijck werd er steeds van de waarheid uitgegaan; Jan liet met goed gedefinieerde grafen zien hoe men binnen de groep tot een bepaalde juiste conclusie kan komen.

Eric Pacuit gaf in de tweede lezing een mooi overzicht met welke middelen een groep tot een voor het collectief zo goed mogelijk beslissing kan komen. Men kan hierbij denken aan stemprocedures. Wat mij hiervan heel erg is bijgebleven, is dat beslissingscriteria, die op het oog heel voor de hand liggend lijken, door een kleine verstoring tot een geheel andere – voor de groep ongewenste beslissing – kunnen leiden en in sommige situaties zelfs tot iets paradoxaals. Verder ging Eric in op de vraag hoe mensen die weten dat dit bij bepaalde procedures gebeurt, de uitkomst met deze wetenschap kunnen beïnvloeden.

De lunch

Hierna was de lunch een goede gelegenheid om de verworven inzichten te toetsen aan die van anderen en om de nodige nieuwjaarsgesprekjes te voeren.

Na de lunch

Na de pauze werd het wel heel lastig, want de laatste lezing probeerde de toehoorders de logica van het liegen duidelijk te maken. Hans van Ditmarsch liet met

grafische modellen zien hoe een analyse van de leugen gemaakt werd. Helaas was de betekenis van de symbolen voor mij niet helder en ging het in een te snel tempo. Maar al met al was ook deze lezing nuttig. Als leraar wiskunde werd ik maar weer eens met mijn neus op de feiten gedrukt: als een leerling je niet volgt, ben je hem snel kwijt. Dus steeds achterom blijven kijken of je leerlingen nog wel achter op de lastdrager zitten. En zorg dat je niet teveel in één keer wilt. Wat bij mij wel aankwam, was het besef dat liegen het best lukt in een wereld waarin iedereen de waarheid spreekt, want dan wordt je leugen als waarheid opgevat. Wat mijzelf betreft zou ik daar de conclusie uit willen trekken dat je in onze wereld het beste de waarheid kunt liegen. Al met al een mooie dag, die wederom perfect georganiseerd was door de mensen van het KWG. De thuisblijvers hadden weer eens ongelijk. Bedankt, en laten we de hoop uitspreken dat de volgende editie van het Wintersymposium een groei van het aantal deelnemers in de jongste leeftijdscategorie te zien zal geven.

GEZOCHT / TIJD VOOR ICT IN DE WISKUNDELES?

Voor het Kennisnet-onderzoek 'DocentPraktijken in ICT-rijk wiskunde-onderwijs' zoekt het Freudenthal Instituut wiskundedocenten die:

- *weinig* ervaring hebben met het gebruik van ICT in de wiskundeles;
- *ervaring willen opdoen* met ICT en hierover in samenwerking met andere docenten en onderzoekers willen leren;
- in het schooljaar 2011-2012 wiskunde geven aan 2 havo/vwo.

We zoeken per school twee docenten. Voor de scholen die deelnemen, is een financiële vergoeding beschikbaar.

Wat gaan we doen?

- Drie lessenseries uitvoeren in elke deelnemende 2 havo/vwo klas;
- Informatie, ervaringen en ideeën uitwisselen op vijf bijeenkomsten in Utrecht en via een online platform.

Meer informatie en aanmelden

Website: www.fi.uu.nl/dpict
E-mail: dpict-l@science.uu.nl

Noot

[1] Zie pag. 214-216 in dit nummer.

Over de auteur

Henk Rozenhart werkt op de Berger Scholengemeenschap in Bergen (NH). Ook is hij bestuurslid van de NVvW.
E-mailadres: henk_rozenhart@hotmail.com

AANKONDIGING / HKRWO-SYMPOSIUM XVII

BLADEREN: TIJDSCHRIFTEN VOOR LERAREN EN LEERLINGEN

Tijdschriften voor (wiskunde)leraren bestaan al heel lang. Zo verscheen in de achttiende eeuw de *Mathematische Liefhebberij, met het Nieuws der Fransche en Duytsche scholen in Nederland*. Van recenter datum is het *Wiskundig Tijdschrift*, dat in het begin van de twintigste eeuw verscheen. Een heel ander voorbeeld is het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, van 1913 tot 1988, dat geheel gewijd was aan de studie voor wiskunde-aktes. Natuurlijk zijn er ook tijdschriften die nog steeds bestaan, zoals *Euclides* (al bijna 90 jaar!), *Nieuwe Wiskrant*, *Panama-Post* en *Volgens Bartjens*. Er is ook zo'n vijftig jaar een wiskundetijdschrift voor leerlingen, *Pythagoras*.

Symposium XVII is gewijd aan de geschiedenis van deze nog steeds bestaande tijdschriften: hoe zijn ze ontstaan, wat willen ze eigenlijk bereiken, en vooral: hoe hebben ze zich ontwikkeld tijdens hun

inmiddels al respectabele levensloop? Wiskundeonderwijs houdt niet op bij de Nederlandse grens. *Wimecos*, de voorloper van de NVvW, onderhield ooit een leesportefeuille met vooral buitenlandse tijdschriften. Die portefeuille is wegens gebrek aan belangstelling al lang ter ziele en je kunt je afvragen of in Nederland nog wel buitenlandse tijdschriften worden gelezen. Om het u makkelijk te maken kijken we wel over de landsgrens maar blijven we binnen de taalgrens. *Wiskunde & Onderwijs* en *Uitwiskeling* zijn ook in Nederland niet onbekend.

Lezingen

- Martinus van Hoorn: *Euclides, in het bijzonder de periode na WO II*
- Jeanine Daems: *Pythagoras*
- Harry Sormani: *Volgens Bartjens* en *Wiskobas-bulletin*
- Hilde Eggermont: *Vlaamse tijdschriften voor wiskundeleraars*

Datum en plaats

Symposium XVII vindt plaats op **zaterdag 14 mei 2011** in de Hogeschool Domstad, Koningsbergerstraat 9 in Utrecht (een paar minuten lopen van CS). Inloop en koffie vanaf 9:30u, start programma 10:15u, einde rond 15:30u.

Aanmelden en kosten

Aanmelding door het zenden van een e-mailbericht aan Harm Jan Smid (h.j.smid@ipact.nl) onder gelijktijdige overmaking van € 25,00 op girorekening 4657326 t.n.v. HKRWO te Leiden. Inbegrepen zijn koffie, thee en fris, en een goed voorziene lunch.



**Kom naar de Open Dag
op 16 april in Nijmegen!**

Hogeschool  van Arnhem en Nijmegen

Ambitie? Word 1^e graads docent Wiskunde bij de HAN!

Ontwikkel u op masterniveau tot zelfstandig docent in de bovenbouw havo/vwo en verdiep uw vakspecifieke kennis. Leer vernieuwingen binnen het wiskunde-onderwijs concreet te ontwerpen en in te voeren. Als 2^e graads docent Wiskunde kunt u in september bij de HAN van start met de opleiding:

Master Leraar Wiskunde

- Uitbreiding vakkennis op basis van de landelijke kennisbasis
- Vakdidactische vernieuwingen in het V.O. per 2015
- Praktijkgericht onderzoek
- Masterproject: vernieuwing van leerarrangementen bovenbouw havo/vwo

Voor brochure en verdere informatie

T (024) 353 06 00 E masters@han.nl

► HAN

www.han.nl/masters

MASTERPROGRAMMA'S

Laat u inspireren! HAN Masterprogramma's biedt een brede keuze aan NVAO-geaccrediteerde masteropleidingen. Opleidingen in directe verbinding met de praktijk. De kans om u op masterniveau te ontwikkelen en u voor te bereiden op professioneel leiderschap. Ondersteund door HAN-lectoraten en ervaren docenten uit het werkveld. HAN: landelijk de beste aanbieder van hbo-masteropleidingen! (Keuzegids Masters 2011)

MAAK GEBRUIK
VAN DE
LERARENBEURS!
Vraag hem aan
1 april - 13 mei

APS-Exact

Wiskunde ICT-conferentie: onderzoek en praktijk

Maandag 11 april 2011, Utrecht

- Welke mogelijkheden zijn er voor de wiskunde-docent om ICT in de breedste zin van het woord in te zetten?
- Wat is de huidige stand van zaken en de nieuwste ontwikkelingen op ICT-gebied?

Deze en nog meer onderwerpen komen uitgebreid aan de orde op deze wiskunde ICT-conferentie, georganiseerd door APS en het Freudenthal Instituut.

'Geogebra in de wiskundeles', 'Wiskunde op het digibord', 'Wiskunde zonder boek', 'Feedback in digitale wiskundeomgevingen', 'Wikiwijs: wat kan Wikiwijs voor wiskunde betekenen?' en 'Oefenen met de computer: efficiënt en/of effectief?' zijn slechts

enkele van de negentien werkgroepen die u in het middag- en avondprogramma kunt volgen.

Meer informatie over deze conferentie vindt u op onze site: www.aps.nl/exact > Activiteitenagenda. U kunt zich daar tevens aanmelden.

Wij heten u op deze conferentie van harte welkom!

informatie

APS-Exact
Postbus 85475
3508 AL UTRECHT
Tel.: 030 28 56 722
voortgezetonderwijs@aps.nl
www.aps.nl/exact



leren
inspireren

MEDEDELING /

CENTRALE EXAMENS 2011, 1E TIJDVAK

Rooster wiskunde

	CE
vwo B	woensdag 18 mei
(*)	13:30 - 16:30
havo B	donderdag 19 mei
	13:30 - 16:30
vmbo KB	maandag 23 mei
vmbo GL/TL	13:30 - 15:30
vwo A / C	dinsdag 24 mei
(*)	13:30 - 16:30
havo A	woensdag 25 mei
	13:30 - 16:30
vmbo BB	donderdag 26 mei
	9:00 - 10:30

(*) De centrale examens in 2011 volgens de programma's oude profielen vwo (2e jaar bezemkandidaten) worden afgenomen door de staatsexamencommissie.

(Bron: www.examenblad.nl – 12 juli 2010)

Examenbesprekingen

Het schema van de door de NVvW georganiseerde regionale examenbesprekingen staat vanaf 1 april a.s. op de website van de vereniging (www.nvvw.nl) en zal ook worden opgenomen in *Euclides* 85(6).

Website – Examenforum

Zie voor actuele informatie de website van de NVvW (www.nvvw.nl).

TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Een nieuwe visie vanuit meerdere wiskundige invalshoeken

Elke leerling leert op een andere manier.

De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

www.education.ti.com/nederland

De nieuwe
TI-Nspire™ CX kleuren
handheld is er!

Voor meer informatie bel
0800 48 42 27 37
of mail naar
ti-cares@ti.com

NU MET
KLEURENSCHERM,
EIGENPLAATJES
DOWNLOADEN
EN OPLAADBARE
BATTERIJ



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

De tien valkuilen van digitaal toetsen

Ervaringen op de NHL Hogeschool te Leeuwarden met het digitale toetssysteem Maple T.A. (Testing & Assessment) zijn al eerder in *Euclides* beschreven.^[1, 2] De ontwikkelingen op het gebied van digitaal toetsen staan niet stil en het wordt daarom weer eens tijd de stand van zaken te bekijken.

Het geavanceerde toetssysteem Maple T.A. is bij uitstek geschikt voor het toetsen van kennis en vaardigheden op het gebied van wiskunde en technische vakken door de vele mogelijkheden van randomisering (ook tekstuele randomisering) en gebruik van formules en grafieken. Het systeem kan echter ook prima bij andere vakken worden ingezet met even zoveel mogelijkheden. Steeds meer wordt er gebruik gemaakt van dit toetssysteem, dat onderhand ook al weer een flink aantal verbeteringen heeft ondergaan en een rijke omgeving biedt om digitaal te toetsen.

Omdat ik de laatste tijd aandacht en ondersteuning biedt aan veel docententeams, niet alleen van de NHL, maar ook in het hele land, die het digitaal toetsen met Maple T.A. ter ondersteuning van hun lessen zijn gaan toepassen, kan ik ook een aantal valkuilen noemen waardoor het succes ervan vaak wordt teniet gedaan. Frustratie bij docenten en studenten ligt dan op de loer. Op hogescholen en universiteiten wordt het digitaal toetsen steeds vaker ingezet om het studeren te stimuleren en het leerproces te sturen, en niet alleen om de docent te ontlasten. Het vereist echter wel een investering die zichzelf ruimschoots terugverdient in tijdsbesparing, betere resultaten van studenten en een plezieriger omgang met studenten.

In dit artikel wordt voornamelijk gesproken over formatieve toetsing die het onderwijsproces ondersteunt. Het gaat hierbij niet om de beslissing een student te laten slagen of zakken, maar om de student door het curriculum heen te leiden en hem te leren kritisch met zijn eigen leerproces om te gaan. Ook is het heel goed mogelijk om het traject naar de zogenoemde competentietoets te ondersteunen met kennis- en vaardigheidstoetsen waarbij feedback en

begeleiding een grote rol spelen.

Het hoeft hier niet speciaal over het onderwijs in het hbo in het vak wiskunde te gaan. De ervaringen kunnen prima vertaald worden naar elk ander vak in elke andere onderwijssector.

Valkuil 1 – De ingangstoets

Het afnemen van een digitale summatieve toets aan binnenkomende studenten, zonder voorafgaande oefening met het digitale toetssysteem, is de allereerste valkuil. Vaak weten we als docent de uitslag toch al van zo'n ingangstoets en de studenten krijgen bij een onvoldoende score meteen een slecht gevoel, ook al geeft dit veel informatie over hun hiaten en krijgen ze er nog geen punten voor. Het is daarna vrij lastig om de studenten weer enthousiast te krijgen voor het vak en vervolgens het digitaal oefenen op te pakken. Geen ingangstoets dus, ook niet schriftelijk, maar liever een *ingangstraject* met afsluitende eindtoets, al of niet digitaal. Deze afsluitende eindtoets kan prima digitaal als diagnostische toets afgenomen worden waarbij gekeken wordt voor welke onderwerpen de student (nog) niet scoort na het doorlopen van het ingangstraject. Het Maple T.A. toetssysteem biedt veel mogelijkheden wat betreft de analyse van zo'n eindtoets. Vervolgens kan er naar aanleiding van de uitslag nog een vervolgtraject worden aangeboden.

Valkuil 2 – Uitgebreide oefentoetsen

Vaak zien we dat de digitale oefentoetsen die klaargezet worden voor de studenten, te lang en te uitgebreid zijn. Is de score niet voldoende, dan gaat zo'n student niet zo gauw opnieuw de toets doen als deze te veel tijd kost. Beter is het om korte toetsen in de vorm van een 'ketting' aan te bieden. Dat wil zeggen, bouw het op en leg een

loopplankje met korte toetsen (15 minuten) in een bepaalde volgorde en maak het steeds wat moeilijker. Door het systeem kan afgedwongen worden dat de student pas de volgende toets kan beginnen als de vorige voldoende is afgesloten. De mogelijkheden voor randomiseren en feedback binnen het toetssysteem komen hier fantastisch tot hun recht, vooral voor wiskunde. Handig is het om de toetsen te nummeren, zodat studenten weten hoe ver ze al op de 'ladder' gevorderd zijn. Maak de toets niet te lang in de tijd. Calculeer ongeveer 15 minuten.

Valkuil 3 – Onbeperkt aantal pogingen aanbieden

Zoals al eerder in het artikel van juni 2008^[2] naar voren is gekomen, blijkt na vele jaren ervaring nog steeds dat bij het aanbieden van oefentoetsen het ideale maximum aantal pogingen voor zo'n toets precies 4 is. Na 4 keer een onvoldoende gehaald te hebben voor een toets moet de student beslist gestopt worden om te voorkomen dat er misconcepties ontwikkeld worden. Er moet dan door de docent of assistent eerst gekeken worden wat er fout gaat. Het toetssysteem biedt mogelijkheden om aanvullende feedback te geven. Nog beter is het natuurlijk om rechtstreeks met de student samen te gaan kijken in het schrift wat er precies aan de hand is, en vervolgens kan er dan altijd nog een extra poging opgezet worden. Aardig is het om te zien dat veel docenten dit maximum aantal in te stellen pogingen overnemen en dezelfde ervaring hebben met dit 'magische getal 4': het 'frustratieomslagpunt'.

Als de student van te voren weet dat er maximaal 4 pogingen voor een toets gegeven worden, gaat hij ook veel beter om met het systeem en wil eerst nog wel even zijn licht opsteken in het lesmateriaal na één of twee mislukte pogingen.

Valkuil 4 – Een 6 is voldoende

Het criterium voor het al of niet slagen voor een oefentoets moet niet te laag zijn.

Als een docent genoeg neemt met een score van 60%, dan is dat veruit te laag om aan te nemen dat de stof begrepen is en de vaardigheden onder de knie zijn. Slordigheidfouten moeten eruit geslepen worden en de student leert zorgvuldig werken. Het overslaan van 'moeilijke vragen' wordt minder in de hand gewerkt. Ook bij vakken waarbij gebruikgemaakt wordt van digitale multiple choice-toetsen, is er kans om nog punten te scoren met gokken en is 60% score bij een dergelijke kennistoets helemaal geen garantie voor het beheersen van de stof. Het is verbazend hoe snel studenten het criterium van een minimumscore van bijvoorbeeld 80% accepteren. Het voordeel hiervan is ook dat bij de eindtoetsing, waarvoor wel geldt dat een 6 een voldoende is, er over het algemeen hoger gescoord wordt dan voorheen toen het leerproces nog niet begeleid werd met digitale toetsen. Ook werkt het zeer motiverend als studenten in hun cijferlijstje hoge 'cijfers' zoals achten, negens en tiens zien staan. Voordeel is ook dat als een student bijvoorbeeld 80% scoort, dat hij dan nog beslist wel wil zien wat die ene fout dan is geweest. Vertaal de score ook altijd naar een cijfer, dus geef 10 punten voor een oefentoets, zodat bij een score van 80% een 8 in de lijst komt te staan, wat een goed gevoel geeft.

Valkuil 5 – De analyse van gemaakte toetsen

Het is niet zo dat men er bij digitaal toetsen geen omkijken meer naar heeft. Het is belangrijk om steeds goed naar de analyse van de gemaakte toetsen te kijken op itemniveau. Het bepalen van de moeilijkheidsgraad van de vragen kan altijd nog een *fine tuning* ondergaan na het analyseren van de toetsresultaten op itemniveau. Op welke items wordt slecht gescoord en waaraan ligt dat? Over welke items worden veel vragen gesteld, en zijn deze items in verhouding niet te moeilijk en passen ze in de stroomlijn van de achtereenvolgens aangeboden oefeningen? Soms is het gehanteerde taalgebruik te onbekend voor de studenten en moeten items herschreven worden of met goede hints en eventueel feedback aanvuld worden.

Wij hebben gemerkt dat veel voor studenten onbekende begrippen, niet alleen bij het vak wiskunde, maar ook bij andere vakken, soms een beletsel vormen om toetsen goed te maken. Een tip zou kunnen zijn om in de stroomlijn van de oefentoetsen af en toe een 'taaltoetsje' op te nemen met invulvelden waarin de juiste woorden ingevuld moeten worden in de

aangeboden zinnen. Het kan voor elk vak goed werken, ook voor wiskunde. Het dwingt studenten om even stil te staan bij de vaak voor hen onbekende begrippen en deze op de juiste manier in hun verband te gebruiken. Denk bij wiskunde bijvoorbeeld aan begrippen als factoren, coëfficiënten, ontbinden, termen, machten, exponenten, functies, vergelijkingen.

Valkuil 6 – Vrijblijvendheid

Toen we pas begonnen met het aanbieden van digitale oefeningen, zijn we met open ogen in de valkuil van de vrijblijvendheid gestapt. De goede studenten gingen vrolijk oefenen en de studenten die het juist nodig hadden, deden dat niet. Het gat tussen de goede en de minder goede studenten werd daardoor steeds groter. Toetsen is toch altijd vrij bedreigend en bij het halen van de eerste onvoldoende is de aardigheid er gauw af.

Digitaal toetsen vergt een strakke aanpak. Het verplichtstellen van het oefentraject is snel geaccepteerd en omdat het vruchten afwerpt, is geen enkele student er tegen. Voorwaarde is wel dat het mogelijk moet zijn om te differentiëren naar niveau en steilheid van de leercurve. In het verleden hebben we ons daarop beslist verkeken en kregen we veel klachten toen we overgingen tot de verplichting om alle oefeningen te doen en er minimaal 80% op te scoren. Goede studenten vonden al die oefening terecht niet zo nodig, en minder goede studenten kregen vaak nog te weinig oefening en vonden alles veel te moeilijk. Op een zeker moment hebben we toen twee routes aangeboden waarbij de studenten in de snelle route met zevenmijlslaarzen door de oefeningen heen kunnen gaan en de rest van de studenten doet alle toetsen. Vorig jaar zijn we zelfs met drie routes van start gegaan. Een langzame stroom waarin alle oefentoetsen verplicht zijn, waar ook iets lager ingezet wordt met het niveau en waarbij een vrij vlakke leercurve gerealiseerd wordt met af en toe een pas op de plaats voor oefening. Daarbij nog een reguliere stroom met een iets steilere leercurve en een snelle stroom waar alleen de eindtoetsjes van elk onderwerp verplicht zijn. Aardig is om te melden is dat studenten zichzelf mogen indelen en dat ze daarover zeer tevreden zijn. De praktijk is dat ruim 50% van de studenten kiest voor de langzame, in hun ogen veilige route, wat wel een beetje een misleidende naam is, want iedereen moet natuurlijk wel op hetzelfde ogenblik klaar zijn met alle oefeningen voor de datum van de eindtoetsing. In de eerste drie weken van de

cursus kunnen studenten zelf nog switchen, maar na drie weken weten ze heel goed in welke route ze zich het prettigst voelen. Bewegingen naar boven én naar beneden komen beide voor. Eventueel kan op verzoek later nog geswitcht worden, maar dan moet de docent of assistent er aan te pas komen. Eenmaal gekozen, moeten alle toetsen die bij de gekozen route horen, gehaald zijn alvorens een 'toegangskaartje' te kunnen krijgen voor de eindtoets. Dit cursusjaar hebben we zelfs vier stromen aangeboden; namelijk nog een extra langzame route. Het aantal van vier routes hebben we nu weer teruggedraaid tot drie en dat is naar ons idee het meest ideaal zoals het er nu voor staat. Digitaal toetsen valt en staat met de verplichting én een strakke aanpak én de mogelijkheid tot differentiëren.

Valkuil 7 – Bonuspunten

Bij veel docenten is het gebruikelijk om bonuspunten uit te delen als studenten zich extra inspannen voor hun vak. Bij het digitaal gestuurde oefentraject is het belangrijk om geen enkele (bonus)punt uit te delen. Wij zijn jaren geleden grandioos in deze valkuil getrapt. De kans op fraude is daardoor vrij groot. Dus geen bonuspunten meer, maar wel de verplichting om alles af te hebben, passend bij de leerroute! De praktijk is nu dat studenten allemaal hun eigen toetsen toch wel maken omdat ze bij de eindtoetsing zeker willen zijn van zichzelf en goed voor de dag willen komen. Met de mogelijkheid om te randomiseren binnen het toetssysteem is het ook heel goed te doen dat studenten geen antwoorden van elkaar overnemen. Het is verbazend om te zien hoe graag ze toch mee willen doen met de eindtoetsing zonder vooraf punten te krijgen. Het aantal geslaagden voor de eindtoetsing ligt nu dan ook rond de 90%.

Valkuil 8 – Tijdslimiet op de toets

In het systeem is het mogelijk een tijdslimiet in te stellen voor een toets. Voor digitale eindtoetsen is dat ideaal. Vooraf moet goed gecalculiseerd worden hoe lang een student maximaal aan de eindtoets mag werken. Tijdens de toets verschijnt constant de resterende tijd in beeld en als de tijd om is, kan er alleen nog maar geklikt worden op de *grading*, waarna vervolgens de score tevoorschijn komt. Ook voor tussentijdse diagnostische toetsen, in een beschermde omgeving met surveillance erbij, is het prima om een tijdslimiet in te stellen. Echter bij de oefentoetsen die de student in zijn eigen tijd maakt, moet om

verschillende redenen *absoluut géén tijds-limiet* ingesteld worden. Het heeft er bovenal mee te maken dat de studenten deze oefentoetsen doen in eigen tijd. Dat wil zeggen, ze zitten ergens waar het erg druk is, of ze worden op zeker moment gestoord door telefoon of wat dan ook. Het afraffelen van de toets of slordigheden door haast leiden allemaal tot frustratie, omdat immers minstens een score van 80% vereist wordt. Het belangrijkste is dat frustratie voorkomen wordt en een veilige omgeving geboden wordt.

Het mooie van het Maple T.A.-systeem is, dat als er geen tijdslimiet op een toets gezet is, er altijd halverwege de toets mee gestopt kan worden. Alle ingevulde antwoorden blijven gewoon staan en men kan later de toets verder afmaken. Ook als de student op het eerste gezicht merkt dat hij niet klaar voor de toets is, kan eerst het lesmateriaal bestudeerd worden. Later kan de toets dan afgerond worden. In alle rust werkt de student aan het verhogen van zijn niveau en heeft tijd om vragen te stellen en het lesmateriaal nog eens te bestuderen. Dus is het devies: *géén tijdslimiet* op oefentoetsen zetten.

Valkuil 9 – De communicatie

Digitaal toetsen ter ondersteuning van een cursus kan tijdsbesparend werken voor docenten. Echter het is een valkuil om er vanuit te gaan dat alles zichzelf dan wel redt. Inderdaad, stapels nakijkwerk behoren tot het verleden, maar er komt iets anders voor in de plaats. De communicatie met de student moet een veilige omgeving creëren om frustratie te voorkomen en kan op verschillende manieren gebeuren. Laat de studenten als het enigszins kan niet gebruik maken van e-mail, want dan is het end zoek. Ook dat is een valkuil. Meestal is er een digitale leeromgeving beschikbaar die het mogelijk maakt om in de ‘digitale klas’ vragen te stellen. Bij een draaiende cursus moet er op gezette tijden naar de vragen gekeken worden om goede voortgang te boeken. Tijdens de les kunnen moeilijke opgaven behandeld worden en de schriften en vorderingen gecontroleerd. Zorg dus dat de communicatielijn tussen studenten, docenten en eventuele assistenten duidelijk en open is en op gezette tijden plaatsvindt.

Valkuil 10 – De controle op het omgaan met het toetsysteem

Het is verstandig om in het begin van de cursus extra begeleiding te zetten op het omgaan met het toetsysteem. Dan krijgen studenten snel de juiste slag te pakken. Laat studenten kritisch naar de uitslag van de

toetsen kijken. Geef daarom in het oefen-traject ook alle mogelijke feedback vrij met eventueel aanwijzingen en tussenstappen. Niet alleen studenten moeten goed met het toetsysteem leren omgaan, maar zeker ook de docenten en assistenten moeten niet in de valkuil stappen dat ze denken dat alles vanzelf gaat.

Het is mogelijk om in het systeem te kijken welke studenten veel pogingen verbruiken voor elke oefening. Deze studenten moet geadviseerd worden in een langzamere route plaats te nemen of er moet gekeken worden of hun werkwijze wel de juiste is.

Als studenten door hun vier pogingen van een oefentoets heen zijn en nog niet gescoord hebben, moeten docenten en assistenten niet ‘zomaar’ een nieuwe poging vrijgeven zonder eerst grondig te kijken hoe het komt dat er vier keer niet gescoord wordt. Ook is het belangrijk dat de docent of assistent de discipline opbrengt om bij een herbeoordeling feedback erbij te geven, zodat studenten niet op het verkeerde been gezet worden dat iets ‘goed gerekend’ wordt zonder verder commentaar als iets niet helemaal goed is.

Als ten slotte op de eindtoets niet gescoord wordt, is het belangrijk om te kijken hoe dat komt, immers de student heeft wél het hele traject doorlopen. De oorzaak van het slecht scoren is in dergelijke gevallen altijd op te sporen en heeft vaak te maken met het omgaan met het toetsysteem.

Mogelijke diagnoses zijn: niet goed naar de feedback kijken, niet kritisch zijn op gemaakte fouten, de vraag niet goed lezen, de gemaakte opgaven (bij wiskunde bijvoorbeeld) staan op klad in plaats van een schrift waarin niet duidelijk de fouten worden aangestreept en verbeterd, de student zit in de verkeerde route waardoor er te weinig geoefend is en aan de aandacht van de docent ontglipt is, de student is ‘teveel geholpen’ tijdens het maken van de oefeningen. En zo zijn er nog wel een paar dingen te bedenken waardoor het ondanks het succesvol doorlopen van het traject bij de eindtoetsing niet lukt.

Tips voor wiskunde en aanverwante vakken

- Voor wiskunde en technische vakken verdient het de voorkeur om de summatieve eindtoets schriftelijk af te nemen, omdat dan ook gekeken kan worden naar de manier waarop de student tot het antwoord komt.
- Alle opgaven helemaal tot het eind uitgewerkt in een schrift (niet op klad). En na afsluiten van de toets gaat de student het schrift zelf nakijken en

beoordelen. Docenten en assistenten controleren de schriften.

- Beperking van het gebruik van de reken-machine is heel goed via het systeem af te dwingen door gebruik te maken van exacte antwoorden of het invoeren van de berekening zelf.
- De lay-out van de vraag die op het scherm verschijnt, verdient veel aandacht.
- Ook is belangrijk om goed aan te geven hoe het antwoord ingevuld moet worden.

Noten

Eerder verschenen artikelen van Metha Kamminga over Maple T.A.:

- [1] *Digitaal Toetsen met Maple T.A.* In: *Euclides* 81-6 (april 2006); p. 286.
- [2] *Digitaal toetsen vraagt een strakke aanpak.* In: *Euclides* 83-7 (juni 2008); p.350.

Over de auteur

Metha Kamminga is ongeveer 25 jaar docent aan het Instituut Techniek van de NHL Hogeschool te Leeuwarden en geeft cursussen Maple T.A. aan hogescholen en universiteiten in Nederland en België. Zij is bereid informatie te geven over het toetsysteem Maple T.A. Meer informatie op haar website (www.tech.nhl.nl/~kamminga). E-mailadres: kamminga-metha@kpnmail.nl

EEN VERSLAG VAN EEN PRAKTISCHE OPDRACHT OVER WISKUNDE EN WATER

Jacques Jansen, wiskundedocent aan het Strabrecht College in Geldrop, doet verslag van zijn ervaringen en die van zijn leerlingen met de praktische opdracht wiskunde en water; een opdracht over waterverbruik waarin het toetsen van praktische en algemene vaardigheden centraal staat. Hij heeft samen met Ruud Stolwijk, die verbonden is aan Cito, deze praktische opdracht ontwikkeld.



De sectie wiskunde van het Strabrecht College in Geldrop organiseert eenmaal per jaar een wiskundedag voor de leerlingen van het gehele 5-vwo: wiskunde B-dag, wiskunde Olympiade en nu ook wiskunde C-dag. Voor wiskunde C kozen zij de opdracht *Nederland leeft met water*. De opdrachten voor wiskunde A en B worden door het Freudenthal Instituut (in samenwerking met een aantal docenten) ontwikkeld. De praktische opdracht *Nederland leeft met water* is een Cito-product.

De tien wiskunde C-leerlingen hebben tijdens de wiskundedag hard gewerkt aan de opdrachten. Zij begonnen om 9.00 uur 's morgens met een aantal gesloten opgaven. In de loop van de dag werden de opgaven steeds meer open. Na de lunch volgde een buitenopdracht: in groepen van vier gingen de leerlingen naar een zelf uitgekozen supermarkt om daar een onderzoek te verrichten. Hoe dat in zijn werk ging, daarover leest u verderop in dit artikel meer.

De resultaten werden verwerkt in een

Naast de eigenlijke wiskundedag (van 9.00 tot 16.00 uur) waren er nog zes lessen nodig inclusief presentatie om het project af te sluiten. In plaats van één werkdag en later zes lessen kan er ook voor gekozen worden om het hele project in lesvorm te doen. De buitenopdracht valt dan in hun 'eigen tijd'.

Een van de juwelen van de wiskunde is het regelmatig twintigvlak; *zie figuur 2*.



Dit staat symbool voor water. Maar wat heeft wiskunde eigenlijk met water te maken?

- Kun je met behulp van wiskunde meer inzicht krijgen in het waterverbruik in Nederland?
- Is er voor wiskunde geschikte waterliteratuur?
- Is het onderwerp water geschikt voor echte realistische en betekenisvolle wiskunde?

- Hoeveel liter water verbruikt een Nederlander gemiddeld per dag?
- Hoe zijn de waterdata tot stand gekomen?
- In welke verhouding staat het waterverbruik thuis tot het totale waterverbruik in Nederland?

In de opdracht is voor leerlingen uiteraard allerlei relevante cijfermatige informatie opgenomen. De belangrijkste bron is een rapport van de Vereniging van waterbedrijven in Nederland (Vewin; www.vewin.nl) dat om de drie jaar verschijnt. Voor eventuele verdere verdieping is nog een uitgave over *De Nederlandse watervoetafdruk* (www.watervoetafdruk.org) opgenomen, waarin wordt geschat hoeveel water wordt verbruikt voor de productie van allerlei dagelijks gebruikte artikelen zoals bijvoorbeeld rijst, aardappelen of koffie. Verder verschijnen er nog steeds maar meer interessante waterzaken. Zo verscheen er in april 2010 van *National Geographic* een themanummer 'water' met een prachtige poster met nog meer waterequivalenten, waardoor **tabel 1** uitgebreid kan worden.

Bij het werken aan de opdracht blijkt dat de wiskundig niet onbelangrijke vaardigheid 'schatten' soms wordt onderschat. Dit blijkt wel uit de beantwoording van de volgende vraag bij de groep Veerle, Manouk en Nabila.

drank	inhoud in ml	aantal liters water
glas bier	250	75
glas melk	200	200
kopje koffie	125	140
kopje thee	250	35
glas wijn	125	120
glas appelsap	200	190
glas jus d'orange	200	170

tabel 1

Bereken hoeveel liter water alle individuele Nederlanders op een door jou gekozen dag gebruiken. Visualiseer dat aantal liters door een geschikte eenheid te bedenken. Neem hiervoor bijvoorbeeld een zwembad uit jouw omgeving (of neem de inhoud van het 50-meterbad in het Pieter van den Hoogenband Zwembadstadion in Eindhoven). Je kunt ook bijvoorbeeld de inhoud van je klaslokaal als eenheid nemen, of iets anders

Citaat uit het werkstuk van de drie meisjes

Bij vraag 7 hebben we het gemiddeld verbruik per persoon per dag in 2009 berekend, wanneer je er van uitgaat dat de procentuele stijging hetzelfde blijft als in de periode van 2004 t/m 2007. Die procentuele verandering was 2,99%. Er kwam afgerond 139,28 m³ uit. Op de site van CBS hebben we gezien dat er nu 16.574.067 mensen zijn. Van heel Nederland is het dus $16.574.067 \times 139,28 = 2.308.436.052 \text{ m}^3$. Dat is dus $2.308.436.052 \times 1000 = 2.308.436.052.000$ liter.



figuur 3 Camp Nou

Wij hebben voor het voetbalstadion Camp Nou in Barcelona gekozen om het waterverbruik van heel Nederland op een dag te visualiseren. De oppervlakte van het stadion is 55.000 m². De hoogte van het stadion is 48 meter.

De inhoud is $48 \times 55.000 = 2.640.000 \text{ m}^3$. $2.308.436.052 : 2.640.000 = 874,4075955$. Dat is afgerond 874 stadions gevuld met water.

vast voedsel	gewicht in gram	aantal liters water
sneetje brood	30	40
sneetje brood met kaas	30+10	90
aardappel	100	25
appel	100	70
zak chips	200	185
ei	40	135
hamburger	150	2400
tomaat	70	13
sinaasappel	100	50
rijst	1000	3000
wheat	1000	1350
beef	1000	16000
mais	1000	900

Bij de bovenstaande uitwerking is er voor de docent voldoende stof om met de leerlingen over na te praten. 874 stadions? Is dat niet erg veel? Hoe kwamen ze aan het getal 139,28 m³? Welke vorm heeft het stadion?

Verborgen water: een buiten-opdracht

Ongetwijfeld is het begrip 'ecologische voetafdruk' bekend, maar er bestaat ook een 'watervoetafdruk'. Deze geeft aan hoeveel water er nodig is bij de productie van allerlei goederen. Serveer bijvoorbeeld een biefstuk, en je dient ook 16.000 liter water op. Kopje koffie? Dat is dan 140 liter, genoeg om een doorsnee badkuip te vullen. Trek een spijkerbroek aan en je zwemt eigenlijk in 11.000 liter water. In de opdracht komt deze kwestie als volgt aan bod:

Hoeveel water verbruikt je per dag, als je al het water dat nodig was om jouw eten te verbouwen en je gebruiksgoederen (bijvoorbeeld een T-shirt) te produceren bij elkaar optelt?

En verderop, in een wat meer open vraagstelling:

Ga eens bij de supermarkt langs en realiseer je hoeveel water nodig is voor je boodschappenlijst. Maak een schatting van de hoeveelheid water die nodig is voor jouw boodschappen of de wekelijkse boodschappen van je verzorgers. Zie hiervoor ook **tabel 1**.

Citaat uit een werkstuk

We zijn bij de supermarkt ALDI geweest om aan iemand te vragen of wij zijn/haar boodschappenlijstje mochten hebben om zo te kijken wat een gemiddeld persoon in Nederland aan boodschappen koopt en hoeveel water er voor wordt gebruikt. Wij kwamen een oudere aardige vrouw tegen waarvan wij haar boodschappenlijstje mochten gebruiken voor ons onderzoek. We

gingen haar uitleggen wat ons onderzoek inhield en ze reageerde enthousiast. Ze deed één keer per week boodschappen en op haar boodschappenlijstje hebben wij ons onderzoek gebaseerd. Van sommige producten wisten we niet hoeveel water nodig was voor de productie.

In tabel 2 (op pag. 212) staat het boodschappenlijstje van de mevrouw die we in de ALDI tegenkwamen. Alles bij elkaar is het verbruik: 22.654 liter. Dus die mevrouw verbruikt ongeveer per week 22.654 liter water om haar etenswaren te produceren.

Voor de docent levert dit weer in de volgende les voldoende gespreksstof op, zowel in de les als bij de evaluatie achteraf. Hoe hebben de leerlingen gewerkt met de waterequivalenten? Hebben ze kritisch gekeken naar hun berekende data? Hoe ga je om met producten waarvan de waterequivalenten onbekend zijn.

Terugblik

Aan het eind van de opdracht is er door de leerlingen geëvalueerd op wat ze tijdens het maken van de opdracht ervaren hebben. Een citaat uit het werk van drie meisjes (met een beetje wiskundewatervrees) uit 5-vwo wiskunde C:

Wiskunde dag. Een dag waar wij heel erg tegenop zagen. We zijn met z'n drieën geen enorme wiskundewonders, maar we hebben die dag toch heel hard gewerkt. Gewerkt aan onze opdrachten, naar de supermarkt geweest en we kregen lekkere dingen tussendoor, wat een fijne afwisseling was. Het is ons uiteindelijk erg goed bevallen! Het viel allemaal reuze mee en eigenlijk vonden we het ook wel heel leuk om er aan te werken!

Deze afgelopen weken hebben we gewerkt aan ons werkstuk over 'Water'. De opzet en het doel was dat je het waterverbruik van mensen per persoon per dag moest berekenen. Dit omtrent ook het gebruik van de vaatwasser, dingen die je eet en inkoopt per dag (want daar zit natuurlijk ook een hoop water in, waaronder water voor het produceren ervan) en natuurlijk douchen, handen wassen, water drinken en je kleding. Want daar zit ook water in.

We hebben opdrachten gemaakt, onderzoeken verricht naar alles wat met water te maken heeft. Wij hebben berekeningen gemaakt en conclusies getrokken.

We hebben berekend en opgezocht hoe hoog het huishoudelijk waterverbruik is van de gemiddelde Nederlander per dag. Dit is 127,5 liter (Dit kan je zien in tabel 3, uit rapport Vewin)! Realiseer je dan wel dat er dus in een gezin van bijvoorbeeld 4 mensen 510 colaflessen er per dag doorheen gaan! Wij vonden dit ook erg opvallend, wij hadden dit grote

product	hoeveel in gram	aantal producten	hoeveelheid water
meergranen brood (sneetjes)	30	20	80
aardappelen (zak)	100	15	275
eieren (pak)	40	10	1350
tomaten	70	10	130
rijst (pak)	1000	1	3000
appels (zak)	100	12	420
zak chips (zak)	200	1	185
rundvlees	1000	1	16000
kop thee	250	3	105
kop melk	200	3	1000

tabel 2

aantal nooit verwacht. 2.308.436.052.000 liter water (commentaar docent: 2.176.350.377 liter), hebben wij uitgerekend in ons werkstuk, verbruikt héél Nederland per dag! Dit is natuurlijk onbegrijpelijk veel. Je kunt je er niet eens een voorstelling van maken. Moet je dan voorstellen hoeveel water er gezuiverd moet worden om iedereen te voorzien van schoon drinkwater!

Er zijn natuurlijk oplossingen. Zoals een waterbesparende douchekop, want dat zorgt voor vermindering van je waterverbruik per dag. Laat bijvoorbeeld de kraan niet aanstaan als je je tanden aan het poetsen bent en zorg dat je een minuutje minder douchet dan normaal. Dit scheelt alweer 10 liter. Zorg ook dat je pas echt je kleren in de was doet als het écht vies is. Dit scheelt een hoop. Neem bijvoorbeeld het koken. Hierbij heb je erg veel water nodig wat ongetwijfeld verminderd kan worden.

Ook voor wiskunde B en wiskunde D

Ook voor leerlingen met wiskunde B (of zelfs wiskunde D) is door Cito een praktische opdracht ontwikkeld. Waar de A/C-opdracht zich richt op watergebruik thuis, heeft de B-variant de insteek *Waterhuishouding*: tijdens de opdracht krijgen leerlingen inzicht in de afvoer en toevoer van water in Nederland. Hierbij wordt gewerkt met soms redelijk complexe formules, waarbij de wiskunde over het algemeen van een duidelijk hoger niveau is dan in de A/C-variant.

Formules over begrippen als debiet, hydraulische straal, stroomsnelheid en waterlozingscapaciteit komen aan de orde, waarmee niet alleen gerekend moet worden, maar in een aantal gevallen moet de formule ook (algebraïsch) worden afgeleid (bijvoorbeeld de formule

$$R = \frac{130h + 0,6h^2}{130 + 2,3h}.$$

Ook wordt de zogeheten QH-relatie onderzocht, een relatie van de vorm $H = a \cdot \ln Q + b$ tussen de waterhoogte H en de afvoer Q . Er is in de opdracht verder ook regelmatig de mogelijkheid te werken met Excel.

Ook hier is aan het eind van de opdracht een aantal suggesties voor vervolg opgenomen (bijvoorbeeld de stijging van de zeespiegel), waaruit naar believen door de docent en/of de leerlingen gekozen kan worden.

Organisatie en aanbevelingen

Het is wenselijk om als docent zelf de groepen in te delen om er voor te zorgen dat de groepen gelijkwaardig zijn aan elkaar. De voorkeur ligt bij groepen van drie of vier personen.

Alle groepen werken met dezelfde opdrachten, uitgezonderd een aantal onderzoekopdrachten die suggesties worden genoemd. Hier kunnen de leerlingen (of de docent) zelf keuzes maken.

Het is belangrijk dat leerlingen op verschillende momenten hun voorlopige producten (via bijvoorbeeld e-mail) laten zien. Tussentijds kun je dan als docent nog commentaar geven, of de groepen bijsturen. Tijdens of na een presentatie van een groepje leerlingen is het raadzaam om de getoonde cijfers uit te laten leggen en soms goed door te vragen.

Info

De map *Nederland leeft met Water, wiskunde voor havo en vwo bovenbouw* kunt u bestellen bij Cito, via:
http://www.cito.nl/nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/toetsen_thema/alle_producten.aspx

Over de auteurs

Jacques Jansen is wiskundeleraar op het Strabrecht College in Geldrop.
 E-mailadres: jacques.jansen@wx.nl
 Ruud Stolwijk werkt als toetsdeskundige bij Cito.
 E-mailadres: ruud.stolwijk@cito.nl



**Hebben toetsing, kwaliteitsborging en het niveau
in uw vakgebied uw interesse?**

***Werkt u vanaf komend schooljaar als vaksectievoorzitter
aan de centrale examens wiskunde A en C vwo en havo?***

Het College voor Examens (CvE) werkt onder de verantwoordelijkheid van de minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap en heeft vier werkterreinen: de centrale examens in vwo, havo en vmbo, de staatsexamens VO, de staatsexamens NT2 en de centrale examens taal en rekenen MBO.

Op het eerstgenoemde werkterrein regisseert het CvE de werkzaamheden rondom de centrale examens vwo, havo en vmbo. Het CvE heeft daarbij drie hoofdtaken:

- vaststellen van de centrale examens;
- specificeren van de exameneisen in syllabi voor het centraal examen;
- verder ontwikkelen van de centrale examens.

De examens worden geproduceerd door Cito. SLO is betrokken bij de syllabi.

Onder het college functioneren een bureau, syllabuscommissies en vaksecties. De vaksectie wiskunde A en C bestaat uit twee leden en een voorzitter. De leden zijn werkzaam als vakdocent wiskunde A en C en geven les in de examenklas. De leden zijn voorgedragen door de vakvereniging en door de onderwijsvakbonden.

Met ingang van **1 augustus 2011** zijn wij op zoek naar
een voorzitter voor de **vaksectie wiskunde A en C havo/vwo**
eventueel kan deze functie worden opgesplitst (max 0,2 fte)

- Taken:** vaststellen van de opgaven van de centrale examens wiskunde A en wiskunde C havo en vwo;
adviseren van het bureau over syllabi, examens en normering;
leiding geven aan de vaksectie wiskunde A en C.
- Vereist:** u bent deskundig op het vakgebied;
u kent het onderwijs waarin het examen wordt afgenomen;
u bent niet betrokken bij leerboeken en ook anderszins onafhankelijk.
- Positie:** docent in het vak in het hoger onderwijs of een eerstegraads lerarenopleider.

Rechtspositie en honorering: voorzitters (en leden) van vaksecties blijven bij hun huidige werkgever in dienst en werken voor een deel van hun weektaak voor het CvE. Het CvE vergoedt de daarmee overeenkomende loonkosten.

De omvang van de werkzaamheden is gebaseerd op het aantal vast te stellen centrale examens (eerste, tweede en derde tijdvak). Voor het schooljaar 2011/2012 gaat het om ± 0,3 fte.

Meer weten?

Zie het document 'Informatie over het CvE'.

U kunt ook inlichtingen inwinnen bij mevrouw J. Wooning (Jacqueline), clustermanager exacte vakken havo/vwo: j.wooning@cve.nl of 030 - 284 07 00.

Solliciteren?

U kunt uw sollicitatie richten aan de directeur van het bureau van het College voor Examens, de heer G.W. van Lonkhuyzen, e-mail: sollicitatie@cve.nl. Uw sollicitatie dient uiterlijk vrijdag 15 april 2011 in ons bezit te zijn.

Redeneren over Communicatie

[Jan van Eijck]

Het communicatieve effect van een collectieve e-mail van Wouter Bos aan al zijn contacten is totaal anders dan dat van hetzelfde bericht gestuurd aan iedere geadresseerde persoonlijk. In dit artikel zal worden ingegaan op de vraag hoe je dit soort verschillen kunt modelleren in kennislogica (of: epistemische logica).

Heel korte geschiedenis

Kennislogica (zie voor een beknopt overzicht hoofdstuk 6 uit het gratis e-book ^[2]) is in verschillende milieus tegelijkertijd uitgevonden. Op de plaatjes hieronder zijn een filosoof, een econoom en een logicus te zien.



De filosoof David Lewis, de econoom Robert Aumann en de logicus Jaakko Hintikka.

Op dit moment wordt aan het onderwerp kennislogica weer hard gewerkt, want kennislogica is druk bezig een kernonderwerp in de theoretische informatica en in de economische speltheorie te worden.

We introduceren het onderwerp aan de hand van de beroemde 'puzzel van de modderige kinderen'. Het plaatje *in figuur 1* daarbij is van Marco Swaen.



figuur 1

Stel je voor dat vier kinderen buiten hebben gespeeld. Ze worden door vader binnen-geroepen. Annie is netjes, maar Bert, Catootje en Dora hebben modder op hun snoet. Zelf kunnen ze dat niet zien: de modderveeg zit op hun voorhoofd. Nu zegt vader: 'Minstens één van jullie heeft modder op zijn snoet.' Daarna speelt zich het volgende af. Eerst vraagt vader: 'Wie weet er nu of 'ie vies is?', en ze zeggen allemaal nee. Dan stelt vader nog een keer dezelfde vraag, en weer zeggen ze allemaal nee. Dan stelt vader de vraag voor de derde keer, en nu zeggen Bert, Catootje en Dora in koor: 'Wij weten het nu.' En als vader het tenslotte voor de vierde keer vraagt, zegt Annie: 'Nu weet ik het ook.' *Zie tabel 1.*

	A	B	C	D
Minstens een van jullie is vies	○	●	●	●
Wie weet er of 'ie vies is?	N	N	N	N
Wie weet er of 'ie vies is?	N	N	N	N
Wie weet er of 'ie vies is?	N	J	J	J
Wie weet er of 'ie vies is?	J			

tabel 1

Als je niet direct ziet hoe de kinderen redeneren, dan helpen de volgende twee tabellen van situaties met één en twee modderige kinderen (*zie tabel 2 en tabel 3*).

	A	B	C	D
Minstens een van jullie is vies	○	○	○	●
Wie weet er of 'ie vies is?	N	N	N	J
Wie weet er of 'ie vies is?	J	J	J	

tabel 2

	A	B	C	D
Minstens een van jullie is vies	○	○	●	●
Wie weet er of 'ie vies is?	N	N	N	N
Wie weet er of 'ie vies is?	N	N	J	J
Wie weet er of 'ie vies is?	J	J		

tabel 3

Modelleren van onzekerheid

In de kennislogica worden abstracte modellen van dit soort situaties ontworpen. We beginnen met een simpel geval. Ik moet een vervelend klusje doen. Ik stop een munt in een bekertje, schud een paar keer, en zet het bekertje omgekeerd op tafel. 'Als het kruis is, doe ik het vandaag; als het munt is, stel ik het uit.' Ik hoop natuurlijk dat het munt is, maar zolang ik niet onder het bekertje heb gekeken, weet ik het niet. Stel nu dat er in feite kruis onder het bekertje ligt. Dan kunnen we de situatie als *in figuur 2* modelleren.



figuur 2

Zodra ik zeg 'En nu wil ik het weten!' en de beker oplicht, verdwijnt de link tussen de echte situatie (links) en de situatie zoals hij volgens mij ook had kunnen zijn (rechts). Ik weet nu hoe het zit, en ik verwar de situatie waar kruis gevallen is, niet meer met de situatie waar munt is gevallen; *zie figuur 3*.



figuur 3

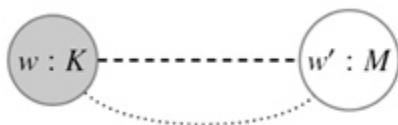
Dit zelfde scenario kan zich ook afspelen in groepsverband. Neem aan dat Annie de beker schudt en omkeert, terwijl Bert en Catootje toekijken. De beker staat nu omgekeerd op tafel met de munt eronder, en de onzekerheden zijn als *in figuur 4*.



figuur 4

In het plaatje staan drie soorten onzekerheidsrelaties: die van Annie (een ononderbroken lijn), die van Bert (een streepjeslijn) en die van Catootje (een stippellijn).

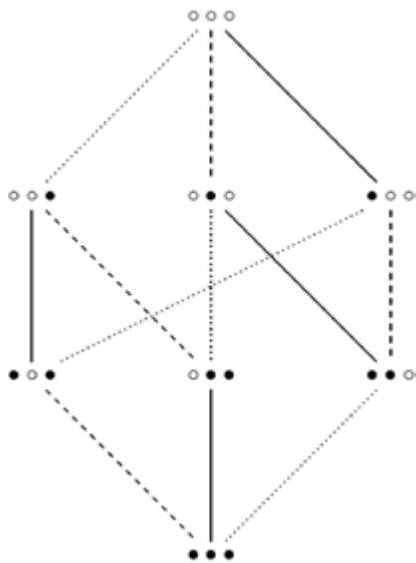
Nu kijkt Annie onder de beker, terwijl Bert en Catootje blijven toekijken. Hier is het resultaat: de onzekerheid van Annie is verdwenen, die van Bert en Catootje is blijven bestaan.



figuur 5

Deze zelfde manier van modelleren kunnen we ook toepassen op de puzzel van de modderige kinderen.

Stel dat er drie kinderen zijn. Dat geeft $2^3 = 8$ mogelijke situaties, en de bijbehorende onzekerheidsrelaties. De kinderen staan in alfabetische volgorde op de plaatjes, dus $\bullet \circ \circ$ wil zeggen dat Annie vies is en Bert en Catootje allebei schoon. Die situatie zal Annie niet van de situatie kunnen onderscheiden waarbij iedereen schoon is (want ze ziet haar eigen vieze veeg niet), dus er loopt een Annie-link naar $\circ \circ \circ$. Dit geeft **figuur 6**.



figuur 6

Het effect van de communicatie die plaatsvindt, is als volgt.

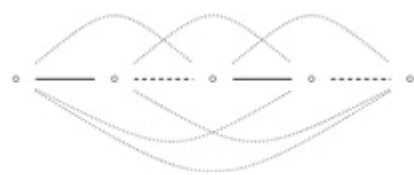
Als vader zegt 'Minstens een van jullie is vies geworden', verdwijnt de bovenste

situatie, plus alle onzekerheid-links naar die situatie. Die situatie is immers in tegenpraak met wat vader zegt. Als Annie nu zegt 'Ik weet niet of ik vies ben' verdwijnt de situatie $\circ \circ \bullet$: in die situatie weet ze het immers. Enzovoort. Stel dat de situatie de werkelijke situatie is (Annie en Bert zijn vies, Catootje is schoon). Dan zal op zeker moment $\bullet \bullet \circ$ samen met $\bullet \bullet \bullet$ nog over zijn, en dan weten Annie en Bert dat ze vies zijn, en zodra die twee zeggen 'we weten het nu', weet Catootje dat ze niet vies is.

De achtergrondveronderstelling bij dit alles is dat alle communicatie openbaar is: iedereen hoort wat de anderen zeggen, en iedereen weet ook dat dat zo is. Zonder dat werkt het scenario niet: dit is een scenario voor het communicatieve effect van zogenaemde *openbare aankondigingen* (Engels: public announcements). Het effect van een openbare aankondiging ϕ is dat het domein wordt beperkt tot de situaties waarin ϕ waar is.

Collectief weten

Wat betekent het dat Annie en Bert samen iets weten? Laten we zeggen dat ze samen een geheim G hebben. Dan moet gelden dat G waar is. Maar ook: Annie kent G , Bert kent G , Annie weet dat Bert G kent, Bert weet dat Annie G kent, enzovoorts. Dit gaat eindeloos door: het 'weten dat' kan *willekeurig diep* zijn genest. Zo'n 'collectief weten' relatie kun je berekenen uit individuele onzekerheidsrelaties met behulp van transitieve afsluiting.



figuur 7

Hier is een definitie van 'collectief weten' (Engels: common knowledge): ϕ is *common knowledge* als iedereen weet dat ϕ common knowledge is én weet dat iedereen weet dat ϕ common knowledge is. Dit is circulair, want het te definiëren begrip komt in de definitie zelf voor, maar de cirkel is niet vicieus. Vergelijk met:

<nulrij> ::= 0<nulrij>

(een 'nulrij' is een '0' gevolgd door een 'nulrij'; [red]). Dit is een definitie van een oneindige rij nullen.

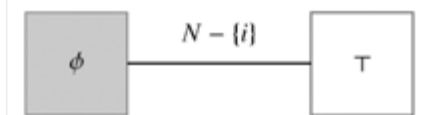
Allerlei protocollen uit het dagelijkse sociale leven zijn gericht op het creëren van collectief begrip. Neem bij voorbeeld het uitbetaal-ritueel als iemand contant geld opneemt bij zijn bank. De caissière zorgt ervoor dat ze je volle aandacht heeft, en telt dan het geld uit: vijftig, honderd, honderdvijftig, dat maakt tweehonderd euro. Er ontstaat 'common knowledge' dat er vier biljetten van vijftig euro zijn uitbetaald. Als het geld uit een geldautomaat komt, is zulk collectief weten er niet.



figuur 8a

figuur 8b

De 'Wouter Bos e-mail' was een bericht waarvan iedereen de cc-lijst kon zien. Dit staat gelijk aan een openbare aankondiging. Een privé-bericht ϕ aan een ontvanger i werkt heel anders: alle anderen kunnen dit niet onderscheiden van een actie waarbij niets gebeurt; **zie figuur 9**.



figuur 9

Het communicatieve effect hiervan is dat er een situatie ontstaat waarbij i de inhoud van het bericht weet, maar de anderen weten *niet* dat i het weet. Er ontstaat juist geen collectief weten, en dat is vaak ook precies de bedoeling.

Robert Aumann heeft gewezen op de belangrijke rol van collectief weten in het inschatten van economische risico's, en bij economische waardebeoordeling.^[1] Zijn stelling: in het economisch verkeer is het niet redelijk 'to agree to disagree' (het erover eens te zijn dat we het niet eens zijn over de waardebeoordeling van een economisch goed). Neem het geval van weddenschappen, bij voorbeeld over de volgende vraag: 'Zal het huidige kabinet een volle regerings-termijn uitzitten?'

Stel: volgens mij zijn de kansen 3 tegen 1 van niet, volgens mijn collega Eric Pacuit

Differentialen en diepvries-pizza's



[Dorien Lugt]

1 tegen 1. Dit is bovendien 'common knowledge'. Wij zijn allebei bereid hierover weddenschappen aan te gaan. Dan kan onze andere collega, Hans van Ditmarsch, gegarandeerd winst maken.^[3] Hoe? Hans zet 1000 euro in bij Jan op 'kabinet valt niet' en 2000 bij Eric op 'kabinet valt'. Als het kabinet niet valt, keert Jan 3000 euro uit, en zijn de 2000 bij Eric verspeeld: winst van 1000 euro voor Hans. Als het kabinet valt, is de 1000 euro bij Jan verspeeld maar keert Eric 2000 euro uit: winst van 1000 euro voor Hans. Dit heet 'a Dutch book': een weddenschap waarbij een van de partijen altijd winst heeft (en de andere partij altijd verlies). Zulke weddenschappen moeten Jan en Eric dus niet samen aanbieden, want als ze dat wel doen, gaan ze samen de boot in.

Heeft u enig idee van het wiskundestudentenleven van tegenwoordig? Is wiskunde studeren nog was het was? Dorien Lugt is sinds augustus 2009 wiskundestudent aan de TU Delft en schrijft voor *Euclides* over haar belevenissen en observaties vanuit collegezaal en studentenhuus.

Studeren is concurreren

Studeren is concurreren: zorgen dat jij *bet* beter doet dan de rest. Maar het is al een hele opgave om erachter te komen wanneer je het precies beter doet dan de rest. Hoge cijfers halen en nominaal lopen, dat is een aardig begin. Maar doe je het dan beter dan je tragere studiegenootjes? Nee, niet volgens de meeste studenten. Het gaat er meer om wat je erbij doet. Je doet *bet* goed als je er *iets* bij doet.

Nu kun je *iets* op veel verschillende manieren invullen, het beste is als je het *iets* op al die verschillende manieren tegelijk invult.

Zorg er ten eerste voor dat je altijd minstens twee commissies tegelijk doet. Dan het liefst natuurlijk een commissie die veel tijd kost of een waar je maar moeilijk binnenkomt.

Vervolgens moet je ook laten merken dat je breed geïnteresseerd bent. Je kunt extra vakken volgen bij een andere opleiding, een cursus Italiaans volgen, schrijven voor de universiteitskrant of actief worden bij een politieke partij.

Maar echt breed is je wereld natuurlijk niet, als je niet minstens een half jaar buitenlandervaring hebt opgebouwd. Vooral belangrijk dat je tussen de biertjes door kunt opmerken dat de manier van begroeten in het noorden van China toch echt heel anders is dan die in het zuiden van China. Dat je echt in Afrika moet zijn geweest om jezelf te leren kennen. Ben je nog nooit buiten Europa geweest? Dan ben je wel erg in je eigen kleine wereldje blijven hangen.

Maar je moet vooral ook genieten van je studententijd. Veel sociale contacten erop nahouden. Borrelen moet je, iedere dinsdagavond met je jaarclub, iedere woensdagavond met je dispuut, op donderdag stappen met je huisgenoten en zeker niet het contact verliezen met je studiegenoten.

Mis je vaak de goeie feesten en haal je nooit een nachtje door? Dan heb je geen leven. Een beetje student tikt regelmatig sluit aan. Tijdens die borrels moet je ook iets te melden hebben. Zorg ervoor dat je op elk gebied je mening klaar hebt, volg het nieuws, bezoek musea en concerten, lees de juiste boeken en kijk veel films. Met al dat bier dat je drinkt – de benzine voor je sociale leven – moet je niet vergeten te sporten. Twee avonden in de week voetballen met een goede borrel achteraf natuurlijk.

Het belangrijkste bij dit alles is, dat je het voor je plezier doet. Geen zin hebben in een vergadering, feest of training is taboe. Kom gewoon, ik geef maar eens per jaar een huisfeest. Drie feesten op een avond, gewoon even combineren, we zien je al zo weinig.

En als je dat dan allemaal voor elkaar hebt en uitgeput naast je huisgenoot op de bank ploft, dan krijg je te horen dat je eens wat vaker *voor jezelf moet kiezen*. Hier word je niet gelukkig van; anders doe je *iets* niet goed.

Noten

- [1] R.J. Aumann (1976): *Agreeing to disagree*. In: *Annals of Statistics*, 4(6); pp. 1236-1239.
- [2] J. van Benthem, H. van Ditmarsch en J. van Eijck (2009): *Logica in Actie*. Den Haag: Academic Service; ISBN 978 903952599 9.
Digitaal beschikbaar via: www.ou.nl/eCache/DEF/2/24/435.html
- [3] Eric Pacuit, Hans van Ditmarsch en Jan van Eijck waren de drie sprekers op het Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, op 8 januari 2011 in Utrecht.
Zie ook: pag. 203 in dit nummer.

Over de auteur

Jan van Eijck (1951) is senior onderzoeker aan het CWI (Centrum Wiskunde & Informatica) in Amsterdam, en hoogleraar computationele linguïstiek aan de Universiteit van Utrecht. Een van zijn interessegebieden is de formele theorie van kennis en communicatie.

Rekenen in het mbo: ramp of zegen?

[Thomas van den Elsen]

Het mbo is de laatste jaren flink in beweging. Eén van de laatste aanpassingen betreft de invoering van verplicht Nederlands en rekenen volgens de niveaus van de commissie Meijerink.

In dit artikel geeft de auteur zijn mening over de gevolgen die de invoering heeft voor met name de organisatie van het rekenonderwijs binnen het mbo.

Op dit moment volgen 485.000 deelnemers^[1] een opleiding in het middelbaar beroepsonderwijs (mbo). Bijna 40 procent van de Nederlandse beroepsbevolking is opgeleid in het middelbaar beroepsonderwijs. De 70 Nederlandse roc's, aoc's^[2] en vakscholen hebben een divers en breed aanbod aan opleidingen op verschillende niveaus en langs verschillende leerwegen. Het onderwijs op deze scholen is toegankelijk voor iedereen vanaf 16 jaar. Dat is het uitgangspunt en dat maakt het onderwijs op deze scholen zo divers. Afhankelijk van vooropleiding, leeftijd of ervaring is er voor iedereen een opleiding op maat bij het middelbaar beroepsonderwijs en de volwasseneneducatie.

Langs verschillende leerwegen

Het mbo kent verschillende leerwegen. De beroepsopleidende (bol) en de beroepsbegeleidende leerweg (bbl) zijn de meest gevolgde.

De bbl zorgt ervoor dat studenten die al werken (en soms nog leerplichtig zijn) een diploma halen of kunnen doorstromen naar een opleiding van een hoger niveau. In deze leerweg zie je vaak ook volwassenen die meestal vanuit de werkgever of vanuit het UWV een dag per week lessen volgen. Meestal bestaat het aanbod uit vakken die direct met het beroep te maken hebben. Daar komen vanaf 1 augustus 2010 de vakken Nederlands, rekenen en een vreemde taal bij. De bol is de voltijdopleiding. Studenten zijn het grootste deel van de week op school, beroepsvorming gebeurt in de vorm van stage in een bedrijf.

Vier niveaus

Het mbo kent vier kwalificatieniveaus. *Niveau 1*-deelnemers hebben een niet afgeronde vmbo opleiding op het laagste

niveau als achtergrond. Ze vinden een baan als zorghulp of als assistent in een bedrijf of organisatie.

In de opleiding komen basale zaken aan de orde. De opleiding leidt niet tot een startkwalificatie, wel tot gepast werk of een vervolgopleiding. Gepast werk is bijvoorbeeld: winkelassistent rekken vullen, koffie rondbrengen, poetsen, assisteren van een metselaar, spullen aandragen in de bouw. *Niveau 2*-deelnemers stromen in met een afgeronde vmbo basisopleiding en zijn beginnend beroepsbeoefenaar als zij de opleiding succesvol afronden. Enkele voorbeelden: metselaar, verkoopmedewerker (mag achter de kassa), beveiligers, timmerman, helpende zorg.

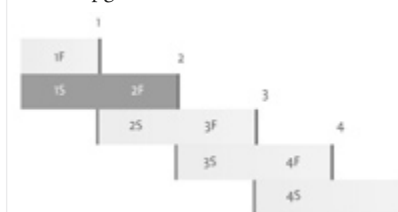
Niveau 3-deelnemers stromen in met vmbo kader. Het werkgebied heeft al meer behoefte aan deze studenten. Enkele voorbeelden: lassers, fitters, helpenden in de verzorging, kinderopvang.

Niveau 4-studenten/deelnemers hebben als ingangsniveau vmbo gemengd of theoretisch of bijvoorbeeld het overgangsbewijs naar havo 4. Wettelijk zijn ook vmbo-kader leerlingen toelaatbaar, maar die lopen toch vaak vast in de niveau 4 opleiding. Het hele middelbaar beroepsveld valt onder dit niveau te plaatsen. Een mbo-niveau 4 opleiding biedt toegang tot het hbo.

Crebonummer

Elke unieke opleiding is gekoppeld aan een zogeheten crebonummer^[3]. De komende jaren zijn er in totaal wel 750 crebonummers. Een klein roc, waar ik werk (ROC Ter AA in Helmond), heeft er al ruim 130. Iedere crebo heeft zijn eigen kwalificatiedossier (KD) met daarin de eisen voor alle beroepsgerelateerde vakken, beschreven in kerntaken met daaronder werkprocessen en die bestaan weer uit

generieke en beroepscompetenties. De inhoud van de KD's wordt bepaald door werkveld, kenniscentra^[4] en onderwijs. Vanaf schooljaar 2010 zijn Nederlands, rekenen en een moderne vreemde taal daar ook in opgenomen.



figuur 1



figuur 2

De referentieniveaus van Meijerink voor het vak rekenen in beeld

In *figuur 1* en *figuur 2* is te zien hoe de rekenniveaus een plaats krijgen binnen de opleidingen.^[5] In het deelrapport *Over de drempels met rekenen* zijn alle rekengebieden goed beschreven. De rekenexamens die afgenomen worden in het mbo (roc's en aoc's), hebben alleen betrekking op de F-niveaus. F slaat op *fundamenteel* en kan gezien worden als *sec rekenen*. Met *sec rekenen* bedoel ik het (burgerschaps)niveau dat elke Nederlander zou moeten beheersen om goed te kunnen functioneren in de maatschappij, althans voor wat rekenwerk betreft.

Het S-niveau is het streefniveau. Daarin vind je al meer de wiskundige benadering terug met verwijzingen naar het beroep wat men gaat uitoefenen. Niveau 4F is nog niet tot in detail beschreven. De commissie Meijerink geeft aan dat kinderen op het einde van de basisschool niveau 1F voor rekenen dienen te hebben en aan het einde van het vmbo wordt dat niveau 2F. Studenten van een mbo-opleiding op

niveau 4 dienen rekenen op niveau 3F af te ronden. Voor opleidingen op niveau 2 en 3 in het mbo geldt dat studenten op rekenniveau 2F worden getoetst.

Rekenen, een zegen

Als docent rekenen bij de niveau 4-opleiding Onderwijsassistent constateerde ik dat het rekenniveau van de studenten erg laag was. Om de studenten goed te kunnen begeleiden heb ik mij verdiept in de didactiek van het rekenen in het basisonderwijs. Ik ben ook betrokken bij het onderwijs in verpleegkundig rekenen voor de opleiding verpleegkunde (niveau 4): een *must* voor het goed kunnen uitvoeren van hun beroep. Regelmatig lees en hoor je dat verpleegkundigen niet meer kunnen rekenen. Bij ons moeten de studenten van verpleegkunde dan ook een 10 halen voor de toets van verpleegkundig rekenen en dat is voor de meeste studenten geen sinecure.

Aanvankelijk was ik dan ook erg blij met het besluit dat alle studenten een reken-toets krijgen. Iedereen krijgt immers op een of andere manier (ooit) met rekenen te maken. Een beveiligder zal een plattegrond goed moeten kunnen lezen. Hij zal met werkroosters te maken krijgen en met onregelmatige werktijden. Een kapper zal met verhoudingen te maken krijgen bij het maken van een kleurtje. Het metrieke stelsel is voor bijna iedereen belangrijk. Op dit moment zijn er enkele goede rekenmethoden op de markt, soms een boek, soms digitaal, en vaak zijn beide mogelijkheden uitgebracht. Ook krijg ik veel positieve feedback van studenten die de sites www.rekenbeter.nl en www.beterrekenen.nl bezoeken: elke werkdag een paar sommetjes met meteen de uitslag en uitleg spreekt studenten erg aan. Mijn complimenten voor de initiatiefnemers.

Overtuigen van het nut van rekenen

Sinds vorig jaar bieden we bij ROC Ter AA in alle opleidingen binnen de afdeling Mens en Maatschappij het vak rekenen aan. De studenten van de opleidingen voor wie dit vak nieuw was, waren hier niet blij mee; hun aversie tegen het vak was groot. Op de basisschool hebben zij vaak al moeite gehad met rekenen en op het vmbo werd wiskunde niet gekozen in het examenpakket. Ze kozen voor een vervolgstudie in het mbo, maar wel een richting waarin geen rekenen werd gegeven. Nu komt het vak dan toch in het rooster. Om studenten te overtuigen van de noodzaak van rekenen ben ik naar maatschappelijke organisaties geweest, zoals het SMO^[6]. Ik ging bij bejaardenhuizen langs en bij verzorgingshuizen om te informeren in hoeverre zij

– op welke manier dan ook – met rekenen te maken krijgen. Ik nodigde mensen uit om op school workshops te verzorgen en te vertellen over hun werk, met name op welke manier zij te maken krijgen met het vak rekenen. Voor veel studenten was dit een eye-opener en ik was blij dat daardoor het nut van rekenen ingezien werd.

Laag niveau

Toen ik begon met het geven van rekenen aan groepen studenten van niveau 2 en 3, schrok ik van het lage niveau. Velen kunnen twee getallen onder de 100 niet optellen, laat staan vermenigvuldigen of op elkaar delen. Het metrieke stelsel is helemaal uit beeld. Het rekenen met procenten en breuken is een ramp. Het gros van de studenten in deze groepen functioneert op niveau groep 5/6 van de basisschool. Hier is nog een wereld te winnen.

Zorg

Doorgaans duurt een niveau 3-opleiding drie jaar en het rekenexamen zal te zijner tijd op 2F worden afgenomen. Omdat het examen in het laatste jaar wordt afgenomen, hebben de studenten dus twee jaar om dit niveau te bereiken. Zorgwekkender is het gesteld met studenten van niveau 2, die hetzelfde rekenexamen moeten maken. In deze groepen zitten vaak veel allochtone leerlingen die ook moeite hebben met de Nederlands taal. Vaak ontbreekt het hen aan de meest basale kennis. Of het nu om de basisbewerkingen gaat, het metrieke stelsel of anderzijds, het is voor veel van hen een verzoeking. Daarnaast heeft deze groep slechts één jaar de tijd om het voorgeschreven niveau te bereiken, want een opleiding op niveau 2 duurt meestal ook twee jaar. Triest aan het verhaal is, dat deze studenten het in het werkveld vaak goed doen, maar nu afgerekend gaan worden op taal en rekenen. Ze lopen stage in verzorgingshuizen en doen daar eenvoudige werkzaamheden, waar nauwelijks rekenen aan te pas komt. Er worden geen hoge eisen gesteld aan kennisvaardigheden en de studenten zijn vaak in communicatief opzicht voldoende vaardig om met de 'klanten' om te kunnen gaan. Het werkveld is tevreden.

Rekenen, een ramp

Voor deelnemers op niveau 2 geldt dat zij vanaf schooljaar 2014-15 geëxamineerd worden op 2F niveau, volgens Meijerink. Ik heb respect voor de commissie, die in mijn ogen goed werk heeft verricht: eindelijk zijn rekenniveaus beschreven; en ik kan mij er wel in vinden. Toch raakt het een grote groep studenten die op een roc of aoc

een opleiding op niveau 1 en 2 volgen. De meeste studenten van niveau 2 moeten in één jaar het voorgeschreven niveau bereiken terwijl veel van hen nog functioneren op niveau groep 4/5 van de basisschool. Zij moeten het niveau opkrikken tot eind vmbo b/k. Dit is in mijn ogen onmogelijk met 1 à 2 lesuren rekenen per week, gedurende één schooljaar. Het zal veel drop-outs opleveren en dat moeten we niet willen. Velen hebben op rekengebied een achterstand van ongeveer 8 tot 10 jaar. Ze hebben een hekel aan het vak en zien er het nut niet van in. Als het rekenen echt op hun leef- en denkwereld was afgestemd, zou ik me daar nog vrede mee hebben. Een beveiligder moet zich ruimtelijk kunnen oriënteren, een metselaar en kapper zal met verhoudingen moeten kunnen werken, een timmerman moet met het metrieke stelsel uit de voeten kunnen en een schuine lijn kunnen berekenen. Zo kan ik nog wel even doorgaan, voor elk beroep is wel een rekengebied te vinden. Blijkbaar kost dat te veel of heeft men er geen tijd voor, en daarom moeten *alle* studenten het hele rekengebied doorlopen, of het nu wel of niet zinvol is voor hun toekomstige beroep. Veel wiskunde docenten zullen van mening zijn dat het zinvol is om alles te doen, maar als je gewerkt hebt met deze groep, dan ben je trots als je ziet dat bepaalde rekenzaken die voor hen van belang zijn, begrepen zijn. Soms voelt het voor een student als een overwinning wanneer een rekenvaardigheid als bijvoorbeeld een vermenigvuldiging van twee cijfers onder de honderd al lukt.

Kan het nog erger?

Als ik vertel dat veel bbl'ers de studie vaak in één jaar kunnen en willen afronden, dan kan het dus nog erger. Vaak zijn de deelnemers volwassenen die al vele jaren, soms wel 30 jaar geleden, de basisschool, ulo of mulo hebben afgerond. Hun kennis op het gebied van rekenen is vaak niet meer up-to-date. Ik heb meegemaakt dat volwassenen kwaad wegliepen toen ze een nulmeting moesten maken. Ze schamen zich voor het falen. Het is niet fijn als je er achter komt dat je de sommen van groep 6 van een basisschool niet kunt maken. Voor het vak Nederlands geldt dat veel deelnemers niet op de hoogte zijn van de vele veranderingen in de spellingsregels. Een bbl'er is vaak maar één dag in de week op school en krijgt dan vooral lessen die met het beroep te maken hebben. Rekenen en taal horen daar in zijn visie niet bij. Bovendien zijn veel volwassenen 40+'ers. Op dit moment is het zo dat de regering wil dat 30+'ers hun eigen cursus gaan betalen. Een besluit hierover is nog niet gevallen

(november 2010). Nu wordt hun bijscholing vaak uit een ander potje betaald. Over niveau 1 heb ik het nog niet gehad, maar op dit moment staat voor hen ook 2F genoteerd. Ik hoop niet dat er dat ooit van komt, want daarmee help je deze groep niet.

Wie gaan het vak rekenen en taal geven?

Op de meeste roc's loopt slechts een handjevol wiskundeleren rond. De afdeling educatie op veel roc's heeft flinke klappen opgelopen door de vrije-marktwerking. Cursussen die al jaren op roc's werden gegeven, gingen naar goedkopere aanbieders met alle gevolgen van dien. Dat leidt ertoe dat roc's met boventaligheid zitten op personeel gebied. Omdat deze mensen niet gemakkelijk ontslagen kunnen worden, worden zij al snel ingezet op deze vakken. Om een vak over te brengen moet je passie voor het vak hebben. Er wordt snel denigrerend gesproken: och, rekenen kan toch iedereen geven. Dit doet mijns inziens afbreuk aan het vak. Als iedereen kon rekenen, zoals wordt gesuggereerd, dan waren er ook niet zoveel problemen op dit gebied. Je moet als docent erg goed op de hoogte zijn van de rekendidactiek, je moet het vak over kunnen brengen en je moet als expert het gehele rekengebied paraat hebben en overzien. Dat kost tijd. Ik denk dat een wiskundedocent het meest geschikt is om het vak rekenen te geven, maar hier is ook wel een plaats weggelegd voor een afgestudeerde pabo-student met specialisatie rekenen. Laat rekenen vooral geven door personen die bevoegd zijn en een passie hebben voor het vak.

Wat te doen met studenten met dyslectie en dyscalculie?

Er is nog geen beleid gemaakt op dit gebied. Er lopen binnen mijn sector veel studenten rond met een dyslectieverklaring en velen zeggen dat ze dyscalculie hebben. Vaak betreft het een fikse rekenachterstand. Vanaf groep 5 van de basisschool hebben sommigen al te horen gekregen dat ze niet kunnen rekenen en het ook nooit zullen leren. Daarmee zijn ze naar het vmbo gegaan en nu zitten ze bij mij met de gedachte 'ik kan het toch niet!' Het zou goed zijn als er een cursus komt voor docenten om te kunnen onderkennen of een student een rekenachterstand heeft of dyscalculie heeft. Wat te doen met allochtone studenten die de Nederlandse taal nauwelijks beheersen? Rekenopgaven mogen niet kaal geëxamineerd worden. Juist de context zorgt bij rekenen voor ruis bij deze student.

Zijn de problemen over een paar jaar opgelost?

Rekenen gaat ook deel uitmaken van het lesprogramma op vmbo, havo en vwo. Dat zal in ieder geval over een paar jaar zijn vruchten afwerpen. Over vier jaar wandelen studenten met een startkwalificatie 2F voor Nederlands en rekenen het roc of aoc binnen. Althans, zo staat het op papier. Elkaar met een beschuldigende vinger aanwijzen dienen we zeker niet te doen, dan krijg je alleen maar verliezers. Ik neem mijn petje af voor de leerkracht van de basisschool die in veel gevallen aan een groep van 30 kinderen of meer probeert kennis over te brengen. Vaak zitten er in een groep ook nog enkele zorgleerlingen. Verlaten alle kinderen straks de basisschool op 1F niveau? Ik voorzie dat de problemen waar wij nu tegenaan lopen, de kop op zullen steken in het vmbo. Een hbo-instelling die garen zal spinnen bij deze nieuwe ontwikkeling, is ongetwijfeld de pabo. Nu stromen daar nog veel studenten in vanuit havo met het profiel C&M. Straks hebben die allemaal startniveau 3F voor taal en rekenen. Dat is toch mooi meegenomen. Het mbo krijgt jaarlijks 50 miljoen om de vakken Nederlands en rekenen een plaats te geven binnen de opleiding. Dit bedrag wordt naar rato verdeeld over de ongeveer 42 roc's en 13 aoc's. Er moeten computer-ruimtes ingericht worden voor het afnemen van examens, de vakken dienen te worden geïmplementeerd, er moeten uren worden vrijgemaakt en docenten moeten worden bijgeschoold. 50 miljoen lijkt veel, maar in werkelijkheid is het een druppel op een gloeiende plaat.

Eindonderwijs of doorstroom

Een roc leidt mensen op als beginnend beroepsbeoefenaar. Dat kan zijn op niveau 2, 3 of 4.

Rekenen en taal hebben binnen de opleiding een eigen plaats gekregen. Hoe kan er nu voor gezorgd worden dat dit geen struikelblok gaat vormen voor het behalen van een diploma?

Hieronder heb ik twee voorstellen: voor niveau 2 en 3 en voor niveau 4.

Niveau 2 en 3

Een student kan op niveau 2 en 3 slagen met een diploma waarvoor hij is opgeleid, mits voldaan is aan de beroepseisen die in het kwalificatiedossier staan. Mocht hij niet slagen voor rekenen en taal, dan staat dat een beroepsdiploma niet in de weg, maar kan hij niet doorstromen naar een hoger niveau. Nu is het zo dat een student van niveau 2 automatisch door kan stromen naar niveau 3; dat is wettelijk geregeld. Om

uitval op een hoger niveau te beperken zou gesteld kunnen worden dat als een student een onvoldoende haalt voor rekenen en/of taal, een hoger niveau niet meer mogelijk is.

Niveau 4

Een student die op niveau 4 studeert en niet voldoende scoort voor rekenen en taal, kan niet doorstromen naar het hbo.

Een student het diploma onthouden is een ramp voor de student, maar ook voor het roc. Iedere leerling die ongediplomeerd de school verlaat, betekent een financiële korting voor de school. Grote groepen studenten op niveau 1 en 2 zullen zonder diploma het roc of aoc verlaten, terwijl ze goed kunnen functioneren in de maatschappij. Dat moet je niet willen!

Ik hoop dat de organisaties die dicht bij het onderwijs staan, zich beraden over bovenstaande materie. Ik denk daarbij aan OCW, de onderwijsinspectie, de mbo-raad, de kenniscentra, de NVvW, het FI en de adviesgroep van het Steunpunt Taal & Rekenen mbo (www.steunpunttaalenrekenenmbo.nl).

Noten

- [1] Voor het gemak spreek ik over deelnemers; dat zijn studenten en volwassenen.
- [2] Roc = regionaal opleidingscentrum; aoc = agrarisch opleidingscentrum
- [3] Crebo = centraal register beroepsopleidingen (zie ook www.mbo2010.nl en www.kwalificatiesmbo.nl/start.html)
- [4] Kenniscentra vormen de brug tussen opleiding en beroep. Zij weten wat er in de arbeidsmarkt speelt en vertalen dit naar onderwijs. Elk kenniscentrum vertegenwoordigt zijn eigen sector/sectoren; bijvoorbeeld: Fundeon (bouw), Ecabo (economisch/administratief), Calibris (zorg, welzijn en sport).]
- [5] Bron: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008): *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: SLO; hoofdrapport, p. 19 en p. 22.
- [6] SMO = Stichting Maatschappelijke Opvang

Over de auteur

Thomas van den Elsen werkt als bevoegd docent Nederlands, wiskunde en werktuigbouwkunde bij ROC Ter AA in Helmond. Hij heeft vier jaren gewerkt op een lts en daarna zeventien jaar bij de sector Techniek van het roc. De laatste tien jaar werkt hij bij de afdeling Mens en Maatschappij en geeft rekenen op drie niveaus. E-mailadres: t.v.d.elsen@roc-teraa.nl

G. Krooshof en de didactiek van de wiskunde

[Martinus van Hoorn]

Inleiding bij de Voordracht

Hiernaast is de tekst weergegeven van een voordracht uit 1937 over de didactiek van de wiskunde. Deze tekst dook onlangs op in het archief van een wiskundig dispuut te Groningen, waarvan studenten en promovendi lid konden zijn. Degene die de voordracht had gehouden, was Gerrit Krooshof (1909-1980), die na de Tweede Wereldoorlog belangrijke functies vervulde in het Nederlandse wiskundeonderwijs. In 1933 was hij zelf één van de oprichters van het dispuut geweest.



Gerrit Krooshof in 1936

Van Krooshof is vooral zijn leidende rol bij de methode *Moderne Wiskunde*, toen deze in 1968 voor het eerst verscheen, bekend gebleven. Hij zorgde ervoor dat de delen voor verschillende schooltypen op elkaar afgestemd werden (een primeur), en dit deed hij met een grotere groep schrijvers (ook een primeur). Eerder al, vanaf 1962, vormde Krooshof samen met Bruno Ernst de eerste redactie van het jongerentijdschrift *Pythagoras*. In 1964 werd hij redactielid van *Euclides* en van 1968-1976 was hij daarvan hoofdredacteur. Hij zorgde ervoor dat *Euclides* geschikt werd voor een grotere groep leraren dan vóór 1968 het geval was. Vanaf 1968 konden namelijk ook de mavo- en lbo-leraren lid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren worden,

wat voorheen niet het geval was.

Krooshof was leraar en conrector aan de Meisjes-hbs te Groningen. Daarvoor was hij leraar geweest aan een mulo. In zijn tijd als mulo-leraar had hij de, zoals hij ze noemde, meestal niet begaafde leerlingen leren kennen en waarderen. Uit die periode dateert de voordracht. Hij hield deze voor de leden van het wiskundig dispuut waarvoor hij zelf nog maar kort tevoren had bedankt. De tekst spreekt verder voor zich. Men beoordeel zelf hoe actueel deze nog is – of misschien ten dele niet meer.

Op zaterdag 14 mei a.s. staan tijdens het jaarlijkse symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs (HKRWO) te Utrecht naoorlogse tijdschriften centraal. In een lezing over lerarentijdschriften zal ik dan nader ingaan op de belangrijke rol die Krooshof voor Euclides speelde. Zie verder pag. 204 in dit nummer.

Over de auteur

Martinus van Hoorn was van 1987-1996 hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: mc.vanhoorn@wx.nl



Voordracht

GEHOUDEN VOOR HET WISKUNDIG DISPUUT W4 OP 28 SEPTEMBER 1937

[G. Krooshof]

Zoals ik beloofd heb, zal ik vanavond spreken over: Ervaringen opgedaan bij het wiskundeonderwijs aan jonge en meestal niet begaafde leerlingen. Het zal dus een didactische verhandeling worden. Nu is didactiek iets wat op het eerste gezicht vervelend en saai is, maar het is merkwaardig dat men zich er voor gaat interesseren zodra men in de praktijk van het onderwijs werkzaam is. Als daarom sommigen van u dit onderwerp deze avond minder belangrijk mocht toeschijnen dan hoop ik toch dat zij er nog een keer profijt van zullen hebben.

Ik begin met enkele opmerkingen te maken over leraar en leerling. Want al zal ik vanavond mijn ervaringen doorgeven, het is helemaal niet gezegd dat een ander precies dezelfde ervaringen gehad zou hebben. Want ieder heeft een eigen stijl van doceren die zich in de loop der jaren vormt. Het lesgeven wordt geleerd met vallen en opstaan. Daarom is het begin voor een jong leraar ook zo moeilijk. Er zijn zoveel dingen die hij moet leren beheersen, zoals bijvoorbeeld het orde houden in de klas, het aanvoelen van de classesfeer, die hem zegt of zijn les met aandacht en begrijpen of met een zekere berustende onverschilligheid gevolgd wordt. Het begrijpen van iedere leerling afzonderlijk, het verschillende reageren van verschillende types op dezelfde woorden en uitleg, het leren zien van de moeilijkheden van de leerstof voor de leerlingen, het zijn allemaal problemen waarvoor een beginnening zich geplaagd ziet en waarvan de oplossing hoofdzakelijk in de praktijk gevonden wordt.

Ik kan me voorstellen dat iemand die gauw ontmoedigd is er na betrekkelijk korte tijd het bijltje bij neergooit en zich als taak stelt er voor te zorgen dat de orde ten minste niet al te slecht is en verder de resultaten van zijn onderwijs maar in hoofdzaak aan de leerlingen zelf overlaat. Dat wordt dan

de slechte leraar, die ook geen voldoening in zijn werk vindt.

De man echter die volhoudt zal bemerken dat hij opeens de slag te pakken heeft en zich dan met gemak kan wijden aan een studie van de mogelijkheden die zijn lesgeven hem bieden.

Als ik echter de toekomstige leraren onder u een goede raad mag geven voor het eerste begin van hun loopbaan, dan is dat deze: Zorg in de eerste plaats voor een goede orde in de klas. Ga eerst maar beginnen les te geven op de traditionele manier, misschien wel de manier die je van je eigen leraar herinnert, en als je voelt dat je de klas eronder hebt en de leerstof beheerst, ga dan eens uitkijken of het ook anders kan en welke vrijheden je in de methode van lesgeven kunt veroorloven. (Ik tutoyeer verder maar, dat is gemakkelijker.) Maar zorg er vóór alles voor dat de lessen die je geeft gezellig zijn. Als je kans ziet er een beetje humor in te brengen, dan is dat al een hele stap in de richting van succes. Want om nu op de leerling terecht te komen, een kind is zoals ik het eens heel aardig heb horen zeggen, meestal meer feestelijk dan geestelijk gestemd en daar nu wiskunde in hun ogen juist niets feestelijks heeft is het al gauw met permissie gezegd het "rotvak" en is de wiskundeleraar de rotleraar. In dit verband mag ik wel eens wijzen op het aardige boek dat onlangs bij Brusse in Rotterdam verschenen is, namelijk *Avontuurlijk wiskunde-onderwijs* door Ir. D.J. Kruitbosch. Dit boek geeft allerlei aardige tips om de wiskundelessen aantrekkelijk te maken.

Dit aantrekkelijke van de wiskundeles hangt voor een groot gedeelte ook van de manier waarop je de stof voordraagt en vooral je eigen enthousiasme toont. Doe je zelf verrukt over een gevonden resultaat dan zijn de leerlingen het meestal ook. Ik ondervind dat telkens weer bij de behandeling van het

volgende vraagstuk:

Van driehoek ABC is hoek A 40 graden en hoek B 80 graden. Hoe groot is de hoek tussen de bissectrice van hoek A en die van de nevenhoek van hoek C ?

Er zijn de laatste jaren over de didactiek van het wiskundeonderwijs verschillende publicaties verschenen, die hoofdzakelijk twee richtingen vertegenwoordigen, waarbij dan natuurlijk nog komen de verhandelingen van hen die de gulden middenweg wensen te verkiezen. Tot deze laatste groep wil ik mij zelf ook rekenen. Nu moet ik er direct bij zeggen dat ik niet veel gelegenheid heb gehad te experimenteren met verschillende onderwijsmethodes omdat ik natuurlijk gebonden ben aan de volgorde en de voorschriften van het leerplan onzer school en zo zal het de meeste leraren wel vergaan, zodat het erg moeilijk is een werkelijk goed gefundeerd inzicht te krijgen in de waarde van verschillende aangeprezen methodes. De beide richtingen waarin de didactici bij het wiskundeonderwijs zijn te verdelen worden door drs. H. Turkstra in zijn verhandeling *Psychologisch-didactische problemen bij het onderwijs in de wiskunde aan de middelbare school* [verschenen in 1934 bij J.B. Wolters te Groningen; besproken door H.J.E. Beth in *Euclides* 11 (1934-1935) 87-90; MCvH] genoemd de psychologische en de logische richting. Als typische vertegenwoordigster van de eerste richting noemt hij mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa en van de andere richting dr. Dijksterhuis. Voor mevrouw Ehrenfest is de hoofdzakelijke intuïtie van de leerling, het intuïtief begrijpen van de wiskundige waarheden, terwijl bij haar op de tweede plaats slechts komt de logische ordening van de wiskundige eigenschappen en de bewijsvoering waarop de andere richting zo'n grote nadruk legt. In haar systeem is dan ook de analytische methode op zijn plaats; de verschillende abstracties

als groter, kleiner, afpassen, meten, zich verhouden enz. moeten door de leerlingen door analyse van eigen onderzoeken begrepen worden.

Daartegenover voert dr. Dijksterhuis aan dat de intuïtie de leerlingen wel op een dwaalspoor kan voeren, en als sprekend voorbeeld noemt hij daarvoor het feit de meeste leerlingen menen dat de hoeken van een driehoek evenredig zijn met de zijden, terwijl het volgens hem niet te controleren is of een vondst van een leerling werkelijk door intuïtie is ontstaan of door het horen van andere leerlingen over de onderzochte zaak.

Daarom stelt dr. Dijksterhuis als eis, dat we het ontstaan van alle spontane vermoedens, inzichten en overtuigingen bij de leerlingen van harte toejuichen, maar daartegenover niets definitiefs aanvaarden zonder streng logisch bewijs.

Wat mij betreft, dit laatste gaat mij weer wat te ver; ik gun de leerlingen best dat ze eens iets zonder bewijs mogen aanvaarden, maar in hoofdzaak denk ik er toch ook zo over.

Behalve een streng logisch bewijs moeten we bij onze leerlingen mijns inziens ook en vooral eisen een nauwkeurige formulering van definities en omschrijving van constructies, met daarnaast weer de eis dat ze de gebruikte woorden goed zullen begrijpen. Ik wil deze drie punten even apart beschouwen. Het nauwkeurig formuleren van definities enz. is natuurlijk niet iets dat we van de leerlingen zelf kunnen eisen, maar het is wel nodig dat we ze die goed voorzetten en woord voor woord uiteenzetten. Als ze er aan wennen de dingen die ze zeggen precies te zeggen, dan zullen ze ook minder moeite hebben met de tweede eis die we hun wel kunnen stellen namelijk het nauwkeurig omschrijven van constructies. We hebben daar in ons boekje [te weten: Krooshof en Prakken, *Vlakke meetkunde voor het ulo*, 1936; MCvH] ook grote aandacht aan besteed. Ik eis bij alle constructies die de leerlingen moeten uitvoeren dat ze in korte duidelijke zinnen erbij zullen schrijven hoe ze het gedaan hebben. Dat kan gemakkelijk als we op de volgende dingen letten. 1e. De zinnen kunnen het best in de korte vorm van de gebiedende wijs gezet worden: doe dit en doe dat. 2e. De leerlingen moeten zoveel mogelijk steeds van dezelfde woorden gebruik maken, namelijk de woorden:

afpassen, omcirkelen enz. 3e. Er moet steeds een duidelijk onderscheid gemaakt worden tussen de begrippen rechte, halve rechte en lijnstuk.

Ik geef een voorbeeld: Construeer een trapezium als gegeven zijn de basis, de hoeken aan de basis en een been (a , P , Q , b). Constructie: 1e. Pas op een willekeurige rechte het lijnstuk $AB = a$ af. 2e. Construeer hoek $BAC = Q$ en hoek $ABD = P$. 3e. Pas op BD het lijnstuk $BE = b$ af. 4e. Trek uit E de halve rechte EF met dezelfde richting als BA . 5e. Zet G bij het snijpunt daarvan met AC . Dan is $ABEG$ het gevraagde trapezium. Hiervoor zei ik al dat we ook de eis moeten stellen dat de leerlingen de gebruikte woorden goed zullen begrijpen. Want het lijkt soms wel dat ze prachtig allerlei dingen weten te zeggen maar dat ze eigenlijk niet eens de betekenis van hun woorden begrijpen. Het mooiste blijkt dat in de eerste klas meestal als we vragen wat de oppervlakte van een rechthoek is. Het antwoord is dan altijd: lengte maal breedte. Als ik daar niet tevreden mee ben en bijvoorbeeld vraag de oppervlakte van een rechthoekig bord aan te wijzen dan blijken verschillende leerlingen dat niet te kunnen. Daarna vraag ik meestal waarom we nu die oppervlakte berekenen door lengte en breedte met elkaar te vermenigvuldigen en of het niet veel aardiger zou zijn daar eens wat anders voor te bedenken. Het antwoord is altijd dat we dan de oppervlakte niet krijgen, maar waarom dan niet weten ze niet. Tenslotte moet ik er dan wel toe overgaan de oppervlakteberekening uit te leggen. Dit is nu één voorbeeld, maar de meeste woorden die we gebruiken worden niet begrepen voor we ze helemaal uitgelegd hebben.

Daarom moeten we de lesuren van het eerste leerjaar behalve aan de constructies en het passen en meten, wijden aan het bespreken en uitleggen van allerlei woorden en begrippen. En dat zijn dan juist ook dikwijls de prettigste lesuren. We zetten ons er op ons gemak bij en praten alsof we de tijd hebben, op allerlei opmerkingen van de leerlingen gaan we uitvoerig in en de gekke antwoorden worden een beetje extra belicht, en er wordt zo eens hartelijk gelachen. Is zo'n les voorbij dan hebben de leerlingen hun taalschat uitgebreid, ze begrijpen ons beter in de volgende lessen en ze hebben echt plezier gehad. Dan willen ze ook een volgende les waarin we wat strenger

de hand moeten houden aan de nauwkeurigheid en wat meer van ze moeten eisen met plezier aanvaarden.

De lessen waarin de leraar eens met de klas praat en filosofeert scheppen het zo gewenste contact en dikwijls een verhouding die op vriendschap gaat lijken. Nu leert de experimentele psychologie, en ook onze ervaringen wijzen in die richting, dat het leren van iets meest niet een continu verlopend proces is, maar dat het dikwijls sprongsgewijs gaat. Voor heel veel levensgebieden die geleerd moeten worden bestaat een zogenaamde gevoelige periode. In deze periode vindt dan de sprong plaats. Opeens voel je dat je de zaak begrijpt en beheerst. Het is dan niet meer een onbekende leerstof maar een vertrouwd gebied van kennis waarop het alleen nog maar nodig is die kennis uit te breiden en te verdiepen maar waarop de fundamentele moeilijkheden zijn overwonnen.

We moeten daarom ook niet verwonderd zijn als een leerling zegt onze uitleg te begrijpen en er blijk van geeft de quintessence ervan niet gevat te hebben. We moeten ons daardoor niet laten ontmoedigen en dapper doorgaan met doceren. Soms komt dan opeens het moment dat de leerling het "doorkrijgt" en dan is de overwinning behaald.

Maar nu is het toch ook wel gebleken dat het abstraheren dat bij de wiskunde zo belangrijk is pas geleerd kan worden op oudere leeftijd dan de leerlingen in onze eerste klassen hebben. Daarom moet toch het logische element bij het aanvankelijk wiskundeonderwijs niet de boventoon voeren maar in de plaats daarvan het technische, het constructieve. Want het is een feit dat de leerlingen aan het construeren en passen en meten veel plezier beleven. Ze mogen graag passer en gradenboog hanteren en zien graag mooie en duidelijke resultaten.

Daarom hebben Prakken en ik in ons boekje [bovengenoemd; MCvH] het gebruik van passer en liniaal en gradenboog zo op de voorgrond geschoven, en veel constructieopgaven gegeven. Daarom behandel ik in mijn lessen ook de congruentiegevallen zoals ik dat in het prospectus bij ons boekje uiteen gezet heb. En het blijkt dat de leerlingen daar plezier in hebben en, dat is het voornaamste, een juist begrip van congruentie krijgen. Daarom ook hebben we het indirecte bewijs en

het invoeren van het begrip axioma zo ver mogelijk verschoven en achter in ons eerste deel gezet.

Het zou mijns inziens echter weer ganselijk verkeerd zijn in het uiterste te vervallen, waarvan het boekje van Petermann en Hagge [Petermann-Hagge, *Gewachsene Raumlehre*. Uitg. Herder & Co, Freiburg; MCvH] een mooi voorbeeld is, namelijk de eerste tijd niets anders laten doen dan construeren en proberen en ontdekken en dan occasioneel te wijzen op eigenschappen en verband daartussen. Want een andere waarheid die ik in de praktijk heb menen te ontdekken is dat ieder met veel meer interesse studeert als hij een duidelijk doel ziet en een duidelijk systeem van werken. Daarom moeten we nooit verzuimen onze leerlingen te wijzen op de plaats in het geheel van het detail dat we bezig zijn aan te leren.

Ik begin mijn wiskundelessen dan ook meestal met een inleiding waarin ik een historisch overzicht geef van de hoofdlijnen van de ontwikkeling der wiskunde, waardoor de leerlingen gaan zien dat het werken met passer en gradenboog maar niet alleen een spelletje is maar een inleiding tot een studie waaraan de grootste geesten van de geschiedenis zich gewijd hebben. En ik wijs ze op het grote praktische belang van de wiskunde, op het feit dat vooral de moderne techniek, dus eigenlijk het hele moderne leven, niet die vlucht zou hebben genomen als de wiskunde niet zo'n grote mate van ontwikkeling had gehad.

Maar ook bij het begin van elk nieuw onderdeel is het goed er even op te wijzen, waarom dat begonnen wordt en welk belang dat heeft voor het geheel.

Ik heb in het voorgaande telkens als ik het woord wiskunde gebruikte voornamelijk aan de vlakke meetkunde gedacht omdat ons die wel bij het wiskundeonderwijs de zwaarste eisen stelt. Ik wil nu nog iets zeggen over de algebra. Evenals bij de meetkunde begin ik in de eerste algebrales met iets te zeggen over de historische ontwikkeling daarvan. Daarna begin ik direct met de negatieve getallen. Ik doe dat omdat het negatieve getal iets geheel nieuws voor de meeste leerlingen is en omdat ze toch al de wiskunde leren beschouwen als iets interessants omdat het iets anders is dan anders, zodat ze meestal (het moge gek klinken) verlangend naar de eerste wiskundelessen uitzien, probeer ik ook zo lang

mogelijk de sfeer van het interessante en geheel andere te bewaren en begin daarom ook met datgene wat ze ongetwijfeld merkwaardig zullen vinden. Daar komt bij dat de sommetjes die we over negatieve getallen kunnen opgeven niet al te moeilijk zijn en dat we er later bij de andere algebraopgaven zoals het haakjes weglaten enz. er een reuzengemak van hebben dat het optellen van de negatieve getallen geen moeilijkheden meer geeft.

Natuurlijk stel ik het aftrekken en vermenigvuldigen van de negatieve getallen uit tot wat later zodat ik mij eerst alleen tot het optellen ervan beperk.

Zijn de eerste grondbeginselen van de algebra aangebracht dan is er eigenlijk het hele jaar door niets anders te doen dan het verder ontwikkelen daarvan, maar dat stelt ons niet voor grote didactische moeilijkheden. De hoofdzaak is dunkt mij bij de algebralessen zo min mogelijk uit te leggen en zo veel mogelijk door de leerlingen zelf te laten doen. Dat maakt dat ze veel schrif-

telijk werk moeten maken, maar dat hoeft niet al te veel correctie te geven als we het werk klassikaal nakijken en dan, terwijl in het laatste kwartier van de les de leerlingen bezig zijn hun nieuwe huiswerk te maken, van een stuk of zes de schriften nauwkeurig en streng te controleren. Als we er dan aantekening van houden wie we gecontroleerd hebben, dan krijgt ieder daar mee in de loop van enige weken een beurt en dat blijkt wel voldoende te zijn in de meeste gevallen om net en betrouwbaar werk te krijgen. Van het gezamenlijk nagekeken werk wordt door de leraar het aantal fouten genoteerd, meer voor de aanmoediging dan om er bij de bepaling van het rapportcijfer rekening mee te houden. Dat wordt gemaakt van de proefwerkcijfers.-

Ik eindig nu maar deze causerie die ik meer wens te beschouwen als een inleiding tot een mogelijke bespreking dan als een voordracht die de zaak voldoende van alle zijden belicht.

ADVERTENTIE

GEZOCHT: Ex-wiskundedocenten,

die onlangs of een paar jaar, met pensioen zijn en mee willen doen aan een innovatief project dat een paar maanden duurt om het wiskunde vak begrijpelijker te maken voor middelbare scholieren.

Docenten werken van huis en zullen een aantrekkelijke financiële vergoeding tegemoet zien.

Bel of e-mail Alexander Soeters
(06-24678311; soeters@live.com)

Vanuit de oude doos

A^o 1925

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw – tot in de tweede wereldoorlog – in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Dit jaar ligt de nadruk op algebra, goniometrie en analytische meetkunde. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Wellicht met enige hulp of als praktische opdracht.

Deze keer volledige inductie, een meetkundige rij en een meetkundige plaats. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgaven wel erg eenvoudig voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.

Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1 (1925)

Als aan de vergelijking

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + x^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + x)^2$$

voldaan wordt voor $x = n$ dan zal dit ook het geval zijn voor $x = n + 1$.

Bewijs dit.

Opmerking. De formulering kan krachtiger. Je kunt namelijk ook laten aantonen dat deze vergelijking geldt voor elke positieve gehele waarde van x . Een oefening in volledige inductie dus. De gebruikte formulering uit 1925 laat in het midden of de vergelijking wel of niet klopt.

Opgave 2 (1925)

Van een afdalende M.R. is de limiet van de som = 10. Neemt men van de tweede, vierde, zesde enz. term het tegengestelde dan is de limiet van de som = 2. Hoeveel termen moet men in de oorspronkelijke reeks tussen elke twee opeenvolgende termen minstens interpoleren om voor de limiet der som zeker meer dan 100 te vinden?

Opmerking. M.R. staat voor *meetkundige rij*; in 1925 werd een *rij* nog *reeks* genoemd. Met *interpoleren* wordt hier bedoeld dat je tussen elk opvolgend tweetal van de meetkundige rij getallen plaatst waarbij door deze uitbreiding de rij toch meetkundig blijft.

Opgave 3 (1925)

Gegeven een parabool $y^2 = 16x$ en een punt $P(+4, +5)$. Door P trekt men een willekeu-

rige lijn, die de parabool in A en B snijdt.

Bepaal de meetkundige plaats van het midden van AB als de snijlijn om P wentelt.

Uitwerkingen

Opgave 1 – We korten even af en vervangen $1 + 2 + 3 + \dots + x$ door a , dan is het rechterlid gelijk aan a^2 .

Gaan we in het linkerlid door tot $(x + 1)$, dan krijgen we:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + x^3 + (x + 1)^3$$

De inductiestap: vervang in deze vorm $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + x^3$ door $(1 + 2 + 3 + \dots + x)^2$ (dit is gelijk aan a^2), zodat het linkerlid gelijk is aan:

$$(1) \dots a^2 + (x + 1)^3$$

Gaan we in het rechterlid door tot $(x + 1)$, dan krijgen we:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + x + (x + 1))^2 =$$

$$(2) \dots = (a + (x + 1))^2 = a^2 + 2a \cdot (x + 1) + (x + 1)^2$$

De uitdrukkingen (1) en (2) zijn aan elkaar gelijk wanneer geldt:

$$(x + 1)^3 = 2a \cdot (x + 1) + (x + 1)^2$$

Deel hierin een factor $(x + 1)$ weg. We moeten nu laten zien dat geldt:

$$(3) \dots (x + 1)^2 = 2a + (x + 1)$$

Nu is $a = 1 + 2 + 3 + \dots + x$ de som van een rekenkundige rij. Deze som is gelijk aan (aantal termen $\times$ gemiddelde term), dus:

$$a = x \cdot \frac{1+x}{2} = \frac{1}{2}x(x+1)$$

Invullen hiervan in (3) geeft dan:

$$(x + 1)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}x(x+1) + (x + 1) = x(x+1) + (x+1)$$

en die uitdrukking klopt natuurlijk. Klaar! Omdat de gegeven vergelijking klopt voor $x = 1$, want $1^3 = (1)^2$, is deze uitdrukking dus inderdaad waar voor elke positieve gehele x .

Opgave 2 – We gebruiken de formule van de limiet van de som S van een oneindige meetkundige rij met beginterm a en reden r :

$$S = \frac{a}{1-r}$$

De rij heeft reden r en de *alternerende* rij dus $-r$, bij dezelfde beginterm a , dus geldt:

$$\frac{a}{1-r} = 10 \quad \text{en} \quad \frac{a}{1+r} = 2$$

Met als oplossing: $r = \frac{2}{3}$ en $a = 3\frac{1}{3}$.

Stel dat we de rij gaan verfijnen zodat tussen twee opvolgende termen in de oorspronkelijke rij n getallen komen.

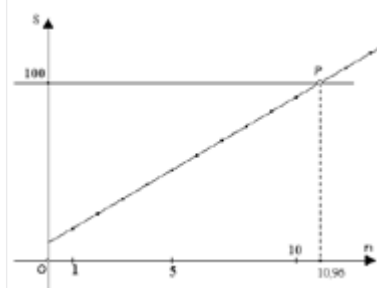
Wanneer de reden dan g is, moet dus gelden: $g^{n+1} = r = \frac{2}{3}$, dus $g = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

Voor de limiet van de somrij moet nu gelden: $S = \frac{3\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}} \geq 100$.

De vergelijking $S = 100$ kan algebraïsch worden opgelost, met als oplossing:

$$n = \frac{1}{\frac{2}{3} \log\left(\frac{29}{30}\right)} - 1 \approx 10,96$$

En dat zal u wel lukken. Het kan natuurlijk ook met de grafische rekenmachine, met een grafiek als *in figuur 1* en *intersect*.



figuur 1

Dus moeten er tenminste 11 termen tussen de termen van de oorspronkelijke meetkundige rij worden gevoegd.

Opgave 3 – Het is hier de kunst om handig te rekenen. Eerst een werktekening; *zie figuur 2*.

Een willekeurige lijn door P , de lijn AB dus, heeft de gedaante $y = a(x - 4) + 5$.

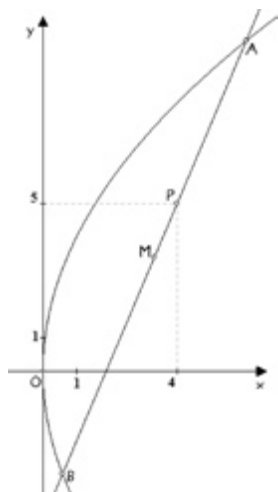
Voor de x -coördinaten van snijpunten van AB met de parabool $y^2 = 16x$ geldt dus:

$$(a(x - 4) + 5)^2 = 16x$$

Herschrijf dit tot een kwadratische standaardvergelijking in x :

$$(4) \dots$$

$$a^2x^2 + (-8a^2 + 10a - 16)x + (16a^2 - 40a + 25) = 0$$



figuur 2

De *abc*-formule geeft:

$$x_{A,B} = \frac{8a^2 - 10a + 16 \pm \sqrt{D}}{2a^2}$$

waarna bij de bepaling van het gemiddelde van x_A en x_B (= de x -coördinaat van het midden M van AB) de discriminantvorm D wegvalt:

(5a)...

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8a^2 - 10a + 16}{2a^2} = 4 - \frac{5}{a} + \frac{8}{a^2}$$

Invullen van (5a) in de vergelijking van AB geeft:

(5b)...

$$y_M = a \left(4 - \frac{5}{a} + \frac{8}{a^2} - 4 \right) + 5 = \frac{8}{a}$$

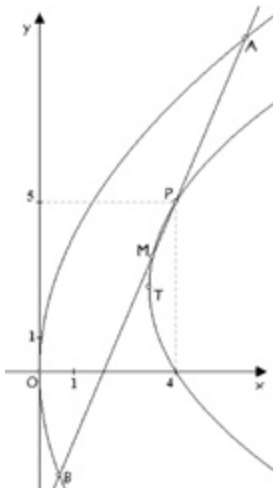
Dus: $a = \frac{8}{y_M}$

Invullen van deze waarde van a in uitdrukking (5a) geeft:

(6)...

$$x_M = 4 - \frac{5}{\frac{8}{y_M}} + \frac{8}{\left(\frac{8}{y_M}\right)^2} = 4 - \frac{5}{8} y_M + \frac{1}{8} y_M^2$$

De coördinaten van het punt M voldoen daarmee, na uitwerken en herschikken van (6), aan:



figuur 3

(7)...

$y^2 - 5y = 8x - 32$
Het midden M van AB doorloopt dus de parabool met vergelijking (7).

Voor de liefhebber: de parabool heeft top $T = (3\frac{7}{32}, 2\frac{1}{2})$; zie figuur 3. Kwadraat afsplitsen geeft namelijk:

$$(y - 2\frac{1}{2})^2 = 8(x - 3\frac{7}{32})$$

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeverij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Vathorst College te Amersfoort.
E-mailadres: alecluse@casema.nl

AANKONDIGING / LERARENDAG OP NMC 2011

Vrijdag 15 april 2011

Op donderdag 14 en vrijdag 15 april 2011 vindt het 47e **Nederlands Mathematisch Congres** (NMC 2011) plaats op het campusterrein van de Universiteit Twente. Dit jaarlijks congres is de ontmoetingsplek bij uitstek van heel wiskundig Nederland. Het programma zoekt de balans tussen wiskunde voor de schoonheid van de wiskunde en wiskunde voor de schoonheid van de toepassingen en richt zich nadrukkelijk ook op vo-docenten en de aanstormende generatie wiskundigen.

Op vrijdag is een *lerarendag* geprogrammeerd met een groot symposium Wiskunde en Onderwijs, bestaande uit twee deelsymposia met in de ochtend aandacht voor het vo-docentschap wiskunde en in de middag voor de wiskunde-aansluiting tussen voortgezet en hoger onderwijs.

Toelichting

Het beroep van vo-docent wiskunde kent verschillende aspecten. De opleiding tot het ambt, zijn positie in schoolorganisatie en maatschappij, zijn professionaliseringsmogelijkheden, de verandering in te doceren programma's; al deze raakvlakken kleuren het programma op deze lerarendag. Op het punt van de aansluiting tussen de programma's van het vo en het ho geven een onderzoeker en een docent uitleg, en wordt er tijdens dit dagdeel op dit thema een forumdiscussie gevoerd.

Praktische informatie

Datum: **vrijdag 15 april 2011**, campus Universiteit Twente in Enschede.
De twee symposia vallen in het dagprogramma rond de lunchpauze.
Voor verdere informatie en inschrijving zie: www.utwente.nl/ewi/nmc2011

Kan wiskunde de wereld redden?

BOEKBESPREKING / PYTHAGORAS EN DE RECHTVAARDIGE RECHTERS

[Joke Verbeek]

Tijdens de Quintana van Ascoli Piceno vindt er een gerichte aanslag plaats op de officier van justitie. Wat heeft deze moord met Pythagoras te maken? En wat met het Middeleeuwse schilderij Het Lam Gods? En waar zijn de Rechtvaardige rechters, het paneel dat ruim 75 jaar geleden in de nacht van 10 op 11 april werd gestolen en nooit werd teruggevonden? De kaarten zijn slecht, maar als je ze goed uitspeelt blijft er voor Sophia en Matteo een statistische kans op geluk. De vraag is of de wiskunde de wereld kan redden.

Auteur: Jan Helmer

Uitgever: Pythagoras

Project (2010)

Website:

www.pythagorasproject.nl

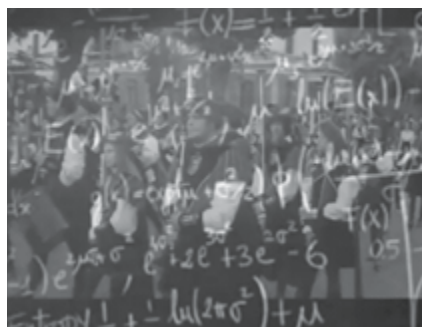
ISBN: 978 90 8118432 8

Prijs: € 16,90

(224 pagina's; hard cover)



Bovenstaande tekst komt uit de *trailer* bij de onlangs uitgebrachte wiskunderoman van wiskundedocent Jan Helmer, *Pythagoras en de rechtvaardige rechters*.^[1] Een perfecte trailer, met prachtige geheimzinnige beelden en dito muziek. Je krijgt onmiddellijk zin het boek te gaan lezen om het antwoord te achterhalen. Of is wachten op een verfilming een beter idee? En wat zou er in die film van de wiskunde, een belangrijk onderdeel in de roman, overblijven?



figuur 1 Uit de trailer van Pythagoras en de rechtvaardige rechters

Natuurlijk kan een wiskunderoman niet onbesproken blijven in *Euclides*, ook al zijn in diverse wiskundetijdschriften al recensies verschenen.

Het 224 bladzijden tellende boek is een vervolg op *Het Mysterie van Pythagoras*. De twee hoofdpersonen maken – net als in het eerste boek – allerlei avonturen mee met daarin mystieke gebeurtenissen, waarbij de oude Pythagoras hun de helpende hand reikt als ze dreigen het onderspit te delven. De gekozen thematiek – een moordaanslag,

de Italiaanse onderwereld, een in België hangend schilderij, een ontvoering – is boeiend genoeg voor een spannend boek en de schrijver laat door gedetailleerde beschrijvingen zien dat hij meer van deze onderwerpen afweet dan de gemiddelde mens. Hij heeft het zich niet gemakkelijk gemaakt door schoolwiskunde functioneel te willen gebruiken in het verhaal en het ook nog eens begrijpelijk te maken voor leerlingen die de stof niet kennen. Voorwaar geen sinecure. Het mag een wonder heten dat de schrijver in zijn opzet geslaagd is en kans heeft gezien een lezenswaardig boek te schrijven dat al deze facetten omvat. Want lezenswaardig is het zeker, af en toe zelfs spannend.

De wiskunde in de roman – Statistiek en Rekenen met kansen – is op het niveau van de tweede fase. Daarom heb ik twee leerlingen uit de doelgroep gevraagd het boek te lezen en hun commentaar op papier te zetten.

De tweelingzussen Marije en Pieternel van Braak wilden hun kerstvakantie wel gebruiken om deze klus te klaren. Beide zussen zitten op de Jacobus Fruytier scholengemeenschap (Apeldoorn) in de 5e klas van het Lyceum in de TTO-variant. Alle twee hebben ze wiskunde B in hun pakket.

Ze pakken het recenseren gedegen aan en hebben de taken verdeeld. Hieronder hun bevindingen.

Pieternel – Algemeen

Ik vond het leuk om ook eens een keer een heel speciaal boek te lezen – volgens mij is een wiskunderoman niet een boek dat past in een alledaags genre. De manier van schrijven viel me tegen, de wiskunde vond ik geweldig. Wel vond ik het jammer dat de auteur helemaal aan het eind van het boek nog even met zichzelf op de proppen kwam (blz. 214: 'Els en Mike kennen bij hen in de buurt een Nederlandse wiskundige. Hij heeft daar een vakantiehuis. Of hij al met pensioen is, weet ik niet. Maar hij is integer, heeft geen banden met welke organisatie dan ook en zou er een boek over kunnen schrijven. (...) Hij heeft voor diverse wiskundemethoden geschreven, was eind-redacteur...'). Dat hoeft van mij echt niet: de kans dat er een klein beetje eigendunk om de hoek komt kijken is gevaarlijk nadrukkelijk aanwezig...

Marije – Relatie titel en inhoud van het boek

Zo op het eerste gezicht is de relatie tussen de titel en de inhoud van het boek niet duidelijk. Zelfs het verband tussen *Pythagoras* en de *Rechtvaardige Rechters* was voor mij pas gaandeweg het boek zichtbaar. Ik had in ieder geval het hele boek nodig om de titel te begrijpen, maar dat is tegelijk ook de bedoeling van een (pakkende) titel!

Pieternel – Schrijfstijl

Ik ben niet zo weg van de schrijfstijl van de auteur. Het doet een beetje amateuristisch aan, vooral in de dialogen. Hij schrijft

APS-Exact

Ook in het schooljaar 2010-2011 organiseert APS-Exact diverse cursussen en studiedagen, zoals:

Maandag 11 april 2011

Woensdag 27 april 2011

Maandag 16 mei 2011

Maandag 6 juni 2011

Wiskunde ICT-conferentie: onderzoek en praktijk

Studiedag Wiskunde op de TI-84+ voor starters

Studiemiddag Rekenen getoetst

Studiemiddag Rekenbeleid bij u op school

U kunt zich aanmelden
via onze site
www.aps.nl/exact >
Activiteitenagenda

informatie

Bel of schrijf voor meer informatie:
APS-Exact
Postbus 85475
3508 AL Utrecht
Tel.: 030 - 28 56 722
voortgezetonderwijs@aps.nl
www.aps.nl/exact



leren
inspireren

exact: kort, bondig, zin na zin. Er zit weinig tot geen retoriek in zijn verhaal. Voor het verhaal zelf vind ik dat jammer (te meer omdat hij bijvoorbeeld Els op bladzijde 98 laat zeggen dat het hele verhaal wel op de Da Vinci Code begint te lijken!), maar aan de inhoud van het boek doet deze schrijfstijl niet veel af.

Marije – Integratie wiskunde in het verhaal

In dit boek kon ik duidelijk twee aspecten onderscheiden: de wiskunde en het verhaal. Soms had ik het idee dat de auteur een verhaal had gezocht om zijn wiskunde aan te kleden. Bijvoorbeeld als Sophia met de bus voor de tweede keer naar Het Lam Gods wil: ze kan dan kiezen of ze lijn 28, 27 of 34 neemt. Ze denkt dan aan het drie-deuren-probleem, maar neemt uiteindelijk de 34 omdat die er al aan komt. Ik vind het niet zo waarschijnlijk dat je als moeder, terwijl je zoon ontvoerd is, tijdens het kiezen van een bus aan deze dingen denkt.

Pieterneel – De Wiskundeblokken

De informatie in de grijze blokken is duidelijk, zelfs voor iemand die geen wiskunde-A volgt (en dus bijna geen basiskennis van kansrekenen heeft). Ik vond het fantastisch om door middel van *dit boek* ook eens aan een hele andere soort wiskunde te ruiken!

De blokken zijn helder van opzet en de uitleg is compleet. Wel zou de wiskunde naar mijn idee nog duidelijker uit de verf zijn gekomen wanneer de auteur uit de verhaallijn was gestapt. Nu maakt diezelfde vastgehouden verhaallijn de blokken soms een beetje rommelig. Ik moest de theorie eruit filteren en tegelijk proberen die theorie te begrijpen. Dat was in sommige gevallen best wel pittig (al is dat ook wel eens leuk!).

Marije – Bijlagen

Over het algemeen vind ik de bijlagen en ook het nawoord leuk, relevant en doelgericht. Om het boek meer tot zijn recht te laten komen, ook voor minder oplettende lezers, zou ik alleen de samenvatting van deel 1 (bijlage 1, bladzijde 218 en 219) voorin het boek hebben gezet. De π -prijsvraag spreekt erg tot de verbeelding en prikkelde m'n fantasie, mede door het Engelse rijmpje op de decimalen van het getal π . Erg leuk dat het nawoord van Pythagoras 'in eigen persoon' op bladzijde 216 staat! Ik dacht bij mezelf: daarom is er natuurlijk na bijna elk hoofdstuk een complete bladzijde leeg!

Marije – Doelgroep

Op de website van het *Pythagoras Project* staat dat de auteur opzettelijk een jonge

jongen en een jong meisje als hoofdpersonen heeft gekozen, zodat de lezers zich met deze figuren kunnen identificeren. Dit is hem, vind ik, maar gedeeltelijk gelukt: er zit zeker spanning in en de thema's zijn ook wel thema's die passen bij de doelgroep, maar de gevoelens van de hoofdpersonen als vader en moeder passen daar net weer niet bij. De wiskunde die in dit boek verwerkt is, is op niveau. Dit maakt het boek voor jongelui die wiskunde leuk vinden, verrassend, maar ik denk dat het jongeren die wiskunde een wekelijks ramp vinden, juist afstoot: zo'n boek moet je echt *willen* lezen. Daar verandert de thematiek niets aan. De manier van schrijven sluit meestal wel aan bij de jongeren.

Noot

[1] Zie: www.youtube.com/watch?v=g5TQ1FEi5LA

Over de recensent

Joke Verbeek is redacteur van *Euclides* en docent wiskunde op het Aretheem College in Arnhem.
E-mailadres: jokeverbeek@chello.nl



De kennisbasis van de masteropleidingen wiskunde

[Douwe van der Kooi]

Landelijke kennisbasis voor lerarenopleidingen

In het julinumnummer van *Euclides* in 2009, nummer 84(8), berichtte ik over de landelijke kennisbasis van de tweede graads opleiding wiskunde. Inmiddels is die kennisbasis vastgesteld en is de tweede fase van het project ingegaan, namelijk de ontwikkeling van kennistoetsen.

Aan het einde van zijn opleiding, wanneer mag worden aangenomen dat de student de kennisbasis beheerst, zal die kennistoets worden afgenomen. In zekere zin is het vergelijkbaar met het Centraal Examen in het voortgezet onderwijs. Een belangrijk verschil evenwel is dat de toetsen niet worden ontwikkeld door een onafhankelijke instelling als het Cito, maar door docenten uit de sector zelf. Bovendien zijn het multiple-choice-toetsen die digitaal worden afgenomen. De toetsenbanken worden ondergebracht bij STOAS.

Momenteel wordt gewerkt aan een systeem van kwaliteitsbewaking, waarbij het vooral gaat om de vraag bij welke onafhankelijke instantie dit kan worden ondergebracht. Om enig inzicht te krijgen in de kwaliteit van de vragen worden dit jaar pretests op de lerarenopleidingen afgenomen bij eerste- en vierdejaars studenten. Naar verwachting zal het aanstaande cohort, dus de studenten die het volgend studiejaar met hun bacheloropleiding beginnen, voor het eerst aan het einde van hun studie de eindtoets over de kennisbasis moeten afleggen.

Synchroon hiermee is er een kennisbasis voor de educatieve masteropleidingen ontwikkeld. In Nederland kan men in vijf

plaatsen via een hbo-master een eerste graads bevoegdheid krijgen, te weten in Amsterdam (HvA, domein Onderwijs en Opvoeding), Leeuwarden (NHL), Nijmegen (HAN), Utrecht (Archimedes) en Tilburg (Fontys).

Vanaf begin 2010 zijn docenten van deze masteropleidingen met elkaar in gesprek gegaan waarbij ze – hun curricula met elkaar vergelijkend – reeds voor de zomervakantie 2010 erin geslaagd zijn om een landelijke kennisbasis voor de masteropleidingen te concipiëren. Het laat zich raden dat dit geen sinecure is geweest. De opleidingen kennen een traditie van betrekkelijke autonomie. Daarmee is niet gezegd dat de kwaliteit van de opleidingen van elkaar verschilt. Maar op de ene opleiding, zo bleek, wordt wat meer aan analyse gedaan, op de andere opleiding wat meer aan meetkunde en op een derde opleiding hebben grondslagen van de wiskunde en logica een wat prominenter plaats in het studieprogramma. Spreek je een gezamenlijke kennisbasis af dan heeft dat een effect op het eigen curriculum. Traditionele cursussen zullen verdwijnen en nieuwe cursussen moeten worden ontwikkeld. Overigens is het niet zo dat er met de invoering van deze kennisbasis een nationaal curriculum is vastgelegd. De kennisbasis is zo opgesteld dat hogescholen een zekere mate van vrijheid hebben om zich te profileren, maar dan wel binnen helder omschreven kaders. In november 2010 is er een legitimeringsbijeenkomst geweest waarbij een breed samengesteld panel zijn goedkeuring heeft gegeven aan

deze kennisbasis, behoudens een kleine kanttekening. Of er ook landelijke kennistoetsen voor de masteropleidingen zullen worden ontwikkeld is vooralsnog onduidelijk. De opleidingen zitten daar niet op te wachten omdat het vrijwel ondoenlijk is om honderden gevalideerde vragen op niveau te concipiëren over bijvoorbeeld projectieve meetkunde. Bovendien biedt het accreditatiestelsel voldoende waarborgen om het op de opleidingen gerealiseerde eindniveau te beoordelen. Gelet op de bezuinigingen die dit kabinet in het onderwijs wil realiseren, ligt het niet in de verwachting dat er, zoals dat wel in de bacheloropleidingen binnen afzienbare termijn het geval zal zijn, landelijke examens ter afsluiting van de masteropleiding zullen worden ontwikkeld en afgenomen.

De inhoud van de kennisbasis van de masteropleidingen

De kennisbasis onderscheidt een zestal domeinen, te weten analyse, meetkunde, algebra en discrete wiskunde, statistiek en kansrekening, wetenschappelijke grondslagen en ontwikkelingen, en tot slot vakdidactiek. Deze domeinen zijn opgesplitst in subdomeinen. Sommige daarvan zijn verplicht. Uit de niet-verplichte subdomeinen zijn opleidingen vrij om één of meer keuzes te maken. Per subdomein wordt in algemene termen beschreven wat een startbekwaam docent moet kennen en welke concepten begrepen moeten worden. Vervolgens worden indicatoren gegeven hoe die kennis op masterniveau begrepen moet worden,



waarmee ook een indicatie wordt gegeven voor het niveau van de toetsing. Tot slot zijn er voorbeelden van toetsvragen opgenomen. Om bovenstaande te verhelderen staan aan het einde twee voorbeelden.

Domein: Analyse

Subdomein: Dynamische systemen, verplicht onderdeel

Omschrijving – De startbekwame docent kent en begrijpt de volgende concepten: lineaire en niet-lineaire differentie- en differentiaalvergelijkingen, oplossingsmethoden, stabiliteit, stelsels differentie- en differentiaalvergelijkingen, faseportret. Voorts een keuze uit: machtrekssubstitutie, numeriek oplossen, periodiciteit, chaos en fractals.

Indicatoren masterniveau

De startbekwame docent kan:

- discrete en continue (stelsels) differentiaalvergelijkingen opstellen en gebruiken bij toepassingen zoals koelwet, trillingen, roofdier-prooidiermodellen;
- eerste en tweede orde differentiaalvergelijkingen (dv) oplossen met diverse oplossingsmethoden; een ruime selectie uit: scheiding van variabelen, integrerende factor, homogene dv, exacte dv, dv van Bernoulli, dv van Euler, variatie van constanten;
- lineaire stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen omzetten naar hogere orde differentiaalvergelijkingen en andersom en oplossen, o.a. met behulp van eigenwaarden;
- de stabiliteit van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen analyseren met behulp van een faseportret en de aard van kritieke punten typeren;
- zich naast bovenstaande basistheorie verder theoretisch verdiepen in minstens één van de onderstaande onderwerpen, en kan
- differentiaalvergelijkingen oplossen met een machtrekssubstitutie;
- met verschillende numerieke methoden, bijvoorbeeld de methode van Heun of

de Runge-Kutta methode, oplossingen van differentiaalvergelijkingen numeriek benaderen;

- met behulp van de theorie van Bendixson en Poincaré de periodiciteit van oplossingen en de stabiliteit met de methode van Lyapunov onderzoeken;
- theorie van discrete dynamische systemen toepassen in chaos- en fractaltheorie.

Kenmerkende voorbeeldvragen over dit onderwerp van de kennisbasis

Voorbeeld 1

Los op: $xy' + y = y^2 \ln x$ (geen voorwaarden; wel geldt $x > 1$).

Voorbeeld 2

In een tank met 100 liter water is 5 kg zout opgelost. Aan de bovenkant van de tank laat men op tijdstip $t = 0$ schoon water in de tank stromen met een snelheid van 2 liter per minuut. Aan de onderkant van het vat zit een opening waaruit het (zoute) water met een snelheid van 3 liter per minuut wegloopt. Midden in de tank zit een ronddraaiende schroef die het water in de schroef voortdurend mengt. Omdat er schoon water in de tank stroomt en zout water wegloopt, zal de hoeveelheid opgelost zout in de tank afnemen.

- Geef de hoeveelheid zout (in kg) in de tank op tijdstip t aan met $m(t)$.
- Stel een differentievergelijking op voor de massa zout en bepaal met die differentievergelijking de hoeveelheid zout na 8 minuten als $\Delta t = 0,5$ minuut.
- Leid uit de differentievergelijking een differentiaalvergelijking af en los die op.
- Bereken met de oplossing van vraag c de hoeveelheid zout in de tank na 8 minuten en vergelijk je antwoord met het antwoord van vraag b.

Tot slot

Zodra de kennisbases van de masteropleidingen volledig zijn goedgekeurd, zullen ze, net als de kennisbases van de bacheloropleidingen, terug te vinden zijn op de website van Kennisbasis (www.kennisbasis.nl).

Over de auteur

Douwe van der Kooi is opleidingsmanager cluster exact van de Hogeschool van Amsterdam (domein Onderwijs en Opvoeding), en is daarnaast bestuurslid van de NVvW.
E-mailadres: d.van.der.kooi@hva.nl

De afstand tussen rechthoek en vierkant

[Frits Göbel]

Als een natuurlijk getal n geen kwadraat is, zou je kunnen vragen naar de 'afstand' van het getal tot een kwadraat. Een mogelijke definitie voor deze afstand is het verschil tussen n en het dichtstbijzijnde kwadraat. Dit is een nogal saaie functie van n : hij maakt geen grote sprongen en hij wordt gemajoreerd door $\sqrt{n}$.

Een andere mogelijkheid berust op een ontbinding van n in twee factoren:

$$f(n) = \min |d, n/d|$$

over alle delers d van n .

Dus $f(9) = 0$, $f(10) = 3$, $f(11) = 10$ en $f(12) = 1$; **zie ook figuur 1**.

Je kunt hier denken aan n pionnetjes in d rijen van n/d als d een deler van n is.

In het rechthoekige patroon streef je dan naar een zo klein mogelijk verschil tussen lengte en breedte. (De ' f ' staat voor 'four'. En nu maar hopen dat deze functie niet op het Internet staat!

Opgave 1

Laat zien dat de fractie even waarden van f ligt tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$.

Opgave 2

Laat zien dat ieder geheel getal groter dan of gelijk aan 0 als waarde van f optreedt.

Opgave 3

Geef een recept om voor een gegeven getal w de kleinste n met $f(n) = w$ te bepalen.

Het wordt interessanter als we kijken naar de verschillen $v(n) = |f(n+1) - f(n)|$.

Voor geen enkele waarde van n geldt $v = 0$, slechts twee keer geldt $v = 1$, terwijl een sprong van 2 oneindig vaak voorkomt. Dit is eenvoudig na te gaan.

Voor het geval $v = 3$ hebben we een resultaat nodig dat tot nu niet is bewezen: de Tweeling-hypothese. Deze luidt: er bestaan oneindig veel paren priemgetallen $(p, p+2)$.

Opgave 4

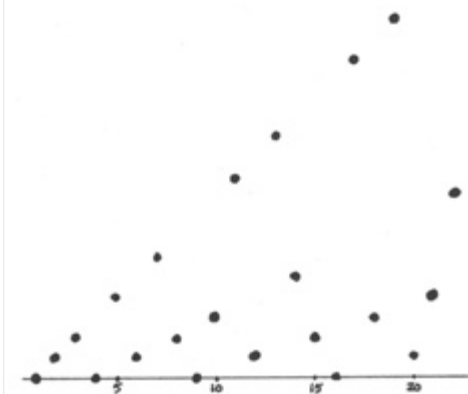
Laat zien dat onder de Tweeling-hypothese het verschil 3 oneindig vaak voorkomt.

Er bestaan overigens uitgebreidere versies van de Tweeling-hypothese. In het boek *Unsolved Problems in Number Theory* van R.K. Guy (Springer Verlag, ISBN 978-0387942896) lezen we:

'A conjecture more general than the Twin Prime Conjecture is that there are infinitely many sets of primes of any given pattern, provided that there are no congruence relations which rule them out. It seems likely, for example, that there are infinitely many triples of primes $\{6k-1, 6k+1, 6k+5\}$ and $\{6k+1, 6k+5, 6k+7\}$.'

Wie de opgaven te eenvoudig vindt, kan ook andere sprongen onderzoeken, eventueel met toepassing van de uitgebreide Tweeling-hypothese.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@uws.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 26 april. Veel plezier!



figuur 1

OPLOSSING 86-3

Partities van S met product ook S

Er waren deze keer 22 inzenders. De opgaven werden niet echt moeilijk gevonden.

Opgave 1 – Eén inzender vroeg zich af of ‘karakterisering’ bedoeld is als: ‘geef een nette formule waaruit n bij gegeven a en b kan worden opgelost’.

Dat was dus niet de bedoeling.

Uit $P = S$ volgt meteen $a + b + n - 2 = ab$. (Sommige inzenders laten het hierbij, maar als dit al een karakterisering is, dan is dat toch geen 10 punten waard.)

Twee stapjes verder vinden we: $n = (a - 1)(b - 1) + 1$, ofwel: **$n - 1$ is deelbaar**.

Opgave 2 is door alle inzenders goed opgelost! Mogelijke antwoorden zijn:

- $n = 12$: $2^{[4]}$, $1^{[8]}$
- $n = 48$: $10, 3, 2, 1^{[45]}$
- $n = 72$: $5, 2^{[4]}$, $1^{[57]}$
- $n = 84$: $8, 4, 3, 1^{[81]}$

Sommigen vonden de vier gevraagde gevallen niet moeilijker dan de overige. Dat ligt natuurlijk aan de aanpak. Een

computerprogramma maakt al helemaal geen onderscheid. Vier van de inzendingen sprongen er uit door extra werk aan de opgaven.

Wobien Doyer gaf een duidelijke beschrijving van de gebruikte methode. Ze begint met partities van de vorm $a, 2, 2, 1^{[n-3]}$. Dit levert een (tweede) oplossing voor $n \equiv 2 \pmod{3}$. Partities van de vorm $a, 3, 2, 1^{[n-3]}$ leiden tot $n \equiv 3 \pmod{5}$, dus ook $n = 48$. Voor de andere drie uit de opgave zijn meer dan twee variabelen nodig.

Hans Linders ging op ongeveer dezelfde manier te werk, maar hij ging door tot de modulus 21, en bepaalde voor al deze gevallen oplossingen in formule-vorm! In principe kun je zo voor gegeven n alle oplossingen bepalen, zoals hij liet zien. Gerhard Riphagen schakelde de computer in en vond zoveel oplossingen dat hij bepaalde patronen kon herkennen, die partities opleverden voor de moduli 2, 3, 6, 7, 8. Hij besluit met ‘enz. enz.’.

Ook Hans Klein gebruikte de computer en bepaalde alle oplossingen voor $n \leq 100$.

Ladderstand

De top van de ladder is nu:

L. v.d. Raadt 583
J. Hanenberg 514
T. Kool 506
H. Linders 457
H. Bakker 423
K. Verhoeven 404
W. v.d. Camp 387
K. v.d. Straaten 384
H.J. Brascamp 352
J. Remijn 324
J. Verbakel 301
L. de Rooij 280

De ladderprijs, een boekenbon ter waarde van € 30,00, is dus gewonnen door Leo van den Raadt. Van harte gefeliciteerd!

De deelnemers worden eraan herinnerd dat de behaalde ladderpunten vervallen als er vijf keer achtereenvolgens niets is ingestuurd.



platform
wiskunde nederland

Hét loket in Nederland voor alles wat met wiskunde te maken heeft



Kom kennismaken bij
de PWN INTRODUCTIE op
zaterdag 14 mei!

Met een gevarieerd programma vieren we de oprichting en de eerste 7 maanden van het Platform Wiskunde Nederland. Maak het mee en laat u informeren over de ambities van PWN en haar commissies.

Kom kijken, luisteren en meedoen met wervende wiskundige activiteiten, een informatiemarkt, diverse sprekers, presentaties en discussies, en wiskundige wonderen.

Meer informatie? Aanmelden? www.platformwiskunde.nl

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen

23. Experimenteren met kansen
 24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en Wiskunde
 28. Voorspellen met Modellen
 29. Getallenbrouwerij
 30. Passen en Meten met Cirkels
 31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
- Zie verder ook www.nvuw.nl/page.php?id=7451 en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvuw.nl/page.php?id=1779
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvuw.nl/page.php?id=7450

Voor overige internet-adressen zie www.wiskundeondersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie www.wiskundeonderwijs.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvuw.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvuw.nl/euclricht.html.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	17 mei 2011	18 mrt 2011
7	28 juni 2011	3 mei 2011

vr. 1 april en vr. 15 april, Amsterdam

Nascholing: Kansrekening en dynamica
Organisatie VU Amsterdam
Zie pag. 170 in *Euclides* 86(4).

donderdag 7 april, Utrecht

Wisselwerking tussen Wiskunde D en NLT
Organisatie BètaSteunpunt Utrecht

maandag 11 april, Utrecht

Wiskunde ICT-conferentie: onderzoek en praktijk
Organisatie APS en Flsme

woensdag 13 april, op de scholen

Grote Rekendag 2011
Organisatie Flsme

do. 14 en vr. 15 april, Enschede

47e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en Universiteit Twente

vrijdag 15 april, Enschede

Lerarendag op NMC 2011
Organisatie KWG en Universiteit Twente
Zie pag. 225 in dit nummer.

vrijdag 29 april, Leiden

Nascholing: Cryptografie, kracht en zwakte
Organisatie Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

zaterdag 14 mei, Utrecht

Symposium XVII: Tijdschriften
Organisatie HKRWO
Zie pag. 204 in dit nummer.

zaterdag 14 mei, Leiden

Startbijeenkomst Platform Wiskunde
Nederland (PWN)
Organisatie KWG en NVvW

wo. 18 t/m do. 26 mei, op de scholen

Centrale Examens wiskunde
Organisatie CvE
Zie pag. 205 in dit nummer.

woensdag 1 juni

Wiskunde D-dag
Organisatie cTWO

vrijdag 10 juni, Utrecht

Bèta onder de Dom
Organisatie BètaSteunpunt Utrecht

wo. 13 t/m zo. 24 juli, Amsterdam

52e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO 2011)
Organisatie Stichting IMO2011



CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf.



2e t/m 6e graads vergelijkingen
2e machtswortels in natural output.



Normale verdeling met grafiek (of tabel) Bereken sigma bij kans = 0.5.



SolveN in menu RUN geeft meerdere antwoorden; soms wel 10.



CASIO FX-9860GII

Dé snelste grafische rekenmachine met tekstboek display.



CASIO FX-82ES

Dé wetenschappelijke rekenmachine met tekstboek display.



Op de Natural Textbook Display worden onder andere breuken en wortels weergegeven, zoals in het leerboek.

De FX-82ES is ook perfect geschikt voor het gebruik van tabellen.

3 jaar garantie

Docentenexemplaar?

Vraag naar de speciale actie:
via e-mail educatie@casio.nl

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

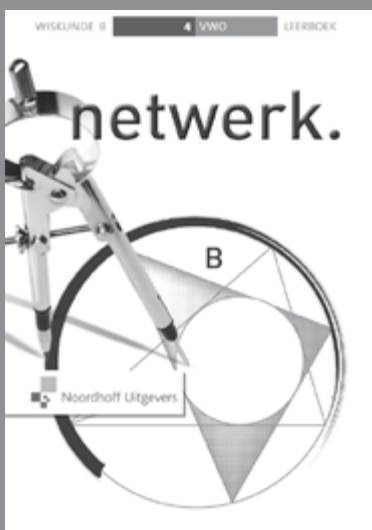
Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl

Stelling

Het **optimum**
ligt bij
Netwerk



Noordhoff Uitgevers



Netwerk 5e editie Tweede Fase:

- Compact arrangement
- Training en onderhoud van algebraïsche vaardigheden
- Biedt ruimte voor de docent
- Schappelijk geprijsd
- TI Nspire: grafische rekenmachine volledig geïntegreerd

Door het uitstellen van het nieuwe examenprogramma wiskunde naar 2015, is 2011 hét jaar om een nieuwe editie in te voeren.

Voor informatie en om een presentatie aan te vragen, ga naar:
www.netwerk.noordhoff.nl

netwerk.

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent