

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

oktober

10

nr

2

jaargang 86

Rekenen...
Wat is het probleem?

Rekenen met
aardrijkskunde

Op weg naar IM02011

Notulen en
Jaarverslagen

Ludolph van Ceulen
(1540-1610)



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

o k t o b e r

1 0
n r 2

j a a r g a n g 8 6

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Michel van Ast

Bram van Asch

Klaske Blom, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Marjanne de Nijs

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Klaske Blom,

Westerdoksdijsk 39, 1013 AD Amsterdam

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. Sepideh Moosavi

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: s.moosavi@dekleuver.nl



KORT VOORAF

[Klaske Blom]

Uitbreiding van de redactie

We hebben weer een nieuw redactielid en zijn daar enorm blij mee: Michel van Ast is als redactielid ICT aangeschoven. U kent hem vast, van 'de didactiek van het digibord'. Na het vertrek van Jos Tolboom hadden we geen specifieke ICT-redacteur en in dit tijdsgewricht waarin digitale middelen een steeds grotere rol in het onderwijs gaan spelen en er dus meer en meer over geschreven wordt, was dat een gemis. Het is daarom extra plezierig dat Michel bereid is zijn deskundigheid voor *Euclides* in te zetten!

Nog een keer: terug- en vooruitblik op de examens

In *Euclides* 86-1 heeft u veel kunnen lezen over de afgelopen centrale examens, maar *niet* over de BB- en KB-examens die door vmbo-leerlingen op de computer gemaakt zijn. Helaas heeft het CvE (College voor Examens) verordonneerd dat de inhoud van vrijwel al deze examens geheim moet blijven, wat maakt dat wij er in *Euclides* niet over kunnen publiceren. Van de pilot KB-computerexamens is inmiddels één versie vrijgegeven en daarover zal door een van de examensmakers van het Cito in een komend nummer verslag gedaan worden.

We kunnen onze vmbo-collega's dus niet informeren over de wijze waarop BB-leerlingen landelijk gezien de examens gemaakt hebben, noch kunnen we een reflectie van de Cito-medewerkers op deze examens verwachten. Inmiddels hebben bijna alle leerlingen het BB-examen op de computer gemaakt en hebben dus ook alle docenten, die aan BB-leerlingen les geven, hiermee ervaring opgedaan. Het is mijns inziens bijzonder spijtig dat deze ervaringen niet gedeeld kunnen worden met collega's. Ik hoop dat het CvE zich wat dit betreft op haar beleid wil beraden zodat een zinvolle evaluatie van computerexamens in de toekomst net zo vanzelfsprekend zal zijn als die van de papieren examens.

Een geheel andere discussie die de afgelopen tijd gevoerd is, is die over de toegestane hulpmiddelen bij de examens. Ook daarover heeft u in ons vorig nummer, en bijvoorbeeld ook op het forum, kunnen lezen. De grafische rekenmachine mag nog steeds door leerlingen gebruikt worden zonder dat voor het examen het geheugen geblokkeerd of gewist hoeft te worden. Maar, het zou kunnen zijn dat dit met de invoering van de nieuwe wiskundeprogramma's in de tweede fase gaat veranderen. U kunt zelf de informatie hierover in de gaten houden via o.a. de volgende sites: die van de vereniging (www.nvvw.nl), met een informatieve link 'Eindexamens VO'; ook via www.examenblad.nl kunt u heel veel informatie vinden; en *last but not least* wijs ik u wederom op de *WiskundeBrief* (www.wiskundebrief.nl).

Wat verder?

Over ongeveer tien dagen is de jaarlijkse studiedag van de Vereniging; u heeft nog even de tijd om de stukken te lezen (het jaarverslag van het bestuur en van de redactie van *Euclides*, en de notulen van de jaarvergadering van vorig jaar) en zich daarmee voor te bereiden op de jaarvergadering die altijd 's ochtends wordt gehouden. U vindt de benodigde stukken in dit nummer.

Verder enkele 'reken'-stukken: naar aanleiding van zijn lezing tijdens de studiedag van 2009, heeft Koeno Gravemeijer een artikel geschreven over de staat van het Nederlandse rekenonderwijs onder de titel 'Wat is het probleem?'. Het is een lang stuk dat ik (desondanks) graag onder uw aandacht wil brengen. En, hoe u – wat rekenen betreft – een samenwerkingsverband zou kunnen aangaan met uw collega aardrijkskunde, leest u in een artikel dat eerder gepubliceerd is in het tijdschrift *Geografie*.

Er zijn meerdere redenen te noemen om stil te staan bij het feit dat we al weer het einde naderen van het jaar 2010. Eén daarvan is het feit dat we jammer genoeg het einde naderen van onze serie over Ludolph van Ceulen. Omdat het dit jaar 400 jaar geleden was dat Van Ceulen overleed, hebben we een serie artikelen gepubliceerd over zijn leven, werk en tijdgenoten. In dit nummer vindt u het voorlaatste artikel, uit de pen van Danny Beckers. Hij vraagt zich af wie eigenlijk de rekenmeesters uit de zestiende eeuw – een tijd zonder competentieprofiel voor rekenmeester of wiskundeleraar – waren. Wat deelden deze meesters en waarin verschilden ze? Een serie die nog wel even doorgaat, is die met betrekking tot IMO2011. In dit nummer een getaltheoretische opgave, uitgewerkt door oud-deelnemer Julian Lyczak. En verder zijn daar gelukkig weer onze vaste columnisten Frits Göbel, Ton Lecluse en Harm Jan Smid.

Veel leesgenoegen!

INHOUD

61	Kort vooraf [Klaske Blom]
62	Wat is het probleem? [Koeno Gravemeijer]
70	Mededeling
70	Aankondiging / KWG-Wintersymposium 2011
71	Het rekenen meester [Danny Beckers]
76	Het Geheugen [Harm Jan Smid]
79	Verschenen
80	Op weg naar IMO2011 [Julian Lyczak]
83	Nascholing [Joost Hulshof, Ronald Meester]
84	Rekenen met aardrijkskunde [Anouk Adang, Rob Adriaens]
85	Boekbespreking / René Descartes, Meetkunde [Danny Beckers]
87	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
88	Verschenen
89	Jaarverslag Euclides, jaargang 85 [Klaske Blom]
91	Inhoud van de 85e jaargang (2009-2010)
93	Notulen van de jaarvergadering op 7 november 2009 [Kees Lagerwaard]
94	Verslag van het verenigingsjaar 2009-2010 [Kees Lagerwaard]
97	Verschenen
98	Recreatie [Frits Göbel]
100	Servicepagina

Wat is het probleem?

[Koeno Gravemeijer]



Koeno Gravemeijer op de NVvW-jaarvergadering 2009 (foto: Metha Kamminga)

In de pers verschijnen al zo'n jaar of vijf steeds weer nieuwe berichten over de slechte staat van het reken- wiskundeonderwijs in Nederland. Meestal wordt teruggegrepen naar het PPON onderzoek dat in 2004 is uitgevoerd.^[9] PPON staat voor 'periodieke peiling van het onderwijsniveau', waarvan de eerste in 1987 is uitgevoerd. Uit deze peilingsonderzoeken blijkt dat er, tussen 1987 en 2004, een fikse achteruitgang is opgetreden in de vaardigheid van leerlingen op het gebied van de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Deze uitkomsten – en de resultaten op een aantal andere onderdelen die een verbetering laten zien – weerspiegelen een verandering van accenten in het rekenonderwijs, waarbij hoofdrekenen, schattend rekenen en getalrelaties steeds belangrijker worden gevonden en het cijferen minder belangrijk. De teneur van de krantenberichten is in het algemeen dat we terug moeten naar het rekenen van vroeger. Nu zijn de klachten over de teruglopende rekenvaardigheid zo algemeen, dat we ook los van de PPON-gegevens mogen aannemen dat er echt wat aan de hand is, maar of dat nu de conclusie rechtvaardigt dat we terug moeten naar het rekenen van vroeger?

Mathijs Bouman betoogt in de *Groene Amsterdammer* (15 augustus 2008) dat die conclusie wel wat erg snel getrokken wordt. De vraag is namelijk of reken-doelen van vroeger nog allemaal relevant zijn voor de leerlingen van nu. Voor een dergelijke bezinning lijkt geen ruimte.

In plaats daarvan buitelen de initiatieven om het probleem op te lossen over elkaar heen. Er komt een rekentoets voor de pabo, er wordt 115 miljoen uitgetrokken voor taal en rekenen, er komen rekenpilots, rekenverbetertrajecten, referentieniveaus voor doorlopende leerlijnen rekenen en taal, rekenen gaat getoetst worden op het eindexamen vo en op de pabo moet meer gerekend worden. Maar waar zijn dit nu precies oplossingen voor? Wat is het feitelijke probleem?

Uit onderzoek naar probleemoplossen blijkt dat de betere probleemoplossers eerst het probleem analyseren voor ze aan oplossingen beginnen. Die stap lijkt hier te ontbreken.

In dit artikel wil ik een aanzet tot zo'n probleemanalyse geven. Ik wil daarmee tegelijkertijd proberen een verbreding aan de discussie te geven door aandacht te vragen voor de volgende punten:

- Rekenen/wiskunde is meer dan (algebraïsche) rekenvaardigheid.
- We moeten ons niet beperken tot het 'wat', maar ook het 'hoe' in de analyse betrekken.
- Er is een complex van factoren dat van invloed is op de rekenprestaties.
- We moeten ons niet blind staren op de 'doorstroomrelevantie' binnen het onderwijsstelsel, maar ook oog hebben voor de 'uitstroomrelevantie', ofwel, voor wat de maatschappij vraagt.

Meer dan (algebraïsche) rekenvaardigheid

In de discussie van dit moment is er sprake van een eenzijdige focus op rekenvaardigheden. Waarbij wat onder rekenvaardigheden wordt verstaan, verengd wordt tot het vaardig uitvoeren van procedures, terwijl er pas echt sprake is van vaardigheid wanneer deze ook inzicht, toepassingen en flexibiliteit omvat. Steeds weer wordt de staartdeling opgevoerd en gaat de discussie over hoe deze moet worden aangeleerd en hoe snel en routinematig de leerlingen deze moeten kunnen uitvoeren. Deze fixatie op de staartdeling werkt versluitend, hierdoor kan de indruk

ontstaan alsof het bij het leren rekenen in het basisonderwijs alleen maar om één of enkele eenvoudig te leren procedures zou gaan. Maar zelfs wanneer we ons beperken tot de basale rekenprocedures gaat het om beduidend meer. Namelijk om procedures voor cijferend optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen – met gehele getallen en met kommagetallen; om het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van (echte en onechte) breuken; het rekenen met procenten; met verhoudingen; en meten en metriek. Al deze leerstofgebieden kennen hun eigen standaardprocedures en rekenregels. De ervaring leert dat leerlingen geneigd zijn deze regels en procedures door elkaar te halen. Daarom wordt er door didactici en onderwijsgeveenden tegenwoordig in het algemeen voor gekozen om deze regels en procedures niet blind aan te leren. Voorstellen om dat juist wel te doen komen meestal van buiten het onderwijs. De eenzijdige nadruk op procedurele rekenvaardigheden gaat ook voorbij aan het feit dat het reken- en wiskundeonderwijs een veel breder leerstofgebied bestrijkt en naast procedurele vaardigheden ook andere doelen nastreeft. Naast rekenen en algebra, zijn er nog leerstofgebieden als meten, meetkunde, statistiek en kansrekening. Bovendien gaat het om meer dan alleen regels en procedures: het reken- en wiskundeonderwijs richt zich ook op begrip, inzicht, flexibiliteit, creativiteit, toepassingsvaardigheid. Het is opvallend hoe weinig er wordt gesproken over zaken als redeneren, bewijzen, analyseren, communiceren, modelleren en gebruik van symbolen en dergelijke. Op deze wijze wordt wel een heel merkwaardig beeld van wiskunde opgeroepen. Ook het ministerie gaat mee in deze eenzijdige benadering, daarbij vergetend wat daarover in de kerndoelen voor het po (primair onderwijs) wordt gezegd; daarin staat onder meer^[11]:

In de rekenwiskunde leren kinderen een probleem wiskundig op te lossen en een oplossing in wiskundetaal aan anderen uit te leggen. Ze leren met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen. Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als

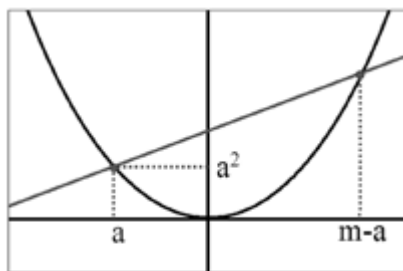
specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.

Niet alleen het 'wat', maar ook het 'hoe'

Het mantra dat je tegenwoordig steeds hoort, is dat de overheid bepaalt 'wat' er geleerd moet worden, maar dat het 'hoe' aan de leraren moet worden overlaten. Een uitgangspunt dat mijns inziens overigens geweld wordt aangedaan met het vastleggen van niveaus binnen de doorgaande leerlijnen. Daarmee wordt immers een uitspraak gedaan over de volgorde waarin bepaalde zaken geleerd moeten worden en daarmee over het 'hoe'. Maar er speelt een fundamentele kwestie. De niveaus worden beschreven in termen van opgaven die de leerlingen op een bepaald moment in hun schoolloopbaan moeten kunnen maken. Er worden geen uitspraken gedaan over hoe de leerlingen tot de goede antwoorden komen. Voor doorgaande leerlijnen is het nu juist essentieel hoe de leerlingen tot hun antwoorden komen. En welke oplossingsmanieren de leerlingen gebruiken hangt weer nauw samen met hoe ze een en ander hebben geleerd. Het 'hoe' omvat dus twee aspecten: hoe iets wordt onderwezen en hoe de leerlingen tot correcte antwoorden komen – waarbij mag worden aangenomen dat het laatste min of meer bepaald wordt door het eerste.

De inperking tot het 'wat', in combinatie met de eenzijdige nadruk op (algebraïsche) vaardigheden, kan er mijns inziens toe leiden dat het onderwijs zich gaat richten op de verkeerde zaken. Zo bestaat het gevaar dat het inslijpen van algoritmen en procedures de voorrang gaan krijgen boven reken-wiskundige concepten, analytisch denken en wiskundig redeneren.

Om duidelijk te maken waarom het hier gaat, verwijs ik naar een anekdote die Aad Goddijn mij vertelde. Het betreft een les die hij gaf aan leerlingen van het Junior College. In het Junior College worden bèta-getalenteerde leerlingen uit de bovenbouw van verschillende vwo-scholen enkele dagen per week samengebracht om bèta-onderwijs op niveau te krijgen. De bedoelde les ging over een onderzoek naar het snijden van de parabool $y = x^2$ met evenwijdige lijnen met richtingscoëfficiënt m . De opdracht was te onderzoeken wat hieraan te ontdekken valt.



figuur 1 Snijpunten van de lijn $y - a^2 = m(x - a)$ met de parabool $y = x^2$

De eerste stap van de klassikale verkenning bestond uit het kiezen van een punt (a, a^2) op de parabool en het trekken van een lijn door dit punt met een richtingscoëfficiënt m ; zie *figuur 1*.

Voor deze lijn geldt, dat $y - a^2 = m(x - a)$. Voor de snijpunten van de lijn $y - a^2 = m(x - a)$ met de parabool $y = x^2$ geldt: $x^2 - a^2 = m(x - a)$.

Tot verbazing van Aad zagen de leerlingen echter niet dat deze vergelijking een merkwaardig product bevat dat je kunt gebruiken om het tweede snijpunt te vinden: $(x + a)(x - a) = m(x - a)$.

De oplossingen van deze vergelijking zijn $x = a$ en $x = m - a$. Voor het midden tussen die twee snijpunten geldt $x = \frac{1}{2}m$. Dus voor elke lijn met richtingscoëfficiënt m geldt dat het midden van de snijpunten met de parabool $y = x^2$ ligt bij $x = \frac{1}{2}m$.

We mogen aannemen dat het probleem van de leerlingen niet was dat ze het merkwaardig product $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ niet kennen, maar dat ze het niet herkennen als er niet letterlijk $a^2 - b^2$ staat. Het onderliggende probleem zou kunnen zijn dat de leerlingen letters in onvoldoende mate zien als *placeholders*. De letters a en b in de formule $a^2 - b^2$ moeten worden gezien als placeholders waarvoor allerlei expressies ingevuld kunnen worden. Dit verwijst naar wat Wenger *globaal substitueren* noemt ([22]; zie ook [4]). Hij licht het globaal substitueren toe aan een opgave die hij 60 studenten heeft voorgelegd:

Los v op uit: $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1 + u}$

De overgrote meerderheid van de studenten die zo'n drie jaar highschool-wiskunde achter de rug hadden, begon met kwadrateren om zo te proberen de wortels kwijt te raken. Deze studenten liepen hopeloos vast. Ze zagen niet dat je de vergelijking kunt zien als een lineaire vergelijking in v .

Dit is eenvoudig te zien als je $\sqrt{u}$ vervangt door de letter A , en $\sqrt{1 + u}$ door de letter B . De vergelijking wordt dan:

$$vA = 1 + 2vB$$

Het gaat hier om een algebraïsche manier van kijken. De leerlingen moeten structuur in een expressie zien. In een opgave als $(x - 2)^2 - 18(x - 2) + 9 = 0$ moeten ze zien dat je $(x - 2)$ kunt opvatten als een variabele. Bij een vergelijking als $3 + 4(x - 3)^2 = 147$ moeten ze zich realiseren dat deze te lezen valt als $3 + A = 147$; en A , en dus $4(x - 3)^2$, gelijk moet zijn aan 144.

Geïnspireerd door het werk van Wenger nam Irene van Stiphout, promovenda aan de Eindhoven School of Education, de volgende opgave op in haar onderzoek naar algebra in havo en vwo:

Als $a\sqrt{b} = 1 + 2a\sqrt{1 + b}$, dan is $a = \dots$

In de leerjaren 4, 5, en 6 werd deze opgave door respectievelijk 0%, 1% en 1% van de leerlingen goed gemaakt.^[17] De facto kon dus vrijwel geen van de leerlingen deze opgave maken!

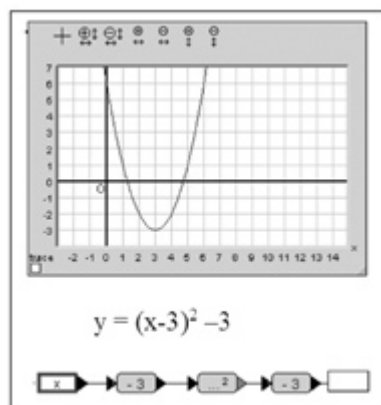
Dat de leerlingen zoveel moeite hebben met deze opgave kan verklaard worden met behulp van het onderscheid dat Sfard^[16] maakt tussen het proces en het object karakter van wiskundige begrippen. Zij merkt op dat het binnen de wiskunde de gewoonste zaak van de wereld is om te spreken over 'een functie die ...', alsof je over een concreet object praat. Maar, zo betoogt ze, wiskundige objecten zijn heel wat anders dan fysische of materiële objecten. Wiskundige objecten, zoals functies, kunnen we met onze zintuigen niet waarnemen. We kunnen wel concrete symbolen of visuele representaties gebruiken, maar daarmee hebben we de functie zelf niet te pakken. Immers^[16]:

even when we draw a function or write down a number, we are very careful to emphasize that the sign on the paper is but one among many possible representations of some abstract entity (...).

Ze voegt daaraan toe dat dergelijke wiskundige objecten voor wiskundigen heel concreet zijn, maar voor beginners (nog) niet bestaan. Dit is volgens haar een van de redenen waarom wiskunde zo ontroegankelijk is. Deze objectkant van wiskundige concepten stelt ze tegenover een proceskant die betrekking heeft op algoritmen en handelingen. Ze spreekt in dit verband van het duale karakter van de wiskunde, omdat object en proces weliswaar onverenigbaar zijn maar elkaar tegelijkertijd ook aanvullen. De geschiedenis van de wiskunde laat zien dat het procedurele concept steeds voorafgaat aan het structurele concept en dat het bereiken van het structurele concept een niveau-sprong vraagt. Een bekend voorbeeld is dat van het wiskundige begrip functie, dat historisch gezien eerst naar voren kwam als een rekenvoorschrift dat aan een inputgetal een outputgetal toevoegt. Pas later werd een functie gezien als een object, dat gedefinieerd kan worden als een verzameling van geordende getallenparen.

We kunnen het operationele en het structurele concept toelichten aan de hand van **figuur 2**. De 'pijlentaal'-voorstelling belichaamt het operationele concept, terwijl de grafiek geassocieerd kan worden met het structurele concept, waarbij de functie wordt opgevat als object dat bestaat uit een verzameling geordende getallenparen. De algebraïsche notatie kan op twee manieren worden opgevat, als 'rekenvoorschrift' en als beschrijving van de functie als object.

Een voorbeeld van onderwijs dat zich erop richt dat de leerlingen variabelen en functies als objecten gaan zien, is het Tool Use project^[2]. De basis wordt hier gevormd door een computerprogrammaatje, AlgebraPijlen, waarin een rekenvoorschrift kan worden gedefinieerd met behulp van een pijlenketting (**zie figuur 3**), waarbij elke pijl een rekenoperatie representeert. Deze rekenoperaties worden door de computer uitgevoerd. Door met een reeks van inputwaarden steeds opnieuw identieke operaties uit te voeren kunnen de leerlingen het idee van een samenhang tussen varia-



figuur 2 Verschillende representaties van een functie

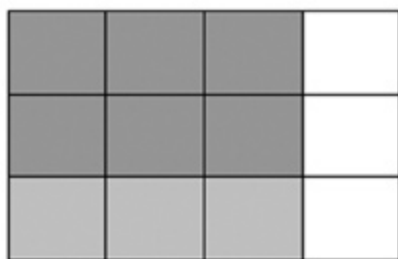


figuur 3 Computer-applet AlgebraPijlen

belen ontwikkelen. Het op- en neergaan in tabellen kan de ontwikkeling van de notie variabele verder ondersteunen. Het gaat daarbij immers om het variëren binnen een bepaald domein of bereik. De idee van functie als object kan verder versterkt worden door vanuit de pijlenketting en de tabellen grafieken te genereren, die vervolgens weer geanalyseerd kunnen worden.

Het computerprogrammaatje biedt verder de mogelijkheid om de pijlenkettingen te koppelen aan algebraïsche expressies, terwijl onderdelen van deze expressies weer in stukken van de pijlenketting te herkennen zijn. Binnen het programmaatje AlgebraPijlen kunnen de leerlingen kettingen uitbreiden, verbinden, vergelijken of comprimeren. Door op deze wijze kettingen en expressies te variëren en te onderzoeken kan een basis worden gelegd voor het zien van structuur en globaal substitueren.

Een ander voorbeeld van onvoldoende aandacht voor het 'hoe' betreft de overgang van po naar vo voor de breuken.^[1] Het probleem is hier dat in het po vrijwel uitsluitend met breuken als benoemde getallen wordt gewerkt, terwijl in het vo direct op het niveau van de onbenoemde getallen wordt gestart. Deze overgang van benoemde breuken naar onbenoemde breuken kunnen we vergelijken met de overgang van benoemde naar onbenoemde getallen in het aanvankelijk rekenen. In het aanvankelijk rekenen doet zich een fase voor waarin jonge kinderen de vraag 'hoeveel is 4 + 4' niet begrijpen, terwijl ze wel weten dat 4 knikkers en nog eens 4 knikkers samen 8 knikkers oplevert. De leerlingen kennen in die fase alleen benoemde getallen en nog geen onbenoemde getallen. Benoemde getallen ontleen hun betekenis aan de telbare objecten waarnaar ze verwijzen; zoals in ons voorbeeld de getelde knikkers. Geleidelijk



figuur 4 Model voor het vermenigvuldigen van breuken

aan krijgen getallen daarna het karakter van zelfstandige objecten en ontleen hun betekenis aan een netwerk van getalrelaties. Een (natuurlijk) getal heeft dan de status van een knooppunt in een relatienet, om de terminologie van Van Hiele^[21] te gebruiken. Op een zelfde manier kunnen breuken hun betekenis gaan ontleen aan getalrelaties. Bij $\frac{3}{4}$ kan dat bijvoorbeeld zijn: $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ of $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$, maar omvat ook $3 : 4 = \frac{3}{4}$ en equivalentierelaties als $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$ en deel-geheelrelaties als $\frac{3}{4}$ van 100 is 75 enz. In het po wordt, terecht, begonnen met een brede fenomenologische verkenning van breuken; daarmee wordt (a) aangesloten bij de informele kennis van de leerlingen, (b) wordt een brede begripsmatige basis gelegd en (c) wordt een basis gelegd voor toepasbaarheid. In lijn daarmee komen bewerkingen met breuken – zoals het vermenigvuldigen – naar voren als informele contextgebonden oplossingen. Een probleem is echter dat deze situatiespecifieke oplossingen in de huidige methoden worden ingeoefend als geïsoleerde standaardprocedures. Zo wordt $20 \times \frac{3}{4}$ bijvoorbeeld geassocieerd met 20 pakjes melk van $\frac{3}{4}$ liter, een probleem dat kan worden opgelost met herhaald optellen of met behulp van de getallenlijn. Bij de opgave $\frac{3}{4} \times 20$ gaat het echter heel anders. Dit wordt gekoppeld aan $\frac{3}{4}$ deel van iets nemen, wat geassocieerd wordt met de idee dat $\frac{3}{4}$ staat voor 'iets in 4 gelijke stukken delen en daar 3 van nemen.' In de boekjes gaat het daarbij altijd om telbare of afpasbare zaken die je netjes kunt delen – zonder rest en dus zonder breuk in de uitkomst. Wanneer de realistische benadering consequent zou worden gevolgd, zou er in aansluiting op de informele aanpak moeten worden aangestuurd op een proces van generaliseren en formaliseren. Bijvoorbeeld door de leerlingen na te laten denken over de vraag of $20 \times \frac{3}{4}$ gelijk is aan $\frac{3}{4} \times 20$, en

of je dat kunt beredeneren. Op concreet niveau kun je hier een oppervlaktemodel gebruiken. Meer formeel zou de redenering als volgt kunnen verlopen.

Als we 20 keer $\frac{3}{4}$ moeten optellen, kunnen we dit ook zien als 5 groepen van $4 \times \frac{3}{4}$ die elk 3 waard zijn. Met andere woorden $20 \times \frac{3}{4} = (20 : 4) \times 3$ en dat is hetzelfde als waar je op uitkomt wanneer je $\frac{3}{4} \times 20$ opvat als $\frac{3}{4}$ deel van 20 nemen. Dat bereken je immers door eerst $\frac{1}{4}$ deel te nemen, ofwel via $\frac{3}{4} \times 20 = 3 \times (\frac{1}{4} \text{ deel van } 20) = 3 \times (20 : 4)$. Zo kunnen we beredeneren dat $20 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 20$ en bovendien kan aannemelijk worden gemaakt dat deze redenering voor elke combinatie van een breuk en natuurlijk getal kan worden opgezet.

Dit soort activiteiten zou ergens in po of vo aan de orde moeten komen. Maar dat gebeurt niet in het po, en in het vo wordt direct gestart met één standaard procedure voor breuken als onbenoemde getallen. Daar wordt wel een plaatje bij gebruikt dat lijkt op het plaatje dat in het po voor het vermenigvuldigen van breuken kleiner dan één wordt gebruikt, maar de rol van deze plaatjes is heel verschillend.^[1]

Bovendien zijn zulke plaatjes (*als figuur 4*) heel verraderlijk: de leraar kan daarbij praten over onbenoemde getallen, terwijl de leerling denkt aan benoemde getallen. De leraar kan het plaatje als een illustratie zien van de vermenigvuldiging van alle mogelijke breuken, terwijl de leerling alleen het concrete geval ziet dat staat afgebeeld. Voor de leerlingen die naar havo en vwo doorstromen, is er dus geen sprake van een doorgaande leerlijn van po naar vo. De regel voor het vermenigvuldigen van breuken via 'teller keer teller en noemer keer noemer' zal voor veel leerlingen het karakter zal hebben van een onbegrepen regel. Dit probleem wordt verder vergroot doordat het ontwikkelen van breukenkennis en -vaardigheden in de vo-methoden in het algemeen geen systematische aandacht krijgt. Bovendien is er weinig aandacht voor de meer algemene eigenschappen en samenhangen tussen operaties. Zoals, dat vermenigvuldigen met een breuk hetzelfde is als achtereenvolgens vermenigvuldigen met de teller en delen door de noemer. Of, dat $a/b = c$ impliceert dat $a/c = b$ en dergelijke. Ook in die zin is er dus geen sprake van een doorgaande leerlijn, want het is deze manier van

redeneren over het vermenigvuldigen (en delen) van breuken die ons inziens een voorwaarde is voor algebraïsch rekenen met breuken.

Deze analyse laat zien dat de problematiek van de aansluiting tussen po en vo niet kan worden opgelost door alleen uitspraken te doen over het *wat*, maar dat ook het *hoe* daarin moet worden betrokken.

Achterblijvende rekenvaardigheid

Voor ik overga naar het punt van de 'uitstroomrelevantie' en datgene wat de maatschappij vraagt, wil ik me eerst kort richten op mogelijke verklaringen voor de – door velen geconstateerde – teruglopende rekenvaardigheid. De vraag is dan hoe het komt dat rekenvaardigheid van de leerlingen zo achterblijft bij wat er verwacht zou mogen worden van het, internationaal in wetenschappelijke kring zo hoog aangeslagen, realistische rekenwiskundeonderwijs. Vermoedelijk gaat het om een combinatie van factoren:

- het realistisch reken/wiskundeonderwijs is moeilijker dan gedacht;
- de rekendoelen verschillen van de leerdoelen;
- het ontbreken van nascholing;
- rekenonderwijs is te ver uitgelijnd;
- de rol van rekenmachines en computerisering.

Realistisch reken/wiskundeonderwijs moeilijker dan gedacht – Een van de belangrijkste redenen hiervoor is volgens mij dat het ideaal van interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs veel moeilijker is dan werd (en soms nog wordt) gedacht. Een eerste moeilijkheid betreft het omgaan met verschillende oplossingen. Bij probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs mag je verwachten dat de leerlingen met een scala aan oplossingen komen. Leraren zijn echter niet voorbereid op het omgaan met zo'n variëteit aan oplossingen en zullen deze situatie dus al gauw vermijden. Dit geldt ook voor de auteurs van schoolboeken: de opgaven in de schoolboeken zijn er meestal niet op gericht een dergelijke variëteit aan oplossingen te genereren.

Een andere barrière wordt gevormd door de klassencultuur. Er wordt wat gemakkelijk aangenomen dat, als je de leerlingen vertelt dat ze zich niet meer op de leraar moeten richten maar voortaan zelf met oplossingen moeten komen, ze dat ook zullen doen.

Dit betekent echter een verandering van de gebruikelijke rollen van leraar en leerlingen. In het gangbare reken/wiskundeonderwijs is de oplossing van de leraar of het boek de norm. De vragen die de leraar stelt, zijn bovendien niet authentiek: de leraar weet de antwoorden al en de leerlingen weten dat. Ze zijn eraan gewend dat het loont om die antwoorden te geven die de leraar wil horen. Probleemgeoriënteerd onderwijs vraagt een heel andere rolverdeling; dan gaat het om wat de leerling denkt, waarbij de klas meer gaat functioneren als een onderzoeksgemeenschap. Dit vraagt nieuwe patronen in rollen en verwachtingen. Van de leerlingen wordt verwacht dat ze zelf oplossingen bedenken, deze oplossingen uitleggen en onderbouwen, naar de oplossingen van anderen luisteren en deze proberen te begrijpen, zonodig om toelichting te vragen en oplossingen ter discussie te stellen wanneer ze het er niet mee eens zijn. Van de leraren wordt verwacht dat ze dit gedrag stimuleren, proberen uit te vinden wat de leerling denkt, zelf niet uitleggen, maar in staat zijn de klassendiscussie zo in te richten dat de onderliggende wiskunde onderwerp van gesprek wordt.

De rekendoelen verschillen van de leerdoelen – Het lijkt vanzelfsprekend om ervan uit te gaan dat het doel van het maken van een rekenopgave is om tot het goede antwoord te komen. Leraren die hiervan uitgaan, zullen leerlingen proberen te helpen met aanwijzingen die tot goede antwoorden leiden. In probleemgeoriënteerd onderwijs is het doel van veel opgaven echter anders. Uiteraard moeten de leerlingen uiteindelijk goede antwoorden kunnen produceren. In het leerproces dat daaraan vooraf gaat, is het didactische doel echter gelegen in het denkproces van de leerling dat door de opgave kan worden opgeroepen. Deze didactische doelstelling wordt doorkruist wanneer leraren de leerlingen procedures aanreiken die zulk denkwerk overbodig maken. De leraren moeten zich juist op het beoogde denkwerk richten. Dit betekent, dat leraren zicht dienen te hebben op de beoogde mentale activiteiten van de leerlingen. Simon (1995) spreekt in dit verband van het *hypothetisch leertraject* (HLT). Zo'n HLT beschrijft welke mentale activiteiten je van de leerlingen verwacht wanneer zij

met een bepaalde opgave aan de slag gaan, en hoe deze mentale activiteiten samenhangen met de te bereiken leerdoelen (deze doelen zullen in het algemeen inzichten én vaardigheden omvatten). Het HLT geeft zo richting aan het onderwijs en biedt ook een kader om onderwijsactiviteiten te evalueren. Zo zal de leraar proberen vast te stellen welke mentale processen zich daadwerkelijk voltrekken en op basis daarvan besluiten nemen over vervolgactiviteiten.

Het ontbreken van nascholing – Bijna twintig jaar geleden werd in het zogeheten MORE-project (Methodenonderzoek rekenen-wiskundeonderwijs)^[5] vastgesteld dat het realistisch reken-wiskundeonderwijs op de basisschool slechts in beperkte mate werden uitgevoerd zoals bedoeld. Bovendien bleken de opvattingen van de leraren slechts globaal te sporen met de realistische uitgangspunten. De noodzaak van nascholing werd hiermee duidelijk aangetoond, maar met uitzondering van de opleiding van een beperkt aantal reken-coördinatoren is daar nooit veel van gekomen. De overheid wilde daarvoor geen geld vrijmaken. Het is wat wrang dat er nu wel in nascholing wordt geïnvesteerd om de klok weer terug te draaien. Dit is des te navranter omdat onderzoek laat zien, dat wanneer dit type *reform mathematics* wordt uitgevoerd zoals bedoeld, het betere resultaten boekt dan de traditionele benadering.^[19]

Rekenonderwijs te ver uitgelijnd – Leraren laten zich sterk leiden door de reken-wiskundemethode die ze gebruiken. De rekenleergangen in de basisschoolmethoden zijn weliswaar opgezet vanuit een bij de realistische benadering passend idee van geleid heruitvinden (*guided reinvention*), maar in de praktijk zijn deze leergangen veel te gedetailleerd uitgewerkt. De stapjes in de *reinvention route* zijn zo klein geworden, dat leraar en leerlingen niet meer merken dat er iets wordt uitgevonden. Dit heeft niet alleen nadelige gevolgen voor de betere leerlingen, die niet worden uitgedaagd. Dit is ook een probleem voor de zwakkere leerlingen, omdat er zo geen aanleiding meer is om aan de orde te stellen wát er nu eigenlijk wordt uitgevonden. Daardoor kunnen juist voor de zwakkere leerlingen essentiële zaken verborgen blijven.

Rekenmachines en computerisering – Ieder-

een beschikt tegenwoordig over een rekenmachine, bovendien wordt veel rekenwerk door gecomputeriseerde apparaten verricht. Als gevolg daarvan wordt het snel en vlot beheersen van (cijfer)routines in het onderwijs minder belangrijk gevonden. In het basisonderwijs besteedt men er minder aandacht aan en in het voortgezet onderwijs wordt de zakrekenmachine gebruikt. Met als gevolg dat de leerlingen na de basisschool nauwelijks meer rekenen. Wat de leerlingen op de basisschool geleerd hebben zakt dan ook snel weg. Merkwaardig genoeg is de conclusie van beleidsmakers niet dat de leerlingen andere dingen moeten gaan leren, zoals bijvoorbeeld rekenvaardigheden die hun betekenis niet meteen verliezen wanneer je de beschikking hebt over een rekenmachine. Terwijl we ons juist wel zouden moeten gaan richten op vormen van rekenen die complementair zijn aan de rekenmachine. Dus zaken als:

- globaal rekenen;
- vlot en flexibel rekenen met kleine getallen;
- toepassen en redeneren.

Daarbij kan worden opgemerkt dat leerlingen ook voor het leren van wiskunde meer hebben aan vlot rekenen met kleine getallen dan aan het snel en foutloos uitvoeren van bewerkingen met grote getallen. Waarmee ik overigens niet wil zeggen dat de algoritmen voor het rekenen niet meer geleerd zouden moeten worden. Inzicht in hoe en waarom deze werken, blijft van belang voor de conceptuele wiskundige ontwikkeling van de leerlingen. Maar dat is wat anders dan trainen op het routinematig, snel en foutloos uitvoeren van procedures.

School en maatschappij; uitstroom-relevantie

Als vierde punt noemde ik de aansluiting tussen school en maatschappij, een onderwerp dat op dit moment opvallend afwezig is in de discussie. Alle aandacht lijkt uit te gaan naar wat 'doorstroomrelevantie' wordt genoemd. Het lijkt er zelfs op dat de leerlijnennotitie, *Over de drempels met rekenen*^[3], uitsluitend op leerlijnen binnen het bestaande onderwijssysteem is gericht. In een interview^[8] erkent Meijerink dat een oriëntatie op de reken-wiskundige kennis die mensen nodig hebben om in de informatiemaatschappij van de toekomst te kunnen functioneren ontbreekt. Het is

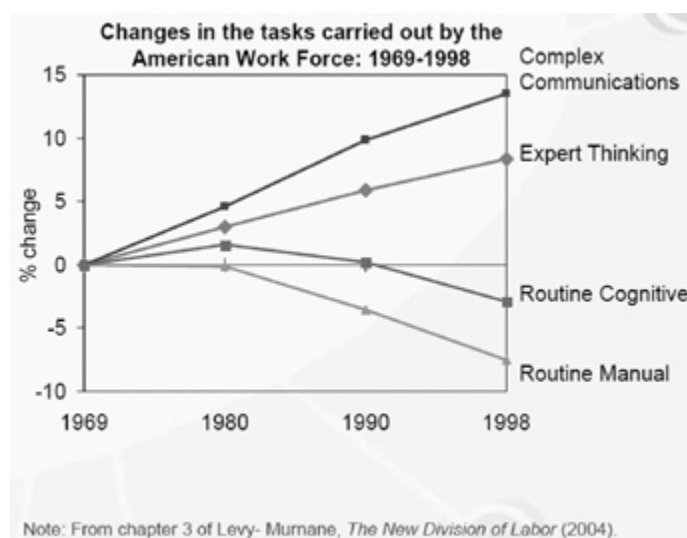
schokkend om te constateren hoe weinig aandacht er is voor de wereld buiten het onderwijs, terwijl dat de wereld is waarvoor we de leerlingen uiteindelijk opleiden. Op beleidsniveau wordt er wel veel gesproken over de 'kenniseconomie' en de noodzaak van een verhoging van het opleidingsniveau, maar het besef dat de snelle veranderingen in de wereld ook tot veranderingen in het onderwijs zouden moeten leiden, lijkt te ontbreken. Toch zijn er voldoende signalen als we ons wat breder oriënteren. In 2004 wijdde het tijdschrift *Newsweek* al een nummer aan de veranderingen op de arbeidsmarkt als gevolg van globalisering en informatisering (zie *figuur 5*).

In de Verenigde Staten zijn inmiddels verschillende publicaties verschenen met veelzeggende titels als *Rising Above The Gathering Storm* (Committee on Science, Engineering, and Public Policy; 2007), *Tough Choices or Tough Times* (zie [12]), *21st Century Skills* (zie [13]) en *The Achievement Gap* (zie [15]). De algemene teneur van deze publicaties is, dat er drastische veranderingen nodig zijn om de leerlingen van nu straks een kans te kunnen geven op de arbeidsmarkt van morgen.

Er lijkt in Nederland onvoldoende besef dat we de leerlingen moeten voorbereiden op de maatschappij waarin ze in de toekomst terecht zullen komen. We weten uiteraard niet hoe die maatschappij eruit ziet, maar we kunnen wel voorspellen dat informatisering en globalisering een belangrijke rol zullen spelen. Reken- en wiskundige taken worden in toenemende mate overgenomen door zakrekenmachines, spreadsheets en dergelijke. En steeds meer reken-wiskundige taken worden uitgevoerd door informatietechnologie die verborgen is in volledig geïntegreerde systemen, zoals boekhoudprogramma's, automatische kassa's en geautomatiseerde productielijnen. Dit heeft uiteraard consequenties voor de reken-wiskundige 'geletterdheid' die elke burger in het dagelijks leven nodig heeft. Nog ingrijpender echter zijn de gevolgen voor zijn/haar *employability*, er zullen heel andere eisen aan de werknemers worden gesteld.



figuur 5 Veranderingen op de arbeidsmarkt



figuur 6 The Changing Nature of the Workforce

Volgens de economen Levy en Murnane^[10] leidt de informatisering ertoe dat banen met een routinekarakter verdwijnen (zie *figuur 6*). Taken die kunnen worden opgedeeld in stappen die zonder veel variatie herhaald kunnen worden, zullen worden overgedragen aan werknemers in lage-lonen landen, of worden uitbesteed aan computers. Het blijkt bovendien dat automatisering en outsourcing elkaar overlappen en versterken, daar de beschikbare informatie- en communicatie-technologie de wereldwijde uitwisseling van informatie heel gemakkelijk maakt. We kunnen hierbij bijvoorbeeld denken aan het werk van boekhouders en computer-programmeurs, maar ook aan minder voor

de hand liggende zaken als het analyseren van Röntgen foto's. Wat overblijft zijn banen die flexibiliteit, creativiteit en een leven lang leren vragen. Van belang zijn ook sociale vaardigheden en het werken met computers of gecomputeriseerde apparatuur. Onderzoek in Groot-Britannië (door Goos en Manning; 2003) laat zien dat het vooral de banen in het midden van het loon-gebouw zijn die verdwijnen. Dientengevolge ontstaat een tweedeling in slechtbetaalde *lousy jobs* en goedbetaalde *lovely jobs*. De lovely jobs vragen flexibiliteit, creativiteit, probleemoplosvaardigheden, sociale vaardigheden, het kunnen omgaan met computers en voortdurend leren.

Onderzoek dat zich specifiek op de wiskunde richt, laat zien dat de wiskunde die we in de wereld van werk en beroep tegenkomen (voor zo ver het geen uitgesproken wiskundige beroepen betreft) sterk verschilt van de wiskunde die op school wordt aangeboden. Zo wijst Steen^[18] erop dat het buiten school vooral gaat om het oplossen van complexe problemen waarvoor je slechts eenvoudige wiskunde nodig hebt, terwijl het in de school gaat om wiskunde van een hoger niveau maar om tamelijk eenvoudige problemen. Bovendien blijkt de wiskunde in beroepssituaties anders van aard dan de schoolwiskunde. Het blijkt dat wiskunde in toepassings-situaties vaak een ideosyncratisch karakter heeft (Roth^[14]). Hoyles en Noss^[6] spreken in dit verband van *Technomathematical Literacies*. De wiskunde die gebruikt wordt is vermengd met praktijkkennis en toegesneden op het gebruik van specifieke gereedschappen en apparaten. In dit verband kunnen we spreken van een spanning tussen 'doorstroomrelevantie' en 'uitstroomrelevantie'. Voor de voortgang in het curriculum is het gewenst dat er in de wiskunde wordt gewerkt met allereerste standaardvormen. Om zich flexibel te kunnen aanpassen aan de gevarieerde vormen van wiskunde waarmee de leerling in de beroepspraktijk te maken krijgt, zou een variatie in procedures, notaties en representaties juist wenselijk zijn. Het toenemend gebruik van ict voegt hieraan een nieuwe dimensie toe. De reken-wiskundige competenties die de maatschappij vraagt, verschuiven hierdoor van het rekenen met pen en papier naar het kunnen omgaan met computers en geïntegreerde systemen. Essentieel is mijns inziens dan het op modelniveau begrijpen van samenhangen en elementaire kennis van waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Bij veel it-toepassingen zal het gaan om complexe samenhangen tussen een aantal veranderlijke grootheden. Dit heeft consequenties voor het onderwijs. Het kunnen omgaan met modellen van zulke samenhangen, wordt een steeds belangrijker vaardigheid. We zouden in dit verband kunnen spreken van conceptuele wiskunde. De leerlingen hoeven niet met zulke modellen te kunnen rekenen, dat kan de computer voor ze doen. Maar ze moeten gaan beschikken over een kwalitatief begrip van veranderlijke grootheden en ze moeten

leren redeneren over samenhangen. Kaput^[7] spreekt in dit verband van de *mathematics of change*. Hij wijst erop dat computers nieuwe mogelijkheden bieden om deze mathematics of change binnen het bereik van grote groepen leerlingen te brengen. Computers hebben aan het bestaande repertoire van twee-dimensionale representaties een nieuwe vorm toegevoegd, de dynamische representaties. Zoals grafieken en uitkomsten van metingen die real time op het scherm verschijnen, maar ook de representaties van simulaties die naar believen gemanipuleerd kunnen worden. Deze dynamische representaties maken, zo betoogt Kaput, een kwalitatieve, conceptuele benadering van het redeneren over veranderingen mogelijk. Deze kwalitatieve benadering kan voor grote groepen leerlingen, een alternatief vormen voor de gangbare integraal- en differentiaalrekening. We zouden het redeneren over veranderlijke grootheden daarmee toegankelijk kunnen maken voor die leerlingen voor wie het algebraïsche rekenen van de integraal- en differentiaalrekening nu een onoverkomelijk struikelblok vormt. Voor een selecte groep zal de integraal- en differentiaalrekening zijn waarde uiteraard behouden. Voor die groep geldt dan ook dat ze zullen moeten beschikken over de juiste basisvaardigheden. Maar als het gaat om funderend onderwijs voor alle leerlingen, dan biedt deze meer kwalitatieve benadering unieke mogelijkheden (zie ook [20]).

Besluit

Uitgangspunt voor dit artikel is de stelling dat de discussie over het reken- en wiskunde-onderwijs zoals die nu wordt gevoerd, gebaseerd is op een beperkte probleemanalyse. In het voorgaande heb ik een begin gemaakt met een bredere probleemanalyse. Ik heb laten zien dat rekenen of wiskunde meer is dan (algebraïsche) rekenvaardigheid en dat je je in het denken over reken- en wiskunde-onderwijs niet kunt beperken tot het 'wat', maar daarin juist het 'hoe' moet betrekken. Verder heb ik laten zien dat een complexe verzameling van factoren een rol speelt bij het achterblijven van de veel besproken rekenvaardigheden. Het laatste, en mijns inziens belangrijkste punt, is dat we ons moeten bezinnen op de relatie tussen onderwijs en maatschappij.

Het onderwijs staat voor de uitdaging de leerlingen van nu voor te bereiden op de maatschappij van morgen. De vraag waar we nu voor staan, is de vraag hoe we de leerlingen het beste voorbereiden op de veranderingen die informatisering en globalisering met zich meebrengen. De Ververs Foundation heeft hiervoor samen met de SLO een eerste stap gezet met het project 'De Toekomst Telt', waarin een verkenning plaatsvindt naar de voor de toekomst wenselijke reken-wiskundedoelen op het niveau van het funderend onderwijs.

Noten en literatuur

- [1] G. Bruin-Muurling, K. Gravemeijer, M. van Eijck (2010): *Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo*. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/11(1); pp. 33-37.
- [2] P. Drijvers e.a. (2007): *Algebra met applets*. In: D. de Bock e.a.: *Wiskundeonderwijs in Vlaanderen en Europa, een stand van zaken en perspectieven voor de toekomst*. Leuven: Katholieke Universiteit Leuven; pp. 211-220.
- [3] Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen (2008): *Over de drempels met rekenen*. Enschede: SLO.
- [4] K. Gravemeijer (1990): *Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid*. In: *Nieuwe Wiskrant* 10(2); pp. 29-33.
- [5] K. Gravemeijer e.a. (1991): *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*. Bijlagen MORE-onderzoek. Utrecht: OW&OC/ISOR.
- [6] C. Hoyle, R. Noss (2003). *What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?* In: A.J. Bishop e.a. (eds.): *Second International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 1). Dordrecht: Kluwer Academic; pp. 323-349.
- [7] J. Kaput, R. Schorr (2007): *Changing representational infrastructures changes most everything / The case of SimCalc, Algebra, and Calculus*. In: G. Blume, K. Heid (eds.): *Research on technology in the learning and teaching of mathematics / Syntheses and perspectives*. Mahwah (NJ): Erlbaum; pp. 211-253.

- [8] R. Keijzer, J. ter Heege (2008): *Doorlopende leerlijnen en verwante kwesties - een interview met H. Meijerink*. In: *Reken-wiskundeonderwijs / onderzoek, ontwikkeling, praktijk - Panama-Post* 27(1); pp. 14-18.
- [9] J. Janssen, F. van der Schoot, B. Hemker (2005): *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- [10] F. Levy, R.J. Murnane (2006): *How computerized work and globalization shape human skill demands*. Via: <http://web.mit.edu/flevy/www/> (geraadpleegd op 2 november 2006).
- [11] Ministerie van OCW (2006): *Herziene Kerndoelen Basisonderwijs*. Via: www.minocw.nl/documenten/kerndoelen_voorstel_TK_definitief_na_AO_en_RvS.pdf (geraadpleegd op 5 maart 2010).
- [12] National Center on Education and the Economy (2007): *Though Choices or Though Times / The Report of the New Commission on the Skills of the American Workforce*. San Francisco: John Wiley & Sons Inc. (Jossey-Bass).
- [13] Partnership for 21st Century Skills (2008): *21st Century Skills Education & Competitiveness*. Tuscon (AZ): P21.
- [14] W-M. Roth (2005): *Mathematical Inscriptions and the Reflexive Elaboration of Understanding / An Ethnography of Graphing and Numeracy in a Fish Hatchery*. In: *Mathematical thinking and Learning*, 7(2); pp. 75-110.
- [15] T. Wagner (2008): *The Global Achievement Gap*. New York: Basic Books.
- [16] A. Sfard (1991): *On the dual nature of mathematical conceptions / Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. In: *Educational Studies in Mathematics*, 22; pag. 6.
- [17] I. van Stiphout (2009). Persoonlijke mededeling.
- [18] L.A. Steen (2001): *Data, Shapes, Symbols / Achieving Balance in School Mathematics*. In: L.A. Steen (ed.): *Mathematics and Democracy / The Case for Quantitative Literacy*. Princeton (NJ): National Council on Education and the Disciplines; pp. 53-74.

- [19] J.E. Tarr e.a. (2008): *The Impact of Middle-Grades Mathematics Curricula and the Classroom Learning Environment on Student Achievement*. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Volume 39, Issue 3; pp. 247-280.
- [20] F. van Galen, K. Gravemeijer (2010): *Dynamische grafieken op de basisschool*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [21] P. van Hiele (1973): *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.
- [22] R. Wenger (1987): *Cognitive Science and Algebra Learning*. In: A.H. Schoenfeld (ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Naschrift van de redactie

Bovenstaand artikel is geschreven naar aanleiding van de plenaire lezing die de auteur heeft gehouden op de Jaarvergadering/studiedag van de NVvW op zaterdag 7 november 2009. De in die lezing gebruikte sheets zijn (achter de login) te bekijken via: www.nvww.nl/media/downloads/jv2009/nvww_2009_wat_is_het_probleem.pdf

Over de auteur

Koen Gravemeijer is hoogleraar science en techniekeducatie aan de Technische Universiteit Eindhoven. Daarvoor was hij onder meer verbonden aan het Freudenthal Instituut. Als onderzoeker probeert hij een verbinding te leggen tussen onderwijsonderzoek en onderwijspraktijk.
E-mailadres: koeno.gravemeijer@eso.nl

MEDEDELING / DOCENTEN GEZOCHT VOOR DEELNAME AAN ONDERZOEK

Vraagt u zich ook wel eens af waarom het klasklimaat in de ene klas anders is dan in de andere?

Dit schooljaar starten de Universiteit Utrecht, de Universiteit Leiden en de Technische Universiteit Eindhoven met een onderzoek naar de ontwikkeling van docenten in de klas. In dit onderzoek kijken we specifiek naar de rol van de docent bij het creëren van een goed klasklimaat. We richten ons hierbij op het gedrag, de kennis en de professionele identiteit van docenten. Door deze gegevens te koppelen aan de tevredenheid van docenten over hun beroep, hopen we meer zicht te krijgen op een eventuele burn-out en docentuitval.

We zoeken voor dit onderzoek docenten die lesgeven in het voorgezet en die bereid zijn de komende drie jaar te participeren. Qua tijdsinvestering gaat het om zo'n drie tot acht uur per jaar voor activiteiten als een interview en het invullen van een aantal vragenlijsten. Aan het einde van het traject ontvangt u een rapport met daarin een weergave van het klimaat in uw klassen gedurende deze drie jaar en een certificaat van deelname.

Voor meer informatie en/of opgave zie: <http://edugate.fss.uu.nl/klasklimaat> of stuur e-mailbericht aan één van de onderzoekers:

Luce Claessens: l.c.a.claessens@iclon.leidenuniv.nl,

Heleen Pennings: h.j.m.pennings@uu.nl
Anna van der Want: a.v.d.want@tue.nl

AANKONDIGING / KWG-WINTERSYMPOSIUM 2011

LOGICA! ALS WE STEMMEN, COMMUNICEREN OF LIEGEN. ZATERDAG 8 JANUARI 2011, UTRECHT

Stemmen, communiceren en ook liegen zijn activiteiten die we allemaal recent ondernomen hebben of hebben opgemerkt bij anderen. (U liegt natuurlijk niet, wij ook nooit.) Het komende Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap staat in het teken van Logica en deze drie zeer menselijke activiteiten.

- Jan van Eyck, hoogleraar aan het Utrechts Institute of Linguistics (Universiteit Utrecht), senior researcher bij het Centrum Wiskunde en Informatica (Amsterdam) en auteur van vele publicaties, ook voor de Tweede fase, geeft een voordracht over *Redeneren over Communicatie*.
- Eric Pacuit, universitair medewerker van de Universiteit Tilburg, studeerde in New York en heeft onder meer gewerkt als onderzoeker bij de Universiteit van Amsterdam en Stanford University. Hij werkt in speltheorie, maar doet ook onderzoek aan andere sociale interacties. Zijn voordracht gaat over *The Logic behind Voting (and other Social Interactions)*, een zeer actueel thema!

- Hans van Ditmarsch studeerde wiskunde en filosofie in Utrecht en werkte onder meer bij de Rijksuniversiteit Groningen en de University of Otago (Nieuw Zeeland). Op het ogenblik is hij als universitair medewerker verbonden aan de Universiteit van Sevilla. Hij is (mede-) auteur van vele publicaties, ook voor het voortgezet onderwijs en werkt op het ogenblik aan een publicatie over *De logica van het liegen*. Daarover gaat ook zijn voordracht.

Datum, plaats, bijdrage

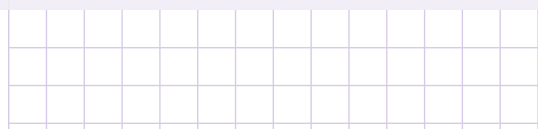
Het symposium wordt gehouden op: **zaterdag 8 januari 2011** in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Damplein 29, 3512 JE Utrecht).

Het programma start om 10:00 uur (koffie vanaf 9:30u) en eindigt ca. 15:00 uur.

U wordt verzocht u van te voren *online* aan te melden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap: www.wiskgenoot.nl (kies dan 'wat doet het KWG' en vervolgens 'congressen en symposia'). Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden. De kosten voor het symposium bedragen € 18,00 voor KWG-leden en € 23,00 voor niet-leden. Deze bijdrage is o.a. voor een lunch en consumpties gedurende de dag.

Inlichtingen

Nadere inlichtingen bij Jenneke Krüger, e-mail: jenneke.kruger@gmail.com of telefoon: 06-16420445.



Het rekenen meester



REKENMEESTERS EN REKENONDERWIJS IN ZESTIENDE-EEUWS EUROPA, OF: HOE BIJZONDER WAS VAN CEULEN

[Danny Beckers]

In 2010 is het 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen overleed. Om verschillende redenen is het mooi om daar aandacht aan te besteden. Van Ceulen was een verwoed rekenaar die stevast 'met lust ende arbeyt' verder rekende waar anderen stopten. Doordat hij niet academisch geschoold was, nam hij niet altijd de meest voor de hand liggende weg; wel bedreef hij wiskunde van internationaal niveau. Er zijn inderdaad verschillende redenen waarom we van mening zijn dat Van Ceulen en zijn werk de moeite waard zijn om een serie artikelen aan te wijden. Zijn werk ademt steeds een werklustige frisheid, zijn wiskunde is vaak mooi en boeiend, en dat maakt het tot heel interessant materiaal om met leerlingen aan te werken. Het kijken naar de problemen waarmee wiskundigen in zijn tijd worstelden, geeft een verdieping aan de schoolwiskunde van nu. Daar komt nog bij dat Van Ceulen interessante, soms zelfs spetterende, relaties met zijn omgeving had en daardoor leren we dan weer iets over de tijd waarin hij leefde.

Al met al dus genoeg reden om u acht nummers lang te trakteren op Van Ceulen-verhalen (hieronder het op een na laatste), geschreven door diverse specialisten.

Rekenmeester

Ludolph van Ceulen kreeg in deze serie meermalen het stempel 'rekenmeester' opgedrukt. Het woord rekenmeester lijkt een mooie en herkenbare aanduiding van het beroep van wiskundeleraar. Wie de bijdrage van Fokko Jan Dijksterhuis in deze serie heeft gelezen (in *Euclides* 85-5), is al uit die droom geholpen: er was in de 16de eeuw geen officieel examen dat moest worden afgelegd, waarna men zich rekenmeester mocht noemen. Evenmin bestond er in die tijd een competentieprofiel voor de wiskundeleraar. Men nam elkaar de maat, en daarbij speelde het sociale netwerk, het voldoen aan sociale conventies en de politiek-religieuze situatie vaak een zeker zo grote rol als de wiskundige competenties. Wie waren eigenlijk deze rekenmeesters en wat hield hun werk in? Dat is een vraag waar niet zo eenvoudig antwoord op valt te geven. Een categorie 'rekenmeester' laat zich nauwelijks duiden en er was veel verschil in wat zij deden. De gebruikelijke en voor de hand liggende manier om toch iets over een dergelijke categorie te kunnen zeggen, is dan maar te kijken naar de directe collegae van Van Ceulen; naar mensen die zich – al dan niet expliciet – ook tot de groep 'rekenmeesters' rekenden.

In deze bijdrage wil ik, aan de hand van het zestiende-eeuwse schoolsysteem, reken- en wiskundeboeken uit die tijd en een paar biografische schetsen, laten zien wat de rekenmeesters bond, maar met name ook waarin zij van elkaar verschilden. Dan valt ook beter te begrijpen hoe bijzonder Van Ceulen was.

Schoolsysteem

Het schoolsysteem zoals wij dat heden ten dage kennen, stamt uit de 19de eeuw. In zestiende-eeuws Europa vond de opleiding van mensen in de praktijk plaats. Die praktijk was in de steden veelal geformaliseerd in gilden, die voor diverse beroepen het monopolie vertegenwoordigden van zowel hun beroep als de opleiding tot dat beroep. Wanneer een bakker bijvoorbeeld zijn zoon wilde opleiden om de zaak van hem over te nemen, dan was daar formeel toestemming van nodig van het bakkersgilde. Het gilde oordeelde ook of de leerling uiteindelijk aan de kwaliteitseisen van het gilde voldeed. Op die manier beheerste het bakkersgilde de markt voor bakkers

binnen een stad. Een bakker kon zich alleen vestigen met toestemming van het bakkersgilde, dat zelf ook nieuwe bakkers opleidde. Dat betekende niet dat er helemaal geen scholen bestonden. Scholen waren in het middeleeuwse Europa altijd verbonden geweest aan de kerk. Het waren klooster-scholen of parochiescholen. Voor de edelen die het land bestuurden was het meestal niet relevant dat ze konden lezen en schrijven. Ze lieten zich eenvoudigweg door een geestelijke bijstaan die deze vaardigheden wel beheerste. Aan de scholen waar die geestelijken werden opgeleid, was het lezen en schrijven van (kerk-)Latijn het belangrijkste onderwerp, naast godsdienstige vorming en kerkzang.

In de late Middeleeuwen deden zich echter een drietal ontwikkelingen voor, die het karakter van de school zouden veranderen. Op de eerste plaats groeide de economische macht van de steden – en de gilden die daarin actief waren. Voor de edelen, die toezicht hielden op de belangen van de kerk en de door hen beheerde school, betekende dat concreet dat ze moesten gaan laveren tussen de belangen van de rijke burgers in de stad en de geestelijkheid. Deze burgers wilden zelf kunnen lezen en schrijven, niet per se in het Latijn, maar als ze zich daarmee konden opwerken in de regentenklasse, dan waren ze daar niet tegen. Vanaf 1200 werden de scholen in de meer welvarende steden zodoende steeds vaker door de stad bekostigd. Dit type stads-school kwam bekend te staan als de grote of Latijnse school. In de loop van de 15de en 16de eeuw splitste de grote school op veel plaatsen in een stads Fransche of Nederduitse school (voor het voorbereidend onderwijs in de landstaal), en een Latijnse school.



Op de tweede plaats begon in diezelfde tijd ook de kerk zich te realiseren dat door scholing de mensen beter aan de enige ware moederkerk konden worden gebonden – niet alleen in de overzeese gebiedsdelen maar ook in Europa. In 1215 werd tijdens een concilie besloten dat iedere parochiekerk ook een school moest houden. Dat besluit werd lang niet overal ook daadwerkelijk uitgevoerd – hier en daar bleef uitvoering zelfs zo lang liggen dat het initiatief ter plaatse werd ingehaald door de reformatie – maar het was wel het begin van meer scholing in West-Europa, ook in de minder rijke steden.

Op de derde plaats groeide de betekenis van de handel en het bankierswezen. Kooplieden hadden hun eigen wensen ten aanzien van het onderwijs. Vanaf de 13de eeuw ontstonden zodoende in Italië ‘bijscholen’ (bij, als aanvulling op de reeds aanwezige stadsscholen). Ze werden abacusscholen (scuole d’abaco) genoemd; later drongen ze ook door in de rest van Europa, met name in Duitsland. Eerst in de late 15de eeuw treffen we ze ook in de Noordelijke Nederlanden; in de handelssteden van de Zuidelijke Nederlanden ontstaan ze al in de 14de eeuw. Aan de abacusscholen werd onderwijs aan toekomstige kooplieden verzorgd. Voor kooplieden werd het in toenemende mate belangrijk dat ze konden lezen en schrijven in de moderne talen, en daarnaast moesten ze natuurlijk kunnen rekenen, en werken met het lokale munten-, maten- en gewichtenstelsel. Latijn was voor hen veelal irrelevant. Het programma van de bijscholen werd afgestemd op hun (veelal plaatsgebonden) behoeften.

Niet alle kinderen gingen naar school. Alleen die kinderen die niet mee hoefden te helpen bij het verdienen van de kost, en van wie de ouders over voldoende geld beschikten, konden deelnemen aan onderwijs. Voor de kinderen die naar school gingen werd een programma afgesproken tussen ouders en leerkracht. Ouders konden ervoor kiezen om hun kind bijvoorbeeld alleen te leren lezen. Schrijven erbij was een stuk duurder. Als je een kind ook nog wilde leren rekenen, dan betaalde je daar nog eens extra voor. Aan de Latijnse scholen lag het programma weliswaar iets meer vast, maar ook daar betaalden ouders het schoolgeld per jaar, en werden de programma’s per stad

en streek aangepast. Aan diverse Latijnse scholen was het in de 16de eeuw bijvoorbeeld mogelijk om ook les te krijgen in het (koopmans)rekenen. In de Noordelijke Nederlanden was het tegen 1600 wel gebruik om kinderen die naar school gingen in elk geval godsdienst, nette gewoonten en gebruiken en lezen aan te bieden. Het begin van de school was doorgaans om 6 uur. Het lesrooster liep dagelijks (dus ook zondag) van 6 tot 8, 9 tot 10, 12 tot 2 en tot slot van 3 of 4 tot 5 met tussentijden voor maaltijden, ontspanning en kerkbezoek.

De leerlingen die aan de Latijnse school hadden geleerd, mochten na afronding van die school eventueel door naar een universiteit. Dit was, vanwege de kosten verbonden aan een studie, maar aan enkelen voorbehouden. De universiteiten waren in de Middeleeuwen ontstaan als kathedraalscholen. Na een jaar waarin de student een algemene studie maakte van de letteren, filosofie en wiskunde, kon de student aan één van de faculteiten zich verdiepen in een vak en daarin afstuderen. De faculteiten waren Theologie, Medicijnen en Rechten. Afgestudeerden van universiteiten vonden een positie aan een hof of kwamen in aanmerking voor een hoog kerkelijk ambt. In de loop van de 15de eeuw werden de universiteiten in toenemende mate door adel en rijke burgers gefinancierd. Met name de faculteiten Rechten en Medicijnen kregen in die tijd meer studenten. Aan veel universiteiten kwam ook meer ruimte voor filosofie en wiskunde, al was de waardering voor die vakken wisselend.

Rekenonderwijs

De inhoud van het rekenonderwijs valt met name af te lezen aan de boeken (lees: boeken, boekjes, en manuscripten, al dan niet gedeeltelijk bewaard gebleven) die ons daarover zijn overgeleverd. De meeste van die boeken zijn afkomstig van rekenmeesters die doceerden aan een bijschool en/of een universiteit. De boeken ten behoeve van de leerlingen van de bijscholen staan grotendeels in een traditie die we de abacustraditie noemen. Daarmee geven we aan dat het rekenboek praktische rekenkunde probeerde aan te leren. Deze boeken beginnen vaak met een aantal manieren om getallen aan te duiden (Romeinse cijfers, op een abacus) en gaan vervolgens over op het noteren van getallen met aan ons bekende

Arabische cijfers en de bijbehorende ‘vier species’: het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. In sommige boeken worden deze ‘vier species’ ook op de abacus uitgelegd. Daarna komt stevast de ‘regel van drieën’ aan bod.

Voorts bevatten alle rekenboeken in de abacustraditie een grote hoeveelheid rekenregels die onder de noemer ‘praktijkrekenen’ werden gevat – vrijwel alle toepassingen van genoemde regel van drieën. De rekenregels zoals die namelijk voor de getallen werden gegeven, werkten in de praktijk meestal niet zo soepel vanwege het feit dat de munten-, maten- en gewichtenstelsels niet tientallig waren onderverdeeld. Zo had men bijvoorbeeld 16 penningen (ook wel 4 oortjes) in een stuiver en 20 stuivers in een gulden; en bij gewichten was bijvoorbeeld 1 last gelijk aan 27 mudden, en 1 mud gelijk aan 4 schepels. De regel van drieën toepassen in een situatie waarin men 12 stuivers en 11 penningen betaalt voor 5 lasten, 23 mudden en 1 schepel van een bepaald goed, waarbij men zich afvraagt hoeveel men nu moet betalen voor 7 lasten, vergt enige flexibiliteit in het rekenwerk. Voor verschillende vakken waren weer andere maten- en gewichtenstelsels en andere types verhoudingsopgaven relevant. De auteurs laten meestal een aantal recepten zien waarmee het omrekenen zo kan worden ingericht dat men de eerder geleerde regel van drieën kan toepassen. Voor kooplieden was het ook belangrijk om verschillende van deze munten-, maten- en gewichtenssystemen in elkaar te kunnen omrekenen, want vele steden en streken hanteerden hun eigen stelsels: het Amsterdamse mud en de Leidse schepel waren bijvoorbeeld niet op elkaar afgestemd. Omrekentabellen maakten dus vaak deel uit van de reken-traktaten.

Daarna werden door sommige auteurs alle hoofdstukken nogmaals herhaald, nadat ook de breuken waren behandeld. Door te rekenen met breuken kon rekenwerk vaak nog worden verkort. Breuken werden echter niet door elke auteur behandeld. Een enkele auteur behandelde eerst de breuken en waagde zich daarna pas aan het rekenen in de praktijk.

Reken-traktaten voor de universiteit en de Latijnse scholen gingen niet uit van het rekenen op een abacus. Ze keken daarentegen veel meer naar de traditie die was ingegeven door Anicius Boëthius



figuur 1 Sir Henry Billingsley, Elementen van Euclides in de editie van 1570. Onderaan afbeeldingen van Geometria, Arithmetica, Astronomia en Musica, de vier vakken in het quadrivium die tot de zeven vrije kunsten behoorden.

(480-524); in *De institutione arithmetica libri duo*. Daarin lag de nadruk op het rekenen met de vier bewerkingen, zonder aandacht te besteden aan het rekenen in de (koopmans)praktijk. Het rekenen maakte daar deel uit van de 'Artes liberales', de zeven vrije kunsten die elk vrij man geacht werd te beheersen. Universitaire reken-traktaten besteedden vooral aandacht aan relaties tussen getallen, getallenreeksen, of bijvoorbeeld het uitrekenen van de paasdatum. Vrijwel altijd wordt er een definitie van het begrip getal gegeven en wordt er aandacht besteed aan de vraag of 0 nu wel of geen getal is. Een ander populair onderwerp was Bijbelse tijdrekenkunde: aan de hand van Bijbelteksten uitrekenen wanneer de aarde was geschapen, of wanneer Adam en Eva uit het paradijs waren verjaagd.

En meer...

Maar naast het onderwijs in rekenen gingen veel auteurs verder. Worteltrekken was een geliefd onderwerp in veel van de rekenboeken. Zowel de tweede- als de derdemachts worteltrekking was eenvoudig in regelvorm te gieten, en figureert zodoende geregeld in rekenboeken – vaak zonder zinvolle toepassing, tenzij de auteur

ook aandacht besteedde aan het berekenen van middenevenredigen of aan meetkunde. Het rekenwerk dat Van Ceulen nodig had om zijn decimalen van pi uit te rekenen, had hij dus uit de lessen van vrijwel iedere rekenmeester kunnen opdoen (zie de bijdrage van Jaap Top in deze serie, in *Euclides* 85-7).

Naast rekenen had Van Ceulen natuurlijk ook enige kennis nodig van meetkunde. Die was een stuk zeldzamer onder rekenmeesters. Maar sommige rekenmeesters behandelden een beetje meetkunde. De Venetiaanse rekenmeester Nicolo Tartaglia (1500-1557), die toch vooral kinderen van kooplieden onderwees, publiceerde zelfs een vertaling van *De Elementen* van Euclides. Eigenlijk behoorde dat boek tot de universitaire leerstof, maar door dit soort boeken kon Tartaglia zich in universitaire kringen vertonen, en genoot hij aanzien onder rekenmeesters en rijke kooplieden, aan wiens kinderen hij privéles verzorgde. Met name voor de navigatie, landmeetkunde en voor de wijnroeiër was enige praktische meetkundekennis handig, en diverse regels voor deze beroepsgroepen komen soms aan bod.

Sommige auteurs gingen nog een stapje verder en introduceerden de lezer ook in de algebra. Meestal ging dat niet verder dan het oplossen van lineaire (stelsels) vergelijkingen. Hoewel het rekenen met de regel van drieën kon worden teruggevoerd op het oplossen van eenvoudige vergelijkingen, werd vrijwel door niemand de regel van drieën als vergelijking geïntroduceerd. Auteurs die algebra behandelden lieten vaak weer wel zien dat sommige opgaven zowel met de regel van drieën als met behulp van algebra konden worden opgelost. Wat wel veel wordt behandeld, zijn meer ludieke opgaven. Vaak gaan deze terug op eeuwenoude voorbeelden, zoals die over een drinkgelag waarbij 180 mensen 156 guldens verdrinken. De mannen moeten ieder 24 stuivers, de vrouwen ieder 15 stuivers, en de kinderen ieder 12 stuivers bijdragen om de rekening te voldoen. De vraag is dan hoeveel mannen, vrouwen en kinderen aan het drinkgelag hebben deelgenomen. Naast Tartaglia (bekend van de oplossing van de derdegraads vergelijking) was met name de Duitse rekenmeester Adam Ries (1492/93-1559) bekend vanwege zijn algebraïsche werk. In Nederland was algebra ook populair. Naast de Franstalige algebra

van Simon Stevin (1548-1620) uit 1585 waren er ook een aantal Nederlandstalige traktaten. De oudst bekende was van Gieles van den Hoecke uit 1537.

Daarnaast schreven sommige auteurs over onderwerpen die we tegenwoordig helemaal niet meer tot wiskunde zouden rekenen, zoals astrologie en getallenmystiek. Dit mag voor ons vreemd lijken, maar Johannes Kepler (1571-1630), toch niet de minste, publiceerde over astrologie toen hij aan de universiteit van Graz werkte. Met zijn astrologische en getallenmystieke werken vond hij warme belangstelling bij zijn latere broodheer, de hertog Albrecht von Wallenstein (1583-1634). Tot in de 17de eeuw werd dit soort werk als wiskunde serieus genomen.



figuur 2 God, uitgebeeld met passer, schept 'naar maat en getal' de aarde. Frontispiece van een Bijbel, codex Vindobonensis 2554, ca. 1250 (collectie Österreichische Nationalbibliothek, Wenen).

De idee achter de astrologie en de getallenmystiek was dat de Schepping toch in eerste instantie rationeel was: God had de wereld naar maat en getal ingericht. Het vinden van de Goddelijke bedoeling was dus mogelijk door nauwkeurige observatie en duiding – en een beetje Goddelijke inspiratie. De Bijbelse tijdrekenkunde kan men in datzelfde licht zien. Van Ceulen's obsessie voor pi wellicht ook. De cirkel en bol waren volgens velen de meest perfecte (lees: Goddelijke)

meetkundige figuren: vandaar dat men ook overtuigd was van het bestaan van cirkelvormige planeetbanen, bolvormige planeten, et cetera. Waar kan men zijn tijd dan beter aan besteden, dan aan het rekenen aan een cirkel!

Zoals gezegd: met dit soort onderwerpen kon een rekenmeester vooral in adellijke kringen succes boeken. Hiermee raken we aan een punt dat voor veel rekenmeesters ook een onderwerp van aandacht kon vormen, maar waarover veel minder werd gepubliceerd. Voor veel adellijke legerleiders was het nuttig om wiskundigen oorlogstuig te laten ontwerpen. Denk bijvoorbeeld aan een ontwerper als Leonardo da Vinci (1452-1519), die voor zijn Milanese broodheren werkte alvorens in dienst te komen bij Frans I (1494-1547). Zowel voor de bouw van versterkingen als voor het ontwerpen van nieuwe wapens waren wiskundigen als Da Vinci perfect toegerust.

Ook op meer huishoudelijk vlak was het voor de regenten praktisch om goede rekenmeesters ter beschikking te hebben. Dit in verband met de belastingheffing. Naast het 'gewone' rekenwerk dat daarbij kwam kijken, was het bepalen van de inhoud van wijnvaten en het bepalen van de oppervlakte van een grondgebied van belang. De wijnvaten waren interessant omdat er belasting werd geheven op de consumptie van alcoholische dranken – de inhoud bepalen van een liggend wijnvat, gegeven de hoogte van de vloeistofspiegel, is een lastig probleem. De landmeters hadden zowel bij de vestingbouw, bij gebiedsmetingen als tijdens de oorlogsvoering een nuttige functie. Geen wonder dus dat de opleiding Duytsche mathematicque (zie de bijdrage van Jantien Dopper in deze serie, in *Euclides* 85-6) door Maurits aan de Leidse universiteit werd gevestigd.

DE rekenmeester?

Wat de rekenmeesters in elk geval bond was dat zij het rekenen meester waren. Of via het penningrekenen, of via rekentraktaten, hadden zij kennis gemaakt met de arithmetica. In hoeverre zij verder dan dat in de wiskunde interesse toonden, was een geheel andere kwestie. Hoe zij hun rekenen of wiskunde vorm wilden geven ook. De rekenmeesters tegen wie Van Ceulen tekeer gaat, Goudaen en Van der Eycke, zijn op een ander niveau bezig dan Van Ceulen zelf

(zie de bijdrage van Gijs Langenkamp en Wiggert Loonstra in deze serie, in *Euclides* 85-4).

De rekenmeester of cijfermeester hield veelal school. In de tweede helft van de 16de eeuw werd dat echter een zwaar beroep: veel school- en rekenmeesters uit de Zuidelijke Nederlanden kwamen naar het Noorden en pakten daar hun beroep op. Zo bijvoorbeeld Martin van den Dijkke, 'cijfermeester en openbaer notarius' binnen Antwerpen; hij schreef ook over het wijnroeien. Als notaris of wijnroeier kon hij in de Noordelijke gewesten echter niet zo maar aan het werk. Dan moest men binnen een gilde worden toegelaten of door de staten worden geadmitteerd. De schoolmeesters waren niet georganiseerd. Van Dijkke vestigde zich in de jaren 1570 als rekenmeester in de Noordelijke Nederlanden, en was daar één van velen. Hij had dus met heftige concurrentie te maken.

Gegeven die situatie was het natuurlijk leuk als je iets extra te bieden had: les in meetkunde, algebra of het bouwen van nuttige machines, het trekken van horoscopen of andere mystieke zaken kon inkomen en – zeker zo belangrijk – een hofpositie of belangrijke contacten genereren. Daarnaast waren er veel rekenmeesters die tevens koster waren, of voorzanger, of zich echt als schoolmeester gingen profileren, en die naar gelang hun publiek dat vroeg tevens lezen en schrijven in het Frans, Duits of Nederlands aanboden. De keuze voor het behandelen of doceren van bepaalde onderwerpen zal dus hebben afgehangen van de contacten die een rekenmeester kon leggen en van zijn publiek. De meeste rekenmeesters hadden geen contacten in hoge kringen en kwamen dus niet in aanmerking voor posities aan een universiteit of aan het hof. Maar er waren uitzonderingen. Bijvoorbeeld Theodorus Graminaeus (ca. 1540-1596) werd in 1566 relatief snel na zijn studie te Keulen aan dezelfde universiteit aangesteld als hoogleraar wiskunde. In 1582 gaf hij die positie op en legde hij zich toe op een carrière als jurist aan het hof van het hertogdom Kleef; zijn licentiaat Rechten dateerde van 1575. Naast wiskundeboeken publiceerde hij ook astrologische traktaten. Vermoedelijk had hij daarmee meer succes aan het hof.

Een andere uitzondering was Michael Stifel (1487-1567). Hij had naast zijn rekenonderwijs hoofdzakelijk inkomsten uit zijn werk als (Luthers) predikant. In tegenstelling tot Van Ceulen kreeg hij op latere leeftijd wel de mogelijkheid om te studeren. Vanaf 1559 gaf hij als hoogleraar wiskunde les aan de universiteit van Jena. Zijn inspiratie ging naast algebra en rekenonderwijs ook in de richting van getallemystiek. Zo deed hij door middel van rekenkundige beschouwingen van Bijbelteksten een voorspelling over het einde van de wereld.

Het geheel zo overziend kan men zich afvragen of je wel van DE rekenmeester kunt spreken in de 16de eeuw. Rekenmeesters gaven les aan een bijschool, of aan een hofschool; een enkeling kwam terecht aan een universiteit. Hun afkomst varieerde sterk: er waren erbij die een universitaire opleiding hadden genoten, maar er waren ook rekenmeesters die het vak van hun vader hadden geleerd. Sommigen, zoals Da Vinci en 'onze' Stevin, gaven nauwelijks les. Als ze doceerden konden de onderwerpen waarin ze les gaven, variëren van praktische rekenkunde ten behoeve van kooplieden, eventueel uitgebreid met een beetje algebra of meetkunde, tot tijdrekening, landmeetkunde, navigatie, fortificatie, en zelfs sterrenkunde – inclusief zaken die daar tegenwoordig helemaal niet meer toe worden gerekend, zoals astrologie. Simon Stevin, die vanwege zijn wiskundelessen aan Maurits en zijn publicaties op het gebied van reken- en wiskunde zeker tot de categorie 'rekenmeesters' kan worden gerekend, noemde zichzelf liever 'vernufteling'. Hij ging de associatie met de term rekenmeester dus uit de weg. Zijn werk voor Maurits bestond, naast het bieden van wiskundelessen in de moderne zin van het woord (dus geen astrologie!), ook uit modernisering van het leger, zowel in de vestingbouw als de organisatie.

En dat brengt ons terug op de vraag wat nu eigenlijk de rekenmeesters waren. De groep was van zeer divers pluimage. Aan de ene kant van het spectrum bevond zich de middelmatige bijschoolhouder die een rekentraktaat schreef met daarin een omrekentabel ten behoeve van het omrekenen van de lokale maten en



figuur 3 Vestingwerken van Zwolle. Uitleg van vestingwerken was bij uitstek werk waaraan wiskundigen te pas kwamen. Uit: de stedenatlas van Blaue (Universiteitsbibliotheek Nijmegen).

kundige vanzelfsprekendheden; van logisch samengebonden (Goddelijke?) regels tot constructie van (of rekenen aan) oorlogstuig, tot getallenmystiek.

Van Ceulen

Terug naar Ludolph van Ceulen. Hoe bijzonder was Van Ceulen in het zestiende-eeuwse Nederland? Op zich was de combinatie van schoolhouden en wiskunde volkomen normaal. Van Ceulen was getalenteerd in de wiskunde, dus als rekenmeester kwam hij goed uit de verf. Speciaal aan Van Ceulen is zijn schermerschool. Het schermen was uiteraard een belangrijke praktische oefening voor de pages aan het hof. Vrijwel alle rekenmeesters hadden neveninkomsten. In de Nederlanden was een schermerschool in zoverre uitzonderlijk, dat posities binnen de adellijke cultuur dun gezaaid waren. Op zich was het al bijzonder, en getuigt het van zijn connecties en goede manieren, dat Van Ceulen in hoge kringen verkeerde.

Op zich was dat niet héél vreemd, zo hebben we gezien, want veel wiskundigen waren tevens actief in andere zaken die men aan het hof wist te waarderen: het ontwikkelen van nieuwe militaire toestellen en technieken of het voorspellen van de toekomst, hetzij door middel van getallen, hetzij door middel van astrologie. Dat brengt ons op een tweede punt dat Van Ceulen bijzonder maakt: voor zover bekend heeft hij zich hiermee niet ingelaten. Dat betekent dat Van Ceulen dus ook in Europees opzicht een uitzonderlijke

wiskundige was. Hij werd aan het hof gewaardeerd om zijn wiskundige en didactische kwaliteiten.

In Europees opzicht is Van Ceulen bovendien uitzonderlijk omdat hij dit alles bereikt heeft zonder enige achtergrond aan het hof. We zouden hem bijvoorbeeld kunnen vergelijken met een Fransman als François Viète (1540-1603). Maar Viète was afgestudeerd in de rechten. Hij had zijn connecties aan het hof weliswaar ook niet cadeau gekregen, maar hij had daarvoor geen gebruik hoeven maken van wiskunde. Hij kon zijn algebraïsche exercities juist als jurist verkopen. Van Ceulen zat in dat opzicht aan een bijzonder 'hof'. Een 'hof' namelijk, dat belangstelling had voor de exacte kant van de wiskunde, die juist op dat moment volop in ontwikkeling was. Daar lagen vast utilitaire motieven mede aan ten grondslag, maar het zou me niets verbazen wanneer top-onderwijzers als Stevin en Van Ceulen daaraan hun steentje hebben bijgedragen.

Literatuur

- Nelleke Bakker, Jan Noordman, Marjoke Rietveld-van Wingerden (2006): *Vijf eeuwen opvoeden in Nederland*. Assen: Van Gorcum.
- Willem Bartjens (1604): *De Cijfferinghe*. Editie: Danny Beckers en Marjolein Kool (2003). Hilversum: Uitgeverij Verloren.
- P. Bockstaele (1984): *Het oudste bekende, gedrukte Nederlandse meetkundeboek: Die waerachtigen const der Geometriën, 1513*. In: *Tijdschrift voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Natuurwetenschappen, Wiskunde en Techniek*, nr. 7; pp. 79-92.
- Giovanna Cifoletti (1995): *La question de l'algèbre / Mathématiques et rhétorique des hommes de droit dans la France du XVI^e siècle*. In: *Annales HSS* (1995); pp. 1385-1416.
- Alfred W. Crosby (1997): *The measure of reality / Quantification and Western society, 1250-1600*. Cambridge: CUP.
- Marjolein Kool (1999): "Die conste vanden getale": een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw. Hilversum: Uitgeverij Verloren.
- R.E.V. Stuïpe, C. Vellekoop (red.) (1995): *Scholing in de middeleeuwen*. Hilversum: Uitgeverij Verloren.
- Rienk Vermij (2005): *Kleine geschiedenis van de wetenschap*. Amsterdam: Uitgeverij Nieuwezijds.
- Rienk Vermij (2010): *Theodorus Graminaeus. Een wiskundige in dienst van de contrareformatie*. In: *Studium* 3, pp. 1-17.

Website www.ludolphvanceulen.nl

Over de auteur

Danny Beckers is als universitair docent wetenschapsgeschiedenis verbonden aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Hij was van 1994 tot 2006 als docent wiskunde actief. Sinds 2005 is hij directeur-eigenaar van Assertief (onderdeel van PGBeckers; www.pgbeckers.nl), een particulier expertisecentrum voor de begeleiding van leerlingen met een autismespectrumstoornis in het volgen van regulier onderwijs en het vinden c.q. behouden van een baan. E-mailadres: d.beckers@few.vu.nl

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pakt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

Een stem uit het verleden

Een tijdje geleden hoorde ik dat Kees van Baalen was overleden. Hij is nu misschien niet meer zo bekend, maar in zijn tijd was hij een man die de aandacht trok en wiens ideeën de moeite waard werden gevonden. In het bekende boek *Ik was wiskundeleraar* van Fred Goffree staat een uitgebreid interview met hem, naast gesprekken met coryfeeën als Johan Wansink, Piet Vredenduin en Pierre van Hiele. In de jaren zeventig is er een heuse tv-documentaire over hem gemaakt, die vorig jaar op het digitale Geschiedenis-kanaal nog een keer is uitgezonden. Hij schreef een aantal artikelen in *Euclides* die nog altijd lezenswaardig zijn. Wie was hij en wat waren zijn ideeën?

Kritiese leraren

Als je "Kees van Baalen" op Google intikt, kom je tot je verrassing terecht op de site van het Internationale Instituut voor Sociale Geschiedenis in Amsterdam, waar het archief van de Landelijke Werkgroep Kritiese Leraren wordt bewaard. Die 'kritiese leraren' waren de hemelbestormers uit de jaren zeventig die het onderwijs, en daarmee de hele maatschappij, grondig wilden veranderen. Het rode boekje voor scholieren (op Maoïstische grondslag!) en *Nooit met je rug naar de klas* waren boekjes die je toen gelezen moest hebben – alleen al omdat je leerlingen vroegen wat je daar nou van vond. Beter dan ik het zou kunnen, worden hun ideeën verwoord in hun eigen publicaties. **Figuur 1** bevat een handzame samenvatting van hun opvattingen over onderwijs.

Het verraste me dat Kees van Baalen bij die club hoorde. Ik had van hem het beeld van een zachtmoedige en twijfelende man, helemaal niet zo'n agressieve scherpslijper volgens het cliché van de 'kritiese leraar'. Dat blijkt overigens ook wel te kloppen, want het archief bevat een stuk waaruit

De Landelijke Werkgroep Kritiese Leraren heeft geen bestuur en geen leden. Hij is een actiegroep die openstaat voor alle docenten van kleuteronderwijs tot en met universitair onderwijs. We geloven niet in het overleg met het departement, zoals dat nu werkt, en al evenmin in de bestaande conservatieve lerarenorganisaties. Evenals vele studenten en andere progressieve groeperingen vinden we de bestaande structuren star, autoritair en niet gericht op de eigenlijke ontplooiing van de mens. We streven naar een open school die er als volgt uitziet:

– *Binnen de klas* heerst een samenwerkingssfeer. Stof en didaktiek staan voortdurend ter discussie; maatschappij en maatschappijkritiek komen voortdurend ter sprake.

– *Binnen de school* wordt het beleid bepaald door een schoolraad. Leerlingen, leraren, personeel en ouders beslissen samen over alle zaken die de school betreffen.

– Bij die zaken zijn ook benoemings- en ontslagkwesties. Beoordeeld moeten alleen worden de pedagogische en didaktische kwaliteiten van een leraar. Dat moet gebeuren door middel van uitvoerige gesprekken met zo'n leraar over zijn doelstellingen, en het bijwonen van meerdere van zijn lessen om te zien hoe hij zijn doelstellingen in de praktijk brengt. Vooral vakgenoten van de leraar en leerlingen die les van hem hebben, krijgen bij de beoordeling een zware stem. Ook zou het nuttig kunnen zijn om vakdidaktiek of pedagogie van buiten de school in te schakelen.

– *Binnen het onderwijssysteem* eisen we: negenjarig basisonderwijs; het toegankelijk maken van het onderwijs voor iedereen; geheel of gedeeltelijk projektonderwijs; afschaffing van eindexamen, zittenblijven en cijfersysteem; meer gammavakken in het studiepakket; meer creatieve vorming.

figuur 1 Een fragment uit 'Nooit met je rug naar de klas' van Helge Bonset. Je zou niet direct verwachten dat de auteur zijn onderwijsloopbaan beëindigde als medewerker van de SLO.

blijkt dat de twijfels van Kees bij anderen, die altijd alles zeker wisten, de nodige ergernis opriepen. Toch was hij behoorlijk actief binnen de groep, al was hij als wiskundeleraar wel een buitenbeentje. De uitgever J. Muusses, die het tijdschrift *Vernieuwing* uitbracht, dat als orgaan van de kritiese leraren fungeerde, beklagde zich in een brief aan Van Baalen over de geringe weerklank van hun werk bij de wiskundeleraren.

Groeps- en projectwerk

Kees van Baalen was een civiel ingenieur die wiskundeleraar was geworden. Nadat hij eerst een aantal jaren, zoals hij het zelf formuleert, 'gewoon had lesgegeven', begon hij aan de zin daarvan steeds meer te twijfelen. Hij vond dat de meeste leerlingen

niets hadden aan het aanleren van vaardigheden die ze niet begrepen. Hij had bezwaren tegen het 'orde houden', al blijkt uit notities in het archief dat hij ook niet goed wist hoe het dan wel moest. Hij kreeg bovendien conflicten op het Amsterdams Montessori Lyceum waar hij zich verzette tegen verdere individualisering en pleitte voor een vergaande vorm van groepswork, waarbij de leerlingen gezamenlijk verantwoordelijk zouden zijn voor het resultaat. Het werd hem duidelijk dat hij zijn ideeën niet makkelijk binnen het bestaande onderwijs zou kunnen realiseren. Bovendien vreesde hij dat zijn leerlingen van zijn pogingen uiteindelijk de dupe zouden worden. Hij ging daarom lesgeven op een school waar wiskunde geen eindexamen-vak was, waar geen voorgeschreven leerplan

gevolgd hoefde te worden en waar hij dus het onderwijs naar eigen inzichten kon inrichten. Dat laatste is trouwens natuurlijk verkeerd geformuleerd; de kritiese leraren vonden immers dat onderwijs vooral volgens de wensen en inzichten van de leerlingen zelf moest worden vorm gegeven – als dat maar tot maatschappijkritiek leidde, natuurlijk.

Voor Kees van Baalen betekende dat als uitgangspunt: ‘Laat kinderen gewoon doen wat ze uit zichzelf doen.’ Daar kon ook hij natuurlijk niet mee volstaan. Er moest onvermijdelijk toch een initiatief van de leraar zijn waardoor er situaties ontstonden waarbinnen zoiets als wiskunde geleerd kon worden; al was dat dan wel een heel ander soort wiskunde dan toen op school gangbaar was. Van Baalen ging dus projecten organiseren en schreef daarover in *Euclides*. Een bekend artikel van zijn hand is *De zwaartekracht te Ransdorp*, over val-experimenten vanaf een kerktoeren, en zijn pogingen om het groepje leerlingen dat meedeed, zover te krijgen dat ze enig idee kregen over de versnelling van de zwaartekracht. Dat is een onderwerp dat wiskundeleraren nog wel vertrouwd zal voorkomen, maar het project om leerlingen met een stopwatch de straat op te sturen om te meten na hoeveel seconden mensen de blik afwenden als ze strak worden aangekeken, komt ook nu nog lichtelijk verbijsterend over. De **figuren 2 en 3** geven voorbeelden van zijn projecten.

Van Baalen en andere vernieuwing

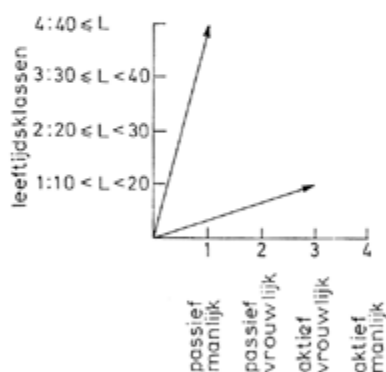
Van Baalen was niet de enige in die tijd die met projecten begon. Ook bij het IOWO, de voorloper van het Freudenthal Instituut (FIsm), werd met projecten gewerkt, vooral voor het basisonderwijs. Kees van Baalen kende die projecten en had er waardering voor. Maar er is een cruciaal verschil. Bij het IOWO stond uiteindelijk het leren van wiskunde voorop, deels andere wiskunde dan vroeger, en zeker op een heel andere manier, maar het ging uiteindelijk om inhoudelijke wiskunde. Kees van Baalen ging het niet om het leren van een wel omschreven stukje wiskunde. Het doel van een project was voor hem ‘leerlingen een met ogen, handen en gevoel beleefde situatie te laten structureren’, om hen uiteindelijk te ‘laten beleven dat wiskunde waardevol kan zijn bij het begrijpen van ingewikkelde situaties’. Hij putte er vol-

Het aankijktaboe

Een vierde klas (IVO) koos het probleem dat mensen elkaar niet rustig kunnen aankijken. In een klasgesprek werd dit beperkt tot de vraag ‘hoe lang verdraagt iemand een blik in de ogen en waar hangt dat vanaf?’

In de volgende les gingen de leerlingen met stopwatches onzichtbaar in de hand de straat op en keken mensen aan. Zij noteerden: tijd, man of vrouw, en de geschatte leeftijd.

Om deze gegevens een antwoord te ontlokken moest een model gemaakt worden waarin plaats was voor de tijd, de leeftijd en het spelen van een actieve of een passieve rol. Als actief werd beschouwd iemand die het ogenkontakt opende. Er waren nu vier rollen, die werden geordend naar opklimmende spanning in hun blik (naar smaak van de leerlingen): 1 – passief manlijk, 2 – passief vrouwlijk, 3 – actief vrouwlijk, 4 – actief manlijk. In de relatie van deze vier rollen naar de leeftijden hoorde dan bij iedere persoon een vektor.



Dit zijn bijv. de vektoren als een schoolmeisje een oudere keer aankijkt.

Als ‘spanningsveld’ tussen twee personen werd gekozen het parallellogram opgespannen door hun vektoren (hoe groter rolverschil én hoe groter leeftijdsverschil hoe groter spanningsveld).

Vervolgens werd afgeleid dat de oppervlakte van dat parallellogram even groot was als de determinant van de twee vektoren. Daarvoor werd eerst nagegaan dat de som van de opgespannen oppervlakten tussen vektoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ en tussen $\vec{t}$ en $\vec{q}$ gelijk was aan de oppervlakte opgespannen tussen $\vec{p} + \vec{t}$ en $\vec{q}$.

figuur 2 Een stukje uit de beschrijving van het project rond het ‘aankijktaboe’. Opvallend is de ‘New Math’ invloed, die blijkt uit het gebruik van vectoren en determinanten. Net als in figuur 3 combineert Van Baalen verschillende soorten schalen binnen één grafiek en gaat daar onbekommerd mee rekenen.

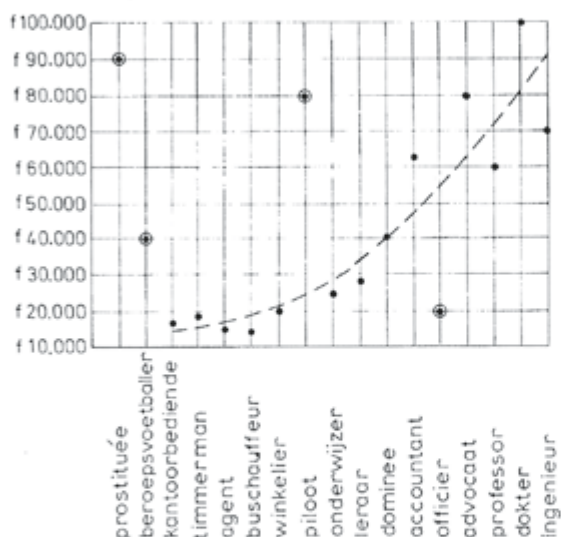
doening uit als dat hem dat bij sommige leerlingen lukte, zeker bij leerlingen die anders niets van wiskunde wilden weten. Als andere leerlingen daar niets in zagen en niet mee wilden doen, dan maar niet, want ‘iets onder dwang leren is nog schadelijker dan helemaal niets leren’.

In een discussie met Bram Lagerwerf over de niveautheorie van Van Hiele maakte hij bezwaar tegen de terminologie van nulde niveau – eerste niveau, waarbij een hoger niveau voor een hogere vorm van abstractie

staat. Dat suggereerde dat meer abstractie ‘beter en waardevoller’ zou zijn, en voor Van Baalen was, óók binnen de beperkte wereld van het wiskunde-onderwijs, het ‘nulde nivo’, dat van het dagelijks leven, het belangrijkste. Daarmee verwierp hij eigenlijk een van de spelregels van het wiskundeonderwijs, zoals dat door de meesten gespeeld wordt. Hij bleef een buitenstaander en zijn invloed bleef onvermijdelijk beperkt.

In de eerste brainstorm hadden wij ons ook bezig gehouden met de salarissen die gemiddeld bij de verschillende beroepen hoorden. Uit de schattingen in de klas hadden wij het gemiddelde genomen en achter de beroepen geschreven.

In de grafiek van de afbeelding van de salarissen op de maatschappelijke ladder verscheen nu de volgende punten-wolk:



Het viel op dat de meeste punten ergens in de buurt van een vloeiende kromme lagen, maar dat er vier punten merkwaardig uitsprongen: die van de prostitué, de piloot, de beroepsvoetballer en de officier. De eerste drie waren door de leerlingen meer salaris toegedacht (en wie weet krijgen ze dat ook?) dan overeen kwam met hun plaats in de beroepen-hiërarchie. De officier kreeg minder.

Toen deed een vermoeden mij grijpen naar logaritmisch papier en de leerlingen vragen de punten daar nog eens op uit te zetten. Tot hun en ook mijn verbazing bleken de punten nu om een rechte heen gestrooid te liggen.

figuur 3 Uit een project over salarissen en beroepen. Voor zover uit de beschrijving is op te maken deed Van Baalen niet veel met de mogelijkheden voor een geduchte maatschappijkritiek die hier lagen!

De vragen, niet de antwoorden

Je kunt Kees van Baalen beschouwen als een typische representant van de jaren zeventig, toen de maatschappij grondig op zijn kop werd gezet en alles mogelijk leek. Die revolutie wordt vaak verklaard uit de toegenomen welvaart, en dat doet Van Baalen zelf eigenlijk ook. Terugkijkend, in het interview met Fred Goffree, stelde hij dat het in de jaren vijftig, de tijd van de wederopbouw, misschien nog wel aanvaardbaar was om de nadruk in het wiskunde-onderwijs te leggen op het aanleren van vaardigheden, maar dat dat vanaf het eind van de jaren zestig, met de toegenomen welvaart, niet meer nodig was. 'We zouden ons nu de luxe van een andere aanpak wél

moeten permitteren', zegt hij in dat gesprek. Die andere aanpak is er ook gekomen – al is die heel wat minder radicaal gebleven dan Kees van Baalen voor ogen stond. Toch, het is u bekend, is ook die andere aanpak al weer heftig omstreden. Over het ons kunnen permitteren van luxe in het onderwijs heeft niemand het meer en er wordt angstvallig naar internationale ranglijstjes gekeken om te zien of we niet achterop raken. Stel je voor dat ze in Taiwan sneller zouden kunnen vermenigvuldigen dan hier! Toch stelde Kees van Baalen de juiste vragen: Waarvoor dient eigenlijk al dat wiskundeonderwijs? Wat hebben mijn leerlingen daaraan? Wat betekent dat voor hen persoonlijk en voor de maatschappij?

Hij had de moed de consequenties van zijn opvattingen te aanvaarden en al vinden we nu zijn antwoorden niet altijd even geslaagd; u dacht toch niet dat de antwoorden van nu dat altijd wél zijn? En omdat het goed is dat die vragen regelmatig gesteld worden, zeker in tijden waarin alle nadruk weer op vaardigheden komt te liggen, verdient ook Kees van Baalen een plaats in Het Geheugen van ons wiskundeonderwijs.

Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO).

E-mailadres: h.j.smid@ipact.nl

VERSCHENEN / LEVENSVZERKERINGSWISKUNDE EN PENSIOENCALCULATIE



Auteurs: D.P.G. van As, J. Klouwen, L.J. van de Leur
Uitgever: Sdu Uitgevers, Den Haag (2e druk, 2010)
ISBN: 978 90 39521908
Prijs: € 25,50 (208 pagina's)

Uit het voorwoord – Op allerlei gebieden komt men tegenwoordig in aanraking met 'levensverzekeringen'. Daarbij kunnen vele vragen rijzen, zoals:

- Wat is precies een koopsompolis?
- Wat betekent de voorwaarde 'restitutie van de betaalde premies bij overlijden' bij het afsluiten van bijvoorbeeld een persoonlijke lening?
- Hoeveel kost het 'vrijmaken' van een hypotheek met een daaraan gekoppelde levensverzekering?
- Moeten pensioenen op een andere manier worden vastgesteld, bijvoorbeeld aan de hand van begrippen als 'eindloonregeling' of 'middelloonregeling'?

Deze vragen, en dan vooral de daarbij betrokken berekeningen, zijn te beantwoorden met elementaire kennis van levensverzekeringswiskunde, ook wel actuariële wiskunde genaamd.

Dit boek is een inleiding in de techniek van de levensverzekeringswiskunde en de toepassing daarvan in de pensioencalculatie. Het eerste doel van *Levensverzekeringswiskunde en pensioencalculatie* is de lezer bekend te maken met een aantal veelvoorkomende soorten levensverzekeringen en daarmee samenhangende elementaire begrippen. Het tweede doel is de introductie van pensioenen, zowel op individuele als op collectieve basis. De auteurs hebben getracht de theorie zo te beschrijven dat zij zelfstandig kan worden bestudeerd. Samen met de (uitgewerkte) voorbeelden en de (deels uitgewerkte) opgaven vormt het boek een elementaire cursus levensverzekeringstechniek. Dat maakt het geschikt als studieboek voor verschillende financiële en fiscale opleidingen op hbo- en universitair niveau en voor de accountancy-opleidingen van NIVRA.

MEESTERLIJK ONDERWIJS

BEVOEGDHEID TE GRAAD HALEN?

Bij Hogeschool Utrecht kun je doorstuderen voor een Master of Education voor de vakken aardrijkskunde, biologie, Duits, Engels, Frans, natuurkunde, Nederlands, Spaans en wiskunde. Kom naar een van de open dagen of kijk op www.ca.hu.nl > masters voor meer informatie.

ER VALT NOG GENOEG TE LEREN

INSTITUUT
ARCHIMEDES
HOGESCHOOL
UTRECHT



Haak aan

Ideaal voor elektronisch
schoolbord, thuisgebruik
en voor maatwerk
op papier.
Gratis praktische
ondersteuning
voor elke docent
en leerling:

- Theorie
- Uitleg
- Voorbeelden
- Applets
- AlgebraKIT
- GeoEnZo
- Rekenen



Math4all Gratis! maar niet goedkoop



Op weg naar IMO2011



IMO2006 - OPGAVE 4

[Julian Lyczak]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zetten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

Begin juli 2006 stonden vijf anderen en ik klaar op Utrecht Centraal om met de trein af te reizen naar Ljubljana, de hoofdstad van Slovenië, waar wij Nederland zouden vertegenwoordigen tijdens de Internationale Wiskunde Olympiade. Ongeveer een maand eerder waren wij als besten uit de bus gekomen na een spannende eindtoets die volgde op een jaar lang hard trainen. We hadden al veel gehoord over vorige IMO's en ik keek dan ook echt uit naar het ontmoeten van al die leeftijdsgenoten met dezelfde interesse uit al die verschillende landen en culturen, alle leuke, spontane en onverwachte dingen die we zouden meemaken en natuurlijk de twee toetsdagen met ieder drie opgaven. En zo vertrokken we met onze verwachtingen en begeleider naar Slovenië. Hoewel alleen al het meemaken van een IMO een heel bijzondere ervaring is en ik alleen al daarover een artikel vol zou kunnen schrijven, wil ik toch in dit artikel mij meer op het wiskundige aspect richten en de eerste opgave van de tweede dag behandelen.

De opgave

Bepaal alle paren gehele getallen (x, y) zodanig dat:

$$(1) \dots 1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Uit de opgave kunnen we gelijk wat kleine dingetjes concluderen:

- Als (x, y) een oplossing is, dan is $(x, -y)$ er ook één.
- Bij iedere x bestaat maximaal één niet-negatieve y .
- Als x kleiner is dan -1 , is de linkerkant niet geheel, want dan zijn beide

teemachten kleiner dan $\frac{1}{2}$ en zit de linkeruitdrukking strikt tussen 1 en 2. Om nog meer gevoel voor de opgave te krijgen en natuurlijk om in ieder geval sommige oplossingen te vinden, gaan we kleine waarden uitproberen. Door de observatie die we hierboven al deden, blijkt het handiger om kleine x in te vullen en te kijken of er dan een y bestaat, dan andersom. De resultaten staan **in tabel 1**.

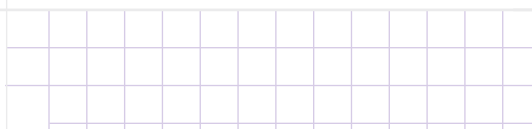
x	$1 + 2^x + 2^{2x+1}$	y
-1	2	-
0	4	± 2
1	11	-
2	37	-
3	137	-
4	529	± 23
5	2081	-
6	8257	-
7	32897	-
8	131329	???

tabel 1

We hebben in ieder geval al vier oplossingen gevonden. We zouden de tabel voor nog wat meer kleine x kunnen berekenen, maar aangezien $1 + 2^x + 2^{2x+1}$ steeds sneller stijgt, wordt het een heel stuk lastiger om te bepalen of we dan een kwadraat krijgen. Voor $x = 5$ kan dat nog redelijk eenvoudig: merk op dat $40^2 < 2081 < 50^2$ en dat als 2081 een kwadraat is van een geheel getal, dat getal op een 1 of een 9 moet eindigen. We hoeven dus alleen $41^2 = 1681$ en $49^2 = 2401$ uit te rekenen. En voor $x = 6$ en $x = 7$ is dat nog gemakkelijker, aangezien een kwadraat nooit op een 7 eindigt.

Maar voor $x = 8$, waarbij we een uitkomst krijgen die jammer genoeg niet weer op een 7 eindigt, is dit eigenlijk al niet meer te doen op de manier zoals bij $x = 5$. Daarom is het, in verband met de beschikbare tijd, beter om iets anders te gaan proberen. Zo kunnen we uit de tabel zien dat y altijd oneven moet zijn voor $x \geq 1$, wat we ook direct kunnen bewijzen uit (1).

We zouden er op kunnen speculeren dat voor iedere viervoud x een oplossing bestaat of juist voor ieder kwadraat van een even getal. Of misschien zijn er maar een eindig aantal oplossingen en hebben we ze al bijna allemaal. Voor die eerste twee vermoedens zouden we $x = 4k$ en $x = 4l^2$ kunnen invullen om te kijken of we misschien gelijk kunnen zien of er dan een kwadraat uitkomt. Natuurlijk hopen we op een mooi merkwaardig product, maar helaas lukt dat niet op deze manier. En zelfs al vinden we op deze manier een familie van oplossingen, dan nog hebben we niet bewezen dat dit ook echt *alle* oplossingen zijn. Met de kennis dat er op een IMO hooguit één punt te behalen valt met zo'n resultaat, gaan we toch maar even iets anders verzinnen. Laten we nu eens de vergelijking gaan herschrijven. Zoals al eerder opgemerkt, zijn merkwaardige producten nooit verkeerd en we kunnen er een verkrijgen door de '1' naar de andere kant te halen en de vergelijking te schrijven als:
 $(2) \dots 2^x(2^{x+1} + 1) = y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$
Dit is heel nuttig, want we hebben links en rechts een ontbinding staan en we weten precies hoeveel factoren 2 er links zitten. Laten we daarom kijken naar oplossingen met $x \geq 1$; we weten toch al hoe het zit voor



$x = 0$ en $x = -1$ (met de twee oplossingen $(0, \pm 2)$, respectievelijk geen oplossingen). Voor $x \geq 1$ weten we dat y oneven is. Dus de factoren $y - 1$ en $y + 1$ zijn allebei even. Verder zijn het twee even getallen met verschil twee, dus is er precies eentje ook deelbaar door vier. Dus links moeten minstens drie factoren 2 zitten, dus er moet wel gelden dat $x \geq 3$. (We wisten al uit onze tabel dat $x = 1$ en $x = 2$ inderdaad geen oplossingen leveren.)

Laten we vanaf nu dus aannemen dat $x \geq 3$. Van de factoren rechts is de ene factor precies deelbaar door één factor 2 en de andere factor door de overige $(x - 1)$ factoren 2. Dus we kunnen y schrijven als:

$$y = 2^{x-1} \cdot m \pm 1$$

met m een positief oneven getal. Als we deze y weer in de vergelijking (2) invullen, krijgen we:

$$\begin{aligned} 2^x(2^{x+1} + 1) &= (y - 1)(y + 1) \\ &= 2^{x-1}m(2^{x-1}m \pm 2) \\ &= 2^{2x-2}m^2 \pm 2^x m \end{aligned}$$

of, na deling door 2^x ($\neq 0$):

$$(3) \dots 2^{x+1} + 1 = 2^{x-2}m^2 \pm m$$

Nu kunnen we laten zien dat als m (en daarmee y) te groot wordt, er geen oplossing voor x kan bestaan. Daartoe gaan we gevallen onderscheiden, aan de hand van het plusminusteken.

In het geval van de 'plus' kan *niet* gelden dat $m^2 > 8$, want dan geldt:

$$2^{x-2}m^2 + m > 8 \cdot 2^{x-2} + 1 = 2^{x+1} + 1$$

Dus $m^2 \leq 8$, en aangezien m ook oneven en positief moet zijn, moet wel gelden dat $m = 1$. Maar $2^{x-2} + 1 = 2^{x+1} + 1$ heeft geen oplossingen voor gehele x .

In het geval van de 'min' is de afchatting wat lastiger, maar deze kan toch op veel manieren. Een snelle manier is de volgende. We schrijven de minvariant van vergelijking (3) om tot:

$$(4) \dots 1 + m = 2^{x-2}m^2 - 2^{x+1} = 2^{x-2}(m^2 - 8)$$

Aangezien we hadden aangenomen dat $x \geq 3$, en dus $2^{x-2} \geq 2$, krijgen we de afchatting:

$$1 + m \geq 2(m^2 - 8)$$

wat leidt tot de kwadratische ongelijkheid:

$$2m^2 - m - 17 \leq 0$$

Dus m moet tussen de nulpunten van de vergelijking $2m^2 - m - 17 = 0$ liggen.

De abc -formule levert:

$$\frac{1-\sqrt{137}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{137}}{4}$$

Het kleinste nulpunt is duidelijk kleiner dan 0 en het tweede kunnen we verder

$$\text{afschatten met } \frac{1+\sqrt{137}}{4} \leq \frac{1+\sqrt{144}}{4} = 3\frac{1}{4}.$$

Nu hoeven we alleen nog te kijken of er een x bestaat bij $m = 1$ en bij $m = 3$, zodat aan (3) voldaan is.

Bij $m = 1$ gaat de vergelijking (4) over in een vergelijking zonder gehele oplossingen:

$$2 = -7 \cdot 2^{x-2}$$

In het geval $m = 3$ krijgen we de vergelijking:

$$4 = 2^{x-2}$$

waaruit direct $x = 4$ volgt. Zo vinden we de oplossingen $(4, \pm 23)$.

De in de tabel gevonden oplossingen $(0, \pm 2)$ en $(4, \pm 23)$ waren dus *alle* oplossingen.

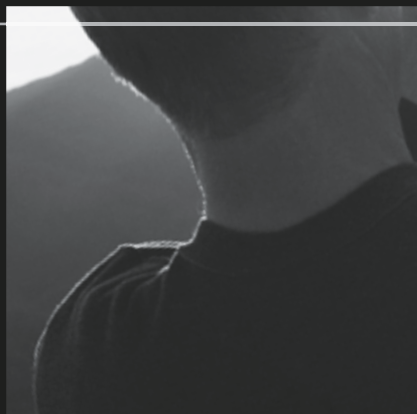
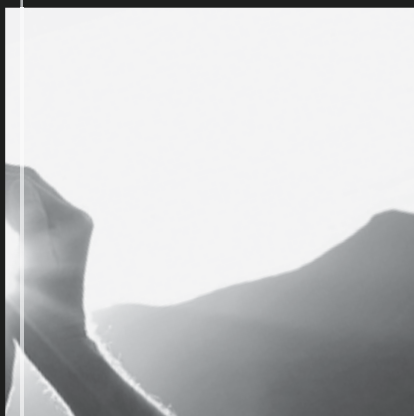
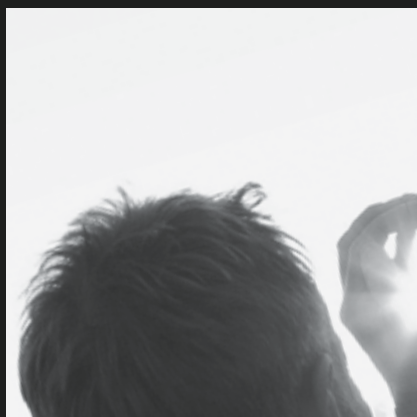
Hoewel ik op de IMO in 2006 deze oplossingen ook had gevonden, was het me toen niet gelukt om waterdicht te bewijzen dat het *alle* oplossingen waren. Opgave 1 van de eerste dag, een meetkundeopgave, heb ik wel volledig opgelost en dat leverde me een eervolle vermelding op.

Over de auteur

Julian Lyczak is na zijn eerste plaats bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2005 en een eervolle vermelding bij de Internationale Wiskunde Olympiade in 2006 wis- en natuurkunde gaan studeren aan de Universiteit van Utrecht. Sinds november 2007 is hij actief als trainer bij de training en selectie van het Nederlandse team voor de IMO. Verder is hij in Utrecht een van de organisatoren van de nieuwe tweede ronde en de aansluitende finaletraining. E-mailadres: J.T.Lyczak@students.uu.nl

TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Eenvoudig het geheel zien



Elke leerling leert op een andere manier.

De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

www.education.ti.com/nederland

Nu tijdelijk
TI-Nspire™ 2in1
-rekenmachine + software-
voor slechts **€ 55*** !
tel. 00800 484 22 737
(gratis)

* exclusief 9 € verzendkosten

**NU MET
TOUCHPAD EN
LETTERTOETSEN!**



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

NASCHOLING / KANSREKENING EN DYNAMICA ALS BASIS VOOR BREED WISKUNDEONDERWIJS

[Joost Hulshof en Ronald Meester]

Om leerlingen te motiveren en uit te dagen in de wiskunde is inspiratie en vakkennis van de docent onontbeerlijk.

Om uw kennis en passie voor het wiskundevak te stimuleren organiseert de Afdeling Wiskunde van de Vrije Universiteit te Amsterdam in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren dit najaar een nascholingscursus voor wiskundeleraars. De cursus sluit aan bij de relevantie van dynamica en kansrekening in de wiskunde en daarbuiten en is toegankelijk voor tweede- en eerstegraads leraren.

De vereiste voorkennis is minimaal. Bekendheid met $y = f(x)$ als de grafiek van een functie, maar alleen concreet en met *simpele* formules voor f , en geen differentiaalrekening. Daarnaast, elementair getalbegrip, bijvoorbeeld de doorlopende decimale ontwikkeling $0,3333\dots$ voor $\frac{1}{3}$, wat elementair letterrekenen (algebra) als: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ en de stelling van Pythagoras.

De cursus is gericht op verdieping en verheldering van de stof die op school behandeld wordt, vanuit dynamisch en probabilistisch perspectief, gebaseerd op in de schoolrekenpraktijk opgebouwde intuïtie. De nadruk ligt op het bevorderen van inzicht en overzicht, gebruikmakend van de verschillende en soms conflicterende invalshoeken van de beide docenten, vanuit de overtuiging dat wiskunde gemaakt en ontdekt wordt door simpele vragen te stellen die voor iedereen te begrijpen zijn. Formaliseren, abstraheren, logische redeneren en bewijstechnieken komen spontaan en in *simpele* context aan de orde, uitgaande van ons getalbegrip in de dagelijkse realiteit, en direct toepasbaar in de les. Precisie wordt nagestreefd maar wiskundige strengheid is geen doel op zich.

Concreet behandelen we de volgende onderwerpen: reële getallen, rationale getallen, decimale ontwikkelingen en de daarmee samenhangende oneindige sommen. Toevallige getallen trekken uit $[0, 1]$ of daarbuiten en het verband met

de wet van de grote aantallen hiervan. Het getal e introduceren op de meest natuurlijke en eenvoudige wijze via rente op rente, het binomium van Newton en de driehoek van Pascal, en we onderzoeken wat e met kansen van doen heeft. Verder de wortel uit 2, hoe Newton dit getal benaderde met grafieken en raaklijnen, het verband met methoden uit de oudheid, waarom die al zo goed waren, en hoe je dit vanuit een modern dynamisch perspectief kunt zien.

Inschrijving

Deelname aan deze nascholing levert u 11 punten op voor het lerarenregistratietraject. Elke bijeenkomst bestaat uit hoorcolleges, verzorgd door Ronald Meester (probabilistisch perspectief) en Joost Hulshof (dynamisch perspectief) en een gemeenschappelijke werkgroep met beide docenten. U kunt zich inschrijven via www.vu.nl/nascholing. Hier vindt u ook alle benodigde praktische informatie zoals data, tijden en kosten.

De eerste bijeenkomst is op **vrijdag 12 november** a.s. en begint om 1 uur in de middag.



Rekenen met aardrijkskunde

[Anouk Adang en Rob Adriaens]

Het ministerie van OCW noemt in haar kwaliteitsagenda 2008 zes speerpunten voor de komende jaren: rekenen en taal, uitblinken, burgerschap, professionele ruimte, examens en verbetercultuur. De vakverenigingen werd in het kader van deze speerpunten door het ministerie gevraagd projectvoorstellen te doen. Eén van de projecten waaraan subsidie is toegekend, is 'Rekenen met aardrijkskunde' van het KNAG (Koninklijk Nederlands Aardrijkskundig Genootschap).

Het verbeteren van de rekenprestaties op de middelbare school gebeurt niet alleen bij wiskunde. Ook bij andere vakken komen rekenvaardigheden aan bod, en zeker bij aardrijkskunde. Vooral in de brugklas wordt in de aardrijkskundeles behoorlijk wat tijd besteed aan het rekenen, bijvoorbeeld als er gewerkt wordt met schaal of met lengte- en breedtegraden. Ook bij demografie zijn rekenvaardigheden van belang. Daarnaast moeten leerlingen bij aardrijkskunde oefenen in vaardigheden die zijdelings veel te maken hebben met rekenen, zoals werken met tabellen en tekenen van grafieken. De manier waarop leerlingen bij wiskunde leren rekenen, heeft zowel overeenkomsten als verschillen met hoe dat bij aardrijkskunde gebeurt. Bij beide vakken wordt veel in een context gerekend. In wiskundemethoden kom je zelfs regelrechte geografische opgaven tegen waarbij leerlingen bijvoorbeeld met de schaal van een kaart moeten werken. Zulke opgaven lijken heel sterk op die bij aardrijkskunde. Een belangrijk verschil is dat in het wiskundeonderwijs veel meer herhaald wordt. Door oefenen, oefenen en nog eens oefenen moet het rekenen er bij leerlingen langzaam inslijten. Veel wiskundemethoden en modules bevatten dan ook korte rekenoefeningen met steeds kleine variaties; bij aardrijkskunde gebeurt dat veel minder. Een tweede verschil is dat de leerlijnen bij wiskunde veel meer op elkaar aansluiten. Bij aardrijkskunde komen de rekenvaardigheden alleen aan bod bij bepaalde onderwerpen, zoals werken met kaarten en demografie.

Enkele onderwerpen worden bij het vak wiskunde op een specifieke manier uitgelegd. Neem verhoudingstabellen. Deze kun je gebruiken bij het tekenen van een

Schaal 1: 25.000

Afstand op de kaart (in cm)	1	2	3	4	5
					x 25.000
Werkelijke afstand (in km)	25.000	50.000	75.000	100.000	125.000

figuur 1

grafiek en bij het rekenen met een kaart-schaal. De verhoudingstabellen gaan uit van kruislings vermenigvuldigen. In het voorbeeld van **figuur 1** betekent dit dat 1×50.000 gelijk is aan 2×25.000 . En als je wilt weten hoeveel 7 centimeter op de kaart in werkelijkheid is, kun je de vergelijking opstellen: $7 \times 25.000 = 1 \times 175.000$.

De website 'Rekenen met aardrijkskunde' (www.rekenenmetaardrijkskunde.nl) geeft meer informatie over de manier waarop rekenvaardigheden in de wiskundeles worden uitgelegd. Daarnaast kun je zien wanneer bepaalde vaardigheden bij het vak wiskunde aan bod komen. Als je in de aardrijkskundeles een rekenvaardigheid gaat behandelen, kun je daarmee direct aansluiten op wat leerlingen bij wiskunde hebben geleerd.

De website bevat ook allerlei rekenoefeningen in een geografische context die je in de lessen kunt gebruiken. Ze zijn onderverdeeld in vijf groepen: rekenen aan de aarde, rekenen met kaarten, rekenen aan bevolkingscijfers, hoogtelijnen en doorsneden tekenen, en werken met klimaatgegevens.

Door het rekenen bij aardrijkskunde goed aan te laten sluiten op wiskunde krijgen leerlingen de geografische rekenvaardig-



heden sneller onder de knie en ervaren ze dat wat ze bij het ene vak leren ook werkt bij het andere vak. Ook het vak wiskunde heeft er natuurlijk belang bij als leerlingen tijdens de aardrijkskundeles hun rekenvaardigheden verbeteren. Aardrijkskunde kan op deze manier een zinvolle bijdrage leveren aan het verbeteren van de rekenprestaties van leerlingen in Nederland.

Informatie

Meer informatie:

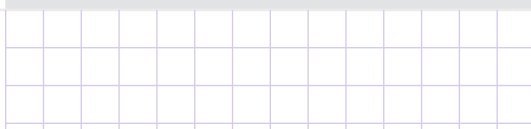
www.rekenenmetaardrijkskunde.nl.

Verantwoording

Dit artikel is met toestemming overgenomen uit *Geografie* nummer 6, juni 2010 (www.geografie.nl).

Over de auteurs

Rob Adriaens is docent aardrijkskunde op Het Streek in Ede en is als onderwijs-specialist werkzaam voor het Koninklijk Nederlands Aardrijkskundig Genootschap. Anouk Adang werkt als onderwijscoördinator bij het Koninklijk Nederlands Aardrijkskundig Genootschap. E-mailadressen: radriaens@gmail.com en a.adang@knag.nl



Boekbespreking

RENÉ DESCARTES, MEETKUNDE

[Danny Beckers]



Ondertitel: Vertaald en ingeleid door Wim W. Wilhelm

Auteur: Wim W. Wilhelm

Uitgever: Eburon, Delft (2009)

ISBN: 978 90 5972 320 7

Prijs: € 27,50 (200 pagina's; paperback)

De 17de eeuw is een turbulente en boeiende periode in onze vaderlandse geschiedenis. De opkomende grootmacht van de Republiek der Nederlanden moest bijna voortdurend haar voortbestaan bevechten tegen haar burenen. Die grootmacht was vooral gebaseerd op de handel met Azië en Amerika. Niet alleen vergden de reizen naar de 'nieuw' ontdekte gebieden het uiterste van de technische mogelijkheden; die gebieden zelf verruimden ook in alle opzichten de blik van de Europeanen: andere culturen, nieuwe werelden en wezens. Al die nieuwigheden werden bovendien door de boekdrukkunst in veelvoud en in een ongekend tempo verspreid. In al die spannende ontwikkelingen lag de kiem voor wat wij later zijn gaan aanduiden met de term 'Wetenschappelijke revolutie'. Tijdens die wetenschappelijke revolutie ontstond de wiskunde het niveau van de antieke schrijvers. Een van de belangrijkste stappen daarin was de koppeling van meetkunde en algebra die door René Descartes in zijn *La Géométrie* (*De Meetkunde*; voor het eerst gepubliceerd in 1637) werd gemaakt. *De Meetkunde* van Descartes was een aanhangsel bij zijn filosofische werk over de juiste wijze van redeneren. In feite is *De Meetkunde* een toepassing van die juiste wijze van redeneren; andere toepassingen vond

Descartes onder andere in de optica. De juiste wijze van redeneren was bij uitstek wiskundig; daarnaast introduceerde Descartes in zijn essay een aantal belangrijke nieuwe ideeën en notaties die gezichtsbepalend zijn geweest voor de wiskunde. Ook in de tijd van Descartes werd het als een belangrijk werk herkend: het verscheen al snel in een Latijnse vertaling zodat iedereen in de geleerde wereld er kennis van kon nemen. Zoals een belangrijk werk betaamt, werd het zowel bejubeld als verguisd. De eerste edities van dit belangrijke werk verschenen in Nederland: het land waar Descartes lange tijd leefde en werkte. Hoog tijd dus dat iedereen in Nederland kennis neemt van een belangrijke zeventiende-eeuwse publicatie als *De Meetkunde* van Descartes.

U heeft geen enkel excuus meer, want er is nu een gemakkelijk toegankelijke Nederlandstalige editie van de hand van Wim Wilhelm. In het boek van Wilhelm wordt de wiskundig geïnteresseerde lezer – meer voorkennis dan de rekenvaardigheid die je van een vwo-leerling met wiskunde B en een gezonde dosis lef mag verwachten, wordt niet van de lezer gevergd – op begrijpelijke wijze ingewijd in de ideeën van Descartes.

Behalve lof heb ik ook een belangrijk kritiekpunt op deze uitgave: aan de publicatie ligt geen duidelijke historische visie ten grondslag. Om maar te beginnen met de titel: Descartes gaf zijn essay de titel *La Géométrie*, mét lidwoord dus. Waarom is dat in de vertaling weggelaten? Er zijn verschillende redenen denkbaar waarom Descartes zijn geesteskind *De Meetkunde* wilde noemen. In de tekst gebruikt Wilhelm consequent de Franse titel wanneer hij naar het werk van Descartes verwijst – met lidwoord. Hij thematiseert zijn titelkeuze niet, en legt ook zijn keuze niet uit. Dat is jammer, want als historicus ben ik nieuwsgierig naar de achtergrond van deze keuze.

Een tweede punt van kritiek betreft de biografie. In de uitvoerige inleiding op deze vertaling wordt in een paar pagina's een aantal levensbijzonderheden van Descartes opgevoerd, met de gedachte dat 'de ontwikkeling van iemands denken niet los is te zien van de tijd waarin iemand leeft'.

Maar de biografische details (op pag. 13-16) verklaren niets van de gedachten die vervolgens worden besproken. De anekdotes vertonen ook geen samenhang: waarom gaat Descartes naar de Nederlanden, waarom interesseerde Descartes zich voor de krijgskunde en ging hij met de hertog van Beieren op veldtocht, waarom liet hij zich door Christina van Zweden aan haar hof ontbieden? Dit alles passeert de revue, maar zonder enig ander dan chronologisch verband en zonder dat het aan het (wiskundige) werk van Descartes wordt gekoppeld. Op deze manier roept de biografie meer vragen op dan dat die iets toevoegt aan het verhaal dat Wilhelm vertellen wil.

Ook wetenschapshistorisch rammelt de inleiding. Dat blijkt al uit de literatuurlijst, die weinig recente literatuur uit de geschiedenis van de wiskunde bevat. Het enige relevante werk op het gebied van de geschiedenis van wiskunde dat vermeld wordt, is het boek van Henk Bos over de bijdrage van Descartes aan de ontwikkeling van de bewijsvoering in de wiskunde^[1]. Daarop had Wilhelm mijns inziens uitvoerig moeten terugkomen in zijn inleiding op het tweede boek van Descartes, maar hij beperkt zich, naast de terechte lofuitingen, tot de technische aspecten uit het boek van Bos. Dat is jammer, want de lezer hoort op dit punt eigenlijk te lezen waarom het voor Descartes en zijn tijdgenoten zo problematisch was om meetkundige figuren te associëren met algebraïsche uitdrukkingen – zeker omdat wij in het tijdperk van de grafische rekenmachine zo vanzelfsprekend krommen tekenen.

Het klopt dat Descartes geen assenstelsel, laat staan een loodrechte x - en y -as introduceert, maar om daarom maar te concluderen dat hij met zijn boek *niet* de aanzet geeft tot de analytische meetkunde (p. 17), vind ik wel erg kort door de bocht. Descartes gebruikt letters om lengtes van lijnstukken mee aan te geven; de stap naar coördinaten, en daarmee een 'oorsprong', en punten aan de andere kant van die oorsprong, werd door sommige wiskundigen in de loop van de 17de eeuw gemaakt. Het idee van de loodrechte assen komt pas met de introductie van het (voorgedrukte) ruitjespapier in de 19de

eeuw. Tot die tijd was men in de analytische meetkunde (meetkundige analyse, of theorie der meetkundige plaatsen) iets minder rechtlijnig en mochten de 'assen' ook scheef ten opzichte van elkaar worden gepositioneerd. Datzelfde gebrek aan historisch bewustzijn levert verderop een curieus aandoende mengeling van moderne en contemporaine notaties op, waarin Wilhelm zijn bewering hierboven weer lijkt te weerspreken. Dat heeft plaats in het stukje waarin de parabolische, hyperbolische en elliptische aanpassing van figuren wordt verklaard (op pag. 23-25). Dit is een belangrijk onderdeel van de Euclidische meetkunde: basiskennis voor Descartes. De uitleg van de procedures geschiedt in termen van meetkundige figuren. Op zich is de uitleg ook helder en goed te volgen voor mensen die niet bekend zijn met *De Elementen* van Euclides (een verwijzing naar een online versie^[2] was overigens op zijn plek geweest). Maar waarom er in die uitleg een punt $P(x, y)$ – dus met een volkomen overbodige x - en y -coördinaat – wordt gebruikt, is mij een raadsel. Voor de hedendaagse lezer is dit verschil wellicht te subtiel om zich aan te storen, maar alle historische nuance is ermee verloren.

Daar staat tegenover dat er in wiskundig opzicht veel te genieten valt in deze publicatie. Zoals ik hiervoor ook al heb opgemerkt: Wilhelm heeft een heldere schrijfrant waarin niet teveel maar ook niet te weinig wordt uitgelegd. Voor menig geïnteresseerde vwo'er is de tekst goed te volgen. Hij of zij kan via het boekje van Wilhelm – direct uit de vertaalde brontekst of uit de uitleg die daar door Wilhelm bij is geschreven – kennis nemen van mooie stukken wiskunde: fragmenten uit de Euclidische meetkunde, de regels van Cardano voor het oplossen van derde- en vierdemachts vergelijkingen (op pag. 66-68, 155 e.v.), de oplossing van het lijnenprobleem van Pappus (op pag. 55-59, 97 e.v.), een aantal bijzondere krommen met bijbehorende vergelijkingen en eigenschappen. Dat alles is te vinden in het boek van Wilhelm. Het is op begrijpelijke wijze uiteengezet, en het verdient hier en daar ook om te worden nagerekend. Als docent is het leuk om deze dingen nog eens na te lezen en te rekenen. Om Descartes ook historisch in zijn context te kunnen duiden moet u daarnaast dan maar het boek van Bos lezen. Maar ja, daarvan is nog geen prettig leesbare Nederlandse vertaling beschikbaar.

Noten

- [1] Henk J.M. Bos (2001): *Redefining Geometrical Exactness / Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer.
- [2] Euclides-vertaling in het Engels, met een aantal aardige applets:
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>
 Of, statisch, niet helemaal compleet, maar in het Nederlands:
www.pandd.demon.nl/elementen.htm

Over de recensent

Danny Beckers is als universitair docent wetenschapsgeschiedenis verbonden aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Hij was van 1994 tot 2006 als docent wiskunde actief. Sinds 2005 is hij directeur-eigenaar van Assertief (onderdeel van PGBeckers; www.pgbeckers.nl), een particulier expertisecentrum voor de begeleiding van leerlingen met een autisme-spectrumstoornis in het volgen van regulier onderwijs en het vinden c.q. behouden van een baan.
 E-mailadres: d.beckers@few.vu.nl

APS-Exact

Maandag 1 november 2010
 Donderdag 11 november 2010
 Maandag 15 november 2010
 Maandag 29 november 2010

Woensdag 1 december 2010
 Donderdag 2 december 2010
 Woensdag 8 december 2010
 Dinsdag 14 december 2010

Maandag 17 januari 2011
 Maandag 31 januari 2011

Maandag 11 april 2011

U kunt zich aanmelden
 via onze site
www.aps.nl/exact >
 Activiteitenagenda

Ook in het schooljaar 2010-2011 organiseert APS-Exact diverse cursussen en studiedagen, zoals:

bijeenkomst *Hoogbegaafde leerlingen in de wiskunde*
 bijeenkomst *Rekenvaardig door samenhangend leren*
 studiemiddag *Rekenen getoetst*
 start cursus *Bètaonderwijs in samenhang versterken*

start cursus *Motiveren van leerlingen bij wiskunde*
 studiedag *Wiskunde op de TI-84+*
 start cursus *Leiding geven aan de ontwikkeling van de wiskundesectie*
 studiemiddag *Rekenbeleid bij u op school*

training *Beter bèta op het havo*
de 9^e wiskundeconferentie vmbo en onderbouw havo/vwo

Wiskunde ICT-conferentie: onderzoek en praktijk

Bel of schrijf voor meer informatie:

APS-Exact

Postbus 85475

3508 AL Utrecht

Telefoon: 030 - 28 56 722

E-mail: voortgezetonderwijs@aps.nl

www.aps.nl/exact



Vanuit de oude doos

A^o 1925

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die in de vorige eeuw – tot in de tweede wereldoorlog – voor toelatingsexamens tot universiteiten zijn gebruikt. Dit jaar ligt de nadruk op algebra, goniometrie en analytische meetkunde. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als praktische opdracht.

Deze keer een portie algebra met een vleugje analytische meetkunde.

Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgaven wel erg eenvoudig voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.

Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1

Bepaal a , b , c zodanig dat de vorm

$$ax^2 + bxy + cy^2 - x + 19y - 15$$

deelbaar is door $x + 2y - 3$.

Opgave 2

Als ge weet dat aan de vergelijkingen

$$(7x^2 - 13xy + 7y^2 - 9)(10x^2 - 9xy - 9y^2) = 0$$

$$\text{en } \frac{3x^2 + 5xy + 3y^2 - 25}{17x^2 - 4xy - 9y^2 + 13} =$$

voldaan wordt door $x = 2$ en $y = 1$, hoe krijgt ge dan de overige wortelstellen?

Welke zijn dit?

Opgave 3

Los x op uit:

$$\frac{x^{\log 4x^3}}{5x^{\log 5x^2}} = 5^{\log 0,4}$$

Uitwerkingen

Opgave 1 – De gegeven vorm moet gelijk zijn aan $(x + 2y - 3)(ax + py + q)$ voor zekere p en q .

Uitwerken geeft:

$$ax^2 + (p + 2a)xy + 2py^2 + (q - 3a)x + (2q - 3p)y - 3q$$

Vergelijken we hiervan de coëfficiënten met die in de gegeven uitdrukking, dan volgt:

$$\begin{cases} p + 2a = b \\ 2p = c \\ q - 3a = -1 \\ 2q - 3p = 19 \\ -3q = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -6 \\ p = -3 \\ q = 5 \end{cases}$$

Opgave 2 – Wellicht ligt het voor de hand de gegeven uitkomst te gebruiken, maar ik werkte deze opgave uit zonder die uitkomst. Je kunt het stelsel splitsen in twee afzonderlijke stelsels:

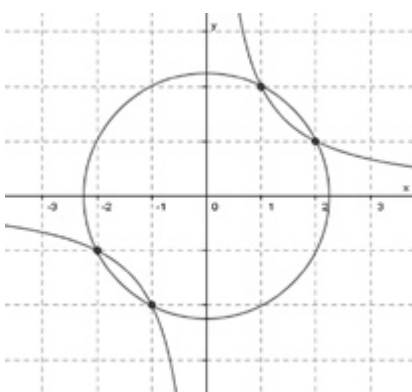
$$\begin{cases} 7x^2 - 13xy + 7y^2 - 9 = 0 \\ 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 25 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 10x^2 - 9xy - 9y^2 = 0 \\ 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

waarbij je achteraf bij elk antwoord moet controleren of $17x^2 - 4xy - 9y^2 + 13 \neq 0$. Meetkundig-analytisch gezien staan hier vergelijkingen van kegelsneden!

Het eerste stelsel heeft twee geheimen:

- Je kunt de kwadratische termen laten wegvallen, waardoor je overhoudt: $x^2 + y^2 = 5$, een cirkel!
- Je kunt de xy -term laten wegvallen, waardoor je overhoudt: $xy = 2$, een hyperbool!

Hierna is het eenvoudig de snijpunten van deze cirkel en hyperbool (met algebra) te bepalen; **zie ook figuur 1**.

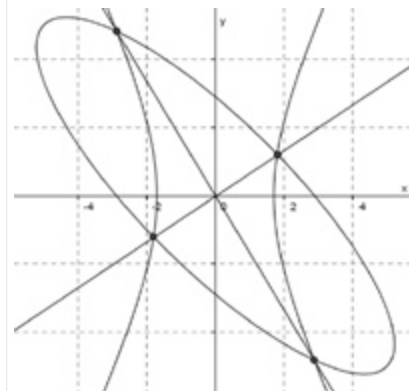


figuur 1

Oplossingen: $(-2; -1)$, $(-1; -2)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$

In het tweede stelsel zitten ook twee geheimen:

- De eerste vergelijking kun je ontbinden: $(5x + 3y)(2x - 3y) = 0$



figuur 2

- Je kunt de xy -term laten wegvallen, waardoor je 'een hyperbool' overhoudt: $77x^2 - 18y^2 = 225$

Als wortelfunctie geschreven:

$$y = \pm \sqrt{(77x^2 - 225)/18}$$

We gaan dus de snijpunten bepalen van de lijnen $y = -\frac{5}{3}x$ en $y = \frac{2}{3}x$ met de hyperbool; **zie ook figuur 2**. In die figuur is ook de ellips met vergelijking $3x^2 + 5xy + 3y^2 - 25 = 0$ getekend.

De algebraïsche tussenberekeningen laat ik even weg. Snijpunten:

$$\left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}; \frac{25}{9}\sqrt{3}\right), \left(\frac{5}{3}\sqrt{3}; -\frac{25}{9}\sqrt{3}\right), \left(\frac{5}{23}\sqrt{69}; \frac{10}{69}\sqrt{69}\right), \left(-\frac{5}{23}\sqrt{69}; -\frac{10}{69}\sqrt{69}\right)$$

Echter niet alle acht oplossingen voldoen! (Gaat u dat zelf even(?) na!) Je kunt dat ook in een tekening aannemelijk maken, door namelijk een kegelsnede, behorend bij de vergelijking van de noemer (een enigszins scheef liggende hyperbool), erbij te tekenen (**zie de figuren 3a en 3b op pag. 88**). Je kunt die vergelijking omschrijven tot:

$$y = \frac{-2x \pm \sqrt{157x^2 + 117}}{9}$$

De oplossingen:

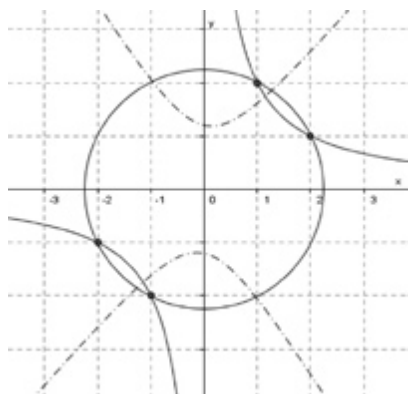
$$\left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}; \frac{25}{9}\sqrt{3}\right), \left(-\frac{5}{23}\sqrt{69}; -\frac{10}{69}\sqrt{69}\right)$$

vervallen namelijk!

Hoe lang deed u over de berekeningen?

Had u ze alle zes?

Wellicht kunt u nu zelf soortgelijke opgaven samenstellen door te knutselen met kegelsneden die door zelfgekozen punten gaan.



figuur 3a

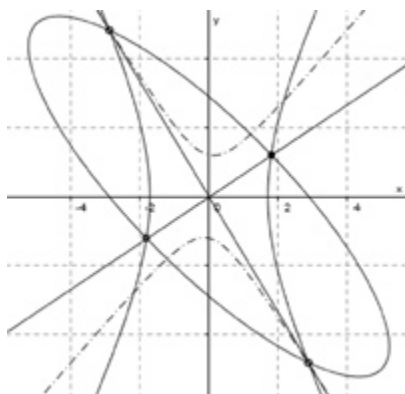
Opgave 3 is gewoon lekker stoelen met *macht* en *logaritme* (onder de aanname $x > 0$):

$$\frac{x^{\log 4x^3}}{x^{\log 5x^2}} = 5^{\log 0,4} \cdot 5 \Leftrightarrow$$

$$x^{\log 4x^3 - \log 5x^2} = 5^{\log 0,4+1} \Leftrightarrow$$

$$x^{\log \frac{4x^3}{5x^2}} = 5^{\log 4} \Leftrightarrow x^{\log \frac{4x}{5}} = 5^{\log 4}$$

Neem van beide leden in de laatste vergelijking de 'log':



figuur 3b

$$\log \frac{4}{5} x \cdot \log x = \log 4 \cdot \log 5 \Leftrightarrow$$

$$(\log \frac{4}{5} + \log x) \cdot \log x = \log 4 \cdot \log 5$$

Stel nu $\log x = a$:

$$(\log \frac{4}{5} + a) \cdot a = \log 4 \cdot \log 5 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + (\log 4 - \log 5) \cdot a - \log 4 \cdot \log 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a + \log 4)(a - \log 5) = 0$$

Dan is:

$$\log x = a = -\log 4 \vee \log x = a = \log 5 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{4} \vee x = 5$$

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Vathorst College te Amersfoort.
E-mailadres: alecluse@casema.nl

VERSCHEENEN / DE DRONKEMANSWANDELING



Ondertitel: hoe toeval ons leven bepaalt

Oorspronkelijke titel: The Drunkard's Walk

Auteur: Leonard Mlodinow

Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam (2010)

Vertaling: Carla Zijlemaker (uit het Engels)

ISBN: 978 90 5712 315 3

Prijs: € 19,95 (258 pagina's; paperback)

Op de achterkant – Toeval en onzekerheid beheersen ons bestaan. Maar waarom begrijpen wij daar dan zo weinig van? Door de ware aard van het toeval te tonen ontrafelt Leonard Mlodinow psychologische illusies en maakt hij het schijnbaar ondoorzichtige duidelijk: Waaraan danken sommige mensen, van sporthelden en filmsterren tot ondernemers, hun succes? Hoe moet je politieke peilingen of de

uitslag van een bloedonderzoek interpreteren? Welke aandelen moet je nemen? Waarvan hangen schoolprestaties af?

Het leven verloopt grilliger en minder voorspelbaar dan we willen geloven. Het is als een 'dronkemanswandeling' – een wetenschappelijke term voor de willekeurige beweging van moleculen die al botsend een onvoorspelbare weg afleggen. De dronkemanswandeling is een stimulerende en verrassende gids voor wie onze bedrieglijke wereld beter wil begrijpen. Leonard Mlodinow is natuurkundige, woont in New York, doceert aan Caltech en schrijft populair-wetenschappelijke boeken, zoals, met Stephen Hawking, *A Briefer History of Time*. Daarnaast schreef hij scenario's voor films en televisieseries als *Star Trek: The Next Generation* en *MacGyver*.

Recensie (LvdH in *NWT Magazine*) – Iedere onderzoeker, student of scholier die wel eens met kansberekening in de knoop heeft gezeten, moet dit gewoon lezen. Leonard Mlodinow begrijpt hoe hij complexe materie kan omzetten tot begrijpelijke stof. Een leesbare, interessante en zelfs leuke stoomcursus kansberekening is het resultaat.

Het brein is van nature niet goed uitgerust om met kansberekening om te gaan. Veel redeneringen druisen namelijk tegen de gevoelsmatige uitleg in. Neem het zogeheten Monty Hall-probleem. Bij een quiz kan je kiezen uit drie deuren, waarbij achter één deur een prijs schuilgaat. Na het openen van de eerste deur mag je de deurkeuze veranderen. Mocht je allereerste deurkeuze goed zijn, en blijf je daarbij, dan is je winkans 1 op 3 en kans op verliezen 2 op 3. De quizmaster opent echter altijd eerst een prijsloze deur, en heeft dus invloed op de kans. Wissel je niet, dan blijft je kans om te winnen nog steeds 1 op 3, gelijk aan je eerste keuze.

Maar wissel je wel, dan wordt je kans om te winnen verdubbeld; 2 op 3. Mocht dit na twee keer doorlezen nog niet duidelijk zijn, geen zorgen, ook grote wiskundigen als Erdős hadden hier problemen mee. Mlodinow weet bij het Monty Hall-probleem feilloos in te spelen op de onmacht van het brein om toeval en kansberekeningen te bevatten. Door spanning op te bouwen in een vraagstuk houdt hij de aandacht vast. En door de getallentoverij te beperken doorloopt hij een probleem zo helder dat afhaken geen optie is.

Jaarverslag Euclides

JAARGANG 85 (2009/2010)

[Klaske Blom]

In dit jaarverslag wordt een overzicht gegeven van de werkzaamheden van de redactie in de periode van 1 augustus 2009 tot en met 31 juli 2010.

Redactie

De redactie van *Euclides* bestond het afgelopen jaar uit negen personen, ieder met een eigen aandachtsgebied en/of eigen taak op het gebied van het becommentariëren en genereren van artikelen: Bram van Asch (boekbesprekingen), Marjanne de Nijs (didactiek), Rob Bosch (wiskundige artikelen), Hans Daale (hbo), Wim Laaper (havo/vwo), Joke Verbeek (vmbo), Heiner Wind (redactievoorzitter), Dick Klingens (eindredactie) en Klaske Blom (hoofdreductie).

De redactie kwam driemaal plenair ter vergadering bijeen. De kernredactie (die bestaat uit de voorzitter, eindredacteur en hoofdreductie) kwam buiten die plenaire bijeenkomsten ook nog enkele malen bij elkaar. Daarnaast vergaderde de kernredactie een keer met het bestuur van de NVvW en een keer met de producent van *Euclides*, De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Inhoud

Euclides is gewijd aan het Nederlandse wiskundeonderwijs. De artikelen hebben een vakinhoudelijke, informerende, didactische, opiniërende en/of actueel-journalistieke inhoud. De redactie streeft naar een breed aanbod in artikelen zodat alle lezersdoelgroepen zich herkennen in het blad. Bijdragen worden voor een deel spontaan ingezonden en voor een ander deel op uitnodiging geschreven. De kopijlijst telde gedurende de hier beschreven periode 160 inzendingen: concept-artikelen, boek-, software- en filmbesprekingen, interviews, verslagen van prijsuitreikingen en conferenties, redactionele kopij, aankondigingen en mededelingen, en daarnaast NVvW-bestuursbijdragen voor de verenigingspagina's. Buiten deze inzendingen ontving de redactie een groot aantal persberichten.

Euclides kende het afgelopen jaar een aantal vaste – en inmiddels bekende – rubrieken. Van Frits Göbel was in elk nummer de rubriek *Recreatie* te vinden, met wiskundige puzzels, oplossingen en 'de ladderstand'. Harm Jan Smid verzorgde vier afleveringen van zijn rubriek *Het Gebeugen* en liet ons daarin parallellen zien tussen discussies uit het wiskundeonderwijs van vroeger en nu. Elk nummer bevatte een aflevering *Vanuit de oude doos*, verzorgd door Ton Lecluse, waarin hij op zoek ging naar oude meetkunde-examenopgaven. In de rubriek *Verschenen* werd regelmatig melding gemaakt van nieuwe publicaties. Nieuw was de column *Differentiëren en diepvriespizzas* van Dorien Lugt, studente wiskunde in Delft. Elk nummer werd voorzien van een hoofdreductie inleiding, *Kort Vooraf*, door Klaske Blom.

Het streven om meer vmbo-docenten aan het woord te laten over hun vak en hun onderwijsidealen is deze jaargang niet helemaal uit de verf gekomen. De redactie bezocht slechts één school, namelijk *SGM, VMBO Scholengemeenschap Maarsbergen*, en interviewde daar de vakgroep.

Het is dit jaar 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen, rekenmeester en scherm-schoolhouder, overleed. Dit was de aanleiding voor een serie artikelen over Ludolph van Ceulen, zijn werk, zijn tijdgenoten en de wiskunde in zijn tijd. Het eerste deel van deze serie verscheen in *Euclides* 85-3, in december 2009 als opmaat voor 2010, en het laatste artikel zal in december 2010 verschijnen.

Een andere serie die we in jaargang 85 (in nummer 5) gestart zijn en die ook doorloopt in de volgende jaargang, is de IMO-serie *Op weg naar IMO2011*. De aanleiding voor deze artikelenreeks is het feit dat in juli 2011 de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) voor het eerst

in de geschiedenis in Nederland zal plaatsvinden. In elk artikel in deze serie wordt een van de opgaven uit een eerdere IMO besproken door een oud-deelnemer.

Omvang

Euclides heeft in principe een vaste omvang van 40 pagina's per nummer. We kunnen hierin iets variëren, tot een maximum aantal pagina's van 320 per jaargang. In het afgelopen jaar telde nummer 1 (examen-special) 52 pagina's; de nummers 2 en 5: 44 pagina's; de nummer 3, 6 en 7: 40 pagina's en nummer 4: 48 pagina's. De steunkleur was groen. De opmaak en verdere verwerking werd weer verzorgd door 'De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.' in Veenendaal.

Publicatieprocedure

Ingezonden bijdragen worden in eerste instantie beoordeeld (dat wil zeggen geaccepteerd of afgewezen) door de hoofdredacteur. In geval van acceptatie wordt de inzending van commentaar voorzien door de hoofdredacteur en enkele andere redactieleden. De auteur krijgt vervolgens de gelegenheid zijn/haar artikel op basis van dit commentaar bij te stellen.

Voor becommentariëring wordt incidenteel ook een beroep gedaan op personen buiten de redactie. De namen van deze referenten worden vermeld op de eerste pagina van het nummer waarvan zij een bijdrage becommentarieerden. Nadere informatie over de publicatieprocedure en een aantal richtlijnen voor de aanlevering van bijdragen voor *Euclides* staan vermeld op « www.nvww.nl/euclricht.html ».

Euclides als Verenigingsorgaan

Euclides is 'vakblad voor de wiskundeleraar', maar tegelijkertijd 'orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars'. Als verenigingsorgaan kent het tijdschrift daarom een aantal geormerkte pagina's ten behoeve van het *Verenigingsnieuws*. Het bestuur

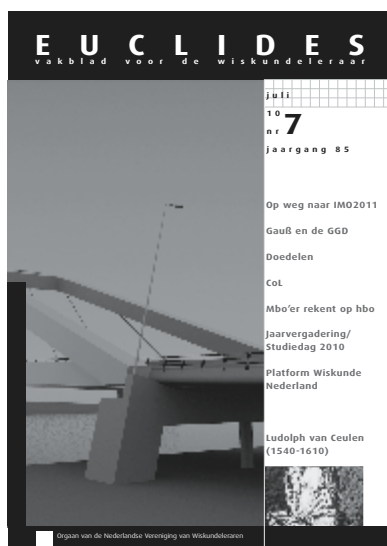
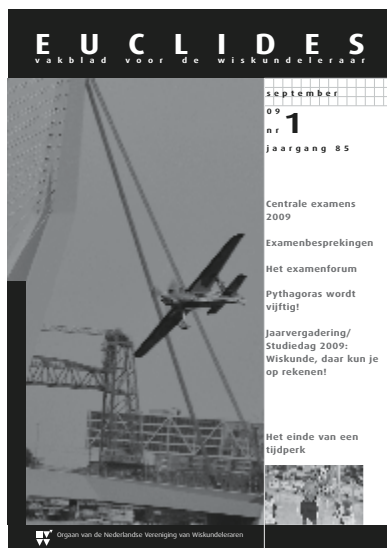
van de NVvW kan deze pagina's, zonder inhoudelijke bemoeienis en buiten verantwoordelijkheid van de redactie, vrijelijk gebruiken om zich tot de leden te richten. Dit gebeurde onder meer in de vorm van *Bestuurstafels*, waarin het bestuur van de NVvW de leden informeert over lopende kwesties en besluiten. Daarnaast hebben diverse bestuursleden het afgelopen jaar uitvoerig verslag gedaan van hun werkzaamheden voor de vereniging op de pagina's *Verenigingsnieuws*.

Voor en door wiskundedocenten

Wiskundedocenten en andere betrokkenen bij het Nederlandse wiskundeonderwijs vormen een brede en tamelijk heterogene doelgroep, ondanks hun gemeenschappelijke affiniteit. Uiteraard streeft de redactie van *Euclides* ernaar een ieder uit deze groep een ruime sortering aansprekende, informatieve en leeswaardige artikelen aan te bieden. Feedback van de lezers is daarom voor de redactie van groot belang, en ook inhoudelijke inbreng van hen (in de vorm van een artikel voor collega's in het land) wordt met veel belangstelling door de redactie tegemoet gezien. Opmerkingen en bijdragen kunnen worden gezonden naar « redactie-euclides@nvvw.nl ».

Over de auteur

Klaske Blom is hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: klaskeblom@gmail.com
(of: redactie-euclides@nvvw.nl)



Bijdragen

Kees Alkemade

Normen en waarden, 60

Mariken Barents

Even W.O.K.-en voor het beste resultaat, 109

Han Belt

Examen vmbo-BB 2009 / 1e tijdvak, 54

Ingrid Berwald

Werken met meervoudige intelligenties, 62

Henk Bijleveld

Nieuwe examens vmbo-basis, 219

Klaske Blom

Wiskundeonderwijs in de dagelijkse praktijk (interview), 276

Christian Bokhove

Dynamische meetkunde, 153

Rob Bosch

- Decanteren en ggd, 236
- Gauss en de Grootste Gemene Deler, 289

Jan Brandts

De UvA webklas wiskunde, 145

Harrie Broekman, Nellie Verhoef

Honderd jaar Van Hiele, 203

Henk Broer, Kees van der Straaten

Complexe getallen voor wiskunde D en NLT, 239

Lourens van den Brom

Toelatingsexamens tot de universiteiten, 74

Josephine Buskes

'Thank you for the interesting lesson', 141

Hans Daale

MBO'er moet op het HBO kunnen blijven rekenen, 298

Paul Dillo

Een rij van cosinussen, 171

Inhoud van de 85e jaargang (2009 / 2010)

Juliette Feitsma (Wereldwiskunde Fonds)

- WwF ondersteunt project in Nicaragua, 118
- WwF helpt een school in Bolivia, 259

Kees Garst

Kritische denkracht ontwikkelen bij 'Vorm en ruimte', 101

Dédé de Haan

Wiskunde Scholen Prijs: voor iedereen!, 214

Henk Hietbrink

Meetkunde met Frans van Schooten Junior (1615-1660), 279

Brechje Hollaardt

Persbericht van het landelijk ontwikkelpunt NLT, 107

Henk Hooijschuur

Ekādhikena Pūrveṇa, 167

Joost Hulshof

- Staartdelen, 78
- Een rij van cosinussen, 171
- 2^n en e , algebraïsche vaardigheden, 297

Kim Kaars

Dit was vet juf!, 257

Sieb Kemme

Moet dat zo? Kan het echt niet anders?, 216 en 248

Jan Ketting

De normaal driehoek, 251

Yvonne Killian

Oppervlakteformules, 168

Gert de Kleuver

- Voortgang van het project Reken VOort, 112
- Vakantiecursus 2009, 126
- De 8e Wiskundeconferentie voor docenten wiskunde, 242
- Afscheid van Pieter van der Zwaard als leerplanontwikkelaar, 302

Dick Klingens

Een rij van cosinussen, 69

Ton Konings

Viervlakken tussen Kunst en Wiskunde, 194

Gerard Koolstra

CSE VWO A12 - 2001 t/m 2009, 30

Peter Kop, Rob van Oord

Exittoets algebraïsche vaardigheden bij vwo A, 66

Erik Korthof, Dick Klingens

- Het examenforum 2009, 24
- Website en Forum, 207

Ton Lecluse

Rubriek: Vanuit de oude doos (deel 9 t/m 15) 39 (1932), 71 (1929), 120 (1927), 165 (1927), 217 (1937), 249 (1925) en 295 (1943)

Kees Lagerwaard

Overlijdensbericht Felix Gaillard, 1

Dorien Lugt

Rubriek: Differentiaal en diepvriespizza's (deel 1 t/m 3)

- Ze leken heel normale studenten, 115
- Technische Hogeschool Delft, 213
- $2x + 3 = 9$ los je op met intersect, 292

Jan Maassen

Felix Gaillard, 16 augustus 1929 - 20 augustus 2009, 61

Louis Maassen, Aad Goddijn

Nog twee naschriften bij een 'Oude doos', 72

Betty Majoor

MP3-speler: mooi kapstok voor veel, leuke wiskunde, 105

Freek van Meegen

Uitreiking van de Scholenprijs van de NWO, 110

Ronald Meester

In reactie op Hessel Pot, 76

Frank van Merwijk

Minor rekenen-wiskunde 10-14, 254

Paul van der Molen

Evaluatie complex-examens, 86

Ed de Moor

Rekenkampioen van Nederland 2009, 159

Rob van Oord

- Examens havo A, nieuwe stijl, 27
- Het einde van een tijdperk, 34

David van Oorschot

Staartdelen, 78

Hessel Pot

- Verhouding en breuk, 122
- Verhouding staat tot Breuk is als 4 staat tot 1, 169

Quintijn Puite

- Nieuw: de halve finale van de Wiskunde Olympiade, 108
- Van Bijsterveldt lanceert IMO2011, 209

Willem van Ravenstein

Pythagoras wordt vijftig!, 37

Hans Schipper

- Decanteerproblemen in een Herakles-week, 199
- Doedelen, 286

Harm Jan Smid

Rubriek: Het Geheugen (deel 5 t/m 8)

- Examens en gestrengheid, 80
- Het doel en de middelen, 162
- Uitgerekend?!, 252
- Bevoegd en misschien bekwaam, 283

Melanie Steentjes, Paul van der Molen, Ger

Limpens, Jos Remijn, Ruud Stolwijk, Gerard Stroomer

Wiskunde-examens 2009 / 1e tijdvak, 2

Ingrid Szwajcer

Community of learners: nieuw professionaliseringstraject, 293

Bram Theune

WisBase, een uitwisselingsbank voor allerlei soorten wiskundig lesmateriaal, 149

Joke Verbeek

- Digitale eindexamens wiskunde een uitkomst of een ramp?, 58
- Onderwijsprijs voor wiskundedocent, interview met Ary Greevenbosch, 116

Charlotte Vlek

Wiskunde als modern vakgebied in de bovenbouw, 131

Pauline Vos

TIMSS 2008 Advanced, 189

Rik Weeda

Lesgeven op een Europese School, 157

Gerard Wiarda

Een ander vierhoekenschema, 83

Serie: Ludolph van Ceulen

Fokko Jan Dijksterhuis: Wiskunde op stand, 186

Jantien Dopper: Duytsche Mathematique, 230

Gijs Langenkamp, Wiggert Loonstra: Ruzie met Van Ceulen, 138

Marjanne de Nijs, Margot Rijnierse: Ludolph van Ceulen in de klas, 244

Jaap Top: Vijfendertig decimalen, 270

Steven Wepster: Ludolph van Ceulen 1540-1610, 98

Serie: Op weg naar IMO2011

Esther Bod: IMO 2003 - opgave 1, 234

Birgit van Dale: IMO 2002 - opgave 1, 210

Johan Konter: IMO 2004 - opgave 1, 273

Recreatie

Frits Göbel

- Zeldzame Permutaties, 50 en 135
- Doorsneden, 94 en 183
- Kikkersprongen, 134 en 227
- Getallen, 182 en 267
- Deelrijen, 226 en 307
- Een familie symmetrische grafen, 266
- Ziggurats en variaties, 306
- Oplossing 84-7 (Faculteiten), 51
- Oplossing 84-8 (Aan u de keus!), 95

Boekbesprekingen e.d.

Jan de Graaf: Politiek van de wiskunde (Karen François), 43

Bram van Asch

- De gelukkige rekenklas (Tom Braams, Marisca Milikowski), 93
- 50 inzichten wiskunde (Tony Crilly), 144

Peter Lanser: Logicomix (Apostolos

Doxiadis, Christos Papadimitriou), 223

Ger Limpens: Wiskundig actief (Petra Hendrikse), 124

Steven Wepster: Cursus door zes eeuwen wiskunde (J.H. Derks), 133

Epi van Winsen: Rekenen is leuker dan/als je denkt (Marjolein Kool, Ed de Moor), 262

Verschenen

- Thomas Colignatius, *Elegance with substance*, 42
- Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou, *Een epische zoektocht naar de waarheid*, 59
- Paul Gerdes, *Meer dan honderd puzzels*, 42
- Paul Gerdes, *Billies Puzzels*, 243
- Kees Hoogland e.a., *Rekenen in het voortgezet onderwijs*, 221
- Kennisnet, *Essaybundel 'Hier heb ik niets aan'*, 172
- Marjolein Kool, Ed de Moor, *Rekenen is leuker dan/als je denkt*, 155
- Dr. Bernard Kutzler, *Technology and the Yin & Yang of Teaching and Learning Mathematics*, 85
- Floor van Lamoen, *Passen en Meten met Cirkels* (Zebra 30), 41
- David Leavitt, *De Indische klerk*, 42
- Hans van Maanen, *Goochelen met getallen*, 172
- Ad Meskens, *Wiskunde tussen Renaissance en barok*, 262
- Arnoud van Rooij, Leon van den Broek, *Getallenbrouwerij* (Zebra 29), 41
- Steven Strogatz, *The Calculus of Friendship*, 221
- Malba Tahan, *De man die kon rekenen*, 173
- Teleac SchoolTV, *Wiskunde voor de sectoren*, 79
- Benne de Weger, *Elementaire Getaltheorie en Asymmetrische Cryptografie*, 129
- Wim W. Wilhelm, *Meetkunde (van) René Descartes*, 77

Aankondigingen, mededelingen, oproepen e.d.

- Centrale Examens 2010 / 1e tijdvak, 206
- E-klas Training Wiskunde D, 41
- HKRWO symposium 2010 / Bloed, zweet en tranen ..., 208
- Hulp bij rekenvaardigheid, 41
- Nederlands Mathematisch Congres 2010, 115
- NLT-module gecertificeerd, 211

- Persbericht, Jonge technische werknemers voor de klas, 179

- Persbericht, Kennisnet, 278

- Persbericht, Rekenbeter.nl, 282

- Persbericht, Scholenprijs NWO, 261

- Wintersymposium KWG 2010, 129

- Wiskunde Scholen Prijs 2010, 168

Van de redactie

Inhoud van de 84e jaargang (2008/2009), 86

Klaske Blom

- Kort vooraf, 1, 53, 97, 137, 185, 229 en 269
- Jaarverslag Euclides / jaargang 84 (2008/2009), 84

Errata

90 en 238

Servicepagina

52, 96, 136, 184, 228, 268 en 308

Verenigingsnieuws

Henk Bijleveld: Nieuws uit de Werkgroep-VMBO, 265

Grada Fokkens, Conny Gaykema: Examenbesprekingen 2010, 224

Frank van den Heuvel

- Verslag NVvW-examenbesprekingen 2009, 18
- What's in a name?, 132

Meta Kamminga: Foto-impressie jaarvergadering/studiedag 2009, 180

Meta Kamminga, Hans van Walen: Nieuws van de Werkgroep-HBO, 225

Marian Kollenveld

- Van de bestuursstafel, 88
- Jaarrede 2009, 174

Douwe van der Kooij: Platform Wiskunde Nederland, 305

Henk van der Kooij: Van de bestuursstafel / Geboeid door wiskunde, 222

Kees Lagerwaard

- Notulen van de jaarvergadering op 8 november 2008, 90
- Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 2008-31 juli 2009, 91
- Van de bestuursstafel, 177

Marianne Lambriex

- Jaarvergadering / Studiedag 2009, 44
 - Het beroepsregister, stand van zaken november 2009, 178
 - Jaarvergadering / Studiedag 2010, 303
- Henk Rozenhart*: Onderhoud van eigen bekwaamheden door scholing, 263



Notulen van de NVvW- jaarvergadering

ZATERDAG 7 NOVEMBER 2009, NIEUWEGEIN

[Kees Lagerwaard]

1. Opening

Voorzitter Marian Kollenveld opent de vergadering. Ze meldt de afwezigheid van enkele ereleden en een tweetal bestuursleden en verwelkomt genodigden, ereleden en de talrijk opgekomen leden. Met vreugde meldt ze dat het aantal aanmeldingen voor deze dag opnieuw aanzienlijk hoger is dan vorig jaar. Met in totaal zo'n 450 aanwezigen is het Anna van Rijn College bijna te klein.

2. Jaarrede

Bij het begin van haar jaarrede staat Marian stil bij het overlijden van oud-bestuurslid en erelid Felix Gaillard.

De volledige tekst van de jaarrede is te vinden in *Euclides* nummer 4 van jaargang 85. Helaas vindt u daar slechts een deel van de geprojecteerde foto's die haar rede illustreerden.

3. Notulen

De notulen van de jaarvergadering 2008 worden zonder vragen of opmerkingen vastgesteld.

4. Jaarverslagen

Ook over het verslag van het verenigingsjaar 2008-2009 en het jaarverslag van *Euclides* jaargang 84 wenst geen van de aanwezigen het woord. De voorzitter dankt de auteurs Kees Lagerwaard en Klaske Blom. Er wordt gevraagd of het programma van de studiedag, de jaarrede, de notulen en de jaarverslagen bij elkaar in één nummer van *Euclides* kunnen worden geplaatst. Dat wordt om diverse redenen niet gedaan.

De jaarrede verschijnt steeds in het eerstvolgende nummer na de jaarvergadering, het programma wordt in het zomernummer aangekondigd, waarna mensen zich kunnen voorbereiden en de jaarverslagen en notulen verschijnen als voorbereiding op de jaarvergadering in het nummer voorafgaand aan de studiedag.

5. Financiën

De aanwezigen kregen voorafgaand aan de vergadering de exploitatierekening over boekjaar 2008-2009 uitgereikt, samen met de balans per 31 juli 2009 met een toelichting.

De kascommissie, bestaande uit mevrouw J. van Haastrecht en de heer W. Jansen, heeft de boekhouding gecontroleerd en in orde bevonden. De penningmeester wordt gedechargeerd.

De kascommissie heeft naar aanleiding van de kascontrole een brief aan de leden gericht waarin een aantal aanbevelingen wordt gedaan. Deze brief wordt voorgelezen. Het bestuur zegt toe hiervan nota te zullen nemen.

Penningmeester Frank van den Heuvel geeft een toelichting op de uitgedeelde financiële stukken. Het was een financieel goed jaar. Maar door de vergrijzing komen de toekomstige inkomsten onder druk te staan. Ook heeft het bestuur het voornemen de activiteiten van de vereniging verder uit te breiden. Daarom wordt voor het jaar 2010-2011 een contributieverhoging met 5 euro voorgesteld. Dit voorstel wordt zonder discussie aangenomen. Over de exploitatierekening met de begroting en de balans zijn

geen vragen of opmerkingen.

De penningmeester roept leden op zich beschikbaar te stellen voor de kascommissie.

6. Bestuursverkiezing

De bestuursleden Marian Kollenveld en Metha Kamminga zijn aftredend en stellen zich herkiesbaar. Er hebben zich geen tegenkandidaten gemeld. Dat betekent dat beiden zijn herkozen. De aanwezigen laten met een daverend applaus weten dat dit hun instemming heeft.

7. WiVa

Marianne Lambriex vertelt over de voor geschiedenis en de huidige stand van zaken rondom het beroepsregister. De aanwezigen worden geïnformeerd over het initieel register en de criteria om in het beroepsregister te worden opgenomen.

8. Rondvraag

Thomas Cool verzoekt het bestuur een commissie te benoemen die zijn conclusie over het wiskundeonderwijs toetst en het bestuur adviseert over verdere stappen. De voorzitter wijst namens het bestuur dit verzoek af.

9. Sluiting

De voorzitter sluit de jaarvergadering en draagt de microfoon over aan de organisatoren van de studiedag.



Verslag van het

1 AUGUSTUS 2009 – 31 JULI 2010

Bestuur

Het bestuur bestond dit verenigingsjaar uit voorzitter Marian Kollenveld, secretaris Kees Lagerwaard, penningmeester Frank van den Heuvel en de leden Metha Kamminga, Marianne Lambriex, Henk Bijleveld, Douwe van der Kooij, Henk van der Kooij en Henk Rozenhart. Voor de volledigheid dient gemeld te worden dat Marian Kollenveld en Metha Kamminga in november 2009 vanwege de verstreken driejaarlijkse termijn aftredend waren, maar tijdens de jaarvergadering weer werden herkozen.

Het dagelijks bestuur werd gevormd door de voorzitter, de secretaris en de penningmeester.

Er waren dit jaar 7 bestuursvergaderingen. In de tussenliggende periodes kwam het dagelijks bestuur een viertal keren bijeen.

Ledental

De al diverse jaren voortgaande langzame daling van het ledental kon dit jaar worden omgebogen in een lichte stijging. Per 31 juli 2010 telde de vereniging bijna 2800 leden. Het Examenforum was dit jaar voor het eerst alleen toegankelijk voor leden. Dat heeft een aanzienlijk aantal nieuwe leden opgeleverd. Voorts werd studenten aan de lerarenopleidingen een aantrekkelijk kennismakingsaanbod gedaan wat straks hopelijk tot een flinke aanwas van jonge docenten in ons ledenbestand zal leiden.

Algemeen

Het bestuur heeft op diverse manieren en op diverse plaatsen zijn zorg geuit over de spanning tussen het gewenste eindniveau en de beschikbare contacttijd voor wiskunde in het voortgezet onderwijs. Er hebben gesprekken plaatsgevonden met 'Den Haag' en er zijn brieven gestuurd naar de HBO-raad en de VO-raad. Dat heeft in dit verenigingsjaar nog geen concrete resultaten opgeleverd.

Havo wiskunde B is het vak waar het

duidelijkst zichtbaar is dat de in het examenprogramma beschreven kennis en vaardigheden niet voldoende kunnen worden verworven in het gegeven aantal studielasturen. Een keuze voor een 'gemakkelijkere' wiskunde (of helemaal geen wiskunde) ligt dan voor de hand. De strengere zak/slaagregeling is een extra reden voor een dergelijk keuzegedrag van leerlingen. Als we dan ook nog zien dat alle technische en exacte hbo-studierichtingen (behalve de lerarenopleiding wiskunde) leerlingen uit het N&G-profiel met wiskunde A even toelaatbaar vinden als met wiskunde B, wordt de keuze voor wiskunde B steeds minder aantrekkelijk. Daarmee wordt, behalve het vak wiskunde B, ook het keuzevak wiskunde D op havo in zijn voortbestaan bedreigd.

Middels het project RekenVOort heeft de NVvW een bijdrage geleverd aan het streven naar voldoende rekenvaardigheid voor alle leerlingen. Dit project is in de afrondende fase. Daarnaast denkt het bestuur een actieve rol te spelen bij de afstemming van de rekenactiviteiten in de natuurvakken, de maatschappijvakken en wiskunde.

Samen met het bestuur van de Nederlandse Vereniging van het Onderwijs in de Natuurwetenschappen (NVON) heeft het bestuur zich ingespannen om de reductie van het aantal verplichte sectorvakken in het vmbo van twee naar een te voorkomen. Deze reductie zou ten koste gaan van het aantal leerlingen met wiskunde.

Het College voor Examens heeft het bestuur gevraagd mee te denken over toegestane rekenmachines bij de eindexamens vmbo en havo/vwo op de wat langere termijn. Van zowel de 'gewone' rekenmachines als de grafische rekenmachines verschijnen nieuwe types met meer mogelijkheden. Waar wordt de grens bereikt, en is een eindexamen zonder rekenmachine wellicht een optie, waren onderwerp van bespreking.

Federatie Onderwijsbonden

Als vakvereniging is de NVvW lid van de Federatie Onderwijsbonden. De Federatie Onderwijsbonden is aangesloten bij de CMHF (Centrale voor Middelbare en Hogere Functionarissen) teneinde aan de CAO-onderhandelingstafels te komen.

Een van de belangrijke taken is immers het afsluiten van CAO's. Voor de vereniging zijn, gezien de samenstelling van het ledenbestand, de CAO-VO, CAO-BVE en CAO-HBO van belang. Via onze website houden we de leden op de hoogte. Uitgebreide informatie is te vinden op de website van de federatie (www.federatie-onderwijsbonden.nl).

NVvW en NVON vormen samen een commissie die regelmatig vooroverleg pleegt over vakbondszaken om te zien waar we samen kunnen optrekken.

Een aantal individuele leden met problemen inzake rechtspositie en andere arbeidszaken heeft gebruik gemaakt van gespecialiseerde en deskundige adviezen van het NVvW Rechtspositie Adviesbureau.

VVVO

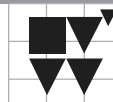
Ook dit jaar maakte de NVvW weer deel uit van het Platform VVVO.

Bij dit platform voor Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs spreken vertegenwoordigers van deze verenigingen met elkaar en met derden over ontwikkelingen binnen het onderwijs. Het bestuur van het platform heeft regelmatig overleg met o.a. het ministerie, de VO-raad, SLO, inspectie en anderen. Het deelnemen van de NVvW in dit platform is dus van groot belang om onze visie onder de aandacht van deze instanties te brengen.

Jaarvergadering/studiedag

De jaarvergadering/studiedag van 7 november 2009 met als thema 'Wiskunde, daar kun je op rekenen' werd zo goed bezocht dat de aula van het Anna van Rijn College voor het plenaire gedeelte van de

verenigingsjaar



[Kees Lagerwaard]

studiedag te klein was.

De jaarrede van de voorzitter kunt u nalezen in *Euclides* nummer 4 van jaargang 85. De notulen van de jaarvergadering vindt u elders in dit nummer van *Euclides*. Het themagedeelte werd georganiseerd door Lidy Wesker (lerarenopleiding UvA), Kenneth Tjon Soei Sjoie (lerarenopleiding HvA-OO) en bestuurslid Henk van der Kooij. Tussen de openingslezing van Koen Gravenmeijer en de sluitingsactiviteit, de toekenning van de Sigmaprijs 2009, was er een grote en rijke variatie aan werkgroepen rondom het thema rekenen. Door het voortreffelijke programma en het grote aantal deelnemers kijken we met tevredenheid terug op deze dag. Het bestuur maakte tijdens de lunch kennis met een groot aantal nieuwe leden.

Website

Ook dit jaar is er weer veel werk verzet door webmaster Lennart de Jonge en forum-moderator Erik Korthof onder leiding van bestuurslid Metha Kamminga. Op de achtergrond is ook Dick Klingens nog actief. Dankzij hen is de website nog uitgebreider en gebruiksvriendelijker geworden.

Dit jaar was het Examenforum voor het eerst 'achter de login' geplaatst om de privacy van de discussies te waarborgen. Doordat het forum nu alleen toegankelijk was voor leden, liep het aantal deelnemers wel iets terug, maar dat deed geen afbreuk aan de kwaliteit van de discussies.

Euclides

Dit jaar verschenen er 7 nummers van *Euclides*. Hoofdredacteur Klaske Blom speelde het weer klaar, samen met de redactie onder voorzitterschap van Heiner Wind en vele enthousiaste auteurs, om elk nummer te vullen met nieuws, informatie en artikelen die geen enkele wiskundeleraar zou mogen missen.

RekenVOort

Het door OCW gefinancierde project RekenVOort is in de afrondingsfase. Projectleider namens de NVvW is Gert de Kleuver. In het project zijn rekenmodules ontwikkeld, bestemd voor leerlingen in de bovenbouw vmbo en havo die geen wiskunde in hun examenpakket hebben. Het project heeft een extra jaar gekregen om een beter georganiseerde opzet in de school te testen. Dit zal gebeuren in de pilotscholen van schooljaar 2009-2010 en in enkele extra scholen die nieuw instappen. Financiering van deze aanvullende activiteit loopt via het Platform Taal en Rekenen VO. De eindproducten van het project zullen via de website beschikbaar worden gesteld.

Hbo

De Werkgroep-HBO organiseerde in april 2010 een conferentie met als thema 'Aansluiting mbo-hbo'. De belangstelling voor deze conferentie was groot. Op de NVvW-site en ook in het juninummer van *Euclides* is een verslag van deze succesvolle dag te vinden.

Havo/vwo

Tijdens dit verenigingsjaar hebben commissies syllabi ontwikkeld bij de door cTWO ontwikkelde nieuwe eindexamenprogramma's voor havo en vwo. Daarbij is ook gewerkt aan voorbeeldexamens. De NVvW is in elke syllabuscommissie vertegenwoordigd.

De werkgroep havo/vwo heeft najaar 2009 in *Euclides* gepubliceerd over de door haar ontwikkelde exittoets wiskunde A.

Vmbo

Op BB-niveau doen de meeste leerlingen hun eindexamen al een paar jaar op de computer. Voor KB was er dit jaar een eerste pilot digitale examens. Op een zeventigtal vmbo-scholen maakten de KB-leerlingen het digitale eindexamen wiskunde.

Helaas is het aantal vmbo-docenten dat lid is van de NVvW klein. Daardoor waren er geen regionale examenbesprekingen voor vmbo. Ook de discussie op het Examenforum is slechts door een beperkt aantal vmbo-docenten gevoerd.

In de vmbo-werkgroep is plaats voor enkele enthousiaste vmbo-docenten. Deze werkgroep heeft zich afgelopen jaar beziggehouden met de rekenproblematiek, de consequenties van de examinering per computer en nomenclatuur.

Het bestuur zou graag zien dat veel meer docenten uit het schooltype met veruit de meeste leerlingen lid zouden worden van de NVvW. Daartoe zullen komend schooljaar de vaksecties wiskunde van alle vmbo-scholen worden benaderd.

ICT-ontwikkeling

De NVvW is betrokken bij de pilot Open Leermiddelenbank Wiskunde.

Ook was er het afgelopen jaar betrokkenheid bij het project NKBW2, de Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde2. Het bestuur heeft een bedrag beschikbaar gesteld aan de stichting Kangoeroe om een interactieve website te bouwen met opgaven uit eerdere jaargangen van de Kangoeroewedstrijd.

Voorts ondersteunt de Vereniging de projecten WisBase en WisClass van Bram Theune en David van Oorschot. Het bestuur vindt dit zo waardevol dat het zich bereid heeft verklaard dit project te adopteren nu de collega's Theune en Van Oorschot van hun fpu gaan genieten.

Platform Wiskunde Nederland

Het Platform Wiskunde Nederland (PWN) krijgt steeds meer vorm. Het platform beoogt een betere behartiging van de belangen van de wiskunde, zowel voor het eigen veld als daarbuiten. Het platform opereert onder de koepel van NVvW en KWG. Douwe van der Kooij schreef hierover een informatief artikel in *Euclides*



85-7.

Het bestuur van de NVvW is vertegenwoordigd in het bestuur van PWN en in de commissie Onderwijs.

IMO2011

Volgend jaar vindt de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO2011) plaats in Nederland. De vereniging is sponsor van deze olympiade. Voorts zullen leden betrokken worden bij de organisatie en uitvoering.

WiVa en SBL

Het bestuur is vertegenwoordigd in de vakverenigingoverstijgende SBL-projectgroep. SBL staat voor Stichting Beroepskwaliteit Leraren. Een belangrijk onderwerp is de formulering van criteria voor certificering van bijscholingsactiviteiten. Dit alles op weg naar een beroepsregister voor leraren. In dit verenigingsjaar werd in de projectgroep WiVa (Wiskundeleraar Vakbekwaam), een samenwerking van NVvW en FIsmc, verder gewerkt aan de opzet van zo'n register voor wiskundeleraars.

WwF

Dankzij de vrijwillige bijdrage van de leden en de opbrengst van de boekenveiling konden door de werkgroep Wereldwiskunde Fonds (WwF) projecten worden uitgevoerd voor Mozambique, Kenia en Suriname (boeken). Op de NVvW-website is hieraan aandacht besteed.

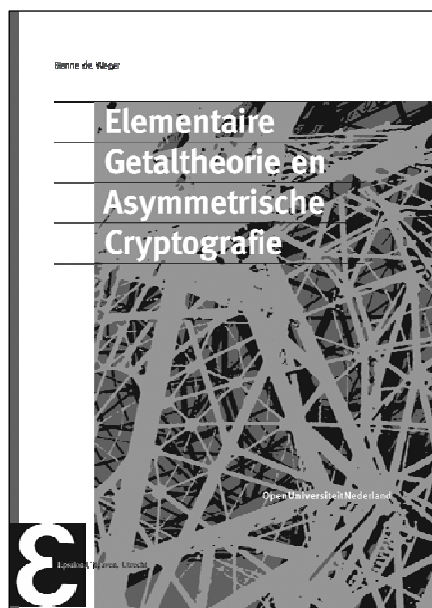
Vakantiecursus

De 63e Vakantiecursus in Amsterdam en Eindhoven, georganiseerd door CWI in samenwerking met de NVvW, met als thema 'Tel uit je winst – wiskunde in geld en spelen' werd door veel docenten bezocht en zeer gewaardeerd.

Slot

Het wiskundeonderwijs blijft in beweging en de richting waarin het drijft (of wordt gedreven) is geen onverdeeld gunstige. De herziene eindexamenprogramma's voor vwo en havo hebben nog maar één, resp. twee examens beleefd en er lijkt meer aan de hand te zijn dan alleen wat opstartproblemen. Hoe zal het verder gaan met (de deelname aan) wiskunde B? Komt wiskunde D voldoende van de grond? Hoe gaat het met de algebraïsche vaardigheden? En met de gewenste rekenniveaus? Doen de digitale wiskunde-examens bij vmbo-BB en -KB voldoende recht aan het examenprogramma? Wordt de aansluiting met het vervolgonderwijs al beter?

Het bestuur doet een beroep op alle leden mee te denken over deze en andere thema's. De vereniging heeft de inbreng van leden via artikelen, werkgroepen en de website hard nodig. Het bestuur hoopt dat die inbreng ook het komende jaar weer groot zal zijn.



Monique Stienstra in Euclides 86, No. 1, blz. 52-54:

*“...Gelukkig is er dan nu het boek **Elementaire getaltheorie en Asymmetrische Cryptografie**...”*

“...zeer geschikt voor docenten wiskunde die hun getaltheoretische kennis willen oprfrissen of aanvullen en die zich willen voorbereiden op het geven van een lessenreeks over cryptografie...”

“...het boek leent zich uitstekend voor zelfstudie...”

“...Wat ik ook erg aardig vind, zijn de stukjes tussendoor...over belangrijke wiskundigen als Gauss, Fermat en Euler...”

Benne de Weger, 192 blz, ISBN 978-90-5041-108-0, €21,-



Epsilon Uitgaven

bestellen bij boekhandel of via www.epsilon-uitgaven.nl

VERSCHENEN / THE PYTHAGOREAN THEOREM



Ondertitel: The Story Of Its Power And Beauty

Auteur: Alfred S. Posamentier

Nawoord: Herbert A. Hauptman

Uitgever: Prometheus Books Inc. (2010)

ISBN: 97 81 6161 4181 3

Prijs: € 24,99 (350 pagina's; hardcover)

Beschrijving – The Pythagorean theorem may be the best-known equation in mathematics. Its origins reach back to the beginnings of civilization, and today every student continues to study it. What most nonmathematicians don't understand or appreciate is why this simply stated theorem has fascinated countless generations. In this entertaining and informative book, veteran math educator

Alfred Posamentier makes the importance of the Pythagorean theorem delightfully clear.

He begins with a brief history of Pythagoras and the early use of his theorem by the ancient Egyptians, Babylonians, Indians, and Chinese, who used it intuitively long before Pythagoras's name was attached to it.

He then shows the many ingenious ways in which the theorem has been proved visually using highly imaginative diagrams. Some of these go back to ancient mathematicians; others are comparatively recent proofs, including one by the twentieth president of the United States, James A. Garfield. After demonstrating some curious applications of the theorem, Posamentier then explores the Pythagorean triples, pointing out the many hidden surprises of the three numbers that can represent the sides of the right triangle (e.g. 3, 4, 5 and 5, 12, 13). And many will truly amaze the reader.

He then turns to the 'Pythagorean means' (the arithmetic, geometric, and harmonic means). By comparing their magnitudes in a variety of ways, he gives the reader a true

appreciation for these mathematical concepts. The final two chapters view the Pythagorean theorem from an artistic point of view – namely, how Pythagoras's work manifests itself in music and how the Pythagorean theorem can influence fractals. Posamentier's lucid presentation and gift for conveying the significance of this key equation to those with little math background will inform, entertain, and inspire the reader, once again demonstrating the power and beauty of mathematics!

Over de auteur – Alfred S. Posamentier, Ph.D. (New York, NY), is dean of the School of Education and professor of mathematics education at The City College of the City University of New York. He has published more than 40 books in the area of mathematics and mathematics education, including *The Fabulous Fibonacci Numbers*, *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*, and *Math Charmers: Tantalizing Tidbits for the Mind*.

Zie ook: www.bol.com/nl/pl/engelse-boeken/the-pythagorean-theorem/1001004009321654/

Rangeren

[Frits Göbel]

Op baanvak A staat een rij wagons met rechts een locomotief L; *zie figuur 1*. (Dit treintje kreeg ik heel lang geleden van mijn broer Edwin. Het is van aluminium en ongeveer 18 cm lang.)

We nemen aan dat de wagons genummerd zijn: $1, 2, \dots, n$, maar ze staan niet op volgorde! De bedoeling is steeds om ze naar baanvak B te verplaatsen en wel zo dat de volgorde $n, n-1, \dots, 2, 1, L$ ontstaat. Hiervoor is de locomotief L beschikbaar en het emplacement bestaande uit de baanvakken M1 en M2. Ieder van deze baanvakken is lang genoeg voor de trein. Koppelen, ontkoppelen en ook het omzetten van wissels gaat vanzelf, zeg maar op wilskracht.

Opgave 1

Laat zien dat iedere volgorde kan worden gesorteerd en wel in een tijd die $O(n)$ is.

Voor degenen die niet vertrouwd zijn met het O -symbool, geef ik hier een definitie. $f(n) = O(g(n))$ betekent: er is een constante c zó dat $|f(n)| < c \cdot |g(n)|$ voor n voldoende groot.

Opgave 2

Als de locomotief willekeurig veel wagons tegelijk kan trekken, maar er maximaal twee tegelijk kan duwen, is het dan nog steeds mogelijk om iedere volgorde te sorteren? Zo ja, hoe verandert de orde van grootte van de benodigde tijd bij uw aanpak?

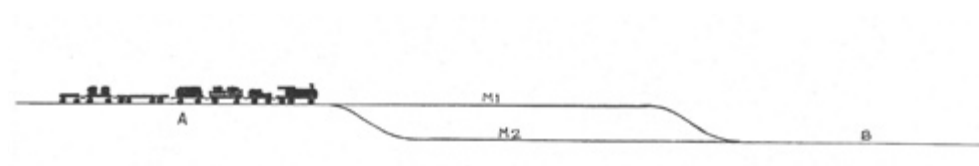
Opgave 3

Bepaal voor ieder van de zes permutaties van $1, 2, 3$ het aantal keren dat L van richting verandert bij optimale strategie.

Ik gebruikte bij de laatste opgave voor het puzzelen drie verschillende munten; ze zijn gemakkelijk te verschuiven en er staan al 'nummers' op.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.

Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 30 november. Veel plezier!



figuur 1

Ziggurats

De puzzel is, zoals gezegd, afkomstig uit Amerika. Ik hoorde hem van Bob Wainwright en hij verwees nog naar Ivan Skvarca, de vermoedelijke bron.

Er waren 21 inzenders; bijna iedereen had 20 punten. Ongeveer de helft van de inzenders gaf geen toelichting bij de oplossing. Zodoende kon die dus heel beknopt zijn.

Opgave 1 heeft drie oplossingen (spiegelbeelden tel ik niet apart). De onderste rij is daarbij: 13625, 14362 en 54217.

Johan Smits vond voor $n = 11$ per computer 21 oplossingen, een aantal dat ook door bovengenoemde Ivan werd gevonden.

Hans Linders, Herm Jan Brascamp en Wobien Doyer gaven bij het zoeken naar een oplossing relaties tussen de te bepalen getallen, waarmee het zoekwerk aanzienlijk wordt beperkt.

Diverse inzenders onderzochten ook het probleem met drie lagen.

Jan Verbakel ging het verst; hij liet zien dat er voor $n \leq 60$ geen oplossing is.

Geïnspireerd door opmerkingen van Lieke de Rooij en Kees Verhoeven heb ik aangetoond dat er voor voldoende grote n geen oplossing is. Een bovengrens voor het beginpunt is eenvoudig te bepalen door de (verwaarloosde) randeffecten af te schatten.

Opgave 2 heeft zes oplossingen.

Onderste rij: 152, 153, 254, 315, 354, 435.

Opgave 3 heeft vier oplossingen.

De onderste rij is 61T8, 6T18, 83T9, 8T39, waarbij T het getal 10 voorstelt.

Lieke de Rooij vond een oplossing voor $n = 14$ in vier lagen.

Grotere en kleinere driehoeken zijn ook mogelijk. Ruud en Thijs Stolkwijk bepaalden de oplossing voor $n = 6$, en Johan Smits voor $n = 15$. De onderste rij is hierbij 6, 14, 15, 3, 13. Harm Bakker bewees dat grotere driehoeken niet mogelijk zijn. Bovendien heeft hij de drie opgaven plus de mogelijke variaties onder één noemer gebracht. Hij bekeek ook nog een derde binaire operatie op de getallen, namelijk optelling modulo het grootste getal. En behalve twee of meer lagen onderzocht hij ook 'echte' piramiden waarbij het grondvlak een vierkant is.

Ladderstand

De top 10 van de ladder ziet er nu als volgt uit.

W. Doyer 567

L.H. v.d. Raadt 551

T. Kool 457

J. Hanenberg 454

H. Linders 399

H. Bakker 383

K. Verhoeven 357

W. v.d. Camp 349

K. v.d. Straaten 324

H.J. Brascamp 317

De ladderprijs, een boekenbon van 30 euro, gaat dus naar Wobien Doyer.

Gefeliciteerd!

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen

23. Experimenteren met kansen
 24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en Wiskunde
 28. Voorspellen met Modellen
 29. Getallenbrouwerij
 30. Passen en Meten met Cirkels
 31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
- Zie verder ook www.nvww.nl/page.php?id=7451 en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvww.nl/page.php?id=1779
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvww.nl/page.php?id=7450

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepeersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvww.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	21 december 2010	26 okt 2010
4	8 februari 2010	7 dec 2010
5	29 maart 2011	1 feb 2011
6	17 mei 2011	18 mrt 2011
7	28 juni 2011	3 mei 2011

vrijdag 5 november, Utrecht

Studiedag: Geogebra in de wiskundeles
Organisatie Flsme

zaterdag 6 november, Nieuwegein

Jaarvergadering/Studiedag 2010

Organisatie NVvW

Zie pag. 93 e.v. in dit nummer.

woensdag 10 november, Zwolle

Conferentie Doorlopende leerlijnen
Taal en rekenen
Organisatie SLO

vrijdag 12 november, Amsterdam

Nascholing Kansrekening en dynamica
Organisatie Vrije Universiteit i.s.m. NVvW
Zie pag. 83 in dit nummer.

vrijdag 12 november, Utrecht

ELWIEr conferentie
Organisatie Flsme

donderdag 18 november, Den Haag

Science & Technology Summit:
Meet the Future
Organisatie Platform Bèta Techniek

vrijdag 19 november, op de scholen

Wiskunde B-dag & Voorronde Wiskunde
Alympiade
Organisatie Flsme

vrijdag 19 november

7e Bartjens Rekendictee
Organisatie Stichting Bartjens

zaterdag 20 november, Leiden

Ars et Mathesis-dag 2010
Organisatie Stichting Ars et Mathesis

2011

zaterdag 8 januari, Utrecht

KWG-Wintersymposium 2011
Organisatie KWG
Zie pag. 70 in dit nummer.

wo. 19 t/m vr 21 januari, Noordwijkerhout

29e Panama Conferentie
Organisatie Flsme

di. 25 t/m za. 29 januari, Utrecht

Nationale Onderwijstentoonstelling
(NOT 2011)
Organisatie VNU Exhibitions Europe

vr. 28 en za. 29 januari, Noordwijkerhout

Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Flsme

maandag 31 januari, Utrecht

9e Wiskundeconferentie vmbo en
onderbouw havo.vwo
Organisatie APS-Exact



CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2a1/a 4a grade vergelijkingen
2a machtverval in natural output.

$$\text{Graph Func : Y=}$$

$$Y1: \text{NormCD}(9), 12, [-1]$$

$$Y2: 0, 5$$

$$Y3: [-1]$$

$$Y4: [-1]$$

$$Y5: [-1]$$

$$Y6: [-1]$$

Normale verdeling met grafiek (of tabel) Bereken stепен bij kansen -0.5.

$$\text{SolveN}(\sin X=0.5)$$

$$4 - 1\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, 2\frac{1}{6}\pi, 2\frac{5}{6}\pi$$

SolveN in mode RUN geeft meerdere antwoorden samen vol 118.

$$\text{SolveN}(2x^3-5x^2=3x)$$

$$\left\{-\frac{1}{2}, 0, 3\right\}$$

CASIO FX-9860G II

Dé analistie grafische rekenmachine met tekstboek display.



CASIO FX-82ES

Dé waterdichtelijke rekenmachine met tekstboek display.



$$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

Op de Natural Textbook Display worden onder andere breuken en wortels weergegeven, zoals in het leerboek.

De FX-82ES is ook perfect geschikt voor het gebruik van tabellen.

3 jaar garantie

Docentenexemplaar? Vraag naar de speciale actie: via e-mail verkoop@casio.nl

CASIO dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - verkoop@casio.nl - www.casio.nl

Heeft een **prachtig vak** veel toeters en bellen **nodig?**



Noordhoff Uitgevers

Wij van **Netwerk**
vinden van niet,
wiskunde is al
mooi van zichzelf!



NIEUW
Netwerk
Tweede Fase

Beoordeel het zelf en vraag een
beoordelingsexemplaar aan van de
nieuwe 5e editie Tweede Fase op
www.netwerk.noordhoff.nl

netwerk.

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent