

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

juli

10
nr **7**

jaargang 85

Op weg naar IMO2011

Gauß en de GGD

Doedelen

CoL

Mbo'er rekt op hbo

Jaarvergadering/
Studiedag 2010

Platform Wiskunde
Nederland

Ludolph van Ceulen
(1540-1610)



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

juli

10
nr 7

jaargang 85

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch

Klaske Blom, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Marjanne de Nijs

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Klaske Blom,

Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op

papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 65,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 37,50
- studentleden: € 32,50
- gepensioneerden: € 37,50
- leden van de VVWL of het KWG: € 37,50

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 60,00

Instituten en scholen: € 140,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

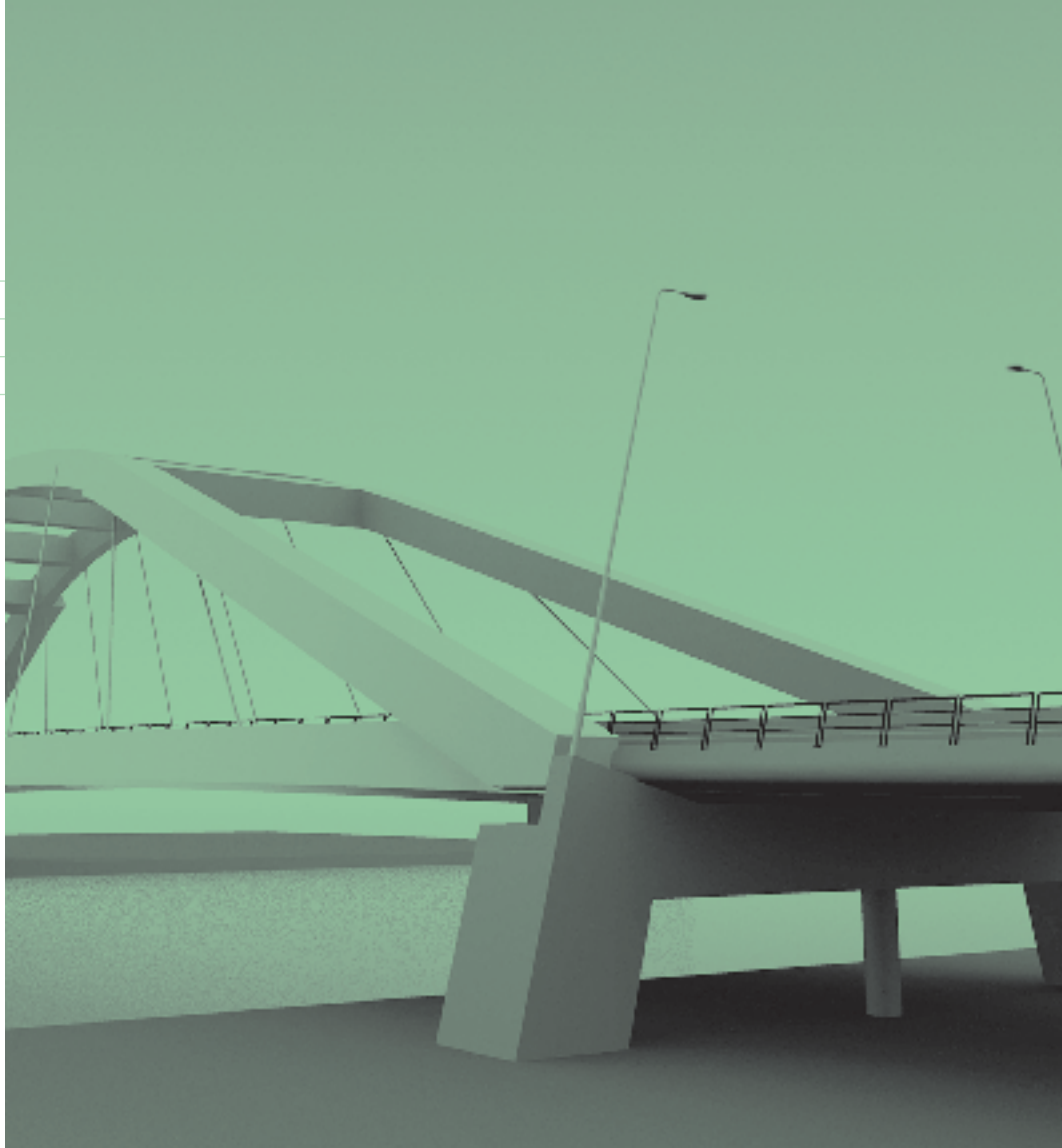
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. Sepideh Moosavi

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: s.moosavi@dekleuver.nl



(Bijna) vakantie

Het schooljaar zit er weer op, voor sommigen van ons al helemaal, anderen hebben nog een of twee weken te gaan. Heeft u al vakantieplannen? Bergen beklimmen in Tsjechië? Kamperen op Ameland? Of gaat u niet, kost het nog moeite om uw bezigheden los te laten? Geen nood, er is nog heel veel te doen op ons vakgebied; ik heb eens wat 'gegoogeld': u kunt leerlingen bijspijkeren in de vakantie, u kunt op zoek naar wiskundige objecten op uw vakantiebestemming, u kunt wiskundeles geven aan de Top Vakantie Academie, een vakantiecursus volgen van het CWI of via het Teachers Travel Web lotgenoten vinden om uw huis mee te ruilen of samen te ontbijten. Misschien zit er iets van uw gading bij, misschien ook niet. Als u maar geniet van de lengte van uw vakantie, want heel lang zal het vast niet meer duren voordat die ingekort wordt. Maar, laten we niet op de zaken vooruit lopen.

Eerst maar eens de oude jaargang uitluiden.

Jaargang 85 ten einde

Jaargang 85 loopt met dit zevende nummer ten einde. We hebben geprobeerd er weer een rijk en gevarieerd nummer van te maken. Gert de Kleuver doet verslag van het afscheid van Pieter van der Zwaart wiens carrière ten einde liep. Hans Schipper schrijft over een verrassing die zijn leerlingen hem bezorgden: ze zijn gaan doedelen (naar de door Willem Drees in zijn memoires zo genoemde activiteit) en hebben al 'spelend' mooie wiskundige structuren ontdekt. Henk Hietbrink schreef een inspirerend stuk over de manier waarop hij leerlingen leert 'bewijzen' met behulp van de wiskunde van Frans van Schooten jr. Ik attendeer u graag op Hietbrink's website waar veel bruikbaar materiaal te vinden is; u vindt een verwijzing aan het einde van zijn artikel. En Rob Bosch, die in een vorig nummer getroffen werd door het verband tussen decanteren en de ggd, laat nu zien hoe een lesje optellen en aftrekken van breuken een verrassende wending nam richting de ggd.

Helaas hebben we als redactie niet veel vakgroepen aan het woord gelaten in de afgelopen jaargang, ondanks ons goede voornemen. Op de valreep kunnen we u gelukkig toch nog een interview voorleggen, deze keer met de vakgroep van SGM, vmbo scholengemeenschap in Maarsbergen. Van vmbo, naar mbo en hbo: Hans Daale doet verslag van de hbo-conferentie, waar stevig van gedachten gewisseld is over interessante en moeilijke thema's. En dan nog van vo naar universiteit: aan de Universiteit van Twente ontmoeten docenten en didactici elkaar in een CoL, een community of learners, in een gezamenlijke poging om nieuw lesmateriaal te ontwerpen.

Een continue overgang van 85 naar 86

Sommige series in *Euclides* gaan langer mee dan één jaargang, en dan praat ik nog niet eens over onze vaste rubrieken. We zijn in 2010 een artikelenreeks gestart rond Ludolph van Ceulen, een serie die ook in de volgende jaargang zal doorlopen. In dit nummer vindt u een bijdrage van Jaap Top met o.a. de vraag waarom Ludolph van Ceulen steeds maar meer decimalen berekende van pi. Een andere doorlopende serie is de serie die ons voorbereidt op de Internationale Wiskunde Olympiade 2011: artikelen waarin oude IMO-opgaven besproken worden door oud-deelnemers. Deze keer haalt Johan Konter herinneringen op aan zijn opgave.

Graag wil ik van de gelegenheid gebruik maken om onze vaste rubrieksauteurs, aan het einde van deze jaargang, hartelijk te danken voor hun bijdragen. Zij hebben *Euclides* kleur gegeven en zorgen voor continuïteit en herkenbaarheid door dat ook in de komende jaargang te blijven doen. Frits, Ton, Harm Jan en Dorien, dank jullie wel!

De Verenigingspagina's

U vindt een artikel over het voorstel van het KWG en de NVvW tot de oprichting van een Platform Wiskunde Nederland (PWN). Douwe van der Kooi beschrijft het doel en de structuur van dit PWN.

En daar is 'ie weer: de oproep voor de studiedag. Ik weet wel dat we eigenlijk uit onze voegen barsten in het Anna van Rijn College, zeker 's middags; en ik weet ook dat het bestuur al zal gaan lunchen met wel 100 nieuwe leden die zich de laatste tijd aangemeld hebben, maar toch ... zullen we niet eens met ons allen proberen om meer nieuwe, jonge collega's mee te nemen? Bijtijds en enthousiast aansporen. U kunt ook uw bijdrage leveren aan deze dag door zich aan te melden om een workshop te geven. Meer informatie hierover vindt u in de eerste uitnodiging.

U kunt ook gewoon vakantie gaan vieren. Wat u ook doet, ik wens u een hele goede zomer en een fijne vakantie!

269	Kort vooraf [Klaske Blom]
270	Vijfendertig decimalen [Jaap Top]
273	Op weg naar IMO2011 [Johan Konter]
276	Wiskundeonderwijs in de dagelijkse praktijk [Klaske Blom]
278	Persbericht
279	Meetkunde met Frans van Schooten Junior (1615-1660) [Henk Hietbrink]
282	Persbericht
283	Het Geheugen [Harm Jan Smid]
286	Doedelen [Hans Schipper]
289	Gauß en de Grootste Gemene Deler [Rob Bosch]
292	Differentialen en Diepvriespizza's [Dorien Lugt]
293	Community of Learners [Ingrid Szwajcer]
295	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
297	2" en e' [Joost Hulshof]
298	MBO'er moet op het HBO kunnen blijven rekenen [Hans Daale]
302	Afscheid Pieter van der Zwaart als leerplanontwikkelaar [Gert de Kleuver]
303	Jaarvergadering/Studiedag 2010 [Marianne Lambriex]
304	Platform Wiskunde Nederland [Douwe van der Kooi]
306	Recreatie [Frits Göbel]
308	Servicepagina

Vijfendertig decimalen



[Jaap Top]

In 2010 is het 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen overleed. Om verschillende redenen is het mooi om daar aandacht aan te besteden. Van Ceulen was een verwoed rekenaar die steevast 'met lust ende arbeyt' verder rekende waar anderen stopten. Doordat hij niet academisch geschoold was, nam hij niet altijd de meest voor de hand liggende weg; wel bedreef hij wiskunde van internationaal niveau. Er zijn inderdaad verschillende redenen waarom we van mening zijn dat Van Ceulen en zijn werk de moeite waard zijn om een serie artikelen aan te wijden. Zijn werk ademt steeds een werklustige frisheid, zijn wiskunde is vaak mooi en boeiend, en dat maakt het tot heel interessant materiaal om met leerlingen aan te werken. Het kijken naar de problemen waarmee wiskundigen in zijn tijd worstelden, geeft een verdieping aan de schoolwiskunde van nu. Daar komt nog bij dat Van Ceulen interessante, soms zelfs spetterende, relaties met zijn omgeving had en daardoor leren we dan weer iets over de tijd waarin hij leefde.

Al met al dus genoeg reden om u acht (nu nog vier) nummers lang te trakteren op Van Ceulen-verhalen, geschreven door diverse specialisten.

Inleiding

Op 2 januari 1611 werd in de Pieterskerk te Leiden Ludolph van Ceulen begraven. Hij was twee dagen eerder, oudejaarsdag 1610, overleden, 70 jaar oud. Rekenmeester en scherm-schoolhouder Van Ceulen is niet overleden aan wat D. Bierens de Haan in zijn *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden* noemt 'eene epidemie van cirkelquadraturen'. Maar dat hij ermee besmet was, is zeker.

Over Van Ceulen valt te zeggen, dat hij in het harnas is gestorven. Op 10 januari 1600 was hij op aanbeveling van prins Maurits benoemd tot professor in de 'Nederduytsche mathematicque', aan de zojuist ingestelde Leidse ingenieursopleiding waarvan het studieprogramma was bedacht door Simon Stevin. Maurits, uiteraard vanwege de oorlog met Spanje, zag er wel wat in dat 'in de universiteit alhier soude worden gedoceert in goeder duytsertale die telkonste ende lantmeten, principalycken tot bevordering van de geenen die hen soudien willen begeven totter ingenieurscap'. Joannes Meursius schrijft in 1625, dat Van Ceulen deze baan elf volle jaren uitvoerde; dus dat moet hij dan tot heel kort voor zijn dood hebben gedaan. Diezelfde Meursius zegt (op pag. 345 van zijn *Athenae Batavae, sive De urbe Leidensi et academia, virisque claris, qui utramque ingenio suo, atque scriptis, illustrarunt, libri duo*) overigens, dat Van Ceulen overleed na lange tijd geleden te hebben aan een slopende kwaal.

Actief was Van Ceulen zeker nog in zijn laatste levensjaar: een boek van Dirck d'Hollander uit 1669 bevat twee brieven die Van Ceulen in maart en in mei 1610 aan een zekere Nicolaes Huybertsz. van Percijn stuurde. Naast wiskunde en schermen was er zijn gezin. Zelf had hij twaalf kinderen, en zijn vrouw Adriaantgen Simonsdr. bracht er uit een eerder huwelijk ook nog acht mee. Naast wiskundig werk is er een gedicht van Ludolph van Ceulen bewaard gebleven. Het werd in 1603 gepubliceerd in een boek van Christoffer Dybvad, waarin deze in vier delen de resultaten uit de *Elementen* van Euclides door middel van allerlei voorbeelden verduidelijkt. Ondanks dit soort wapenfeiten dankt Van Ceulen zijn naamsbekendheid vooral aan het merkwaardige gegeven dat na zijn dood, een onder- en bovengrens voor $\pi = 3,1415\dots$ op zijn grafsteen werden gebeiteld waarmee π tot op 35 decimale cijfers achter de komma wordt bepaald. Of hij dit helemaal alleen heeft uitgerekend, is niet belangrijk (een eerder huzarenstukje waarbij 32 cijfers achter de komma werden bepaald, volbracht hij met hulp van zijn leerling Pieter Cornelisz.). De grafsteen was tot in de 19e eeuw een van de toeristische attracties van de stad Leiden (zie foto 1 op pag. 272). Daarna verdween de steen; mogelijk omdat door slijtage de tekst niet

meer leesbaar was. In het jaar 2000 onthulde prins Willem-Alexander een reconstructie van het oorspronkelijke grafschrift (zie foto 2). Deze prijkt levensgroot op een van de pilaren in de Leidse Pieterskerk; dus slijtage zal ditmaal hopelijk nog lang op zich laten wachten. De fascinerende geschiedenis van de grafsteen en de poging tot een reconstructie zijn te vinden in het artikel *Het grafschrift van Ludolph van Ceulen* dat in juni 2000 in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* verscheen.^[1]

De bedoeling van dit artikel is niet zoveel mogelijk trivia over Van Ceulen te verzamelen, en evenmin om hem in een historische context te plaatsen. Er is veel over hem geschreven, waarbij met name het uitvoerige overzichtsartikel van F. Katscher uit 1979, *Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen*^[2], zeer de moeite waard is. We beperken ons hier tot een enkel, vrij simpel onderwerp: hoe bepaalde Van Ceulen zoveel decimalen van π , en waarom berekende hij steeds maar meer decimalen?

De methode van Archimedes

De klassieke methode om π te benaderen gaat terug tot tenminste Archimedes. Hierbij gaan we uit van een cirkel met straal 1. Neem een ingeschreven regelmatige n -hoek daarvan en ook een omgeschreven regelmatige n -hoek. De lengte van een zijde van de ingeschreven n -hoek noteren we als s_n , en die van de omgeschreven n -hoek als S_n (zie figuur 1).

Vergelijken van de omtrek van de cirkel met die van de ingeschreven n -hoek levert $2\pi > n \cdot s_n$, dus:

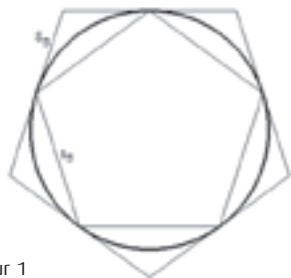
$$\frac{1}{2}n \cdot s_n < \pi$$

In navolging van Van Ceulen (Capittel IX in *Van den Cirkel*, uit 1596) vergelijken we vervolgens de oppervlakte van de cirkel met die van de omgeschreven n -hoek. Dit geeft:

$$\pi < n \cdot \frac{1}{2}S_n$$

Hiermee hebben dus we zowel een onder-





figuur 1

grens als een bovengrens voor π .

Van Ceulen bewijst in Capittel II van het voornoemde boek dat je s_{2n} gemakkelijk kan uittrekken als je s_n kent:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Hij noemt dit het 'Fondament' van zijn theorie. Vanuit een wat moderner perspectief is dit fundament eenvoudig af te leiden: door de (gelijkbenige) driehoek te nemen met als hoekpunten het middelpunt van de cirkel plus twee eindpunten van een zijde van de ingeschreven n -hoek, volgt de formule:

$$s_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}$$

Van Ceulen's formule zegt dus dat:

$$2 \sin \frac{\pi}{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

en dat is eenvoudig na te gaan met de formules $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ en $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Uiteraard is Van Ceulen's bewijs veel meetkundiger.

Wil je niet alleen een ondergrens voor π maar ook een bovengrens, dan is iets vergelijkbaars voor S_n handig. Ook dit is vanuit ons gezichtspunt prima te doen, want:

$$S_n = 2 \tan \frac{\pi}{n}$$

zoals min of meer per definitie volgt.

Schrijven we:

$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$$

dan leidt dit tot het verband:

$$S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$$

wat door Van Ceulen op een eenvoudige meetkundige manier in Capittel IX wordt aangetoond.

Uitgaande van een waarde als $s_4 = \sqrt{2}$ of $s_3 = \sqrt{3}$ leveren bovenstaande formules steeds nauwkeuriger benaderingen. Van Ceulen trakteert zijn lezers op een flink aantal daarvan (met name in Capittel X en XI), waarbij hij behalve met s_3 en s_4 , ook start met:

$$s_5 = \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}} \quad \text{en}$$

$$s_{15} = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$$

Het antwoord voor de vijfhoek en de vijftienhoek vinden we in Capittel V van *Van den Cirkel*. De formule voor s_{15} is recent nog eens prachtig uitgelegd door Steven Wepster in het scholierenblad *Pythagoras* van januari 2010 (zie [3]).

Ter illustratie beginnen we hier met s_3 :

n	s_n	S_n	$\frac{1}{2}n \cdot s_n$	$\frac{1}{2}n \cdot S_n$
3	1,732050808	3,464101616	2,598076212	5,196152424
6	1,000000000	1,154700539	3,000000000	3,464101616
12	0,5176380902	0,5358983848	3,105828541	3,215390309
24	0,2610523844	0,2633049952	3,132628613	3,159659942
48	0,1308062585	0,1310869256	3,139350203	3,146086215
96	0,06543816568	0,06547322086	3,141031953	3,142714601
192	0,03272346326	0,03272784428	3,141452473	3,141873051
384	0,01636227921	0,01636282681	3,141557609	3,141662748
768	0,008181208052	0,008181276500	3,141583892	3,141610176
1536	0,004090612584	0,004090621140	3,141590465	3,141597036
3072	0,002045307362	0,002045308432	3,141592108	3,141593752
6144	0,001022653814	0,001022653948	3,141592518	3,141592929
12288	0,0005113269238	0,0005113269406	3,141592620	3,141592723
24576	0,0002556634642	0,0002556634662	3,141592648	3,141592673
49152	0,0001278317322	0,0001278317325	3,141592652	3,141592658
98304	0,00006391586614	0,00006391586618	3,141592653	3,141592654

Zelfs een klein tabelletje als het bovenstaande illustreert al dat er behoorlijk gerekend moet worden om een benadering te krijgen die redelijk meedoet met wat een grafische rekenmachine probleemloos op het scherm tovert. Immers, een benadering waarvan de eerste m cijfers achter de komma correct zijn, betekent hier dat het verschil $\frac{1}{2}n(S_n - s_n)$ kleiner moet zijn dan 10^{-m} . Nu is dit verschil gelijk aan:

$$n(\tan \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n})$$

Dus met behulp van de benaderingen $\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3$ en $\tan(x) \approx x + \frac{1}{3}x^3$ voor x dicht bij 0, zien we dat:

$$n(\tan \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n}) \approx \frac{\pi^3}{2n^2}$$

Met, als in bovenstaand voorbeeld, $n = 3 \cdot 2^k$ levert dit een verschil tussen onder- en bovengrens kleiner dan 10^{-9} als $k \geq 16$, wat prima overeenkomt met de tabel. En algemener zie je dat:

$$\frac{\pi^3}{2(3 \cdot 2^k)^2} \leq 10^{-d}$$

geldt vanaf een zekere k die groter is dan een zekere constante maal d . Met andere woorden, het aantal keren (k) dat het aantal zijden moet worden verdubbeld, hangt op een lineaire manier af van de gevraagde precisie (d). Bovendien, om deze precisie te bereiken dienen alle tussenresultaten ook in minstens diezelfde precisie te worden bepaald. Zoals we zagen, is daarbij het trekken van wortels een belangrijke stap. Willen we zo'n wortel in een zeker aantal decimalen precies, dan is het nodig om het getal waaruit de wortel wordt getrokken, in tweemaal zoveel decimalen te kennen.

Voor de berekening op Van Ceulen's grafsteen zal dan ook flink gerekend zijn met getallen die zo'n 70 decimalen achter de komma hebben. In werkelijkheid waren het er zelfs iets meer: Willebrord Snellius publiceerde in 1621 het boek *Cyclometricus, De Circuli dimensione secundum Logistarum abacos*, en daarin staat dat Van Ceulen

begon met een vierkant ($n = 4$) en vervolgens zestig maal verdubbelde (dus hij stopte bij $n = 2^{62}$). Hij rekende daarbij de getallen $s_4, s_8, \dots$ en $S_4, S_8, \dots$ uit met een precisie van 75 decimalen.

Waarom?

Het kan niet anders of Van Ceulen moet veel plezier in rekenwerk hebben gehad. Dat beaamt hij overigens zelf ook. Maar zelfs dan kan je je afvragen waarom hij niet stopte na tien, of hooguit twintig decimalen. Elke keer moest immers de berekening weer helemaal opnieuw, en de methode waarmee dat alles gebeurde, bleef onveranderd.

Historici mogen zich nog een tijdje over dit fanatisme buigen. Een indruk die zeker uit Van Ceulen's werk en zijn rol in zijn tijd naar voren komt, is dat hij min of meer natuurlijk in de positie van verdediger van correcte antwoorden en methoden terechtkwam. De al eerder genoemde 'epidemie van cirkelquadraturen' leidde tot een aantal rare fouten. Al was Van Ceulen de taal waarin de gevestigde wetenschappers met elkaar correspondeerden (het Latijn; [red.]) niet machtig, zijn antwoorden en tabellen kon iedereen lezen. Na twintig decimalen van π in *Van den Cirkel* (1596) doet hij het nog eens over met 32 decimalen; zie pag. 163 van een ander boek van hem: *De Arithmetische en Geometrische fundamenten*, dat na zijn dood verscheen. Van Ceulen's vrouw schrijft voorin dat boek (1615): 'Soo hebbe ick het behoorlijck gheacht te wesen, zijn resterende werck, het welcke onder my is berustende, soo veel als moghelijk is, in het licht te brengen.'

Die 32 decimalen vond hij, zoals eerder gezegd, samen met een leerling van hem. Eentje minder, 31 dus, vinden we in het ook al eerder genoemde boek van Dybvad (1603), met de mededeling dat ze afkomstig zijn van Van Ceulen.

De 7-ste en 14-te fig.



- Hij is met een knie op het voetstuk terecht.
- Vanuit het zuidpunt links is een boog, die samen de cirkel blijft met dezelfde straalmaat.
- De nieuw-gevonden aannemingswijze ten aanzien de cirkelmaat is zinnig en is de lineaal. De lineaal is niet meer lijn dik, is vandaar groot dan de van kool, etc.
- Deze lijn worden dan overgenomen van de cirkel doende (Sijppet zijn).

figuur 2

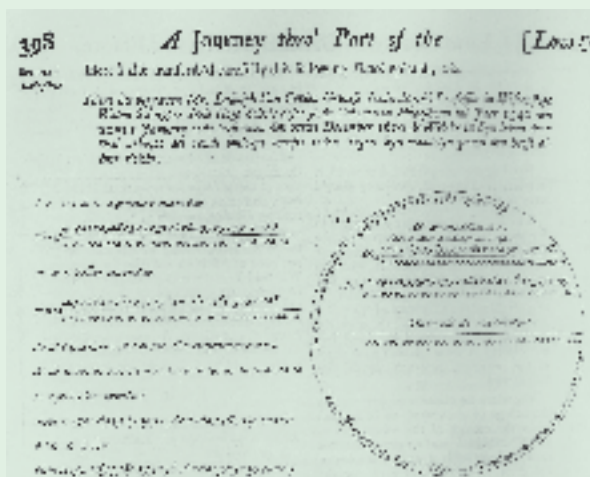


foto 1 Transcriptie van het
oorspronkelijke grafschrift
(Ph. Skippon, 1732)



foto 2 De nieuwe
gedenkteen
ontworpen en
vervaardigd door
Cornelia Bakkm
(foto: A.L. Boon)

Moest dat dan zo precies? Mogelijk kon hij op deze manier een resultaat van dominee Johan Philip Lansbergen controleren. Deze publiceerde 28 decimalen van π in zijn boek *Triangulorum geometriae libri quator*. De methode wijkt af van die van Van Ceulen. Het is wat onduidelijk wanneer het boek precies is verschenen (een datum die erin voorkomt, is 1604), maar zeker is wel dat Lansbergen het boek *Van de Cirkel* citeert, en ook dat Van Ceulen Lansbergen noemt als een van de mensen die ook aan cirkelkwadratuur doet.

Niet lang na Van Ceulen's dood staat ook in het al eerder genoemde boek van Snellius een methode om π te benaderen, en zelfs eentje die aanzienlijk minder rekenwerk vergt. Zou Snellius, die Van Ceulen heel goed kende, die methode al veel eerder hebben gehad en zelfs aan Van Ceulen hebben verteld? Het is giswerk, maar het zou een verklaring kunnen geven waarom na al het rekenen, ook nog eens de geslaagde recordpoging van 35 decimalen werd gedaan. Overigens, Snellius illustreerde zijn verbetering, door 34(!) decimalen van π te berekenen op een veel eenvoudiger manier dan Van Ceulen dat deed. Pas in 1630 verbrak de jezuïet Christoph Grienberger, met behulp van de methode van Snellius, het record van Van Ceulen: hij vond 38 decimalen.

Het kritisch toetsen van het werk van tijdgenoten, ook waar het de cirkelkwadratuur betreft, kan overigens nog steeds, en het levert een aardig onderwerp voor derde of vierde klassers. Na wat uitleg over de stelling van Pythagoras en de definitie en eerste eigenschappen van de sinus kunnen

veel scholieren al wel nagaan dat hetgeen *in figuur 2* is gesteld, niet klopt. De figuur is overgenomen van pag. 144 uit een in 2003 verschenen boek van Greetje Molenaar (Uitgeverij Akasha, Eeserveen) over het tekenen van mandala's.

Uit *dit* voorschrift volgt dat $s_7 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dus $\sin(\pi/7) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$. In werkelijkheid verschillen s_7 en $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ pas in het derde cijfer achter de komma. Dus als mevrouw Molenaar en haar lezers met behulp van niet al te grote cirkels regelmatige 7-hoeken construeren, zal de fout nauwelijks zichtbaar zijn. En met geleerden als Scaliger (hij publiceerde in 1594 dat $\pi = \sqrt{10}$), Nicolaus Ursus (hij beweerde in 1588, in navolging van Simon van der Eycke en anderhalve eeuw eerder al de Duitse geleerde Nicolaus Cusanus, dat $\pi = 2\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$), doet mevrouw Molenaar het best redelijk: haar bewering leidt tot $\pi = 7\arcsin(\frac{1}{4}\sqrt{3}) \approx 3,134826779$. Had ze Capittel XIV in *Van den Cirkel* gelezen, dan zou ze hebben kunnen zien dat haar s_7 niet klopt. Aan het eind van dat hoofdstuk geeft Van Ceulen namelijk een tabel met daarin de waarden van s_n voor $3 \leq n \leq 80$, in 14 decimalen nauwkeurig. De tabel eindigt met de bescheiden uitspraak: 'Godt alleen de eer'. In de tabel vinden we dat:

$$s_7 \approx 0,86776747823511$$

terwijl geldt:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,86602540378445$$

Dank

Met dank aan Steven Wepster voor zijn opmerkingen bij een eerdere versie van deze tekst.

Info

Zie verder ook: www.ludolphvanceulen.nl

Noten

- [1] Dit artikel, geschreven door R.M.Th.E. Oomes, J.J.T.M. Tersteeg en J. Top, is elektronisch beschikbaar via www.math.rug.nl/~top/graf.pdf.
- [2] In: *Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse*, volume 116. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften; pp. 85–129.
- [3] Dit artikel is elektronisch beschikbaar via www.ludolphvanceulen.nl/documents/Pythagoras-2010jan-SW.pdf.

Over de auteur

Dr. Jaap Top is hoogleraar getaltheorie en algebraïsche meetkunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. In 2000 organiseerde hij op initiatief van Hendrik Lenstra het evenement 'Pi in de Pieterskerk'. E-mailadres: j.top@rug.nl

Op weg naar IMO2011

IMO2004 – OPGAVE 1

[Johan Konter]



Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In 2004 deed ik voor het eerst mee met de IMO, in Athene. De eerste dag was een dag reizen, en die bestond vooral uit veel wachten en drie uur vliegen. De tweede dag is er nog wat geoeftend en was de officiële opening. De derde dag was het dan eindelijk zo ver, de wedstrijd begon. Ik bespreek hier de opgave waarover ik me die morgen als eerste zou buigen, net als 485 andere scholieren. Toen heb ik deze opgave niet opgelost, maar een paar weken geleden heb ik het opnieuw geprobeerd en wel een oplossing gevonden. Ik gun u een klein inzicht in mijn gedachten en neem u mee in de trein van ideeën zoals die ongeveer door mijn hoofd denderde.

De opgave

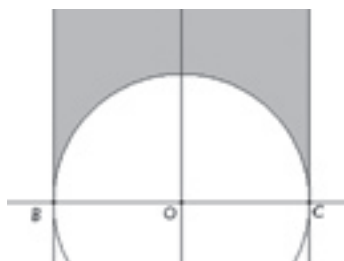
Laat ABC een scherphoekige driehoek zijn met $|AB| \neq |AC|$. De cirkel met middellijn BC snijdt de zijden AB en AC in respectievelijk M en N . Het midden van BC noemen we O . Het snijpunt van de bissectrice van $\angle BAC$ en de bissectrice van $\angle MON$ noemen we R .

Bewijs dat de omgeschreven cirkels van $\triangle BMR$ en $\triangle CNR$ een gemeenschappelijk punt hebben dat op het lijnstuk BC ligt.

Bij meetkunde is het belangrijk een plaatje te maken, waardoor je je kan laten leiden om tot een bewijs te komen. Laten we daarmee dan maar beginnen.

Een willekeurige driehoek tekenen is echter niet makkelijk. Je eindigt bijna altijd met een driehoek die óf bijna rechthoekig is, óf gelijkbenig. Als we ook de tweede zin van de opgave lezen, voordat we een plaatje maken, dan zien we dat daarin een hint wordt gegeven om het plaatje anders te beginnen. Laten we dus beginnen met een

cirkel met middelpunt O en een willekeurige middellijn waarvan we de eindpunten B en C noemen. Die middellijn tekenen we voor het gemak horizontaal. Nu kunnen we A heel makkelijk kiezen zodat we aan alle eisen voldoen. Als we A tussen de twee verticale lijnen door B en C kiezen én buiten de cirkel (zie *figuur 1*), dan is driehoek ABC automatisch scherphoekig.



figuur 1

We maken hierbij gebruik van een uitbreiding op de *stelling van Thales*. Deze stelling zegt dat $\angle BAC = 90^\circ$ dan en slechts dan als A op de cirkel met middellijn BC ligt. De uitbreiding zegt dat $\angle BAC > 90^\circ$ als A binnen de cirkel ligt en dat $\angle BAC < 90^\circ$ als A buiten de cirkel ligt. Als we ook zorgen dat A niet in de buurt ligt van de verticale lijn door O , dan is het ook duidelijk dat $|AB| \neq |AC|$. Als we het punt A kiezen, dan krijgen we meteen een M en een N . Op de IMO zitten de opgaven meestal wel goed in elkaar, dus verwachten we dat alle eisen en restricties nodig zijn. En hier zien we dat driehoek ABC scherphoekig is om ervoor te zorgen dat M tussen A en B ligt en N tussen A en C . Dat verklaart waarom die eis is opgenomen in de opgave.

Iets wat mij nu meteen opvalt is dat $\angle MNA = 180^\circ - \angle MNC = \angle ABC$ en dat $\angle NMA = 180^\circ - \angle NMB = \angle ACB$, beide wegen

de stelling dat overstaande hoeken in een koordenvierhoek samen 180° zijn. Dit betekent dat $\triangle ANM \sim \triangle ABC$, een resultaat dat wel vaker nuttig is.

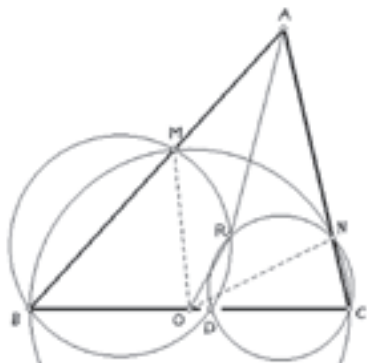
Als we verdergaan met het tekenen van de bissectrices, kunnen we meteen opmerken waarom we de tweede restrictie, $|AB| \neq |AC|$, nodig hebben. Deze zorgt ervoor dat de bissectrices van de hoeken BAC en MON niet evenwijdig lopen, en dus ook niet samenvallen.



figuur 2

Om dit in te zien tekenen we de vierhoek $AMON$ waarbij we in gedachten houden dat $|MO| = |NO|$, omdat het allebei stralen zijn van de cirkel met middellijn BC . Dit betekent dat driehoek MON gelijkbenig is en dat de bissectrice van $\angle MON$ loodrecht op de diagonaal MN staat en deze middendoor deelt. Als de bissectrices evenwijdig zouden zijn, zou de bissectrice van $\angle MAN$ ook loodrecht op MN moeten staan. Wegens gelijke hoeken en een gemeenschappelijke zijde zouden de twee driehoeken waarin driehoek MAN wordt verdeeld (zie *figuur 2*), congruent zijn en dit betekent dat $|MA| = |NA|$. Omdat we al gezien hebben dat $\triangle ANM \sim \triangle ABC$, zou $|MA| = |NA|$ inhouden dat $|AC| = |AB|$, wat in tegenspraak is met ons gegeven. Nu we hebben gezien dat de bissectrices

precies één snijpunt hebben, kunnen we het punt R dus gerust tekenen. We maken de tekening af door de omgeschreven cirkels van de driehoeken BMR en CNR te tekenen; zie **figuur 3**.

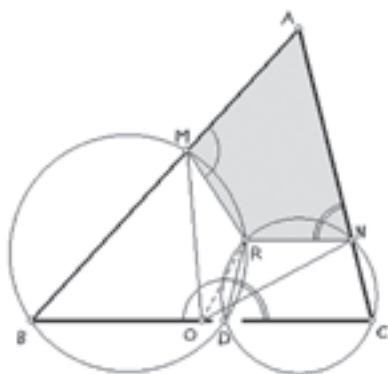


figuur 3

Tot nu toe hebben we alleen nog maar een tekening gemaakt. Maar door goed na te denken tijdens (en voorafgaand aan) het tekenen hebben we ook al wat mysteries uit de opgave ontrafeld en hebben we ondertussen een redelijk idee wat er met de opgave moet gebeuren. Als je dit in het eerste half uur van de wedstrijd doet, is het een mooi moment om nog vragen te stellen. In het eerste half uur mag je namelijk vragen stellen over definities en dingen die onduidelijk zijn. Natuurlijk wordt er in de antwoorden nooit iets weggegeven van de oplossing.

Omdat we nu al wat gepuzzeld hebben met de bissectrices, maar het nog steeds niet duidelijk is wat we met dat snijpunt R moeten, beginnen we eerst maar eens terug te werken vanaf het eind: hoe gaan we laten zien dat het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van de driehoeken BMR en CNR op het lijnstuk BC ligt?

Laten we dit snijpunt van de omgeschreven cirkels van die driehoeken eerst maar eens een naam geven, zeg D . Eigenlijk moeten we dan gewoon laten zien dat B , D en C op één lijn liggen. We hebben hiervoor heel veel technieken, maar de meest traditionele en makkelijkste manier is wel om te bewijzen dat $\angle BDC = 180^\circ$. En omdat $BDRM$ en $CDRN$ per definitie koordenvierhoeken zijn en we dan altijd wel wat kunnen zeggen over hoeken, lijkt dit helemaal geen slecht idee.



figuur 4

We kijken nog eens goed naar het plaatje (in **figuur 4**) en zien dat:

$$\begin{aligned}\angle BDC &= \angle BDR + \angle RDC \\ &= (180^\circ - \angle RMB) + (180^\circ - \angle CNR) \\ &= \angle AMR + \angle RNA\end{aligned}$$

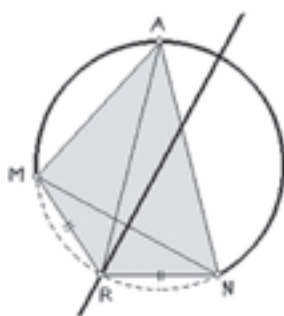
Dat betekent dat $\angle BDC = 180^\circ$ dan en slechts dan als $\angle AMR + \angle RNA = 180^\circ$. Oftewel B , D en C liggen op één lijn dan en slechts dan als $AMRN$ een koordenvierhoek is.

Kijk, daar hebben we wat aan. Nu weten we wat we met R moeten: *bewijzen dat $AMRN$ een koordenvierhoek is*.

Dit kunnen we op twee manieren doen.

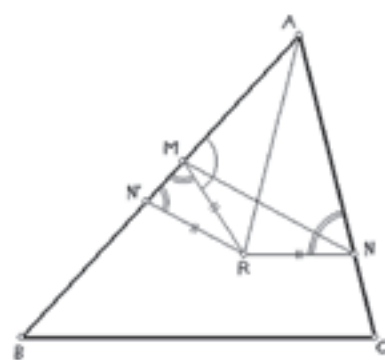
De *eerste* manier is op te merken dat $|OM| = |ON|$ en dat $\angle MOR = \angle RON$, waaruit we kunnen afleiden dat $\triangle MOR \cong \triangle NOR$, en dus $|MR| = |NR|$. Als we dit combineren met $\angle MAR = \angle RAN$, lijkt het erop dat we kunnen concluderen dat $AMRN$ een koordenvierhoek is.

Helaas klopt dit *alleen* als deze eigenschap *andersom* geformuleerd is: als in een koordenvierhoek $AMRN$ geldt dat $\angle MAR = \angle RAN$, dan geldt $|MR| = |NR|$.



figuur 5

We kijken bij gegeven M , N en R met $|MR| = |NR|$ naar de verzameling van punten A waarvoor geldt dat $\angle MAR = \angle RAN$. Deze verzameling blijkt te bestaan uit een deel van de omgeschreven cirkel van driehoek MNR , maar *ook* alle punten op de middelloodlijn van MN voldoen (zie **figuur 5**). Dit suggereert al dat het laatste stukje toch iets lastiger is dan het oorspronkelijk leek.



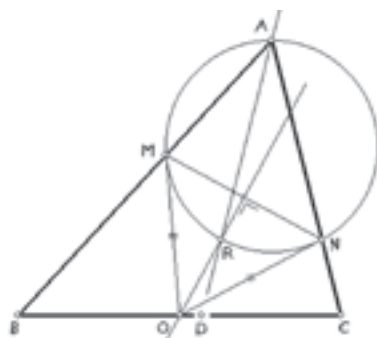
figuur 6

De elegantste manier om dit op te lossen is te kijken naar het spiegelbeeld van N in AR dat we N' noemen (zie **figuur 6**). Omdat we bij het tekenen al hadden gevonden dat $|AM| \neq |AN|$, vallen M en N' niet samen. Omdat $\angle MAR = \angle RAN$ liggen A , M en N' op één lijn. Hierbij nemen we aan dat N' tussen B en M ligt, anders draaien we gewoon M en N om. We weten dat $|MR| = |NR| = |N'R|$; dus is driehoek MRN' een gelijkbenige driehoek met top R . Nu zien we dat:

$$\begin{aligned}\angle AMR + \angle RNA &= \\ &= \angle AMR + \angle RMN' = 180^\circ\end{aligned}$$

En dus is $AMRN$ een koordenvierhoek.

De *tweede* manier maakt gebruik van het feit dat de bissectrice van $\angle MON$ het lijnstuk MN loodrecht middendoor deelt, iets dat we tijdens het tekenen al opgemerkt hebben (zie **figuur 7**). Dat betekent dat R het snijpunt is van de middelloodlijn van MN en de bissectrice van $\angle MAN$, waarvan we weten dat ze niet samenvallen.



figuur 7

Maar we weten al waar deze twee lijnen elkaar snijden: als we kijken naar de omgeschreven cirkel van driehoek AMN , gaan deze twee lijnen namelijk allebei door het midden van de boog MN waarop A *niet* ligt. De lijnen snijden elkaar dus op de omgeschreven cirkel van driehoek AMN . En dus is $AMRN$ een koordenvierhoek.

Met deze twee manieren van bewijzen dat *AMRN* een koordenvierhoek is, zijn we aan het einde gekomen van mijn betoog. Het kan dan echter nooit kwaad een en ander nog eens goed na te lezen om te kijken of je wel precies hebt bewezen wat gevraagd werd. Op de IMO in 2004 schijnen er behoorlijk wat deelnemers te zijn geweest die een puntje hebben misgelopen omdat ze *wel* hadden bewezen dat het snijpunt van de cirkels op de lijn *BC* lag, maar *niet* dat dit punt *tussen B en C* lag.

Voor de lezers die ondertussen de smaak te pakken hebben: jullie kunnen blijven zitten; we zijn nog niet op het eindstation van deze trein. Er zijn namelijk nog twee aardige wetenswaardigheden. Ten eerste is *R* het middelpunt van de *ingeschreven* cirkel van driehoek *MON* en ten tweede gaat de bissectrice van $\angle BAC$ door *D*, het gemeenschappelijke punt van de twee cirkels met *BC*. Deze feitjes staan los van elkaar en het zijn allebei leuke puzzels. Veel plezier nog. Dit is mijn halte, ik stap er hier uit.

Over de auteur

Johan Konter heeft in 2004 en 2005 meegedaan aan de Internationale Wiskunde Olympiade en is sinds 2007 betrokken bij de training van de nieuwe talenten. In 2007 heeft hij de Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade georganiseerd en vorig jaar was hij een van de organisatoren van de eerste Benelux Wiskunde Olympiade. Hij studeert wiskunde aan de Universiteit Utrecht en zal tijdens de IMO2011 in Nederland teamleider zijn van het Nederlandse team.
E-mailadres: konter@gmail.com

“Cursus door Zes eeuwen Wiskunde”, € 29,50 franco, toont u de genialiteit van alle grotere wiskundigen tussen 1300 en 1900, in detail en als grove schets, met veel uitgewerkte voorbeelden in moderne notatie. De schrijver laat het wiskundig materiaal voor zich spreken liever dan historisch (mis)leidende uitspraken te doen.

468 trefwoorden in het register, 25 hoofdstukken met 130 figuren en 565 noten vormen een rijk naslagwerk. U noemt het maar, en het staat er

Kijk op home.telfort.nl/derks.esp/geschwiskunde.

Doelgroepen: leraren wiskunde, schoolbibliotheek, studenten wiskunde, wiskundehobbyisten, ingenieurs enz.

In **“Van Euclides tot ‘al-gabr”**, € 15,= franco, beschrijft Derks de oude middelbareschool-wiskunde, geërfd van Babyloniërs (2100-330: kleitabletten), Grieken (Thales van Milete, geb. 640 v.Chr., tot Hypatia van Alexandrië, † 415 na Chr.) en Arabieren (Al-Chwârizmî, ca. 800, tot val van Bagdad in 1258).

Deze twee boeken samen bestrijken grofweg de gehele geschiedenis van de wiskunde tot 1900. Maak € 29,50, € 15,= of € 44,50 over naar rekeningnummer **3896.42.894** ten name van J.H.Derks en **vermeld eigen naam en adres!** (voor korting bij meerdere exemplaren bel 038-7851423)

De auteur

Johan Derks

Onze leerlingen kunnen wel wat hulp gebruiken

...en u ook!

De wiskunde op onze site is erg geschikt voor het elektronisch schoolbord, voor thuisgebruik en voor maatwerk op papier: Wiskunde voor de internetgeneratie.

Gratis praktische ondersteuning voor elke docent en leerling:
Theorie • Uitleg • Voorbeelden • Applets

Kom naar **www.math4all.nl** en... vergeet de site niet aan uw leerlingen door te geven. Wikiwijsversie op **www.wikiwijs-wiskunde.nl**

Onze site is ontwikkeld en wordt onderhouden door ervaren, deskundige en bevoegde liefhebbers van wiskunde.



Math4all

Wij kunnen óók hulp gebruiken.
Steun Stichting Math4all, geef de site door aan collega's en leerlingen.

Gratis! maar niet goedkoop

Wiskundeonderwijs in de dagelijkse praktijk

OP BEZOEK BIJ SGM,
VMBO SCHOLENGEMEENSCHAP MAARSBERGEN

[Klaske Blom]

De vakgroep wiskunde van SGM

De vakgroep bestaat uit vijf personen. Vier mannen, de heren Schreurs, Mentjens, van der Vegt en Arp, geleid door een vrouw, mevr. Ruedisueli. De vakgroep herbergt onverwachte talenten: een van de collega's is columnschrijver voor een strijdblad en een ander geeft (iets minder onverwacht) ook computerkunde.

Ik spreek met Karen Ruedisueli, de jongste uit de vakgroep, een bevlogen vakvrouw, recht voor zijn raap en met een groot hart voor leerlingen. Iemand die zich helemaal op haar plek voelt op de SGM. Zij heeft een bewuste keus gemaakt om in het vmbo te werken. Wat haar zo aanspreekt, is de directheid van de kinderen, het klikt goed. Ze vertelt: *Het is wel zwaar werk, ook omdat leerlingen je veel vertellen. Soms kan je ook veel betekenen voor een kind, bijvoorbeeld door even te sms'en voor een examen met een leerling van wie je weet dat er thuis weinig steun is. Ook moet je politieagentje willen spelen en de kinderen in het gareel houden. Op basis-niveau is alles mooi meegenomen wat ze binnen krijgen; daar moet je het vak zo leuk mogelijk brengen zodat ze uiteindelijk voor jou gaan werken. Op kader- en TL-niveau is dat wel anders: daar neem ik ze bij de hand en stuur heel nadrukkelijk op wat er gedaan moet worden. Je kunt zoveel kwijt aan deze kinderen, je kunt ze zoveel leren.*

SGM, vmbo Maarsbergen

De school is een vmbo-scholengemeenschap met een breed onderwijsaanbod van mavo tot diverse beroepsopleidingen. Een van de uitgangspunten van de school is dat leerlingen vakmanschap meekrijgen en zich als persoon ontwikkelen. De school wil de leerlingen voorbereiden op onze democratische maatschappij, waarin zij kunnen functioneren met respect voor de ander en voor het milieu.

De school biedt veel verschillende voorbereidende beroepsrichtingen: consumptieve techniek waaronder horeca, toerisme,

voeding; metalectro (een combinatie van metaal- en elektrotechniek); bouwtechniek waaronder schilderen, metselen en timmeren; voertuigtechniek; installatietechniek; mode en commercie. Van oudsher trok de school vooral veel jongens, maar door de richtingen mode en consumptieve techniek komen steeds meer meisjes binnen.



foto 1 Karen Ruedisueli

De SGM was een internaatschool en hoorde bij het internaat Valkenheide. Hoewel de school nog steeds op het terrein van Valkenheide staat, zitten er nu maar 26 jongens van het internaat op school. Als jongens niet sociaal genoeg zijn om in het schoolsysteem van de SGM mee te kunnen doen, gaan ze naar de meer gespecialiseerde school VSO de Sprong.

Karen vertelt over de school: *We zijn een kleine, gezellig school, met zo'n 550 leerlingen die uit de hele regio naar ons toe komen. We zijn een echte praktijkschool, hebben maar één TL-klas in het 3e leerjaar en één TL-klas in het 4e leerjaar. De school streeft er wel naar om meer TL-leerlingen binnen te krijgen. Ik heb 81 collega's, inclusief de oop-ers. Ouders en leerlingen kiezen bewust voor SGM vanwege de praktijkvakken. In het tweede jaar bieden we een vakkencarroussel om kennis te maken met alle praktijkvakken zodat daarna een gemotiveerde keuze kan worden gemaakt. Eigenlijk is het te vroeg om leerlingen al te*

laten kiezen na twee jaar. Maar gelukkig zitten ze er niet aan vast, en kunnen ze op het ROC altijd nog een andere richting in slaan. Op digitaal gebied noemt Karen de school vooruitstrevend: In elk lokaal is een computer. We werken met een elektronische leeromgeving waarop we verplicht ons huiswerk moeten zetten. Verder hebben ouders toegang tot magister om de voortgang en resultaten van hun kinderen te kunnen volgen. Zelf gebruik ik in mijn lessen weinig computers omdat ik wil dat leerlingen hun basale vaardigheden goed bijhouden. Ik verheug me er wel op om straks het digibord te gaan gebruiken, na een cursus weliswaar, omdat ik denk dat dat wel een meerwaarde heeft. Het lijkt me ideaal, onze methode levert veel extra aansprekend materiaal dat ik dan zo kan gebruiken.

De wiskundeleraar aan het werk

Ik vraag Karen naar haar **didaktiek**: *Elke les begint met het bespreken van alle opgaven. Ik schrijf alles uit op het bord, elke opgave. Dat motiveert, want dan zien ze hoe het moet en dat ze het goed gedaan hebben. Ze schrijven alles mee. Daarnaast krijgen ze na afloop van de les ook de uitwerkingen uitgeschreven op papier mee. Daar heb ik ook een aantekeningenblad aan toegevoegd en dat gebruiken ze om te leren voor de toets. Dat aantekeningenblad helpt om de papieren beter te bewaren. Na een bespreking kunnen ze zelf aan het werk met nieuwe opgaven die ik niet van tevoren uitleg. Ik vind dat ze het zelf moeten proberen, de uitleg staat goed in het boek. Als het niet lukt, kunnen ze vragen stellen en leg ik individueel uit. Ze werken dan wel in tweetallen en kunnen elkaar ook helpen. Er zijn natuurlijk uitzonderingen: bijvoorbeeld bij het berekenen van hoeken, geef ik wel eerst aanwijzingen over de gewenste notatie. En wat als de leerlingen hun huiswerk niet maken? Een van mijn eigen maatregelen is dat ik ze, thuis, de samenvatting over laat schrijven. Als ze een aantal keer geen huiswerk hebben*

gemaakt of hun spullen niet bij zich hebben, krijgen ze een brief van school; dit is een schoolmaatregel.

Een ander onderwerp: **de computer-examens**. Tegen de tijd dat u dit interview leest, zijn ze alweer achter de rug, maar destijds stonden we er nog voor; Karen in spanning over de resultaten van haar leerlingen. Karen neemt geen blad voor de mond. Ze baalt van de computerexamens omdat ze de kwaliteit uit ons vak halen: *Bepaalde dingen moet ik leerlingen anders aanleren omdat ze hun oude schrijfmanner niet op de computer kwijt kunnen. De laatste maanden kan ik dus niet op inhoud oefenen, maar moet ik leerlingen nieuwe notaties aanleren. Door de proeven die we gehouden hebben, weten we nu een beetje wat wel en niet kan op de computer, en de laatste paar maanden moet ik leerlingen dus dingen afleren die ik ze al die jaren aangeleerd heb. Om een voorbeeld te noemen: bij uitwerkingen van opgaven waarin ze de stelling van Pythagoras moeten gebruiken, liet ik leerlingen altijd tabellen maken; dat kan niet op de computer en nu moeten ze het dus opeens anders doen. Verder zijn er ook veel opgaven waar leerlingen alleen een antwoord hoeven in te vullen, zonder berekeningen te geven. Afschuwelijk, want als het antwoord fout is, is alles fout.*

Wij doen mee aan de pilots met de computer-examens, dat is een schoolkeuze. Het voordeel is dat je inspraak hebt en dat je je mening kunt uiten. Voor het kaderexamen waren de resultaten tijdens de proef verschrikkelijk. Er werden nauwelijks formules gevraagd. Leerlingen moesten een rekenmachientje gebruiken dat op het scherm stond. Als ze dat vergaten op te slaan, was hun berekening weg en kregen ze dus geen punten. Ze moeten deze berekeningen wel met dit machientje maken en niet op een kladblaadje, want anders kan ik de berekeningen niet zien. Een heel ander punt: sommige leerlingen kunnen niet tegen de vibraties van het scherm en willen vlug klaar zijn. Anderen lezen helemaal niet goed, en missen de instructies. Kortom, zo'n computerexamen eist een hele andere examen-voorbereiding met leerlingen. En dan hebben we nog als nadeel dat er maar één proefstoel beschikbaar is. Kader- en basis-leerlingen houden er over het algemeen niet van om zich nog eens te verdiepen in iets dat ze al gedaan hebben, dus 'Juf, deze hebben we al gedaan'. Maar ja, het is het enige oefenmateriaal dat ik heb.

Het nakijken kost ook veel tijd. Tijdens een voorlichtingsmiddag op het Cito kon de aanwezige deskundige als meerwaarde van de computerexamens alleen maar noemen dat de examens nu 'in kleur' zijn ...

Is er dan niets positiefs over te noemen? *Jawel, voor de basis-leerlingen heeft het gebruik van de computer wel een meerwaarde. Die jongens moeten toch vooral doen, notatie is minder belangrijk en dan kan de computer wel geschikt zijn.*

Maar dit is alles wat er aan voordelen te melden valt over de computerexamens, terwijl de nadelen nog niet allemaal genoemd zijn, bijvoorbeeld nadelen met betrekking tot elementaire vaardigheden.

Karen vervolgt: *Leerlingen hoeven geen liniaal meer te gebruiken, geen pen en papier. Ik vind dat heel slecht. Ze hoeven geen cirkel meer te tekenen, geen passer meer te gebruiken. Zo worden leerlingen afgestompt. Kinderen moeten dat soort elementaire vaardigheden toch beheersen: rechte lijnen trekken, hun liniaal en passer nauwkeurig gebruiken. Dat kost ze moeite om te leren, maar het is wel belangrijk.*

Het niveau vind ik ook gedaald. Om een voorbeeld te noemen van een vraag op basis-niveau: Vanaf hier tot Amsterdam is de afstand 25 km. Hoe lang zijn de heen- en terugreis samen? Ik heb het examen in een brugklas afgenomen en gemiddeld haalden ze voldoende...

Het niveau is de laatste jaren echt achteruit gegaan. Met de oude mavo A, B, C, was het beter omdat je kinderen verschillende vakken op verschillende niveaus kon laten doen. Je haalt nu niet meer uit een kind wat er in zit omdat je niet van het niveau mag afwijken. En je hebt ook kinderen die voor ons vak op een te hoog niveau zitten. De rest van de vakken kan hij bijvoorbeeld prima aan op TL-niveau, maar mijn vak niet. Ik heb de indruk dat daarom de vakniveaus gedaald zijn zodat het slagingspercentage toch goed blijft.



foto 2 Consumptieve techniek



foto 3 Voertuigentechniek

Wiskundeonderwijs op de SGM

De specialiteiten

De specialiteit bij wiskunde lijkt vooral te bestaan uit een zeer gedegen aanpak van de lessen waarin geprobeerd wordt alle leerlingen bij de les te houden en ze successen te laten behalen zodat kinderen groeien in zelfvertrouwen.

Wiskunde voor iedereen binnen de theoretische leerweg

In de T-richting gaan we ervoor dat iedereen wiskunde kiest. Ook de leerlingen die het eigenlijk niet kunnen, proberen we er doorheen te trekken. Wiskunde is een losstaand vak. Kinderen moeten gewoon van alles wat weten, dat is goed voor hun ontwikkeling.

Vakgroepoverleg zonder vergaderingen

Vakgroepoverleg doen we in de wandelgangen; dat kan goed in zo'n kleine school. Als er een overleg nodig is over een bepaald leerjaar, bespreken we dat gewoon tussendoor met de betreffende docenten. Als er projecten zijn waarover we moeten overleggen, zoeken we elkaar gewoon op en werken veel via de mail. Als het hoognodig is, bijvoorbeeld wanneer we moeten overleggen over een nieuwe methode of over een nieuw PTA, dan plannen we een sectieoverleg.

Individuele benadering

Bij ons op school worden de avo-vakken gesplitst gegeven in basis- en kader-klassen. Wel is het zo dat basis-leerlingen nog de mogelijkheid hebben om op te stromen. We gebruiken 'Moderne Wiskunde' omdat we dat prettig vinden werken en het voordeel van deze methode is dat we bij wiskunde leerlingen op een hoger niveau kunnen laten werken door de extra-, plus- en gemengde opdrachten in het boek te laten maken. Deze opdrachten uit het basisboek komen overeen met de kernstof uit het kader-boek. Dus als basis-leerlingen dat aankunnen, laten we ze die paragrafen maken, zodat er altijd nog een overstap mogelijk is. In de onderbouw gebeurt het meer dan in de bovenbouw, maar tot de herfst zou het in principe ook in de bovenbouw kunnen.

Meetkunde met Frans van Schooten Junior (1615-1660)



[Henk Hietbrink]

Onderbouw

Meetkunde heeft in de onderbouw twee gezichten: die van technische vaardigheden en die van de contexten. Technische vaardigheden zijn bijvoorbeeld het vinden van F - en Z -hoeken en het construeren met een passer. Contextuele opdrachten gaan over het verdelen van grond of het berekenen van de hoogte van een toren. Op mijn school wordt het onderwerp meetkundig redeneren in 3-vwo alleen aangeboden aan de toekomstige wiskunde-B leerlingen. Ook de wiskundemethode heeft het onderwerp in een apart B-hoofdstuk opgenomen aan het einde van het schooljaar. Dat vond ik jammer voor de A-leerlingen omdat met de meetkunde ook het redeneren werd overgeslagen. Zo kwam bij mij de vraag op hoe dit onderwerp boeiend gemaakt kon worden voor A-leerlingen.

Eerst geef ik aan waarom meetkundig redeneren een plaats verdient in het wiskundeprogramma en hoe geschiedenis een opdracht inhoudelijk kan verrijken. Daarna kom ik met opdrachten en uitwerkingen.

Redeneren

Leerlingen zijn dol op argumenteren en ze worden er ieder jaar beter in. Ze hebben een mening over school, politiek of de actualiteit en met het verstrijken der jaren is hun betoog steeds beter opgebouwd. Vanuit deze invalshoek heb ik gezocht naar een aanpak die leerlingen motiveert om een meetkundige redenering op te zetten. Leerlingen begrijpen dat het moeilijk is om zware criminelen veroordeeld te krijgen. Ook al maakt een aanklager negen zinnige beweringen, hij gaat onderuit als de advocaat hem pakt op één onzinnige. Bij economie of maatschappijleer is de keten van oorzaak en gevolg niet altijd overzichtelijk en liggen feiten en meningen dicht bij elkaar. De wiskunde van vergrotingen en F - en Z -hoeken is daarentegen overzichtelijk, feitelijk en vrij van opinies. Daarom verdient meetkundig redeneren een plek in

het wiskundeonderwijs als leeromgeving in feitelijk redeneren. Nadeel van meetkunde is echter dat de meeste redeneringen zo abstract zijn en zonder praktisch nut. Mijn idee was om contexten te gebruiken die leerlingen wel zinvol vinden. Die contexten vond ik in de zeventiende eeuw in de Republiek der Nederlanden.

Geschiedenis als stimulans

Met de zeventiende-eeuwse landmeter introduceerde I. van Gulik-Gulik^[1] een historische context bij het onderwerp gelijkvormigheid. Opdrachten kregen nut en samenhang. De uitstapjes naar de oorspronkelijke teksten, de geschiedenis van de Nederlanden in de zeventiende eeuw en de door landmeters gebruikte instrumenten motiveerden leerlingen om zich te verdiepen in het onderwerp. Zij heeft hierover boeiend geschreven in haar proefschrift *Meetkunde opnieuw uitgevonden*. Haar conclusie is dat een historische context opdrachten aantrekkelijk kan maken, maar ook dat oorspronkelijke oude teksten afstoten en dat een deel van de leerlingen terugschrikt voor grote opdrachten en zich veiliger voelt bij overzichtelijke deelopdrachten.

Frans van Schooten

Ik heb gekozen voor Frans van Schooten Senior (1581-1646) en Junior (1615-1660). Beiden gaven reken- en meetkundeles aan de Duitse Mathematicque, de Leidse Ingenieursschool. Ook doceerden ze vestingbouw, landmeetkunde en perspectief tekenen. De tachtigjarige oorlog was de bloeitijd van de Nederlandse belegeringskunde. Hun leerlingen waren timmerlui, landmeters, vestingbouwers, maar ook kunstschilders. Van Schooten Junior gaf ook privéles aan kinderen van gefortuneerde ouders, bijvoorbeeld aan Christiaan Huygens. Ook verwierf hij een academische positie met zijn studies over Viète, zijn bijdrage aan Descartes *Geometrie* en zijn eigen studie naar tekeninstrumenten voor kegelsneden.

Experimenteel lesmateriaal

Verschillende lespakketten heb ik gemaakt. Iedere lespakket grijpt terug op een constructie van Frans van Schooten Junior. Doel is om leerlingen in één les van zestig minuten een complexe meetkundige redenering aan te bieden met een pakkende context. Dit experimentele materiaal heb ik ontwikkeld dankzij de NWO-regeling *Leraar in Onderzoek*. Het materiaal is beschikbaar gesteld op de website www.fransvanschooten.nl. Daar staan (interactieve) opdrachten, applets, uitwerkingen, een docentenhandleiding, posters, biografieën en achtergrondinformatie voor docent en leerling.

Doelgroep: onderbouw-A

De historische inkleding van de opdrachten is gericht op onderbouwleerlingen havo/vwo die bewust voor wiskunde-A kiezen, terwijl de kale opdracht juist de B-leerling aanspreekt.

Meetkundig redeneren

Belangrijk is dat leerlingen ontdekken wat een goede redenering is. In een kort klassengesprek laat ik zien wat drogredeneringen zijn. Alle lezers van Donald Duck weten dat Klara een koe is. Daarom kies ik voor deze naam. Ik geef twee beweringen en vraag om de derde af te maken:

Alle mensen zijn sterfelijk.

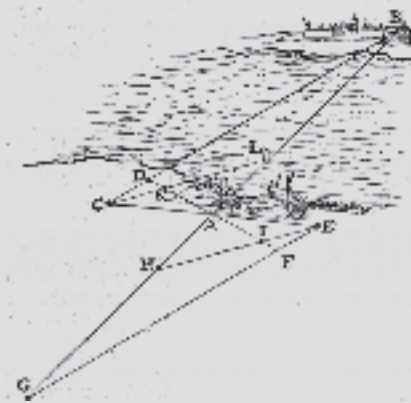
Klara is sterfelijk.

Klara is een ...

De kans is groot dat de hele klas in koor roept dat Klara een mens is. Waarop ik zeg dat Klara een koe is. Koeien zijn toch sterfelijk? Toch kan met de bewering 'Klara is een mens' wel een ware redenering gemaakt worden. De klas krijgt de opdracht deze drie beweringen in een volgorde zetten die wel logisch is. Er zijn er twee!

Instapopdracht

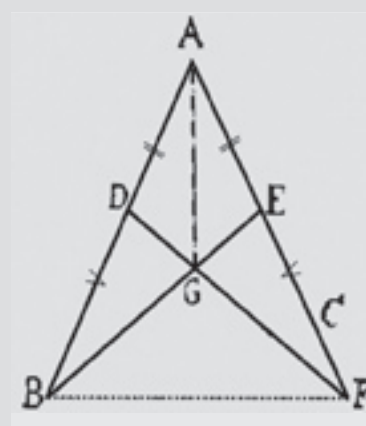
Frans van Schooten Junior gebruikte praktische constructies, bijvoorbeeld om de afstand tot een onbereikbare vesting op te



figuur 1



figuur 2



figuur 3

meten. De afbeelding *van figuur 1* komt uit zijn boek *Mathematische Oeffeningen* (1660)^[2]. De opdracht is: Hoe bepaal je de afstand van A naar B als je niet van A naar B kunt gaan?

Na de korte inleiding over Klara hing ik de tekening van figuur 1 fors uitvergroot op het bord. Ik vertelde iets over de grootschaligheid van de belegeringen van Breda, Den Bosch enz. Ook vertelde ik kort over de behoefte aan landmeters en ingenieurs en over de opleiding aan de Ingenieursschool door de familie van Schooten. Daarna gaf ik iedereen een groot vel A2-papier en vroeg om samen met mij de constructie te maken: ik op het bord en zij gelijktijdig op papier. Iedereen tekende zijn eigen driehoek ABC . Ik vertelde dat $AC = AE$, dat punt D op de kijklijn BC ligt, en dat $AD = AF$. We trokken samen de kijklijnen EF en BA door naar punt G en ontdekten dat AG even lang was als AB . Uiteraard was dat geen bewijs, maar het leverde wel een sterk vermoeden op. Vervolgens deelde ik de klas in duo's en trio's in, mixte de A- en B-leerlingen en maakte de A-leerlingen penvoerder opdat zij het tempo zouden bepalen. De duo's kregen het lespakket met de originele, oude, Nederlandse tekst, een stappenplan en de opdracht om een bewijs te leveren. Alleen de beste leerlingen daagde ik uit om zelf een stappenplan te bedenken, maar de meeste leerlingen kozen voor het stappenplan. Hieronder staan de drie vragen uit dit lespakket.

Gegeven de punten $A, B, C, \dots$ met $AC = AE$ en $AD = AF$.

1. Toon aan dat driehoek ACD gelijk is ^[3] aan driehoek AEF , en dat dus $\angle C = \angle E$.
2. Toon aan dat driehoek ACB een vergroting is van driehoek AEG , en dat dus AB een vergroting is van AG .
3. Toon aan dat driehoek ADB gelijk is aan driehoek AFG , en dat dus $AB = AG$.

Congruentie

Congruentie zit verstopt in al mijn les-pakketten. Omdat dat begrip pas in de bovenbouw behandeld wordt, moet de leerlingen iets over congruentie verteld worden. Mijn ervaring is dat een korte uitleg volstaat. HZH vinden ze logisch, maar ZHZ is minder vanzelfsprekend.

Toon aan dat ...

Lesdoel is dat leerlingen een pittige redenering opzetten die uit meerdere stappen bestaat. Met deelopdrachten worden ze de goede kant opgeloodst. De deelopdrachten zijn geformuleerd als 'Toon aan dat ... en dat dus ...'. 'Toon aan' is een typische manier van vragen die veel voorkomt in de bovenbouw. Voordeel is dat leerlingen na iedere deelopdracht altijd door kunnen met de volgende deelopdracht.

En dat dus ...

Nieuw is de uitbreiding 'en dat dus ...'. Dat is gedaan om leerlingen bij iedere stap aan te sporen te onderzoeken welke winst logisch voortvloeit uit de conclusie die ze net getrokken hebben in de 'omdat ... daarom ...'.

Context – Dochters verdelen de erfenis

Hieronder staat de context die hoort bij een andere opdracht.

In Holland overlijdt een boer die in het bezit is van een groot stuk land. Zijn twee dochters erven de boerderij, het land en de koeien. De boerderij staat op een hoek van het land (zie figuur 2). Iedere dochter wil zoveel mogelijk grond zo dicht mogelijk bij de boerderij. De zussen besluiten eerlijk te delen, maar weten niet hoe dat moet. Ze vragen de beroemde Frans van Schooten Junior om advies. Hij tekent de *in figuur 3* staande constructie om de deellijn te vinden. Hij beweert dat er voor iedere graspol aan de ene kant van de lijn een andere graspol is aan de andere kant van de

lijn op gelijke afstand van de boerderij. Deze context maakt duidelijk waarom ze een deellijn zonder passer moeten maken. Wie gaat er met een passer tussen de graspollen en koeienvlaaien staan? Hieronder staan het constructievoorschrift (I) en het stappenplan (II).

I.

1. Gegeven de punten A, B en C ;
2. kies punt D op AB ;
3. punt E op AC met $AD = AE$;
4. punt F op AC met $DB = EF$;
5. trek lijn BE ;
6. trek lijn DF ;
7. lijn BE snijdt lijn DF in snijpunt G ;
8. trek lijn AG (dat is de deellijn van $\angle A$).

II.

De laatste stap is cruciaal: waarom is de deellijn de meest eerlijke verdeling?

1. Construeer de gelijkbenige driehoek ABF met een willekeurige hoek in punt A .
2. Toon aan dat $\triangle ABE$ gelijk is aan $\triangle AFD$ en dat dus $BE = DF$.
3. Toon aan dat $\angle ABF = \angle AFB$.
4. Toon aan dat $\triangle BDF$ gelijk is aan $\triangle BEF$ en dat dus $\angle FBE = \angle DFB$.
5. Toon aan dat $\triangle BFG$ gelijkbenig is en dat dus $BG = FG$.
6. Toon aan dat $\triangle BDG$ gelijk is aan $\triangle FEG$ en dat dus $DG = EG$.
7. Toon aan dat $\triangle ADG$ gelijk is aan $\triangle AEG$ en dat dus $\angle DAG = \angle FAG$.
8. Leg uit dat de erfenis van de boer eerlijk verdeeld is omdat er voor ieder punt aan de ene kant van de deellijn een ander punt is aan de andere kant van de deellijn op gelijke afstand van punt A .

Voorbeeld

In figuur 4 staat een uitwerking van twee leerlingen uit 3-TTO^[4]. In stap 4 begon het tweetal goed. Ze maakten zelfs speciaal voor deze stap een schets. Je zou verwachten dat ze de stap juist zullen uitvoeren met congruentie ZHZ . Maar dan 'zagen' ze



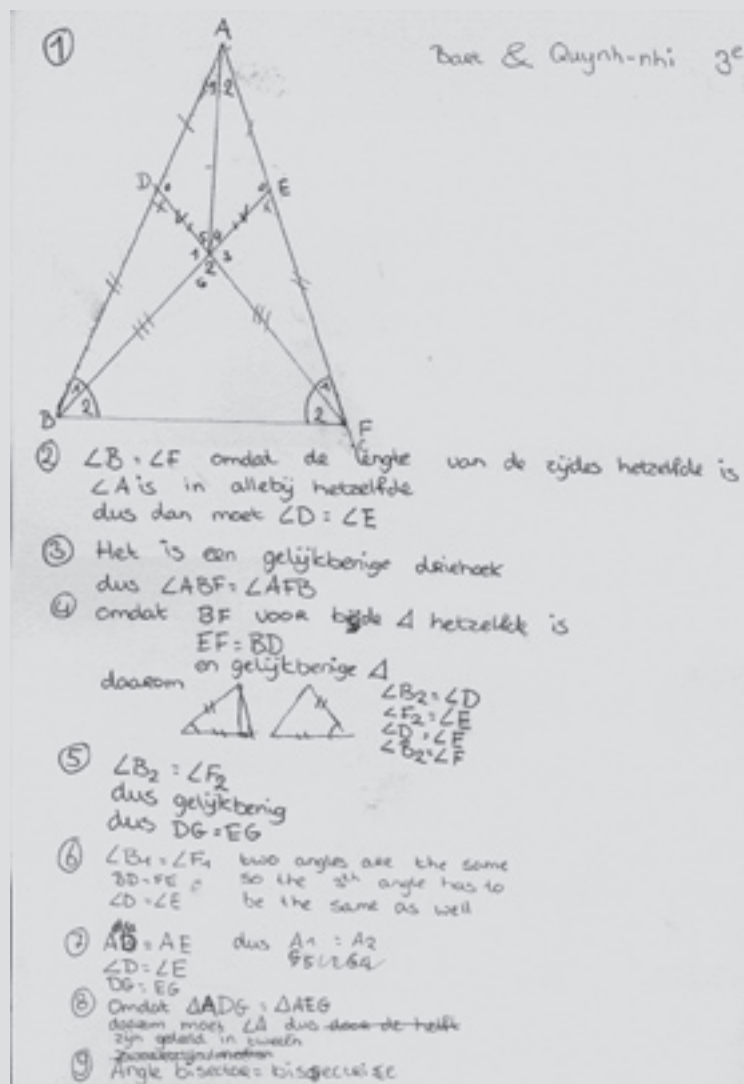
gelijkbenigheid (die er niet was). Ook beweerden ze zonder enige onderbouwing dat bepaalde hoeken even groot waren: $\angle B_2 = \angle D$. In stap 5 maakten ze een reuzensprong door uit de gelijkbenigheid van driehoek BFG de conclusie te trekken dat $DG = EG$ zonder iets te doen met $BE = DF$. Deze uitwerking met wonderlijke stappen is typerend voor de onderbouw. Frappant is dat dezelfde leerlingen zes maanden later in de bovenbouw dit soort fouten niet meer maakten toen ze van mij een soortgelijke opdracht kregen. Bij de nabespreking hadden ze het idee dat ze een perfecte uitwerking hadden ingeleverd. Toen ik zei dat er iets in stap 4 niet klopte, konden ze hun fout niet ontdekken. Pas toen ik hen vroeg om de 'omdat ... daarom ... dus ...' netjes uit te schrijven, zagen ze hun vergissing. Mijn aanmerking op stap 5 werd afgedaan als flauw omdat het toch logisch is dat het verschil van gelijke dingen even groot is. Voor hen was dat geen fout. Ook vonden ze bij stap 9 dat de deellijn het argument was op de vraag waarom de erfenis eerlijk verdeeld is. Zij wilden er niet aan dat het er om ging dat links en rechts even veel graspollen waren. Wiskunde gaat niet over gras, maar over deellijnen!

Evaluatie Onderbouw

De afgelopen drie jaar heb ik gastlessen verzorgd in verschillende 3-vwo klassen. Leerlingen waardeerden het groepswerk omdat ze elkaar konden aanvullen en corrigeren. Ze raakten ontmoedigd als ze de opdracht individueel moesten maken. Alleen een 2-havo klas vroeg om de eerste stappen klassikaal te zetten. Vanaf de derde klas wilden leerlingen het zelf proberen. Wel kwamen ze bij de eerste stap met veel vragen, vooral over hoe ze 'omdat ... daarom ... dus ...' moesten uitwerken. Ook wilden ze persoonlijke aandacht voor de manier waarop zij omgingen met het begrip congruentie.

Met de vaardigheden zat het goed. Alle overstaande hoeken, vergrotingen en F - en Z -hoeken werden gevonden. Bijna niemand veronderstelde rechte hoeken omdat de hoek wel recht leek, hoewel de verleiding voor sommigen erg groot was. Slechts een enkeling 'zag' spontaan gelijkbenigheid of gelijkzijdigheid. Ook congruentie ging meestal goed.

Sommige leerlingen wilden liever eerst een getallenvoorbeeld uitwerken op de manier waarop in de tweede klas gewerkt wordt met het uitrekenen van hoeken. Dat



figuur 4

getallenvoorbeeld hielp hen wel om een begin te maken, maar vervolgens konden ze er niet los van komen. Hieruit blijkt maar weer dat rekenen aan getallenvoorbeelden en meetkundig redeneren twee verschillende onderwerpen zijn met verschillende aanpakken.

Docenten vonden het positief dat hun leerlingen de volle lestijd enthousiast en actief bezig waren. Alle leerlingen haalden blijmoedig en tevreden de eindstreep.

Doelgroep: bovenbouw-B

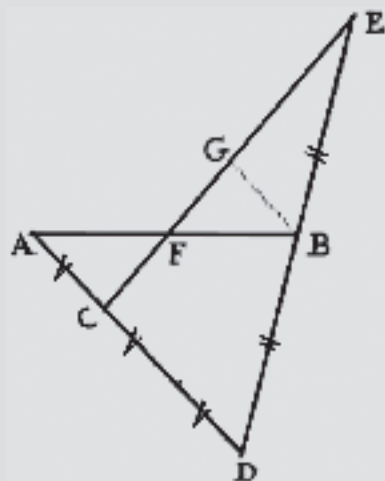
Voor bovenbouwleerlingen met wiskunde-B bleken deze lespakketten zinvol als start-opdracht. Mijn klassen maakten de opdracht bij voorkeur met het stappenplan.

In *figuur 5* (op pag. 282) staat de schets van de opdracht om aan te tonen dat lijn AP door lijn BQ in twee gelijke stukken gedeeld wordt.

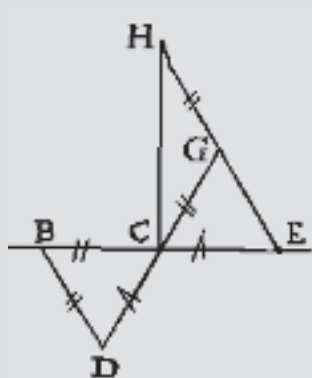
Deze opdracht is ook gebruikt in een training van de Wiskunde Olympiade, maar dan klassiek geformuleerd. Daar stond: Zij ABC een driehoek, punt P het midden van BC en punt Q op lijnstuk CA zodat $|CQ| = 2 \cdot |QA|$. Zij S het snijpunt van BQ en AP . Bewijs dat $|AS| = |SP|$.

Meer complexe opdrachten zijn gebruikt in

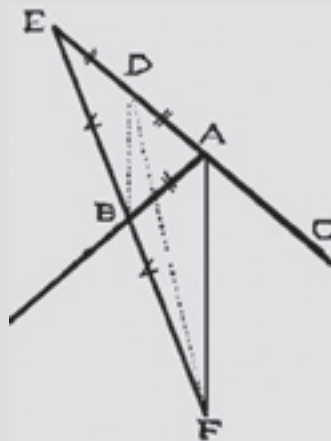
proefwerken. Een week voor het proefwerk kreeg een 4-vwo klas de opdracht zonder stappenplan uitgereikt. Ze mochten samen het vraagstuk oplossen, maar op het proefwerk moesten ze individueel in korte tijd een volledig bewijs uitschrijven. In *figuur 6* staat de schets van hun proefwerkopdracht om aan te tonen dat $\angle BCH$ altijd recht is. Na het proefwerk heeft de diversiteit in goede uitwerkingen de docenten verrast. Ondanks de intensieve samenwerking hebben leerlingen hun eigen plan getrokken. Ook vielen er onvoldoendes. Deze leerlingen gaven achteraf toe dat zij de opdracht zwaar onderschat hadden. Ruim voldoende scoorde een 5-vwo klas. Deze leerlingen hadden voldoende aan vijf minuten uitleg over de zelfstandige opdracht en dat alle antwoorden geformuleerd moesten worden als 'omdat ... daarom ... dus ...'. Zij kregen de opdracht mee naar huis en waren binnen een half uur klaar. Conclusie is dat leerlingen ieder jaar beter presteren. In *figuur 7* staat de schets van hun opdracht: het delen van een hoek in twee gelijke hoeken.



figuur 5



figuur 6



figuur 7

Conclusies

In 3-vwo waren juist de A-leerlingen voldoende geboeid door de inleiding om met de driehoeken aan de slag te gaan. Na afloop reageerden leerlingen positief op de les. Daarmee was de eerste doelstelling gehaald: met een positieve instelling aan de slag met meetkunde.

De tweede doelstelling was het aanleren van meetkundig redeneren. Opvallend is dat leerlingen in hun schoolcarrière steeds beter presteren. In 2-havo/vwo konden leerlingen hun opdracht niet zelfstandig maken.

Zij waardeerden vooral de afwisseling in lesvorm. Leerlingen uit 2-vwo en 3-vwo begrepen wel wat de bedoeling is, maar beheersten de vaardigheid van redeneren onvoldoende. In 4-vwo was de redenering meestal goed, maar de uitwerking wisselend van kwaliteit. Pas in 5-vwo scoorden leerlingen ruim voldoende.

Noten en literatuur

- [1] I. van Gulik-Gulikers (2005): *Meetkunde opnieuw uitgevonden: een studie naar de waarde en de toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen (proefschrift).
- [2] F. van Schooten (1660): *Mathematische Oeffeningen*. Amsterdam: Gerrit van Goedesbergh.
- [3] Hier wordt 'is gelijk aan' gebruikt in de zin van 'is congruent met' [Red.]
- [4] TTO = tweetalig onderwijs [Red.]
- [5] S. Groenveld (2009): *De Tachtigjarige Oorlog*. Zutphen: Walburg Pers.

Website

URL: www.fransvanschooten.nl

E-mailadres: frans.van.schooten@planet.nl

Over de auteur

Henk Hietbrink werkt als docent aan het Cals College in Nieuwegein en heeft het lesmateriaal en de website ontwikkeld dankzij het programma Leraar In Onderzoek van NWO via het project 'Actuele opgaven in de historische context van de 17e eeuw in de Republiek der Nederlanden'.

E-mailadres: hietbrink.h@planet.nl

PERSBERICHT / REKENBETER.NL

Blijf 'rekenfit' met vier sommen per dag!

De site « www.rekenbeter.nl » is bedoeld voor iedereen die zijn rekenvaardigheid wil oefenen. Dat kunnen leerlingen van groep 7 en 8 zijn die met of zonder hun meester of juf, al dan niet via het digibord de sommen maken. Maar ook leerlingen uit het voortgezet onderwijs en mbo-studenten die in het kader van hun vervolgstudie hun rekenniveau willen verbeteren. En niet in de laatste plaats voor pabo-studenten die aan hun eigen vaardigheden willen werken. Kortom: voor iedereen van tien tot tachtig die rekenen leuk vindt en nog iets wil leren. Bij aanmelding met een e-mailadres wordt vanaf 12 april a.s. elke werkdag een e-mail gestuurd met daarin een link naar de site van Rekenbeter.nl. Op de site staan dan vier

nieuwe opgaven klaar: twee kale opgaven (alleen cijfers en getallen), een tekstopgave en een zogenaamde 'som voor morgen'. Na beantwoording komen van de twee kale opgaven en de tekstopgave onmiddellijk de score en de antwoorden en uitwerkingen in beeld. Elke opgave sluit af met een verwijzing naar achtergrondtheorie. De uitwerking van de 'som voor morgen' komt de volgende dag beschikbaar. Die opgave is bedoeld als doordenker, waarbij soms iets moet worden opgezocht en waarbij overleg met anderen mogelijk is. De volgende dag staan er weer drie opgaven klaar, plus het antwoord op de som van gisteren en natuurlijk de som voor morgen.

Aanmelden als deelnemer kan via de site « www.rekenbeter.nl ». Deelname is gratis. Informatie:

- Sieb Kemme, telefoon: 0594 514826, e-mail: siebkemme@educadbv.nl
- Willem Uittenbogaard, telefoon: 0255 512244, e-mail: willembu@fi.uu.nl
- Ed de Moor, e-mail: e.w.a.demoor@planet.nl

Bron: Wiskunde Persdienst, 8 april 2010

EUCLIDES

Doedelen

LEERLINGEN ONDERNEMEN SPONTAAN EEN WISKUNDIGE ONTDEKKINGSTOCHT

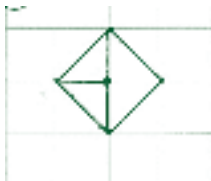
[Hans Schipper]

De oude Willem Drees noemt het in zijn memoires *doedelen*. Als hij zich tijdens een officieel banket weer eens verveelde, ging hij schier gedachteloos figuurtjes tekenen op een servet of ander papiertje dat hij toevallig in de buurt had.

Tegenwoordig hoor je wel het Engelse *doodle* en daarmee wordt min of meer hetzelfde bedoeld.

De Amerikaanse wiskundige van Poolse afkomst Stanislaw Ulam brengt in 1963, al doedelend, met een eenvoudige spiraal een patroon bij de priemgetallen aan het licht. Joost, een 14-jarige leerling van mijn school, heeft een keer een les niet erg interessant gevonden en is toen ook maar gaan doedelen.

Met een potlood heeft hij een tijd lang zo maar een beetje in zijn schrift zitten krassen en op een bepaald moment staat er deze figuur:



Hij kijkt er naar en ziet ineens: vanuit bijna iedere punt vertrekken drie lijnstukken.

Is het mogelijk, vraagt hij zich af, om aan deze figuur lijnstukken en punten toe te voegen zodat vanuit ieder punt drie lijnstukken vertrekken?

Hij probeert wat, en dan heeft-ie hem, een halter:

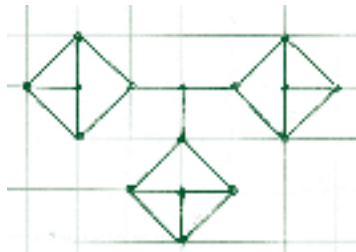


'Wat zit jij te doen?', fluistert Olivier.

'Ik probeerde een figuur te maken waarin vanuit ieder punt drie lijnstukken vertrekken', legt Joost uit.

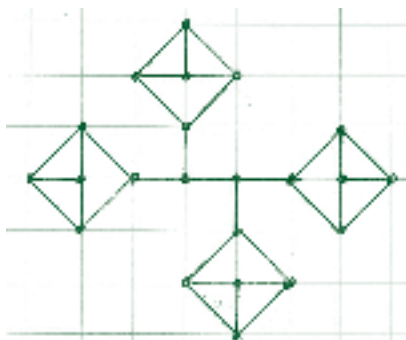
'Mooi', vindt Olivier. Hij opent zijn wiskundeschrift en begint ook te krassen. Als de leraar even later hun aandacht eist is het even afgelopen. Maar de volgende les gaat het verder.

'Is deze goed?', vraagt Olivier.

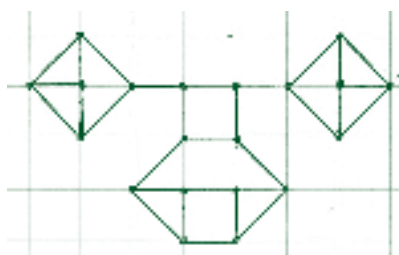


'Mmmja. Goedgekeurd', vindt Joost. Dan tikt Geert Joost op zijn rug en vraagt: 'Wat doe jij nou?' Waarop ook Geert fluisterend in het geheim wordt ingewijd.

Ze zijn in deze les zelfstandig aan de slag en mogen samenwerken, dus een beetje overleg valt niet op, ook al gaat het niet over aardrijkskunde. Dat kan worden uitgebuit. Geert gaat aan de slag. Even later geeft hij een briefje door aan Olivier en Joost: 'Zo iets?'



De beide jongheren mompelen goedkeurende woorden. Deze figuur is blijkbaar inspirerend, want even later zegt één hunner: 'Zo kan het ook.' Hij bedoelt hier: Een figuur maken waarin in het midden een lijnstuk van drie centimeter staat en waarin vanuit ieder punt drie lijnstukken vertrekken.



In de loop van de volgende weken ontstaat een veelheid aan figuren die allemaal voldoen aan de volgende eisen:

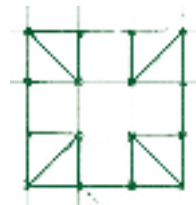
- Iedere figuur bestaat uit stippen en lijnstukken.
- Vanuit iedere stip vertrekken precies drie lijnstukken.
- Iedere stip staat op een roosterpunt.
- Een lijnstuk moet de zijde of de diagonaal van een roosterhokje zijn.
- Binnen een roosterhokje mag niet meer dan één diagonaal getekend worden.

Mijn zoon Koen, die bevriend is met de drie jongens, wordt ook in het geheime doedelgenootschap opgenomen.

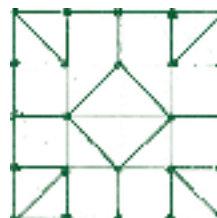
Op een avond, als ik me door de correctie van een schoolexamen aan het worstelen ben, komt hij naar me toe en zegt: 'We doen op school een spel.'

'O', brom ik, want ik wil eigenlijk verder met nakijken.

'We geven elkaar opdracht om figuren te tekenen die er bijvoorbeeld zó uitzien', vervolgt hij, mijn gebrek aan enthousiasme negerend en hij tekent:



'Maar een vierkant van vier bij vier kan ook':



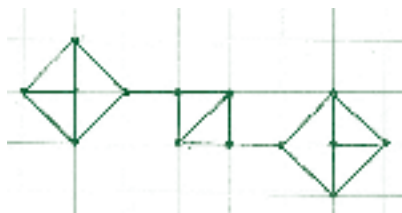
'Jaja', reageer ik, want het licht gaat nog niet bij me branden.

'Al die figuren voldoen aan spelregels', gaat hij door en hij noemt de regels die hierboven geschreven staan.

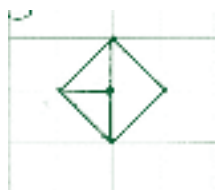
Spelregels ... ik word wakker.

'Als ik een roostervierkantje voor mijn neus krijg', vraag ik, 'en ik moet daar zo'n ding van maken ... met drie lijnstukken en zo ... hoe doe ik dat dan?'

Na enig nadenken verschijnt er:



'Die dingen ...', zegt Koen, en hij tekent:



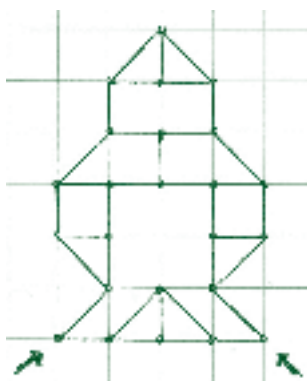
'... zijn een soort van afsluiters, waarmee je iedere figuur, waarin bij één punt nog een lijnstuk ontbreekt, kunt afmaken.'

Ik kijk op mijn horloge en naar de stapel schoolexamens en zucht.

'Ik moet eigenlijk verder', zeg ik, 'maar jouw spel is gewoon veel leuker.'

'Het is niet mijn spel, hoor', verbetert Koen, 'Joost, Olivier en Geert hebben het bedacht. Nu doen ook anderen mee, waaronder ik.'

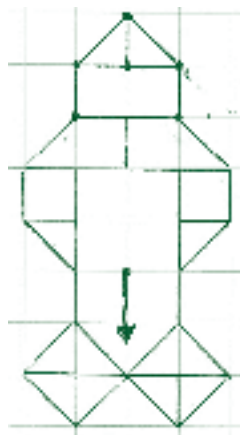
'Het is ons nog niet gelukt om een poppetje te tekenen', gaat hij onverdroten verder, vast van plan mij voor zijn spel te winnen nu hij een bres in mijn verdediging bespeurt.



Hij tekent bovenstaande figuur.

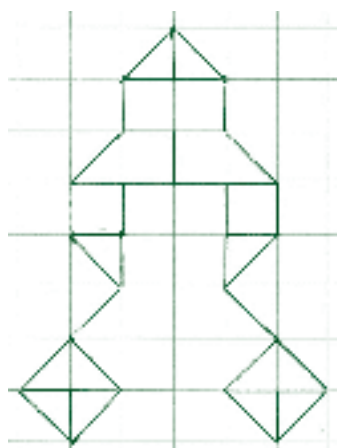
'Bij zijn tenen houdt het op. Daar komen maar twee lijnstukken bij een punt. Je kunt natuurlijk wel de tenen verbinden met een afsluiter, maar ja dan is het een poppetje met stomme voeten.'

'En zo dan?' zeg ik, de volgende schets makend.



Maar ik blijf nog slechts een amateur en streng zet Koen een pijl bij de fout.

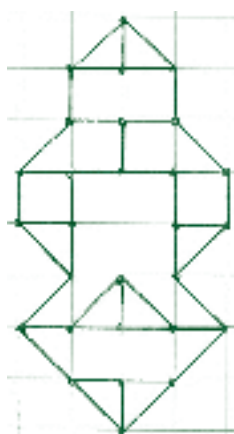
Dat motiveert om verder te gaan. Na een beetje proberen heb ik dit:



'Dat bedoel ik dus met stomme voeten', zegt Koen.

'Dat is een kwestie van smaak', breng ik er tegen in. 'Maar ik vind wel dat het maag-darm-stelsel er wat luchtigjes bij ligt.'

'Ik weet een mooiere', zegt Koen en hij tekent onderstaande figuur: een mannetje op een tol.



Ondertussen ben ik een half uur verder en de stapel schoolexamens wordt niet kleiner. 'Ik vind dit erg interessant', zeg ik, 'maar ik moet helaas verder met werken. De centen moet nu eenmaal verdiend worden. En jij moet trouwens ook aan je huiswerk.'

'Mag ik er nog één laten zien?'

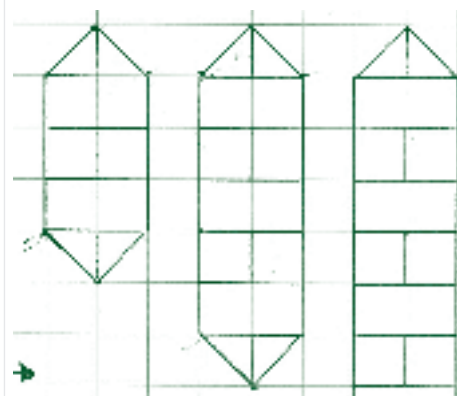
'Nou, nee eigenlijk ...'

'Eén maar, toe??'

'Vooruit dan maar weer'.



'Dat is de kleinste die we tot nu toe ontdekt hebben. Je kunt hem oneindig ver uitbreiden, kijk maar':



'Zo, je hebt me er nu al weer vier laten zien in plaats van één. Nu wegwezen. Anders wordt het morgenochtend voordat ik klaar ben met dat nakijkwerk.'

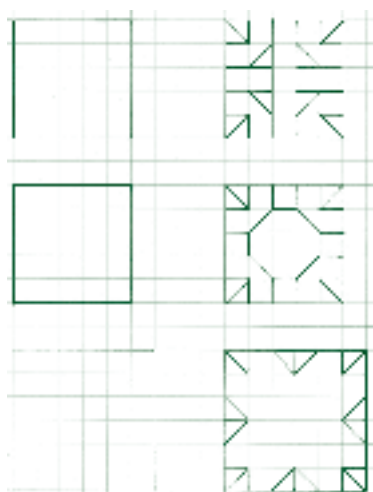
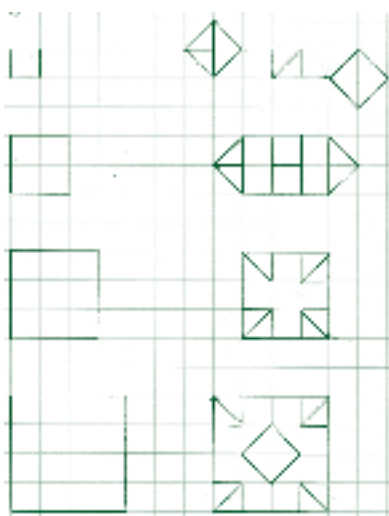
Ik zet me weer aan de correctie, maar om de drie of vier kandidaten pak ik er even een kladblaadje bij om enkele nieuwe figuren te kunnen schetsen.

'Wat zijn het voor dingen?' vraag ik me af. 'Het zijn grafen, dat is duidelijk. Door de voorwaarden ontstaat er een deelverzameling. Kun je daarin klassen maken? Is er een efficiënte methode, die altijd werkt om een figuur te tekenen die bij een klasse hoort? Heeft het sowieso betekenis, of blijft het alleen een spelletje?'

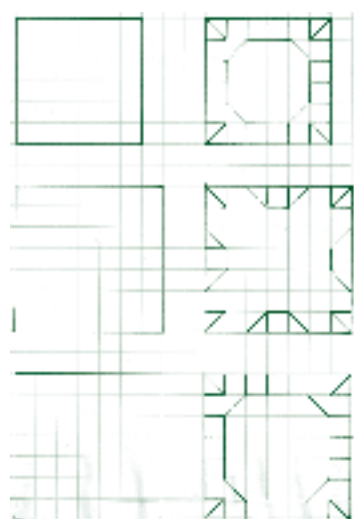
Enkele dagen later doe ik, in een vrij moment, een poging figuren in kaart te brengen die uitgaan van de vierkanten met zijden 1, 2, 3, ... De opdracht die ik me zelf geef is: Maak, met een minimaal aantal lijntjes, van de vierkanten met zijden 1, 2, 3, ... figuren die voldoen aan de regels. *Doedels*, zal ik ze voorlopig maar even noemen.

De opdracht is dan kortweg: Maak van vierkanten doedels, met een minimaal aantal lijntjes.

In de volgende afbeeldingen staan links de opdrachten, rechts de doedels.

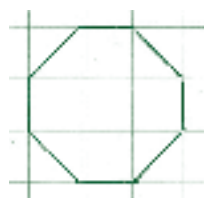


Van het vierkant van vijf bij vijf heb ik twee oplossingen opgenomen. De tweede is efficiënter. De eerste oogt fraaier, vind ik zelf.

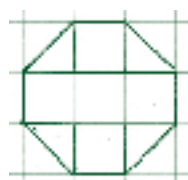


Hiervan kan een spel voor potlood en papier gemaakt worden. Twee spelers hebben beiden een stapel ruitjespapier en een potlood tot hun beschikking. Ze tekenen op elkaars blaadje een figuur, bijvoorbeeld een vierkant, waarvan een doedel moet worden gemaakt. Steeds krijgen ze maximaal 5 minuten om het plaatje af te maken.

Voorbeeld van een spelverloop. Speler 1 krijgt de opdracht:



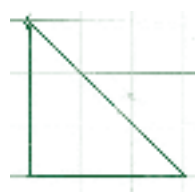
En hij maakt hiervan:



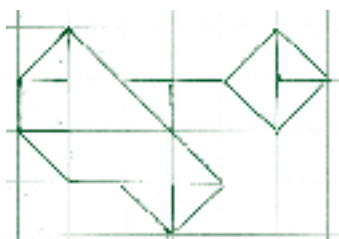
Speler 2 ziet geen efficiëntere oplossing; dus speler 1 krijgt een punt.

Speler 1 krijgt de volgende opdracht. Enzovoorts.

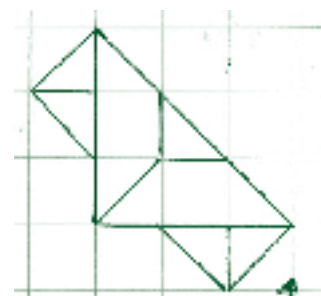
Speler 2 krijgt de opdracht:



Speler 2 maakt hiervan:



Maar speler 1 ziet een efficiëntere oplossing:



Dus speler 1 krijgt een punt. Enzovoorts.

Na de uitleg door mijn zoon heb ik contact gezocht met Joost, Olivier en Geert. Ze zijn trots door mijn interesse, maar gelukkig gaan ze er al snel grappen over maken, zoals: 'Dat wordt dan de stelling van Olivier Thagoras'.

Wat ik zo bijzonder aan bovenstaand verhaal vind, is dat zomaar, spontaan, een spel ontstaat. Drie jongens zijn vervolgens in staat om spelregels te formuleren voor het maken van toch behoorlijk abstracte figuren. Het spel ontwikkelt zich vervolgens op een wijze zoals die door Bert van Oers geformuleerd is in *Spel en de ontwikkeling van het mathematiseren*:

'(...) vanuit een Vygotskiaanse optiek is spel een manier waarop een activiteit wordt (of mag worden) uitgevoerd. Spel is dus eigenlijk een aanduiding voor het *format* van een activiteit. Het spelformat van een activiteit voldoet aan de volgende kenmerken:

- er is sprake van *regels*;
- er is sprake van *intrinsieke betrokkenheid* bij de activiteit (het kind kiest zelf voor het spel of besluit zelf of het daaraan deelneemt en hoe lang; juist door dit gegeven heet het spel 'spontaan');
- er is sprake van *vrijheidsgraden* (de speler heeft altijd tot op zekere hoogte de vrijheid in de keuze van handelingen, doelen, objecten of instrumenten om de deelname aan het spel vorm te geven).

Juist dit format geeft de speler de ruimte om zijn eigen versie te maken van de activiteit waaraan hij deelneemt, zolang deze maar niet in strijd is met de regels die expliciet of impliciet voor het spel gedefinieerd zijn. En precies dit is wat kenmerkend is voor spel en wat spel productief en vernieuwend kan maken. Het is de voortdurende balans tussen vrijheid en gebondenheid aan regels.'

In het ontstaan van het doedelspel, zoals ik dat hierboven beschreven heb, zie ik de volgende aspecten:

- De leerlingen onderzoeken een wiskundige structuur.
- Het spel is creatief.



- De regels zijn opgesteld na analyse en synthese.
- Het spel wordt ontwikkeld door er over te communiceren.
- Er is sprake van affectie: de vriendenclub vindt het prettig om op deze manier met wiskunde bezig te zijn.

Zo, gratis en voor niks, zijn leerlingen intensief met wiskunde bezig. Nou ja, gratis ... er is steeds bij allerlei vakken, waaronder wiskunde, een stukje van de lestijd afgesnoept. Maar daarvoor krijgen we dan ook wat terug.

Ondertussen wordt er al lang niet meer gedoedeld, maar gestructureerd gezocht. Nog lang niet alle figuren zijn ontdekt. Ze zijn nog niet in categorieën ondergebracht. Het spel ontwikkelt zich nog steeds. Op dit moment proberen de jongens figuren te bedenken die lijken op mannetjes, hoofden, voorwerpen, ...

Ze komen vast een keer met een betere naam dan *doedel* voor deze figuren.

Ik ben benieuwd hoe het verder gaat.

Literatuur

- Willem Drees (1962): *Zestig jaar levenservaring*. Amsterdam: Arbeiderspers.
- Bert van Oers: *Spel en de ontwikkeling van het mathematiseren*. Te downloaden via: [http://home.planet.nl/~oers0054/TEKSTspel & mathematiseren.pdf](http://home.planet.nl/~oers0054/TEKSTspel%20mathematiseren.pdf) (geraadpleegd op 20 april 2010).
- Lev Vygotsky (1933): *Play and its role in the Mental Development of the Child*. Te downloaden via: <http://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1933/play.htm> (geraadpleegd 20 april 2010).
- Wikipedia: *The Ulam spiral*. Te downloaden via: http://en.wikipedia.org/wiki/Ulam_spiral (geraadpleegd op 20 april 2010).

Over de auteur

Hans Schipper is wiskundeleraar aan het Baudartius College te Zutphen.

E-mailadres: h.schipper@baudartius.nl

Gauß en de Grootste Gemene Deler

[Rob Bosch]

In het vorige nummer (Euclides 85(6), mei 2010) vond u een reactie van Rob Bosch op een artikel van Hans Schipper over decanteerproblemen. In die reactie liet Bosch zien dat een decanteerprobleem alles te maken heeft met de grootste gemene deler van de volumes van de vaten.

In het voor u liggende artikel laat de auteur zien hoe in een simpel 'breukenlesje' deze ggd heel natuurlijk opduikt, en beargumenteert hij waarom het goed zou zijn om in een les over breuken aandacht te besteden aan de ggd van twee getallen.

Inleiding

Aan het begin van een collegecyclus analyse besteed ik enige tijd aan het ophalen en uitbreiden van elementaire algebraïsche vaardigheden. Een oefening die de meeste studenten goed kunnen gebruiken omdat deze vaardigheden in de technische vakken nu eenmaal steeds weer nodig zijn. Tot de cursus algebraïsche vaardigheden behoort inmiddels ook een herhaling van rekenvaardigheden – met name het omgaan met breuken – want ook die vaardigheid laat te wensen over. Het gehannes met de lenzenformule ($\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$) en het niet kunnen berekenen van een vervangingsweerstand voor een parallelschakeling ($\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$) laat zien dat zo'n rekencursus geen overbodige luxe is.^[1] Het gebrek aan algebraïsche en rekenvaardigheden is nog steeds onderwerp van discussie. Ik ga daar nu niet op in, maar wil in het onderstaande laten zien wat een verrassende wending een simpel lesje vereenvoudigen en optellen en aftrekken van breuken kan nemen. De titel van dit stukje laat al enigszins zien in welke richting dat gaat.

De grootste gemene deler

Bij het werken met breuken (vereenvoudigen, optellen en aftrekken, enz.) komen we de *grootste gemene deler* (ggd) en het *kleinste gemene veelvoud* (kgv) op een natuurlijke manier tegen; de ggd bij het vereenvoudigen van breuken en het kgv bij het optellen en aftrekken van breuken. De volgende reeks vereenvoudigingen leidt bijvoorbeeld tot de ggd van de teller en de noemer van de eerste breuk:

$$\frac{60}{132} = \frac{30}{66} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$$

We hebben hier de teller en noemer van de breuken achtereenvolgens gedeeld door 2, 2 en 3. Zoals we eenvoudig nagaan, is de laatste breuk in de rij niet verder te vereenvoudigen. De gegeven breuk is derhalve zover mogelijk vereenvoudigd en bij die vereenvoudiging hebben we de ggd van 60 en 132 gevonden. De ggd is gelijk aan het product van de vereenvoudigingsfactoren; dat wil zeggen:

$$\text{ggd}(60, 132) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Om de eerste breuk zover mogelijk te vereenvoudigen moeten we de teller en de noemer van die breuk delen door de ggd van de teller en de noemer; hier dus door $\text{ggd}(60, 132) = 12$:

$$\frac{60}{132} = \frac{12 \times 5}{12 \times 11} = \frac{5}{11}$$

Zoals we zien verschijnt de grootste gemene deler op een natuurlijke manier bij het zover mogelijk vereenvoudigen van breuken. Het ligt dus voor de hand in lessen over breuken aandacht te besteden aan de ggd van twee (of meer) getallen.

Overigens is een bespreking van de ggd en het kgv, afgezien van de toepassing bij het manipuleren van breuken, zeer de moeite waard. Berekening van de ggd, door bijvoorbeeld de getallen in factoren te ontbinden, levert vaak een onverwacht resultaat op, en met behulp van het duizenden jaren oude *algoritme van Euclides* kunnen we de ggd van twee getallen vaak verrassend snel berekenen. Kortom, de ggd en het kgv zijn aardige onderwerpen die inzicht verschaffen in de structuur van de natuurlijke getallen.

In het vervolg werken we een opgave uit die bij de bespreking van de ggd aan de orde kwam.

Een opgave

Bij de behandeling van de ggd stel ik de studenten de volgende vraag:

De ggd van 72 en een onbekend getal is 4. Welk getal is dit?

Daarop volgt onmiddellijk de reactie: dat onbekende getal is 4. Dit antwoord is uiteraard correct, want we gaan gemakkelijk na dat $\text{ggd}(72, 4) = 4$.

Maar er zijn meerdere antwoorden mogelijk; zo voldoet ook 20, immers: $\text{ggd}(72, 20) = 4$.

Er volgen nog een paar goede antwoorden, zoals 28 en 40. Ik voeg daar nog de oplossingen 100 en -4 aan toe, immers ook is: $\text{ggd}(72, 100) = 4$ en $\text{ggd}(72, -4) = 4$

Op deze laatste oplossingen had men niet gerekend. Blijkbaar nodigt de opgave uit tot het uitsluitend bekijken van positieve gehele getallen kleiner dan of gelijk aan 72.

Bij iedere positieve oplossing is er echter ook een negatieve oplossing; dat vindt men flauw. Als we ook getallen groter dan 72 als oplossing toelaten, dan is, zoals een student opmerkt, het eind zoek, en dat is natuurlijk ook zo. We besluiten daarom de opgave in die zin aan te passen dat we *alleen* positieve natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan 72 als oplossing toestaan. De gestelde opgave formuleren we daarom nu als volgt: *Voor welke natuurlijke getallen $0 < g \leq 72$ geldt $\text{ggd}(72, g) = 4$?*

In de volgende paragraaf bekijken we een strategie die we voor de oplossing van deze opgave bedacht hebben.

Een strategie

Als we samen de oplossingen voor de gestelde opgave proberen te vinden, is de eerste reactie: 'De oplossingen zijn alle veelvouden van 4 kleiner dan of gelijk aan 72'. Hoewel dit antwoord niet juist is, getuigt het wel van enig begrip. Immers, de $\text{ggd}(72, g) = 4$, en dus moet het getal g deelbaar zijn door 4, met andere woorden g is een viervoud kleiner dan of gelijk aan 72. We schrijven al die viervouden (de voorgestelde oplossingen) even op:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72

Het rijtje viervouden kan kort worden genoteerd als:

(1)... $g = 4v$ (met $1 \leq v \leq 18$)

Als alle viervouden zijn opgeschreven, merkt een student op dat we nog wel een paar viervouden uit het rijtje moeten verwijderen want de ggd van 72 en 8 is niet 4 maar 8. Ook is de ggd van 48 en 72 niet 4 maar 24. We moeten 8 en 48 dus uit het lijstje van viervouden schrappen. Dat niet alle viervouden oplossingen zijn van het probleem, komt natuurlijk doordat een veelvoud van 4 *meer* factoren met

72 gemeen kan hebben dan alleen 4. De viervouden waarvoor dat geldt, moeten we dus uit het rijtje verwijderen. We lopen het rijtje langs en schrappen alle viervouden waarvoor de ggd van 72 en dat viervoud groter is dan 4. De lezer gaat gemakkelijk na dat we dan de volgende viervouden overhouden:

4, 20, 28, 44, 52, 68

De opgave heeft dus 6 oplossingen. We hebben, een misschien omslachtige, maar toch afdoende strategie ontwikkeld waarmee het gestelde probleem kunnen oplossen:

Schrijf alle viervouden kleiner dan of gelijk aan 72 op en schrap vervolgens alle viervouden die meer factoren met 72 gemeen hebben dan alleen 4.

Deze methode werkt inderdaad voor het type opgave dat we proberen op te lossen. Bijvoorbeeld voor de opgave 'Bepaal alle getallen $0 < g \leq 72$ waarvoor $\text{ggd}(72, g) = 6$ ' schrijven we eerst alle zesvouden op: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72 waarna we alle zesvouden schrappen die meer factoren met 72 gemeen hebben dan alleen 6. We houden dan de volgende oplossingen over:

6, 30, 42, 66

In dit geval zijn er dus slechts 4 oplossingen.

In het volgende deel kijken we of onze methode wellicht nog vereenvoudigd kan worden. Bovendien ligt inmiddels de vraag naar het *aantal* oplossingen voor de hand.

De strategie nader bekeken

Hoewel we het gestelde probleem hebben opgelost en ook in staat zijn soortgelijke problemen op te lossen, kijken we nog even naar onze methode. In het bijzonder besteden we nog wat aandacht aan het schrapproces; dat wil zeggen, kunnen we iets zeggen over de viervouden die we moeten schrappen en dus over de viervouden (de oplossingen) die overblijven. Het viervoud 16 hebben we uit de lijst geschrapt omdat $\text{ggd}(16, 72) = 8 = 4 \cdot 2$.

Het is eenvoudig te zien waar de (extra) gemeenschappelijke factor 2 vandaan komt. Delen we 16 en 72 door de gemeenschappelijke factor 4, dan houden we de getallen 4 en 18 over en deze twee getallen hebben 2 als een gemeenschappelijke factor. Anders gezegd: $\text{ggd}(4, 18) = 2$.

Ook 60 hebben we uit de oorspronkelijk lijst van viervouden verwijderd omdat $\text{ggd}(60, 72) = 12 = 4 \cdot 3$.

Delen we weer door de gemeenschappelijke factor 4, dan vinden we de getallen 15 en 18. Uit het ggd van deze getallen vinden we de extra factor 3; $\text{ggd}(15, 18) = 3$.

Het viervoud 28 is niet verwijderd omdat 28 en 72 niet meer factoren gemeen hebben dan alleen 4. Dit zien we wanneer we 28 en 72 delen door 4. De overblijvende getallen 7 en 18 hebben geen gemeenschappelijke factor; dat wil zeggen $\text{ggd}(7, 18) = 1$.

Een viervoud $4v$ (met $1 \leq v \leq 18$) heeft slechts de factor 4 met 72 gemeen als $\text{ggd}(v, 18) = 1$. We kunnen nu de oplossingen g van het oorspronkelijke probleem opschrijven als:

(2)... $g = 4v$ (met $1 \leq v \leq 18$) en $\text{ggd}(v, 18) = 1$

Ter illustratie:

$g = 4v =$	4	20	28	44	52	68
$v =$	1	5	7	11	13	17
	$\text{ggd}(v, 18) = 1$					

Voor de opgave 'Bepaal alle getallen $0 < g \leq 72$ waarvoor $\text{ggd}(72, g) = 6$ ' kunnen we nu als antwoord geven:

(3)... $g = 6v$ (met $1 \leq v \leq 12$) en $\text{ggd}(v, 12) = 1$

Ter illustratie:

$g = 6v =$	6	30	42	66
$v =$	1	5	7	11
	$\text{ggd}(v, 12) = 1$			

We hebben hiermee een beknopte formulering gevonden voor onze strategie of, deftig gezegd, ons algoritme. Een belangrijk onderdeel van dit algoritme is het bepalen van alle getallen g waarvoor $\text{ggd}(g, 12) = 1$; met andere woorden, het vinden van getallen die onderling priem zijn met 12. Hiermee zijn we aangekomen bij Euler's ϕ -functie, die we in het vervolg kort bespreken.

Euler's ϕ -functie

Leonhard Euler (1707-1783) introduceerde een getaltheoretische functie ϕ , ook wel *totientfunctie* of *indicator* genoemd, die gedefinieerd is als:

Zij n een natuurlijk getal, dan is $\phi(n)$ het *aantal* natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan n dat *onderling priem* is met n . Anders gezegd, $\phi(n)$ is het aantal natuurlijke getallen $1 \leq g \leq n$ waarvoor $\text{ggd}(n, g) = 1$.

Voor kleine n is $\phi(n)$ eenvoudig te bepalen. De lezer kan de waarden in de onderstaande tabel gemakkelijk nagaan.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\phi(n) =$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12

Hoewel het niet de bedoeling is uitvoerig stil te staan bij de eigenschappen van de ϕ -functie, toch een enkele opmerking, temeer daar een paar studenten verrast zijn door de relatief grote waarden van $\phi(11)$ en $\phi(13)$. Dit heeft alles te doen met priemgetallen. Voor de priemgetallen in de tabel vinden we:

$$\phi(2) = 1, \phi(3) = 2, \phi(5) = 4, \phi(7) = 6, \\ \phi(11) = 10, \phi(13) = 12$$

Dit patroon geldt algemeen omdat ieder getal kleiner dan een priemgetal p onderling priem is met p . Voor een priemgetal p geldt dus:

$$\phi(p) = p - 1$$

Met behulp van de ϕ -functie kunnen we het gevonden algoritme nu als volgt beschrijven:

Om alle getallen $1 \leq g \leq 72$ te vinden waarvoor $\text{ggd}(g, 72) = 4$, bepalen we de $\phi(72/4) = \phi(18)$ getallen die onderling priem zijn met 18. Als we deze getallen met 4 vermenigvuldigen, vinden we alle viervouden die overblijven in het al genoemde schrapproces. Hierbij vinden we tevens dat er $\phi(18)$ oplossingen zijn.

Het vinden van alle getallen die onderling priem zijn met een niet al te groot getal, is relatief eenvoudig. Een aardige methode om dat te doen beschrijven we hieronder. Om alle getallen te bepalen die relatief priem zijn met bijvoorbeeld 28, schrijven we alle getallen kleiner dan of gelijk aan 28 in een matrix (hier in een 4×7 matrix). We lopen de getallen rijgewijs langs. Zodra we een getal tegenkomen dat niet-onderling priem is met 28, schrappen we dit getal én alle veelvouden van dat getal.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

Het eerste getal dat we tegenkomen dat niet-onderling priem is met 28 is 2. We schrappen 2 en alle veelvouden van 2 (alle even getallen).^[2] Dat geeft de volgende matrix:

1		3		5		7
	9		11		13	
15		17		19		21
	23		25		27	

De getallen 3 en 5 zijn onderling priem met 28. Het volgende getal 7 is niet-onderling priem met 28 en dus schrappen we dit getal alsmede alle nog voorkomende veelvouden van 7. Dat geeft de onderstaande matrix:

1		3		5		
	9		11		13	
15		17		19		
	23		25		27	

We zien snel dat alle overgebleven getallen onderling priem zijn met 28 en dus stopt het proces hier. In de matrix staan dus alle getallen die onderling priem zijn met 28. Uit de tabel volgt tevens dat $\phi(28) = 12$. De methode om getallen te vinden die onderling priem zijn met 28 is vergelijkbaar met de *zeef van Erathostenes* om priemgetallen te vinden. Op eenzelfde wijze vinden we snel de $\phi(18) = 6$ getallen die onderling priem zijn met 18: 1, 5, 7, 11, 13 en 17. In overeenstemming met (2) vinden we dan de volgende oplossingen voor het eerder gestelde probleem:

$v =$	1	5	7	11	13	17
$g = 4v =$	4	20	28	44	52	68
$\phi(18) = 6$ oplossingen						

Gauß en de ggd

We hebben de gestelde vraag naar tevredenheid en in zijn algemeenheid beantwoord. Op de weg naar het antwoord hebben we bovendien een aantal relaties ontdekt die leiden tot een fraai resultaat in de getaltheorie. In dit deel laten we zien dat we niet ver verwijderd zijn van een resultaat dat het eerst door Carl Friedrich Gauß (1777-1855) werd opgemerkt. Hieronder volgen de stappen in onze strategie die tot dit resultaat leiden.

Ten eerste merken we op:

- De ggd van een getal $1 \leq g \leq 72$ en 72 is een deler d van 72.

We hebben in het voorafgaande gevonden:

- Het aantal getallen waarvoor geldt dat $\text{ggd}(72, g) = d$, is gelijk is aan $\phi(72/d)$.

Als we met G_d de verzameling getallen aangeven waarvoor $\text{ggd}(72, g) = d$ is en met $|G_d|$ het aantal getallen in de verzameling G_d , dan geldt:

$$|G_d| = \phi(72/d)$$

Zo hebben we al gezien dat $|G_4| = \phi(72/4) = \phi(18) = 6$ en dat $|G_6| = \phi(72/6) = \phi(12) = 4$.

Hieronder volgt een lijst met het aantal getallen dat een ggd d heeft met 72. We merken nogmaals op dat zo'n lijst loopt over alle delers van 72 omdat de ggd van een getal g en 72 een deler is van 72.

$$\begin{aligned} |G_1| &= \phi(72/1) = \phi(72) = 24 \\ |G_2| &= \phi(72/2) = \phi(36) = 12 \\ |G_3| &= \phi(72/3) = \phi(24) = 8 \\ |G_4| &= \phi(72/4) = \phi(18) = 6 \\ |G_6| &= \phi(72/6) = \phi(12) = 4 \\ |G_8| &= \phi(72/8) = \phi(9) = 6 \\ |G_{12}| &= \phi(72/12) = \phi(6) = 2 \\ |G_{18}| &= \phi(72/18) = \phi(4) = 2 \\ |G_{24}| &= \phi(72/24) = \phi(3) = 2 \\ |G_{36}| &= \phi(72/36) = \phi(2) = 1 \\ |G_{72}| &= \phi(72/72) = \phi(1) = 1 \end{aligned}$$

De lezer is het wellicht opgevallen dat het totaal van de laatste kolom (verrassend?) gelijk is aan 72. Een nadere beschouwing leert echter dat dit uiteraard het geval moet zijn, immers de ggd van een getal $1 \leq g \leq 72$ en 72 is een deler d van 72. Bovendien kan zo'n getal maar één keer voorkomen in de lijst. Dus is het kolomtotaal van de eerste kolom gelijk aan 72. Het totaal van de laatste kolom is dus ook gelijk aan 72. De tweede kolom loopt over alle getallen $72/d$ waarbij d een deler van 72 is. Maar als d een deler van 72 is dan is $72/d$ ook een deler van 72 en vinden we in de derde kolom alle delers van 72 terug. Met de notatie $d|n$ voor 'd is een deler van n' vinden we, in sigma-notatie, het volgende resultaat:

$$\sum_{d|72} \phi(d) = 72$$

De som loopt hierbij over alle delers d van 72. Dit gevonden resultaat geldt algemeen.

Zo is bijvoorbeeld ook: $\sum_{d|20} \phi(d) = 20$.

De lezer gaat gemakkelijk na dat 1, 2, 4, 5, 10, 20 de delers van 20 zijn en dat:

$$\phi(1) + \phi(2) + \phi(4) + \phi(5) + \phi(10) + \phi(20) = \\ = 1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 8 = 20$$

De gestelde opgave heeft ons verrassend tot een fraai resultaat in de getaltheorie geleid. Daar zijn we terecht trots op. Helaas voor ons heeft Gauß dit resultaat al zo'n tweehonderd jaar geleden opgemerkt. Maar het herontdekken van een mooie relatie is ook zeer de moeite waard. De algemene formulering van het resultaat is:

Stelling 1 (C.F. Gauß) $\sum_{d|n} \phi(d) = n$

Het bewijs van deze stelling verloopt langs de lijn van de oplossingstrategie van het eerder gestelde probleem. Met de stappen in het gevonden algoritme in gedachten blijken de meeste studenten – hoewel niet bedreven in het geven van bewijzen – het bewijs van deze stelling toch redelijk te kunnen volgen.

Bewijs. Zij G_d de verzameling getallen $0 < g \leq n$ waarvoor $\text{ggd}(g, n) = d$. Merk op dat d een deler is van n . Ieder getal g behoort dan tot één en slechts één verzameling G_d .

Uit:

$$G_A \cap G_B = \emptyset \text{ en } \bigcup_{d|n} G_d = \{1, 2, \dots, n\}$$
 volgt dat:

$$(4) \dots \sum_{d|n} |G_d| = n$$

Als $\text{ggd}(g, n) = d$, dan is $\text{ggd}(g/d, n/d) = 1$ en omgekeerd. Hieruit volgt dat:

$$(5) \dots |G_d| = \phi(n/d)$$

Als d loopt over alle delers van n , dan loopt n/d ook over alle delers van n , en dus volgt:

$$(6) \dots \sum_{d|n} |G_d| = \sum_{d|n} \phi(n/d) = \sum_{d|n} \phi(d)$$

Combinatie van (4) en (6) geeft dan:

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

Epiloog

Zoals in de inleiding is opgemerkt, leidt een simpele vraag over de ggd tot een fraai resultaat in de getaltheorie. Toegegeven, niet in iedere les heb je zoveel geluk. Maar het voorafgaande laat zien dat, als je op een creatieve manier omgaat met het aanleren van algebraïsche vaardigheden, de lessen waarin je daar aandacht aan besteedt, geenszins saai behoeven te zijn, zoals door sommigen nog wel eens beweerd wordt. Algebraïsche vaardigheden bieden, naar mijn overtuiging en ervaring, meestal voldoende mogelijkheden voor de leerling om zelf – liefst onder enthousiaste begeleiding – aardige dingen te ontdekken.

Noten

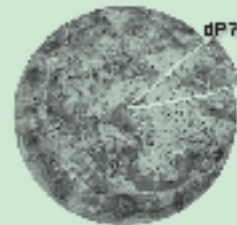
- [1] Het hanteren van deze en andere formules vereist een zekere handigheid in het omgaan met breuken.
- [2] Om alle getallen te bepalen die onderling priem zijn met een even getal, kunnen we volstaan met een matrix van oneven getallen, daar alle even getallen uiteraard niet-onderling priem zijn met een gegeven even getal.

Literatuur

- Frits Beukers (1998): *Getaltheorie voor beginners*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- David M. Burton (2007): *Elementary Number Theory*. New York: McGraw-Hill.
- Jan van de Craats, Rob Bosch (2009): *Basisboek Wiskunde*. Amsterdam: Pearson (2e editie).

Over de auteur

Rob Bosch is universitair hoofddocent wiskunde en statistiek aan de Nederlandse Defensie Academie in Breda. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*.
 E-mailadres: robosch@live.nl



Differentialen en Diepvriespizza's

[Dorien Lugt]

Heeft u enig idee van het wiskundestudentenleven van tegenwoordig? Is wiskunde studeren nog was het was? Dorien Lugt is sinds augustus 2009 wiskundestudent aan de TU Delft en schrijft voor *Euclides* over haar belevenissen en observaties vanuit collegezaal en studentenhuys.

2x + 3 = 9 los je op met intersect

Leerlingen die van half negen 's ochtends tot zes uur 's avonds doorwerken. Ze zijn stil tijdens de uitleg, nemen alle aantekeningen van het bord over en komen soms 's avonds nog terug om extra te oefenen. Het zijn leerlingen van een examencursus. Daar wordt in drie dagen tijd de stof voor het examen behandeld. Alles verdeeld in duidelijke blokken en uitgelegd aan de hand van stappenplannen. Voor de klas van 20 à 25 leerlingen staat één hoofddocent en als de leerlingen sommen, maken lopen er nog ongeveer vier assistent-docenten rond. Sinds kort ben ik ook assistent-docent, bij de cursus wiskunde-A voor havo.

In de opleiding tot assistent-docent leren we dat je een leerling alleen mag helpen door tegenvragen te stellen.

'Wat vragen ze hier?'

'Bij welk blok uitleg hoort dit, denk je?'

'Zie je misschien wat voor soort kans dit is?'

Ook leren we dat je elke keer wanneer je een leerling komt helpen, een complimentje moet geven.

'Wat werk je overzichtelijk!'

'Wat goed dat je ziet dat dit een exponentiële functie is!'

Toen ik daar net mee begon, dacht ik dat die leerlingen knettergek zouden worden. Maar tot mijn grote verbazing hebben ze niets door, bij elk compliment wordt hun paniek kleiner en hun glimlach groter. De meisjes die aan het begin van de cursus geen vraag stellen zonder eerst uitgebreid te ratelen dat 'ze écht heel slecht zijn in wiskunde', zeggen de derde dag ineens dat 'het best wel goed gaat'.

De jongens die de eerste dag nog alles afraffelen, geven zich al snel over en schrijven

netjes alle denkstappen op in hun schrift.

Daar letten we dan ook goed op. Alle sommen die de leerlingen maken, worden door ons nagekeken. We schrijven dan tips in de schriften en vaak plakken we stickers of verzinnen we een rebus. Soms vergeten we dat. Maar altijd steekt er dan wel een jongen, met drie blikjes *Red Bull* op zijn tafel en een joggingbroek aan, zijn hand op: 'Waarom krijgen we geen rebussen? Die kregen we bij de economie cursus ook!' Leerlingen van bijna 18, die bij elke vraag de conclusie netjes in een zin geven, omdat ze dan een sticker of een rebus krijgen. Het blijkt te werken.

Het is echt verbazend wat er tijdens zo'n cursus met een leerling gebeurt. Aan het begin van de cursus vragen leerlingen soms of je voor het oplossen van $2x + 3 = 9$ de *intersect*-functie van je rekenmachine mag gebruiken. Toch blijkt elke keer weer dat deze leerlingen na de eerste dag zelfstandig de formule voor een exponentiële functie kunnen opstellen.

Niet alleen die snelle vooruitgang vind ik leuk. Ook de vreemde redenaties van sommige leerlingen zijn erg vermakelijk. Vorige week moest een jongen een formule geven voor een lineair verband. Hij schreef de coördinaten keurig over in zijn schrift: (0,0) en (8,12). Hij keek er even naar en riep toen enthousiast: 'Dus nu moet ik haakjes wegwerken!'

Het uitleggen gaat me steeds beter af. Maar als ik negen dagen achter elkaar cursus geef, moet ik wel oppassen dat ik niet blijf hangen in de rol van cursusdocent. Ik gaf de caissière bij *AH to Go* vanmorgen een compliment voor het feit dat ze de producten zo snel scande. En bij de vraag hoe laat het is, krijg ik al de neiging te antwoorden met een tegenvraag.



Community of Learners:

NIEUW PROFESSIONALISERINGSTRAJECT VOOR WISKUNDEDOCENTEN

VERRIJKING VAN MIJN VAKBELEVING

[Ingrid Szwajcer]

Bij de Universiteit Twente loopt een nieuw, ambitieus professionaliseringstraject voor wiskundedocenten: de Community of Learners (CoL). Wiskundedocenten van verschillende scholen komen eens per drie weken bij elkaar en werken actief samen bij het (her)ontwerpen en onderzoeken van theoretisch verantwoord materiaal dat meteen wordt ingezet in de lessen. Zij worden hierbij ondersteund door twee vakdidactici, een toegepast wiskundige, een schoolpracticumbegeleider en een promovendus van de Universiteit Twente. De ervaringen zijn zeer positief. CoL-deelnemer Henk van der Liet: 'Deelnemen aan dit project betekent een verrijking van mijn vakbeleving.'

Aanleiding voor een CoL voor het vak wiskunde zijn de tegenvallende prestaties van vwo-scholieren op de instaptoets wiskunde van de technische universiteiten. Binnen het vwo-eindexamenprogramma is daarom hernieuwde aandacht voor de beheersing van algebraïsche vaardigheden. De laatste jaren zijn er voortdurend inhoudelijke veranderingen in het vo-wiskunde-onderwijs geweest.

Projectleider Nellie Verhoef: 'Voor wiskundedocenten ligt er inmiddels een grote uitdaging om, na alle commotie over de effecten van het reken-wiskundeonderwijs, eens kritisch naar de eigen les te kijken en het wiskundig denk- en werkniveau van leerlingen omhoog te tillen. Professionalisering en verdieping van de kennis en vaardigheden van docenten zijn hierbij essentieel.'

Het doel van de CoL is uiteindelijk te komen tot een praktisch bruikbare curriculumvernieuwing en ontwikkeling van docenten op didactisch en vakinhoudelijk gebied.

Om de tafel met collega's

Wat gebeurt er concreet in de wiskunde-CoL? Het eerste deel van het project richt zich op het wiskundige begrip *afgeleide*. Allereerst verdiepen de docenten zich in wetenschappelijke literatuur over wiskundige en didactische aspecten van de afgeleide, die vervolgens met elkaar worden besproken.

Een reis door drie werelden

Met name de theorie van Tall^[1] bracht de CoL'ers tot nadenken over de denkpro-

cessen van leerlingen. Volgens Tall maken leerlingen een reis door drie werelden:

(1) de meest laagdrempelige wereld van waarnemen, zowel meetkundig als analytisch, als opstap naar de eigenschappen van objecten (*conceptual-embodied world*), (2) de wereld van symbolen waarmee je rekent en (algebraïsch) manipuleert (*proceptual symbolic world*) en (3) de wereld van definities, axioma's en logische bewijzen (*axiomatic formal world*). De CoL'ers hebben deze theorie vertaald naar een nieuwe introductieles over het begrip afgeleide. De reis naar het begrip afgeleide begint bij het meetkundig en analytisch waarnemen van de grafiek van $y = x^2$. In elk punt van de grafiek kun je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bepalen en met een stip aangeven in de grafiek. Dit alles speelt zich af in de *embodied world*. In de *symbolic world* is de richtingscoëfficiënt van die lijn, de raaklijn, te representeren als componenten dx en dy van een vector. Bij deze introductie van de afgeleide is het niet nodig om de limiet erbij te betrekken zoals

in de lesmethode wel gebeurt.

Deze aanpak was voor de docenten inspirerend. Al pratend kwam het idee op de les uit het boek aan te passen en de afgeleide te introduceren met een applet in *Geogebra*. Het idee van Tall was de benadering van *local straightness* – het inzoomen op een punt van de grafiek en de raaklijn in dat punt van die grafiek. De kromme wordt uiteindelijk een rechte lijn, ze vallen samen! De docenten deden iets anders. Ze gingen uit van twee verschillende punten op de grafiek, één punt werd verschoven naar het andere punt totdat beide punten samenvielen. De applet was zo geprogrammeerd dat als vanzelf de lijn door twee punten vervormde tot een lijn door één punt. Op zich is dat bijzonder, want een lijn door één punt kun je niet zomaar construeren. Eigenlijk kom je zo weer bij het probleem van de limiet terecht dat stiekem wordt weggemoffeld. En dat wilde Tall nu juist vermijden. Om docenten met een andere aanpak niet al te geïsoleerd te laten werken werd afgesproken dat elke docent zijn lesaanpak met zijn achterban, de wiskundecollega's van de eigen school, zou voorbespreken.

Denkproces van leerlingen

De CoL'ers hebben deze nieuwe les ieder op hun eigen school in hun eigen klas (4-vwo, wiskunde-B) gegeven. Deze les werd geobserveerd door zowel collega's als UT-medewerkers en andere geïnteres-



foto 1: CoL'ers om de tafel

seerden (zelfs een schoolleider!). De eerste les verliep zo soepel dat er geen enkele vraag werd gesteld. Alle hindernissen en belemmeringen waren in de les geïntegreerd. De leerlingen volgden moeiteloos de docent in zijn redenering. Wel hadden de leerlingen moeite met het begrip raaklijn, want het is toch vreemd dat je een lijn kunt construeren door één punt. Daarom spitste de daaropvolgende les zich toe op dit wiskundige begrip. De leerlingen kregen ieder een vel papier met daarop de grafiek van $y = x^2$. Het assenstelsel was niet overeenkomstig de ruitjes getekend, waardoor de coördinaten van de punten niet gemakkelijk af te lezen waren. Elke leerling werd gevraagd in een gegeven vast punt een raaklijn te trekken en daarvan de richtingscoëfficiënt te bepalen. Natuurlijk kwamen er verschillende antwoorden. Het onderwijsleergesprek verliep glad en aangenaam. De leerlingen gaven juiste antwoorden op vragen en stelden zelf geen extra vragen meer. Verhoef: 'Natuurlijk wilden we weten of deze nieuwe aanpak invloed heeft op het denkproces van de leerlingen. Hiervoor hebben we een onderzoeksinstrument ontwikkeld.'

CoL-deelnemer Henk van der Liet, wiskundedocent aan CSG Het Noordik in Almelo: 'Als CoL'ers hebben we hierover meegedacht. Omdat de leerlingen geen vragen stelden, hebben we besloten de les te verlengen naar 70 minuten, en tussentijds hebben de leerlingen schriftelijke vragen beantwoord over de lesstof. Algemene conclusie: de leerlingen waren verbaasd dat ze meer dan één raaklijn konden tekenen, terwijl er maar één formule is. Spontaan begonnen leerlingen te praten over het 'wiebelen' van de raaklijn.'

Het effect van de wiskunde-CoL

Tijdens het project wordt ook onderzocht of en hoe docenten zich hebben ontwikkeld op het gebied van wiskunde en didactiek. Komt dat doordat ze van elkaar leren tijdens de bijeenkomsten? Doordat ze zich verdiepen in de literatuur of door de ervaringen in de praktijk van het lesgeven? Voor en na het project is met een prioriteitenlijst vastgesteld welke doelstellingen de docenten het belangrijkste vinden in hun wiskundeonderwijs en welke instructiemethode zij daarvoor willen gebruiken. Wat blijkt? De voorkeur voor de doelstellingen is nauwelijks verschoven. Er is wel een accentverschil: het kunnen redeneren als basis voor het wiskundig denken, zowel deductief als inductief, wordt essentieel gevonden. Het kunnen gebruiken van computerapplicaties en de grafische rekenmachine is zowel voor als na de pilot niet een belangrijk doel van de wiskundes. Ook is expliciet

gevraagd naar aspecten van het begrip afgeleide. Vóór hun deelname aan de CoL hanteerden de docenten liever een instructie aan de hand van de uitwerking in praktische situaties, bijvoorbeeld met 'snelheid' het begrip afgeleide uitleggen. Na de CoL kiezen ze liever voor een introductie door verschillende voorbeelden te geven in een wiskundige context.

Bijvoorbeeld: Geef, gegeven de functie $f(x) = x^2$, een vergelijking van de lijn door de punten $P(3, 9)$ en $Q(5, 25)$.

Ze willen dus dicht bij de wiskunde blijven. Verhoef: 'De resultaten heb ik met de docenten besproken; dat vonden ze prachtig. Ze herkenden hun antwoorden voordat ze begonnen aan het project. Op deze manier houd je een spiegel voor.'

Redeneren als basis voor het wiskundig denken

Doelstellingen om te redeneren als basis voor het wiskundig denken, zijn in het tweede deel van de CoL gerealiseerd toen het begrip (co)sinus aan de orde was. De focus lag in dat lesontwerp op de introductie en het actief redeneren met de eenheidscirkel als denkmodel.

De lesroutine doorbroken

De wiskunde-CoL is al volop aan de gang en de ervaringen van de deelnemende docenten zijn erg positief. CoL-deelnemer en wiskundedocent Henk van der Liet: 'Deelnemen aan dit project betekent een verrijking van mijn vakbeleving. Je discuteert uitgebreid over de inhoud van de lessen met collega's van andere scholen. Wat is nu de kern van het verhaal en waarom doe je bepaalde dingen wel of niet? In de dagelijkse lespraktijk is hier geen tijd voor en volg je meestal gewoon de methode uit het boek.'

Verhoef heeft gemerkt dat docenten het heerlijk vinden om buiten de context van hun eigen school samen met vakgenoten over een onderwerp te buigen dat je zelf doceert. Ze vertelt: 'Docenten die twintig jaar voor de klas staan, komen dan alsnog tot nieuwe inzichten. Docenten raken er erg gemotiveerd door. Voor hen is het een goede manier om hun denken over wiskundige begrippen aan te scherpen.' Van der Liet is het daarmee eens: 'Je wordt weer even helemaal op scherp gezet. Je wordt je ervan bewust dat er meerdere manieren zijn om les te geven. De routine van het dagelijks lesgeven wordt weer even doorbroken.'

'De leraar is belangrijker dan het boek'

Eens in de drie weken is er een CoL-bijeenkomst op de Universiteit Twente, maar

daarnaast spreken de CoL'ers op eigen initiatief ook iedere week af. Van der Liet: 'We werken allemaal erg enthousiast aan het project. Ik heb vooral geleerd om zelf te reflecteren op de lesstof, en dat je niet altijd strak de methode uit het boek hoeft te volgen. Daarnaast hangt het succes van een les niet alleen af van de lesmethode, maar ook van het enthousiasme van de docent en of hij een prettig verhaal weet te vertellen. De leraar is dus belangrijker dan het boek. Omdat je heel goed hebt nagedacht over de inhoud van de les, heeft dit bovendien ook weer een positief effect op je manier van lesgeven. Mijn collega-docenten op school benijden mij wel: ze zouden zelf ook wel mee willen doen aan een Community of Learners.'

Steun vanuit scholen

Een belangrijke randvoorwaarde voor het slagen van de CoL is de steun van de schoolleiding. Verhoef: 'Belangrijk is dat de docenten tijd krijgen om zich te professionaliseren en onderzoek te doen. Dat is best een stap en hier wil het ook nog wel eens wringen. Het is voor scholen wel een tijdsinvestering. De start van een goedlopende CoL duurt minstens een half jaar. Er zijn vaak besprekingen en het is de bedoeling dat er ook op school uiteindelijk veranderingen in de onderwijssituatie in gang worden gezet. Dat heeft best een grote impact. Ook in de wiskunde-CoL kregen we met dit probleem te maken. We begonnen het project met vijf wiskundedocenten, van wie twee docenten helaas genoodzaakt waren om uit het project te stappen omdat ze geen tijd van hun schoolleiding kregen. Erg jammer. Het nadeel van reguliere bijscholings- of professionaliseringsactiviteiten, zoals een 'heidag' of de Nationale Wiskunde Dagen, is dat het effect snel weer wegebt en dat de vertaalslag naar de dagelijkse onderwijspraktijk vaak niet wordt gemaakt. In de Community of Learners gebeurt dat wél. Het effect van een CoL is dan ook duurzamer.'

Noot

- [1] D.O. Tall (2008): *The Transition to Formal Thinking in Mathematics*. In: *Mathematics Education Research Journal*, 20(2); pp. 5-24.

Website

URL: www.utwente.nl/elan/professionalisering/colwiskunde/

Over de auteur

Ingrid Sz wajcer is werkzaam op de afdeling Communicatie & Media van de Universiteit Twente.
E-mailadres: i.d.szwajcer@utwente.nl

Vanuit de oude doos

A^o 1943

[Ton Lecluse]

Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Om- en aangeschreven

Deze keer eens niet *alleen* meetkunde, maar mooie dwarsverbanden met algebra en goniometrie. Het betreft meerdere opgaven. De opgaven zijn niet moeilijk en wellicht geschikt om direct (in de gegeven of een aangepaste vorm) in de klas te gebruiken. Wat volgt is niet de letterlijke tekst van een vraagstuk in een toelatingsexamen in 1943; het gestelde probleem heeft hier de vorm van een *sangaku* (zie *figuur 1*).



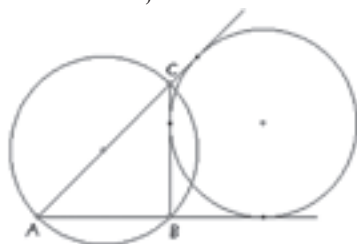
figuur 1

Bij een sangaku^[1] wordt gevraagd in de tekening een bijzonderheid te ontdekken en deze vervolgens te bewijzen. Probeer eerst eens de situatie te omschrijven in de vorm 'gegeven, te bewijzen, bewijs'. Dan pas onder de streep spieken! En, wellicht helpt het dit model te tekenen met een dynamisch computerprogramma.

Gegeven: 'geodriehoek' ABC met omgeschreven cirkel en aangeschreven cirkel aan een van de rechthoekszijden (zie *figuur 2*).

Te bewijzen: de cirkels hebben een gelijke straal.

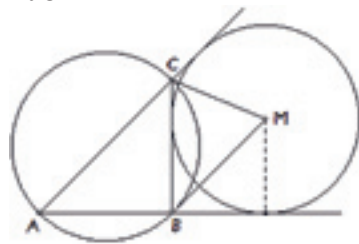
Geef u een bewijs?



figuur 2

Niet verder lezen, eerst zelf proberen!

Stel $AB = 1$. De omgeschreven cirkel heeft dan een straal met lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Om de straal van de aangeschreven cirkel te berekenen is het wellicht handig de (buiten-)bissectrices te tekenen van de buitenhoeken bij B en C van driehoek ABC . Deze bissectrices snijden elkaar in punt M , het middelpunt van de aangeschreven cirkel (zie *figuur 3*).

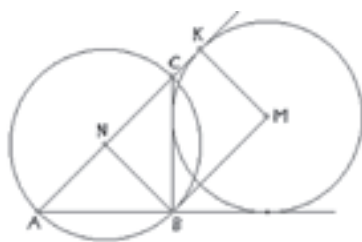


figuur 3

We kunnen eenvoudig inzien dat $\angle CBM = 45^\circ$ en dat $\angle MCB = 135^\circ / 2 = 67\frac{1}{2}^\circ$, waaruit volgt dat $\angle BMC = 67\frac{1}{2}^\circ$. Dus is driehoek BMC gelijkbenig: $BM = BC = 1$. De straal van de aangeschreven cirkel is gelijk aan de afstand van M tot AB , en is dus (ook) gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Toen ik deze opgave in mijn 5-vwo klas behandelde, vond een leerling het volgende elegante alternatief.

Omdat AC en BM beide een hoek van 45° maken met AB , zijn deze lijnen evenwijdig (*F-hoeken*). De afstand tussen deze twee evenwijdige lijnen is zowel BN als MK (zie *figuur 4*).



figuur 4

En dat zijn juist de stralen van de twee cirkels. Klaar!

Wel nog even netjes formuleren waarom BN en MK loodrecht staan op AK of BM .

Het vervolg

De voorraad meetkundeopgaven die ik uit de toelatingsexamens haal, raakt op. In de volgende jaargang van *Euclides* wil ik overstappen op andere onderwerpen uit toelatingsexamens: op het gebied van algebra, goniometrie, met soms dwarsverbanden met bijvoorbeeld meetkunde. Het zijn mooie opgaven voor onze huidige bovenbouw vwo. In dit artikel alvast enkele voorbeelden.

1. Hoekmeetkunde

Een deel van een opgave in een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1945 luidt:

Van driehoek ABC is gegeven: $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. Bewijs dat hoek $C = 2 \times$ hoek A .

2. Een vierkant

In een toelatingsexamen wiskunde in 1945 staat het volgende vraagstuk.

In het vierkant $ABCD$ is E het midden van CD .

Bewijs: $\tan \angle AEB = \frac{4}{3}$.

(Ik heb hierin het oorspronkelijke tg vervangen door $\tan$.)

3. Een meetkundige plaats

Een opgave in het toelatingsexamen in 1946, waarin ik de gegevens heb geïnterpreteerd, is:

Door het punt $A(0; 4)$ trekt men een veranderlijke lijn, die de X -as in B snijdt. Bepaal de vergelijking, aard en ligging van de meetkundige plaats van het snijpunt van de middelloodlijn van AB met de lijn door B evenwijdig met de Y -as getrokken.

4. Hoogtelijnen

En een probleem uit het toelatingsexamen van 1948:

De hoogtelijnen AD en BE van de driehoek ABC worden door het hoogtepunt H zodanig verdeeld, dat $AH = HD$ en $BH = 4HE$.

Men vraagt de hoeken van driehoek ABC te berekenen.

Summiere uitwerkingen

Opgave 1 – Gebruik twee keer de *cosinusregel*:

Uit $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$ volgt:

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

Uit $6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos \gamma$ volgt:

$$\cos \gamma = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

En met de formule $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ is eenvoudig na te gaan dat $\gamma = 2\alpha$.

Opgave 2 – Stel de zijden van het vierkant gelijk aan 2, en schrijf lengtes bij de lijnstukken; zie *figuur 5*.



figuur 5

Je kunt dan eenvoudig afleiden: $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ en $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

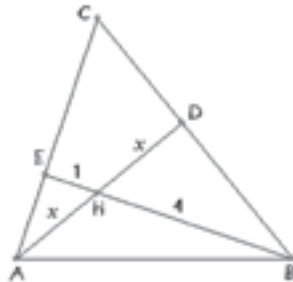
Dus: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}$ en $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{3}{5}$, enzovoort.

Opgave 3 – Het is de klassieke paraboolconstructie, nu in de vorm van een analytisch probleem, en deze kan worden gezien als een opgave uit de analytische meetkunde, of ook als oefening in modelleren.

Oplossing: $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$.

Opgave 4 – Zonder de algemeenheid te schaden mag je stellen (zie *figuur 6*):

$HE = 1$, $HB = 4$, $AH = HD = x$



figuur 6

De driehoeken AHE en ACD zijn gelijkvormig, evenals de driehoeken BDH en BEC .

Hieruit kan men afleiden:

$$EC = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{5x}{\sqrt{16 - x^2}} \text{ en}$$

$$DC = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{4 + x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Tel de vergelijkingen bij elkaar op:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^2 + 5x + 4}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Na ontbinden van de tellers kan de factor $(x + 1)$ worden 'weggedeeld', zodat:

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x + 4}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Kwadrateren, de noemers ontbinden, beide breuken vereenvoudigen en dan kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$(x + 1)(4 - x) = (x + 4)(x - 1)$$

met als enige positieve oplossing $x = 2$.

Hierna kun je de hoeken van driehoek ABC met eenvoudige goniometrie bepalen:

$$\angle C = 60^\circ, \angle A \approx 70,9^\circ, \angle B \approx 49,1^\circ$$

Noot

[1] Zie bijvoorbeeld: <http://nl.wikipedia.org/wiki/Sangaku>

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatings-examens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: alecluse@casema.nl

Gecijferd! - een multimediaal leermiddel voor rekenen

Gecijferd! biedt een andere kijk op het omgaan met de kwantitatieve wereld om ons heen.

De realiteit wordt zo veel mogelijk benadrukt, beeld en gesproken taal vervangen de talige contexten en onnodige abstractie van het traditionele rekenen wordt liever vermeden.

Bewerkingen worden als middel ingezet om een probleem op te lossen en zijn geen doel op zich.

Gecijferd! is het eerste product dat het referentieniveau 2F uit het rapport-Meijerink uitgewerkt heeft in een compleet leermiddel.



Gecijferd! is te bereiken via de website www.gecijferd.nl en biedt

- een moderne techniek om te leren rekenen
- diagnostische deoltoetsen
- een volwassen benadering van de doelgroep
- voorstelbare en aansprekende contexten
- tientallen video's en honderden animaties
- gesproken tekst
- honderden trainingsopgaven
- gratis werkbladen
- sturende feedback bij iedere opgave

Meer info: surf naar www.gecijferd.nl. Wilt u meer weten over het product of heeft u andere vragen? Mail of bel Madeleine Vliegthart, m.vliegthart@aps.nl, 06 2505 1941. Gecijferd! is SCORM-compliant en werkt binnen en buiten elo's.



ALGEBRAÏSCHE VAARDIGHEDEN – EEN REACTIE

[Joost Hulshof]

In het vorig jaar in *Euclides* verschenen artikel *Exittoets algebraïsche vaardigheden bij vwo A* ^[1] komt het differentiëren van 2^x voor. In mijn hele leven als wiskundige heb ik nog nooit de behoefte gehad om dat te doen, en ik verwacht ook niet dat die behoefte nog gaat komen. Wel is met de machten van 2 mijn liefde voor rekenen en wiskunde begonnen: 2, 4, 8, 16, ... steeds het dubbele aantal rijstkorrels op het volgende vakje van het schaakbord. Intrigerend lang voordat er zoiets als celbiologie was, en nu juist vanwege de evidente relevantie voor alles dat met het leven te maken heeft, HET voorbeeld waarmee je een vak over dynamische verschijnselen in de levenswetenschappen zou kunnen beginnen.

Laat zien die rij in al zijn glorie: 2^n met n element van $\mathbf{N}$.

Maar 2^x ? Met x element van $\mathbf{R}$? Moet dat echt naar steeds met die rare en lelijke uitbreiding van 2^n via $2^{p/q}$ (met p/q element van $\mathbf{Q}$) naar 2^x (met x element van $\mathbf{R}$)? Vanwege halfwaardetijden? Afgezien van de opmerking dat 2^t of liever nog 2^{-t} dan beter klinkt, ligt het vanuit het, om allerlei redenen, natuurlijke perspectief van dynamische modellen dan niet veel meer voor de hand om meteen de vraag te stellen wat er gebeurt met een grootte X die varieert in de tijd, en wel zo, dat op elk moment de toename evenredig is met de waarde op dat moment? Met een evenredigheidsconstante die we eerst maar eens gelijk aan 1 nemen, zodat voor $X(t)$ geldt dat:

$$X'(t) = X(t)$$

In [2] heb ik wat gedachten geformuleerd over hoe je zo, met beginwaarde $X(0) = 1$, de functie $\exp(t)$, het getal $e = \exp(1)$ en de (zinvolle) notatie $\exp(t) = e^t$ kunt introduceren. Daarna kan e^{at} langs komen, en, als het moet, met de juiste keuze van a ook 2^t . Direct relevant voor elke scholier die later een van de minder harde bètavakken kiest en die, net als ik, in zijn/haar verder carrière ook nooit de functie 2^x zal willen differentiëren.

Er zijn veel manieren om de exponentiële functie in te voeren. Bijvoorbeeld aansluitend bij de definitie van afgeleide via een benadering met eindige differenties. Dus met:

$$X'(t) \approx \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

waarbij de differentiaalvergelijking wordt
vervangen door de differentievergelijking:

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X(t)$$

Herschreven als:

$$X(t+h) = X(t) + h \cdot X(t) = (1+h) \cdot X(t)$$

is dit de *voorwaartse methode van Euler* voor de differentiaalvergelijking waarmee we begonnen zijn. De benadering hangt natuurlijk van h af, en van de beginwaarde, waarvoor we eerst maar eens $X(0) = 1$ kiezen.

Je kunt voor een gegeven t in 3 stapjes van 0 naar t lopen, maar ook in 42 stapjes, door $h = t/42$ te nemen. Beginnend bij $X(0) = 1$ geeft dit met het *binomium van Newton*:

$$\begin{aligned} X_{42}(t) &= (1+b)^{42} = 1 + 42b + \frac{42 \cdot 41}{2} b^2 + \frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{3 \cdot 2} b^3 + \dots \\ &= (1 + \frac{t}{42})^{42} = 1 + t + \frac{41}{42} \cdot \frac{t}{2} + \frac{41 \cdot 40}{42 \cdot 42} \cdot \frac{t^3}{3 \cdot 2} + \dots \end{aligned}$$

Het is een som met 43 termen, waarvan ik alleen de eerste paar termen opschrijf, genoeg om de regelmaat te zien als je zo verstandig bent om hier vooral *geen* ict te gebruiken.

Rekenen met breuken: *use to learn* en *learn to use*.

De index 42 hangt eraan om aan te geven dat de benadering van de keuze van het aantal stapjes afhangt. Wat met 42 stapjes kan, gaat ook met 9999999999 stapjes (1000000000 termen). Doe het maar na en schrijf de eerste paar termen op. Regelmaat moet je *leren* zien. Elke voorfactor (de breuken met in de noemer $N = 42$) komt van onder steeds dichterbij 1 te liggen als het aantal stapjes N groter wordt genomen. In de limiet zien we verschijnen:

$$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3 \cdot 2} + \frac{t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

Geen echt bewijs natuurlijk, maar wel een begin daarvan. Bovendien, dit is precies wat je rekenmachine doet als je op de *exp*- of *e^x*-knop drukt. Controleer maar of het klopt: *use to learn* en *learn to use*.

En kijkt daarna hoe het gaat als je het hele verhaal begint met $X(t) = a \cdot X(t)$, met a element van $\mathbf{R}$, vast maar willekeurig gekozen, en of je het verband ziet met rente op rente, bij jaarlijkse, maandelijke, wekelijkse, ... rentebijgeschrijvingen.

Noten

- [1] P. Kop, R. van Oord (2009): *Exittoets algebraïsche vaardigheden bij vwo A*. In: *Euclides* 85(2), november 2009; namens de NVvW-werkgroep HAVO/VWO.
- [2] www.math.vu.nl/~jhulshof/fechtebrrrwwis-kunde.pdf

Over de auteur

*Joost Hulshof werkt op de Afdeling Wiskunde
van de Vrije Universiteit in Amsterdam.
E-mailadres: jhulshof@few.vu.nl*

MBO'er moet op het HBO kunnen blijven rekenen

IMPRESSIE CONFERENTIE WERKGROEP-HBO

[Hans Daale]

Zet mensen uit mbo en hbo bij elkaar, vooral uit de technische of economische hoek, dan barst al gauw in alle hevigheid de discussie over reken- en wiskundevaardigheden los – en anders gaat het wel over 'taal'. Het opmerkelijke is wel dat je deze felle samenscholingen al meer dan tien jaar kunt aantreffen. Ze werden extra zichtbaar na het afschaffen in de eerste helft van de negentiger jaren van de vorige eeuw van de centrale eindexamens in het mbo, gevolgd door het invoeren van drievoudig gerichte beroepskwalificaties en nog eens extra hevig aangezet na de overgang op competentiegericht onderwijs zonder een vakgerichte structuur.

Daarom werd het weer eens tijd om landelijk de stand van zaken op te maken rond de invulling van rekenen, wiskunde, mathematische vaardigheden of hoe men deze kennis ook noemt binnen een hbo-programma. Tenminste, dat vond de Werkgroep-HBO van onze NVvW. Zo'n 120 ervaringsdeskundigen op het gebied van instroom en aansluiting gaven gehoor aan de oproep om op vrijdag 9 april j.l. naar Hogeschool Domstad in Utrecht te komen. Die gretigheid om met elkaar, andere experts en beleidsmakers in discussie te gaan, was mede ingegeven door actuele ontwikkelingen, zoals het invoeren van referentieniveaus voor rekenen (en taal) en de terugkeer van landelijke examens binnen het mbo. Bovendien gebeurt dat nu allemaal omdat 'het hbo' voortdurend is blijven roepen dat het mbo haar verplichtingen als vooropleiding verzaakt en daarmee indirect voor óf meer uitval óf een gedwongen niveauverlaging van hbo-diploma's zorgt.

Probleemstelling

Om de mensen naar Utrecht te krijgen had de Werkgroep vooraf een knuppel in het beroepsonderwijshok gegooid, met kreten als: 'Er wordt bij Techniek en Economie

niet genoeg gekeken naar de voorbereiding van de wiskunde', 'Rekentoetsen alleen zijn bij lange na niet voldoende', 'De instromende mbo'ers worden meteen al op achterstand gezet'.

Duidelijk dus en voldoende verontrustend, ondanks alle goede bedoelingen van de beleidsvoerders. Er is meer nodig in het mbo, op een structurele wijze. Dat was daarmee ook het belangrijkste doel van deze oploop: bezien hoe vanuit het onderwijsveld zelf gedachten kunnen worden aangedragen voor een meer gemeenschappelijk draagvlak voor het inbedden van de noodzakelijke wiskundige voorkennis in de mbo-kwalificaties.

Van start met de bijeenkomst

Na de inleiding van Metha Kamminga, nog voor eventjes voorzitter van de Werkgroep-HBO en drijvende kracht achter het aankaarten van deze problemen ('We willen wel uitkomsten hebben van deze dag, dus straks iedereen achter de pc naar onze website!'), toont dagvoorzitter Roel van Asselt een aantal bekende, maar helaas nog steeds actuele cijfers over uitval en rendementen van mbo'ers in het hbo. Het gaat gewoon niet goed genoeg. Het is echter lastig als mbo en hbo de vinger te leggen op de juiste zere plek. Het hbo moet volgens hem nog beter dan voorheen gaan articuleren wat een mbo'er nodig heeft aan wiskundige bagage. Vooral in de sector techniek – in tegenstelling tot economie – is dat van overlevingsbelang, aangezien er in die sector erg weinig switchmogelijkheden zijn en stoppende mbo'ers veelal het hbo verlaten.

Gelet op deze situatie is deze bijeenkomst bedoeld om een stevige aanzet te geven tot het formuleren van een wiskundig referentiekader voor de mbo'ers die opteren voor een vervolgopleiding in het hbo. 'Maar dan ben je er nog niet', betoogt Roel, omdat de sectoren mbo en hbo zich nog

steeds autonoom ontwikkelen en daarbij allerlei zaken los van elkaar dynamiseren. Verankering in mbo-dossiers van 'noodzakelijke doorstroomkwalificaties die meer garanties bieden voor studiesucces in het hbo', is noodzakelijk, om te voorkomen dat het hbo steeds achteraf moet reageren, met als gevolg extra kosten voor reparatietrajecten.

Ontwikkelingen rond rekenen en niveaus

Nu gebeurt er wel van alles rond 'rekenen'. Dit 'vak' wordt onderhand een metafoor voor de emotie die er hangt rond de discussies over het afglijden van ons land naar een dusdanig niveau dat 'we als Nederland als kenniseconomie de slag met andere landen aan het verliezen zijn', om alvast een forumuitspraak te citeren.

Monica Wijers, onderwijsontwikkelaar bij het Freudenthal Instituut, schetst een overzicht van de referentieniveaus voor het rekenen, met de gevolgen voor mbo-hbo. Vooral de klachten vanuit het hbo, met de pabo als het meest sprekende voorbeeld, hebben gezorgd voor het gaan invoeren daarvan. Maar het is ook een kwestie van een maatschappelijke zorg, draaiend om leerlingen die nu jarenlang geen rekenen hebben gehad en zeker niet hebben onderhouden, en die het recht verwerven om een hbo-opleiding met veel wiskunde te gaan doen. Dat geeft een compleet verkeerd beeld van doorlopende leerlijnen.

Monica meldt dat het rekenniveau voor mbo-4 en havo-5 gelijk zal gaan worden, in functioneel opzicht en waar noodzakelijk ook met een verdieping met het oog op het vervolg. Dat betekent dus dezelfde soorten kaders, en in ieder geval meer duidelijkheid. Bovendien is het pure winst dat deze niveaus de scholen verplichten het rekenen stelselmatig te onderhouden.

Er wordt nu al door het Cito veel uitgetoetst en uitgetest rond landelijke examens.

Dan blijken bepaalde scores die mbo'ers behalen, niet erg hoog te zijn. Zoiets lijkt alarmerend, maar het gaat wel om leerlingen die al vaak geen rekenen hebben gehad en ook niet erg veel aan voorbereiding hebben gedaan. Het biedt in ieder geval inzicht hoe hard er in de komende jaren dient te worden getrokken aan het invoeringstraject tot 2014, eerst met extra lessen, parallel aan het opbouwen van het rekenprogramma vanaf het eerste mbo-jaar.

Paritaire Commissies

Toch zitten er waarschuwingen in het verhaal van Monica, om niet te denken dat hiermee alles is geregeld. Zo geeft ze aan dat het vak wiskunde niet generiek en centraal zal worden geregeld en gewoon onderdeel zal blijven van het kwalificatiedossier, als afspiegeling van de eisen die de voorbereiding op het werkveld stelt aan mbo'ers. Anders gezegd, het geheel aan 'doorstroomwensen' blijft onderwerp van overleg tussen mbo en hbo en dient los van het landelijke rekenniveau te worden afgesproken en vastgelegd.

Ergo, zo concludeert men vanuit de zaal, het is noodzakelijk om als hbo standaard en wettelijk vastgelegd zitting te hebben in de zogenoemde Paritaire Commissies van de Kenniscentra Beroepsonderwijs-Bedrijfsleven. Daarin worden de lijnen voor het beleid uitgezet en stelt men de adviezen op ten aanzien van de goedkeuring van kwalificatiedossiers. *HBO-raad, aan zet?*

Beleidsmaatregelen vanuit OCW

Mooie plannen, maatregelen en beleidsvoornemens. Rekenen is dus door OCW op de kaart gezet, met een duidelijk eigen overheidsgezicht. Marjo Jansen en Antoinette van Wanroij, werkzaam bij de Directie BVE [Beroepsonderwijs en Volwasseneneducatie; Red], gaan in op de achterliggende redenen om zo te werk te gaan. In ieder geval 'is het nodig om rekenkennis te verwerven en vooral te behouden'. Onderhoud van de bijbehorende vaardigheden wordt als essentieel gezien, net als bij het zwemmen ('Help, de mbo'er verzuipt...').

Tevens laten de – overigens iets gedateerde – OCW-statistieken zien dat de uitvalpercentages de overheid niet vrolijk stemmen, als het gaat om de verantwoording van de belastinggelden die in het mbo hun weg vinden. Voor alle duidelijkheid, zo wordt

aangegeven: Er is geen aanleiding om de discussie over de aanscherping van toelatingsvoorwaarden (elke mbo'er op niveau 4 mag elke hbo-opleiding gaan doen) aan te zwengelen. Het gaat nu om een algemene maatregel ter verhoging van het brede niveau, via rekenen en taal.

Vanaf 2014 tellen in principe de resultaten voor deze vakken simpelweg mee voor het diploma. Laten hogescholen zich de komende tijd dus goed op de hoogte stellen van de ontwikkelingen, want zoiets kan gezien vanuit de beleidsmatige invalshoek het overleg tussen hogescholen en bve-instellingen een goede impuls geven. Vanuit de zaal wordt wel met enige zorg gevraagd hoe het zit met mbo'ers die in hun laatste jaar geen voldoende behalen voor het landelijke examen; ROC's mogen nu zelf hun toetsen invullen. OCW geeft aan dat er straks niet oneindig mag worden herkanst, met drie vaste toetsmomenten per jaar. Uit verdere reacties komt naar boven dat deze harde aanpak een prima zaak lijkt, maar dat

tevens nog niemand weet hoe moet worden omgegaan met een situatie waarin veel diploma's blijven hangen op het rekenen. *Hogescholen, nu al meedenken en mbo'ers nog meer ondersteunen via extra rekenlessen of anderszins?*

Dubbelkwalificatie

De doorstroom mbo-hbo wordt door dit alles in een daglicht apart van het havo geplaatst. Het is volgens de overheid van groot maatschappelijk belang om jongeren zo hoog mogelijk op te leiden, ook talentvolle mbo'ers. Nu blijkt dat een behoorlijk aantal mbo'ers het niet redt, maar dan hebben zij altijd nog een startkwalificatie voor de arbeidsmarkt op zak. Dat is derhalve een zwaarwegende reden om de dubbelkwalificatie te blijven hanteren, met alle consequenties van dien. Dit 'wedden op twee paarden' dwingt het ministerie evenwel tot het meer samen met de onderwijsinstellingen zoeken naar aanvullende maatregelen, zoals deze referentieniveaus

Er is veel gediscussieerd, opgemerkt en geroepen over rekenen en wiskunde als het gaat om de doorstroom van mbo naar hbo. Om puntsgewijs daarvan een indruk te geven volgt hier een aantal opmerkelijke en mogelijk mee te nemen uitkomsten van dat levendige proces.

- Een simpel doorstroompakket voor rekenen aan het eind van het mbo is niet voldoende, omdat het aanleren ervan gewoon tijd vraagt, want je raakt je vaardigheden en kennis in het mbo en ook het havo ontzettend snel kwijt.
- Wat wil je nou eigenlijk als op een bepaalde mts twee jaar lang geen boek wordt gebruikt en er geen echte training op kennis plaatsvindt?
- Ik hoor allerlei nog redelijk uitzijnde landelijke cijfers over uitval en zo, maar bij ons is het toch echt een stuk dramatischer. Kloppen die cijfers wel?
- Over alle zaken die spelen rond de aansluiting met rekenen en wiskunde kan in ieder geval de interne communicatie beter. Sommige mensen binnen de school geven gewoon verkeerde informatie over herkansingen, vrijstellingen, gemiste lessen...
- De aansluiting vraagt voor rekenen en wiskunde om het met elkaar kunnen voeren van een tweesporenbeleid: Landelijk gezien een basisprogramma en regionaal een 'plus-deel' dat vooral optimaal is binnen de afspraken.
- Landelijk examens voor rekenen en taal, prima, maar: Hoe pakt dat uit bij een flexibele doorstroom, bijvoorbeeld al in februari? Hoe moeten buitenlandse studenten worden ingepast? Wat te doen met mbo'ers die alleen maar zakken op 'rekenen'?
- Er wordt straks ook weer een beroep gedaan op 'hoofdrekenen' – al mag je bij een landelijke toets wel grotendeels de rekenmachine gebruiken...
- Het blijft natuurlijk een probleem, als je dat zo wilt noemen, dat mbo'ers niet allemaal willen en kunnen doorstromen – maar wel goed kijken naar degenen die via het mbo doen aan het 'stapelen'.
- Regionale samenwerking is en blijft van 'levensbelang' – misschien toch maar in harde contracten vastgelegd – aangezien ROC's hun eigen aanpak en invulling hanteren ondanks de landelijke kwalificatiedossiers.
- We praten nu vooral over 'landelijke rekenafspraken', maar 'wiskunde' wordt straks dus niet generiek en centraal geregeld – dat moet nog steeds worden geregeld via de kwalificatiedossiers van de kenniscentra.

voor rekenen en intakegesprekken. Maar ook dan blijft een regionale aanvullende aanpak nog steeds onontbeerlijk voor samenwerkende onderwijsinstellingen.

Forumdiscussie 1

Na deze stortvloed aan nieuwe plannen, oude gedachten en concrete maatregelen mag een vierkoppig forum aan de slag. Arjen Schat (manager onderwijszaken Philips), Jos Reuling (docent werktuigbouwkunde bij de HAN) en twee studenten, Maaïke Kobesen (NHL) en Rob Walet (HAN), kunnen in dit kader nog eens benadrukken dat het over de drempel mbo-hbo heen stappen een flinke wiskundehobbel oplevert voor veel studenten. Jos verwoordt een gevoel dat bij velen leeft, namelijk dat er te weinig tijd is om in de eerste jaren van een hbo-studie nog weer even alle weggezakte wiskundekennis op te halen en te laten beklijven. Maaïke, zelf betrokken bij het geven van bijlessen, en Rob beamen dit uit de eigen praktijk. Maar bij het verlaten van de opleiding staan ook nog veel studenten schrikbarend vaak met te weinig wiskundige bagage aan de start van hun eerste baan, is de ervaring van Arjen.

Uit deze hartenkreten en bijval vanuit de zaal blijkt dat men zich vooral echte zorgen blijft maken over de structuur die wordt gehanteerd voor het mbo, wetende dat een mbo'er zonder meer mag doorstuderen in het hbo. Het dwingt de goedwillende hogescholen tot het maken van harde afspraken met toeleverende mbo-scholen. Helaas, verplichtingen over en weer zijn niet af te dwingen.

Er wordt nog eens hartstochtelijk gepleit voor een landelijk kader rond bepaalde vakken – wetende dat niet iedere mbo'er op niveau 4 moet en kan doorstuderen. In een regio kan men dan allerlei verfijningen aanbrengen met het oog op de eigenheid van zo'n regio en de daarin opererende instellingen. *Wie neemt hierbij het voortouw, voor een echte inhoudelijke discussie?*

Na de thee op zoek naar oplossingen

Zoals al aangegeven door Metha Kamminga bij de start van de bijeenkomst gaat het er niet om nogmaals te klagen over wat er allemaal misgaat. Het is ook aan het veld zelf om elkaar en anderen 'good practices' voor te schotelen. Daarom krijgen na de theepauze Constant Raes van de HAN en

Jaap van Voorst van de Hogeschool Utrecht de gelegenheid om de aanwezigen een inkijkje te gunnen in hun interne aanpak binnen techniek respectievelijk economie.

Wiskunde in mbo

Vanuit de HAN wordt al vanaf 2002 samengewerkt met ROC's. Het is volgens Constant Raes vanuit de sector techniek een behoorlijke zoektocht geweest om te komen tot een aanvaardbare aanpak. In de huidige constructie wordt in de laatste twee mbo-jaren vanuit de HAN een fors aantal uren besteed aan vakinhoudelijke zaken, met een duidelijke verdieping. Op basis van de meest actuele cijfers blijkt deze insteek te helpen bij het voorkomen van uitval. Maar dat gaat niet allemaal zonder slag of stoot. De bereidheid van de ROC's om mee te doen is cruciaal. Ook zijn er behoorlijke verschillen tussen ROC's als het gaat om de aanpak en de invulling van de eigen programma's. Door docenten over en weer te laten samenwerken met een houding van 'samen er wat van maken' lukt het om mbo'ers een noodzakelijke handreiking te bieden. De uitdaging voor de komende tijd zit 'em eigenlijk in het overleiden van deze aanpak, met alle onzekerheden qua beleid en budgetten.

Verplicht rekenen eerste jaar

Jaap van Voorst, instituutdirecteur van de HU Business School (en Neerlandicus, 'dus dat ik dit nog kan meemaken, op een wiskundecongres...'), geeft als schot voor de boeg aan dat hij een belangrijke ontwikkeling voor de doorstroom mist namelijk de invoering van de tweejarige *Associate degree* (Ad). De Ad kan een uitdaging bieden aan mbo'ers als route naast de vierjarige bacheloropleiding zeker binnen techniek en economie. Dit nieuwe alternatief hoort tevens, zo vindt hij, bij een doelgroepenbeleid, met aspecten als 'leeromgeving', 'programming' en 'omgaan met deficiënties'. Daarin past ook het werken met aparte mbo-klassen waarin gewoon verplicht 'rekenen' op het rooster staat – zodat iedereen aan het eind van de propedeuse het wiskunde-A niveau heeft bereikt. En uiteindelijk ontlopen mbo'ers en havisten elkaar niet zoveel.

Forumdiscussie 2

Om een aantal richtingen voor oplossende aanpakken onder de loep te kunnen nemen

schuiven voor het tweede vragenforum aan: Ted van Vilsteren (directeur Graafschap College), René Tönissen (directeur HAN), Jaap van Voorst (HU) en Joke Jansen (directeur Fontys en lid van het Sectoraal Adviescollege hbo-techniek). Na een aantal algemene opmerkingen springt de vonk al supersnel over naar de zaal, de kans grijpend om handreikingen te doen voor een soort 'plan van aanpak' voor de komende tijd. Zo scherpt Cees Terlouw (lector bij Saxion en directeur van het Lica) de discussie aan over het opnemen van hbo-eisen in het mbo-kwalificatiedossier door te stellen dat er in dat opzicht bij een hoog percentage uitval toch gewoon iets moet gebeuren, los van allerlei wettelijke kaders. Ted stelt dat het systeem rond de invulling van de mbo-opleidingen nu eenmaal is gericht op beroepscompetentieprofielen, de banen voor mbo'ers dus. René trekt een parallel, als het gaat om een eigen sectorale verantwoordelijkheid, bij de doorstroom vanuit de hbo-bachelor naar de wo-master met een 'pre-masterprogramma'. Toch blijft in de zaal een gevoel van onvrede hangen over het feit dat 'regels boven noodzaak lijken te gaan' en dat 'we kennelijk aan het knippen en plakken moeten blijven'.

Bezuinigingen

Hoewel aan het begin van de bijeenkomst was afgesproken dat er niet zou worden gesproken over 'geld', komt het spook der bezuiniging toch nog even om de hoek kijken. Vooral vanuit het mbo wordt gevreesd voor harde ingrepen, met effectieve gevolgen voor de invulling van doorstroomtrajecten. Maar ook de nieuwe bekostigingssystematiek voor het hbo ziet er niet vrolijk makend uit, dus 'het gevaar voor de doorstroom komt van twee kanten...'. Het brengt in ieder geval met zich mee dat nog meer naar elkaars sterke punten moet worden gekeken, om te bezien waar samen winst valt te halen. Maatwerk is nodig, wetende dat er overal verschillen zijn, dus om elkaar te helpen 'komt de liefde voor de doorstroom van twee kanten...'.

Veldraadpleging

De bijeenkomst is alles bij elkaar een goede gelegenheid geworden om kennis te nemen van nieuwe zaken en te bezien waar nu een rekendoorbraak kan worden geforceerd. Roel van Asselt kondigt daarom

aan dat er een heuse ‘veldraadpleging’ zal worden uitgevoerd, via de website van de NVvW (onder Werkgroepen bij Werkgroep-HBO). Het is de bedoeling dat met name hbo-wiskundedocenten een vragenlijst invullen. Daarin wordt gevraagd naar wat hij of zij ziet als noodzakelijke voorkennis en vaardigheden voor een bepaalde hbo-opleiding – inclusief de lerarenopleidingen.

De uitkomsten daarvan zullen worden ingebracht vanuit de vereniging bij verdere besprekingen. Uiteraard is er ook een discussieforum, om met elkaar een en ander af te stemmen – of met elkaar in debat te gaan (mag ook). *Aan de slag derhalve, deelnemers aan het congres en vele betrokken lezers van dit artikel.*

Nadat alle inleiders zijn verrijkt met een breinkraker van hoog niveau, rest alleen nog het afscheid van Metha Kamminga. Haar opvolger als voorzitter van de Werkgroep-HBO, Christiaan Boudri, spreekt Metha met veel warme woorden toe, en bekroont dit met een fraaie bos bloemen.

En daarna blijft het nog een tijdje beschaafd onrustig als tijdens de nazit wordt genot- werkt in de kantine van Hogeschool Domstad.

Info

Op de website van de NVvW (www.nvvw.nl) zijn via Werkgroepen | Werkgroep-HBO de volgende zaken aan te treffen:

- Verslag bijeenkomst, met foto's;
- Vragenlijst gewenste voorkennis en vaardigheden;
- HBO-forum.



foto 1 Hans Daale, schrijver van dit artikel (links) en Roel van Asselt, dagvoorzitter en discussieleider



foto 2 Roel van Asselt probeert lijn te brengen in de discussie. Aan de forumtafel van achter naar voren: Jaap van Voorst (Hogeschool Utrecht), Joke Jansen (HBO-Raad) en Ted van Vilsteren (Graafschap College).

Fotografie

Metha Kamminga

Over de auteur

Hans Daale is jarenlang werkzaam geweest als leraar, decaan en manager in het vo en hbo. Hij is nu betrokken bij (internationale) projecten rond het hbo. Hij is tevens redactielid van *Euclides*.

E-mailadres: info@leido.nl



foto 3 Roel van Asselt bedankt forumlid Rob Walet (student aan de HAN); naast hem Jos Reuling (docent van de HAN, eveneens forumlid) met het overhandigen van een breinkraker.



foto 4 Metha Kamminga krijgt van de Werkgroep-HBO bloemen uit handen van Christiaan Boudri.

Afscheid van Pieter van der Zwaart als leerplanontwikkelaar

[Gert de Kleuver]

Symposium

In februari kreeg ik een uitnodiging om op 16 april het symposium 'De plaats van het rekenen in het curriculum van de onderbouw voortgezet onderbouw' in het gebouw van SLO in Enschede bij te wonen.

De toevoeging sprak boekdelen: *Het gaat om een bijzondere bijeenkomst die in het teken zal staan van het afscheid van Pieter van der Zwaart als leerplanontwikkelaar bij SLO*. Sprekers op het symposium zijn drs. M.M. (Monica) Wijers en dr. C.M. (Cees) van Putten.

Het rekenen binnen het wiskunde-onderwijs in twee lezingen

Natuurlijk heb ik gehoor gegeven aan de uitnodiging om afscheid van Pieter te kunnen nemen die nu toch echt met FPU – of hoe het tegenwoordig mag heten – gaat. Pieter heeft de laatste jaren naar dit afscheid toegewerkt. Hij werkte nog anderhalve dag aan SLO-projecten. Eerlijk is eerlijk, Pieter was er de laatste tijd drie dagen. Hoe ik dit weet? Zijn direct leidinggevende gaf het aanwezige publiek een kijkje in de keuken van Pieter's werkzaamheden en bijzonderheden. Daarmee waren we aangekomen bij het echte afscheid: enkele sprekers gaven een mooi en compleet beeld van Pieter's betekenis voor wiskundig Nederland. Maar, laten we niet op de zaken vooruit lopen en eerst het programma volgen.

Monica Wijers gaf in een historisch overzicht weer, wat er vanaf 1968 gespeeld heeft ten aanzien van het rekenen binnen het wiskundeonderwijs. 1968 was het jaar dat Monica zelf naar de brugklas ging. Zij kreeg te maken met de verzamelingen N, Z, Q en R. Zelf was ik verrast dat Monica, ter illustratie van de jaren tachtig, het boek *Passen en meten* noemde dat gebruikt werd op het toenmalige ITO en op het A-niveau van de LTS of huishoudschool. Ik heb namelijk in 1982 ook met dit boek gewerkt; er werd veel in gerekend en gemeten. Thuisgekomen ben ik direct nagegaan of ik nog een exemplaar van dit boek in mijn

boekenkast had staan. Jammer genoeg ben ik in de loop van de tijd mijn exemplaar kwijt geraakt.

Ook kwam in de lezing van Monica het materiaal van het IOWO voorbij, en het trajectenboek. Zo kan ik de lijst nog wel langer maken. En uiteraard deed Pieter in het verhaal mee. Hij was betrokken bij de verschillende programma's die vanaf de jaren tachtig werden ingevoerd. Er waren veel punten van herkenning.

Cees van Putten beschreef daarna een van de laatste onderzoeken waarbij Pieter betrokken was: een onderzoek naar de opbrengst van een rekenprogramma dat op vier scholen uitgetest wordt. Het project loopt nu ongeveer anderhalf jaar.

Het afscheid

Ja, en dan tenslotte het eigenlijke afscheid. Door de verschillende toespraken zoals gehouden door de collega's van SLO, door Marian Kollenveld en door de drie kinderen van Pieter, werd het de aanwezigen duidelijk dat er eigenschappen van Pieter waren die we allemaal kennen: zijn lach, zijn lange zinnen, met de vele bijzinnen, die hij altijd tot een goed einde bracht, zijn knuffels voor de dames, ...

Tot slot sprak Pieter zijn dankwoord uit: kort en krachtig.

De betekenis van Pieter voor het wiskunde-onderwijs werd doeltreffend door Marian Kollenveld omschreven: als je het over SLO had, dan had je het over Pieter en later over Pieter en Pelle. En nog weer later werd het Pieter met ..., noem maar op. En toen werd het Pieter en Jenneke. Als laatste stadium: Pieter en een stel kuikens. En ja, toen ging hij weg. Pieter heeft veel werk verricht voor alle examenprogramma's, voor de syllabi en voor vele andere projecten en publicaties. Overall kwam je Pieter tegen.

We hopen dat we hem zullen blijven tegenkomen, bijvoorbeeld bij de Reehorst-conferentie of tijdens de NVvW-studiedag in november.



foto 1 Pieter van der Zwaart en gezin



foto 2 Symposium!

Fotografie

Victor Schmidt

Over de auteur

Gert de Kleuver is afdelingsleider aan het Ichthus College in Veenendaal.

E-mailadres: g.de.kleuver@gmail.com



Jaarvergadering/ Studiedag 2010

[Marianne Lambriex]

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2010 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 6 november 2010**.

Aanvang: 10:00 uur

Sluiting: 16:00 uur

Plaats: Anna Van Rijn College, locatie *Albatros* te Nieuwegein

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- Opening door de voorzitter mevr. drs. M. Kollenveld
- Jaarrede door de voorzitter
- Notulen van de jaarvergadering 2009 (zie een volgend nummer van *Euclides*)
- Jaarverslagen (zie een volgend nummer van *Euclides*)
- Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie
- Bestuursverkiezing en -overdracht
- Rondvraag
- Sluiting jaarvergadering
- Vervolg met de studiedag

Themagedeelte van de studiedag

Geboeid door wiskunde

Eén van de bedoelingen in 2007 van de bijstelling van de examenprogramma's voor de Tweede fase was dat docenten/scholen meer vrijheid zouden krijgen bij de invulling van hun vak, omdat vanaf 2009/10 nog maar 60% van het programma centraal zou worden geëxamineerd. De resterende 40% is alleen globaal omschreven en het is de vrijheid van scholen om daaraan een eigen invulling te geven. Wiskunde is de ongelukkige uitzondering: wiskunde-A vwo en wiskunde-B havo en vwo moeten

voor (bijna) 100% in het CSE worden getest vanwege de 'doorstroomrelevantie'. Daarmee zijn de docenten 'geboeid' in de nare zin van het woord: gekneveld door de volheid van het programma dat verplicht moet worden afgewerkt vanwege het centraal examen.

Gelukkig weten veel docenten hun leerlingen ook te boeien met de mooie kanten van het vak, ondanks de beperkingen die zijn opgelegd. En dat willen wij op deze studiedag graag onder de aandacht brengen. Wij denken aan vier mogelijke gebieden:

1. Binnen het examenprogramma zelf

Bij wiskunde-C (vwo) en wiskunde-D (havo/vwo), wiskunde-A (havo) en statistiek (vmbo) zijn er nog vrijheden binnen het examenprogramma en dus is er plaats voor een eigen, boeiende invulling voor de leerlingen. Heeft u iets om anderen mee te boeien? Meldt u dan aan voor het presenteren van een workshop!

2. Buiten het gewone lesgebeuren om

Er zijn veel initiatieven die buiten het schoolboekje omgaan: Vierkant, Pythagoras, Kangoeroe, Wiskunde Olympiade, Wiskunde Alympiade, Wiskunde B-dag, Zebra's, Wiskunde Scholen Prijs. Zowel een kijkje in de keuken van de organisatoren als de originele manier waarop u dit binnen de school haalt, kan boeiend zijn.

3. Samenwerking met andere vakken

Voor de hand liggend zijn daarbij natuurlijk de exacte vakken, maar ook aardrijkskunde en economie zijn uitermate geschikt om samen mee op te trekken. En bij het vmbo zijn er mogelijkheden om met de beroepsgerichte vakken samen te werken. We zijn benieuwd naar mooie praktijkvoorbeelden van dergelijke

manieren van samenwerking, die het vak zelf boeiender kunnen maken voor leerling en docent.

4. De wiskunde zelf

Zijn er onderwerpen in de wiskunde die u zelf boeien? Durft u het aan om daarvoor tijd vrij te maken en enthousiast aan uw leerlingen te presenteren? We zijn benieuwd naar positieve ervaringen die ook bruikbaar zijn voor andere docenten.

Oproep

Anders dan voorheen geven we nu de ruimte *tot 31 augustus a.s.* om een voorstel in te dienen. Dus u kunt de hele zomervakantie nog benutten om een titel en een korte beschrijving te verzinnen.

Stuur uw idee naar onderstaand email-adres van Henk van der Kooij. Om tijdig een beeld te krijgen van het aantal presentaties is het plezierig als u *niet* wacht tot na de zomervakantie!

De omschrijvingen van de workshops worden niet, zoals tot nu toe gebruikelijk, in het eerste nummer van *Euclides* opgenomen, maar ze worden vanaf midden september op de site van de NVvW gepresenteerd.

Contactpersoon studiedag

Henk van der Kooij (e-mailadres: henk@fi.uu.nl)

Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 6 november, NVvW-dag!

In het volgende nummer van *Euclides* krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op die dag.

Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich wenden tot: Marianne Lambriex (m.lambriex@nvvw.nl).



Platform Wiskunde Nederland

[Douwe van der Kooi]

Inleiding

De afgelopen jaren hebben de NVvW en het KWG (Koninklijk Wiskundig Genootschap) zich ingespannen om te komen tot een betere afstemming van activiteiten die gericht zijn op de belangenbehartiging van alles dat met wiskunde en het wiskundeonderwijs in Nederland te maken heeft. In het verleden is met dat doel de NOCW (Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde) opgericht, maar daarbij ging het in engere zin om de stroomlijning van activiteiten die gericht waren op de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs. Er is meer tussen hemel en aarde dan alleen onderwijs. In de wereld van de wiskunde wordt ook onderzoek gedaan, wiskunde kent zijn toepassingen in het bedrijfsleven en daarnaast is er de wereld van publiciteit en publicaties, waaronder ons eigen lijfblad *Euclides*. Omdat de NVvW en het KWG op deze terreinen eigen, maar evenzeer gezamenlijke doelstellingen hebben, is een paar jaar geleden onderzocht in hoeverre een gezamenlijk opereren kan leiden tot een meer coherente en daarmee betere belangenbehartiging voor alles dat met wiskunde in Nederland te maken heeft. Een en ander heeft geleid tot de oprichting in april 2009 van het *Platform Wiskunde Nederland*, afgekort PWN. In het voorlopig bestuur zijn bestuursleden van zowel KWG als NVvW vertegenwoordigd. Vanaf de oprichting is door het voorlopig bestuur van PWN hard gewerkt om de organisatie te structureren conform de doelstellingen, te bemensen en te voorzien in een gezonde financiële basis.

Structuur van PWN

Hoe ziet die organisatie er uit? PWN is een stichting met een driehoofdig bestuur. Een onafhankelijk voorzitter, een bestuurslid namens het KWG en een bestuurslid namens de NVvW. Er is besloten om in de eerste jaren het bestuur uit vijf personen te laten bestaan omdat naar verwachting in de beginfase het de nodige inspanning van het bestuur zal vragen om de organisatie 'aan de praat te krijgen'. Dit betekent dat zowel KWG als NVvW de komende drie jaar twee bestuursleden zullen leveren.

De dagelijkse leiding van PWN is in handen van de directeur van het Bureau PWN. Deze initieert relevante activiteiten en coördineert de werkzaamheden van de vier onder PWN opererende commissies. Als directeur is hij het gezicht naar buiten. De commissies die onder PWN operationeel zullen worden, zijn:

1. De Commissie Onderzoek

Deze commissie bestaat uit 5 tot 7 personen en is belast met de volgende taken:

- vormen van een draagvlak voor het onderzoek wiskunde in Nederland, zowel voor het directe onderzoeksveld als daar buiten;
- ontwikkelen en opstellen van strategie en beleid;
- adviseren (gevraagd en ongevraagd) aan o.a. NWO, KNAW, OCW, VSNU, rectoren en decanen.

2. De Commissie Onderwijs

De Commissie Onderwijs bestaat uit 10 tot 15 personen en is belast met de volgende taken:

- stimuleren, ontwikkelen en sturen van strategisch beleid op het gebied van wiskundeonderwijs – van basisonderwijs tot en met universitair onderwijs – met speciale aandacht voor schakelpunten;
- behartigen van de belangen van docenten rekenen en wiskunde, van voorschools onderwijs tot en met tertiair onderwijs;
- organiseren van voor-, bij- en nascholing van leraren, met bijbehorende accreditatie;
- geven van kwaliteitsborging.

3. De Commissie Publiciteit

Deze commissie bestaat uit 3 tot 5 personen en is belast met de volgende taken:

- structurering en ondersteuning van de organisatie van publiciteit voor de wiskunde in brede zin;
 - het nemen van nieuwe publicitaire initiatieven;
 - het zorgdragen voor continuïteit in organisatie en financiering.
- Er zijn verschillende soorten van publiciteit voor de wiskunde:
- het verbreiden van nieuwe onderzoekresultaten en toepassingen, gericht op het algemene publiek (o.a. via de pers en via speciale publicaties, zoals het boek *Opgelost* dat onlangs door het CWI is uitgebracht), op scholieren (o.a. via Kennislink), op de Nederlandse wiskundigen in brede zin (o.a. via *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Euclides*), dan wel op een combinatie van deze groepen. De nieuwe resultaten kunnen uit Nederland komen (bron bijv. voorlichters van universiteiten of CWI) of uit het buitenland (bron bijv. internationale *science news sites*);

Ziggurats en variaties

[Frits Göbel]



figuur 1 Trappenpiramide van Djoser (Saqqara, Egypte)

Een *ziggurat* (de spelling varieert) is een trappenpiramide. Er staan enkele exemplaren vlak bij de grote Egyptische piramiden (*zie figuur 1*), maar ze komen ook in andere landen voor.

Het is ook de naam voor een puzzel die uit Amerika afkomstig is.

Laat n een oneven getal zijn, zeg $n = 2k + 1$. Een ziggurat is dan een permutatie van $1, 2, \dots, n$ zó dat de termen op de plaatsen $2, 4, \dots, 2k$ steeds de som zijn van de twee termen die er naast staan. Een voorbeeld voor $n = 7$ is $2, 5, 3, 4, 1, 7, 6$. Dit wordt gewoonlijk als volgt opgeschreven:

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & & 4 & & 7 & \\ 2 & & 3 & & 1 & & 6 \end{array}$$

waarmee het verband met de trappenpiramide wel duidelijk wordt.

Opgave 1

Bepaal alle ziggurats voor $n = 9$.

Ik heb geprobeerd een ziggurat van drie lagen te vinden, zonder succes. Hierbij is het dan dus de bedoeling om de getallen $1, 2, \dots, n$ in drie lagen te plaatsen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & * & & * & & * & & * \\ & * & & * & & * & & * & \\ * & & * & & * & & * & & * \end{array}$$

zó dat de som van twee naast elkaar staande getallen gelijk is aan het getal er boven. Het aantal getallen kan alleen een 3-voud zijn, maar voor $n = 6, 9, 12$ of 15 is er alvast geen oplossing.

Een andere variatie bestaat hierin dat we niet naar de som van de burens kijken, maar naar het (absolute) verschil. Voor liefhebbers van grafen: er is een verband tussen deze variatie en zogeheten *bevallige grafen*, in het Engels *graceful graphs*. Maar u hoeft hier niets van te weten om aan de volgende opgaven te beginnen.

Opgave 2

Bepaal alle oplossingen van laatstgenoemde variatie voor $n = 5$, voor alle duidelijkheid: in twee lagen.

Hier zijn in ieder geval oplossingen met meer dan twee lagen.

Opgave 3

Bepaal alle oplossingen met vier lagen voor $n = 10$.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522JS Enschede.

Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 24 augustus. Veel plezier!

Deelrijen

Er waren deze keer 17 oplossers.

Opgave 1 – Er waren relatief veel inzenders die moeite hadden deze opgave goed te begrijpen, maar er waren er ook die hem gewoon fout hadden. Al met al ontving ik er 13 goede antwoorden op. Hier volgt een algoritme in Pseudo-Algol:

```

ta := 0; tab := 0; tabc := 0;
for i := 1 until n do
begin
  s := i-de symbool;
  if s = a then ta := ta + 1
  else if s = b then tab := tab + 1
  else if s = c then tabc := tabc + 1
end;
print tabc

```

Van *opgave 2* kreeg ik zeer uiteenlopende oplossingen te zien die gelukkig vrijwel allemaal goed zijn. Mijn eigen oplossing gaat als volgt.

Laat $P[n]$ het gevraagde aantal rijen zijn (die dus minstens één keer de deelrij abc bevatten) en $A[n]$ het aantal daaronder dat met a begint.

Dan is:

$$A[n] = 2A[n-1] + 3^{n-2} - 2^{n-2}$$

immers als na de eerste a een c of een a komt, zijn we niets opgeschoten en als na de eerste a een b komt, is iedere rij goed die niet uit uitsluitend a 's en b 's bestaat.

Verder geldt:

$$P[n] = 2P[n-1] + A[n]$$

immers als het eerste symbool b of c is, zijn we niets opgeschoten en anders is het aantal gewoon $A[n]$.

Voor de beginwaarden is het redelijk om $A[3] = P[3] = 1$ te kiezen, maar $A[1] = P[1] = 0$ is ook goed!

De expliciete vorm van $P[n]$ is:

$$P[n] = 3^n - (n(n+3) + 8) \cdot 2^{n-3}$$

Helaas heb ik een inzender op het verkeerde

been gezet met mijn opmerking dat het geen mooie formule is. Hij vond deze oplossing ook, en vond hem zo mooi dat hij eerst dacht dat hij fout was!

Opgave 3 – Voor een willekeurig drietal is de kans dat ze een deelrij van de vorm abc vormen gelijk aan $1/27$.

De bijdrage van dat drietal aan het verwachte aantal is dus ook $1/27$.

Er zijn $\binom{n}{3}$ drietallen, dus het gevraagde aantal is $\binom{n}{3} / 27$.

Het 'moeilijke' punt is dat de verwachting van een som gelijk is aan de som van de verwachtingen, óók als de variabelen of de gebeurtenissen afhankelijk zijn!

Ik kreeg diverse geestige reacties op mijn verbod op commentaar en er waren overigens heel wat inzenders die de opgave helemaal niet zo flauw vonden.

De winnaars van de Zomerprijzen zijn:

Gerhard Riphagen (een boekenbon ter waarde van €20,00) en Lieke de Rooij (een boekenbon van €15,00). Van harte gefeliciteerd!

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

W. Doyer 527

L. v.d. Raadt 524

J. Hanenberg 435

T. Kool 402

H. Linders 359

H. Bakker 345

W. v.d. Camp 329

K. Verhoeven 317

K. v.d. Straaten 287

H.J. Brascamp 277

De deelnemers aan de Ladderwedstrijd worden eraan herinnerd dat de behaalde ladderpunten vervallen als er *vijf keer achtereens* niets is ingestuurd.

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDSE
VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen

24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en Wiskunde
 28. Voorspellen met Modellen
 29. Getallenbrouwerij
 30. Passen en Meten met Cirkels
- Zie verder ook www.nvww.nl/page.php?id=7451 en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase
havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs,
lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvww.nl/page.php?id=1779
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvww.nl/page.php?id=7450

Voor overige internet-adressen zie
www.nvww.nl

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.nvww.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvww.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Naast de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html.

Jaargang 86

nr	verwachte verschijningsdata	deadline
1	14 september 2010	20 juli 2010
2	26 oktober 2010	31 aug. 2010
3	21 december 2010	26 okt. 2010
4	8 februari 2011	7 dec. 2010
5	29 maart 2011	1 feb. 2011
6	17 mei 2011	18 mrt. 2011
7	5 juli 2011	10 mei 2011

ma. 17 en di. 18 augustus, Oostende (B)
13e T³ Europe Symposium
Organisatie T³ Vlaanderen

vr. 27 en za. 28 augustus, Amsterdam
vr. 3 en za. 4 september, Eindhoven
Vakantiecursus 2010 – Wiskunde: de uitdaging
Organisatie CWI i.s.m. NVvW

vrijdag 5 november, Utrecht
Netwerkbijeenkomst Olympiade en Wiskunde B
Organisatie Flsme

vrijdag 5 november, Utrecht
Studiedag: Geogebra in de wiskundeles
Organisatie Flsme

zaterdag 6 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag 2010
Organisatie NVvW
Zie pag. 303 in dit nummer.

vrijdag 12 november, Utrecht
ELWIER conferentie
Organisatie Flsme

donderdag 18 november, Den Haag
Science & Technology Summit: Meet the Future
Organisatie Platform Bèta Techniek

vrijdag 19 november, op de scholen
Wiskunde B-dag & Voorronde Wiskunde Olympiade
Organisatie Flsme

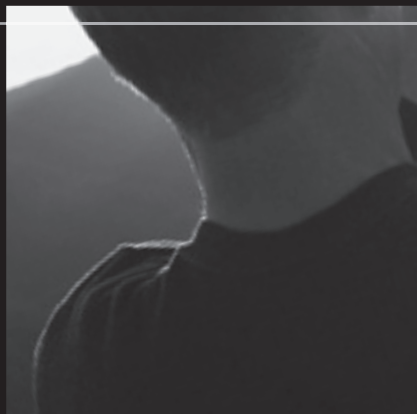
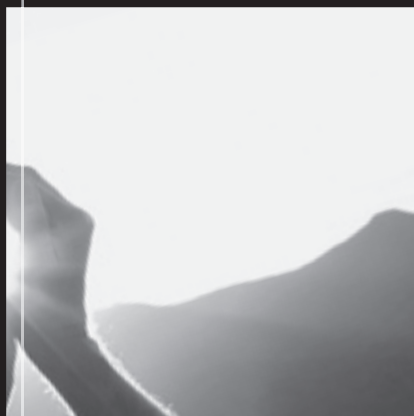
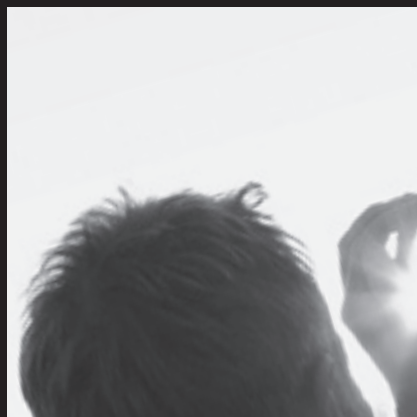
zaterdag 20 november
Ars et Mathesis-dag 2010
Organisatie Stichting Ars et Mathesis

2011

vr. 28 en za. 29 januari, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Flsme

TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Eenvoudig het geheel zien



Elke leerling leert op een andere manier.

De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

www.education.ti.com/nederland

Nu tijdelijk
TI-Nspire™ 2in1
-rekenmachine + software-
voor slechts **€ 55*** !
tel. 00800 484 22 737
(gratis)

* exclusief 9 € verzendkosten

NU MET
TOUCHPAD EN
LETTERTOETSEN!



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.



Oefenboeken Rekenen

- Doorlopende leerlijn
- Alle niveaus en leerjaren
- Voldoen aan referentiekader

Digitrainers Rekenen

- Instap- en eindtoets
- Beschikbaar bij ieder Oefenboek
- Automatisch genereren van opdrachten
- Werken zoals in het schrift
- Voortgangsregistratie



Noordhoff Uitgevers

Oefenboeken en Digitrainers Rekenen

Nu ook voor klas 2 en 3 (alle niveaus) en klas 5/6 havo/vwo

Vraag een beoordelingsexemplaar aan op www.modernewiskunde.noordhoff.nl