

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

februari

11

nr

4

jaargang 86

Op weg naar IMO2011

Kangoeroe blijft jong

Smarties en wiskunde

In gesprek met...

Terugblik op de
jaarvergadering 2010

WwF en Kenia



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

f e b r u a r i

1 1
n r 4

j a a r g a n g 8 6

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch

Michel van Ast

Klaske Blom, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Marjanne de Nijs

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Klaske Blom,

Westerdoksdijsk 39, 1013 AD Amsterdam

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in driefvoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. Sepideh Moosavi

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: s.moosavi@dekleuver.nl



KORT VOORAF

[Klaske Blom]

Te lezen op de website van het Ministerie van Onderwijs in een Nieuwsbericht (07-12-2010): 'Met minder profielen in de bovenbouw en meer aandacht voor Nederlands, Engels, wiskunde en science wil minister Van Bijsterveldt (OCW) terug naar de kern in het onderwijs. Dit is volgens haar noodzakelijk om ervoor te zorgen dat het Nederlands onderwijs bij de top van de wereld blijft horen. Dat stelt zij in een reactie op het nieuwe PISA-onderzoek [red.: onderzoek 2009] naar de vaardigheid in taal, wiskunde en science van 15-jarige leerlingen in 65 landen.'

Ik ben benieuwd wat Sieb Kemme naar aanleiding van de PISA-resultaten zou zeggen als hij minister zou zijn. Misschien wel even niets.

En u? Misschien eerst eens goed nadenken, de uitslagen analyseren en nadenken over de betekenis en mogelijke consequenties van de scores. Gerard Koolstra schreef er al over in de WiskundeE-brief (www.wiskundebrief.nl/547.htm), over de significantie van de scores en over de ranglijstjes.

Hoe het ook zij, wiskunde maakt kennelijk deel uit van de selecte vakken die de kern van het onderwijs vormen. Ik zie dat toch anders. Wat niet wegneemt dat ik u weer met enthousiasme dit nummer wil presenteren: een mooi nummer over ons wiskundeonderwijs. Ik hoop dat u er genoeg aan zult beleven.

De inhoud

In 'De ondergang van een keuzevak' laat Harm Jan Smid zien hoe het kan verkeren in het wiskundeonderwijs; in dit geval in het verschijnen en weer verdwijnen van de diverse wiskunde (keuze)vakken in de loop van de tijd. Met dank aan Dick Klingens blijft door het artikel 'Enkele benaderingen van pi' ook dit nummer van *Euclides* niet zonder historische bijdrage: 'Het is de 24ste December van het jaar 1794, avond, en bij achten. Wij zijn te Amsterdam, ...'.

Terug naar de 21e eeuw: Wim Laaper en Heiner Wind hebben een interview afgenomen met Petra Hendrikse en Cor van Zelst naar aanleiding van een onderzoek naar de wijze waarop onderzoekend leren in het wiskundeonderwijs ondersteund kan worden door inzet van de computer. Ik citeer – een zin om te onthouden – uit dit interview: 'Voor de leerlingen moet er voldoende emotionele zekerheid zijn om intellectuele onzekerheid aan te kunnen.' Snel lezen! Verder ook het volgende deel in de IMO-serie, een opgave uit 2008 beschreven door Floris van Doorn, het artikel van Jolanda Vriend over de besteding van WwF-gelden in Kenia, en informatie vanuit het bestuur over de vakbond.

Zelf aan de slag

Niet altijd lukt het ons om u artikelen voor te leggen waarmee u direct zelf aan de slag kunt in de klas, maar nu vindt u er toch ten minste twee. Geschreven voor de praktijk is bijvoorbeeld het artikel van Eline de Vroome: met doosjes Smarties en het van de NVvW-site gedownload werkblad kunt u morgen een leuke les geven. Een ander voorbeeld van een heel concreet artikel is het eerste deel uit een serie, van Ingrid Berwald, over het werken met meervoudige intelligenties in de klas. De ideeën tuimelen over elkaar heen. Laat u verrassen en inspireren. En mocht u nog meer buiten het boek om willen doen: Leon van den Broek maakt u enthousiast voor de mogelijkheden van W4Kangoeroe. 'Haakjes wegwerken' kan volgens Frans Ballering niet nadat je eerst met leerlingen 'haakjes geplaatst' hebt. Ook dit kunt u morgen ten uitvoer brengen.

Echo van de studiedag van november 2010

Zoals u van ons gewend bent, publiceren we integraal de jaarrede van de voorzitter, gehouden tijdens de jaarlijkse studiedag. U vindt de rede op de Verenigingspagina's. Daar vindt u ook een beeldverslag, waarmee u nog even de sfeer kunt terughalen.

Rob van Oord hield tijdens de studiedag een workshop over het gebruik van Zebra-boekjes in de klas en schreef het voor *Euclides* nog een keer op. Mocht u zin hebben om het uit te gaan proberen, lees dan ook de boekbespreking van het nieuwste Zebra-boekje over *Meester Ludolph van Ceulen*. Misschien heeft u tijdens deze dag wel een meetkundeopgave van Ton Lecluse gekregen. Hij doet het namelijk elk jaar: uitdelen van een A4-tje met een 'leuk' probleempje! Dit jaar ontving hij oplossingen van enkele deelnemers, en omdat ze zo divers en mooi waren, heeft hij er een compilatie van gemaakt. In zijn rubriek 'Vanuit de oude doos' dus wel een oud probleem, uit 1927, maar met unieke nieuwe oplossingen.

Ik wens u weer veel leesplezier!

INHOUD

141	Kort Vooraf [Klaske Blom]
142	Op weg naar IMO2011 [Floris van Doorn]
144	Kangoeroe blijft jong [Leon van den Broek]
146	Het Geheugen [Harm Jan Smid]
149	Smarties eten tijdens wiskunde [Eline de Vroome]
151	Wiskundig actief, ondersteunen van onderzoekend leren [Wim Laaper en Heiner Wind]
154	Meervoudige intelligentie in de wiskundeles [Ingrid Berwald]
156	Het WwF steunt een school in Kenia [Jolanda Vriend]
157	Oproep / Veilingmeester Wereldwiskunde Fonds
158	Enkele benaderingen van pi [Dick Klingens]
160	Mededeling / NLT-Database [Brechtje Hollaardt]
161	Waarom hebben vmbo-leerlingen problemen met haakjes? [Frans Ballering]
162	Boekbespreking / Meester Ludolphs Koordenvierhoek [Dick Klingens]
164	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
167	Mededeling
168	Geboeid door wiskunde [Rob van Oord]
170	Nascholing / Kansrekening en dynamica als basis voor breed wiskundeonderwijs [Joost Hulshof en Ronald Meester]
172	Jaarrede 2010 [Marian Kollenveld]
174	De NVvW en de vakbond [Henk Rozenhart]
176	Jaarvergadering / studiedag 2010 [Metha Kamminga]
178	Recreatie [Frits Göbel]
180	Servicepagina

Op weg naar IMO2011



IMO2008 - OPGAVE 5

[Floris van Doorn]

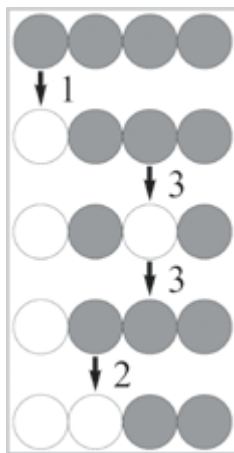
Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zetten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In 2008 werd de IMO in Spanje gehouden. Op deze olympiade vertegenwoordigde ik Nederland, samen met vijf anderen. We hadden hiervoor al het hele jaar getraind, dus we gingen met goede moed en vol vertrouwen naar Madrid. We waren zelfs een week eerder naar Madrid gegaan om daar nog een week te trainen. Dit deden we samen met het Nieuw-Zeelandse team. Dit was een heel leuke ervaring: we leerden het team van Nieuw-Zeeland goed kennen en we kregen ook opdrachten waarmee we samen met een Nieuw-Zeelandse aan de slag moesten. Hierna begon de IMO zelf. Na de openingsceremonie kregen we, verspreid over twee dagen, 9 uur de tijd om 6 opgaven op te lossen. In dit artikel zal ik opgave 5 bespreken.

De opgave

Laat gehele getallen $n > 0$ en $k > 0$ gegeven zijn met $k \geq n$ en $k - n$ even. We hebben $2n$ lampen genummerd van 1 tot en met $2n$. Elke lamp kan aan of uit zijn. In het begin zijn alle lampen uit. We bekijken rijtjes van handelingen: bij elke handeling wordt ofwel een lamp die aan is, uit gedaan, ofwel een lamp die uit is, aan gedaan. Zij N het aantal van zulke rijtjes die uit k handelingen bestaan en die eindigen in de toestand waarin de lampen $1, \dots, n$ aan zijn en de lampen $n+1, \dots, 2n$ uit zijn. Zij M het aantal van zulke rijtjes die uit k handelingen bestaan en die eindigen in de toestand waarin de lampen $1, \dots, n$ aan zijn en de lampen $n+1, \dots, 2n$ uit zijn, maar waarbij geen van de lampen $n+1, \dots, 2n$ ooit werd aan gedaan. Bepaal de verhouding N/M .

Dit is een typische *combinatoriekopgave*, omdat naar de verhouding tussen twee aantallen wordt gevraagd. Dat wil niet zeggen dat we ook per se die getallen N en M hoeven uit te rekenen; als we maar op een of andere manier de verhouding N/M kunnen berekenen. Bij combinatoriek-opgaven helpt het vaak om kleine voorbeeldjes uit te werken, zodat we een idee krijgen voor de opgave. Ook kunnen we hierdoor al een vermoeden krijgen wat de verhouding N/M is. Dus laten we een voorbeeld bekijken, bijvoorbeeld $n = 2$ en $k = 4$. Dan hebben we $2n = 4$ lampjes, en mogen we $k = 4$ handelingen doen. Nu is N het aantal manieren waarop we deze handelingen kunnen doen, zodat de eerste twee lampjes aan zijn, en de laatste twee uit. We kunnen bijvoorbeeld lampje 1 aan doen, dan lampje 3 aan doen, dan lampje 3 uit doen, en dan lampje 2 aan doen, zoals *in figuur 1*. Dit kunnen we korter noteren met het rijtje $(1, 3, 3, 2)$.



figuur 1 Het rijtje $(1, 3, 3, 2)$

We noemen de rijtjes die we voor N meetellen, N -rijtjes, en de rijtjes die we voor M meetellen, M -rijtjes.

In N -rijtjes moeten de getallen $1, \dots, n$ een oneven aantal keer voorkomen, en de getallen $n+1, \dots, 2n$ een even aantal keer. Bij M -rijtjes moeten de getallen $1, \dots, n$ ook een oneven aantal keer meedoen, maar de getallen $n+1, \dots, 2n$ mogen niet voorkomen.

Dus: elk M -rijtje is ook een N -rijtje. In het geval $n = 2$ en $k = 4$ hebben de M -rijtjes dus ofwel 3 enen en 1 twee – zoals $(1, 1, 2, 1)$ – of 3 tweeën en 1 één – zoals $(2, 1, 2, 2)$. Dit kan in het totaal op 8 manieren. Dit zijn ook allemaal N -rijtjes, maar er zijn ook N -rijtjes die bestaan uit een 1, een 2, en ofwel 2 drieën, ofwel 2 vieren.

Om het aantal manieren te tellen kunnen we de 1 op 4 plaatsen zetten. Daarna kan de 2 nog op 3 plaatsen, en de overige 2 plaatsen zijn ofwel 2 drieën, ofwel 2 vieren. Dus in het totaal zijn er $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ manieren, zodat $N = 24 + 8 = 32$. De verhouding is nu: $N/M = 32/8 = 4$

Zoals al eerder gezegd, moeten in N -rijtjes de getallen $1, \dots, n$ een oneven aantal keer staan, en de getallen $n+1, \dots, 2n$ een even aantal keer. Dus als we de lampjes $1, \dots, n$ allemaal een keer schakelen, weten we dat we daarna elk lampje nog een even aantal keer moeten schakelen. Hiervoor moet k dus gelijk zijn aan n zijn *plus* een even getal. Dat verklaart dus de voorwaarden die aan het begin van de opgave staan: $k \geq n$ en $k - n$ even.

Als er niet aan deze voorwaarden voldaan is, zijn er geen N -rijtjes, en al helemaal geen M -rijtjes. In dat geval is $N = M = 0$. Dan kunnen we de verhouding natuurlijk niet bepalen.

Laten we nog een paar simpele gevallen bekijken.

Als $n = 1$, dan hebben we twee lampjes, en omdat $k - n$ even is, is k dus oneven. Er is maar één M -rijtje, namelijk het rijtje met k



enen. Dus $M = 1$.

Alle N -rijtjes hebben een oneven aantal enen en een even aantal tweeën. In het totaal zijn er 2^k rijtjes met enen en tweeën, en precies de helft daarvan heeft een oneven aantal enen. Dit laatste kunnen we als volgt zien: elk rijtje heeft óf een oneven aantal enen, óf een oneven aantal tweeën (en niet beide). Er zijn natuurlijk evenveel rijtjes met een oneven aantal enen als rijtjes met een oneven aantal tweeën, en in totaal 2^k rijtjes, dus er zijn 2^{k-1} rijtjes met een oneven aantal enen. Dus hier geldt:

$$N/M = 2^{k-1}$$

In het geval dat $k = n$, moeten we alle k handelingen gebruiken om de eerste n lampjes aan te krijgen. Dus kunnen ook de N -rijtjes niet de getallen $n + 1$ tot en met $2n$ bevatten. Alle rijtjes die geteld worden bij M , worden dus ook geteld bij N ; dus $N = M$ en:

$$N/M = 1$$

Hier kreeg ik het vermoeden dat $N/M = 2^{k-n}$.

Dit vond ik de ‘makkelijkste’ formule die geldt voor alle gevallen die we hebben behandeld.

Maar dat moeten we nu nog wel bewijzen. We moeten in feite laten zien dat er per M -rijtje 2^{k-n} N -rijtjes zijn. Dit zouden we kunnen doen door aan elk M -rijtje 2^{k-n} N -rijtjes te koppelen, op zo’n manier dat elk N -rijtje precies één keer wordt gekoppeld. We zagen al dat elk M -rijtje een N -rijtje is. Maar hoe kunnen we van een N -rijtje juist een M -rijtje maken? In een N -rijtje kunnen de getallen $n + 1, \dots, 2n$ zitten die niet thuis horen in M -rijtjes. We willen die getallen dus eigenlijk kwijt.

Stel dat we van al die getallen gewoon n afhalen. Dus voor bijvoorbeeld $n = 4$, $k = 12$ koppelen we aan het N -rijtje (3, 2, 6, 1, 3, 3, 2, 5, 6, 5, 2, 4) het M -rijtje (3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 4): alle vijfen vervangen we door enen, en de zessen door tweeën (en de zevens door drieën en achten door vieren, maar die komen niet voor in dit voorbeeld).

In dit geval wordt dit duidelijk een M -rijtje, maar is dat altijd het geval? Ja, want in een N -rijtje komen de getallen $1, \dots, n$ een oneven aantal keer voor en de getallen $n + 1, \dots, 2n$ een even aantal keer. Dus na onze operatie komen de getallen $1, \dots, n$ nog steeds een oneven aantal keer voor (oneven + even = oneven), en alle getallen groter dan n hebben we weggehaald. Dus dit is een M -rijtje.

Zo koppelen we in ieder geval aan elk N -rijtje precies één M -rijtje. Maar wordt elk M -rijtje wel aan 2^{k-n} N -rijtjes gekoppeld? Stel we hebben het M -rijtje, zoals hierboven: (3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 4). De N -rijtjes waaraan deze gekoppeld is, hadden misschien vijfen, zessen en zevens waar dit rijtje enen, tweeën en drieën heeft (er is maar 1 vier, dus er zitten geen achten in). We weten wel dat dit een even aantal vijfen, zessen en zevens (en achten) moet zijn. Dus de vraag is nu: op hoeveel manieren kunnen we een even aantal enen door vijfen vervangen, een even aantal tweeën door zessen, en een even aantal drieën door zevens?

Laten we dit algemeen doen: we hebben een M -rijtje met a_1 enen, a_2 tweeën, ... en a_n n -en.

Voor elke i moeten we nu een even aantal van de i ’s (waarvan we er a_i hebben, een oneven aantal) vervangen door $n + i$. Het aantal manier waarop dit kan, is eigenlijk hetzelfde probleem als het probleem dat we hierboven hebben opgelost bij het bepalen van het aantal N -rijtjes voor $n = 1$. Daar moesten we rijtjes van lengte k vinden met een oneven aantal enen (en dus een even aantal tweeën). Hier moeten we uit a_i getallen er een even aantal kiezen om n op te hogen. Dus dit kan op 2^{a_i-1} manieren, net zoals we toen 2^{k-1} N -rijtjes hadden.

Dus voor alle i ’s samen hebben we $2^{a_1-1} \cdot 2^{a_2-1} \cdot \dots \cdot 2^{a_n-1}$ manieren. Dit kunnen we ook schrijven als $2^{(a_1-1)+(a_2-1)+(a_3-1)+\dots+(a_n-1)}$.

Merk op dat de som van de a_i gelijk is aan de lengte is van het M -rijtje, dus aan k , en dat we er n keer 1 vanaf halen. Dus dit

aantal is 2^{k-n} .

Dus elk M -rijtje wordt precies aan 2^{k-n} N -rijtjes gekoppeld, op zo’n manier dat aan elk N -rijtje precies één M -rijtje gekoppeld wordt. Nu moeten er dus wel 2^{k-n} keer zoveel N -rijtjes zijn, oftewel:

$$N/M = 2^{k-n}$$

Hiermee hebben we het probleem opgelost!

Deze opgave hadden drie van de zes deelnemers van het Nederlandse team opgelost, wat vrij veel is voor een opgave 5. Ook verder hadden we het dat jaar erg goed gedaan: we wonnen twee zilveren en twee bronzen medailles, en Nederland eindigde op de 33e plek van de 97 landen die meededen. Dat is voor Nederland een erg goede prestatie.

Dit proberen we vol te houden en nog te verbeteren. Voor de IMO2011, die door Nederland wordt georganiseerd, is ons doel om in de top 30 te komen.

Info

Website 2011: www.imo2011.nl

Over de auteur

Floris van Doorn is derdejaars student wiskunde en natuur- en sterrenkunde aan de Universiteit Utrecht. Hij is in 2007 als ‘winnaar aanmoedigingsprijs’ naar de IMO in Vietnam en in 2008 naar de IMO in Spanje geweest. Daar heeft hij een zilveren medaille gehaald.

Verder is hij sinds 2009 betrokken bij de training van Nederlandse deelnemers aan de IMO.

E-mailadres: florisvandoorn@hotmail.com

Kangoeroe blijft jong



[Leon van den Broek]

Het is levende wezens niet gegeven om altijd maar jong te blijven. Voor een organisatie als Kangoeroe is dat wel mogelijk. En Kangoeroe kan verjongend werken op de deelnemers.

Nieuwe naam: W4Kangoeroe

De reken- en wiskundewedstrijd Kangoeroe is wereldwijd geworden: er doen nu al 50 landen mee, van Mongolië tot Paraguay, en het worden er nog steeds meer. Daarom is de naam veranderd in W4Kangoeroe: Wereld Wijde Wiskunde Wedstrijd. Een mooie naam, maar wellicht met één bezwaar: hij noemt zichzelf een *wedstrijd* – en dat is hij ook – maar daarop moet eigenlijk geen nadruk liggen. Voorop staat namelijk dat leerlingen plezier beleven aan de puzzelachtige vragen van Kangoeroe. Dat is veel belangrijker dan bij de besten te horen in je categorie. Om wat tegenwicht te bieden aan het wedstrijdidee hebben we een paar nieuwe plannen gemaakt. Daarover vertellen we in dit artikel. Een tweede doel van de plannen is om nog meer deelnemers te krijgen. Ik heb de plannen op verschillende workshops aan het publiek voorgelegd. Omdat de reacties overwegend positief waren, heb ik besloten ze uit te voeren.

Mocht je Kangoeroe nog niet goed kennen, dan vind je alle informatie op de website « www.w4kangoeroe.nl ».

Kangoeroe in duo's

Om W4Kangoeroe uit de wedstrijdsfeer te halen is de mogelijkheid in het leven geroepen Kangoeroe in duo's te doen. Hiermee beginnen we in 2011 op de basisschool; misschien dat we dat in 2012 ook voor de middelbare scholen aanbieden.

Voor een duo gaat Kangoeroe zó:

- een tweetal leerlingen kiest een naam en vult die in op het antwoordformulier, bijvoorbeeld: HARM JOANNE of KANJERDUO of PALET4;
- het duo kruist op het antwoordformulier het hokje *duo* aan;
- het tweetal overlegt (zachtjes) over de vragen, verdeelt het werk en vult de overeengekomen antwoorden in op het antwoordformulier.

Met deze tweede mogelijkheid beoogt Kangoeroe:

- minder wedstrijdsfeer te hebben; voorop moet de puzzelactiviteit staan;
- de drempel om mee te doen te verlagen; met tweeën geeft een veiliger gevoel;
- de prestaties te verhogen; de leerlingen kunnen elkaar verbeteren;
- het plezier te verhogen; samenwerken is meestal leuker.

Een duo doet niet mee aan de wedstrijd (en kan dus niet landelijk eerste worden). De kosten bedragen 2x2 euro per duo. De mogelijkheid om individueel Kangoeroe te doen blijft natuurlijk bestaan; dan doet de leerling op de vertrouwde manier mee aan de wedstrijd; kosten 3 euro per leerling.

Ludieke prijzen

We proberen Kangoeroe ook uit de wedstrijdsfeer te halen door enkele ludieke prijzen in te voeren. Die kunnen door iedereen gewonnen worden, dus ook door de mindere presteerders. Bijvoorbeeld: 100 kleine prijzen voor hen die precies de helft van de vragen goed hebben. De andere ludieke prijzen houden we nog even geheim; die zouden namelijk deelnemers op het idee kunnen brengen strategisch te gaan antwoorden (expres fouten maken). We wachten even af hoe de ludieke prijzen vallen. Wellicht worden ze in de toekomst uitgebreid of juist beperkt tot duo's.

Interactief oefenen en spelen

Op 6 november j.l. is op de studiedag van de NVvW de gelegenheid gelanceerd om W4Kangoeroe interactief te oefenen en te spelen op onze website, w4kangoeroe.nl. Daarop staan de Kangoeroe-vragen van de laatste jaren, waaruit op allerlei manieren kan worden gekozen. Omdat de opgaven er aantrekkelijk uitzien, de leerling zelf kan kiezen welk type vragen hij wenst en hij zijn prestaties direct te zien krijgt, verwachten we dat deze nieuwe mogelijkheid W4Kangoeroe sterk zal promoten. Ook

denken we dat de docent in de klas gemakkelijker gebruik kan maken van de nieuwe vragenbank.

De optie is mogelijk gemaakt door financiële steun van de NVvW.

Betere prestaties

Wij willen graag dat de prestaties beter worden. Betere prestaties leiden tot meer plezier. Daartoe hebben we een aantal maatregelen genomen, waarvan de voornaamste is dat er zeker in het begin voldoende eenvoudige (en toch originele) vragen zijn. En dat is in 2010 goed gelukt. Tijdens de vorige Kangoeroe waren de prestaties ruim 21% hoger dan in 2009. Wij zullen ons uiterste best doen deze verbetering in 2011 minstens vast te houden.

Meisjes

Onder de beste vijf leerlingen staan opvallend minder meisjes dan jongens, een verschil dat zich voordoet bij zowel bij de basisscholen als bij de middelbare scholen, en in alle categorieën. Misschien doen er minder meisjes mee, misschien zijn ze minder competitief ingesteld, misschien is de opzet van W4Kangoeroe voor meisjes minder aansprekend, misschien doen er gewoon minder meisjes mee. Om dat te weten te komen zal op het antwoordformulier in 2011 de deelnemers worden gevraagd aan te geven of hij/zij een jongen of een meisje is.

Soortgelijke ervaringen heeft de Wiskunde Olympiade en de mindere prestaties doen zich zelfs voor bij de landelijke wiskunde-examens, zij het in mindere mate.

Kangoeroe bezint zich op acties om de meisjes aan te moedigen, maar doeltreffende maatregelen liggen niet voor het oprapen.

Kangoeroe digitaal

Voor de toekomst oriënteert W4Kangoeroe zich op de mogelijkheid de vragen op de computer te beantwoorden in plaats van op een papieren antwoordformulier. Dat heeft duidelijke voordelen, maar er kleven ook bezwaren aan, met name omdat scholen niet over voldoende computers beschikken.

Het informaticabroertje van W4Kangoeroe is de *Beverwedstrijd* (www.beverwedstrijd.nl): die heeft ervaring op dit terrein.

Astrid volgt Willy op

Willy van de Sluis is met pensioen. Zij heeft geweldig bijgedragen aan het succes van Kangoeroe. De vriendelijkheid waarmee zij alle vragen beantwoordde, is bij allen bekend die haar gemailld of getelefoneerd hebben. Wij zijn Willy erg dankbaar en inmiddels hebben we haar dat nog eens duidelijk gemaakt. Astrid Linssen heeft Willy bij Kangoeroe opgevolgd (024-3652985 of info@w4kangoeroe.nl).

2011

Kangoeroe2011 vindt plaats op **donderdag 17 maart** a.s.

Motto: *Maar vooral omdat het leuk is.*

In een meer leven 6-, 7- en 8-armige inktvissen.

De 7-armige inktvissen liegen altijd, de 6-armige en 8-armige spreken altijd de waarheid.

Op het strand liggen vier inktvissen bij elkaar, een blauwe, een groene, een gele en een rode.

De blauwe inktvis zegt: "We hebben samen 28 armen". De groene zegt: "We hebben samen 27 armen". De gele zegt: "We hebben samen 26 armen" en de rode zegt: "We hebben samen 25 armen". Welke kleur heeft de inktvis die de waarheid spreekt?

A. blauw

B. groen

C. geel

D. rood

E. ze liegen alle vier

figuur 1 Uit: wizSmart 2010

(de moeilijkste opgave)

Anton heeft een touwtje om een stukje hout gewikkeld. Hier zie je de voorkant: Anton wil de achterkant zien en keert het ding om. Wat kan hij zien?



A.



B.



C.



D.



E.

figuur 2 Uit: wizBrain 2010

Over de auteur

Leon van den Broek organiseert

W4Kangoeroe in Nederland en is betrokken bij de ontwikkeling van diverse wiskundelesmaterialen.

E-mailadres: L.vandenBroek@math.ru.nl



Deel 68

Topologie Door Zien

Jan M. Aarts

212 blz., €27,-

ISBN 978-90-5041-121-9

Het vakgebied topologie is rijk aan leuke onderwerpen om over te vertellen: de Möbiusband, kleuren van landkaarten, drie gebieden met één gemeenschappelijke grens, de formule van Euler, Droste effect, fractals en wilde sferen. In dit boek wordt topologie uitgelegd in de vorm van een strip, waarbij het verhaal in de tekeningen zit, aangevuld met een toelichtende tekst.



Epsilon Uitgaven

bestellen bij boekhandel of via www.epsilon-uitgaven.nl

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pakt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

De ondergang van een keuzevak

Onder de pakkende titel 'Moet dat zo? Kan het echt niet anders?' schreef Sieb Kemme een paar nummers terug een kritisch stukje over de grote variëteit aan wiskunde-programma's op havo en vwo.^[1] Hij schetste allerlei akelige gevolgen van die wildgroei en aan het eind verzuchtte hij dat hij, als hij minister was, het wel zou weten: twee volwaardige wiskundevakken A en B, in plaats van 'de huidige halfgebakken A, B, C en D indeling'. Hij is niet de enige die er zo overdenkt, want ook in de *WiskundeE-brief* zijn dergelijke geluiden wel te vinden. Maar in de *Nieuwe Wiskrant* van september 2007 wordt juist met trots gesteld dat we 'het land [zijn] met de meeste soorten wiskunde op de middelbare school' (daarin worden ook de varianten op het vmbo meegeteld), en dat zou nu juist onze kracht zijn. Je kunt er dus ook heel anders tegen aan kijken, en minister Kemme zou vast heel wat weerstanden oproepen als hij zijn idee zou willen doorzetten.

Hoe is het begonnen?

In de tijd van de MULO, HBS en gymnasium bestond er natuurlijk geen wiskunde A t/m D, laat staan wiskunde B1,2 en dergelijke rariteiten. Die opleidingen hadden een A- en B-afdeling en het eindexamenprogramma wiskunde (HBS-A had geen wiskunde) was per afdeling geregeld. Te kiezen viel er niets en de afdelingen hadden verder geen last van elkaar. Voor het gymnasium en het atheneum bleef de splitsing in A- en B-afdelingen bij de invoering van de mammoetwet in 1968 gehandhaafd, voor de nieuwe schooltypes havo en mavo niet. Alles had dus heel eenvoudig kunnen blijven: A- en B-programma's à la Kemme op de A- en B-afdelingen, en één examenprogramma wiskunde voor de havo respectievelijk mavo. Dat laatste gebeurde ook, maar voor het vwo werd een andere

keuze gemaakt: daar verschenen wiskunde I en wiskunde II op het programma, en het was niet toevallig dat die geen A en B heetten.

Wiskunde I en wiskunde II

De mammoetwet bracht een belangrijke nieuwigheid: de introductie van keuzevakken. Wiskunde I, bestaande uit analyse en waarschijnlijkheidsrekening/statistiek, was voor de B-leerlingen verplicht, voor de A-leerlingen een keuzevak. Wiskunde I was zeker geen makkelijk vak, maar men had toch het gevoel dat het wat magertjes zou zijn als dat het enige wiskundevak voor de echte B-leerlingen zou worden. Er kwam dus nóg een wiskundevak, wiskunde II, niet verplicht, maar een keuzevak voor goede B-leerlingen. Inderdaad, een soort wiskunde D dus. Men had geen idee of het vak zou aanslaan. Op een vraag aan de CMLW (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, die in de jaren '60 de nieuwe programma's wiskunde voor de 'mammoetwetstructuur' voorbereide), die deze plannen voorstelde, over de verwachte

belangstelling was de reactie:

'De verwachting van de Commissie is nog blanco'.

Wiskunde II was duidelijk een kind van de *New Math* beweging van einde jaren vijftig. De hoofdmoot bestond uit een inleiding in de lineaire algebra in een meetkundige inkleding: stelsels vectoren, afhankelijkheid en onafhankelijkheid, orthonormale bases, lineaire afbeeldingen, matrices en determinanten, beperkt tot drie dimensies.

Figuur 1 geeft twee opgaven uit het examen van 1981. Daarnaast was er een keuze-onderwerp, te kiezen uit de volgende lijst: complexe getallen, topologie, getaltheorie, toepassingen van de analyse, numerieke wiskunde, projectieve meetkunde, niet-euclidische meetkunde, logica, geschiedenis van de wiskunde, of 'een ander vooraf door de inspectie goed te keuren onderwerp'.

In figuur 2 is te vinden wat de CMLW zich van dit keuzeonderwerp voorstelde. Een leraar met ambitie en enthousiasme voor zijn vak kon daar heel wat van maken. Net als nu voor wiskunde D werd er nieuw materiaal voor dit keuzeonderwerp ontwikkeld. Een mooi voorbeeld is Joop van Dormolen's bewerking van een Amerikaans boekje onder de titel *Eenvoudige topologie*. **Figuur 3** geeft een pagina hieruit.

In $\mathbb{R}_3$ zijn ten opzichte van een orthonormale basis $Ox_1x_2x_3$ gegeven het punt $P(-1, 2, 2)$, het vlak V met vergelijking $x_1 + x_3 - 3 = 0$ en de bol β met vergelijking $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 2 = 0$.

- A is een vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van het punt P . Bewijs dat het A -beeld van β de x -as raakt.
- B is een spiegeling in een vlak W , dat evenwijdig is aan V . Het B -beeld van β raakt het vlak met vergelijking $4x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$. Stel een vergelijking op van W .
- C is een lineaire afbeelding. Het C -beeld van het vlak V is het punt $(3, 6, 3)$. Bereken de coördinaten van het C -beeld van P .

In $\mathbb{R}_3$ vormen $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ een onafhankelijk stelsel vectoren. Van een afbeelding F is gegeven:

$$F(\vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$F(\vec{b}) = \vec{a}$$
$$F(\vec{c}) = \vec{c}$$
$$F(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{b}$$

- Toon aan dat F geen lineaire afbeelding is. Gegeven is dat $F = T_{\vec{v}} \circ L$ waarbij $T_{\vec{v}}$ de translatie over de vector $\vec{v}$ is en waarbij L een afbeelding voorstelt.
- Bewijs dat $\vec{v} = \vec{a} + \vec{c}$.
- Stel de matrix op van L ten opzichte van de basis $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
- Geef de verzameling dekpunten van F .

figuur 1 Twee karakteristieke opgaven uit het wiskunde II examen van 1980.



Ik heb het met mijn allereerste wiskunde II examenklas doorgewerkt en ik vond het zelf heel leuk, maar ‘eenvoudig’ vonden mijn leerlingen het niet!

Al snel ging het mis

Het was al snel duidelijk dat wiskunde I geen geschikt keuzevak was voor de meeste A-leerlingen. Al na een paar jaar deden er geruchten de ronde over een andere opzet van de wiskunde op het vwo, waaronder de afschaffing van wiskunde II. Naar aanleiding van die geruchten schreef H. Steur in de *Euclides* van oktober '78 een vurige verdediging van het vak, waarbij hij zich vooral boos maakte over de suggestie dat het maar moest verdwijnen omdat het niet verplicht was en te weinig leerlingen zou trekken. **Figuur 4** geeft een stukje uit zijn artikel.

In het HEWET-rapport wordt inderdaad gesuggereerd dat wiskunde II om precies die redenen geen toekomst had. Doordat het vak voor geen enkele studierichting verplicht was 'bleef het aantal leerlingen die dit vak in het examenpakket opnemen relatief klein', aldus het rapport. In een voetnoot staat dat in 1978 niet meer dan 18% van leerlingen die op de B-afdeling zaten, ook wiskunde II kozen. De werkgroep verwachtte dat dit aantal 'in de loop van de jaren nog verder [zal] afnemen', maar dat had ze mis, want dat percentage steeg juist naar zo'n 23 %. Het is natuurlijk maar wat je veel of weinig wilt noemen. Zoals bekend kwam er in het kader van de HEWET een vak wiskunde A voor de A-leerlingen en werd wiskunde I, na de vervanging van waarschijnlijkheidsrekening/statistiek door een stukje stereometrie, omgedoopt in wiskunde B. Daaruit volgde natuurlijk helemaal niet dat er geen keuzevak wiskunde op het B-programma voor de goede leerlingen had kunnen blijven bestaan. Er zouden aanpassingen nodig zijn geweest om overlap met de nieuwe ruimtemeetkunde van wiskunde B te voorkomen, maar natuurlijk waren er tal van mogelijkheden voor een mooie invulling van een pittig keuzevak. Het HEWET-rapport maakt nergens echt duidelijk waarom daar niet voor gekozen is. Misschien waren drie wiskundevakken wel gewoon politiek onhaalbaar en was het opgeven van wiskunde II de prijs voor het binnenhalen van wiskunde A, maar leek het tactischer om dat maar niet met zoveel woorden te zeggen.

Toch kwam er wel een keuzemogelijkheid: je mocht als B-leerling ook wiskunde A er bij kiezen. De meeste B-leerlingen vonden dat een makkie en zo was de zaak 180 graden omgedraaid: in plaats van een stevig

Van der Neut: Eerst enkele opmerkingen over keuze-onderwerpen in het algemeen. Voor Wiskunde II als keuze-vak op de B-afdeling zijn drie uren uitgetrokken. In dit vak komt een tweede keuze-element, n.l. het keuze-onderwerp. De bedoeling van deze onderwerpen is niet, de leerlingen alvast iets te leren wat ze eigenlijk aan de universiteit moeten doen. Ze zijn bestemd voor leerlingen die er aardigheid in hebben, het aankunnen en het later nodig hebben. Tevens heeft de docent hier gelegenheid om één onderwerp op een wat hoger niveau te behandelen met goede leerlingen. Het is de bedoeling van de Commissie in de toekomst nog andere detaillering van elk dezer keuze-onderwerpen voor te stellen.

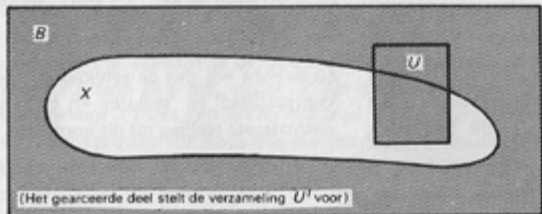
Wat nu te doen bij verandering van school? Twee mogelijkheden: a. leerling maakt eigen vak af, b. leerling stapt over op ander vak. Algemene richtlijn is hiervoor niet te geven.

figuur 2 In *Euclides* van december 1967 werden vragen over de voorgestelde programma's voor wiskunde I en II beantwoord. De voorgestelde 'nadere detaillering' van elk der keuzeonderwerpen is er voor zover ik weet nooit gekomen.

Stelling

□ Als X een gesloten deelverzameling is van een compacte ruimte B , dan is X compact.

■ Om dit te bewijzen zullen we een open overdekking C van X nemen en elk lid van C zodanig vergroten dat de vergrote verzamelingen een open overdekking C' van B vormen. Vervolgens gebruiken wij de compactheid van B om een eindige overdekking uit C' te kiezen en wij zien dan dat de overeenkomstige onvergroete verzamelingen de gewenste eindige overdekking van X vormen.



(Het gearceerde deel stelt de verzameling U' voor)

Figuur 6.4

Laat $U' = U \cup (B \setminus X)$ zijn, voor elke verzameling U in de open overdekking C van X , en laat C' de collectie zijn van deze grotere verzamelingen U' (fig. 6.4). Wij zullen eerst aantonen dat U' een open verzameling in B is. Een punt $x \in U'$ ligt in U of in $B \setminus X$. Als $x \in B \setminus X$, dan zegt de veronderstelling dat X gesloten is in B ons dat er een $r > 0$ is zodanig dat $N(x, r, B) \subset B \setminus X \subset U'$. Als $x \in U$, betekent het feit dat U open is in X dat er een $r > 0$ is zodanig dat $N(x, r, X) \subset U$, en dus dat $N(x, r, B) \subset U \cup (B \setminus X) = U'$. Dit bewijst dat U' open is in B .

Laat nu y enig punt van B zijn: óf $y \in X$, óf $y \in B \setminus X$. Als $y \in X$, dan $y \in U$ voor een of andere $U \in C$, zodat $y \in U'$ voor de overeenkomstige $U' \in C'$. Als $y \in B \setminus X$, dan $y \in U'$ voor alle $U' \in C'$. Daarom is C' een open overdekking van B . Daar B compact is, bedekt een eindig aantal verzamelingen van C' laten we zeggen $U'_1, U'_2, \dots, U'_k$. B en dus ook X . Hieruit volgt dat de overeenkomstige verzamelingen in C , namelijk $U_1, U_2, \dots, U_k$, een eindige overdekking van X vormen, want elk punt van X dat overdekt is door U'_j is ook overdekt door U_j . Dit voltooit het bewijs van de stelling.

figuur 3 Joop van Dormolen bewerkte een boekje van Chinn en Steenrod tot *Eenvoudige topologie*. Doordat het een van de eerste publicaties voor het keuzenonderwerp was, werd het in het begin veel gebruikt.

keuzevak voor de goede leerlingen nu een vak waarmee je je vakkenpakket op een niet al te moeilijke manier kon volmaken. Echt iets uitdagends had wiskunde op het vwo voor goede leerlingen niet meer te bieden.

Ervaringen uit het verleden...

Sieb Kemme neemt in zijn artikel duidelijk stelling: gewoon wiskunde A en B, 'toege-spitst op de capaciteiten en de interesses van de leerlingen'. Dat zou natuurlijk betekenen dat de keuzevakken wiskunde C en D al weer kort na hun introductie zouden verdwijnen, net als dat met wiskunde II gebeurde. Een verschil met toen is dat scholen wiskunde D niet hoeven aan te bieden, zodat dat vak vanzelf verdwijnt als een schoolleiding merkt dat het onbetaalbaar wordt. Het zou me niet verbazen als dat proces al in volle gang is. We blijven dan wel zitten met de overlap tussen A en B en de neiging van scholen om leerlingen, in verband met de kosten, voor A en C te combineren.

Is de huidige situatie inderdaad 'ongelukkig geboren is uit het getouwtrek tussen politiek, schoolmanagement en vervolgoedingen', zoals Kemme zegt; met andere woorden: is het allemaal de schuld van een ander? Dat lijkt me niet. De commissie cTWO, waar half wiskundig Nederland bij zat, heeft wiskunde A t/m D zelf in haar visiedocument voorgesteld, en ik heb toen nergens het advies gelezen om hier niet aan te beginnen. Dat niet bedacht werd dat zo'n constructie in de weerbarstige praktijk van leerlingenaantallen, financiering en ja, natuurlijk ook door het te verwachten getouwtrek tussen politiek, schoolmanagement en vervolgoedingen, allerlei problemen zou opleveren, is nogal naïef. Wiskundigen houden veel van hun vak en die liefde maakt blind voor de harde werkelijkheid; dat zal het wel zijn.

De ervaringen met wiskunde II hadden een wijze les kunnen zijn, maar ja, zoals iedere historicus weet: ervaringen uit het verleden zijn geen garantie dat je het in de toekomst verstandiger doet.

Noot

[1] In: *Euclides* 85(5), maart 2010, p. 216.

Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO). E-mailadres: h.j.smid@ipact.nl

Ik wil graag een lans breken voor het vak wiskunde II. Daarbij moet ik vooropstellen dat ik, als eerstverantwoordelijke auteur van de wiskunde II-boeken van Getal en Ruimte, niet onpartijdig ben. Iedereen zal begrijpen, dat het je onberoerd laat, als je op het moment dat de boeken eindelijk redelijk naar je zin geschreven zijn, te horen krijgt dat het vak binnenkort misschien afgeschaft wordt. Vergeet die partijdigheid nu even en let op de argumenten.

De directe aanleiding tot dit stukje is het bericht, of liever het gerucht, dat alle kopstukken uit de Nederlandse wiskundewereld zijn samengevoegd tot een commissie, die binnen een half jaar rapport moet uitbrengen over de mogelijkheid tot verandering van de huidige VWO-wiskundeprogramma's in programma's wiskunde A en B. Als dit nummer van *Euclides* uitkomt, zou dat rapport er dus al moeten zijn. Ik ben bang, dat er overhaaste en onverstandige beslissingen genomen zullen worden, die het wiskundeonderwijs zeer zullen benadelen. Vandaar.

Het meestgehoorde argument tegen het vak wiskunde II is: Er is geen enkele studierichting, die dit vak eist.

Dit argument wordt met opgetrokken neus uitgesproken.

Ik kan daar ontzettend boos over worden. Het vak wiskunde II is daarin namelijk in het gezelschap van Engels, Duits, Frans, economie I, economie II, biologie, geschiedenis en aardrijkskunde. En deze vakken worden toch ook niet afgeschaft? Het belang van een vak moet je niet afmeten aan het aantal studierichtingen, waarvoor het vereist is. Je moet kijken naar de inhoud van het vak, naar de vormende waarde en naar het nut dat de leerlingen ervan hebben bij hun vervolgoeding.

figuur 4 Nog vóór de publicatie van het voorlopige HEWET-rapport waarschuwde H. Steur in de *Euclides* van oktober 1978 al voor het opheffen van wiskunde II. Het zou niet helpen.

Haak aan

Ideaal voor elektronisch schoolbord, thuisgebruik en voor maatwerk op papier. Gratis praktische ondersteuning voor elke docent en leerling:

- Theorie
- Uitleg
- Voorbeelden
- Applets
- AlgebraKIT
- GeoEnZo
- Rekenen



Math4all

Gratis! maar niet goedkoop



[Eline de Vroome]

Hoe moeilijk het ook is: Maak het doosje Smarties nog niet open!!
Je moet de volgende vragen zo goed mogelijk beantwoorden.

Hoeveel Smarties denk je dat er in het doosje zitten?

Vul het onderstaande schema naar verwachting in:

Kleur	Aantal van die kleur	Welk deel is dat
Totaal:		

figuur 1 Uit: Werkblad Smarties (pag. 2)

Nu mag je het doosje openmaken **MAAR**... nog niet opeten!
Leg de Smarties op kleur, en vul het onderstaande schema in:

Kleur	Aantal van die kleur	Welk deel van het totaal is dat	Hoeveel % van het totaal is dat
Totaal:		Totaal:	Totaal: 100 %

Welke kleur is de modus?

figuur 2 Uit: Werkblad Smarties (pag. 3)

OK!! NU ETEN MAAR!!!!

Bart en Jasper hebben hetzelfde onderzoekje gedaan als jullie hebben gedaan, alleen dan niet met één doosje Smarties, maar met 15 doosjes. In het onderstaande schema staan de resultaten van dit onderzoekje. Je moet zelf de totalen uitrekenen!

Vul inc.

[illegible]

Kijk naar de totalen.

Hoeveel Smarties zitten er gemiddeld in een doosje? (berekening!)

Minor Educatie

Tijdens mijn studie Industrieel Ontwerpen aan de TU Delft had ik de mogelijkheid om me in het derde jaar een half jaar lang bezig te houden met een andere opleiding. Na het horen van de mogelijkheid om een Educatieve Minor te volgen, waarbij je ook daadwerkelijk voor de klas zou komen te staan, was ik direct enthousiast.

In september 2009 ben ik begonnen met de Educatieve Minor voor het vak wiskunde. Naast de didactische vakken, die ik volgde op de TU, heb ik direct vanaf het begin stage gelopen op het Scala College in Alphen aan den Rijn. De eerste tien weken heb ik voornamelijk meegelopen en geassisteerd in 3- en 4-vmbo-T klassen. Gedurende de tien weken daarna heb ik veel zelfstandig les gegeven in een 5-havo wiskunde A klas en in twee 3-vmbo-T klassen.

Procenten in 3-vmbo-T

Naar aanleiding van een hoofdstuk over procenten dat de leerlingen van 3-vmbo-T hadden afgerond, raadde mijn school-practicumdocent Wian van Breda mij aan om de leerlingen een werkblad te laten maken. Hij gaf me het werkblad 'Smarties', dat één van zijn oud-stagiairs, die nu zelf op het Scala College werkt, Bouke van Bergen Bravenboer, tijdens diens stageperiode had gemaakt. Het doel van het werkblad was de leerlingen te laten zien hoe de theorie over procenten toegepast kan worden op dingen uit het dagelijks leven, in dit geval de aantallen Smarties van de verschillende kleuren, en ze tegelijkertijd wat extra te laten oefenen voor de toets, die voor de volgende week op het programma stond.

Lesvoorbereiding

Het werkblad bestaat uit een aantal opgaven waarvoor Smarties geteld en de percentages van de verschillende kleuren uitgerekend moeten worden (*zie figuur 1 en figuur 2*). Ik kreeg de vrijheid om het werkblad naar eigen idee en inzicht aan te passen, opdat

het goed aan zou sluiten bij de voorkennis van de leerlingen en mijn eigen manier van lesgeven. Ik heb eigenlijk alleen de laatste pagina aangepast. In eerste instantie moesten de leerlingen voor de opgaven op deze pagina bij elkaar gaan kijken naar de aantallen Smarties die iedereen had geteld en deze waarden overnemen in een eigen tabel. De klassen waarin ik het werkblad zou behandelen, zijn niet de rustigste en om te voorkomen dat iedereen door elkaar zou gaan lopen en roepen, heb ik de tabel van tevoren ingevuld met *random* gekozen waarden (*zie figuur 3*). Zo konden de leerlingen de opgaven maken zonder dat er chaos in de klas zou ontstaan.

Voordat ik met het aanpassen van het werkblad begon, ben ik eerste langs de supermarkt gefietst om een aantal zakken met doosjes Smarties te halen, want die mocht ik natuurlijk niet vergeten!

De Smarties-les

Op de dag van de les zelf sprak ik, voorafgaande aan de les van 3-vmbo-T, met Wian over zijn ervaringen met het werkblad. Hij vertelde over een leerling die tijdens het maken van het werkblad niet alleen de Smarties telde en opat, maar ook in zijn neus stopte... Dit maakte mij toch wel een beetje onzeker. Ik had me voorbereid op leerlingen die met Smarties zouden gaan schieten of ze direct zouden opeten voor ze ook maar iets van het werkblad gemaakt hadden, maar dit... De les begon en de leerlingen druppelde langzaam binnen. Wat gespannen door het verhaal van Wian begon ik met de introductie van de les. Ik vertelde kort de bedoeling van deze les en introduceerde het werkblad met de daarbij behorende regels. De leerlingen moesten in tweetallen werken, maar aan het einde van de les beiden een ingevuld werkblad inleveren. Ik zou de werkbladen daarna beoordelen en het cijfer telde mee als schriftelijke overhoring (so). Na de uitleg deelde ik de werkbladen uit en kreeg ieder tweetal een doosje Smarties. Het doosje mocht pas na het maken van de eerste opdracht open-gemaakt worden, en openmaken betekende in dit geval niet hetzelfde als opeten. Op laatste pagina werd pas aangegeven dat de Smarties opgegeten mochten worden. Tot mijn grote verbazing hielden de leerlingen zich aan deze regels en gingen hard aan de slag. De Smarties werden op kleur gelegd, geteld, de aantallen genoteerd

en vervolgens smakelijk opgegeten. Sommige leerlingen zagen het aan het einde van de les niet meer zitten om de Smarties nog op te eten, omdat ze zacht en plakkerig waren geworden. Deze Smarties verdwenen terug in het doosje en vervolgens in de prullenbak.

Na afloop van de les vond ik een enkele Smartie op de grond van het lokaal, maar de leerlingen hadden zich over het geheel genomen heel netjes en rustig gedragen. Het was te merken dat ze plezier beleefden aan de opdracht, die anders was dan de opdrachten uit het boek.

Evaluatie

Het werkblad bleek voor de meeste leerlingen meer werk te zijn dan ik had verwacht. Het merendeel had aan het einde van de les de opdrachten op de laatste pagina nog niet helemaal af. Omdat we geen tijd meer hadden om er nog een lesuur aan te besteden, maar het wel als so mee zou tellen, mochten de leerlingen het werkblad thuis afmaken en de week erna inleveren.

Ondanks het feit dat het nakijken van de werkbladen erg veel tijd kostte, was het leuk om te zien wat de leerlingen ervan gemaakt hadden. Sommigen hadden het staaf-diagram op pagina 2 en het cirkeldiagram op de pagina erna netjes ingekleurd met de overeenkomstige kleuren van de Smarties. Bij de beoordeling van de werkbladen heb ik niet alleen gekeken naar de ingevulde antwoorden, maar ook naar de samenwerking en creativiteit.

Bij aanvang van volgende lessen die ik in deze klassen heb gegeven, zijn er vaak leerlingen binnengekomen met de vraag of ze ook deze les weer opdrachten over snoepjes mochten maken. *Helaas, het kan niet altijd een snoeperij zijn in de klas!*

Naar mijn idee was dit werkblad niet alleen een leuke extra oefening voor de leerlingen, maar ook erg leerzaam. Tijdens eerdere wiskundelessen waren er regelmatig reacties uit de klas gekomen in de trant van: 'Waar heb ik dit later voor nodig?' en 'Waarom moet ik dit weten?'. Door de leerlingen aan de hand van het werkblad de theorie uit het boek te laten toepassen op een concrete situatie, hebben ze enig inzicht verkregen in wat je allemaal met wiskunde kunt doen, ondanks dat de leerlingen de Smarties in het vervolg waarschijnlijk liever opeten dan tellen.

Info

Het werkblad is, als PDF-bestand (ca. 65 kB), in z'n geheel te downloaden via de website van de NVvW:

[www.nvvw.nl/media/downloads/eucl\(864\)smarties.pdf](http://www.nvvw.nl/media/downloads/eucl(864)smarties.pdf)

Bij het werkblad is ook een pagina met instructies voor de leerlingen gevoegd.

Over de auteur

Eline de Vroome is studente Industrieel Ontwerp aan de TU in Delft en heeft in het kader van een educatieve minor voor het vak wiskunde stage gelopen op het Scala College in Alphen aan den Rijn.
E-mailadres: elinedevroome@gmail.com

Wiskundig actief, ondersteunen van onderzoekend leren

IN GESPREK MET MET PETRA HENDRIKSE EN
COR VAN ZELST

[Wim Laaper en Heiner Wind]

Inleiding

In het decembernummer van *Euclides* in 2009 besprak Ger Limpens het proefschrift van Petra Hendrikse.^[1] Het proefschrift is getiteld *Wiskundig actief, het ondersteunen van onderzoekend leren in het wiskunde-onderwijs*.



foto 1 Cor van Zelst en Petra Hendrikse

De centrale vraagstelling is: 'Hoe kan de didactiek, waarbij leerlingen interactief met dynamisch materiaal wiskundige formules onderzoeken, bijdragen aan goed wiskunde-onderwijs?' In dit interview willen we het met name hebben over het lesmateriaal voor 4-vwo dat Petra in haar promotieonderzoek heeft ontwikkeld en over de waarde die dat in de praktijk van het onderwijs kan hebben. Het kan gebruikt worden in combinatie met het leerboek voor 4-vwo van de methode *Getal & Ruimte*. Aan tafel zit daarom ook Cor van Zelst, één van de docenten die het materiaal in de klas hebben uitgetoetst.

In gesprek met...

Petra werkt aan de lerarenopleiding ELAN van de Universiteit Twente (UT). De meeste tijd besteedt zij aan haar onderwijs-taak. In dat kader houdt zij zich bezig met vakdidactiek, begeleiden van schoolstages,

cursussen vakcoach en een project onderzoeksvaardigheden aan het Assinkcollege in Haaksbergen. Ook in de opleiding probeert ze onderzoeksvaardigheden een rol van betekenis te laten spelen.

Cor van Zelst is inmiddels met pensioen en heeft als docent aan het Twents Carmelcollege (lokatie de Thij) in Oldenzaal vanaf begin 1982 het gebruik van computers in het onderwijs gestimuleerd.

Inhoud

Het proefschrift beschrijft een onderzoek naar de wijze waarop onderzoekend leren in het wiskundeonderwijs ondersteund kan worden door inzet van de computer. Daarvoor wordt gebruik gemaakt van het computerprogramma SIMQuest. Het ontwikkelde lesmateriaal beoogt dat leerlingen concepten ontwikkelen door het manipuleren van formules. Daarbij zijn de volgende zes kernactiviteiten van belang:

- abstraheren;
- structureren;
- evalueren;
- interpreteren;
- bewijzen/redeneren/aantonen;
- presenteren/communiceren.

De opdrachten moesten niet te open zijn, want dat zou resulteren in een oerwoud van vingers in de klas. Te gesloten opdrachten zouden leiden tot het uitvoeren van receptjes zonder enig leereffect – dat was natuurlijk ook niet de bedoeling. Kortom, het was zoeken naar het juiste evenwicht. Dat is ook het interessante van het proefschrift. Het beschrijft hoe in verschillende rondes het lesmateriaal op basis van ervaringen in de klas wordt bijgesteld. Daardoor komt het heel realistisch over. Het geeft meteen ook aan hoe moeilijk het is die onderzoeksvaardigheden in een

haalbare vorm de klas in te krijgen. 'Voor de leerlingen moet er voldoende emotionele zekerheid zijn om intellectuele onzekerheid aan te kunnen', zegt Petra.

Motivatie en achtergrond

Op de Universiteit Twente wordt het computerprogramma SIMQuest al langer voor verschillende andere vakken gebruikt. De NWO maakte het mogelijk dat Petra ook voor wiskunde kon onderzoeken hoe SIMQuest in de klas kon worden ingezet. Belangrijk was dat het lesmateriaal leerlingen zou stimuleren kritisch te leren kijken naar (resultaten van) wiskundige modellen. Leerlingen vragen vaak aan een docent 'Is dit goed?'. De reactie van de docent kan dan heel goed zijn: 'Hoe kun je daar achter komen?' Daarbij moet de docent wel uitkijken dat de leerling niet het gevoel krijgt aan zijn/haar lot te worden overgelaten, te zwemmen.

Lesmateriaal

De vraag is steeds in hoeverre je dingen weggeeft in het lesmateriaal via informatie en uitleg en hoe je feedback geeft. Directe interactieve feedback op specifieke oplossingen van een leerling is binnen SIMQuest niet mogelijk. Je kunt wel onderzoekssuggesties geven. Hierdoor kunnen leerlingen door te exploreren binnen SIMQuest ideeën ontwikkelen. Het volgende voorbeeld probeert dat duidelijk te maken.

Op het scherm (*zie figuur 1*) zijn er steeds twee gedeelten: een interactiedeel (links) en instructiedeel (rechts).

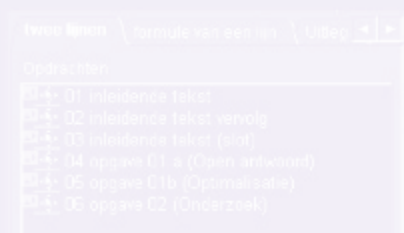
In het rechterdeel van de figuur is een voorbeeld gegeven van een opdracht om met de simulatie te werken.



figuur 1 Voorbeeld van een opdracht (rechts) met een interactiedeel (links)



figuur 2 Voorbeeld van de visualisatie delen



figuur 3 Voorbeeld van hetgeen de leerling ziet in het overzicht van de opdrachten in het instructiedeel

Christa wil dit jaar tijdens haar zomervakantie graag naar de Oekraïne om daar samen met een groep vrienden te helpen bij het bouwen van een school. Om de te bouwen school in staat te stellen lesmateriaal te kopen organiseren Christa en haar vrienden een benefietconcert, waarvan de opbrengst naar deze school gaat.

Boer Harm heeft een vierkant stuk weiland van 80 bij 80 meter, dat Christa mag gebruiken voor het benefietconcert. In dit weiland wil Christa graag een gedeelte afzetten, zodat het zicht van buiten op het feestterrein belemmerd wordt. Het afzetten gebeurt door met behulp van afzethekken een rechthoek te maken. Helaas heeft Christa maar een beperkt aantal meters afzethek tot haar beschikking.

Christa denkt nu na over hoe zij het beste de lengte en breedte van het afgezette stuk weiland kan kiezen, zodat er zoveel mogelijk bezoekers naar het concert kunnen komen.

figuur 4 Voorbeeld van inleidende tekst met schets context en hoofdvraag

Het interactieve gedeelte

In het interactieve gedeelte (links) kunnen leerlingen variabelen veranderen en de gevolgen daarvan observeren in verschillende onderdelen. Het **in figuur 1** omcirkelde stuk is het belangrijkste doe-deel. Hierin kunnen de *Invoer*-waarden worden ingevuld. Met een druk op *Start* wordt de simulatie gestart en mengen zich de kleuren in de verfbak.

Aan de rechterzijde van het interactieve deel bevindt zich een deel waarin de leerlingen zelf de invoervariabelen kunnen bepalen. Het linkergedeelte van het interactieve scherm bestaat uit één, twee of drie componenten, die er vooral zijn om geobserveerd te worden (*zie figuur 2*). In *Animaties* wordt een concept of verband visueel weergegeven en geconcretiseerd. Bij een verandering van de invoerwaarde verandert in dit geval de stand van verfbussen en het kleurmengsel in de opvangbak. Hetzelfde gebeurt wanneer de waarde van een variabele verandert, nadat de simulatie gestart is. In *Formules* staat aangegeven met welke formule gerekend wordt. Zowel de naam als de waarde van de variabelen staan aangegeven. Deze waarden veranderen mee als invoerwaarden verandert worden of als de simulatie loopt, nadat op start is gedrukt. In *Grafieken* zijn twee variabelen tegen elkaar uitgezet. Gegenereerde grafieken kunnen bewaard en verwijderd worden. Ook kan er in- en uitgezoomd worden op de grafiek.

Het instructiegedeelte

In SIMQuest-applicaties bestaat het instructiegedeelte uit verschillende onderdelen die te herkennen zijn aan tabbladen. Er zijn tabbladen voor opdrachten en uitleg. Tabbladen voor *opdrachten* zijn vaak onderverdeeld in thema's. Deze thema's zijn gebaseerd op de aspecten van de context, die toegepast wordt in een applicatie in combinatie met de achterliggende wiskunde. **In figuur 3** is voor de applicatie *Mobieltjes* onderscheid gemaakt in de thema's twee lijnen en formule van een lijn. In elk thema wordt altijd begonnen met een lijst van opdrachten. Dit is ook **in figuur 3** te zien, waarin de lijst bestaat uit zes opdrachten. Leerlingen kiezen uit deze lijst een opdracht, waaraan ze willen werken. In een applicatie begint in ieder geval de eerste opdracht altijd met een inleidende tekst. Deze tekst schetst de context, stelt de hoofdvraag en introduceert het interactieve gedeelte. Het is afhankelijk van de applicatie hoe deze gepresenteerd worden.

In **figuur 4** ziet de leerling eerst een context plus hoofdvraag op één scherm. In het volgende scherm volgt dan een schets van het interactieve gedeelte en een opdracht op zelf uit te proberen (zie **figuur 5**).

Context en wiskunde

Petra heeft er voor gekozen om het aantal contexten beperkt te houden: Benefietconcert, Tsunami, Mobieltjes en Windmolen.

Zo hoeven de leerlingen zich niet bij elke opdracht in een weer nieuwe context in te leven, wat veel tijd bespaart en ook allerlei mogelijke ruis vermindert. De pure, onderliggende wiskunde betreft rechte lijnen, parabolen, hyperbolen, domein en bereik en optimaliseren.

Hierbij kunnen in de computersimulaties allerlei parameters veel handiger dan bij het gebruik van een grafische rekenmachine worden veranderd. Zo worden de leerlingen nog meer uitgedaagd de problemen te exploreren. Het hele lesmateriaal is opgenomen in het computerprogramma SIMQuest. De leerlingen schrijven hun oplossingen van de problemen in hun schrift. Er zijn relatief veel open opdrachten opgenomen zoals:

- kies zelf het bereik bij deze opdracht;
- probeer zelf ...;
- onderzoek de verschillende mogelijkheden;
- hier volgen vier vragen, onderzoek de vragen in een volgens jou geschikte volgorde.

Zo wordt vermeden dat leerlingen a, b, c, d vragen als recepten gaan afwerken.

In de klas

Al voor de Tweede fase werd ingevoerd, is Cor van Zelst opgehouden met klassikaal frontaal te werken.

Hij zegt: 'Ik werd gewoon *weggezapt*, dus ik moest wel. Ik liet de leerlingen eerst zelf maar eens aan de gang gaan met opdrachten en daarna beantwoordde ik eventuele vragen. Toen de Tweede fase kwam, gingen de docenten bij vele vakken zo werken. Het resultaat was uiteindelijk dat de leerlingen weinig meer in de klas deden. Behalve enkele losse onderwerpen heb ik de computer vooral gebruikt om een onderdeel van het schoolexamen af te nemen met behulp van computeralgebra (eerst Derive en later TI-interactief). Door het materiaal van Petra werd ik enthousiast, omdat ik een mogelijkheid zag om de computer didactisch te gebruiken, niet alleen als een illustratie.'

In de figuur hiernaast is het weiland van boer Harm getekend. De rode rechthoek geeft het afgezette stuk terrein aan. De lengte en de omtrek van de rechthoek zijn instelbaar. Met de omtrek wordt het totaal aantal meters afzethek wat Christa nodig heeft bedoord.

In deze opdracht zullen we bekijken welke lengte Christa het beste kan kiezen bij een gegeven aantal meters afzethek. Tijdens het werken met de simulaties zullen begrippen als lineaire functies, stijgende grafieken, richtingscoëfficiënten en wiskundige modellen aan de orde komen.

De simulatie is als volgt opgebouwd:

Je kunt de waarde van de lengte van het terrein en het aantal meters afzethek (of te wel de omtrek) bepalen. Dit kan door bij de invoer parameters (rechts bovenaan) met behulp van het schuiven van de balk.

De computer tekent vervolgens het feestterrein en berekent de breedte en de oppervlakte. Door op **Reset** te drukken maak je de in- en uitvoerparameters weer gelijk aan hun beginwaarde. De knop **plot** heb je pas nodig wanneer je grafieken gaat maken.

Probeer zelf de verschillende knoppen uit en bekijk wat er gebeurt.

figuur 5 Voorbeeld van inleidende tekst met introductie van het interactieve gedeelte

Petra vult aan: 'Je kan er als docent veel creativiteit in kwijt, maar het is wel tijdrovend.'

Cor: 'Elk jaar iets nieuws houdt je scherp. Het is leuk om te doen, ook tijdens de les moet je improviseren. Daar leer je veel van, ook van leerlingen!'

Valkuilen en meerwaarde

Het tijdmanagement in de klas is lastig. Er is voor leerlingen tijd nodig om dingen uit te zoeken, een en ander uit te proberen. Daar moet je echt tijd voor inbouwen. Ook is het voor een docent moeilijk zicht te houden op wat de leerlingen nu eigenlijk precies doen. Vandaar dat regelmatige terugkoppeling via bijvoorbeeld klassengesprekken noodzakelijk is om een zeker niveau te bereiken.

Een ander precair punt kan zijn, dat de leerlingen te weinig toekomen aan het inoefenen en onderhouden van vaardigheden, als je als docent niet uitkijkt. In het begin vinden leerlingen dit soort explorerend werk leuk, daarna wordt het vervelend. Ze moeten zelf veel meer nadenken en initiatieven ontplooiën. Dat geeft ook onzekerheid en niet altijd direct een bevredigend resultaat. Vragen, die ze de docent stellen, worden meestal beantwoord met een wedervraag. Als de leerlingen hierbij door de docent zo begeleid worden, dat ze merken zo wel degelijk verder te komen en resultaten boeken, gaan ze het ook steeds leuker vinden.

Een meerwaarde is ook, dat je door af te wisselen tussen het boek (*Getal & Ruimte*) en SIMQuest veel variatie in je lessen kunt aanbrengen, waardoor het geheel voor leerlingen aantrekkelijker wordt.

Tot slot

SIMQuest (versie 6.3) kan je downloaden via de website « www.simquest.nl ». Je kiest een wachtwoord en je kunt vervolgens bij al

het lesmateriaal komen.

De meerwaarden van dit proefschrift voor de praktijk van het wiskunde-onderwijs kunnen zijn dat:

- het beschrijft hoe opdrachten met ICT leerlingen de ruimte geven tot exploreren;
- het aangeeft hoe leerlingen met relatief open opdrachten om kunnen gaan;
- het duidelijk maakt dat leerlingen ondersteund moeten worden om aan de slag te gaan en te blijven;
- het laat zien dat leerlingen de vaardigheden en kennis moeten ontwikkelen om relevante wiskundige vragen te stellen.

Het is hartverwarmend mee te maken, dat in goede onderlinge samenwerking jong (Petra) en oud (Cor) oog hebben voor het gebrek aan algebraïsche vaardigheden bij leerlingen, maar daar niet in blijven steken. Niet somberen maar werken aan en met materiaal, waarbij leerlingen worden uitgedaagd zich kritisch te ontwikkelen. Het pure enthousiasme komt toch altijd weer bovendrijven, gelukkig.

Noot

- [1] Ger Limpens (2009): *Boekbespreking / Wiskundig actief*. In: *Euclides* 85(3), december 2009; pp 124-125.

Over de auteurs

Wim Laaper is sinds maart 2008 met fpu. Daarvoor was hij als wiskundedocent verbonden aan het Koning Willem II College in Tilburg. Hij is redacteur van *Euclides*.

Heiner Wind is vanaf 2008 fpu'er. Hij was als wiskundedocent werkzaam aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen. Hij is voorzitter van de redactie van *Euclides*. E-mailadressen: corvanzelst@gmail.com, H.P.Hendrikse@gw.utwente.nl, wlaaper@iae.nl en hwind@home.nl

Meervoudige intelligentie in de wiskundeles

BIJ REKENEN, OPPERVLAKTE, VERGROTEN, GONIOMETRIE, VERBANDEN

[Ingrid Berwald]

Deel 1 – Rekenen

Er zijn acht meervoudige intelligenties en ieder mens beschikt over alle acht, waarbij de ene intelligentie bij de één sterker is ontwikkeld dan bij de ander. Als een – voor een kind boeiende – intelligentie wordt verwerkt in een instructie of een andere verwerking van de leerstof, dan neemt het kind de leerstof beter op. Dit is gebleken uit onderzoeken van de Amerikaanse hoogleraar Howard Gardner. Zijn motto is: ‘Het gaat er niet om hoe intelligent je bent, maar om hoe je intelligent bent.’ Iedereen is op zijn eigen manier knap. Vandaar de omschrijvingen bij de volgende intelligenties:

1. Verbaal – linguïstisch (taalknap)
2. Logisch – mathematisch (rekenknap)
3. Visueel – ruimtelijk (kijkknap)
4. Muzikaal – ritmisch (muziekknop)
5. Lichamelijk – kinesthetisch (bewegingsknap)
6. Naturalistisch (natuurknap)
7. Interpersoonlijk (samenknap)
8. Intrapersoonlijk (zelfknap)

In onderstaand artikel komt het gebruik van verschillende intelligenties bij het onderwerp rekenen aan bod. Het is het eerste deel in een serie van vijf artikelen.

Goochelen met kaarten

Het gebruik van meervoudige intelligenties in de wiskundeles biedt een gelegenheid om de lesstof op een andere manier aan te bieden. Zeker bij het onderwerp rekenen is afwisseling gewenst. Bij mij op school werken we met lesuren van 100 minuten en er zijn niet veel leerlingen die 100 minuten rekenen uit het boek volhouden. Het eerste rekenhoofdstuk dat ik tegenkom

in de eerste klas gaat over het onderwerp breuken. Dit hoofdstuk introduceer ik met een goocheltruc (uit: *Gegoochel met getallen*^[1]). Deze truc werkt als volgt: ter voorbereiding neem je een spel kaarten en haalt er van de harten de kaarten Aas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 uit. Je schudt de overige kaarten. De harten 3, 6 en 9 heb je helemaal niet nodig, die leg je terzijde. De overige hartenkaarten leg je onderop het spel in de volgende volgorde: A42857 met de A (= 1) onderop. Stop het spel weer in het doosje. In de klas pak je het spel en haal je het uit het doosje. Je vouwt de kaarten open en laat zien dat het spel al door elkaar zit. Toch ga je het nog ‘schudden’. Verdeel de stapel in twee gelijke stapels en rits de kaarten. Doe dit nog een keer zodat de kaarten goed door elkaar zitten. (In werkelijkheid heb je nu de harten kaarten op volgorde over het spel verdeeld.) Vraag nu de klas de eerste zes harten kaarten onder de tien, Aas = 1, uit het spel te halen zonder aan jou het getal kenbaar te maken. Laat hiervoor de onderste kaart aan een leerling zien en vraag of het een harten is, haal net zo lang kaarten weg tot de leerling een hartenkaart (dat is de aas) ziet. Leg deze van rechts naar links voor je blind op tafel. De volgende leerling zoekt de volgende harten kaart. Ga door tot er zes kaarten voor je liggen. Vraag nu iedereen zijn/haar rekenmachine te pakken en de zes kaarten als een groot getal (142857) met zes cijfers in te tikken. Hiervoor laat je de kaarten in een waaier als één getal zien, maar doe dat zo dat je de kaarten zelf niet ziet!

Laat dan een leerling met een dobbelsteen gooien en vermenigvuldig het getal met het getal dat op de dobbelsteen staat (bij 1 nog een keer laten gooien). De truc: bij 3 of 6

leg je respectievelijk de eerste of de eerste drie kaarten achteraan de rij, in dezelfde volgorde. Bij de andere worpen is het aantal kaarten dat achteraan moet sluiten gelijk aan het aantal ogen van de worp. Draai nu de kaarten om en tot ieders verbazing ligt daar het getal dat ook het antwoord op de rekenmachine is! Deze truc vinden alle leerlingen leuk, vooral als ik een beetje zenuwachtig doe omdat hij misschien wel kan mislukken (wat echt onmogelijk is). De intelligentie die ik aanspreek, is de visueel-ruimtelijke en de logisch-wiskundige intelligentie. Logisch-wiskundige kinderen willen weten hoe dit kan. Natuurlijk vertel ik nooit *hoe* de truc werkt, maar wel *waarom* hij werkt. De getallen 142857 zijn namelijk de repeterende cijfers in de breuken $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, ..., $\frac{6}{7}$. Ze hebben dezelfde repeterende cijfers, alleen beginnen ze ergens anders. Ik hoef na de vermenigvuldiging alleen nog maar te zorgen dat de kaarten bij het juiste cijfer beginnen. Een voorbeeld erbij kan verhelderend werken. Na de goocheltruc volgt een uitleg over het verschil tussen $\frac{3}{7}$ en $0,428571$ en het vermenigvuldigen van breuken.

Visueel-ruimtelijke intelligentie met cirkels

Bij het vereenvoudigen van breuken heb ik een visuele opdracht. Ik laat de leerlingen een lijnstuk tekenen van 24 cm. Het begin is nul, het einde stelt het getal één voor. Hierna moeten de leerlingen alle breuken van een half tot en met zeven achtste, die niet te vereenvoudigen zijn, erop aangeven. Vervolgens wordt er bij deze breuken een cirkel getekend met als straal twaalf gedeeld door de noemer, te beginnen met de grootste noemer. Er ontstaat dan een prachtig plaatje; *zie figuur 1*. De vraag die



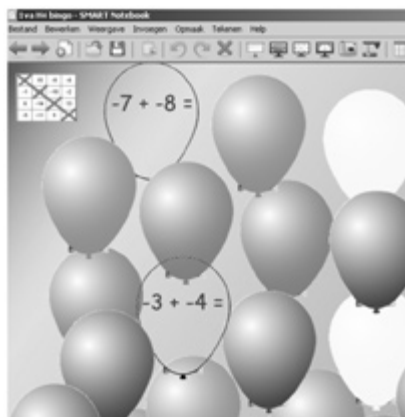


figuur 1

gesteld kan worden is of het hele lijnstuk bedekt wordt als je door zou gaan met tekenen.

Ballonnen prikken, motorische intelligentie

Bij het hoofdstuk rekenen met negatieve getallen speel ik altijd bingo. Ik geef elke leerling een aantal bingokaarten. Op het digibord heb ik al bij de getallen -20 tot en met 20 sommen bedacht en achter een ballon verstoppt (*zie figuur 2*). Ik heb meerdere versies gemaakt zodat bij een volgende bingo niet steeds dezelfde sommen verschijnen.



figuur 2

De leerlingen mogen om beurten een ballon stuk prikken. Dan verschijnt er een som die ze zonder rekenmachine uit moeten rekenen. Als het antwoord op de kaart staat strepen ze hem door. Geen leerling die het nu nog erg vindt om te rekenen. Ik spreek wel van te voren af wat er gebeurt bij een valse bingo. Ik laat de keuze tussen jezelf opdrukken en een liedje zingen. Ook zorg ik voor kleine prijsjes, zodat het nog spannender wordt. Bij dit spel maak ik gebruik van de motorische intelligentie bij de leerlingen, ze mogen even lopen naar het bord, een ballon stuk prikken, maar ook een wedstrijdje hoort bij de motorische intelligentie.

Trivianten met wortels

Het rekenen met wortels vinden mijn leerlingen echt lastig, daarom leer ik dit onderwerp met de leerlingen in de klas (2-vwo) door gebruik te maken van de naturalistische intelligentie en de interpersoonlijke intelligentie: ik ga *trivianten*.

Triviant is een spel met 6 categorieën en een cirkel met 6 segmenten. Als je een vraag uit een categorie goed hebt, krijg je het bijbehorende segment. Het is de bedoeling de cirkel te vullen door uit elke categorie een vraag juist te beantwoorden. Het eerste gedeelte van de les deel ik lege triviantkaarten uit met daarop de zes onderwerpen (worteltrekken op de rekenmachine, wortels optellen, wortels vermenigvuldigen, randpunt bij een functie, welke wortel is groter, als één wortel schrijven) die ze moeten beheersen. De leerlingen verzinnen per onderwerp een opgave en noteren ook het antwoord. De opgave mag niet te makkelijk zijn anders geef je triviantjes weg. Als iedereen klaar is, verzamel ik de kaarten en kan het spel beginnen. Ik verdeel de klas in zes groepen en geef elke groep een lege trivianthouder. Groep 1 gooit met twee dobbelstenen. Als ze 1 en 5 gooien, mogen ze kiezen of ze een vraag uit categorie 1 of 5 willen beantwoorden. Ik noteer de vraag van de bovenste kaart en loop door naar groep twee. Als ik de klas rond ben, kom ik weer bij het eerste groepje aan en wijs ik een leerling aan die de vraag moet beantwoorden. Het groepje moet er dus voor zorgen dat elke leerling het antwoord uit kan leggen. Is het antwoord goed, dan krijgen ze de triviant in de kleur die bij de vraag hoort. Bij een fout antwoord leg ik uit hoe het moet en krijgen ze nog een vraag uit dezelfde categorie. Het groepje dat het eerst zijn houder vol heeft, wint (*zie figuur 3*). Natuurlijk worden er op een gegeven moment twee getallen gegooid waarvan het groepje de trivianten al heeft. Ik motiveer de leerlingen dan om toch de moeilijkste vraag te kiezen; ze zitten hier tenslotte om te leren. Motorische kinderen kiezen liever de makkelijkste categorie, zij zitten hier om te winnen! Dit is een les waarbij de leerlingen heel gemotiveerd aan het leren zijn. Het is echt heel leuk om te zien hoe de leerlingen elkaar helpen de stof te beheersen. Bovendien vinden ze dit een leuke manier van leren.

Woorden verzamelen door te ontbinden in factoren

In de derde klas heb ik bij het onderwerp *ontbinden in factoren* twaalf opdrachten gemaakt, waarbij de uitkomst een letter voorstelt.

Voorbeeld: $x^2 - 2x - 15 = 0$ geeft $(x - 5)(x + 3) = 0$ dus $x = 5$ en $x = -3$.

De uitkomst stelt een letter voor: de 5 geeft de vijfde letter uit het alfabet, een 'e'; de -3 geeft de derde letter *van achter*, de 'x'. Zo ontstaan er twee woorden van twaalf letters en moeten de leerlingen nog wel even uitvinden welke letter bij welk woord hoort:



figuur 3

er ontstaan twee woorden boven elkaar. Van de twee letters die ze vinden, hoort er één achter het eerste woord en de ander bij het tweede woord. De letters staan al in de goede volgorde. Hiervan heb ik heel veel bladen gemaakt op verschillende niveaus; sommigen blijven er om vragen. De letters zijn tegelijk een controlemiddel of het wel goed gaat.

Boekvervangende dossieropdrachten met intelligenties

Met deze opdrachten vervang ik de vragen uit het boek. Ik vind deze manier van lesgeven erg leuk. Het is afwisselend en ik zie dat alle leerlingen in elk geval af en toe plezier beleven aan wiskunde. Veel collega's vragen of ik geen tijd te kort kom met de klas als ik dit er ook nog allemaal bij doe. Dat is niet zo, omdat ik de opdrachten ook vaak doe in plaats van opgaven uit het boek. Ook hoor ik vaak dat wiskunde zo veel leuker is; het zijn meestal de ouders die dat zeggen. De leerlingen nemen het werk mee naar huis en er wordt over gesproken, ouders vinden het leuk, maar onze leerlingen zijn niet anders gewend. Ze vinden het heel normaal. Ik zeg dan ook nooit dat ik iets leuks ga doen, wel dat we weer met een andere intelligentie gaan werken. Het zijn de leerlingen zelf die me aanzetten tot het maken en zoeken van nog meer van dit soort opdrachten. Als ze even geen zin hebben in het boek, komen ze altijd vragen om een dossieropdracht (zo noemen we deze opdrachten).

Noot

- [1] Job van der Groep (2006): *Gegoochel met getallen*. Houten: EPN. Zie voor een boekbespreking *Euclides* 82(1), september 2006.

Over de auteur

Ingrid Berwald is docente wiskunde aan het IJsselcollege in Capelle aan den IJssel. Ze geeft les aan vmbo-, havo- en vwo-klassen en vindt het belangrijk dat alle leerlingen positieve ervaringen opdoen tijdens het vak wiskunde.

E-mailadres: i.berwald@ijsselcollege.nl

de leerlingen beschikbaar zijn; niet voor ieder één exemplaar, maar toch een verbetering. Ook een nieuwe cartridge voor de printer was zeer welkom. Ik kon hem geen ongelijk geven, en ben overtuigd van een goede besteding van het geld.



foto 2 Dank!

Bedankt

Natuurlijk werd er voor me gezongen en gedanst en hadden de leerlingen van groep 8 een tekening voor me gemaakt (*zie foto 2*).

Ik wil hierbij, mede namens de leraren en de kinderen, het WwF bedanken voor zijn steun aan de Kessup Primary School in Kessup.

Mocht iemand van jullie ooit in de gelegenheid zijn Kenia te bezoeken, dan is het zeer de moeite waard om met eigen ogen te zien hoe jullie bijdrage wordt ingezet.

Ik heb nog steeds contact met de hoofd-onderwijzer via e-mail. Via een hardloop-coach heb ik voor de school een subsidie geregeld voor de bouw van een nieuwe lerarenkamer en een nieuwe, grotere bibliotheek. Meneer Kandie vertelde mij dat in de bibliotheek bij de wiskundeboeken en materialen een bordje komt met 'Support by Dutch Mathematic Foundation'. En daar doen we het natuurlijk allemaal voor...

Info

Contactpersoon WwF: Juliëtte Feitsma
E-mailadres: juliettefeitsma@kpnplanet.nl
Website: www.nvvw.nl/page.php?id=1813

Over de auteur

Jolanda Vriend is technisch onderwijs assistent (toa) scheikunde en coördinator maatschappelijke stage op het St. Michaël College in Zaandam. Haar droom is om voor langere tijd naar Kenia te gaan om daar haar kennis en ervaring te delen in het onderwijs.

E-mailadres: jovri@upcmail.nl

OPROEP / VEILINGMEESTER WERELDWISKUNDE FONDS

Het Wereldwiskunde Fonds (WwF) steunt financieel projecten op het gebied van wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. Het fonds is een werkgroep van de NVvW. Het WwF komt aan geld door bijdragen van de leden van de NVvW en ook door de verkoop van tweedehands wiskundeboeken. De afgelopen jaren heeft de werkgroep meerdere internetveilingen georganiseerd. Ook bemensen leden van de werkgroep een standplaats tijdens de jaarvergadering van de NVvW.

De veilingen geven wiskundeboeken een tweede leven, en leveren daarnaast geld op dat wordt ingezet voor wiskundeprojecten in ontwikkelingslanden.

Aangezien de huidige veilingmeester er mee gaat stoppen, zijn we op zoek naar een nieuwe veilingmeester. De huidige taken van de veilingmeester zijn:

- het verwerven en beheren van het boekenbestand;
- het organiseren van de internetveiling;
- versturen en afhandelen van de veilingtransacties;
- het beheren van het veilinggedeelte van de website.

Waarschijnlijk zal samen met deze persoon (m/v) gekozen worden voor andere veilingsoftware.

Lijkt u dit een leuke en voldoening gevende uitdaging, dan kunt u zich aanmelden bij de PR-functionaris van het WwF, Juliëtte Feitsma, of bij de huidige veilingmeester, Christian Bokhove.

E-mailadressen: juliettefeitsma@kpnplanet.nl en cbokhove@gmail.com

Zie eventueel ook: <http://www.nvvw.nl/page.php?id=1813>



BEVOEGDHEID TE GRAAD HALEN?

Bij Hogeschool Utrecht kun je doorstuderen voor een Master of Education voor de vakken aardrijkskunde, biologie, Duits, Engels, Frans, natuurkunde, Nederlands, Spaans en wiskunde. Kom naar een van de open dagen of kijk op www.ca.hu.nl > masters voor meer informatie.

ER VALT NOG GENOEG TE LEREN

INSTITUUT
ARCHIMEDES
HOGESCHOOL
UTRECHT



Enkele benaderingen van pi

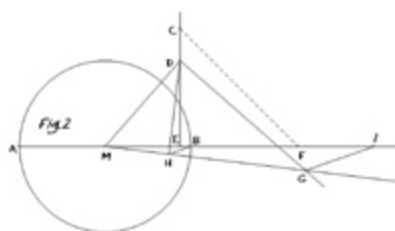
CONSTRUCTIES EN BEREKENINGEN IN EEN HISTORISCHE CONTEXT

[Dick Klingens]

Wat historie

Conrad Busken Huet in *Litterarische Fantasien en Kritieken* (vier en twintigste deel), Eerste lezing, Bellamy^[1]: 'Het is de 24ste December van het jaar 1794, avond, en bij achten. Wij zijn te Amsterdam, in het gebouw der Maatschappij Felix Meritis, op de Keizersgracht. De groote gehoorzaal is opgevuld met hoorders en hoorderessen. Zoo aanstonds zal Prof. Van Swinden (Jan Hendrik) het spreekgestoelte beklimmen, en zal eene lijkrede uitspreken ter gedachtenis aan den vroeg gestorven Pieter Nieuwland^[2], laatstelijk hoogleeraar aan de Leidsche Universiteit. (...)'

Jacob de Gelder, leermeester in de wiskunst te Rotterdam, in *Betoog van eene merkwaardige eigenschap des Cirkels, waar door men deszelfs omtrek tot den uitersten trap van naauwkeurigheid meetkundig kan construeeren* (In: *Nieuwe Algemene Konst- en Letterbode* VI nr. 153, vrijdag 2 December 1796, pp. 177-181^[3]): '(...) Het zal by deeze gelegenheid niet te onpas komen, om de nagedagtenis van onzen grooten NIEUWLAND by de Vaderlandsche leezers te verëeren. Professor VAN SWINDEN zegt in de aantekeningen op de Lykrede van NIEUWLAND in *Felix Meritis* uitgesproken, pag. 141, dat NIEUWLAND een zeer eenvoudige Constructie van de proportie 113 : 355, door METIUS voor de reden van den omtrek des cirkels opgegeeven, gevonden heeft. Ik heb dit lezende eene dergelyke Constructie gevonden, indien NIEUWLAND niet by geval een figuur ontdekt heeft, waar in eenige lynen die proportie opleveren, zal zyne Constructie mogelyk hier op uitkomen:



figuur 1

Dewyl 113 gelyk is aan de som van de quadraaten van 7 en 8 en 355 gelyk is aan tweemaal het vierkant van 11 plus 113, neem ik figuur 2 [hier opgenomen als figuur 1^[4]; DK], (AB de middellyn en M het middelpunt van de cirkel zynde,) op een wel verdeelde schaal waar van de deelen niet al te klein zyn, een lyn ME van 7 deelen, voords ED gelyk aan 8 deelen en trek de lyn MD; eindelijk neem ik nog EC = EF = 11 deelen en DG loodrecht op MD getrokken hebbende, neem ik DG = CF en laat DH loodrecht op MG vallen, en dan staat de lyn MH tot de lijn MG gelyk aan 113 tot 355. Want $MD^2 = ME^2 + ED^2 = 49 + 64 = 113$, en $DG^2 = CF^2 = 2 \cdot 121 = 242$; derhalven $MG^2 = MD^2 + DG^2 = 113 + 242 = 355$; nu is $MH : MG = MD^2 : MG^2 = 113 : 355$; indien men dus GI evenwydig aan HB trekt, zal MI = den halven omtrek van een cirkel zyn. (...)'

Wat toelichting en meer

A.

De Gelder dicht de verhouding 113 : 355 toe aan Metius.^[5] En hij doelde daarmee op Adriaan Adriaansz. (1571-1635). Evenwel, niet deze, maar diens vader, Adriaan Anthonisz. (geboren te Metz omstreeks 1527; overleden te Alkmaar in 1607) heeft de waarde gevonden. Dit blijkt uit de volgende passage uit het boek van Adriaan Metius, *Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae* (in 1633 verschenen in eerste druk).^[6] Hij, Adriaan Metius, schrijft op

pagina 102:

'Nu kan men wel tusschen beyden naederen / gelyck by myn salighe Vader een middelraminge gevonden is: seggende als de diameter is 113 / soo geeft den omring des circuls 355 gedeelten / 't welk geen verschil geeft van een $\frac{1}{100000}$ gedeelte / ende daerom dese proportie, sonder eenige merckelijcke faute in een circul, zijnde soo groot als de circumferentie vant 'aertrijck / gebruyckt can werden.'

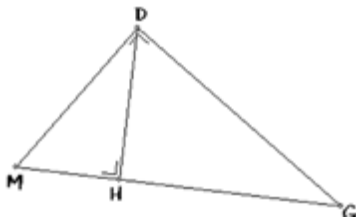
Adriaan Metius zegt niets over de manier waarop deze benadering daadwerkelijk is afgeleid: hier wordt alleen bevestigd, dat bedoelde verhouding door Metius' vader is gevonden.

Vermoedelijk is er gemiddeld tussen de tellers en de noemers van twee andere benaderingen: $\frac{377}{120}$ (de benadering van Ptolemaeus) en $\frac{333}{106}$. En dat verklaart zeker het woord 'middelraminge' in bovenstaand citaat.

Echter, Adriaan Anthonisz. was niet de eerste die de benadering $\frac{355}{113}$ van π vond. De eerste was Zu Chongzhi (429-501, China) die daarvan melding maakte in zijn boek *Zhui shu* (Methode van interpolatie).^[7] In 1573 vond ook Valentinus Otho (1550-1603, Duitsland) deze benadering. Otho was student van Georg Joachim Rheticus (1514-1584, Oostenrijk) aan de Halle-Wittenberg Universiteit, en later ook (als opvolger van Rheticus) hoogleeraar wiskunde en astronomie aan die universiteit.

B.

Dat $MH : MG = MD^2 : MG^2$ is, in het laatste deel van de berekening van De Gelder, is wellicht niet direct duidelijk. We bekijken dan ook in figuur 2 de rechthoekige driehoek MGD waarin DH loodrecht staat op MG.



figuur 2

Driehoek MHD is gelijkvormig met driehoek MDG (hb), zodat:

$$MH : MD = MD : MG$$

$$\text{Of: } MH \cdot MG = MD^2$$

Deling van deze identiteit door MG^2 geeft inderdaad:

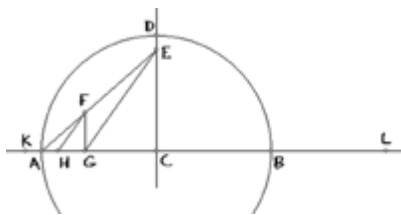
$$MH : MG = MD^2 : MG^2$$

C.

We kunnen schrijven:

$$\frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$$

Deze notatie geeft aanleiding tot een iets andere constructie dan die van De Gelder.



figuur 3

In **figuur 3** is $CD = 1$ (de straal van de cirkel; AB is de middellijn daar loodrecht op), $CE = \frac{7}{8}$ en $AF = \frac{1}{2}$ (met F op AE). Verder is: $FG \parallel CD$ en $FH \parallel EG$, en dan is:

$$AH = \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$$

We tonen dit laatste als volgt aan. In driehoek ACE is:

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 = 1 + \frac{7^2}{8^2} = \frac{7^2 + 8^2}{8^2}$$

En uit $AF : AE = GF : CE$ volgt, na kwadrateren van de elementen van deze relatie:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{7^2 + 8^2}{8^2} = GF^2 : \frac{7^2}{8^2}$$

$$\text{zodat: } GF^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{7^2}{7^2 + 8^2}.$$

In de rechthoekige driehoek AGF is dan:

$$\begin{aligned} AG^2 &= AF^2 - GF^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7^2}{7^2 + 8^2} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{7^2}{7^2 + 8^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8^2}{7^2 + 8^2} = \frac{4^2}{7^2 + 8^2} \end{aligned}$$

Wegens:

$$\frac{AH}{AG} = \frac{AF}{AE} = \frac{AG}{AC} = \frac{AG}{1}$$

is: $AH = AG^2$.

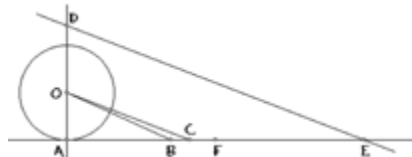
$$\text{En dus is inderdaad: } AH = \frac{4^2}{7^2 + 8^2}.$$

Is dan K het spiegelbeeld van H in A en L dat van C in B , dan is de lengte van het lijnstuk KL gelijk aan $\frac{355}{113}$.

D.

$$\pi \approx \frac{13}{50} \sqrt{146} (= 3,14159195...)$$

Deze benadering van π ^[8] kan eenvoudig worden geconstrueerd; **zie figuur 4**.



figuur 4

Op de raaklijn in A aan een cirkel met middelpunt O en straal 1 liggen, aan dezelfde kant van A , de punten B en C zó, dat $AB = 2\frac{1}{5}$ en $BC = \frac{2}{5}$. Het punt D ligt op de loodlijn in A zó, dat $AD = OB$. Verder is $DE \parallel OC$.

Nu is:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AO} = \frac{13}{5} : 1 \Rightarrow AE = \frac{13}{5} AD$$

In driehoek OAB is:

$$OB = \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = AD$$

Zodat:

$$AF = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5} \sqrt{146} = \frac{13}{50} \sqrt{146}$$

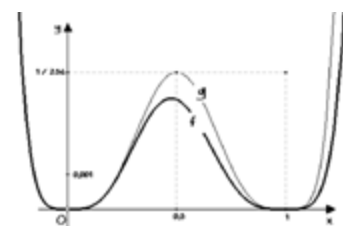
Wat integreren

Benaderingen van π zoals:

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots$$

zijn in de loop van de tijd uiteraard onderwerp van verder wiskundig onderzoek geweest.^[9] We geven hiervan een (wat moderner) voorbeeld.

We bekijken de functie $f(x) = \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ en daarbij in het bijzonder de oppervlakte van het vlakdeel tussen de grafiek van f en de x -as op het interval $[0; 1]$; **zie figuur 5**.^[10]



figuur 5

We werken de teller van het functievoorschrift van f uit:

$$x^4(1-x)^4 = x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8$$

Daarna geeft deling door $(1+x^2)$:

$$f(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}$$

En daarmee vinden we voor de oppervlakte van het bedoelde vlakdeel:

$$I = \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx$$

Uitgewerkt:

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{4}{6} x^6 + \frac{5}{5} x^5 - \frac{4}{3} x^3 + 4x - 4 \arctan x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi \\ &= \frac{22}{7} - \pi \end{aligned}$$

Omdat op het interval $<0; 1>$ geldt dat $f(x) > 0$, is ook $I > 0$. En dan is:

$$I = \frac{22}{7} - \pi > 0 \Rightarrow \pi < \frac{22}{7}$$

Op het beschouwde interval geldt eveneens:

$$-x^4(1-x)^4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} \quad (\text{zie de functie } g \text{ in figuur 5});$$

$$-1 + x^2 \geq 1.$$

$$\text{Dus: } I = \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{256}, \text{ zodat:}$$

$$\pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{256}$$

$$\text{En daarmee is: } \frac{5625}{1792} < \pi < \frac{22}{7}.$$

In 5 decimalen is dat: $3,13895 < \pi < 3,14286$ (werkelijk: 3,14159).

We kunnen iets nauwkeuriger grenzen voor π vinden als we de functie g , vastgelegd door $g(x) = x^4(1-x)^4$, beschouwen.

Hierbij is:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx &= \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^6 + \frac{6}{7} x^7 - \frac{1}{2} x^8 + \frac{1}{9} x^9 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{6}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{1}{630} \end{aligned}$$

Zodat, met $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ op $[0; 1]$, volgt:

$$\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630}$$

Dus is:

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$$

$$\frac{1979}{630} < \pi < \frac{3959}{1260}$$

In 5 decimalen: $3,14127 < \pi < 3,14206$ (werkelijk: 3,14159).

Ook bij de waarde $\frac{355}{113}$ is een 'integraal-uitdrukking' gevonden.^[11] We beschouwen daartoe de functie:

$$h(x) = \frac{x^8(1-x)^8(25+816x^2)}{3164(1+x^2)}$$

Uit het functievoorschrift van h is

onmiddellijk duidelijk dat op het interval $<0; 1>$ geldt dat $h(x) > 0$.

Op dezelfde manier als hierboven vinden we dan (echter, na wat meer rekenwerk):

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8(25+816x^2)}{3164(1+x^2)} dx = \frac{355}{113} - \pi$$

$$\text{Zodat: } \pi < \frac{355}{113}.$$

In 7 decimalen: $\pi < 3,1415929$ (werkelijk: 3,1415927).

Noten

- [1] Het boek van Busken Huet is uitgegeven door H.D. Tjeenk Willink te Haarlem (vermoedelijk in 1887). *Bron* – Digitale Bibliotheek voor de Nederlandse Letteren (DBNL). Elektronisch toegankelijk via: www.dbnl.org/tekst/busk001litt24_01/index.htm.
Van Swinden hield zijn lijkrede dus aan de vooravond van het uitroepen van de Bataafsche Republiek (op 19 januari 1795). Lees daarover (o.m. over 'de zeer omwentelings-gezinde vergadering') verder op genoemde webpagina.
- [2] Pieter Nieuwland (1764-1794) was niet alleen lector in de wis-, sterren- en zeevaartkunde aan het Athenaeum Illustre te Amsterdam van 1789 tot 1793 en hoogleraar te Leiden van 1793 tot aan zijn dood op 14 november 1794, maar ook een dichter 'in den echten zin des woords'. Zie voor dit laatste (via DBNL):
- www.dbnl.org/tekst/its004biog04_01/wits004biog04_01_0215.htm
- www.dbnl.org/tekst/ran038biog01_01/bran038biog01_01_2949.htm
- [3] *Bron* – Website van het landelijk werkcontact G.M.F.W. Elektronisch toegankelijk via:
www.math.ru.nl/werkgroepen/gmfwl/bronnen/gelder2.html
- [4] Reconstructie met Cabri II PlusTM van de figuur uit de *Nieuwe Algemene Konst- en Letterbode* VI nr. 153.
- [5] Twee zoons van Adriaan Anthonisz. zijn bekend geworden in de geschiedenis der wetenschappen: **Adriaan Adriaansz.**, wiskundige, van 1598 tot 1635 hoogleraar aan en ook rector van de Universiteit van Franeker, en **Jacob Adriaansz.**, glasblazer, instrumentmaker en opticien, en (volgens Descartes) de uitvinder van de telescoop.
Toen beide zoons te Leiden studeerden, kregen ze de bijnaam 'Metius', omdat hun vader uit Metz afkomstig was. Beiden hebben deze naam aangenomen, waardoor zij bekend zijn geworden als **Adriaan Metius** en **Jacob Metius**.
Bron – D. Bierens de Haan (1878): *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen*

in de Nederlanden. Amsterdam:

Kon. Academie van Wetenschappen.

Elektronisch toegankelijk via DBNL:
www.dbnl.org/tekst/bier009bouw01_01.

- [6] Zie BooksGoogle: <http://books.google.com/books?id=4gEOAAAAQAAJ&hl=nl>.
- [7] Zie: www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zu_Chongzhi.html.
- [8] C.G. Specht (1883): *Annäherungs-Construction des Kreis-Umfangs*. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, Vol. 3; pag. 83.
Een andere door Specht gevonden (en betere) benadering is:
 $2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{439}{278}} \approx 3,14159264$. In: *Crelle's Journal*, Vol. 3; pag. 405.
- [9] Zie bijvoorbeeld:
- Eric W. Weisstein: *Pi Formulas*. Op: <http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html> (MathWorld);
- Frits Beukers (2000): *A rational approach to pi*. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, serie 5, deel 1(4); pp. 372-379. Elektronisch toegankelijk via:
www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel01/dec2000/pdf/beukers.pdf;
- Frits Beukers (2000): *Pi / De geschiedenis en de wiskunde van het getal π*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- [10] D.P. Dalzell (1971): *On 22/7 and 355/113*. In: *Eureka, the Archimedian's Journal* 34; pp. 10-13.
Maar het is vrijwel zeker, dat ook Kurt Mahler (1903-1988, Duitsland) rond 1965 de functie f gebruikte in zijn colleges aan de Australian National University.
- [11] Stephen K. Lucas (2007): *Integral approximations to π with nonnegative integrands*. In: *American Mathematical Monthly* 116(2); pp. 166-172 (2009).

Over de auteur

Dick Klingens is eindredacteur van *Euclides*. Hij was, voor zijn pensioen, lerarenopleider en als wiskundeleraar en schoolleider verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.
E-mailadres: dklingens@pandd.nl



MEDEDELING / NLT-DATABASE

[Brechje Hollaardt]

De regionale steunpunten NLT en het Landelijk Ontwikkelpunt NLT hebben voor scholen een database ontwikkeld. Deze is te vinden via:

www.itsacademy.nl/NLTdb/zoeken.php

Met een simpele zoekopdracht, bijvoorbeeld op de naam van een module, is te zien welke scholen deze module geven, zowel per provincie als landelijk.

NLT-docenten van verschillende scholen kunnen met elkaar informatie uitwisselen over die module, bijvoorbeeld over de sterke en zwakke punten, tips voor practica of aanvullend lesmateriaal. Daarnaast is te zien welke modules een school nog meer geeft. Deze informatie kan inzicht geven in keuzes die scholen hebben gemaakt bij de opbouw van hun NLT-curriculum.

Staan de gegevens van uw school nog niet in de database? Of heeft u vragen over de database? Neem dan contact op met Jeroen Maréchal, coördinator van de database (e-mailadres: database@betavak-nlt.nl).

Waarom hebben vmbo-leerlingen problemen met haakjes?

[Frans Ballering]

Omdat ik – ondanks mijn pensionering als vakdidacticus – nog steeds niet ben uitgedacht over het leren van wiskunde door kinderen, blijf ik schrijven. Voor mijn stukjes ben ik geïnspireerd door het grote enthousiasme van wiskundeleraren die het kunnen opbrengen om 's avonds ook nog lessen vakdidactiek bij te wonen.

Haakjes, een probleem van de wiskunde

Omdat het wegwerken van haakjes op zoveel problemen stuit, heb ik gezocht naar mogelijkheden om dit wegwerken van haakjes te verduidelijken. Ik denk dat de problemen liggen in het begin van het leerproces. Leerlingen begrijpen niet waarom je eigenlijk haakjes moet gebruiken. Voor hen die wiskunde gebruiken in een bekende situatie is dat ook helemaal niet nodig. Gaat het over de mobiele telefoon of de gasrekening, dan zal niemand een fout maken tegen de voorrangsregels. Het is dus een probleem van de wiskunde.

Haakjes erin werken

Mijn oplossing is: *eerst haakjes erin werken*. Stel, bij een verhaal hoort de formule $7t + 20 = r$. Vaak komen er verschillende antwoorden bij de vraag 'bereken r als $t = 14$ ' en heb je dus een logische aanleiding om de klas te laten nadenken over de manier waarop je met deze formule moet omgaan. Zo niet, dan zou ik twee verschillende verhalen willen verzinnen die bij hetzelfde getal voor t verschillende uitkomsten moeten krijgen.

Voorbeeld 1. Eerst keek ik 60 minuten tv per dag. Ik ben steeds meer gaan kijken, nu kijk ik inmiddels 20 minuten meer dan vroeger. Hoeveel minuten kijk ik per week?

Voorbeeld 2. Ik betaal 20 euro per maand voor onderhoud van mijn verwarming. Omdat ik dat abonnement heb, hoef ik voor de monteur nog maar 7 euro per kwartier te betalen, als hij moet komen. Afgelopen maand moest mijn verwarming

schoongemaakt worden. Hoeveel betaalde ik die maand voor het schoonmaken waarmee de monteur drie kwartier bezig was?

De lezers zullen meer voorbeelden in het door hen gebruikte boek kunnen vinden of anders wel in hun mouw.

Zelf oplossingen verzinnen

Als leerlingen daarna het probleem onder woorden hebben gebracht, kan er gevraagd worden naar mogelijke oplossingen, waarbij we een beroep doen op de creativiteit van leerlingen. De vraag aan de leerlingen kan dan zijn: 'Hoe maak je aan een lezer duidelijk, die het verhaal niet kent, dat je eerst moet optellen en dan vermenigvuldigen?'

Leerlingen kwamen bij deze vraag met ongebruikelijke voorstellen zoals: een streep onder stukken die bij elkaar horen, kleurgebruik, kringen erom. Ik denk dat het belangrijk is dat de leerlingen hierin het voortouw nemen en dat dit deel van de les uitnodigend is. Wat is er leuker dan je eigen verzinsel op het bord?

Dat ze daarna aan de haakjes moeten, vinden ze vast niet erg.

Een student kwam eens met: ik zet er eerst een kring omheen en dan veeg ik daar zoveel van weg dat er haakjes overblijven.

Over de auteur

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: fransballering@hetnet.nl

Boekbespreking

MEESTER LUDOLPHS KOORDENVIERHOEK

[Dick Klingens]



Auteurs: Marjanne de Nijs, Steven Wepster

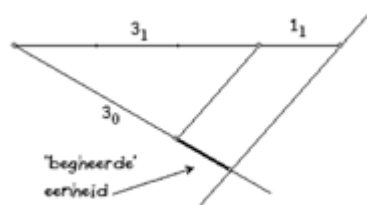
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2010) – Zebra 31

ISBN: 978 90 5041119 6

Prijs: € 9,00 (43 pagina's)

Prijs voor NVvW-leden (op bijeenkomsten): € 7,00

De lezers van *Euclides* kan het niet zijn ontgaan: 2010 was het Ludolph van Ceulen-jaar. In elke aflevering van *Euclides* in dat jaar stond immers een artikel over de 16e-eeuwse scherm- en rekenmeester; in nummer 85(6) zelfs twee. Informatie voor leraren dus. Maar ook leerlingen kunnen met zijn werk kennismaken: via twee artikelen in het tijdschrift *Pythagoras* (januari 2010) en via lesmateriaal dat voor alle klassen havo/vwo op de website www.ludolphvanceulen.nl (menu: Lesmaterialen) beschikbaar is. En kortgeleden verscheen ook, voor leerlingen uit de hoogste klassen van het vwo, nummer 31 in de *Zebra-reeks*: *Meester Ludolphs Koordenvierhoek*. Een goed initiatief van degenen die betrokken zijn bij het 'project' van het Departement Wiskunde van de Universiteit Utrecht (onder wie de beide auteurs). Dat men gekozen heeft voor een meetkundig onderwerp, lag min of meer voor de hand, immers over *Pi* – het bepalen van de eerste 35 decimalen daarvan was Van Ceulen's levenswerk – verscheen al eerder een *Zebra* (nummer 6), en er is ook al rekenmateriaal beschikbaar (zie de vorige alinea). Het boekje telt drie hoofdstukken: Inleiding, Lijnstukken construeren en Een koordenvierhoek, waarin de constructie van een koordenvierhoek wordt behandeld als de (lengtes van de) zijden ervan gegeven zijn, zoals die voorkomt in Van Ceulen's *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten* (uitgegeven in 1615 op initiatief van zijn weduwe Adriana Simons).

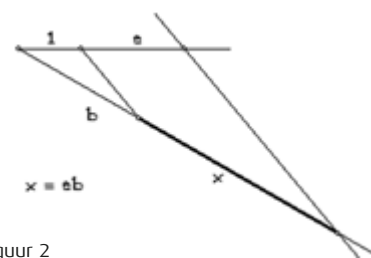


figuur 1

Hoofdstuk 1 geeft een inleiding bij het probleem en een levensbeschrijving van Van Ceulen. Beide hadden naar mijn smaak wat uitgebreider gekund. De definitie van een koordenvierhoek staat bijvoorbeeld pas in hoofdstuk 3 (pag. 21). Nu is dat voor een deel van de doelgroep, vwo-leerlingen, niet zo erg – zij moeten immers weten wat een koordenvierhoek is – maar het boekje is 'nadrukkelijk ook bedoeld voor allen die belangstelling hebben voor wiskunde', en wellicht is de meetkundekennis van die groep wat weggezaakt. De tijd waarin Van Ceulen leefde, komt eigenlijk niet uit de verf (als achtergrondinformatie toch wel nuttig), en ook diens 'verschillen van inzicht' met andere wiskundigen (toen toch zo bepalend voor het gezag als wiskundige) blijven onvermeld, evenals zijn contacten met Stevin en Snellius.

In een Appendix (ter grootte van een pagina) staan enkele meetkundige eigenschappen – in de inleiding wordt gesproken van 'definities' – die kunnen worden gebruikt bij te leveren bewijzen in de opgaven (29 in totaal, waarvan enkele van antwoorden zijn voorzien). Zeker omdat er veelvuldig gebruik wordt gemaakt van evenredigheden en van gelijkvormigheid van driehoeken, zou een toelichting daarbij, met wat voorbeelden en opgaven, de (redelijk grote) lezersvriendelijkheid van het boekje ten goede zijn gekomen. Dat geldt mijns inziens ook voor de drie vermelde 'basisconstructies': middelloodlijn (vraag – móet die met passer en liniaal, of mag het ook met een geo-driehoek?), driehoek met drie gegeven zijden, omgeschreven cirkel van een driehoek.

In *hoofdstuk 2* worden eerst twee belangrijke constructies behandeld: optellen en vermenigvuldigen van lijnstukken. Geheel in afwijking van wat tot dan gebruikelijk was, vat Van Ceulen het



figuur 2

product van twee lijnstukken op als een nieuw lijnstuk (en *niet* als oppervlakte van een rechthoek). Daarbij is het (soms) nodig de beschikking te hebben over een lijnstuk met lengte 1 (het boekje noemt dit de *eenheidsmaat*; waarom niet eenheidslijnstuk of eenheid?). Immers, het lijnstuk $x = ab$ is te construeren als vierde evenredige bij 1, a en b ($1 : a = b : x$). Hier zou volgens mij een ook 'basisconstructie' op zijn plaats zijn geweest, toegelicht met een plaatje als *in figuur 1* en gevolgd door een plaatje als *in figuur 2*; met een opgave als:

Gegeven een lijnstuk met lengte 3 (in notatie 3_0 ; waarbij de index 0 er op wijst dat het eenheidslijnstuk (nog) onbekend is).

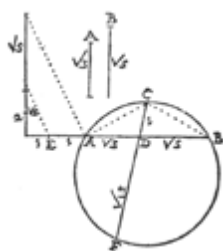
Construeer nu, na keuze van je eigen eenheidslijnstuk (1_1), de eenheid van het gegeven lijnstuk.

Daarna volgt de behandeling van de voor Van Ceulen belangrijkste constructie, namelijk die van de *middelproportioneel* (Van Ceulen: *middel proportioneel linie*; wij nu: *middelevenredige*). Zoals in *De Fondamenten* staat: 'dat is ghelijck de eerste, tot de begheerde, also de begheerde tegen de andere linie' (dus $a : x = x : b$).

De presentatie van de optelling van lijnstukken gaat eveneens aan de hand van een voorbeeld van Van Ceulen, dat, waar nodig door de auteurs voldoende toegelicht, is omgezet in een opdracht aan de lezer:

Opgave 8 – Construeer een lijnstuk met lengte $\sqrt{28} + 4$, als het lijnstuk met lengte $\sqrt{28}$ gegeven is.

Dat bij de uitleg daarvan typografisch iets is mis gegaan ($\sqrt{28}_1$ in plaats van $\sqrt{28}$) zal voor de lezer geen probleem zijn, maar mij viel het op (het is overigens een van de weinige drukfoutjes). Het vermenigvuldigen van lijnstukken doet Van Ceulen in een cirkel (zie *figuur 3*), en ook dit probleem ($x = \sqrt{15}$) wordt omgewerkt naar een opdracht aan de lezer.



figuur 3

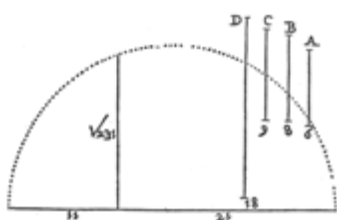
Hoofdstuk 3 begint direct met de probleemstelling (zie figuur 4): ‘Van dese hier getrocken vier linien gheteekent met ABCD, wilmen maeken een vierhouck, sulcks soomen eenen Circkel daer om treckt, dat de vier houcken raecten den omloop.’

Van Ceulen lost het probleem op door een van de diagonalen te berekenen (met $a = 6$, $b = 8$, $c = 9$, $d = 18$ heeft die diagonaal de lengte $\sqrt{231}$).

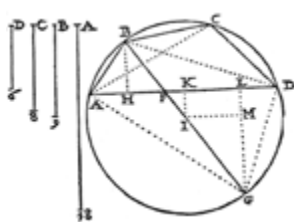
De auteurs leiden de lezer weer via een aantal opgaven door de constructie, met een uitstapje naar Van Ceulen's berekening van de lengte van de middellijn van de omgeschreven cirkel van de koordenvierhoek. De brug die Van Ceulen in *De Fondamenten* legt tussen meetkunde en algebra – de berekening van de diagonaal – was reeds in de oudheid bekend; immers, Ptolemaeus (ca. 90-168) berekende reeds de lengtes van koorden in een cirkel (met vaste straal). De door hem daarbij gebruikte en naar hem genoemde stelling^[1] komt uiteraard in *Meester Ludolph* uitgebreid aan de orde.

In de beide laatste ‘begeleide’ opgaven wordt dan de koordenvierhoek geconstrueerd, waarbij alleen gebruik gemaakt wordt van de middelevenredige en de stelling van Pythagoras.

In de laatste paragraaf van hoofdstuk 3 wordt de lezer uitgedaagd middels twee eindopdrachten, beide natuurlijk weer op basis van teksten uit *De Fondamenten*: het op papier zetten van een onderbouwde berekening van vier lijnstukken in de figuur



figuur 4



figuur 5 ‘Vraghe naer AF, FD, BF ende FG’

van de koordenvierhoek waarbij alleen de antwoorden zijn gegeven (zie figuur 5), en het uitvoeren van een alternatieve constructie van de koordenvierhoek.

De *Bibliografie* bevat slechts twee items in het Nederlands. Maar daaraan kunnen nu natuurlijk de artikelen in *Euclides* worden toegevoegd.

De inspiratiebron, *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten* (en de vertaling en bewerking daarvan door Snellius in het Latijn, *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*, ook verschenen in 1615), wordt weliswaar genoemd, maar dat die bron ook digitaal beschikbaar is, is niet vermeld. Met:

- (Nederlands) http://books.google.nl/books?id=_BgOAAAAQAAJ
- (Latijn) <http://books.google.nl/books?id=IS8VAAAAQAAJ>

is dat hier goed gemaakt.

Door de opbouw van het boekje – en zeker ook door de citaten en bijbehorende illustraties – krijgt de lezer een goede indruk van de manier waarop Van Ceulen te werk ging (en, zij het summier, van diens rekenmeesterschap).

Het boekje is een aanwinst voor de wiskundeleraar én voor geïnteresseerden in de geschiedenis van de wiskunde. De schrijfstijl is aangenaam, en de problematiek nodigt, mede door de manier waarop beide auteurs de problemen hebben toegelicht, zeker uit tot verder lezen en onderzoeken. Daarbij hoop ik dat het blijft passen bij/ binnen de, steeds veranderende, vwo-eindtermen, waardoor het óók voor leerlingen aantrekkelijk blijft kennis te nemen van ‘hoe het vroeger ging’. Over dat veranderen nog een opmerking. Op de achterpagina staat onder meer: ‘In dit boekje kun je je verwonderen over de wiskunde van vier eeuwen geleden en zie je dat wiskunde een vak in beweging is.’ Met

het eerste ben ik het volmondig eens, maar dat in het boekje blijkt dat de wiskunde een vak in beweging is, heb ik (lezend met de ogen van een vwo-leerling) niet goed kunnen vaststellen. Mogelijk zou dit wél het geval zijn geweest als ook enige constructiemethoden van de koordenvierhoek.

Noot

- [1] De stelling luidt (overigens niet zo geformuleerd door Ptolemaeus): het product van de diagonalen van een koordenvierhoek is gelijk aan de som van de producten van de paren overstaande zijden.

Info

- Website: www.ludolphvanceulen.nl
- Ook voor een docentenhandleiding bij *Meester Ludolph*, met daarin uitwerkingen van alle opgaven en enkele werkbladen, wordt verwezen naar bovenstaande website (menu: Lesmaterialen).

Over de recensent

Dick Klingens is eindredacteur van *Euclides*. Hij was, voor zijn pensioen, lerarenopleider en als wiskundeleraar en schoolleider verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.
E-mailadres: dklingens@pandd.nl

Vanuit de oude doos

EEN CO-PRODUCTIE

A^o 1927

[Ton Lecluse]

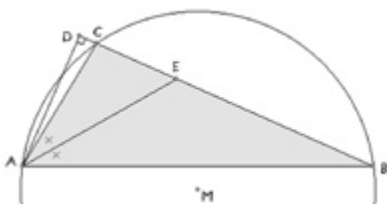
In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw – tot in de tweede wereldoorlog – in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, mogelijk met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer een speciale opgave. In 1927 werd deze als volgt geformuleerd:

Van driehoek ABC is gegeven de hoogtelijn $AD = 8$, de bissectrix $AE = 10$ en de straal R van de omschreven cirkel $= 10$ cm. Bereken de cosinus van $\angle A$, het liefst zonder een log. tafel.

Het deel na de laatste komma in de laatste zin van de opgave zou in de huidige nomenclatuur worden geformuleerd als 'exact'.

Het is een uitdaging op zich om uit te zoeken hoe deze figuur met passer en liniaal (met schaalverdeling in verband met de gegeven lengtes) te construeren. Verderop in dit artikel kom ik daarop terug.



figuur 1

In **figuur 1** staat de tekening, met de omschreven cirkel (met middelpunt M) van driehoek ABC erbij. Deze opgave deelde ik uit op de jaarvergadering van de NVvW in november 2010.

Probeer u hem eerst eens zelf!

Dat dit model veel geheimen verbergt, zal blijken uit de oplossingen die ik heb ontvangen. Verrassend is de diversiteit bij de aanpak van het probleem.

Ik bespreek oplossingen van Agnes Verweij, Aad Goddijn, Henk Visser, Martin Kindt, Sjoerd Zondervan, Quintijn Puite en Just Bent.

Het is een co-productie geworden, waarbij de oplosers elkaar flink hebben geholpen aan optimalisaties.

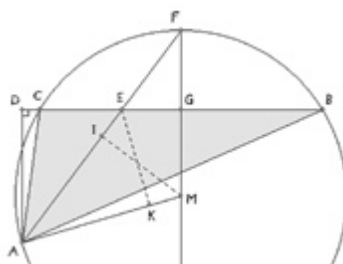
Zoals gebruikelijk bezigen we de benaming a , b en c voor de lengte van respectievelijk BC , AC en AB , en $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.

Eerst komen enkele euclidische oplossingen langs, waardoor deze geschikt zijn voor behandeling in de huidige 5-vwo klassen met wiskunde-B. Ze zijn van Aad, Just en Henk.

Daarna volgt een fraaie analytische oplossing van Quintijn, waarin een handig gekozen assenstelsel en de formules van cirkel en lijn snel tot de oplossing leiden. Er wordt daarbij ook kort gerefereerd aan gelijke omtrekshoeken.

De oplossing van Agnes is erg origineel, vanuit het idee om oppervlaktes te bekijken en dan flink te stoeien met gonioformules. Tot slot volgen algebraïsch-trigonometrische oplossingen van Sjoerd en Martin, waarbij formules uit de oude doos worden gehaald zoals deze terug te vinden zijn in de schoolboekjes van meer dan 50 jaar geleden. Heeft u deze formules zelf wel eens gehad toen u nog op de middelbare school zat? Of ze zelf gedoceerd? Sjoerd en Martin wellicht wel, ook gezien hun leeftijd.

Veel plezier!



figuur 2

De oplossing van Aad Goddijn

Aad gaat uit van de tekening in **figuur 1**, waarbij de lijn AE de omcirkel snijdt in F en FM de lijn BC in G ; zie verder **figuur 2**.

De bogen FC en FB zijn even groot (gelijke omtrekshoeken) en dus staat FM loodrecht op CB , zodat FM evenwijdig is met AD . Omdat $\angle AFM = \angle MAF$ (gelijkbenige driehoek) en $\angle DAF = \angle AFM$ (Z-hoeken), geldt $\angle DAF = \angle MAF$, en dus is AF (ook) deellijn van $\angle DAM$.

Trek nu MI loodrecht op AF en EK loodrecht op AM .

De driehoeken ADE , AKE , AIM en FIM zijn congruent (zijde van 10, een hoek gelijk aan $\angle MAI$ en een rechte hoek).

Dus $8 = AD = AK = AI = FI$ en $AE = 10$.

Dus is $EF = 6$.

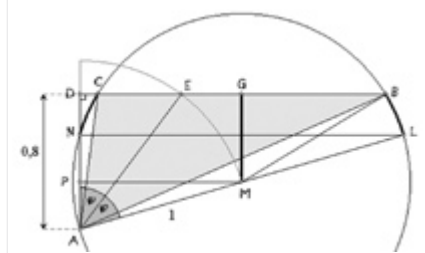
Driehoek FEG is gelijkvormig met driehoek AED met verhouding $FE : FG = AE : AD = 10 : 8$. Dus $FG = 4,8$. Zodat $GM = FM - FG = 10 - 4,8 = 5,2$.

In driehoek GMB , waarin $\angle GMB = \text{bg}(BF) = 2 \cdot \angle BAF = \alpha$, geldt dan:

$$\cos \alpha = \frac{GM}{MB} = \frac{5,2}{10} = 0,52$$

De oplossing van Just Bent

Evenals Aad laat Just eerst zien dat AE ook deellijn is van $\angle DAM$, maar met een andere evenwijdigheid. Just heeft alle lengtes door 10 gedeeld, zodat gewerkt wordt met de eenheidscirkel. De omcirkel van driehoek ABC snijdt AD in N . AL is middellijn (zie **figuur 3**).



figuur 3

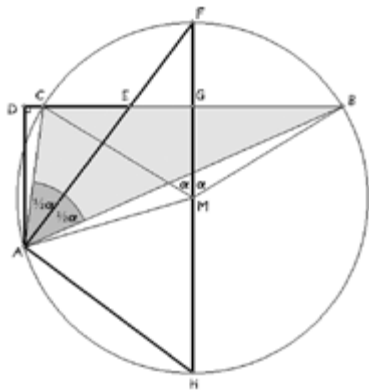
'Volgens Thales' is $\angle ANL = 90^\circ$, dus NL is evenwijdig met BC , dus $bg(NC) = bg(BL)$, dus $\angle NAC = \angle BAL$. Hierdoor is AE ook bissectrice van $\angle DAM = 2\varphi$. Middelpuntshoek $BMC = 2 \times$ omtrekshoek $BAC = 2\alpha$, dus $\angle BMG = \alpha$, dus de gevraagde cosinus = MG . Maar MG is niets anders dan $AD - AP = \cos \varphi - \cos 2\varphi = 0,8 - (2 \times 0,8^2 - 1) = 0,52$.

Constructie

In de oplossing van Aad en in die van Just zit verborgen hoe je, uitgaande van een gegeven 6-8-10-driehoek ADE , driehoek ABC kunt construeren. Het spiegelbeeld van de lijn AD in AE is de lijn waarop het punt M ligt. M kan dus gevonden worden; we weten immers de lengte van de straal van de omcirkel. Hierna kan de omcirkel van driehoek ABC worden getekend, die de lijn DE snijdt in C en B .

De oplossing van Henk Visser

Ook Henk gebruikt de punten F en G . Driehoek ADE is weer de gegeven 6-8-10-driehoek (zie figuur 4).



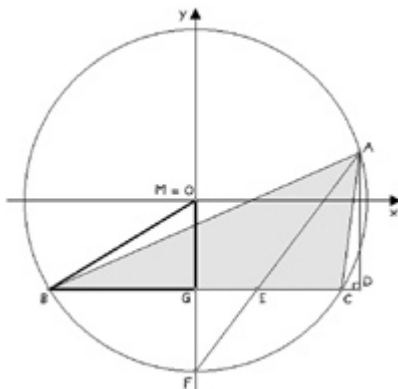
figuur 4

De eerste gedachte was: natuurlijk is $\cos \alpha = \frac{MG}{MB} = \frac{10-GF}{10}$. Dit is helemaal niet zo gek, want verleng FM maar naar H op de cirkel. De driehoeken EDA en HAF zijn gelijkvormig, dus de zijden van de driehoek HAF zijn tweemaal zo lang als de overeenkomstige zijden van de driehoek EDA . Dus $AF = 16$ en bijgevolg $EF = 6$. EF is de hypotenusa van de driehoek EGF , die ook gelijkvormig is met de driehoek EDA , waarvan de hypotenusa de lengte 10 heeft. De zijden van de driehoek EGF zijn dus $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ maal zo groot als de overeenkomstige zijden van de driehoek EDA . Dus $GF = \frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{24}{5}$. Dus:

$$\cos \alpha = \frac{MG}{MB} = \frac{10 - \frac{24}{5}}{10} = \frac{13}{25}$$

De oplossing van Quintijn Puite

Deze oplossing blinkt uit in een handige keuze van een assenstelsel; zie figuur 5.



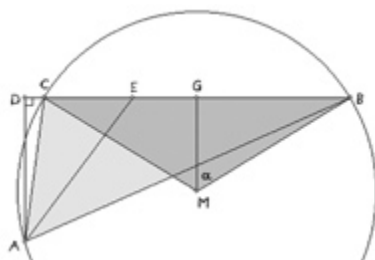
figuur 5

Quintijn begon, zoals Aad, op te merken dat (vanuit een werkschets zoals hierboven) de deellijn AE door punt F moet gaan, het midden van boog BC . Hij introduceert een assenstelsel zoals in figuur 5 (oorsprong M , MF als y -as), waarbij de deellijn AE door $F(0, -10)$ gaat en richtingscoëfficiënt $\frac{AD}{ED} = \frac{8}{6}$ heeft, dus vergelijking $y = \frac{4}{3}x - 10$ heeft. Door de snijpunten te berekenen van deze lijn met cirkel $x^2 + y^2 = 100$, vindt hij de coördinaten van A : (9,6; 2,8). Dus is de afstand van lijn BD tot de x -as gelijk aan $8 - 2,8 = 5,2$. De stelling van middelpunts- en omtrekshoek (op boog BF) zegt dat $\angle BAF = \frac{1}{2} \angle BMF$ waaruit volgt dat $\angle BAC = \angle BMF$.

In driehoek BGM geldt dan:
 $\cos \angle BMF = \frac{5,2}{10} = \frac{13}{25}$

De oplossing van Agnes Verweij

Allereerst wordt gekeken naar de gelijkbenige driehoek MBC , waarvan MG de symmetrie-as is; zie figuur 6. De stelling van middelpunts- en omtrekshoek (op boog BC) zegt dat: $\angle BMC = 2 \cdot \angle BAC = 2\alpha$, zodat $\angle BMG = \alpha$.



figuur 6

In driehoek BMG geldt $BG = 10 \cdot \sin \alpha$, dus:

$$(v0) \dots a = BC = 2 \cdot BG = 20 \cdot \sin \alpha$$

Het idee is nu naar de oppervlakte van driehoek ABC te gaan kijken:

(v1)...

$$opp(ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \sin \alpha \cdot 8 = 80 \cdot \sin \alpha$$

Een bekende formule voor de oppervlakte van driehoek ABC is ook:

$$(v2) \dots opp(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

Uit (v1) en (v2) volgt:

$$(v3) \dots b \cdot c = 160$$

Maar driehoek ABC kan worden opgesplitst in de driehoeken ABE en ACE , waarbij:

$$opp(ABE) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AB \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot c \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha) = 5c \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha)$$

$$opp(ACE) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AE \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 10 \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha) = 5b \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha)$$

Dus:

$$(v4) \dots opp(ABC) = 5(b + c) \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha)$$

Met de verdubbelingsformule

$$\sin \alpha = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha) \cdot \cos(\frac{1}{2}\alpha) \text{ kan (v1)}$$

worden omgeschreven tot:

(v5)...

$$opp(ABC) = 80 \cdot \sin \alpha = 160 \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha) \cdot \cos(\frac{1}{2}\alpha)$$

Uit (v4) en (v5) volgt dan:

$$(v6) \dots b + c = 32 \cdot \cos(\frac{1}{2}\alpha)$$

Een laatste stap voor de 'big bang':

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc, \text{ of:}$$

$$(v7) \dots b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc$$

In (v7) kun je mooi (v3) en (v6) invullen!

En, tot slot, vullen we in de cosinusregel in driehoek ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

dan (v0) en (v7), en daarna ook (v3) en

(v6), in:

$$(20 \cdot \sin \alpha)^2 = (b + c)^2 - 2bc - 2bc \cdot \cos \alpha$$

(v8)...

$$400 \cdot \sin^2 \alpha = 1024 \cdot \cos^2(\frac{1}{2}\alpha) - 320 - 320 \cdot \cos \alpha$$

Gebruik nu $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ en

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = 1 + \cos \alpha \text{ en (v8) wordt:}$$

$$400 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = 512 \cdot (1 + \cos \alpha) - 320 \cdot (1 + \cos \alpha)$$

Daarin kan $(1 + \cos \alpha)$ kan worden

weggedeeld, met als resultaat:

$$400 \cdot (1 - \cos \alpha) = 192$$

$$\text{Dus: } \cos \alpha = \frac{13}{25}.$$

De oplossing van Sjoerd Zondervan

De gegevens leggen blijkbaar de driehoek vast. We moeten dus proberen de gegevens in verband te brengen met de zijden en/of een van de hoeken.

Hierbij kunnen we gebruik maken van min of meer bekende formules/regels:

$$(z1)... \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$(z2)... a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$(z3)... AE^2 = \frac{bc \cdot ((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}$$

Opmerking. Formule (z3) is af te leiden door de cosinusregel (met $\cos \gamma$) in de driehoeken ACE en ABC toe te passen en vervolgens $\cos \gamma$ te elimineren, waarbij je gebruikt maakt van de bissectricestelling die zegt dat $\frac{CE}{BE} = \frac{b}{c}$, of wel $\frac{CE}{a} = \frac{b}{b+c}$.

We proberen van (z3) een vergelijking te maken met als enige onbekende $\cos \alpha$.

$$(z4)... AE^2 = 100$$

Met behulp van (z1) en de rechthoekige driehoek ACD is aan te tonen dat:

$$(z5)... b \cdot c = 160$$

en met behulp van (z1):

$$(z6)... a^2 = 400 - 400 \cdot \cos^2 \alpha$$

Met behulp van (z2) is aan te tonen dat:

$$(z7)...$$

$$(b+c)^2 = -400 \cdot \cos^2 \alpha + 320 \cdot \cos \alpha + 720$$

Vullen we nu (z4), (z5), (z6) en (z7) in bij (z3) dan krijgen we:

$$100 = \frac{160 \cdot (320 \cdot \cos \alpha + 320)}{-400 \cdot \cos^2 \alpha + 320 \cdot \cos \alpha + 720}$$

Dit is te vereenvoudigen tot:

$$100 \cdot \cos^2 \alpha + 48 \cdot \cos \alpha - 52 = 0 \quad (\text{waarbij } \cos \alpha \neq -1)$$

Ontbinden in factoren geeft:

$$(100 \cdot \cos \alpha - 52) \cdot (\cos \alpha + 1) = 0$$

Conclusie: $\cos \alpha = 0,52$.

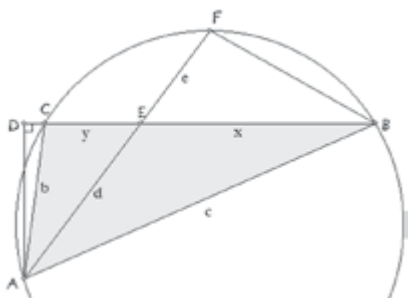
De oplossing van Martin Kindt

Martin maakt gebruik van de volgende twee bissectricestellingen:

$$BE : CE = AB : AC \text{ en}$$

$$AE^2 = AB \times AC - BE \times CE$$

We leiden nu de tweede formule (voor AE^2) af, en gebruiken de figuur van Aad, waarin irrelevante lijntjes en punten zijn weggelaten; zie figuur 7.



figuur 7

(k1)...

$$\triangle ACE \sim \triangle BFE \quad (hb) \Rightarrow d : x = y : e \\ \Rightarrow d \cdot e = x \cdot y$$

(k2)...

$$\triangle AFB \sim \triangle ACE \quad (hb) \Rightarrow (d+e) : b = c : d \\ \Rightarrow d^2 = b \cdot c - d \cdot e$$

Door (k1) in te vullen in (k2) krijg je de genoemde uitdrukking voor AE^2 .

Nu is verder:

$$\text{opp}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot a = 4a$$

$$\text{opp}(\triangle ABC) = \frac{abc}{4R} = \frac{abc}{4 \cdot 10} = \frac{abc}{40}$$

Waaruit volgt:

$$(k3)... b \cdot c = 160$$

Uit $BE = x = \frac{ac}{b+c}$ en $CE = y = \frac{ab}{b+c}$ volgt dan:

$$AE^2 = d^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = 160 \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right)$$

Met $AE^2 = 100$ blijkt: $\frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{3}{8}$, zodat:

$$(k4)... b^2 + c^2 = \frac{8}{3} a^2 - 320$$

Volgens de sinusregel in driehoek ABC is:

$$(k5)... \sin \alpha = \frac{a}{20}$$

(Zie ook de figuur bij de oplossing van Henk

of bij die van Agnes; in driehoek GMB

$$\text{is } \sin \alpha = \frac{GB}{GM} = \frac{\frac{1}{2}a}{10}.)$$

Met (k4) en (k3) en de cosinusregel in driehoek ABC is:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = \frac{8}{3} a^2 - 320 - 320 \cos \alpha$$

waaruit volgt dat:

$$(k6)... \cos \alpha = \frac{5}{960} a^2 - 1$$

Invullen van (k5) en (k6) in

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ geeft dan (na enig}$$

rekenwerk):

$$a^2 = \frac{7296}{25}$$

En dit laatste weer ingevuld in (k6) geeft:

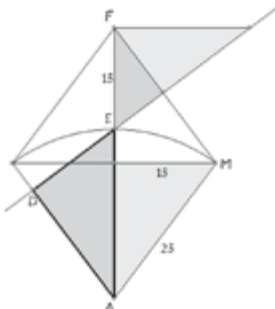
$$\cos \alpha = \frac{13}{25}$$

Uitsmijter

Het probleem blijkt te blijven inspireren alternatieve oplossingen te zoeken.

Just lukte het zelfs, samen met zijn collega

Erik de Jongh, een oplossing zonder woorden te presenteren. Omwille van 'mooie' getallen heeft hij de afmetingen zo vergroot dat de straal van de omcirkel veranderd is in 25; zie figuur 8a en 8b.



figuur 8a

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de oplosers en de auteur

Agnes Verweij was docent wiskunde en didactiek van de wiskunde aan de Technische Universiteit Delft.

Aad Goddijn en Martin Kindt zijn verbonden aan het Freudenthal Instituut te Utrecht.

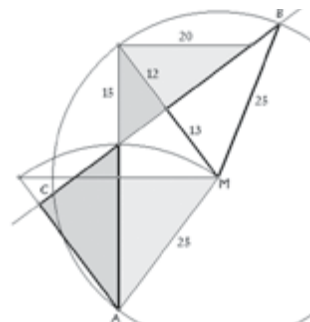
Henk Visser, oud-docent wiskunde, was verbonden aan de universiteiten van Maastricht, Tilburg en Rotterdam.

Just Bent is docent wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium te Haarlem.

Quintijn Puite is als lerarenopleider verbonden aan de Hogeschool Utrecht (Instituut Archimedes) en voor de Wiskunde Olympiade aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Sjoerd Zondervan is oud-docent wiskunde van het Bornego College te Heerenveen.

Ton Lecluse (e-mailadres: a.lecluse@casema.nl) is docent wiskunde aan het Vathorst College te Amersfoort.



figuur 8b

Per 1 januari 2011 is het programma *Geocadabra* van Ton Lecluse gratis beschikbaar via de website www.geocadabra.nl. Ton gebruikt dit programma onder andere bij het analyseren van meetkundige modellen zoals die in de rubriek 'Uit de oude doos' verschijnen.

Geocadabra kan bijvoorbeeld alle bijzondere, en vaak verrassende, eigenschappen van het model opsommen. Vaak bestaat een bewijs uit een opsomming van een aantal van deze eigenschappen, in een geschikte volgorde.

Daarnaast is Ton alweer twee jaar bezig met de ontwikkeling van het programma *Algecadabra*. Dit programma genereert sommen op het gebied van rekenen en algebra, van basisschoolniveau (Meijerink 1F) tot en met het eindexamen havo/vwo. Leerlingen worden aangespoord de opgave eerst op papier te maken, waarna het programma een uitgebreide uitwerking, in stapjes, toont. Elke lesdag levert wel enige inspiratie op om het programma verder uit te breiden met nieuwe functionaliteit. Wie *Algecadabra* eens wil uitproberen, kan Ton een e-mailbericht sturen (e-mailadres: alecluse@casema.nl). In een reply krijgt u dan de nieuwste versie van het programma teruggestuurd, 100% werkend.

APS-Exact

Maandag 7 maart 2011

Dinsdag 8 maart 2011

Woensdag 16 maart 2011

Dinsdag 29 maart 2011

Maandag 11 april 2011

**U kunt zich aanmelden
via onze site
www.aps.nl/exact >
Activiteitenagenda**

**Ook in het schooljaar 2010-2011 organiseert APS-Exact
diverse cursussen en studiedagen, zoals:**

Studiedag De TI-Nspire en het digibord

Studiemiddag Rekenbeleid bij u op school

Leidinggeven aan ontwikkeling van de wiskundesectie

Bijeenkomst Rekenvaardig door samenhangend leren

Wiskunde ICT-conferentie: onderzoek en praktijk

Bel of schrijf voor meer informatie:

APS-Exact

Postbus 85475

3508 AL Utrecht

Telefoon: 030 - 28 56 722

E-mail: voortgezetoonderwijs@aps.nl

www.aps.nl/exact



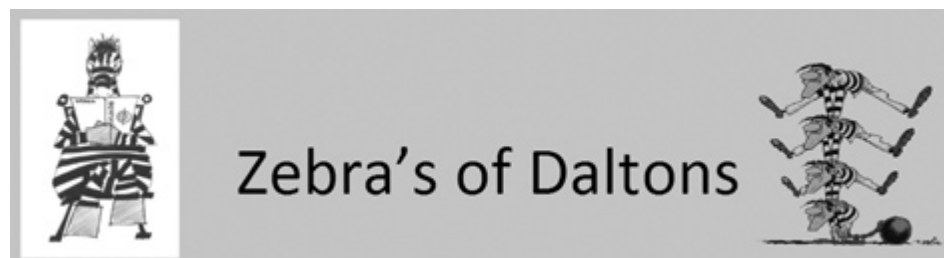
**leren
inspireren**

Geboeid door wiskunde

ZEBRA-BOEKJES

[Rob van Oord]

Dit artikel is geschreven naar aanleiding van een workshop die Rob van Oord tijdens de studiedag van de NVvW op 6 november 2010 heeft gegeven over het gebruik van Zebra-boekjes in de klas. De titel van de workshop was: Zebra's of Daltons, sla ze in de boeien.



Inleiding

In samenwerking met de NVvW wordt door Epsilon Uitgaven in Utrecht de Zebra-reeks uitgegeven (zie www.epsilon-uitgaven.nl/zebra.php).

Voor leerlingen uit de hoogste klassen van het vwo zijn er inmiddels 31 boekjes van deze reeks verschenen. In het kader van het keuzeonderwerp uit het examenprogramma kunnen leerlingen kennismaken met een rijk aanbod van onderwerpen, die aansluiten op de reguliere lesstof of die juist een ander stuk wiskunde laten zien.

In de oorspronkelijke urentabellen stond een blok van 40 slu niet ingevuld. Dit werd schuin gestreept weergegeven, waarop Jan Breeman op het idee kwam om de naam 'zebra' eraan te geven. Er zijn veel scholen die een abonnement hebben op de reeks en vanzelf de nieuwe uitgaven toegestuurd krijgen.

Maar hoe ga je als leraar, of als school, om met de ruime sortering van de reeks? Wat is het belang van het leerlingen laten werken met de boekjes? In onderstaand artikel, dat ik schreef naar aanleiding van de workshop van de studiedag^[1], wil ik u laten zien hoe wij op onze school ermee werken. In elk geval telt het mee voor het dossier (voor 5%). Ik zal u laten zien waarom ik het belangrijk vind dat leerlingen aan de slag gaan met zo'n boekje.

Waarom?

Waarom zou je de leerlingen een zebra-boekje laten bestuderen? Een van de

redenen is natuurlijk dat er in het programma voor het vwo nog altijd domein G staat: Keuzeonderwerp.^[2] Maar voor mij is het belangrijker dat leerlingen eens ervaren hoe het is om zonder hulp een tekst over een wiskundig onderwerp te bestuderen, op zich te laten inwerken en vervolgens te presenteren aan de klas. Ik denk dat deze vaardigheid bij hun studie zeer van pas kan komen. Het maken van een goede presentatie en in eenvoudige woorden proberen te vertellen wat je geleerd hebt, is van een andere orde dan het maken van een som, en dan te kijken of het antwoord klopt met het antwoordboekje. Allemaal vaardigheden die in domein A genoemd worden (*zie kadertekst*). Voorop staat dat de leerling een onderwerp kiest waarbij hij zich min of meer betrokken voelt, waarover hij meer te weten wil komen. Daarom bied ik de klas het volledige spectrum van boekjes aan. Ik denk dat een leerling er plezier aan moet beleven, maar ook moet ervaren dat je soms door een zure appel heen moet bijten. De stof is nieuw en de manier waarop wiskundigen iets opschrijven is anders dan in een leerboek. Vaak lees ik in het logboek dat ze in het begin vastliepen, maar dat het later weer beter ging.

In het PTA?

Als je het belangrijk vindt dat leerlingen een keuzeonderwerp bestuderen, dan zal er op de een of andere manier ook een cijfer voor hun dossier voor gegeven moeten worden.

In het PTA zal dan ook vermeld moeten worden op welke manier het werken aan een keuzeonderwerp beoordeeld wordt en voor hoeveel dat meetelt.

Al vanaf het ontstaan van de Zebra-reeks heb ik mijn leerlingen (voor een cijfer) ermee laten werken. Twee jaar geleden had ik alle 6-vwo klassen met A1 tot en met B12. Ik heb toen ruim 55 presentaties gezien over de boekjes. Toch verveelde het me geen moment.

Vorig jaar werkte ik mee met het tot stand komen van het laatst verschenen Zebra-boekje over *Meester Ludolphs Koordenvierhoek*.^[3] Gedurende 6 weken werkten de leerlingen 6-vwo met wiskunde B in tweetallen de aangeboden tekst door. Daarna moest elk tweetal een van de beide eindopdrachten uitvoeren. Voor het ingeleverde werk plus de eindopdracht kon werd een cijfer gegeven dat ook voor 5% meetelt in het dossier.

De presentatie

Bij het kiezen van een zebra-boekje wordt toegewerkt naar een presentatie van 15 minuten aan de klas.

Bij het starten van de Zebra deel ik een instructiestencil uit. Daarop staat wat ik van de leerlingen verwacht. Ze moeten een logboek bijhouden, zodat ik kan nalezen hoe ze er aan gewerkt hebben, maar ook hoe lang. Ik verwacht dat ze tussen de 18 en 25 klokkuur ermee bezig zijn. Ook moeten de antwoorden van alle gemaakte opgaven worden ingeleverd. Maar het belangrijkste is de eindopdracht: die wordt in overleg met mij vastgesteld. Ze moeten, naast een korte beschrijving van het boekje, ook een onderdeel verder uitwerken en presenteren.

In de loop der jaren is het presenteren met behulp van een stencil en geschrijf op het bord veranderd in een presentatie met PowerPoint. Ik ben zeer tevreden over het niveau en heb een methode ontwikkeld waarmee ik tot een bevredigende manier van becijferen ben gekomen. Zoals ik al eerder schreef, hoeft je zelf niet alle boekjes gelezen te hebben om leerlingen te kunnen

laten kiezen. Ik heb ervaren dat je bij hun presentatie altijd wel een puntje vindt waarover je even kunt doorvragen. Soms betrap je ze op een echte fout, en kun je die aan de orde stellen na de spreekbeurt. Ik plan de spreekbeurten in één les per week gedurende 6 tot 9 weken, al naar gelang de groepsgrootte. Daarom wil ik ook dat er niet meer dan twee dezelfde boekjes per klas gekozen worden. In het verleden bleven er wel eens leerlingen weg bij die presentaties. Om die reden heb ik ingesteld dat er 1 punt van je eigen cijfer af gaat per keer dat je verzuimt. Als je je niet lekker voelt moet je maar een paracetamol slikken. Komen luisteren is verplicht.

soms moet je een paragraaf laten kiezen die ze interessant vonden en er dan nog wat extra bij laten zoeken (op internet of uit een artikel).^[4]

De eerste jaren liet ik de leerlingen meebe-slissen over het cijfer, maar ze gingen steeds hoger cijferen om ook zelf zeker te zijn van een goed cijfer. Ze zien zelf heel goed het verschil tussen een prima en een mindere presentatie. Daarom geef ik de laatste jaren zelf een cijfer. Dit doe ik meteen na afloop, in de les. Om harde werkers met een minder spreek talent nog wat extra's te kunnen geven neem ik altijd het gemaakte werk in, en het logboek. Het eindcijfer wordt bepaald nadat ik

(Zebra 1), *Schatten, hoe doe je dat* (Zebra 3), *De Poissonverdeling* (Zebra 5) en *Voorspellen met Modellen* (Zebra 28).

Veel boekjes gaan over rijen, in het bijzonder over de som van een meetkundige rij. Ook dat onderdeel is geschrapt uit de B-stof. De boekjes *De Gulden Snede* (4), *Pi* (6), *Fractals* (10) en *Chaos en Orde* (16) hebben hiermee te maken.

Na 2014 zal ook het bewijzen in de meetkunde vrijwel uit de stof verdwijnen. Daarmee komt de leesbaarheid van een aantal zeer bijzondere boekjes op de tocht te staan. De stelling van Thales, koördenvierhoeken, gelijkvormigheid, congruentie, noem maar op. Denk aan de boekjes *Perspectief, hoe moet je dat zien?* (2), *Zeepvliezen* (18), *Niet-Euclidische Meetkunde* (21) en *Meester Ludolphs Koördenvierhoek* (31).

Er wordt ook wel beweerd dat het wiskundig niveau van de presentaties laag is. Zo zouden leerlingen hun cijfer ermee kunnen ophalen. Ik probeer het niveau van het wiskundig gehalte hoog genoeg te krijgen met mijn invloed op het vaststellen van de eindopdracht. Verder kun je niet verwachten dat ze als wetenschappers iets nieuws ontdekten hebben. Het is al knap als ze uit de tekst halen waar het om gaat. Bijvoorbeeld hoe de Babyloniërs de *abc*-formule anders dan wij gebruikten, of hoe de stelling van Thales bij het vinden van het oogpunt bij perspectieftekeningen nodig is. Ook is het grappig om te zien dat het woord 'populatiefractie' niet altijd geduid werd als 'de kans op' en dat er met de standaardnormale tabel gewerkt werd, terwijl de grafische rekenmachine nu de knoppen met *normalcdf* heeft. Een ander vraag die ik vaak krijg: 'Hoe weet je of je de leerlingen eerlijk beoordeelt op wat ze presenteren?' Ik denk dat je door ervaring steeds beter weet in te schatten welk cijfer een leerling verdient. Als je maar niet te hoog en niet te laag begint, dan zie je vanzelf de verschillen met voorgaande presentaties. Het is wel handig om een lijst vast te leggen (zij het in je hoofd) van aspecten waarop je let, zoals duidelijk spreken, overzichtelijkheid van de presentatie, indeling en tijdsduur. Ook wiskundige inhoud en het gebruik van correcte formules, duidelijke afleidingen, correcte conclusies, goed gebruik van voorkennis, stellingen, enz.

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Informatievaardigheden

1. De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.

Subdomein A2: Onderzoekvaardigheden

2. De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

Subdomein A3: Technisch-instrumentele vaardigheden

3. De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.

Subdomein A4: Oriëntatie op studie en beroep

4. De kandidaat kan een verband leggen tussen zijn wiskundige kennis, vaardigheden en belangstelling en de rol van wiskunde in vervolgstudies en de praktijk van verschillende beroepen.

Beoordeling

De beoordeling lijkt een moeilijk punt. Toch weet je vanzelf welke leerlingen er in elk geval hard aan gewerkt hebben en wie er zich een beetje makkelijk van af maakt. Wie pas een paar dagen voor de presentatie met vragen over de eindopdracht komt, heeft duidelijk tijdnood en zal ook niet veel aan het boekje gedaan hebben. Er zijn ook leerlingen die je regelmatig vertellen waar ze zijn en wat ze lastig vinden. Ik vind dat ze best eens een stukje mogen overslaan als ze er echt niet uitkomen. Ze kunnen dan later nog eens proberen. Het gaat om de grote lijnen. Zo heb je al een aardig beeld van te voren. Dan zijn er natuurlijk leerlingen die een prachtige PowerPoint kunnen maken, maar je ziet zo of ze klakkeloos het boekje volgen of er zelf iets van gemaakt hebben. Ten slotte gaat een groot deel van de presentatie over de eindopdracht die je duidelijk met hen hebt afgesproken. Meestal staan er een aantal in het boekje,

hun schriften en logboeken heb bekeken. Dat doe ik als ik alles binnen heb, en dat is kost me dan wel een flink deel van een weekend. Daarmee kan het eindcijfer 1 punt lager of hoger worden dan het eerder gegeven cijfer. Natuurlijk liggen de cijfers vaak hoger dan hun wiskundecijfer. Maar dat vind ik helemaal niet erg, als ik zie dat ze er plezier aan beleefd hebben en het toch maar helemaal zelf gedaan hebben. In mijn gewone toetsen leef ik me uit op het voorschotelen van mooie wiskundesommen. Daarvan valt het resultaat wel eens tegen.

Problemen?

Waren in het begin vrijwel alle boekjes voor B-leerlingen goed te doen, zo zijn er nu boekjes met statistiek erin waarop ze vastlopen omdat in de B-stof geen kansrekening en statistiek meer zit. Vooral spijtig voor leerlingen die geneeskunde willen gaan studeren. Dit betreft *Kattenajds*

neem ik mee in de beoordeling. En tenslotte is niet onbelangrijk hoe de eindopdracht uit de verf kwam.

Problemen van meer algemene aard

De praktische opdracht is niet meer verplicht. Vaak werd een Zebra-boekje hiervoor ingezet. Maar je hoort dat steeds meer scholen de PO wiskunde hebben afgeschaft en daarmee ook de kans om met de klas zo'n prachtig boekje te bestuderen. Er zijn collega's die denken dat ze alle boekjes eerst zelf gelezen moeten hebben, en dat worden er steeds meer, alvorens ze te kunnen aanbieden aan de leerlingen. Ik vind het juist een uitdaging om me te laten verrassen door een presentatie van de leerling. Vaak wordt bij de presentatie al duidelijk of de leerling zich echt heeft verdiept in het onderwerp of slechts een uittreksel maakt van het boekje. Juist het met eigen woorden presenteren laat zien in hoeverre het onderwerp tot zijn hersens is doorgedrongen. Na verloop van tijd krijg je van de boekjes die het meest gekozen worden, een goed beeld en weet je wat je van een leerling kunt verwachten.

Noten

- [1] De PowerPoint presentatie van die workshop is (als PDF-bestand) op de NVvW-website te downloaden via: www.nvvw.nl/media/downloads/jv2010/a5.pdf
- [2] CEVO Syllabus, centraal examen 2011, september 2009.
- [3] Voor een bespreking van dit boekje zie pag. 162 in dit nummer.
- [4] In *Euclides* hebben een aantal interessante artikelen van Rob Bosch gestaan over paradoxen. Als voorbeeld 'De Concordet paradox', in *Euclides* 82(3), p.103, en 'De Olympische paradox', in *Euclides* 82(4), p.143. Vaak gebruik ik die bij Zebra 8, *Verkiezingen*, als eindopdracht. Dit boekje wordt namelijk vaak gekozen.

Over de auteur

Rob van Oord is verbonden aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen. E-mailadres: r.van.oord@coenecoopcollege.nl

NASCHOLING / KANSREKENING EN DYNAMICA ALS BASIS VOOR BREED WISKUNDEONDERWIJS

[Joost Hulshof en Ronald Meester]

Om leerlingen te motiveren en uit te dagen in de wiskunde, is inspiratie en vakkennis van de docent onontbeerlijk. Om uw kennis en passie voor het wiskundevak te stimuleren organiseert de Afdeling Wiskunde van de Vrije Universiteit te Amsterdam in samenwerking met de NVvW in het voorjaar van 2011 een *tweede* nascholingscursus voor wiskundeleraars. De cursus sluit aan bij de relevantie van dynamica en kansrekening in de wiskunde en daarbuiten en is geschikt voor eerste-graads leraren, en voor leraren die de eerste cursus in het najaar van 2010 hebben gevolgd.

Indien u als tweedegraads leraar geïnteresseerd bent in de cursus, maar niet de eerste cursus hebt gevolgd, neem dan contact op met de docenten. Bij voldoende belangstelling organiseren we op 4 maart 2011 een aansluitingsmiddag.

De cursus is gericht op verdieping en verheldering van de stof die op school behandeld wordt, vanuit dynamisch en probabilistisch perspectief. We gebruiken in de schoolrekenpraktijk opgebouwde intuïtie voor het omgaan met limiet-overgangen, zoals bijvoorbeeld bij de introductie van de exponentiële functie in een rente op rente context. De nadruk ligt op het bevorderen van inzicht en overzicht, gebruikmakend van de verschillende en soms conflicterende invalshoeken van de beide docenten, vanuit de overtuiging dat wiskunde gemaakt en ontdekt wordt door simpele vragen te stellen die voor iedereen te begrijpen zijn. Formaliseren, abstraheren, logische redeneren en bewijstechnieken komen spontaan en in simpele context aan de orde, uitgaande van ons getalbegrip in de dagelijkse realiteit, en direct toepasbaar in de les. Precisie wordt nagestreefd maar wiskundige strengheid is geen doel op zich. Concreet behandelen we de volgende onderwerpen: de kracht van schuiven en schalen, dynamica en de functies cos, sin en exp als natuurverschijnselen en oplossingen

van differentiaalvergelijkingen, de centrale limietstelling in dobbelsteencontext, integraalrekening zonder primitiveren, en de hoofdrol van de getallen π en e in de wiskunde, geïllustreerd met hun samenspel in de formule van Stirling voor $n!$.

Inschrijving

Deelname aan deze nascholing levert u 11 punten op voor het lerarenregistratietraject. Elke bijeenkomst bestaat uit hoorcolleges, verzorgd door Ronald Meester (probabilistisch perspectief) en Joost Hulshof (dynamisch perspectief) en een gemeenschappelijke werkgroep met beide docenten.

U kunt zich inschrijven via www.vu.nl/nascholing. Hier vindt u ook alle benodigde praktische informatie zoals data, tijden en kosten.

De eerste bijeenkomst is op **vrijdag 18 maart 2011**, en begint om 1 uur in de middag.



TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Eenvoudig het geheel zien

Elke leerling leert op een andere manier.

De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

www.education.ti.com/nederland

Nu tijdelijk
TI-Nspire™ 2in1
-rekenmachine + software-
voor slechts € 55* !
tel. 00800 484 22 737
(gratis)

* exclusief 9 € verzendkosten

NU MET
TOUCHPAD EN
LETTERTOETSEN!



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.



Jaarrede 2010

[Marian Kolleneveld]

Dames en heren, hartelijk welkom, fijn dat u er weer bent. Het lijkt nog maar zo kort geleden dat ik u heb mogen uitwaaien, en nu bent u er alweer, en zelfs met nog meer dan de vorige keer. Bijzonder verheugend is, naast de gezellige aanwezigheid van al die bekende oude rotten, de toenemende belangstelling van studenten en lio's te noemen. Die laatste volgen momenteel een eigen lio-programma, een soort *kindernevendienst*, als ik zo oneerbiedig mag zijn. En ook de nieuwe leden tellen lekker aan. Jawel, dit wordt weer een positief verhaal; het spijt me.

Het schrijven van de jaarrede gaat altijd samen met een moment van reflectie. Waartoe zijn wij op aarde – u kent dat misschien wel – in het zicht van de eeuwigheid is alles nietig.

En juist afgelopen donderdag bereikte ons het bericht dat Pierre van Hiele was overleden, na ruim 101 jaar op deze aarde te hebben vertoefd, wat ook een zekere eeuwigheid is. Toevallig was ik onlangs, tot mijn trots en vreugde, in het bezit gekomen van een stapeltje boeken van hem, vanwege zijn verhuizing naar het verpleeghuis.

En als je daar dan wat in leest, valt op dat het een man was van stevige overtuigingen, maar ook hoezeer zijn gedachten van toen, nog geldig zijn nu. Ik citeer: *'Noodzakelijk is, dat men de kinderen liefde voor de wiskunde bijbrengt. Daarin kan men slagen, als men hen eerst de vreugde van het maken van mooie dingen met behulp van wiskunde laat beleven en hen er gaandeweg toe brengt ook de beknoptheid en duidelijkheid van de wiskundige bewijsvoering te waarderen.'*

Dus niet mee beginnen, zoals toen, denk ik, gebruikelijk was, maar ook niet achterwege laten en het bij hapklare sommen te laten, waarin wij soms dreigen te vervallen, denk ik er dan bij.

En over de kunst van het onderwijzen, de didactiek, zei hij: *'De gedachte die aan al mijn voordrachten van de laatste jaren ten*

grondslag ligt, is, dat er een discussie mogelijk is over het lesgeven, anders dan op basis van intuïtie.'

Oftewel dat het mogelijk moet zijn om uit wetenschappelijk onderzoek geldige conclusies te trekken; een gedachte die ik van harte onderschrijf.

Je moet bij citeren van een overledene altijd oppassen dat je niet al te selectief 'winkelt' en flapteksten maakt met wat je zelf ook al vond, omdat de dode niet meer protesteren kan, maar ik hoop dat ik hem met deze citaten recht doe.

Met het overlijden van Pierre van Hiele verliezen we een van de grote Nederlandse denkers van het wiskundeonderwijs, die met zijn niveautheorie over het leren wereldwijd aanzien genoot, en misschien zelfs in het buitenland meer geëerd en gekend werd dan bij ons, zoals wel vaker het geval is. Maar de neerslag van zijn denken blijft aanwezig in zijn boeken, en die kunnen ons ook nu nog inspireren. Hij wordt vandaag in besloten kring gecremeerd. In *Euclides*, ons blad, komt een *In Memoriam*, geschreven door Harrie Broekman, waaraan bovenstaande citaten zijn ontleend.

Als je 101 bent, kan een virusinfectie fataal zijn. In verhouding ben ik – is iedereen hier – dan natuurlijk piepjong, en gelukkig was mijn eigen virus wat vriendelijker en na een dag of tien vertrokken.

Dat gaf me wel de gelegenheid om, koortsig zappend op de bank, het debat over de regeringsverklaring volgen. Dat was leerzaam en er was ook herkenning; we zagen de fractievoorzitter van de VVD, de strenge meester die niet van domme vragen hield en dat ook duidelijk liet merken, met een voorspelbare opstand van de klas. En er was onze verse premier die heel blijmoedig vertelde iets weliswaar al 10 keer te hebben gezegd, maar het toch best heus wel voor een 11e en 12e te willen doen, en iedereen

hield van hem.

Nou is die herkenning ook wel een beetje mijn makke: mijn echtgenoot promoveerde jaren geleden op het werk van gevangenisbewaarders, en in hun omgang met gedetineerden zag ik ook parallellen met het onderwijs. In beide gevallen heb je te maken met mensen die niet a priori ervoor hebben gekozen om, op een bepaald moment, van jou te horen wat ze moeten doen, en de kunst is dan om met beleid en verstand ze zover krijgen dat het toch gaat zoals jij wilt.

Laat ik u geruststellen: ik zag ook wel verschillen. De meesten van mijn leerlingen hebben een blanco strafblad en tonen soms zelfs belangstelling voor wat ik ze vertel. Of doen alsof, maar sociaal wenselijk gedrag waardeer ik ook als positief.

Maar dan wordt zoiets makkelijk een uitdaging. Ik zag ook dit (*zie figuur 1*), op Discovery Channel, de ultieme *survivalman*, en ik heb lang nagedacht waar hier de parallel met het onderwijs zou zijn, maar ik kwam er niet zo uit. Misschien weten jullie het...



figuur 1 'Leraar met de scalp van de schoolleiding'

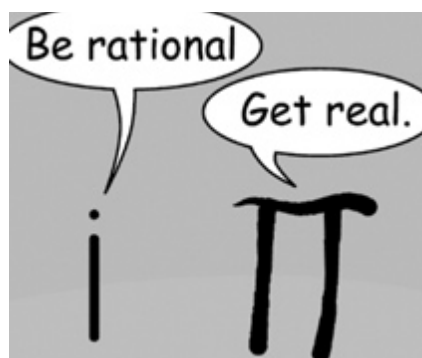
Terug naar de reflectie.

Waartoe zijn wij op aarde? Ja, dat moet u mij niet vragen, dat weet ik niet en ik voel me daarbij zeer gesteund door een essay van de filosoof Jaap van Heerden, getiteld *Wees blij dat het leven geen zin heeft*. Hij toont daarin op vrolijke en overtuigende wijze aan

hoe vreselijk ons bestaan zou zijn als er een helder omschreven, buiten onszelf gelegen, zin of nut zou zijn, waaraan dan dus ook alles en iedereen zou worden getoetst, en om het eens hedendaags te formuleren 'keihard op afgerekend'.

Dat moet je dus niet willen, maar dat neemt niet weg dat het ieder vrij staat om toch aan zingeving te doen, want zo las ik bij een andere filosoof (Jelle de Visser): 'Ten diepste wil de mens iets moeten'. 'Al is het maar van zichzelf', voeg ik daaraan toe, en dat herken ik dan weer heel erg.

Een ander plaatje (*zie figuur 2*), en dus ter zake. De vereniging heeft statuten en daar staat het allemaal in; daarvoor heb je geen filosoof nodig.



figuur 2

We moeten gewoon statutair van gedachten wisselen over het wiskundeonderwijs, de belangen van het wiskundeonderwijs bevorderen en van de leden, zowel individueel als collectief. Hoe doen we dat?

In een van de eerste redes van mijn voorzitterschap heb ik gezegd dat het motto van het bestuur was: *Geef de docent zijn vak terug*. Jullie vonden dat indertijd een goed plan, hebben hard geklapt, anderen hebben ons dat met overtuiging nagezegd. En dat is goed, want het is belangrijk dat het gebeurt. En ook nodig!

Maar om dat voor elkaar te krijgen moet je een aantal zaken doen: allereerst moet je zien hoger in de beslisboom terecht te komen. Iets als basisvorming of de leerwegen in het vmbo, elke programma-wijziging komt altijd pas na langere tijd tot stand. Aan het eind van de besluitvormings-

keten is er dan niet zoveel mogelijk. We hadden inhoudelijk gelijk met ons protest tegen de gelijkschakeling van basisvorming op één niveau en de verlaging van het mavo-niveau in het vmbo. Dat blijkt nu ook, na een paar decennia, maar indertijd had men er geen boodschap aan, omdat die besluiten al jaren daarvoor waren genomen. Het is logisch: als je de loop van een rivier wilt veranderen, moet je ook niet met een schotje bij de monding in zee gaan staan... Vandaar dat het bestuur gestaag gewerkt heeft aan de opbouw van externe relaties. In *Euclides* vorig jaar zomer heb ik daarvan een opsomming gegeven. Het doel daarvan is de vereniging als onontkoombaar vanzelfsprekend te positioneren waar het het wiskundeonderwijs betreft, dus wat hoger in die beslisboom te komen, of, in die andere metafoor, wat dichterbij de bron.

Succes is altijd relatief. Je moet natuurlijk je zegeningen tellen. Waar het enige tijd geleden nog zo was dat we in brieven van het Ministerie van Onderwijs aan de Tweede Kamer onze redeneringen verminkt of verdraaid terugvonden – waarover we dan weer betrekkelijk vruchteloos heel boos werden – in een recente brief vonden we onze zorgen over de positie van havo wiskunde-B benoemd en gedeeld. Daarmee is het nog niet opgelost, maar het is een stap.

En zo is er meer.

We zijn aangesloten bij de Federatie Onderwijsbonden, binnen de CMHF, om ook op rechtspositieel vlak actief te kunnen zijn. We doen mee in de vernieuwingscommissie wiskunde, we doen mee aan de pilot *Open Leermiddelenbank* van de VO-raad. En we hebben de rekenprojecten, maar daarover hoort u straks meer.

Wat we van de laatste jaren ook hebben geleerd – toen we via krantenkolommen strijd voerden – is hoe schadelijk het is om rollend over straat te gaan als je vak onder druk staat.

Ik geloof echt dat we er beter uit hadden kunnen komen als de Nederlandse wiskundewereld één lijn had getrokken

tegenover de reducties in wiskunde-B, als de discussie toen alleen daar over was gegaan en niet tegelijkertijd over de schijntegenstelling realistisch/zuiver en het nut van de grafische rekenmachine als afleiders. Dat is erg jammer, want daardoor zitten we nu met volle wiskunde B-programma's. Op de havo zelfs overvol.

Het is mede daarom – het tonen van een helder eenduidig gezicht naar buiten – dat we samen met het Koninklijk Wiskundig Genootschap onlangs het Platform Wiskunde Nederland hebben opgericht (PWN). Het is echt een coproductie: het bestuur bestaat uit 5 mensen, 2 aangewezen door KWG, 2 door ons, met een onafhankelijk voorzitter, de huidige rector magnificus van Eindhoven, professor van Duin, een directeur, Wil Schilders, én een bureau. U hebt daar al eens over kunnen lezen in *Euclides* en dat zal de komende tijd vaker gebeuren.

De ambities zijn groot. PWN overkoepelt met zijn 5 commissies heel wiskundig Nederland. Wij hopen door die bundeling van krachten een aantal hardnekkige problemen voor het onderwijs te kunnen oplossen, rond zaken als doorlopende leerlijnen, permanente curriculumontwikkeling, het vertalen van onderwijskundig onderzoek naar de praktijk, nascholing. Voor dat doel is er een brede commissie Onderwijs gevormd, onder voorzitterschap van Gerard Jeurnink, die, naar mijn vaste overtuiging, voortvarend aan de slag zal gaan.

Dat was de eerste stap. Vervolgens moet de docent ook wel een vak hebben om terug te pakken. Daarbij hebben we de wind wat meer in de rug: onderzoek blijft maar aantonen dat vakmanschap voor de klas loont, dat leerlingen meer leren van een leraar die meer weet omdat hij 1) goed is opgeleid, en 2) die kennis ook bijgehouden heeft. Je vraagt je af wie er nog overtuigd moet worden, maar à la.

Het eerste punt ziet er gunstig uit, er is een kennisbasis vastgesteld voor de tweedegraads lerarenopleidingen en de eerstegraads volgen binnenkort. Daarmee is helder vastgelegd welke kennis op de leraren-





opleidingen wordt opgedaan, en dat gaat gelukkig en terecht aanmerkelijk verder dan de zesdeklas-deeltjes voor het vwo. Het ligt voor de hand dat de nieuwe onderwijscommissie hierover zal worden geconsulteerd als legitimering vanuit het veld. Het tweede punt heeft te maken met een ruim, graag permanent aanbod van nascholing, en dat ligt lastiger. Nederland is namelijk een klein land; het zal u ooit opgevallen zijn. In het professionaliseringsplan WiVa is een systeem ontwikkeld om nascholing te certificeren, en er is ook al een aantal cursussen gecertificeerd, maar daar is nog wel werk te doen. Het registerproject met het SBL verkeert momenteel in een impasse en we bezinnen ons, samen met de andere vakinhoudelijke verenigingen en de Federatie Onderwijsbonden in de CMHF, op manieren om uit die impasse te geraken. Na ruim 12 jaar discussie willen we zo langzamerhand wel eens een concreet resultaat zien.

Recapitulerend.

Stap 1 was dichterbij de beslissingen zien te komen, stap 2 weten waar je het over hebt, en dan is stap 3 vervolgens initiatieven nemen waar je dat nuttig of nodig acht, in de hoop dat, dankzij stap 1 en 2, de successen wat groter is. Het jaarverslag vertelt wat er het afgelopen jaar gedaan is. En op de korte termijn gaan we onder meer:

- bezwaar maken tegen de geheimhouding van de computerexamens in vmbo-KB;
- nomenclatuurcommissies instellen voor vmbo en havo/vwo waar het de nieuwe programma's betreft;
- bevorderen dat de aansluiting vanuit vmbo-TL naar havo beter haalbaar wordt voor leerlingen. Stapelen mag weer, maar moet dan ook kunnen. In de onderbouw van havo is meer aandacht gekomen voor de algebra en met name bij de aansluiting op havo-B is daar wel een gat te dichten;
- voorstellen doen voor een reductie van het examenprogramma havo-B;
- verder met de rekenprojecten;
- aandacht vragen voor de knikkende leerlijnen in mbo en hbo;
- enzovoorts, en zo verder.

Ik zei het al: 'Ten diepste wil de mens wat moeten.' En natuurlijk blijven we rondjes lopen langs stap 1 en 2.

En tot slot, maar niet onbelangrijk, moet je het ook graag gezellig hebben...

Daaronder valt het sponsoren van de Kangoeroe-site en niet te vergeten de Wiskunde Olympiade.

Zoals u weet mag Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade in 2011 organiseren. We vinden dat een eervolle zaak en hebben dan ook royaal onze medewerking toegezegd, en we hadden daarbij eigenlijk u in gedachten. Er zijn nog steeds mensen nodig, dus ga straks even langs bij de stand als u wilt.

We willen ook wat meer binnen de vereniging met elkaar in gesprek over het wiskundeonderwijs en over wat ons daarin al zo bezig houdt. Dat kan natuurlijk vandaag, maar u wilt vast niet elke week daarvoor ergens naartoe komen. De website kan daarin een goede rol vervullen, en hij is daar inmiddels ook technisch toe in staat.

En deze dag, waarop u ongetwijfeld heel serieuze informatie opdoet en interessante gesprekken zult voeren, valt voor mij ook in de categorie 'het gezellig hebben'.

Dankzij de grote inzet van velen is er weer een programma dat klinkt als een klok en loopt als een trein. We zijn als bestuur elk jaar weer heel trots en dankbaar voor de bereidheid van zoveel leden die zich belangeloos voor de vereniging inzetten. Dat toont een betrokkenheid die hartverwarmend is, en ook ons stimuleert. Ik wens u dan ook een leerzame en genoeglijke dag toe, en geef nu graag het woord aan...

Henk van der Kooij, als inhoudelijk organisator. Ik dank u wel.

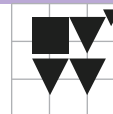
De NVvW

Wat is en doet de Federatie Onderwijsbonden?

Een aantal jaren geleden heeft de NVvW zich aangesloten bij de Federatie Onderwijsbonden CMHF. De Federatie Onderwijsbonden is een algemene onderwijsbond met ongeveer 25000 leden. Binnen deze Federatie bundelen een groot aantal vakinhoudelijke verenigingen, zoals de NVvW, hun krachten tot één grote organisatie. Hiermee hebben wij als vakinhoudelijke verenigingen een duidelijke stem gekregen richting overheid. De Federatie is namelijk aangesloten bij de vakcentrale CMHF en daardoor is de Federatie partner bij onderhandelingen over onder andere de nieuwe CAO-afspraken in onze sector; vergelijkbaar met de rol van AOB binnen de FNV. Verder wordt de Federatie betrokken bij fusies en reorganisaties in het voortgezet onderwijs. Hetgeen betekent dat er bij onderhandelingen altijd een vertegenwoordiger van de Federatie bij het overleg betrokken is. Deze vertegenwoordiger zal in zo'n geval contact opnemen met de leden van de Federatie, die op de betrokken school werkzaam zijn. In dat kader is het van groot belang dat u als lid ook het *Brin-nummer* van uw school aan de administratie van NVvW doorgeeft, zodat bij een verzoek van een onderhandelaar onze administratie goed kan aangeven welke NVvW-leden op de school werkzaam zijn.

De rol van de NVvW binnen de Federatie

Bij de toetreding van de NVvW tot de Federatie heeft het bestuur besloten zo veel mogelijk een *low-profile* koers te varen binnen de Federatie. Dit indachtig het hoofddoel van onze vereniging, het bewaken en bevorderen van het vakinhoudelijke deel van het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Daardoor



en de vakbond

[Henk Rozenhart]

merkt u als individueel lid niet zoveel van onze vakbondsactiviteiten. Maar juist dit vakinhoudelijke aspect neemt binnen de activiteiten van de NVvW binnen de Federatie een steeds belangrijkere plaats in. De overheid komt steeds vaker met echte onderwijsvragen naar de vakbonden toe en dan zijn wij in staat om samen met de andere vakinhoudelijke verenigingen een beïnvloedende rol te spelen bij het onderwijsbeleid van de overheid. Recente voorbeelden hiervan zijn de aanpassingen keuzevakken op het vmbo in de richtingen landbouw en techniek en de ontwikkelingen rond het beroepsregister voor leraren waar de Federatie deel uit gaat maken van het orgaan dat deze beroepsstandaarden vastlegt en controleert. Binnen onze vereniging is Marianne Lambriex al een aantal jaren bezig om ervoor te zorgen dat binnen deze beroepsstandaarden de vakinhoudelijke component een sterkere rol krijgt. Dat de kwaliteit van het vak dat je geeft, gewaarborgd moet worden bij het opstellen van deze standaarden is en blijft de mening van de gezamenlijke vakinhoudelijke verenigingen. En daar maken wij ons sterk voor via de inbreng van de Federatie.

Voordelen voor de leden

Het lidmaatschap van de Federatie levert u als lid ook een aantal bijkomende voordelen op ten opzichte van uw vroegere lidmaatschap van de NVvW. Ten eerste heeft u toegang tot de Hulpdesk rechtspositie van de Federatie; het telefoonnummer hiervan vindt u in het colofon van het blad *Euclides*. U kunt bij dit bureau terecht met al uw persoonlijke rechtspositionele problemen. Verder kunt u nu uw contributie voor het lidmaatschap van NVvW laten verrekenen met bijvoorbeeld uw eindejaarsuitkering; u krijgt dan een belastingteruggave over uw contributie van maximaal 52%. Het

formulier waarmee u dit moet aanvragen, wordt jaarlijks met de nota voor het lidmaatschap meegestuurd. Mocht u verder nog voordelen zoeken, dan kunt u op de website van de Federatie nog aanbiedingen vinden voor collectieve contracten ten aanzien van verzekeringen, ed. De website van de Federatie is onlangs geheel vernieuwd en heeft als adres:

www.federatie-onderwijsbonden.nl. De link naar deze website staat prominent op onze eigen website en is dus met een enkele muisklik te bereiken. Een bezoekje meer dan waard. U kunt dan zien bij welke activiteiten de Federatie allemaal betrokken is. U kunt hier alle actuele informatie over rechtspositie vinden.

Als er nieuws is, is het gebruikelijk dat onze webmaster dit laat weten op de NVvW-website en een link aanbrengt naar het betreffende onderwerp op de website van de Federatie.

Werkzaamheden binnen het bestuur

Binnen het bestuur van de Federatie heeft het bestuur van de NVvW een vertegenwoordiger. Op dit ogenblik is dat Pim van Bommel. Hij houdt het bestuur op de hoogte van de zaken die daar aan de orde komen en zorgt er voor dat onze stem meetelt. Om dit nog beter te doen zijn wij een samenwerkingsverband aangegaan met onze zustervereniging NVON (Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen) waarmee een aantal keren per jaar van gedachten wordt gewisseld over de te volgen koers binnen de Federatie. Het werk dat Pim voor ons doet in dit verband, is van groot belang en daarom zijn wij naarstig op zoek naar iemand die hem daarbij kan ondersteunen en op termijn kan opvolgen. Heeft u belangstelling laat het ondergetekende weten, wellicht bent u de aangewezen persoon om deze klus op u te nemen.

Het gaat bij deze werkzaamheden om het vertegenwoordigen van het bestuur van de NVvW tijdens de vergaderingen van de Federatie, meestal eenmaal per veertien dagen. Verder het verwerken en bijhouden van de ingekomen stukken en het bepalen van ons standpunt in samenspraak met het bestuur en de vertegenwoordigers van de NVON. In het kader van vakbondswerk is er compensatie te krijgen bij de werkgever. Voor vakbondswerk moet de werkgever dispensatie verlenen. Maar het bestuur van NVvW is ook bereid om met een belangstellende van gedachten te wisselen over de mogelijkheid tot detachering.

Verwacht van 'het vakbond zijn' niet dat wij u oproepen de barricades te beklimmen. Als er een algemene oproep tot staking komt zullen wij dat doorgeven, maar er wordt geen stakingskas geopend; die is er namelijk niet. Verder kan het voorkomen dat u via de website om uw mening gevraagd wordt en dan hopen wij dat u die geeft, want dan kunnen wij in de Federatie de algemene belangen van onze sector op basis van uw mening beter vorm geven.

Info

Op de NVvW-website is de 'vakbonds-pagina' bereikbaar via:

www.nvvw.nl/page.php?id=7743

De overige informatie bevindt zich 'achter de login'.

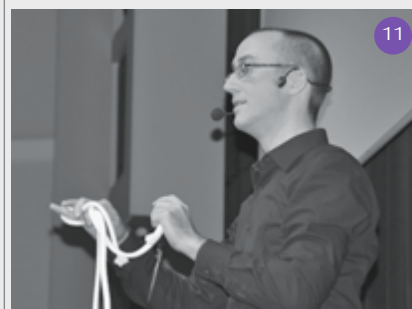
U kunt in contact treden met Henk Rozenhart via e-mail: h.rozenhart@nvvw.nl.

Jaarvergadering/studie

Bestuur en organisatie



Plenair



Nieuwe leden



dag 2010 EEN FOTO-IMPRESSIE

[Metha Kamminga]

Markt



14



15



16



17



18

1 Elly van Bommel met de nieuwe NVvW-tasjes die gretig aftrek vinden.
2 Achter de ontvangsttafel de bestuursleden Henk Bijleveld en Kees Lagerwaard met rechts vooraan Arja Bijleveld.
3 Penningmeester Frank van den Heuvel licht de financiën toe. Dit jaar dus geen contributieverhoging.

Workshops



19



20



21



22

4 Metha Kamminga treedt af en wordt opgevolgd in het bestuur door Christiaan Boudri (links), hbo-werkgroep, en Johan Gademan (rechts), website, ict en pr.
5 Leden...
6 Henk van der Kooij geeft voorlichting over het project RekenVOort.
7 en 8 Leden...
9 Joost Hulshof houdt de plenaire lezing over Differentiaalvergelijkingen, Leibniz en Newton. Ook de *abc*-formule komt er aan te pas.
10 Peter Kop polst de zaal voor belangstelling voor de 'Kleine Didactiek'.
11 Goochelaar Tilman Andris doet geheimzinnige dingen met een stuk touw.
12 Ontvangst met een glaasje champagne van de nieuwe leden en kennismaking met het bestuur: Casper Zelissen (rechts vooraan) en in het midden voorzitter Marian Kollenveld.
13 Links op de foto Mijnte Kamminga als opperschenker met naast hem penningmeester Frank van den Heuvel; midden: Marit Cramer.
14 Bij het jubileum van Getal & Ruimte werd er taart geserveerd.
15 Voorlichting bij Moderne Wiskunde.
16 Frits Spijkers legt uit dat Math4All gratis is, maar niet goedkoop.
17 Wiskundeleraar en schrijver Jan Helmers signeert zijn boeken en zijn dochter helpt hem daarbij. Links: Mascha Honsbeek bekijkt het nieuwste boek, zojuist uitgekomen: 'Pythagoras en de rechtvaardige rechters'.
18 Carolien Boss van Uitgeverij Epsilon op de markt.
19 Gestreepte problemen. Rob van Oord heeft het over de populaire Zebraboekjes.
20 Marit Cramer, Jeroen Schepman, Ellen Meijerink en Lieke Lansink bij de workshop 'Wiskunde buiten-het-boekje'.
21 Peter Kop en Adriaan van Dijk krijgen instructie van Martijn Slob bij de workshop van AlgebraKIT.
22 Pauline Vos en Inger Rijnja met de meetkunde-op-de-bol-leskist.

Shuffle-exchange graphs

[Frits Göbel]

De *shuffle-exchange graph* SE_n is de graaf met als puntverzameling de bitrijen van de lengte n .

De buren van punt $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ zijn: $(e_2, e_3, \dots, e_n, e_1)$, $(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$ en $(e_1, e_2, \dots, 1 - e_n)$.

De twee eerstgenoemde buren ontstaan door een 'shuffle'; de bijbehorende lijnen noemen we daarom *S*-lijnen.

De derde buur ontstaat door het laatste bit om te zetten ('exchange'); de bijbehorende lijn noemen we een *E*-lijn.

Het is handig om de bitrijen 10-tallig te noteren. De puntverzameling is dan eenvoudig $\{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$; **zie figuur 1**, waarin $n = 4$. De buur-relaties worden als volgt vertaald.

De *S*-lijnen krijg je door vermenigvuldiging met 2 en deling door 2, beide modulo $2^n - 1$.

Neem bijvoorbeeld $n = 5$, dus $2^n - 1 = 31$.

De *S*-buren van punt 17 zijn dan 3 en 24.

Voor het punt $2^n - 1$ moet een uitzondering worden gemaakt; dit wordt van een lus voorzien, evenals punt 0.

De *E*-lijnen lopen steeds tussen $2k$ en $2k + 1$. In de figuur zijn deze lijnen iets dikker getekend.

Merk op dat ze een perfecte matching vormen. Andere eenvoudige eigenschappen van onze (pseudo)graaf zijn: hij is 3-regulier, samenhangend en ongericht (als P een buur is van Q , is Q ook een buur van P volgens de definitie).

In deze aflevering krijgt u een paar opgaven over cykels.

De cykels van *S*-lijnen zijn vrij overzichtelijk, vooral als je naar de bitrijen kijkt. In SE_n hebben deze cykels de lengte n of d , een deler van n . Bijvoorbeeld, bij $n = 4$ zien we drie cykels van 4, één van 2 (de dubbele lijn), en twee van 1 (de lussen).

Opgave 1

Laat a_n het aantal cykels van vier *S*-lijnen in SE_n zijn.

Bewijs dat a_n slechts twee verschillende waarden aanneemt als n varieert.

Opgave 2

Bepaal het aantal cykels van tien *S*-lijnen in SE_{10} .

Er zijn natuurlijk ook andere cykels. Een interessant geval zijn de cykels van vier die uit afwisselend *S*- en *E*-lijnen bestaan.

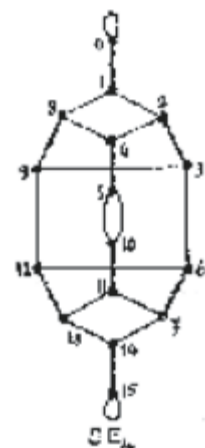
Opgave 3

Iedere SE_n met een oneven $n > 1$ bevat zo'n cykel. Bepaal deze.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@uws.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.

Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.

De deadline is 11 maart. Veel plezier!



figuur 1

Rangeren

De meesten van de 16 inzenders vonden de opgaven eenvoudig.

Harm Bakker stuurde een prachtige oplossing waarbij iedere stap in de diverse opgaven is voorgesteld door een ‘echte’ trein! Dit enthousiasme hangt samen met zijn zelfgebouwde modelspoorbaan, waarvan enkele foto’s de oplossing sieren. Ook enkele andere inzenders voorzagen hun oplossing van verduidelijkende figuren.

Opgave 1 – Bij een trein met n wagons kan een sorteertijd $O(n)$ voor iedere permutatie als volgt worden bereikt. L trekt 1 en de wagons tussen L en 1 naar M1, koppelt 1 af en brengt de overige wagons via B en M2 terug naar A. Vervolgens duwt hij 1 naar B. Dan de zelfde procedure met wagon 2, enz. Als alle wagons op B staan, is het eenvoudig om L vooraan te zetten.

Opgave 2 – Veel inzenders hadden problemen met het verschil tussen trekken en duwen. Dit gold begrijpelijkerwijs niet voor Harm Bakker. Hij schrijft: ‘Als modelspoorder weet ik dat trekken voor een trein veel makkelijker gaat dan duwen: een spoor moet echt heel goed gelegd zijn, wil een locomotief een redelijk lange goederentrein zonder ontsporingen kunnen duwen. Vandaar dat de beperkingen die in de opgave worden geformuleerd, realistisch overkomen. Hoewel maar twee duwen wel wat erg weinig is, is het redelijk om een grens te stellen aan het aantal te duwen wagons. En doe dan maar twee, dan hebben we echt een mooi sommetje (met minder gaat het echt niet!).’

De sorteertijd stijgt naar $O(n^2)$. Per wagon zijn bij bovenstaande methode $O(n)$ stappen nodig om de tussengelegen wagons terug naar A te brengen. Wobien Doyer bekijkt ook locs die tegelijk

kunnen trekken en duwen. De benodigde tijd wordt globaal gehalveerd; de orde van grootte verandert dus niet.

Opgave 3 – Ik had hier zelf veel te grote getallen uit, en kon het resultaat van de eerste oplossing nauwelijks geloven! Maar iedereen had er ongeveer hetzelfde uit. Het optimale resultaat is: één keer 0, vier keer 4 en één keer 6 (voor de permutatie 123).

Leo Pos was de eerste die dit resultaat instuurde. Hij deed 123 als volgt.

- Trek 3 naar M1, koppel af en ga naar B,
- ga via M2 naar A,
- trek 12 naar M2, koppel 1 af en ga met 2 naar B,
- duw 2 naar M1 en dan 32 naar A,
- ga via M1 naar B,
- duw 1 naar A,
- trek 321 naar B.

Tussen iedere twee regels verandert L van richting.

Herm-Jan Brascamp had een heel mooi idee. Hij schrijft: ‘Na afkoppelen staan wagons meteen stil. Anders kun je bijvoorbeeld 12L omzetten in 21L zonder met de locomotief van richting om te keren. Op A laat je met een goede snelheid 1 los, de locomotief rijdt met 2 naar M1, 1 rijdt naar M2, de locomotief remt een beetje af, laat 2 los, trekt weer op en rijdt B op. De snelheden zijn zo, dat daarna 1 B oprijdt en tenslotte 2.’

Een uitdaging voor iedere modelspoorder!

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit.

- L. v.d. Raadt 566
- J. Hanenberg 494
- T. Kool 491
- H. Linders 437
- H. Bakker 423
- K. v.d. Straaten 384
- W. v.d. Camp 372
- K. Verhoeven 364
- H.J. Brascamp 352
- J. Remijn 304

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen

23. Experimenteren met kansen
 24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en Wiskunde
 28. Voorspellen met Modellen
 29. Getallenbrouwerij
 30. Passen en Meten met Cirkels
 31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
- Zie verder ook www.nvww.nl/page.php?id=7451 en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvww.nl/page.php?id=1779
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvww.nl/page.php?id=7450

Voor overige internet-adressen zie www.wiskundepeersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie www.wiskundeonderwijs.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvww.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	29 maart 2011	1 feb 2011
6	17 mei 2011	18 mrt 2011
7	28 juni 2011	3 mei 2011

vrijdag 4 maart, Utrecht

Wiskunde C conferentie
Organisatie cTWO
Zie pag. 134 in nummer 86-3.

maandag 7 maart, Utrecht

Studiedag: De TI-Nspire en het digibord
Organisatie APS

donderdag 17 maart, op aangemelde scholen

Kangoeroe-wedstrijd 2011
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe
Zie ook pag. 144 in dit nummer.

do. 17 en vr. 18 maart, Noordwijkerhout

Nationale Rekendagen
Organisatie FIsmc

vr. 18 maart, 1 april, 15 april, Amsterdam

Nascholing: Kansrekening en dynamica
Organisatie VU Amsterdam
Zie pag. 170 in dit nummer.

zaterdag 26 maart, Utrecht

375 jaar Universiteit Utrecht
Organisatie Universiteit Utrecht

dinsdag 29 maart, Utrecht

Rekenvaardigheid door samenhangend leren
Organisatie APS

donderdag 7 april, Utrecht

Wisselwerking tussen Wiskunde D en NLT
Organisatie BètaSteunpunt Utrecht

maandag 11 april, Utrecht

Wiskunde ICT-conferentie: onderzoek en praktijk
Organisatie APS

woensdag 13 april, op de scholen

Grote Rekendag 2011
Organisatie FIsmc

do. 14 en vr. 15 april, Enschede

47ste Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en Universiteit Twente

zaterdag 14 mei 2011

Startbijeenkomst Platform Wiskunde Nederland (PWN)
Organisatie KWG en NVvW

wo. 13 t/m zo. 24 juli, Amsterdam

52e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO 2011)
Organisatie Stichting IMO2011



CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf.



2e t/m 6e graads vergelijkingen
2e machtswortels in natural output.



Normale verdeling met grafiek (of tabel) Bereken sigma bij kans = 0.5.



SolveN in menu RUN geeft meerdere antwoorden; soms wel 10.



CASIO FX-9860GII

Dé snelste grafische rekenmachine met tekstboek display.



CASIO FX-82ES

Dé wetenschappelijke rekenmachine met tekstboek display.



Op de Natural Textbook Display worden onder andere breuken en wortels weergegeven, zoals in het leerboek.

De FX-82ES is ook perfect geschikt voor het gebruik van tabellen.

3 jaar garantie

Docentenexemplaar?

Vraag naar de speciale actie:
via e-mail verkoop@casio.nl

CASIO dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio.nl

Wilt u ook
uitzicht op meer
inzicht?

De Moderne Wiskundedag



Noordhoff Uitgevers

**MODERNE
WISKUNDE**

**Moderne
Wiskundedag**

**Donderdag
10 maart 2011 in
De Reehorst te Ede**

**U bent van harte welkom, ook als u niet
met *Moderne Wiskunde* werkt.**

Met o.a. werkgroepen over:

- Rekenbeleid
- Moderne Wiskunde 10 TF
- Examentraining vmbo en TF
- Leren op mobile devices
- Google SketchUp
- Digitale examens voor vmbo
- Haal meer uit Schoolwise
- GeoGebra
- Digitaal schoolbord
- De TI-Nspire

**Meer informatie en aanmelden op
www.modernewiskundedag.nl**

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent