

E U C L I D E S

v a k b l a d v o o r d e w i s k u n d e l e r a a r

maart

10

nr

5

jaargang 85

TIMSS 2008 Advanced

Kunst en wiskunde

Decanteren

Pierre van Hiele: 100
jaar

Website en Forum

Op weg naar IMO2011

Regionale
examenbesprekingen

Ludolph van Ceulen
(1540-1610)



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

m a a r t

1 0
n r 5

j a a r g a n g 8 5

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch

Klaske Blom, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Marjanne de Nijs

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Klaske Blom,

Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op

papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 65,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 37,50
- studentleden: € 32,50
- gepensioneerden: € 37,50
- leden van de VVWL of het KWG: € 37,50

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 60,00

Instituten en scholen: € 140,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:

t.a.v. Annemieke Boere

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: a.boere@dekleuver.nl



Euclides, de website en Verenigingsnieuws

In het voorwoord bij *Euclides* 85-2 (november 2009) schreef ik dat ons blad zich niet zo leent voor een 'reactie van lezers'-rubriek vanwege onze verschijningsfrequentie van zeven keer per jaar en het lange productieproces: tegen de tijd dat uw mogelijke reactie op een artikel wordt gepubliceerd, hebben de meeste lezers het oorspronkelijke stuk niet meer op hun netvlies. Erik Korthof, een van de webmasters van de website van de NVvW, doet in dit kader een waardevolle suggestie. Hij schrijft in zijn artikel *Website en Forum* over de mogelijkheden die de website van de vereniging aan haar leden biedt. Daarnaast draagt hij een mogelijke nieuwe dwarsverbinding tussen *Euclides* en het forum op de website aan. Hij stelt voor dat het forum ook gebruikt wordt om te reageren op artikelen uit *Euclides* in een 'Lezers schrijven'-rubriek. Ik juich dit idee van harte toe, omdat lezers daarmee de mogelijkheid hebben om sneller meningen en ideeën uit te wisselen naar aanleiding van de artikelen in *Euclides*. Er diende zich na het uitkomen van het vorige nummer direct een mooie gelegenheid aan om dit initiatief te starten, zodat u na het lezen van het stuk van Erik Korthof direct naar het forum kunt gaan om te onderzoeken hoe het forum 'Lezersreacties Euclides' eruit ziet: op het stukje *Oppervlakteformules* van Yvonne Killian kwamen drie uiteenlopende reacties binnen die u terugvindt op het forum. Mochten deze reacties u weer inspireren tot een reactie, plaatst u deze dan zelf op het forum. Over het forum valt meer te vertellen, o.a. dat u vanaf dit jaar een *login* nodig heeft om op het Examenforum te kunnen. Hierover leest u ook meer in het stuk van Erik Korthof en in de Mededeling over de Centrale Examens op pagina 206. Vanuit het bestuur was er ook deze keer weer veel schrijversactiviteit. Henk Bijleveld deelt met u zijn observaties en zorg over de computerexamens vmbo-bb. Op de verenigingspagina's vindt u bijdragen van Metha Kamminga over de komende studiedag met als thema de aansluiting mbo-hbo, van Henk van der Kooij over zijn uiteenlopende werkzaamheden, en Grada Fokkens en Conny Gaykema publiceren weer de Examenbesprekingen 2010.

De inhoud

Sieb Kemme windt zich op in *Moet dat zo? Kan het echt niet anders?* Ook verontwaardigd was Anne van Streun in de *WiskundeE-brief* van 20 december j.l.: hij vroeg zich vertwijfeld af waarom het goede nieuws van TIMSS 2008 de media niet haalde en schreef: '*Goed β -onderwijsnieuws is geen nieuws. En de gehele β -wereld zwijgt in alle talen!*' Gelukkig heeft Pauline Vos het rapport gelezen en deelt de belangrijkste conclusies uit TIMSS 2008 Advanced met ons. Ze eindigt haar artikel met de constatering dat '*de TIMSS-opgaven die conceptueel denken toetsen, laten zien, dat de Nederlandse wiskunde B12-docenten op dat gebied kwaliteitswerk leveren en tot de wereldtop behoren.*'

Dédé de Haan laat in haar artikel over de Scholenvprijs zien dat er veel interessants gebeurt in onze wiskundelessen: de winnaars van de scholenvprijs geven prachtige voorbeelden van lessen-series over uiteenlopende onderwerpen van grafentheorie tot gemeentepolitiek. Ik hoop dat u erdoor gemotiveerd wordt!

Er is meer goed nieuws: in 2011 wordt de IMO, de Internationale Wiskunde Olympiade, waaraan meer dan 100 landen mee doen, in Nederland gehouden. De lancering hiervan vond plaats op 29 januari door staatssecretaris van Bijsterveldt: zij ontstak de digitale Olympische vlam. Quintijn Puite, stuwende kracht achter de IMO-organisatie, schrijft over. In elk komend nummer van *Euclides* zullen we, als aanloop naar IMO2011, een 'oude' olympiade-opgave tegenkomen die wordt besproken door een oud-deelnemer. Birgit van Dalen, inmiddels samen met Quintijn de grote motor van de IMO-training, begint met een opgave uit 2002. Zij laat heel verhelderend zien welke factoren een rol spelen in het oplossingsproces van dergelijke opgaven.

Verder wijs ik u graag op het mooie artikel van Ton Konings over viervlakken tussen 2D en 3D en dat van Hans Schipper over decanteerproblemen. Houd u uw potlood en kladdaasje weer bij de hand. Dat kunt u dan trouwens ook gebruiken om de algoritme te vinden om het aantal deelrijen van een bepaalde vorm te vinden, de uitdaging waarvoor Frits Göbel u deze keer stelt. We zijn inmiddels al aan de derde aflevering toe in onze serie over Ludolph van Ceulen. Fokko Jan Dijksterhuis schetst een beeld van de wiskundebeoefening in de tijd van de vroege Republiek, rond 1600. Een mooi en leerzaam overzichtstuk.

En dan wil ik dit overzicht graag eindigen met het noemen van een artikel geschreven door Harrie Broekman en Nellie Verhoef, als eerbetoon aan Pierre van Hiele. Het stuk is geschreven naar aanleiding het symposium dat voor Van Hiele georganiseerd werd, vanwege zijn 100e verjaardag.

Ik wens u weer veel genoeg en inspiratie met dit *Euclides*-nummer. En op school sterkte met de examenvoorbereidingen!

185	Kort vooraf [Klaske Blom]
186	Wiskunde op stand [Fokko Jan Dijksterhuis]
189	TIMSS 2008 Advanced [Pauline Vos]
194	Viervlakken tussen Kunst en Wiskunde [Ton Konings]
199	Decanteerproblemen in een Heraclesweek [Hans Schipper]
203	Honderd jaar Van Hiele [Harrie Broekman, Nellie Verhoef]
206	Mededeling / Centrale Examens
207	Website en Forum [Erik Korthof]
208	Aankondiging / HKRWO- symposium XVI
209	Van Bijsterveldt lanceert IMO2011... [Quintijn Puite]
210	Op weg naar IMO2011 [Birgit van Dalen]
211	Mededeling
213	Differentiaal en Diepvriespizza's [Dorien Lugt]
214	Wiskunde Scholen Prijs: voor iedereen! [Dédé de Haan]
216	Moet dat zo? Kan het echt niet anders? [Sieb Kemme]
217	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
219	Nieuwe examens vmbo-basis [Henk Bijleveld]
221	Verschenen
222	Van de bestuurstafel [Henk van der Kooij]
223	Boekbespreking / Logicomix [Peter Lanser]
224	Examenbesprekingen 2010 [Grada Fokkens, Conny Gaykema]
225	Nieuws van de Werkgroep-HBO [Metha Kamminga, Hans van Walen]
226	Recreatie [Frits Göbel]
228	Servicepagina

Wiskunde op stand

DE PLAATS VAN WISKUNDIGEN IN DE VROEGE REPUBLIEK



[Fokko Jan Dijksterhuis]

[Red.] In 2010 is het 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen overleed. Om verschillende redenen is het mooi om daar aandacht aan te besteden. Van Ceulen was een verwoed rekenaar die steevast 'met lust ende arbeyt' verder rekende waar anderen stopten. Doordat hij niet academisch geschoold was, nam hij niet altijd de meest voor de hand liggende weg; wel bedreef hij wiskunde van internationaal niveau. Er zijn inderdaad verschillende redenen waarom we van mening zijn dat Van Ceulen en zijn werk de moeite waard zijn om een serie artikelen aan te wijden. Zijn werk ademt steeds een werklustige frisheid, zijn wiskunde is vaak mooi en boeiend, en dat maakt het tot heel interessant materiaal om met leerlingen aan te werken. Het kijken naar de problemen waarmee wiskundigen in zijn tijd worstelden, geeft een verdieping aan de schoolwiskunde van nu. Daar komt nog bij dat Van Ceulen interessante, soms zelfs spetterende, relaties met zijn omgeving had en daardoor leren we dan weer iets over de tijd waarin hij leefde. Al met al dus genoeg reden om u acht (nu nog zes) nummers lang te trakteren op Van Ceulen-verhalen, geschreven door diverse specialisten: in deze derde aflevering een bijdrage door Fokko Jan Dijksterhuis.

Wiskunde was in de Republiek alomtegenwoordig en kende vele gezichten. Behalve een selecte groep geleerden die zich bezig hield met de 'speculatieve' wiskunde van afleidingen en bewijzen, was er een grote groep 'practici' zoals rekenmeesters, landmeters, boekhouders en vestingbouwers die het land en de samenleving vorm gaven. Wiskunde werd daarbij meer en meer prominent, zowel in academische kringen als in beroepen waar gemeten, gerekend en getekend werd. Tijdens het leven van Van Ceulen, zeg maar vanaf de Opstand (1568-1589) tot het Twaalfjarig Bestand (1609-1621), kreeg de beoefening en het onderwijs in de wiskunde een vaste plaats in de maatschappij. Dat had niet in de laatste plaats te maken met de bijzondere waarde die de stadhouders aan wiskunde toekenden. In dit artikel schets ik het wiskundige leven tijdens de eerste vijftig jaar van de Tachtigjarige Oorlog. Daarbij neem ik het dispuut over de cirkelkwadratuur dat Van Ceulen rond 1585 met Simon van der Eycke voerde als uitgangspunt. Dit dispuut opent diverse vensters op de wiskunde in de Republiek van de late zestiende eeuw: zowel op de beoefenaars ervan als op de aard van de wiskundebeoefening.

der Eycke *Quadrature du Cercle*, een boekje waarin hij betoogde de exacte verhouding tussen diameter en omtrek van de cirkel gevonden te hebben,^{1521/484}; zie *figuur 1*. Over de auteur is niet veel meer bekend dan dat hij uit het Franse Dole afkomstig was, oorspronkelijk Simon du Chesne heette, en school hield in Delft. Zijn bewering dat hij de kwadratuur van de cirkel had gevonden, gaf echter aanleiding tot een heftig dispuut met Ludolph van Ceulen. Bijzonder aan het boekje van Van der Eycke is dat hij het opdroeg aan Willem van Oranje (1533-1584). Dat betekent dat hij goede connecties moest hebben, want zo'n opdracht kon je niet zomaar geven. In ieder geval vond Willem van Oranje, door Van der Eycke aangeduid als liefhebber en kenner van de wiskunde, de kwestie belangrijk genoeg om advies over de waarde van het boekje te vragen van Adriaan Anthonisz (1527-1607); zie *figuur 2*. Anthonisz was burgemeester van Alkmaar, had de stad gered door de aanleg van verdedigingswerken, en was inmiddels benoemd tot 'Stercktebouwmeester der Vereenighde Nederlanden'. Het oordeel van

Anthonisz was negatief. Hij sprak daar met Van der Eycke over en schreef een brief die door verschillende mensen gelezen is, maar waarvan tegenwoordig geen spoor meer te vinden is.^[2] Anthonisz vroeg vervolgens Van Ceulen om een 'second opinion'. Van Ceulen bevestigde Anthonisz's oordeel en besprak de kwestie met Van der Eycke die hem verzocht zijn conclusies te publiceren. Willem van Oranje maakte dit niet meer mee, op 10 juli 1584 werd hij vermoord. Van Ceulen stemde in met Van der Eycke's verzoek, met als resultaat *Kort Claar bewijs dat die nieuwe ghevonden proportie eens Cirkels iegens zyn diameter te groot is ende overzulcx de quadratura Circuli des zeluen vindrs onrecht zy*, zonder datum maar waarschijnlijk in 1585 uitgegeven.^[3] Bondig en helder liet Van Ceulen zien dat de verhouding van Van der Eycke buiten de grenzen valt die gevonden waren door Archimedes (zie *kader*). Van der Eycke liet het er niet bij zitten en antwoordde met een *Clearder Bewijs* (1586) waarin hij een nieuwe waarde voor de verhouding gaf.^[4] Van Ceulen riposteerde met *Proefsteen Ende Claerder wederleggingh dat het clarder bewijs (so dat ghenaeemt is) op de gheroemde ervindingh vande Quadrature des Cirkels een onrecht te kennen gheuen ende gheen waenachtich bewijs is*.^[5] (Het voordeel van de lange titels uit die tijd is dat ze een beknopte samenvatting van de inhoud geven.) Een proefsteen werd gebruikt om de echtheid van munten en sieraden te bepalen en dat is precies wat Van Ceulen hier beoogde: hij haalde de *Quadrature* langs de steen van de wiskunde om te kijken of er onder de glanzende buitenkant daadwerkelijk mathematisch edelmetaal zat. Hij ging echter verder: hij toetste eveneens de waarde van Van der Eycke zelf als wiskundige. De uitkomst was onverbiddelijk: zowel Van der Eycke als zijn boekje konden de meest elementaire toets der kritiek niet doorstaan.

Van Ceulen versus Van der Eycke

Op 28 januari 1584 publiceerde Simon van



Cirkelmeting

Archimedes van Syracuse (c. 287-c. 212 v. Chr.) had in *Over de Cirkelmeting* een nauwkeurige bepaling gegeven van de verhouding tussen straal en omtrek van de cirkel. Bijzonder aan zijn methode is dat hij alleen de boven- en ondergrens aangaf die hij gevonden had met een benaderingsmethode. Dit was een heel andere aanpak dan de klassieke meetkunde die Euclides voorstond. Archimedes gebruikte voor zijn benadering ingeschreven en omgeschreven veelhoeken van de cirkel en rekende door tot 96 zijden.

In het *Kort Claar Bewijs* laat Van Ceulen eerst zien dat de som van de zijden zo'n omgeschreven veelhoek langer is dan de omtrek van de cirkel en voor de ingeschreven veelhoek korter. Hij rekent vervolgens tot een 192-hoek door en toont aan dat de verhouding van Van der Eycke buiten deze grenzen ligt. Het werk van Archimedes werd in de Renaissance herontdekt en had een grote invloed op de vernieuwingen van de wiskunde in de 16e eeuw.

Wiskunde en eer

Waar de toon van het dispuut in eerste instantie vriendelijk en zakelijk was, werd die na Van der Eycke's repliek scherper en meer op de man. Van Ceulen toonde zich in het begin verrast over Van der Eycke's resultaat, aangezien het geen filosoof of geleerde ooit eerder gelukt was de kwadratuur van de cirkel te vinden. Hij toonde vervolgens aan dat de wiskunde niet klopte en het bewijs ondeugdelijk was. Nadat echter Van der Eycke Archimedes openlijk in twijfel trok, werd hem 'verwaandheid en roekeloosheid' verweten. Van Ceulen wees er op dat alle wiskundigen uit zijn omgeving Van der Eycke's houding afwezen: Michel Coignet (1549-1623), Simon Stevin (1548-1620), Jan Cornets de Groot (1554-1640), Adriaen Ockers. Van der Eycke redeneerde volgens hem onhelder en misleidend. In plaats van een onderbouwing te zijn sprak diens *Claerder Bewijs* de conclusies uit de *Quadrature* tegen. Van Ceulen sprak Van der Eycke niet alleen aan op zijn wiskundige competenties maar ook op zijn eerbaarheid en burgerschap. Hij was grof en ongemanierd en hield hij zich niet aan de regels van het spel: je ging alleen openlijk in dispuut als je daarom gevraagd werd door een beschermheer of gedwongen door een tegenstander. Het moge duidelijk zijn dat Van Ceulen niet handelde uit eerezucht of afgunst maar alleen om in het algemeen belang onrecht te herstellen. Uiteindelijk gaf Van Ceulen in de *Solutie* de

genadeslag. Hij legde uit hoe Van der Eycke zijn leerlingen boekhouden onderwees en dat zijn rekenvaardigheid op het meest elementaire niveau tekortschoot:

'Dat Symon vander eycke tot dolen geboren doolt inde hooghwichthighe stucken der const daer de verstandinghste filosofhen in bezweken zyn is niet te verwonderen: maer dat hy in dolinghe herneckigh voort vaert hem seluen bouen de verstandighe stelt ende nochtans grofuyck faelt in de slechtste beghinselen der Arithmetiken waeraff de geringste Leerlinghen reden en oordeel conne gheuen is niet min vreemt als berispwaerdigh.'

Van der Eycke was met andere woorden niet alleen volstrekt incompetent als wiskundige, hij was bovendien een gevaar voor de samenleving doordat hij zijn leerlingen foute wiskunde onderwees. Hiermee eindigde het dispuut, klaarblijkelijk met Van Ceulen en Anthonisz als winnaars. Van der Eycke duikt nog een aantal keren op in Resoluties van de Staten Generaal waarin hem patent wordt verleend voor diverse wiskundige vondsten. Helemaal 'onwis' was hij dus niet, maar over de cirkelkwadratuur heeft hij verder geen sporen nagelaten. Het onderwerp zou Van Ceulen echter niet meer loslaten en vormde de rode draad van zijn glansvolle carrière als 'wiskonstenaar'.

De betekenis van ruzies

Het dispuut tussen Van Ceulen en Van der Eycke was niet de eerste of laatste wiskunde-ruzie in de Republiek. Van Ceulen had het zelf kort daarvoor al aan de stok gehad met Goudaen.^[6] Tot in de 18e eeuw gingen wiskundigen openlijk met elkaar in debat, elkaar uitmakend voor kwakzalvers en idioten. Wiskundigen waren niet de enigen, tal van politieke, religieuze en andere maatschappelijke kwesties gaven aanleiding tot vurige pamflettenstrijd. Wiskunde lijkt echter niet bepaald een maatschappelijke kwestie maar eerder iets voor kenners. Kenners waren er in de Republiek maar beperkt: de gemiddelde burger had hooguit wat elementaire wiskundige scholing gehad. Dat roept de vraag op waarom *wiskonstenaars* de publiciteit opzochten om elkaars bekwaamheid ter discussie te stellen. Volgens mij heeft dat er mee te maken dat er geen formele structuren waren om iemands wiskundige competentie te bepalen. Anders dan voor bijvoorbeeld doktoren waren er met betrekking tot de wiskunde geen opleidingseisen. Het landmetersexamen stond open voor iedereen en zelfs academici werden in de eerste plaats op hun geleerde (lees: Latijnse) scholing beoordeeld. Een wiskundig gilde was er ook niet, zoals de chirurgijns dat wel kenden. Alles bij elkaar was de wiskunde een open markt waar iedereen toegang

toe had en waarop men onderling moest uitmaken wie geschikt en wie ongeschikt was. Dat moest openlijk, omdat de buitenwereld moest weten wie competent was om bijvoorbeeld huisonderwijzer te worden of voor een adviescommissie gevraagd te worden. Het is daarom niet verwonderlijk dat het dispuut tussen Van Ceulen en Van der Eycke deze richting op bewoog: uiteindelijk ging het over de vraag of men zijn kinderen aan een hem toe kon vertrouwen. Het dispuut tussen Van Ceulen en Van der Eycke brengt niet alleen bijzondere kenmerken van het wiskundeleven in de Republiek onder de aandacht, maar brengt ook de beoefenaars van de wiskunde in beeld. Al dan niet zijdelings waren de meeste toonaangevende wiskundigen van die tijd bij het dispuut betrokken. Daarbij valt in de eerste plaats op hoe divers die groep was. Van rekenmeesters zoals Van der Eycke en Van Ceulen, via vestingbouwers en landmeters zoals Anthonisz en Ockers, tot aan liefhebberende bestuurders zoals De Groot en – klaarblijkelijk – onze Vader des Vaderlands. Dit zou de rest van de Gouden Eeuw zo blijven: zo divers als de wiskunde was, zo divers waren haar beoefenaars.



figuur 1 Voorpagina van Van der Eycke's *Quadrature du Cercle*...^[1]



figuur 2 Voorpagina van Adriaan Antonisz's *Solutie op die een en vyftichste ende tweenvyftichste Propositie*...^[9] met een houtsnede die de schrijver voorstelt in diens werkkamer.

Geleerden en stadhouders

De enigen die we nog missen bij dit overzicht, zijn de geleerden, dat wil zeggen de tekstgerichte wiskundigen die de klassieken bestudeerden en academische werken publiceerden. In de jaren 1580 waren die er dan ook nauwelijks maar daar begon verandering in te komen. De stadhouders vonden hoger onderwijs belangrijk en bijzonder voor die tijd is de waarde die zij aan wiskunde hechtten. In 1575 stichtte Willem van Oranje de Universiteit van Leiden, waar Rudolf Snellius (1546-1613) kort daarop hoogleraar wiskunde (en Hebreeuws) werd. In 1585 richtte de Friese stadhouder Willem Lodewijk (1560-1620) de universiteit in Franeker op. Ook daar werd een hoogleraar wiskunde aangesteld. In 1598 trok hij een nieuwe hoogleraar aan: Adriaan Metius (1571-1635), de oudste zoon van Adriaan Anthonisz. In Franeker verzorgde deze niet alleen colleges wiskunde in het Latijn, maar ook in het Nederlands voor landmeters en andere vaklieden. Op deze manier kreeg de wiskunde niet alleen een prominente plek aan de academies van de Republiek, maar er was ook bijzondere aandacht voor onderwijs voor de praktische belangen van de samenleving.

In Holland was Willem van Oranje's zoon en opvolger Maurits – prins zou hij officieel pas in 1618 worden – een uitgesproken liefhebber en kenner van de wiskunde. Ook hij vond wiskundige scholing belangrijk voor de nieuwe oorlogsmethoden die hij en zijn neef ontwikkelden. Maurits had daarbij een belangrijke gesprekspartner: Simon Stevin. Stevin is misschien wel de minst doorsnee-wiskundige die er in die tijd rondliep. Hij had een achtergrond in de praktische wiskunde – boekhouden, machine- en vestingbouw – maar ontwikkelde een sterk geleerde benadering waarbij hij de conceptuele grondslagen van rekenen en mechanismen benadrukte. Hij was daarbij ook niet een gewone rekenmeester of ingenieur, maar maakte in de eerste plaats carrière in hofse en bestuurlijke kringen. Uiteindelijk werd hij adviseur van Maurits, met wie hij een hele reeks *Wiskonstighe Ghedachtenissen* uitwisselde en ontwikkelde. Waarschijnlijk is Stevin de enige hofwiskundige die Nederland ooit gekend heeft.

In 1600 maakten Maurits en Stevin een plan om ook aan de Leidse universiteit praktijkgericht wiskundeonderwijs te verzorgen: de Duytsche Mathematique.^[7] Hier werd Van Ceulen één van de twee hoogleraren. Hij was in de vroege jaren 1590 van Delft naar Leiden verhuisd waar hij hechte betrekkingen met de Hollandse

geleerden aanknoopte. In Leiden trof Van Ceulen bovendien de humanist Scaliger, die zich permitteerde ook over de kwadratuur en andere wiskundige vraagstukken geleerde uitspraken te doen.^[8] Willebrord Snellius (1580-1626), de zoon en opvolger van Rudolph, zou er voor zorgen dat het werk van Van Ceulen een academische transformatie onderging: door het te publiceren en Latijnse vertalingen te verzorgen. Deze korte schets van de wiskunde in de vroege Republiek heeft laten zien dat er een gunstig klimaat voor de beoefening van de wiskunde bestond. Zowel de modernisering van de oorlogsvoering als het protestantse beschavingsoffensief van de Nassaus vormden een vruchtbare voedingsbodem waarvan wiskundigen, zoals Van Ceulen, Stevin en Snellius, goed gebruik maakten.

Info

Zie verder ook: www.ludolphvanceulen.nl

Noten

- [1] *Quadrature du Cercle Ou Maniere de trouuer un quarré egal au cercle donne: et au contraire un cercle egal au quarré proposé avec la raison de la circumference au Diametre.* Inuentée par Simon du Chesne de Dole. A M^{neur}. le Prince D'Oranges. En Delf, Chez Albert Henry, Imprimeur Ordinaire des Estats d'Hollande. M.D.LXXXIII. Avec Priuilege.
- [2] Deze gang van zaken werd overigens pas later beschreven door Van Ceulen, in de tweede fase van zijn dispuut met Van der Eycke. Anthonisz kwam in 1589 terug op de kwestie en bevestigde Van Ceulen's weergave.
- [3] *Kort Claar bewijs Dat die nieuwe ghevonden proportie eens Cirkels iegens zyn diameter te groot is ende overzulcxde quadratura Circuli des zeluen vindens onrecht zy.* Door Luloph van Ceulen gheboren in Hildesheim, woonachtich tot Delft. Gheprent tot Aemstelredam / by mijn Harmen Janszoon Muller / Figuersnijder / woonende inde Warmoe-straet, inden vergulden Passer.
- [4] Dit boekje is klaarblijkelijk verloren gegaan en we kennen de inhoud ervan alleen indirect via de geschriften van Van Ceulen.
- [5] *Proefsteen Ende Claerder wederleggingh dat het claarder bewijs. (so dat ghenaeempt is) op de gheroemde ervindingh vande Quadrature des Cirkels een onrecht te kennen gheuen ende gheen waerachtich bewijs is. Hier bygevoeght Een corte verclaringh aengaende het onverstant ende misbruyck inde reductie op simpel interest. Den ghemeenen volcke tot nut.*

Tsamen door Ludolph van Colen woonachtich tot Delft. Gheprent tot Aemstelredam by my Harmen Janszoon Muller / Figuersnijder / woonende inde Warmoesstraet in den vergulden Passer. 1586.

- [6] Zie het artikel *Ruzie met Van Ceulen* van Gijs Langenkamp en Wiggert Loonstra in *Euclides* 85-4 (februari 2010); pp. 138-140.
- [7] Hierover zal Jantien Doppe uitvoerig spreken in een volgend artikel in deze reeks.
- [8] Over Scaliger en Snellius zullen Liesbeth de Wreede en Jan Hogendijk uitvoeriger spreken.
- [9] *Solutie op die een en vyftichste ende tweenvyftichste Propositie die met wille sonder Facit syn voorghestelt in eenen Boeck onlanx wtghegheuen by Meester Nicolaum Petri Daventriensem van die inleydinghe hoemen verstaen ende ghebruycken sal die Celeste ende Terrestre Cloote / Ghedaen by Adrianum Antonij Alcmarianum Geometram, beminder der Mathematiche Conste / ... / 1589*

Over de auteur

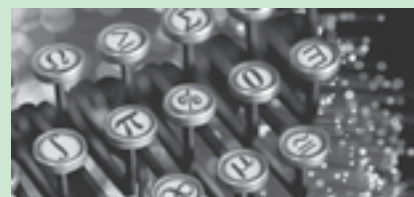
Fokko Jan Dijksterhuis is als wetenschaps-historicus verbonden aan de Universiteit Twente. Op dit moment werkt hij met twee promovendi aan een vijfjarig onderzoeks-project over de cultuurgeschiedenis van de wiskunde in de Republiek.

E-mailadres: f.j.dijksterhuis@utwente.nl

TIMSS 2008 Advanced

INTERNATIONALE VERGELIJKING VAN DE BESTE GROEPEN BÈTA-LEERLINGEN

[Pauline Vos]



In december 2009 verscheen het rapport van TIMSS 2008 Advanced : een internationale vergelijking voor de vakken wiskunde en natuurkunde voor de beste bèta-leerlingen in de hoogste klassen.^[1] Voor Nederland hadden leerlingen uit vwo-6 met wiskunde B12 meegedaan aan de internationale toets. In vergelijking met de beste bèta-leerlingen in andere landen kwamen onze leerlingen goed voor de dag. Pauline Vos las het rapport en zet wat zaken op een rij.

Huilen-met-de-pet-op

Natuurlijk willen we allemaal graag weten hoe 'goed' we in Nederland bezig zijn. Als je de kwaliteitskranten in Nederland moet geloven, dan is het huilen-met-de-pet-op en deugt er weinig of zelfs niets aan het wiskunde-onderwijs. De leerlingen kunnen geen haakjes uitwerken, ze leren geen 'echte' wiskunde, de docenten 'hebben geen kennis meer' en op de lesuren wordt elke vijf jaar gekort. Ondertussen zien we wel elke dag onze leerlingen aan het werk met wiskundeopgaven – zou het Nederlandse wiskundeonderwijs echt zijn afgedaald?

Met internationaal vergelijkend onderzoek neem je dezelfde wiskundetoets af in verschillende landen en kijk je naar de score per land. De resultaten zeggen dan iets over het onderwijsniveau in vergelijking tot die andere landen. In de afgelopen dertig jaar is er geregeld dergelijk onderzoek gedaan met leerlingen op de basisschool en in de onderbouw.

Voor een hoger niveau hadden we tot nu toe alleen een onderzoek uitgevoerd aan de Universiteit Maastricht met de instaptoets voor de studies Bedrijfskunde en Economie. Deze toets werd gemaakt door eerstejaars studenten met verschillende vooropleidingen (International Baccalaureat, diploma's uit Duitsland, of wiskunde A12, wiskunde B1 of wiskunde B12)^[2]. Het bleek toen dat de leerlingen met wiskunde B1 en wiskunde B12 óp, respectievelijk bóven het gemiddelde uitkwamen en de leerlingen met een wiskunde A12-vooropleiding de rode lantaarn droegen. Voorts bleek dat alle Nederlandse leerlingen in de internationale vergelijking achterbleven bij opgaven waarin algebraïsche vaardigheden werden gevraagd. De studenten met B1 en B12 compenseerden deze lacune echter weer met andersoortige opgaven.

En nu ligt er dan *TIMSS 2008 Advanced* voor me. TIMSS is een terugkerende internationale vergelijking voor de vakken wiskunde en natuurkunde, en ditmaal ging het om de

beste bèta-leerlingen in het laatste jaar van het voortgezet onderwijs. Voor Nederland had een steekproef meegedaan met $n = 1519$ uit vwo-6 met wiskunde B12. Voordat ik naar de einduitslag overga, schets ik echter enkele hobbels.

Definitieproblemen

Bij onderzoek zoals van TIMSS doen zich definitieproblemen voor: elk land heeft een eigen schoolstelsel en dat maakt het lastig vergelijken. In de meeste landen lijkt het basisonderwijs nog wel op elkaar – overal leren leerlingen in *groep 5* de tafels van vermenigvuldiging (al moeten we dit vertalen naar *grade 3* in Angelsaksische of *9ème* in Franstalige landen). In het voortgezet onderwijs zijn er al veel meer verschillen: in het ene land hebben ze vier of vijf jaar voortgezet onderwijs, in het andere land verdelen ze de leerlingen niet en houden ze alle leerlingen zo lang mogelijk per leeftijdsgroep bij elkaar. In *TIMSS Advanced* hebben ze de onderzoeksgroep gedefinieerd als *students in the final year of secondary schooling who have taken courses in advanced mathematics*. Voor Nederland denk je dan aan de zesde klas van het vwo met leerlingen van ongeveer 18 jaar. Maar in andere landen bleek dat het laatste jaar al in de vijfde klas was en de leerlingen gemiddeld 17 jaar oud. In andere landen blijken de leerlingen gemiddeld 19 jaar in de hoogste klas.

En wat is 'advanced mathematics'? De Nederlandse TIMSS-onderzoekers hebben dit geïnterpreteerd als *de wiskunde die het beste paste bij de toets*^[3]. In 2008 waren dat de leerlingen in het vwo met B12. Dat zijn niet alleen leerlingen met een NT-profiel, maar ook een deel van de NG-leerlingen. Bij elkaar is het een selecte groep die slechts 3,5% van hun leeftijdgenoten vertegenwoordigt. Voor andere landen bleek de zelfde definitie een geheel andere groep op te leveren: voor Slovenië waren het 40,5% van de zesde klassers die op het hoogste niveau in hun land wiskunde leerden. Daar zitten de leerlingen

blijkbaar veel langer bij elkaar (als een soort wiskunde I uit de tijd van de Mammoetwet, en dan met havo en vwo samengevoegd). Daarentegen was in Rusland de leerlingengroep met het hoogste wiskundenniveau weer beperkter dan in Nederland: 1,4% van de leeftijdsgroep.

Ieder land heeft dus een eigen interpretatie aan de definitie gegeven. De Nederlandse interpretatie is bovendien verbonden aan de Tweede fase van vóór 2007. Als de 'TIMSS-Advanced-onderneming' over een paar jaar herhaald wordt, dan wordt de vergelijking tussen de jaren lastig. Nederland moet dan met een andere groep leerlingen mee doen, want sinds de veranderingen van 2007 is vwo-wisB12 (760 uur) uitgekleeft tot wiskunde B (540 uur). Hoe pas je dan de definitie toe? Neem je alleen de vwo'ers met wiskunde D – een selecte groep leerlingen die minder dan 2% vertegenwoordigen van hun leeftijdsgroep? Of neem je dan vwo-wiskunde B als de wiskunde van het hoogste niveau (ongeveer 6%)^[4].

Bij het internationale onderzoek doen zich nog meer problemen voor^[5]: je kunt alleen vergelijken met de deelnemende landen. Aan *TIMSS 2008 Advanced* deden landen als Australië, Duitsland, Engeland, Frankrijk, Japan, Singapore, Verenigde Staten en Vlaanderen niet mee, terwijl deze landen in andere internationale vergelijkingen wel van de partij zijn. Ditmaal was de deelname beperkt tot tien landen: Armenië, Filippijnen, Iran, Italië, Libanon, Nederland, Noorwegen, Rusland, Slovenië en Zweden.

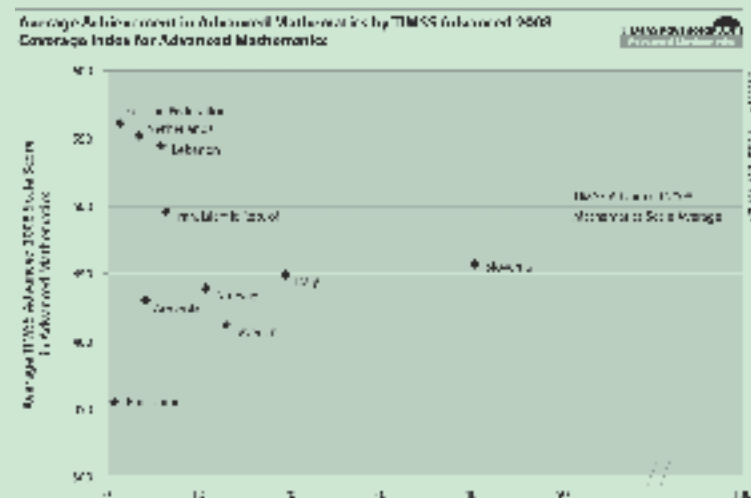
Nederland bij de top of in de middenmoot

In *figuur 1* op pag. 190 staat de uitslag van de 'wedstrijd', uitgedrukt in een score die is geschaald met gemiddelde 500 en standaarddeviatie 100. Voor wiskunde eindigt Rusland op de eerste plaats met 561 punten, Nederland op de tweede met 552 punten en Libanon op de derde plaats met 545 punten. Overigens eindigde Nederland voor natuurkunde op de eerste plaats met 582 punten. Brengt u de felicitaties over aan de collega's van de natuurkundesectie?

Het kruisje in de tabel bij *Netherlands* geeft aan, dat de steekproef aan de internationale eisen voldeed, met vervanging van niet-



figuur 1
Landenscores
in TIMSS 2008
Advanced



figuur 2
Landenscores vs.
percentage bèta-
leerlingen in TIMSS
2008 Advanced

Exhibit 1.10 Weekly Hours of Intended and Implemented Instructional Time for Advanced Mathematics in the Final Year

Country	Intended Instructional Time as Prescribed in the Curriculum (in Hours per Week)	Number of Weeks Schools Are Open in a Year	Weekly Hours of Implemented Instructional Time per Advanced Mathematics Student
Armenia	2.1	34	46.14
Belarus	6.0	36	108.00
Italy	16.12	33	53.19
Japan	5.5	45	24.75
Korea	6.75	45	30.37
Norway	2.4	35	84.00
Hungary	13.12	36	47.23
Romania	16.92	34	57.59
Slovenia	1.7	35	59.50
Sweden	1.04-1.44	38	39.52

figuur 3
Aantallen lesuren
per week van bèta-
leerlingen in TIMSS
2008 Advanced

Table 1.11 Teachers' Reports on the Types of Calculators Used by Students in the TIMSS 2008 Advanced Mathematics Study

Country	Percent of Students Using				Number of Countries that Used a Calculator
	No Calculator	Basic Calculator	Scientific Calculator	Graphing Calculator	
Armenia	100%	0%	0%	0%	1
Belarus	100%	0%	0%	0%	1
Italy	100%	0%	0%	0%	1
Japan	100%	0%	0%	0%	1
Korea	100%	0%	0%	0%	1
Norway	100%	0%	0%	0%	1
Hungary	100%	0%	0%	0%	1
Romania	100%	0%	0%	0%	1
Slovenia	100%	0%	0%	0%	1
Sweden	100%	0%	0%	0%	1

figuur 4
Gebruik van reken-
machines in TIMSS
2008 Advanced

meewerkende scholen door andere *random* getrokken scholen.

In figuur 1 is nog veel meer af te lezen: de breedte van de balkjes geeft de spreiding in prestatie van de getoetste leerlingen. Nederland heeft het smalste balkje: de zwakste wiskunde B12-leerlingen zijn nog steeds best goed.

In andere landen, ook in Rusland, is de balk veel breder: dat betekent dat de klassen daar veel minder homogeen zijn. In de tabel ziet u ook kolommen voor het percentage bèta-leerlingen en de leeftijd van de getoetste leerlingen.

Het is natuurlijk niet zo dat je de scores tussen de verschillende groepen leerlingen goed kunt vergelijken. De vertegenwoordigde leerlingen in vier van de tien landen (Slovenië, Italië, Noorwegen en Zweden) zijn meer dan 10% van hun leeftijdsgenoten. In deze landen zijn de leerlingen ook bijna een jaar ouder. Dat is een beetje alsof je de havo NT-leerlingen en de vwo wisB1-leerlingen voor Nederland zou meenemen in de steekproef en pas op hun negentiende gaat toetsen. De vergelijking gaat dus mank.

Het wordt koffiedik kijken hoe de ranglijst zou zijn, als alle landen met de 3,5% beste bèta-leerlingen hadden meegedaan. Je kunt bijvoorbeeld voor Zweden en Noorwegen kijken naar het hoogste kwartiel (de beste 25% van de leerlingen), dat weergegeven wordt door de rechterkant van de spreidingsbalk in figuur 1. Met een beetje natte-vinger-werk komt Nederland dan wat lager in de ranglijst, maar zeker hoger dan Noorwegen, Armenië, Zweden en de Filipijnen.

Omdat ze bij TIMSS ook nattigheid voelden, hebben ze een correlatie-grafiekje gemaakt, waarin de landenscore is afgezet tegen het percentage van de leerlingen dat wiskunde leert 'op het hoogste niveau' van het land; zie figuur 2. Je zou verwachten, dat naarmate de leerlingengroep kleiner is, en dus selecter en homogener, er ook een hogere score zou zijn. Dit is echter slechts ten dele het geval: landen als Armenië, de Filipijnen en Slovenië zijn *outliers* en maken de correlatie erg onnauwkeurig.

Andere feiten: meisjes, lesuren per week en rekenmachines

Meisjes – Ondanks de onduidelijkheid van de internationale vergelijking blijft het interessant om in het rapport te lezen. Bijvoorbeeld over de verschillen tussen meisjes en jongens. In Nederland ontlopen de prestaties van de meisjes en de jongens elkaar niet, terwijl het verschil in prestaties in andere landen significant groter is: in Libanon zijn de meisjes veel beter, terwijl in alle andere landen de jongens veel beter zijn. Ook valt op dat de meisjes in de wiskunde B12-vwo-klassen met 23% het

slechts vertegenwoordigd zijn bij deze bèta-leerlingen, terwijl in andere landen (Armenië, Slovenië, Filippijnen) de meisjes in de meerderheid zijn. Wat doen we in Nederland toch zo afwijkend, dat er relatief zo weinig meiden in de wiskunde B12-klassen zitten?

Ook de wiskunde B12-docenten in Nederland zijn merendeels man (86%), terwijl in landen als Armenië, Italië, Filippijnen, Rusland en Slovenië vrouwelijke docenten in de meerderheid zijn. De leeftijd van de wiskundeleraars ligt hoog in Nederland en Noorwegen (meer dan 67% van de docenten ouder dan 50 jaar), terwijl in landen als Iran en de Filippijnen het merendeel van de wiskundeleraars jonger dan 40 is. Ook is in het onderzoek aan de docenten gevraagd naar hun carrièreperspectief: hierbij valt Nederland op met 93% van de Nederlandse wiskundeleraars die aangeven, dat ze zo lang mogelijk willen blijven lesgeven in wiskunde. In andere landen geven de docenten ook aan dat ze andere banen, zowel binnen als buiten het onderwijs ambiëren. Ook valt Nederland op in de statistieken betreffende ‘docenten en hun lidmaatschap van een beroepsvereniging’: 69% van de wiskunde B12-docenten is lid van een beroepsvereniging, terwijl in alle andere landen de lidmaatschapsstatistieken lager (of veel lager) zijn. Ook is gevraagd naar de gebieden van bijscholing: in Nederland zijn de wiskunde B12-docenten vooral geïnteresseerd in wiskundig-inhoudelijke bijeenkomsten, terwijl docenten in andere landen aangeven zich meer te scholen in (vak-)didactiek of leerplanzaken.

Lesuren – Ik lees ook altijd graag de tabellen met de aantallen lesuren; **zie figuur 3**. We zien dat de wiskunde B12-leerlingen in het vwo echt weinig uren wiskunde hebben: slechts 3,8 uur per week (en dat was nog in de tijd van wiskunde B12 met 760 slui). In andere landen hebben de leerlingen soms wel 5 of 6 lesuren per week, in Libanon zelfs meer dan 8 uur! Als de landenscores naar het aantal uren onderwijs zouden worden gecorrigeerd, dan wordt Nederland met afstand kampioen (maar als u de landenscore van Nederland naar beneden wilt praten, dan zijn er ook manieren te verzinnen om dat te bereiken).

Rekenmachines – In het rapport staan ook overzichten van de behandelde stof in de klassen. In alle landen wordt de *afgeleide* bepaald, waarbij alleen in Nederland en Zweden niet uitgebreid geoefend wordt met *limieten* en *differentieerbaarheid*. In veel landen behoren verder complexe getallen en ruimtemeetkunde tot de stof van de Advanced-klassen. Het gebruik van rekenmachines is ook zeer divers; **zie figuur 4**. In de meeste landen worden rekenmachines op

het eindexamen toegestaan, en meestal betreft dat de wetenschappelijke rekenmachine (dus met wiskundige functies). In Nederland, Noorwegen en Zweden is de grafische rekenmachine in gebruik, terwijl in Armenië en Iran een kleine rekenmachine wordt gebruikt, dus zonder bijzondere wiskundige functies. De algebraïsche calculator blijkt nergens geland.

Scoren op conceptuele kennis

De gebruikte toets bestond uit 72 opgaven, waarvan 46 meerkeuzevragen. Dat maakt de toets afwijkend van wat Nederlandse leerlingen gewend zijn. De opgaven zijn bovendien kort en kaal: er wordt bijvoorbeeld om $f'(x)$ gevraagd bij $f(x) = e^{\cos x}$, met eronder vier of vijf alternatieve antwoorden, waarvan één correct. Bij andere opgaven moet een integraal uitgerekend worden. De opgaven toetsen de leerlingen op hun kennis van regels van het differentiëren, maar ook het oplossen van ongelijkheden en goniometrische vergelijkingen ($\sin 2x = \frac{1}{2}$), het herleiden van $g(f(x))$ en het bepalen van limieten.

Op bovengenoemde opgaven scoren de Nederlandse leerlingen meestal enigszins beneden de middelmaat – het beeld geeft aan, dat leerlingen in andere landen veel meer gedrild zijn en routine hebben gekregen in de opgaven, waarin procedures moeten worden uitgevoerd; vooral in de landen waar veel uren per week aan wiskunde worden besteed, zoals Iran, Libanon en Rusland. De toets bevat echter ook inzichtvragen, waaraan je kunt zien of de leerlingen ‘het ook echt begrepen hebben’. Dat zijn vragen die de leerling verrassen (*non-routine*), waarin ze verbanden moeten aanbrengen tussen verschillende representaties zonder algoritmische oefeningen. We noemen dit ook wel vragen die een beroep doen op *conceptuele kennis (weten waarom)*.

	1	2	3	4	5	6
TIMSS-code:	MA13007	MA13027	MA23208	MA23021	MA23151	MA23050
Armenië	33	35	31	21	30	18
Iran	61	33	47	28	48	46
Italië	42	36	38	22	40	27
Libanon	54	28	30	25	63	35
Nederland	75	69	60	36	61	36
Noorwegen	52	22	37	18	31	23
Filippijnen	29	7	34	21	39	23
Rusland	52	41	49	40	60	41
Slovenië	53	10	29	26	47	32
Zweden	44	20	42	22	36	26

tabel 1 Landenscores in TIMSS 2008
Advanced op de 6 geselecteerde opgaven

In figuur 5 (op pag. 193) staan zes van dergelijke TIMSS-vragen^[6]. **In tabel 1** staan de bijbehorende landenscores op deze zes vragen (landenscores zijn p-waarden: het percentage behaalde punten t.o.v. het maximaal te halen punten). Ik heb deze opgaven geselecteerd om hun afwijkende vorm van de Nederlandse gewoonten en

omdat ze *conceptuele kennis* toetsen. Let wel: deze zes opgaven geven een vertekend beeld van de gehele TIMSS-toets. Maar op mijn selectie kun je heel concreet zien wat Nederlandse leerlingen *conceptueel* kunnen in vergelijking tot leerlingen in andere landen. De *eerste* opgave (TIMSS-code MA13007) gaat over een gelijkbenige driehoek met een zijde op de x -as, en gevraagd wordt: de som van de richtingscoëfficiënten van de zijden. Je hoeft bij deze opgave niet de richtingscoëfficiënten te bepalen om toch de som te weten. Voor mensen met wiskundig inzicht is het dus geen moeilijke opgave, maar in de meeste landen kan minder dan de helft van de getoetste leerlingen het juiste antwoord vinden. De Nederlandse leerlingen scoren echter uitzonderlijk hoog op deze opgave (75%): blijkbaar kunnen de meesten zich de positie van de driehoek voorstellen, de vertaalslag maken van meetkunde naar richtingscoëfficiënten en goed omgaan met de spiegelsymmetrie bij richtingscoëfficiënten. De *tweede* opgave (TIMSS-code MA13027) gaat over een regelmatige n -hoek in een eenheidscirkel, en gevraagd wordt: de limiet van de omtrek van de veelhoek als n toeneemt naar oneindig. Geen moeilijke opgave, maar in de meeste landen kan minder dan een derde van de getoetste leerlingen het juiste antwoord vinden (in Slovenië en de Filippijnen is de score zelfs veel lager dan de ‘gokkans’). De Nederlandse leerlingen scoren echter uitzonderlijk hoog op deze opgave (69%): blijkbaar kunnen ze zich de veelhoek voorstellen en op een correcte manier in verband brengen met de formule voor de omtrek van een eenheidscirkel. De *derde* opgave (TIMSS-code MA 23208) gaat over de grafiek van het volume van een bolvormige ballon als functie van de diameter. Ook geen moeilijke opgave, maar in de

meeste landen kan minder dan een derde van de getoetste leerlingen het juiste antwoord vinden. De Nederlandse leerlingen scoren echter uitzonderlijk hoog op deze opgave (60%): blijkbaar kan een meerderheid zich een inhoudsformule voor een bol als grafiek voorstellen, dus switchen van symbolische naar grafische representatie.

De vierde opgave (TIMSS-code MA 23021) gaat over een kamer in de vorm van een halve cirkel, waarin tien ramen worden gezet – als ware het een erker. De vraag gaat over de formule voor het bepalen van de breedte van de ramen. Dit was een lastige opgave geweest, als de formule niet werd aangereikt, maar in deze meerkeuzevraag kan gekozen worden tussen vier mogelijke formules. Toch liggen de meeste landenscores rond de ‘gokkans’. De Nederlandse leerlingen scoren echter hoger (36%): blijkbaar kunnen ze de vertaalslag van de gelijkbenige naar de rechthoekige driehoek beter maken dan bèta-leerlingen in andere landen.

De vijfde opgave (TIMSS-code MA 23151) lijkt sterk op hetgeen gebruikelijk is in de Amerikaanse SAT (*Scholastic Aptitude Test*, een veelgebruikte toelatingstest voor Amerikaanse universiteiten). De correcte grafiek moet gezocht worden, passend bij enkele functienmerken betreffende functiewaarde, afgeleide en dubbele afgeleide (met $f'(-1) > 0$, $f'(3) < 0$, $f'(5) > 0$, $f''(5) < 0$). Opmerkelijk is dat het functievoorschrift niet is gegeven. In de meeste landen ligt de score onder de 50%, maar in Libanon, Nederland en Rusland ligt het boven de 60%. Blijkbaar leren bèta-leerlingen in deze landen beter om een vertaalslag te maken van functievoorschrift naar grafiek en omgekeerd dan bèta-leerlingen in andere landen.

De zesde en laatste opgave (TIMSS-code MA23050) gaat over een grafiek die boven en onder de x -as ligt, waarbij de ingesloten oppervlakte met gearceerde stukjes is gegeven en gevraagd wordt naar de waarde van de integraal. Kern is dat het functievoorschrift niet is gegeven en dat de leerling de vertaalslag van integraal van een functie moeten maken naar de oppervlaktes ingesloten door grafiek en x -as. De vraag blijkt in alle landen lastig te zijn: in de meeste landen ligt de score rond de ‘gokkans’ en nergens is de score hoger dan 50%. De Nederlandse score (36%) is niet gek, als je aanmerkt dat zij niet getraind worden met dergelijke meerkeuze-opgaven. Het beeld dat uit bovenstaande opgaven naar voren komt, is dat de bevindingen van eerder onderzoek^[7] bevestigd worden: de Nederlandse bèta-leerlingen zijn in vergelijking tot leerlingen in andere landen niet goed in procedurele vaardigheden, maar ze compenseren hun lagere score op procedure-opgaven ruimschoots met een hogere score op opgaven die *conceptuele* kennis toetsen. Ze kunnen beter dan de bèta-leerlingen in andere landen switchen tussen symbolische en grafische representaties, ze kunnen dwarsverbanden leggen en enkele stappen-vooruit denken. Daardoor zijn ze flexibeler dan leerlingen in andere landen en kunnen ze ook scoren op

opgaven die ze nog niet eerder hebben gezien. Het aanleren van procedurele vaardigheden an makkelijker in landen waar een strakke discipline heerst, en je hebt er als docent niet bijzondere bekwaamheden voor nodig: in veel landen zie je een didactiek van *practice-and-drill*. Het aanleren van conceptuele vaardigheden is voor een docent echter veel lastiger: hoe zet je leerlingen écht aan het denken? Daarvoor heb je hogere vakdidactische vaardigheden nodig: je moet leerlingen heen-en-weer laten switchen tussen representaties en je moet ze telkens blijven verrassen met hobbels zonder dat ze hiervan gefrustreerd raken. De TIMSS-opgaven die conceptueel denken toetsen laten zien, dat de Nederlandse wiskunde B12-docenten op dat gebied kwaliteitswerk leveren en tot de wereldtop behoren.

Noten

- [1] TIMSS is de afkorting van *Trends in Mathematics and Science Study*. Het internationale rapport (445 pagina's; 38 Mb) en diverse bijlagen zijn te vinden op « http://timss.bc.edu/timss_advanced ». De helft van het rapport gaat over wiskunde, de ander helft over natuurkunde. Het Nederlandse rapport: M.R.M. Meelissen, M.Drent (2009): *Nederland in TIMSS-Advanced / Leerprestaties van 6 vwo-leerlingen in Wiskunde B en Natuurkunde. Te downloaden via: « <http://purl.org/utwente/68672> »*. *Hoewel de titel anders suggereert, gaat het onderzoek over leerlingen met wiskunde B12 en natuurkunde 12*.
- [2] D. Tempelaar, W. Caspers (2008): *Instaptoetsen wiskunde in een internationaal perspectief*. In: *Euclides* 83(5); pp. 250-253
- [3] In veel landen is wiskunde in de bovenbouw gesplitst in twee varianten: *Advanced Mathematics* en *Core Mathematics* (veel landen kennen geen vmbo-havo-vwo verdeling). Het verschil ertussen betreft grofweg: analyse (differentiëren, gonio en e -machten) en analytische meetkunde. *Core Mathematics* komt ongeveer overeen met wat we in vmbo-T doen. Mijn buitenlandse gasten op bezoek in Nederland betitelen wiskunde B al als *Advanced Mathematics*. Sinds 2007 is het wiskunde A-programma ook al steeds meer *Advanced Mathematics* geworden.
- [4] Het besluit voor deelname aan een TIMSS-onderzoek wordt genomen op het Ministerie van OC&W, in samen-

spraak met enkele partners zoals de VO-Raad. De ene keer wordt er wel en de volgende keer wordt er niet deelgenomen aan TIMSS; zo heeft Nederland in 1995 niet deelgenomen aan *TIMSS Advanced*. Voor zover ik het overzie, worden de beslissingen over deelname aan TIMSS genomen op ad-hoc basis (financiële argumenten) en niet op grond van een duidelijke lange-termijn-visie.

- [5] Er zijn ook vertaalproblemen. Het onderzoek is met zorg uitgevoerd, maar de vertalingen van wiskundige begrippen ontsieren het Nederlandse rapport. Bijvoorbeeld: de toets beslaat de drie vakgebieden *calculus*, *algebra* en *geometry*. Het gebied *algebra* gaat over formules, grafieken, combinatoriek en complexe getallen, en daarvoor hebben we in Nederland niet een verzamelwoord. De Nederlandse TIMSS Advanced onderzoekers vertalen *algebra* vervolgens met *analyse en kansrekeningen* (nb. het laatste woord staat in meervoud). Ook wordt aangegeven dat de wiskunde B12-leerlingen de volgende onderwerpen niet hebben gehad: *Gradients*, *Y-axis Intercepts*, and *Point of Intersection of Straight Lines in Cartesian Coordinates* (richtingscoëfficiënten, snijpunten met de y -as en snijpunten van lijnen in coördinaten).
- [6] Niet alle TIMSS-toetsopgaven zijn vrijgegeven: ongeveer de helft van de opgaven wordt voor een volgende keer (over een jaar of tien) geheim gehouden. De vrijgegeven opgaven zijn te vinden via de TIMSS-website: « http://timss.bc.edu/timss_advanced/ldb.html ». De opgaven wiskunde staan in het bestand *TA08_MAT_Released_Items.pdf*, dat is opgenomen in *TA08_Items.zip* (bereikbaar via aanklikken van “TA08_Items”).
- [7] Zie ook Noot 2 en zie:
 - P. Vos (2005): *PISA en TIMSS / Hoe staat het Nederlandse wiskundeonderwijs er internationaal gezien voor?* In: *Euclides* 80(6); pp. 316-320.
 - P. Vos (2007): *Algebra-prestaties van tweedeklassers / Zijn ze voor- of achteruit gegaan?* In: *Euclides* 82(4); pp. 129-132.

Over de auteur

Pauline Vos was wiskundelerares en doet nu vakdidactisch onderzoek. Haar vertrouwdeheid met internationale studies komt doordat ze vijf jaar in het buitenland les gaf en meewerkte aan TIMSS-1999. Ze werkt aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam. E-mailadres: FP.Vos@uva.nl

Opgave 1 - MA13007 (meerkeuze – correct antwoord: A)

One side of an equilateral triangle lies along the x -axis. The sum of the slopes of the three sides is

- (A) 0
- (B) -1
- (C) 1
- (D) $2\sqrt{3}$
- (E) $1-2\sqrt{3}$

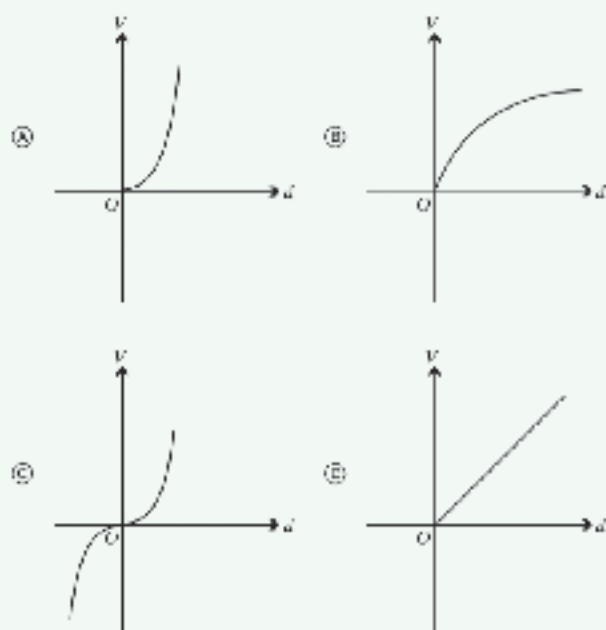
Opgave 2 - MA13027 (open vraag)

A regular polygon of n sides is inscribed in a circle of radius 1.

What is the value of the limit of the perimeter of the polygon as the number of sides n increases to infinity?

Opgave 3 - MA23208 (meerkeuze – correct antwoord: A)

A spherical balloon is blown up. Which graph shows the volume V as a function of the diameter d ?



Opgave 4 - MA23021 (meerkeuze – correct antwoord: B)



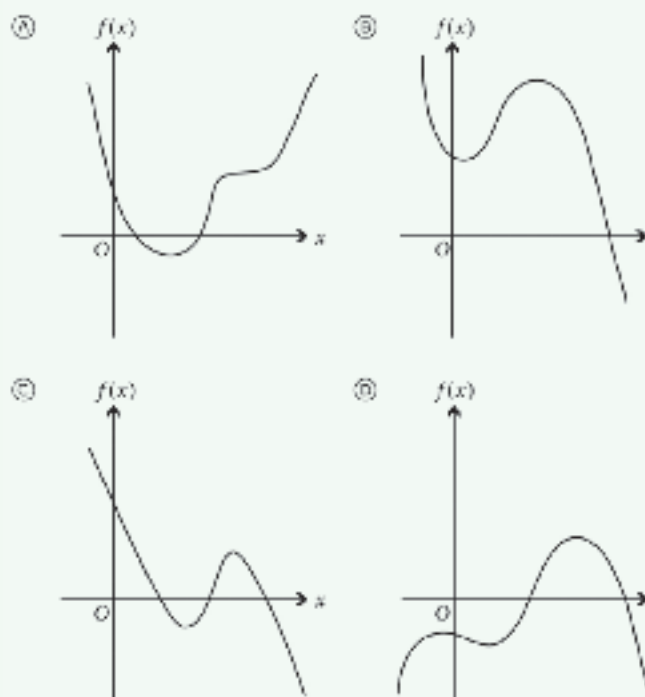
The figure shows a semicircular room seen from above. An architect is placing 10 fan windows in the room as shown. If the radius of the circle is r , which of the following equations would allow the architect to determine the width of each window?

- (A) $w = r \sin 9^\circ$
- (B) $w = 2r \sin 9^\circ$
- (C) $w = r \cos 18^\circ$
- (D) $w = 2r \sin 18^\circ$

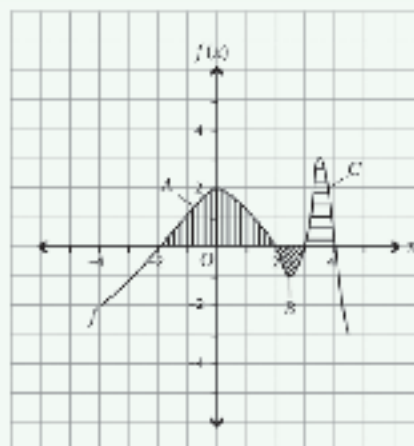
Opgave 5 - MA23151 (meerkeuze – correct antwoord: C)

Which one of the graphs below has all of the following properties?

$$f(-1) > 0, f(3) < 0, f'(5) = 0, f''(5) < 0$$



Opgave 6 - MA23050 (meerkeuze – correct antwoord: B)



For the areas between the graph of $f(x)$ and the x -axis shown above, area $A = 4.6$ units, area $B = 0.8$ units, and area $C = 2$ units.

What is the value of the definite integral $\int_{-2}^4 f(x) dx$?

- (A) 5.6
- (B) 6.0
- (C) 6.8
- (D) 7.6

figuur 5 Zes geselecteerde opgaven uit TIMSS 2008 Advanced

Viervlakken tussen Kunst en Wiskunde

KIJKEND NAAR HET WERK VAN HENK VERBEEK MET DE BLIK VAN EEN WISKUNDIGE

[Ton Konings]

Van 14 maart tot 25 april 2010 is er in het Stedelijk Museum (*zie noot*) in Roermond een overzichtstentoonstelling van het werk van kunstenaar Henk Verbeek dat hij maakte tussen 1960 en 2010. Deze tentoonstelling vormde voor Ton Konings de aanleiding om diep in het geometrische werk van Verbeek te duiken en er dit artikel over te schrijven.

Inleiding

In oktober 2008 kreeg ik, na een ontmoeting met kunstenaar Henk Verbeek, cd's met het fotoarchief, dat een overzicht gaf van zijn diverse werk. Ik werd vooral getroffen door het werk uit zijn 'Geometrisch-abstrakte periode' (1975-1995). Een vorm die telkens weer gebruikt werd, was het viervlak, bestaande uit 4 driehoeken, 4 hoekpunten en 6 ribben. Dit artikel begint met het geven van een aantal voorbeelden van deze 'viervlakskunst'.

Naast esthetische waardering werd mijn denken aangesproken met vragen als: hoe zit het in elkaar, met welke regelmaat, welke eigenschappen, hoe heeft 'ie het bedacht, met welke wiskundige gereedschappen, en waarom het viervlak? Ook riep het werk allerlei wiskundige vragen op, waarvoor ik met tekeningen en berekeningen oplossingen zocht.

Dit leidde tot een aantal praktische opdrachten voor eerstejaars studenten van de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde in het kader van een cursus, waarbij de ruimtemeetkunde van havo-B en havo-D herhaald en uitgebouwd wordt. Ik hoop met dit artikel dan ook wiskundeleraars te inspireren.

Verder vroeg ik me af in hoeverre dergelijke wiskundige vragen ook bij de kunstenaar een rol speelden: wat waren zijn uitgangspunten, welke werkwijze en wiskundige gereedschappen waren voor hem essentieel?

Ik had daarover een uitvoerig gesprek met hem. Een aantal antwoorden op de gestelde vragen zijn in het artikel terug te vinden. Het artikel eindigt met een meer algemene beschouwing over het raakvlak van kunst en wiskunde en over de verschillende activiteiten van een wiskundige en een kunstenaar.

Viervlakskunst

Ik werd geïmponeerd door een enorme diversiteit van structuren, zoals in de *foto's 1-6*, waarin viervlakken aan elkaar grenzen, elkaar doordringen en overlappen in ritmische patronen, uitgevoerd met grote precisie in harde materialen van een forse omvang.

Naast foto's van kunstwerken trof ik in het fotoarchief ook tekeningen en vormoefeningen. Die intrigeerden me zeer.

Foto 7 en *foto 8* geven enig zicht op het wiskundige gereedschap dat gebruikt is voor objecten als in foto 1 en 2: aanzichten en stereometrische tekeningen. *Foto 9* laat zien hoe je twee paren van gelijkzijdige driehoeken als harmonica's kunt vouwen, en ze op elkaar laten passen. Daarmee werd bij Verbeek een eindeloos spel geboren leidend tot objecten als in foto's 5 en 6. *Foto 10* laat zien hoe je van een rechthoek een viervlak kunt vouwen. In *foto 11* treffen we het als fragiel kunstwerk van gaas aan.

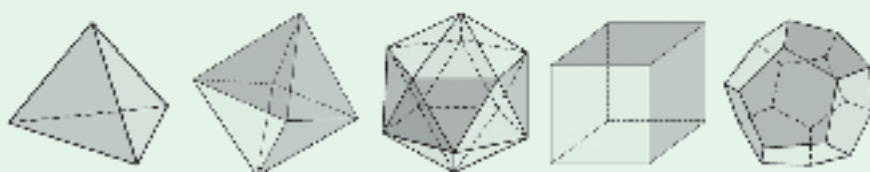
Hiermee werd voor mij het spel van een volgende paragraaf geboren.

Waarom het viervlak?

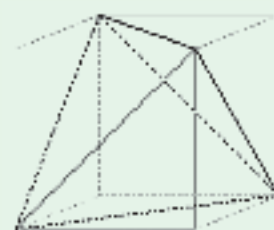
Het regelmatig viervlak (tetraëder) bestaat uit 4 gelijkzijdige driehoeken. Andere regelmatige veelvlakken zijn: 8-vlak (octaëder) en 20-vlak (icosaëder) met ook gelijkzijdige driehoeken, 6-vlak (hexaëder of kubus) met vierkanten en 12-vlak (dodecaëder) met regelmatige vijfhoeken (*zie figuur 1*).

Samen worden ze de *Platonische lichamen* genoemd, naar Plato, die ze in *Timaeus* noemt als de basis voor de structuur van het universum, waarbij ze respectievelijk vuur, lucht, water, aarde en de kosmos vertegenwoordigen. Ze vormen een basis voor wiskundige bestudering van ruimtelijke structuren (*zie [1]* voor een zeer toegankelijk boekje), en spelen ook een grote rol in bouwkunde en beeldende kunst. Zo koos beeldend kunstenaar Gerard Caris het regelmatig 12-vlak als uitgangspunt voor zijn oeuvre.

In het standaardwerk *Order in space, a design source book*^[2] geeft Keith Critchlow een systematische ordening van ruimtelijke structuren. Het viervlak neemt daar een bijzondere positie in ten opzichte van de andere vier. Kubus en 8-vlak horen bij elkaar, ze zijn 'dual': als je de middens van de zijvlakken van de ene figuur verbindt, krijg je de andere. Ze vormen samen via afsnijdingen en het doordringen van elkaar de basis voor een grote groep van halfregelmatige structuren. Dit geldt ook voor 12-vlak en 20-vlak. Het viervlak is



figuur 1 De Platonische lichamen: viervlak, achthoek, twintigvlak, kubus en twaalfvlak



figuur 2 Regelmatig viervlak in kubus



foto 1 Viervlaksstructuur 16

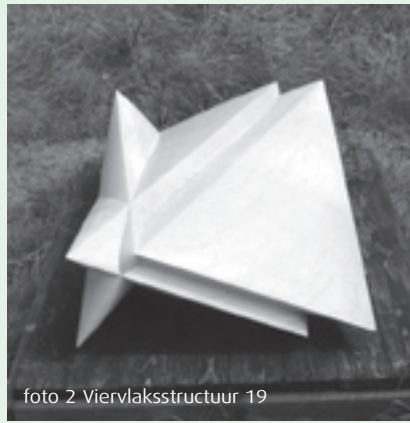


foto 2 Viervlaksstructuur 19



foto 3 Viervlak 2, kubus

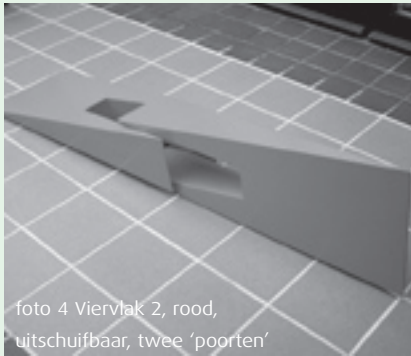


foto 4 Viervlak 2, rood,
uitschuifbaar, twee 'poorten'



foto 5 Viervlak 3, uitschuifbaar



foto 6 Viervlak 01, rood, uitschuifbaar



foto 7 Gebruik van aanzichten



foto 8 Gebruik van stereometrische tekeningen

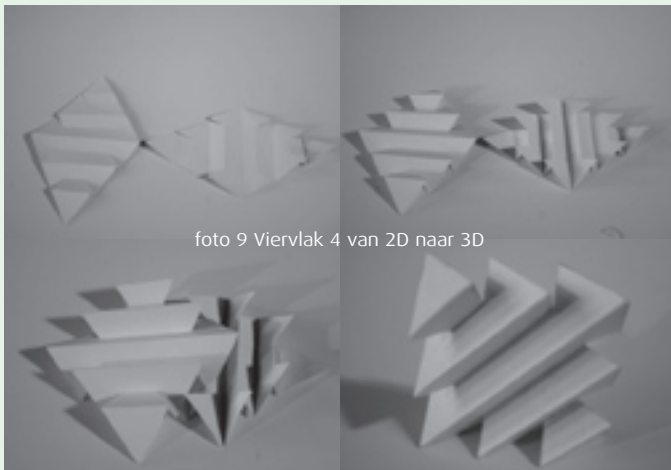


foto 9 Viervlak 4 van 2D naar 3D



foto 10 Van rechthoek naar viervlak

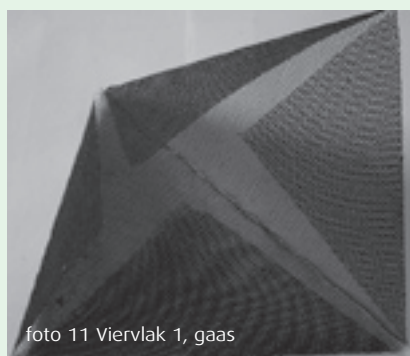


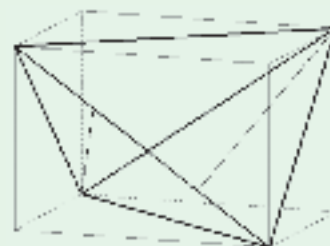
foto 11 Viervlak 1, gaas



figuur 3 Puntsymmetrisch viervlak in balk



figuur 4 Het vouwen van een A4-tje



figuur 5 V4-tje in een balk

duaal met zichzelf en in het periodieke systeem van Crichtlow neemt het een wat eenzame positie in. Dit wordt onder andere veroorzaakt door het ontbreken van evenwijdigheid van vlakken en van ribben, ook is de hoeveelheid symmetrie (symmetrievlakken, draaisymmetrie, ...) ten opzichte van de andere vier het meest beperkt. Visueel gezien brengt dit verrassing en onvoorspelbaarheid met zich mee. En ook wiskundig gezien is het viervlak door een gebrek aan visueel houvast een weerbarstige vorm om te analyseren. Door zijn eenvoud is het wel gemakkelijk te vervormen, bijvoorbeeld op te rekken of scheef te trekken – zonder een chaotisch beeld te geven – en daarmee is het een rijke bron van vormvariatie.

Greep op het viervlak: viervlak in een balk

Ondanks bovengenoemde eenzaamheid van het viervlak is er greep op het viervlak te krijgen door het te relateren aan kubus en balk; *zie figuur 2*. Zijvlaksdagonalen van een kubus vormen samen een regelmatig viervlak, en op vergelijkbare wijze vormen *in figuur 3* zijvlaksdagonalen van een balk een (minder regelmatig) viervlak. Daarmee is een grote diversiteit aan viervlaksvormen te realiseren. Ook zijn er viervlakken die zich niet via de diagonalen van een balk laten vangen; deze zien we niet in het werk van Henk Verbeek.

Hiermee hebben we greep op de viervlakken in het werk van Henk Verbeek: ze passen in een balk, er zijn drie paren even lange ribben, die elkaar overkruisen in tegenoverliggende vlakken. Met het vastleggen van één paar zijn ook de andere twee paren bepaald. De figuur is punt-symmetrisch ten opzichte van het middelpunt van de balk: als je een lijn van een willekeurig punt van het viervlak naar het middelpunt trekt en doortrekt, dan ligt op even grote afstand van het midden een tegenoverliggend punt van het viervlak. Hiermee samenhangend kun je ook zeggen, dat de figuur draai-

symmetrisch is: je kunt de figuur draaien over 180° om een as door de middens van tegenoverliggende zijvlakken van de balk. Puntsymmetrie en deze draaisymmetrie zijn veel minder zichtbare vormen van symmetrie dan spiegelsymmetrie ten opzichte van een vlak, of draaisymmetrie over een kleinere hoek. Kortom: in het viervlak is veel orde, maar ook verrassing.

Praktische opdrachten Ruimtemeetkunde

Het werk van Verbeek riep bij mij vele wiskundige vragen op. Ik heb ze bewerkt tot praktische opdrachten, te verdelen over groepjes studenten bij een cursus Ruimtemeetkunde. De vragen zijn in het vervolg cursief weergegeven. Ik geef er enige antwoorden bij. In grote lijnen is dan de vraag: toon dit aan. Verdere uitwerking laat ik hier aan de liefhebber.

1. Het V4-vouwblaadje

Bij mijn eerste ontmoeting met Henk Verbeek gaf hij mij een vouwblaadje (*zie figuur 4*) met de vraag of ik het kende. Neem een A4-tje, en vouw dat als *in figuur 4* en bouw er een viervlak van als *in foto 10*. In de weken daarna heb ik me vele vragen gesteld, en vele blaadjes gevouwen tot viervlakken (eventueel met plakbandjes vastgeplakt om ze in vorm te houden). Het onderstaande verhaal wordt meer leesbaar als u dat ook doet.

1.1. Alleen A4?

Is het voor bovenstaande vouwwerkje van een rechthoek tot het 3D-object, dat een viervlak genoemd wordt, noodzakelijk dat het blaadje het A4-formaat heeft?

Het A4-formaat is ontworpen bij paperschaarste in de 2e wereldoorlog. Het werd bepaald door de reeks rechthoeken A0, A1, A2, A3, A4, ... met de eigenschappen dat bij halvering van een rechthoek zonder papierverlies, de volgende maat ontstaat met dezelfde verhouding.



Het is niet moeilijk hiermee uit te rekenen dat de gevraagde verhouding $1:\sqrt{2}$ (ongeveer 1,41) is. Met het gegeven dat 1m^2 is gekozen voor A0, valt dan te berekenen dat A4 de oppervlakte $1/16\text{m}^2$ heeft, met breedte 21 cm en lengte 29,7 cm. Voor het gemak nemen we voor het vervolg de breedte van de rechthoek 1 en de lengte variëren we. Als je een rechthoek met een andere maat dan $1:\sqrt{2}$ neemt, blijkt het vouwwerkje ook te lukken. Wel krijg je dan viervlakken van andere vorm. Daarbij moet je binnen de grenzen blijven van een startrechthoek van 1:1 (dan blijft het object plat en vouw je een vierkant met de halve oppervlakte) tot 1:2 (eveneens plat, met een vierkant van 1:1).

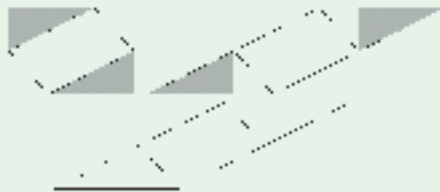
Ik heb het vouwblaadje in een aantal gezelschappen van wiskundigen getoond. Niemand kende dit fenomeen. Je zou het daarom met recht het Verbeeks-VierVlaks-Vouwblaadje, afgekort V4-tje, kunnen noemen.

Over de viervlakken bij de vouwblaadjes zijn nog vele vragen te stellen: over lengtes, (stand)hoeken, maten, hoogte, inhoud, ... Dit kun je voor een gekozen lengte en breedte uitvoeren. Voor meer resultaten is veralgemenisering efficiënter. Voor het rekengemak nemen we (voor het vouwblaadje) rechthoeken met breedte gelijk aan 1 en lengte L , en gebruiken we x ($= \frac{1}{2}L$) voor de halve lengte. *In figuur 5* is het V4-vouwblaadje in een balk geplaatst. Van de balk is de lengte l , breedte b en hoogte h . Ga na dat de lengte van de diagonalen van voor- en achtervlak gelijk aan 1 is.





figuur 6 Niet naar de middellijn vouwen



figuur 7 Van V4-tje naar nieuwe bouwplaat



figuur 8 Drie balken met viervlak

1.2. Wat zijn diverse maten van 3D-objecten bij V4-tjes?

a. Druk lengte, breedte en hoogte van de balk uit in x .

Antwoord: $l = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{(2x^2 - x)}$,
 $h = \sqrt{(1 - x)}$.

b. Wat is de hoogte van het viervlak en voor welke x vind je de grootste hoogte?

Antwoord: hoogte = $\sqrt{(-8x^2 + 12x - 4)}$ en deze is maximaal als $x = \frac{3}{4}$. Dus bij een vouwblaadje met verhouding breedte : lengte = 1 : 1,5.

c. Voor welke x heeft het viervlak de grootste inhoud?

Antwoord: $x = (9 \pm \sqrt{17})/16$

d. Voor welke x is er een loodrechte stand van zijvlakken?

Antwoord: Er zijn twee verschillende standhoeken, één ervan kan 90° worden;
 $\cos(\text{standhoek}) = \frac{3(x - \frac{2}{3})}{x}$
 De standhoek is gelijk aan 0° als $x = 1$, 180° als $x = \frac{1}{2}$ en de loodrechte stand vinden we als $x = \frac{2}{3}$, ofwel als de breedte van 1 in drie gelijke stukken wordt verdeeld.

e. Wat betekent dit voor het speciale blaadje met A4-formaat?

Antwoord: $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; maten van de balk (bij benadering) $l = 0,84$, $b = 0,54$, $h = 0,54$.
 Viervlaksribben hebben lengte 1 en 0,765. Zijvlakken zijn gelijkbenige driehoeken. Standhoek = $80,1^\circ$.

Bij het experimenteren met de vouwconstructie van het V4-tje blijkt dat er nooit een regelmatig viervlak, d.w.z. een viervlak met ribben die alle gelijk zijn, ontstaat.

1.3. Regelmatig viervlak?

Is er een vergelijkbare vouwwijze zó dat een regelmatig viervlak ontstaat?

Antwoord: Dit blijkt inderdaad te kunnen als je $L = \sqrt{3}$ (ongeveer 1,73) kiest, en niet de rechterbovenhoek naar de middellijn vouwt, maar voor afstand $y = \frac{1}{2}$ kiest (en niet $\frac{1}{2}L$). Dit wijst op een verdere veralgemenisering van het principe van het vouwblaadje: naast variatie van de lengte, kun je ook variëren via keuze van y naar hoe ver de rechterbovenhoek naar binnen gevouwen wordt.

1.4. Symmetrie van het algemene geval?

Bij verdere veralgemenisering bij variatie van x ($= \frac{1}{2}L$) en variatie van y : welke symmetrie blijft?

Antwoord: **Figuur 7** laat zien dat er door driehoeken van het vouwblaadje af te knippen en te verschuiven een bouwplaat met vier gelijke driehoeken ontstaat. Deze bouwplaat is puntsymmetrisch en deze symmetrie blijft gehandhaafd in de ruimtelijke vorm van het viervlak. Daarmee is de figuur dan toch weer meer grijpbaar dan op het eerste oog zichtbaar is.

2. Doordringing van drie viervlakken in een balk

In **foto 1** wordt ook de relatie van viervlakken en een balk zichtbaar; wel doordringen de viervlakken elkaar op bijzonder wijze: het gaat om drie groepen van herhaalde veelvlakken, die elkaar in het bovenvlak snijden onder hoeken van ongeveer 60 graden en in de zijvlakken van de balk paarsgewijs onder hoeken van ongeveer 90 graden. De vraag 'Hoe zit dit in elkaar?' roept de vraag op naar de samenhang tussen drie viervlakken die elk één groep vertegenwoordigen. **Figuur 8** geeft een beeld van een vertegenwoordiger van elke groep in een balk. De hoogte van de drie balken is gelijk, de lengte van de tweede balk en de diepte van de derde balk zijn gelijk aan die van de eerste. In **figuur 9** zijn de drie viervlakken in de eerste balk getekend. Nog niet is aangegeven hoe ze elkaar precies snijden en welke stukken zichtbaar zijn.

a. Welke maten heeft de eerste balk zodat er drie viervlakken in passen die elkaar in het bovenvlak snijden onder hoeken van 60° , en in de zijvlakken paarsgewijs onder 90° ?

Antwoord: hoogte 1, lengte en breedte elk $\sqrt{3}$.

b. Waar bevinden zich de lijnen van de drie veelvlakken in de zijvlakken van de balk? Wat zijn de afmetingen van elk van de viervlakken?

c. Maak een stereometrische tekening van het object van drie elkaar doordringende

viervlakken. Met name gaat het om het construeren van snijlijnen van vlakken. Gebruik drie kleuren om de zichtbare delen van de viervlakken weer te geven.

3. Samenstellingen van veelvlakken tot sterren.

Als je op wiskundesites zoals *Wolfram Mathworld* kijkt naar welke vragen wiskundigen stellen over viervlakken die elkaar doordringen, zie je vragen als: op welke symmetrische manieren kun je 2, 3, 4, 5, ... viervlakken elkaar laten doordringen. Een site als [3] geeft daar antwoord op met plaatjes als in **figuur 10** en gedeeltelijk berekeningen van vorm en afmetingen van vlakdelen.

a. Maak de doordringing van twee regelmatige viervlakken van karton. Ontwerp daartoe een bouwplaat uit één stuk.

Weten dat de twee viervlakken samen in één kubus passen is hiervoor niet zo relevant. Wel voor de volgende opdracht.

b. Maak de doordringing van vier regelmatige viervlakken.

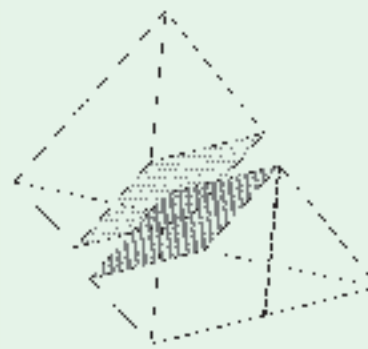
Dit is wel de meest gecompliceerde van alle hier opgenomen opdrachten. De vier viervlakken van deze 'ster' kun je geplaatst zien in twee kubussen die ten opzichte van elkaar verdraaid staan onder een hoek van 45° om een verticale lijn door het midden van onder- en bovenvlak. Als je weet op welke punten van de zijde van één viervlak de andere hem snijden, is de hoofdzak van het probleem opgelost. Als we voor het gemak kubussen met ribbe 1 kiezen, en dus viervlakken met ribbe $\sqrt{2}$, dan wordt elke ribbe (die niet in boven- of ondervlak ligt) gesneden op de helft en twee keer op een afstand van $\sqrt{2} - 1$ (ongeveer 0,41) vanaf beide hoekpunten. Alle vlakdelen van de bouwplaat worden bepaald door in één gelijkzijdige driehoek, met lengte van de zijde gelijk aan $\sqrt{2}$, genoemde punten op twee ribben en het midden van de andere ribbe met elkaar te verbinden. Dan blijft het bedenken van de bouwplaat nog een hele klus.



figuur 9 Doordringing van drie vier-
vlakken in de grootste balk



figuur 10 Tetrahedron 2-,
3- en 4-'compound'



figuur 11 Ontwerp een puzzel

4. Een viervlak doorsnijden

Bij het object **van foto 4** geeft het in en uit elkaar schuiven een bijzondere ruimtelijk beleving en levert een variatie aan kunstzinnige opstellingen.

a. *Maak het object van foto 4, bestaande uit twee gelijke stukken, van karton na.*

Dit wekt de associatie met puzzeltjes waarin een viervlak is verdeeld in deellichamen.

Als je een viervlak als **in figuur 11** recht doorsnijdt, krijgen zelfs sommigen hem niet meer in elkaar. Nog lastiger wordt het als de puzzel uit meer stukken bestaat.

b. *Verdeel beginnend met het dikgestreepte lijnstuk de twee puzzelstukken in een totaal van vier gelijke delen. Voer dit uit in karton.*

5. Gevarieerde opdrachten

a. *Een viervlaksgrapje – Maak van stevig materiaal een regelmatig viervlak, verpak het in cadeaupapier en plak het goed dicht. Laat daarbij één ribbe vrij, of snijd het papier daar weer open. Opgave: hoe krijg je het viervlak uit de verpakking zonder die verder te beschadigen? Je snapt: het kan op één of andere manier. Als het gelukt is, waarom kan het?*

Naar aanleiding **van foto 12** van Verbeek:

b. *Het verdelen en volstapelen van de ruimte – Kun je met regelmatige viervlakken de ruimte volstapelen?*

Antwoord: Het blijkt dat je met alleen viervlakken niet de ruimte op een regelmatige manier kunt vullen. Dit kan wel met viervlakken en achthoeken.

c. *Wat blijft er over als je van een regelmatig viervlak kleinere viervlakken afsnijdt?*

Antwoord: Als je van een viervlak de middens van de zijden verbindt, dan ontstaat door afsnijden van 4 kleinere viervlakken een regelmatig achthoek.

d. *Van viervlak tot harmonica – Maak het vouwwerkje **van foto 9** na van karton en plak in elkaar.*

e. *Maak een variatie hierop: niet in 5 'lagen' maar in 3, 7, 9, ... ? Niet vanuit gelijkzijdige driehoeken, maar vanuit andere driehoeken (gelijkbenig, niet gelijkbenig).*

Tot slot: over het raakvlak van kunst en wiskunde

In de voorgaande paragraaf zijn we hier en daar verwijderd geraakt van het werk van Verbeek. We keren nu terug. Bij Verbeek komt het nooit tot berekeningen, maar gaat het vooral om een vormenspel.

Bij vormen zoals in foto 1 waren niet de vragen zoals gesteld in praktische opdracht 2, maar de afmetingen van het blok steen het uitgangspunt voor een onderzoek naar een compositie van viervlakken. Daarbij was de vraag voor de kunstenaar: het vinden van een spannend evenwicht tussen eenvoud en complexiteit en tussen orde en chaos. Vergelijkbare opmerkingen zijn te maken voor het andere werk.

Aspecten van het raakvlak van wiskunde en kunst (zie ook [4]) zijn:

- een kunstwerk is geconstrueerd met gebruik van wiskunde als een gereedschap;
- een kunstwerk verbeeldt een wiskundig idee;
- een kunstwerk zet aan tot denken: hoe zit het in elkaar?
- een kunstwerk zet aan tot het zoeken naar regelmaat of tot wiskundig verder denken.

Deze aspecten herkennen we in het werk van Henk Verbeek. Zowel in de wiskunde als in de kunst verstaan we onder handelingen met vormen: variëren, doorsnijden, afsnijden, doordringen, herhalen,... Een kunstenaar heeft groot ruimtelijk inzicht nodig om dergelijk werk te kunnen maken. Het wiskundig gereedschap blijft beperkt tot het maken van aanzichten en stereometrische tekeningen. Er wordt weinig gerekend en formulewerk is niet aan de orde.

Wat kan een wiskundige doen met het werk van Henk Verbeek? Hij gaat ermee aan de slag en laat het werk veel wiskundige activiteit oproepen. Jezelf wiskundige vragen stellen is (naast het bestuderen van het kant en klare bouwwerk dat andere wiskundigen al maakten) de kern van de

dan de kunstenaar: de wiskundige zal eerder symmetrische vormen zoeken en daarin regelmaat in mogelijke varianten opsporen, soorten van symmetrie onderzoeken en daarin ordening proberen aan te brengen. Niettemin ontmoeten kunstenaar en wiskundige elkaar geregeld in deze wereld. De kunstenaar creëert daarbij verrassing in de orde. De wiskundige laat zich graag verrassen, en probeert dan in de verrassing de orde te vinden.

Noot (red.)

Omdat het museum wegens renovatie gesloten is, vindt de expositie met als titel 'Schoonheid en schone schijn' plaats in de kruisgang van het voormalig Kartuizerklooster, Swalmerstraat 100, 6041 CZ Roermond.

Literatuur

- [1] Martin Kindt, Peter Boon (2001): *De Veelzijdigheid van Bollen*, Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- [2] Keith Critchlow (1969): *Order in space, a design source book*. Londen: Thames & Hudson.
- [3] <http://mathworld.wolfram.com/topics/Tetrahedra.html>
- [4] Bruno Ernst, Ton Konings (2008): *Kunst en Wiskunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Over de auteur

Ton Konings is docent aan afdeling wiskunde van de tweedegraads lerarenopleiding ILS-HAN, Nijmegen. E-mailadres: ton.konings@han.nl

Decanteerproblemen in een Heraklesweek

[Hans Schipper]

De Heraklesweek

Mijn school, het Baudartius College in Zutphen, organiseert al enkele jaren in de herfst voor de tweede klassen gymnasium een *Heraklesweek*. Vakoverstijgend wordt dan met diverse werkvormen de mythologie van Herakles belicht.

Herakles trouwde met Megara en kreeg met haar twee zonen. Door toedoen van Hera werd hij op een dag door waanzin getroffen en vermoordde zijn vrouw en kinderen. Om zichzelf te redden van de wraakgodinnen moest hij in dienst treden van koning Eurystheus van Mycene en alle taken verrichten die hij opgedragen kreeg. In opdracht van Eurystheus moest Herakles tien onmenselijk zware werken verrichten. Omdat hij bij één van die werken (het doden van de Hydra) hulp had gekregen van iemand anders, en voor een ander werk (het schoonmaken van de Augiasstal) betaald werd, moest hij nog twee extra werken verrichten.

We gebruiken het thema van de twaalf werken als kapstok: op twee dagen worden de leerlingen, in groepjes van tien, gesteld voor twaalf uitdagingen. Niet het wurgen van een veelkoppige waterslang of het vangen van een hinde met gouden horens en bronzen hoeven, niet het verschalken van een zwijn, noch het weerstaan van een reus met drie hoofden, drie bovenlijven en zes armen hebben dan de aandacht, maar wel uitdagingen van taalkundige, wiskundige, aardrijkskundige, mentale of sportieve aard. De Augiasstal moet wel geveegd, aan het einde van de dag.

Wiskundige uitdagingen

In dit artikel wil ik het vooral over een van de wiskundige uitdagingen hebben. Om de lezer een beeld te geven van het karakter van de andere problemen die de leerlingen tegenkomen, noem ik er een paar. De aardrijkskundige uitdaging behelst een plaatsnamenspel. De mentale uitdaging is het met een groep van tien leerlingen opbouwen van een reusachtige buizentent. De sportieve uitdagingen bestaan uit bunkertrefbal en een spel met blokken,

waarin twee teams tegen elkaar door hechte samenwerking zo snel mogelijk een stapel blokken van de ene kant van de gymnastiekzaal naar de andere kant moeten brengen. Geloof me: dat valt niet mee!

En dan zijn er vier wiskundige uitdagingen: één komt uit de cryptologie, één is gebaseerd op een Kangoeroewedstrijd, één bestaat uit het maken van sudoku's in allerlei soorten en maten, en de vierde wordt gevormd door een twintigtal 'giet- en verdeelproblemen'. Toen ik mij enkele jaren geleden gesteld zag voor de uitdaging de wiskundige onderdelen te bedenken, ben ik onder andere op het internet gaan speuren. Daar stuitte ik op de site www.creatievpuzzels.com met giet- en verdeelpuzzels.

Op de homepage klikt men op *Rekenpuzzels* en daar aangeland (onderaan) op *Gieten en Verdelen*. Urenlang puzzelplezier ontvouwt zich.

Gestart wordt met het oerprobleem op dit gebied dat volgens Jorge L. Ramirez Alfonsin in zijn boek *The Diophantine Frobenius Problem* bij de zestiende-eeuwse Italiaanse wiskundige Tartaglia vandaan komt. Tartaglia (*zie figuur 1*) is wereldberoemd geworden met zijn oplossing van de derdegraads vergelijking die volgens hem gestolen werd door Cardano. Over de verwickelingen die daarop volgden, zou een opera geschreven kunnen worden. Maar dat is een ander verhaal; terug naar de site. Ik citeer:

'Je hebt drie containers. Een acht liter container is vol water. Een drie liter container en een vijf liter container zijn leeg. Verdeel het water in twee gelijke delen, zonder gebruik te maken van andere containers.'

Met een druk op de knop ziet men de oplossing.

Het voorbeeld staat ook in het onvolprezen boek van Fred. Schuh: *Wonderlijke problemen, leerzaam tijdverdrijf door puzzel en spel*. Hij schrijft:

'Men heeft drie maten van 8, 5 en 3 liter. De grootste maat is geheel met wijn (!) gevuld, de twee andere maten zijn leeg. Door overgieten wil men bereiken dat de



figuur 1 Nicolò Tartaglia (1499-1557)

wijn in twee gelijke delen verdeeld wordt (waarbij dus de kleinste maat leeg is).

De maten zijn niet verdeeld, zodat men niet anders kan doen dan wijn van de ene maat naar de andere gieten totdat de eerste helemaal leeg of de tweede helemaal vol is. We nemen aan, dat het overgieten nauwkeurig kan plaatsvinden en dat dus niet gemorst wordt. Gevraagd wordt naar het kleinste aantal overgietingen, waarin het doel bereikt wordt.'

De uitwerking noteert Schuh in een diagram, waarbij hij en passant een tweede oplossing zet [lees bijvoorbeeld 800 als 8, 0, 0; red.]:

$$800 \begin{bmatrix} -350 - 323 - 620 - 602 - 152 - 143 - 440 \\ -503 - 530 - 233 - 251 - 701 - 710 - 413 - 440 \end{bmatrix}$$

In een Amerikaanse uitgave van het boek, dat ooit is uitgebracht door uitgeverij Dover Publications, wordt 'overgietpuzzles' vertaald met 'decanting problems'. De associatie met wijn is dan snel gemaakt. 'Decanteren' wordt immers meestal gebruikt in de betekenis 'het overgieten van wijn vanuit een fles naar een karaf, zodat de droesem in de fles achterblijft'. Ik vind 'decanteerproblemen' veel mooier dan 'gieten en verdelen' problemen of 'overgietpuzzels'. Vandaar de titel, en vanaf nu zal ik 'decanteerproblemen' blijven gebruiken.

Decanteerproblemen

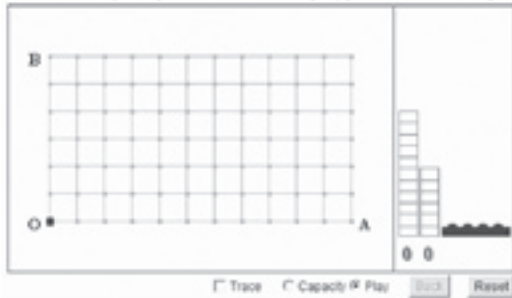
Toen ik het onderwerp decanteerproblemen voor het eerst als uitdaging in de Heraklesweek had ondergebracht, was ik zo gelukkig zelf het spel te mogen begeleiden. Met een lijst goede oplossingen stiekem in het borst-

2 Pails Puzzle

A farm hand was sent to a nearby pond to fetch 8 gallons of water. He was given two pails - one 11, the other 6 gallons. How can he measure the requested amount of water?

(Two containers and a pond are depicted in the right-hand side of the applet. To pour water, first click on the "source" and then on the "receiver" object.

The grid in the left-hand side of the applet is to help you *solve* the problem. $A = 11$ and $B = 6$. Every possible distribution of water in the two pails is described by a grid point (x, y) , where x stands for the quantity of water in the first pail, y that in the second.)



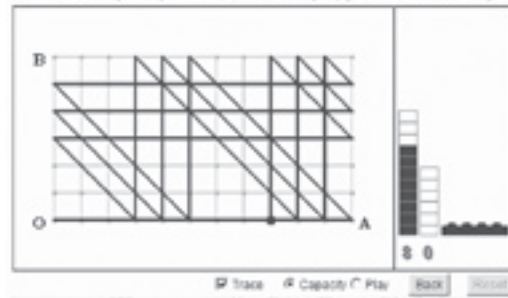
figuur 2

2 Pails Puzzle

A farm hand was sent to a nearby pond to fetch 8 gallons of water. He was given two pails - one 11, the other 6 gallons. How can he measure the requested amount of water?

(Two containers and a pond are depicted in the right-hand side of the applet. To pour water, first click on the "source" and then on the "receiver" object.

The grid in the left-hand side of the applet is to help you *solve* the problem. $A = 11$ and $B = 6$. Every possible distribution of water in the two pails is described by a grid point (x, y) , where x stands for the quantity of water in the first pail, y that in the second.)



figuur 3

zakje, om snel na te kunnen kijken, ontving ik de eerste groep. Ik gaf een korte toelichting en adviseerde een tabel te gebruiken. Nee, er was geen uitgewerkt voorbeeld. Die had Herakles in zijn tijd ook niet, ja toch? Men verviel in een afwachtende stilte die minuten lang duurde. Toen zei iemand: 'Weet ik veel.' Daarmee was de toon gezet en leek het lot over de puzzel beslist. Omdat, door gebrek aan menskracht, ik tegelijkertijd ook nog een andere uitdaging moest begeleiden, kwam ik er pas even later weer aangezeld om suggesties aan te reiken en opmerkingen te plaatsen van opmonterende aard. Schoorvoetend werd er wat gepuzzeld, maar de *flow* kwam er niet echt in.

De tweede groep bracht de zonneschijn waaraan ik na deze regenbui zo toe was. Na dezelfde korte uitleg nam Lotte, één van mijn beste leerlingen, het voortouw en loste in een mum van tijd het makkelijkste decanteerprobleem op, waarna ze de overige verdeelde onder de leden van de groep met de uitroep: 'En nu even tegen elkaar.' Een fanatiek werken was het gevolg (zie foto 1), waardoor van de dertig aangereikte problemen er zeker vijftien werden opgelost. De volgende vier groepen vertoonden gedragingen die tussen de uitersten van de eerste twee lagen. Er was steeds, in mindere of meerdere mate, sprake van samenwerken en taken verdelen onder leiding van iemand die zichzelf ter plekke tot manager benoemde.

Na die try-out heb ik een en ander gestroomlijnd. De opgaven zijn nu met een keurige lay-out in een map verzameld en de begeleider wordt gevraagd enkele problemen voor te bespreken aan de hand van een bijgeleverde tekst. De leerlingen krijgen bovendien enkele papieren met lege tabellen, bij wijze van stappenplan. Dit schooljaar ben ik in dit spel geen begeleider en maak ik van de gelegenheid gebruik om te observeren. Van tevoren heb ik me daar al op verheugd, want het

observeren van de manier waarop leerlingen gezamenlijk tot een oplossing komen, is altijd interessant.

Mijn collega, Jan de Geus, die de uitdaging begeleidt, begint de sessie met een kort voorbeeld uit een film die ik straks nog zal noemen. Dan komt er een perfect gecoacht onderwijsleergesprek over het decanteerprobleem met kannen van 8, 5 en 3 liter, waarbij het doel is twee keer vier liter over te houden.

Nadat bij wijze van inleiding de reeks $(8,0,0) - (5,0,3) - (5,3,0) - (2,3,3)$ op het bord is verschenen, zegt Isabel: 'Ja, dan doe je dus die van twee door de helft en dat doe je dan bij die twee drieën en dan heb je twee keer vier.'

Op deze zo welkome fout reageert Jan de Geus met: 'Door de helft, hoe doe je dat?

Er staan immers geen maatstreepjes op!'

'Ik geloof dat ik het begin te begrijpen', roept Arnold. Maar daarna blijft hij stil.

De leraar: 'De twee bij de eerste drie gooien kan wel, maar heeft geen zin: Je hebt dan de twee kleine kannen vol en wat moet je dan? Eén van de drieën teruggooien bij de grootste brengt ons weer terug bij een vroegere situatie, dat schiet niet op. Wat blijft er over?'

Isabel: 'De tweede drie bij de eerste drie gooien.'

De leraar: 'Dat geeft dus $(2,5,1)$.'

Andere leerling: 'Dat geeft nog steeds geen vier.'

De leraar: 'Welke stappen zijn mogelijk?'

Isabel: 'De twee bij de een.'



foto 1

Ander: 'Dan heb je de twee kannen van vijf en drie vol. Dat had je in het begin net zo goed meteen kunnen doen.'

Leraar: 'Wat ook kan is de een bij de twee. Dan heb je weer drie en vijf. Die hadden we al eerder, dus dat ligt niet zo voor de hand. Zullen we de vijf bij de twee maar eens proberen?'

Arnold: 'Dat geeft $(7,0,1)$.'

Leraar: 'Juist. Hoe nu verder? De zeven naar de een heeft geen zin. Dan heb je weer $(5,0,3)$. De zeven naar de nul levert weer $(2,5,1)$. We kunnen wel de derde kan naar de tweede (gedeeltelijk) overgieten. Dus dat wordt $(7,1,0)$. We zijn er bijna.'

Er volgt een stilte.

'De zeven naar de nul', klinkt het.

Dan prijkt er $(4,1,3)$ op het bord en daarna $(4,4,0)$.

Klaar!

'Moeten wij dat nou zelf kunnen?', zucht er een.

Maar Annejet verklaart, met een blik in de ogen die op aanvallen staat: 'Dit wil ik gewoon snappen!' En ze grijpt naar het pakketje met opdrachten.

In de film *Die Hard: With a Vengeance* wordt een twee-kannen-versie gebruikt. De helden John McClane en Zeus Carver, (gespeeld door Bruce Willis en Samuel L. Jackson) worden voor het probleem geplaatst om met het water uit een (onuitputtelijke) bron en met behulp van twee emmers van achtereenvolgens 5 gallon en 3 gallon precies 4 gallon water af te passen. Het exploderen van een bom kan alleen



foto 2

worden voorkomen door er precies 4 gallon water overheen te gooien. Dat moet ook nog binnen dertig seconden, maar John en Zeus weten van wanten. Het zal niemand verbazen dat ze erin slagen het probleem op te lossen. Terwijl ze – schijnbaar achte-loos – het nerveus voorttikken van de bom negeren, volgen ze het schema:

Liters (3, 5, 8)		
1.	8 to 5	(0, 5, 3)
2.	5 to 3	(3, 2, 3)
3.	3 to 8	(0, 2, 6)
4.	5 to 3	(2, 0, 6)
5.	8 to 5	(2, 5, 1)
6.	5 to 3	(3, 4, 1)
7.	3 to 8	(0, 4, 4)

De mentale en fysieke uitputting is *van foto 2* af te lezen. Wiskundepuzzels zijn niet voor watjes!

Interessante wiskunde

Als de tweedeklassers met trial, error en een beetje nadenken een flink aantal van deze problemen aankunnen, ben ik allang tevreden. Er is veel interessante wiskunde bij te bedenken, die dan – jammer genoeg – onbesproken blijft.

Op de machtig leuke site www.cut-the-knot.org staat een applet waarmee de oplossing van het twee-kannen-probleem, in het geval de inhouden 11 en 6 bedragen, door middel van een grafiek kan worden gevisualiseerd. Het probleem heet dan *Two pails puzzle* en voor de verandering speelt het zich af in agrarische sferen (zie *figuur 2*; bron: www.cut-the-knot.org/ctk/Water.shtml). Met beurtelings klikken op de kolommen en het golfje, dat als onuitputtelijke bron fungeert, lukt het de gevraagde hoeveelheid af te passen. Vinkt men *Trace* aan, dan wordt in het rooster het pad getekend dat naar de oplossing leidt. Je krijgt dan iets als *in figuur 3*.

Goed kijken naar onderstaande tabel levert de volgende observaties:

	Kan A	Kan B
Capaciteit	11	6
Start	0	0
Stap 1	11	0
Stap 2	5	6
Stap 3	5	0
Stap 4	0	5
Stap 5	11	5
Stap 6	10	6
Stap 7	10	0
Stap 8	4	6
Stap 9	4	0
Stap 10	0	4
Stap 11	11	4
Stap 12	9	6
Stap 13	9	0
Stap 14	3	6
Stap 15	3	0
Stap 16	0	3
Stap 17	11	3
Stap 18	8	6
Stap 19	8	0

- Stap 1 (11 gallon), stap 7 (10 gallon), stap 13 (9 gallon), stap 19 (8 gallon) geven het langzaam dalen van de inhoud van Kan A weer.
 - Iedere 6 stappen daalt het vloeistof niveau in Kan A met 1.
 - Dan lijkt het er toch op dat in Kan A ieder gewenst eindstadium 1 tot en met 11 gallon kan worden bereikt met geduldig overgieten volgens dit schema!
- Deze vaststelling motiveert om nóg eens een voorbeeld (met inhoud $A = 17$ en $B = 6$) te bekijken:

	Kan A	Kan B
Capaciteit	17	6
Start	0	0
Stap 1	17	0
Stap 2	11	6
Stap 3	11	0
Stap 4	5	6
Stap 5	5	0
Stap 6	0	5
Stap 7	17	5
Stap 8	16	6
Stap 9	16	0
Stap 10	10	6
Stap 11	10	0
Stap 12	4	6
Stap 13	4	0
Stap 14	0	4
Stap 15	17	4
Stap 16	15	6
Stap 17	15	0
Stap 18	9	6
Stap 19	9	0
Stap 20	3	6
Stap 21	3	0
Stap 22	0	3
Stap 23	17	3
Stap 24	14	6
Stap 25	14	0
Stap 26	8	6
Stap 27	8	0
Stap 28	2	6
Stap 29	2	0
Stap 30	0	2
Stap 31	17	2
Stap 32	13	6
Stap 33	13	0

Na enkele van dit soort uitwerkingen kan men tot de volgende stelling komen:

Stelling. *Als zijn gegeven een onuitputtelijke waterbron en twee kannen met inhouden A en B (in hele liters), waarbij A en B onderling priem zijn en $A > B$ is, dan kan iedere hoeveelheid Q (in hele liters) met $0 \leq Q \leq A$ worden afgemeten.*

Geïnspireerd door een bewijs voor het drie-kannen-probleem op www.cut-the-knot.org zou ik me hier willen wagen aan een bewijs van de hierboven vermelde stelling. Begin met $(0, 0)$ en schep dan A vol uit de onuitputtelijke bron. Dat geeft $(A, 0)$. Schenk met behulp van A de kleinste kan vol. Dat geeft $(A - B, B)$.

Giet de kleinste leeg; resultaat: $(A - B, 0)$. Herhaal dit proces: $(A - 2B, B)$ en daarna $(A - 2B, 0)$.

Herhaal dit proces q_1 maal totdat $0 < A - q_1 B < B$. Dat kan omdat A en B onderling priem zijn. Dit geeft $(A - q_1 B, 0)$

en daarna $(0, A - q_1 B)$.

Giet vervolgens de grootste kan weer vol: $(A, A - q_1 B)$, en dan weer uit de grootste naar de kleinste: $(A - (B - (A - q_1 B)), B)$. Dit is hetzelfde als: $(2A - B - q_1 B, B)$.

Na het leeggieten van B levert dat op: $(2A - B - q_1 B, 0)$, wat overeenkomt met: $(2A - (q_1 + 1)B, 0)$.

Omdat $A - q_1 B < B$ geldt:

$$2A - (q_1 + 1)B = A - q_1 B + A - B < B + A - B = A$$

Dus in de grootste zit nu een geheel aantal liters minder. We gaan verder en schenken de tweede kan weer vol:

$$(2A - (q_1 + 1)B - B, B),$$

dus

$$(2A - (q_1 + 2)B, B).$$

Giet de kleine weer leeg:

$$(2A - (q_1 + 2)B, 0).$$

Herhaal dit proces q_2 keer, totdat:

$$2A - (q_1 + 1)B - q_2 B < B$$

Dit geeft $(2A - (q_1 + 1)B - q_2 B, B)$ en dus

$$(2A - (q_1 + 1)B - q_2 B, 0) \text{ en daarna:}$$

$$(0, 2A - (q_1 + 1)B - q_2 B)$$

Daarna de grootste weer vol:

$$(A, 2A - (q_1 + 1)B - q_2 B), \text{ en dan}$$

weer van de grootste naar de kleinste:

$$(A - (B - (2A - (q_1 + 1)B - q_2 B)), B).$$

Dit is hetzelfde als: $(3A - (q_1 + q_2 + 2)B, B)$.

Omdat:

$$3A - (q_1 + q_2 + 2)B = A + 2A - (q_1 + 1)B - q_2 B - B < A + B - B = A$$

zit er in de grootste nu een geheel aantal liters minder dan in het begin. En niet evenveel als bij $2A - (q_1 + 1)B$, want:

$$3A - (q_1 + q_2 + 2)B = (2A - (q_1 + 1)B) + (A - (q_2 + 1)B)$$

En $A - (q_2 + 1)B$ is niet gelijk aan 0, omdat A en B relatief priem zijn.

Dit proces kan men A keer herhalen en steeds levert dit volumina op die kleiner zijn dan A en onderling ongelijk.

Te bewijzen is nu voor willekeurige $n < A$: na de $(n + 1)$ ste uitvoering van deze procedure zit in de grootste kan minder dan A .

Nu is:

$$(n + 1)A - (q_1 + q_2 + \dots + q_n + n)B = A + nA - (q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} + 1)B - q_n B - B < A + B - B = A$$

Bovendien zijn de volumina verschillend; immers, voor $j = 1, 2, 3, \dots, A$ geldt:

$$(n + 1)A - (q_1 + q_2 + \dots + q_n + n)B = (nA - (q_1 + q_2 + \dots + q_j + j - 1)B) + (A - (q_{j+1} + \dots + q_n + n - j + 1)B)$$

En de laatste term is weer niet gelijk aan 0 omdat A en B relatief priem zijn.

Op het gevaar af dat het bewijs wellicht nog een zekere strengheid mist, geloof ik nu wel dat herhaald uitvoeren van de procedure volumina in de grootste karaf oplevert met waarden: $1, 2, 3, 4, \dots, A$.

Besluit

In Amerikaanse literatuur is veel over decanteerproblemen te vinden. Zo komen bij het drie-kannen-probleem barycentrische coördinaten om de hoek kijken en wordt bij bewijzen modulo-rekenen ingezet. Ook wordt wel Excel gebruikt om een en ander zichtbaar te maken. Wiskunde om van te smullen!

Men kan decanteerproblemen behandelen op puzzelniveau, maar er kan ook worden uitgebreid naar stevige wiskunde. Volgens een verhaal in *Mathematics and the Imagination* van E. Kasner and J. Newman, heeft de grote wiskundige Siméon Denis Poisson (1781-1840) zijn interesse in de wiskunde te danken aan een toevallig onder ogen krijgen van een decanteerprobleem. Wie weet hoever Annejet ('Dit wil ik gewoon snappen.') nog komt.

Met dank aan Jan de Geus.

Literatuur

- *Gieten en verdelen, te downloaden op: www.creatieepuzzels.com/spell/spell1/spell2/water.htm* (geraadpleegd op 28 oktober 2009).
- Jorge L. Ramirez Alfonsin (2005): *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford: Oxford University Press.
- Dr. Fred. Schuh (1943): *Wonderlijke problemen, leerzaam tijdverdrijf door puzzel en spel*. Zutphen: W.J. Thieme & Cie.
- John McTiernan (1995): *Die Hard: With a Vengeance* (film). New York: Cinergi Pictures Entertainment Inc.
- Bonnie Averbach, Orin Chein (2000): *Problem Solving Through Recreational Mathematics*. New York: Dover Publications.
- Alex Bogomolny (2000): *The Three Jugs Problem*. Te downloaden op: www.cut-the-knot.org/ctk/Water.shtml (geraadpleegd op 28 oktober 2009).
- H.S.M. Coxeter, S. L. Greitzer (1967):

Geometry revisited. Washington: The Mathematical Association of America.

Meer over decanteerproblemen:

- www.cut-the-knot.org/water.shtml (geraadpleegd op 28 oktober 2009).

Lijst met URL's

- Tartaglia: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tartaglia-Opere-portrait.jpg>
- Antwoord van het eerste giet-en-verdeel-probleem via: www.creatieepuzzels.com/spell/spell1/framed.htm
- Bruce Willis: <http://i30.tinypic.com/fureic.jpg>
- The two pails problem: www.cut-the-knot.org/ctk/CartWater.shtml
- Het bewijs voor het drie-kannen-probleem: www.cut-the-knot.org/ctk/Water.shtml

Over de auteur

Hans Schipper is wiskundeleraar aan het Baudartius College te Zutphen.

E-mailadres: h.schipper@baudartius.nl

APS-Exact

Ook in het voorjaar van 2010 organiseert APS-Exact diverse **cursussen** en **studiedagen**.

Woensdag 12 mei 2010

Dinsdag 18 mei 2010

Dinsdag 25 mei 2010

Vrijdag 28 mei 2010

Maandag 31 mei 2010

Vrijdag 11 juni 2010

Vrijdag 18 juni 2010

studiedag 'Arrangeren van rekenmaterialen'

start cursus 'Zwakke rekenaars sterker maken'

studiemiddag 'Rekenbeleid bij u op school'

studiemiddag 'Rekenen, van po naar vo'

studiemiddag 'Schoolvisie op rekenen ontwikkelen en formuleren'

studiemiddag 'Rekenproblemen'

studiemiddag 'Hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles'

U kunt zich aanmelden via onze site www.aps.nl/exact > Activiteitenagenda

Bel of schrijf voor meer informatie:

APS-Exact, Postbus 85475, 3508 AL UTRECHT

telefoon: 030 – 28 56 722, fax: 030 – 28 56 777, e-mail: voortgezetonderwijs@aps.nl, url: www.aps.nl/exact

Honderd jaar Van Hiele

ZIJN DE DENKNIVEAUS OP STERVEN NA DOOD OF SPRINGLEVEND?

[Harrie Broekman, Nellie Verhoef]

Op de valreep van het jaar 2009 is op de Universiteit Twente de honderdste verjaardag van Pierre van Hiele gevierd in de namiddag van 10 december. Pierre van Hiele, de man die je niet zomaar vergeet, één van de grondleggers van het wiskundig denken en een schakel tussen fenomenologie en epistemologie, werd op 4 mei 2009 honderd jaar. Harrie Broekman heeft hem goed gekend en herdacht zijn leermeester en collega met tal van unieke persoonlijke herinneringen. Nellie Verhoef ging vervolgens in op zijn gedachtegoed en de bruikbaarheid daarvan in het wiskundeonderwijs. Rainer Kaenders sloot de rij door een relatie te leggen tussen het 'wiskundig besef' en de niveautheorie van Van Hiele. Het bonte gezelschap in de zaal bestond uit studenten van de lerarenopleiding, geïnteresseerde – vooral wat oudere – wiskundedocenten, en twee oud-leerlingen van Pierre. In dit artikel hebben Harrie Broekman en Nellie Verhoef hun voordrachten verwerkt om ook op papier de 100e verjaardag van Pierre van Hiele te gedenken.

Pierre van Hiele, een man die je niet zomaar vergeet

Harrie Broekman gebruikte als titel voor zijn presentatie: 'De mens, de leraar-onderzoeker, zoals ik hem heb leren kennen'. Broekman putte uit persoonlijke herinneringen. Kort voor het symposium sprak hij nog met van Hiele en diens dochter Marian en haalden ze herinneringen op over datgene wat ze vaak samen bediscussieerd hadden: lesgeven, onderzoek doen naar eigen lesgeven, lesmateriaal maken, wiskundeonderwijs verbeteren door observeren en nadenken, foto's en fotograferen.



foto 1 Pierre met fototoestel

Van Hiele is – met zijn honderd jaar – fragiel, maar nog steeds trots op zijn eigen werk, op het werk van zijn vrouw Dieke en van zijn dochter Wiesje, die hun werk gedeeltelijk voortzet in Nieuw-Zeeland. Hij wenste ons dan ook een 'goed' symposium; hijzelf kon er helaas niet bij zijn: 'Praten jullie maar over mijn didactiek; nou ja, eigenlijk over die van Dieke en mij'.

De leraar 'Mijnheer van Hiele'

Harrie Broekman gaf als beginnend student bijlessen. In zijn voordracht vertelt hij daarover:

Na te zijn benaderd door de ouders van één van Van Hiele's leerlingen, besloot ik hem te bellen en mocht ik langskomen om over die bijlessen te praten. Dat verliep anders dan ik verwachtte; ik kwam niet verder dan de voortuin van zijn huis in Bilthoven en kreeg toen mijn 'eerste didactische pak slaag'. Bijles aan een leerling van de wiskunde-leraar Mijnheer van Hiele:

- Hoe haalde ik als student het in mijn hoofd om een leerling van hem geen kans te geven fatsoenlijk wiskunde te leren?
- Wist ik wel dat leren tijd vergt en niet even in een uurtje bijles...
- En heb je wel eens bedacht dat ... leerlingen moeten leren praten, zichzelf vragen leren stellen, je moet ze helpen te zien wat ze aan het doen zijn, ze iets geven waar ze plezier aan kunnen beleven, ...
- Om vooral niet te vergeten dat ...je hun geest niet kunt kneden, alleen helpen...

Uiteraard zijn dit herinneringen; in die tijd was ik alleen maar overdonderd en het duurde nog een hele tijd voor ik met hem over al dit soort zaken kon praten. Pas nadat we aan de praat geraakt waren, ging ik ook eens op zoek naar literatuur van zijn hand en begon – als beginnend leraar – met nummers van *Euclides*, zoals een nummer uit 54/55, waaruit het volgende citaat: 'Noodzakelijk is, dat men de kinderen liefde voor de wiskunde bijbrengt. Daarin kan men slagen, als men hen eerst de vreugde van het maken van mooie dingen met behulp van wiskunde laat beleven en hen er dan gaandeweg toe brengt ook de beknoptheid en duidelijkheid van de wiskundige bewijsvoering te waarderen'.

En enige jaren later, in 1959:

'De gedachte, die aan al mijn voordrachten van de laatste jaren ten grondslag ligt, is, dat er een discussie mogelijk is over het lesgeven, anders dan op basis van intuïtie.' Dit nam niet weg dat hij zelf moeite had met leraren die wilden discussiëren in plaats van luisteren, (bijvoorbeeld bij de COCMA-cursussen). Gelukkig kon hij flink knokken als hij er een zin in zag. Dat betrof zijn knokken voor leerlingen in wie hij iets zag, maar ook voor jongere collega's. Mijn aanstelling als zijn opvolger bij de COCMA-cursussen werd 40 jaar geleden tegengewerkt door de toenmalige inspecteur, maar Pierre en de cursusleider De Jongh hielden vol. Achteraf vertelde hij dat dit goed was voor een jonge docent; door een stukje opleiding te verzorgen voor anderen werd je gedwongen na te denken over onderwijs en daarover te praten. 'Dat was net zo iets als lesgeven en dat eigen lesgeven onderzoeken'. Zijn idee dat iedere leraar zijn eigen onderwijs activiteiten zou moeten onderzoeken, was niet voor niets een afspiegeling van zijn eigen professionele leven.

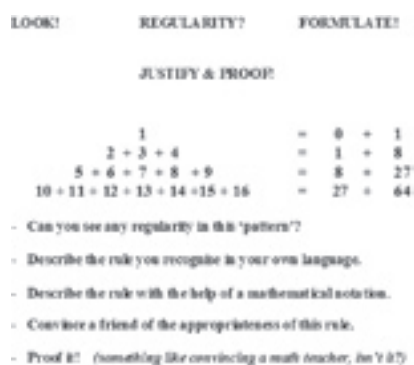
Promoties, gebaseerd op de onderwijspraktijk

De dubbelpromotie (1957) van Pierre van Hiele en zijn vrouw Dieke van Hiele-Geldof op hun gezamenlijk proefschrift *De ontwikkeling van het inzicht* is een belevenis geweest voor velen, niet alleen omdat het

een belangrijk moment was voor de verdere didactische ontwikkeling in ons land (de praktijk van het lesgeven hand in hand met de theorie ontwikkeling) maar tevens door een – voor die tijd – hilarisch moment. Er werd namelijk – tegen de toenmalige gewoonte in – uit de zaal een vraag gesteld. Het antwoord van Pierre was even duidelijk als verhelderend: ‘Dat is de domste opmerking die ik tot nu gehoord heb.’ Achteraf gezien typeert dit voorval wel een karaktertrek (slecht kunnen tegen in zijn ogen ‘domme’ gesprekspartners) die hem parten speelde bij het verkrijgen van echte erkenning binnen het didactiekwereldje in Nederland. Het duurde ook lang voor de aanhangers van de niveautheorie van Piaget accepteerden dat Van Hiele sprak over niveaus gebaseerd op onderwijs/instructie, terwijl Piaget en zijn aanhangers hun niveaus los zagen van onderwijs, dus meer als een ‘natuurlijke’ ontwikkeling. We zouden nu zeggen: een tegenstelling tussen aanhangers van *nurture* en die van *nature*. Verderop in dit artikel gaat Nellie Verhoef hier verder op in.

Van Hiele, het fotograferen en observeren; op zoek naar structuur

Van Hiele heeft altijd tijd gemaakt voor zijn hobby ‘fotografie’ en hij wist die hobby ook te gebruiken ten behoeve van zijn boodschap: *Het gaat om structuur*. Van Hiele hechtte veel belang aan het herkennen van structuren. Soms ging hij als leraar ‘te vlug’; dan veronderstelde hij het vanzelfsprekend was dat een regelmaat herkend werd, en liet leerlingen te snel – via het verbale – naar het abstract/formele niveau van formules gaan. Zie onderstaand voorbeeld (*figuur 1*) in *Look! Regularity? Formulate!*, dat dit te snel gaan duidelijk maakt.



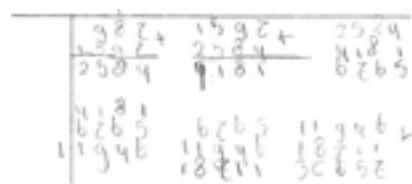
figuur 1

Het zoeken naar de essentie van een waarneming en dat vastleggen met foto's was van jongs af aan Pierre's hobby. Voor de

oorlog won hij al eens een prijs met de foto van een locomotiefje met zandtreintjes er achter, mede door de naam die hij er aan gaf, namelijk *brilslang*. De foto's in zijn prachtige boek *Structuur* zijn dan ook vrijwel allemaal door hem zelf gemaakt. Een andere hobby, verwant aan het fotograferen, was het observeren van leerlingen en het beschrijven van hetgeen hij gezien had. Het deed hem dan ook veel genoegen als anderen probeerden 'iets te doen met hun observaties', hun observaties te 'beschrijven met behulp van niveau's'. Of nog mooier: 'in andere gebieden dan de meetkunde een niveau theorie te ontwikkelen', zoals Bram Lagerwerf en Fred Korthagen deden voor de opleiding van leraren. Wel benadrukte hij telkens het belang van het (visuele) grondniveau en was hij dan ook niet verwonderd toen ik hem vertelde van het – voor mij toch onverwachte – resultaat bij het mini-experimentje met een groep 12/13-jarige brugklassers:

Op het bord werden de getallen 3, 5, 8 geschreven en aan de leerlingen werd gevraagd deze getallen op een blaadje te schrijven en er een vierde getal achter te zetten. Ik verwachtte dat de sterke structuur voor een aantal leerlingen zou zijn '2 er bij; 3 er bij; dus nu 4 er bij geeft 12'. Eventueel de structuur $3 + 5 = 8$, dus nu $5 + 8 = 13$. Maar er kwamen merendeels geheel andere reacties, zoals die van Fausia (12 jaar) die het getal 10 koos als vierde getal: 'het is mijn lievelingsgetal'. Zij toonde geen basisgevoel voor wat we kunnen noemen 'het zoeken naar een mogelijke regelmatige voortzetting (een structuur)'. Ik: 'Je mag eventueel een ander getal kiezen om het makkelijk te maken ook een vijfde, zesde, ... getal te vinden.' En nog kozen de meeste leerlingen niet voor de 'regelmaat' die ik probeerde te suggereren, maar lukraak voor volgende getallen.

Een leerling die wel voor een structuur koos 3, 5, 8, 13, 21, ... ging rustig verder met rekenen toen ik hem vroeg of hij het vijftigste getal kon vinden. Zijn commentaar was: 'Ik doe het maar zo; ik dacht, dan vind ik misschien een kortere manier.' En hij ging onverstoorbaar verder. Wat doe je dan als leraar?



figuur 2 Kladblaadje van Tonnie (12 jaar)

De lokale werkzaamheid (het rekenen, rekenen, en nog eens rekenen; kortweg:

uit de hand lopend rekenen) stond op gespannen voet met het globale vermoeden dat er een kortere oplossingsweg moet bestaan. Pierre zou zeggen: 'Op weg naar begrip en inzicht.' Hij heeft zich niet bezig gehouden met de vraag hoeveel wij als docenten door aangepaste opdrachten het leerproces kunnen vervroegen, respectievelijk versnellen. Dit zou later door anderen, onder andere door Stalo e.a. (zie [9]) wel gedaan worden.

Pierre van Hiele, één van de grondleggers van het wiskundig denken

Ooit lag Pierre van Hiele in de clinch met Piaget, de ontwikkelingspsycholoog. Het verschil in inzicht spitste zich toe op de omstandigheden waarin de experimenten plaatsvonden.

Piaget deed experimenten, beschreven in *The Child's conception of Number* (1952) ^[10], die als volgt verliepen:

Op een tafel, met aan de ene kant een onderzoeker en aan de andere kant een driejarig meisje, staan vijf poppen tegenover vijf paraplu's. De vraag aan het kind: 'Waarvan zijn er meer, poppen of paraplu's?' Antwoord: 'Er zijn precies evenveel poppen als paraplu's'. 'Heeft elke pop een eigen paraplu?' Antwoord: 'Ja'. Nu worden de paraplu's bij elkaar gehouden. Aan het kind de vraag: 'Waarvan zijn er meer, poppen of paraplu's?' Antwoord: 'Nu zijn er meer poppen'. 'Heeft elke pop een eigen paraplu?' Antwoord: 'Nee, er zijn meer niet genoeg paraplu's'.

Deze test laat dit resultaat altijd zien, tot kinderen van een jaar of vijf – ook al kunnen ze al tot tien tellen. Dat betekent dat kinderen wel in staat zijn tot tellen (1-2-3-4-5) maar niet het verschil beseffen tussen aantal (5) en hoeveelheid (1). In wiskundige termen wel in staat zijn tot tellen betekent niet het begrip hebben van een verzameling met een constant kardinaalgetal.

Van Hiele bekritiseerde de afwezigheid van het laten leren van kinderen, het veranderen van de omstandigheden. Zo imiteerde Van Hiele in 1953 de experimenten van Piaget met zijn eigen driejarige dochter als volgt. Ook dit kind reageert zoals verwacht op het samennemen van de paraplu's. Echter, nu komen er drie poppen op tafel tegenover vijf paraplu's bij elkaar. Het kind zegt: 'Natuurlijk zijn er meer paraplu's'. 'Waarom?' 'Dat is gemakkelijk te zien, er zijn vijf paraplu's en maar drie poppen. De paraplu's zijn alleen bij elkaar genomen'. Daarna volgde het experiment met de vijf poppen en de vijf paraplu's. 'Zijn er paraplu's te weinig?' 'Nee, je hebt ze bij elkaar genomen'. Na korte tijd, zo gaat

het verhaal van Van Hiele verder, komt zijn vijfjarige dochter Annely van de Montessori-school thuis. Zij krijgt dezelfde test en ze laat zich eveneens om de tuin leiden. Haar jongere zusje zegt vervolgens: 'Annely, sufferd, zie je dan niet dat er nog steeds vijf paraplu's zijn?' Annely zegt: 'O, ja ik zie het, je hebt ze bij elkaar gestopt'. Van Hiele benadrukte met deze experimenten dat de cognitieve ontwikkeling van kinderen te beïnvloeden is, mits er gebruik wordt gemaakt van daarvoor geschikt leermateriaal. Dieke van Hiele-Geldof heeft zich beziggehouden met de ontwikkeling van dit type materiaal. Ze onderscheidde daarin een vijftal stappen: informeel, geleide oriëntatie, explicitering, vrije oriëntatie en integratie. Deze stappen zullen bij velen een herinnering oproepen aan de leerstof-ordening van Joop van Dormolen met zijn befaamde OSAEV-model: oriënteren, sorteren, abstraheren, expliciteren en verwerken.

Het was echter vooral Richard Skemp (Warwick, UK) die met zijn pionierswerk op het gebied van het wiskundig denken voor veel van ons een fundament heeft gelegd voor het gaan hanteren van de niveautheorie van Van Hiele. Skemp legde zich toe op het begrijpen van wiskundige begrippen. Hij onderscheidde instrumenteel begrijpen van relationeel begrijpen. Beide typen zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden. Plat gezegd gaat het om 'snappen wat je doet' en 'snappen waarom je het doet'; een zaak die nu nog uiterst actueel is. In zijn spraakmakende artikel *Relational understanding and instrumental understanding* (1976)^[15] gaat hij ook in op de voor- en nadelen van beide. Relationeel begrijpen beklijft, geeft inzicht en is maximaal bruikbaar. Instrumenteel begrijpen is gebaseerd op herkenning, herinnering en gemakkelijk oproepbaar. Later heeft Skemp benadrukt dat instrumenteel begrijpen óók een vorm van begrijpen is. Van Hiele ging door op het spoor van begrijpen en onderscheidde daarin vier niveaus: het visuele, het beschrijvende, het informeel deductieve en het theoretisch deductieve niveau. Van Hiele concentreerde zich op (Euclidisch) meetkundige begrippen. Ter illustratie volgt het klassieke voorbeeld van de gelijkbenige driehoek (zie **figuur 3**).

1. Het visuele niveau, ook wel het nul-niveau of het nulde niveau genoemd



figuur 3

Op dit niveau gaat het om het intuïtief ontdekken van eigenschappen door ermee te spelen: verschuiven, verdraaien, spiegelen etc.

2. Het beschrijvende niveau omvat de ontdekking van eigenschappen, zoals twee gelijke benen en de middelloodlijn van de basis gaat door de top

3. Op het informeel deductieve niveau worden met de eigenschappen van driehoeken als uitgangspunt, onderling verbanden gelegd; zie **figuur 4**.



figuur 4 Deductie; evenwijdige lijnen

In een patroon (zie **figuur 5**):



figuur 5 Evenwijdige lijnen

Informeel zijn in het patroon overstaande hoeken, Z-hoeken en F-hoeken gelijk.

4. Op het formeel theoretische niveau worden de vier genoemde eigenschappen als equivalent gezien, het zijn verschillende aspecten van hetzelfde concept: het concept van evenwijdige lijnen in de Euclidische meetkunde. Formeel zijn de stellingen over gelijke hoeken (b), (c) en (d) te bewijzen als (a) gegeven is.

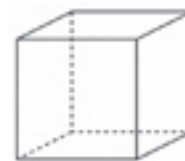
Een volgende vraag zou kunnen zijn hoe die verschillende niveaus eruit zouden zien, als het om 3- in plaats van 2-dimensionale objecten gaat. Als oefening zouden we eens kunnen kijken naar de kubus (zie **figuur 6**).



figuur 6 3D-objecten

Natuurlijk zal er op het visuele niveau 'gespeeld' worden met allerlei 3-dimensionale objecten: rond, hoekig, maar ook vol, hol of als draadmodel. De eigenschappen op het beschrijvende

niveau gaan over zes even grote vierkanten die twee aan twee loodrecht op elkaar staan. Kort samengevat: verschuif vier gelijke zijden met één rechte hoek over een afstand die even lang is als die zijde, herkenbaar in de scheve parallelprojectie van één object; zie **figuur 7**.



figuur 7 De kubus

De verbanden op het informeel deductieve niveau spitsen zich toe op definities die betrekking hebben op de eigenschappen zoals evenwijdigheid en loodrechte stand. De constructie kan op vele equivalente manieren plaatsvinden. Op het formeel theoretische niveau worden de stellingen in een coherent *framework* gezet. Figuren worden beschouwd als platonische objecten met eigenschappen die via Euclidische bewijsvoering aan elkaar worden gekoppeld. Zijn de niveaus terug te vinden in is de huidige schoolboeken? Kijkt u zelf en oordeel zelf!

Slot

Pierre van Hiele heeft baanbrekend werk verzet op een terrein dat raakvlakken heeft met psychologie, wiskunde en pedagogiek. Zo bracht hij in de didactiek van het wiskundeonderwijs een ommekeer teweeg als reactie op de *New Math*-beweging van de jaren zestig. Waar Vredenduin in 1952 in zijn artikel *Strengheid en inzicht* 'het experiment van Papy' nog toejuichte door structuren en logisch redeneren 'niet alleen als doel maar ook als didactisch middel' te propageren, antwoordde Van Hiele in 1957 met een dissertatie *De problematiek van het inzicht*. Pierre van Hiele was een van de grondleggers van de, door het Freudenthal Instituut omarmde, benadering van het realistisch wiskundeonderwijs. De basisgedachte van Van Hiele's niveautheorie is niet beperkt gebleven tot het wiskundeonderwijs, maar heeft zich uitgebreid naar het natuurkunde- en vooral het huidige scheikundeonderwijs (Bos; zie [1]). De Universiteit Twente hecht er belang aan dat het gedachtegoed van Pierre en Dieke van Hiele een blijvende plaats krijgt in de opleiding van studenten.

Literatuur

[1] Floor Bos (2010): *On pre-test sensitisation and peer assessment to enhance learning gain in science education*. Proefschrift, Universiteit Twente.

[2] Gerard Alberts, Rainer Kaenders (2005): *Interview Pierre van Hiele "Ik liet de kinderen wel iets leren"*. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/6 (3); pp. 247-251.

[3] Fred Goffree, ed. (1985): *Ik was een wiskundeleraar*. Enschede: SLO.

[4] P.M. van Hiele (1954/55): *Pakkend materiaal ter inleiding van meetkundige grondbegrippen*. In: *Euclides* 30; pp. 248-262.

[5] P.M. van Hiele (1959/60): *Nieuwe onderwerpen in de wiskunde. Mogelijkheden en criteria*. In: *Euclides* 35; pp. 177-186.

[6] P.M. van Hiele (1969): *Aan welke didaktische principes behoort ons onderwijs van elke dag te voldoen en welke invloed heeft dat op de methode?* In: *Euclides* 45 (1); pp. 26-29.

[7] Fred Korthagen, Bram Lagerwerf (1996): *Reframing the Relationship Between Teacher Thinking and Teacher Behaviour: levels in learning about teaching*. In: *Teachers and Teaching: theory and practice*, Vol. 2 (2).

[8] B. Lagerwerf, F. Korthagen (1992): *Niveaus bij het leren*. In: *Nieuwe Wiskrant* 11(3); pp. 22-24.

[9] M. Stalo, I. Elia, A. Gagatsis, A. Theoklitou, A. Savva (2006): *Levels of understanding of patterns in multiple representations*. Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.

[10] J. Piaget (1952): *The Child's conception of Number*. London: Routledge & Kegan Paul.

[11] P.M. van Hiele (1957): *De problematiek van het inzicht*. Dissertatie, Utrecht.

[12] P.M. van Hiele (1973): *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.

[13] P.M. van Hiele (1981): *Structuur*. Purmerend: Muusses. Heruitgave 1997 bij Thieme, Zutphen.

[14] D. van Hiele-Geldof (1957): *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* Dissertatie, Utrecht.

[15] R. Skemp (1976): *Relational understanding and instrumental understanding*. In: *Mathematics Teaching* 77; pp. 20-26.

Over de auteurs

Harrie Broekman was tot zijn pensionering lerarenopleider en vakdidacticus aan de Universiteit Utrecht. Op dit moment begeleidt hij nog een aantal wiskunde leraren.
E-mailadres: H.G.B.Broekman@uu.nl

Nellie Verhoef is verbonden aan de Universiteit Twente als vakdidacticus wiskunde bij het instituut ELAN. Momenteel houdt zij zich bezig met vakdidactisch onderzoek naar de professionele ontwikkeling van docenten.
E-mailadres: N.C.Verhoef@gw.utwente.nl

MEDEDELING / CENTRALE EXAMENS 2010, 1E TIJDVAK

Rooster wiskunde	CE
havo A / B	dinsdag 18 mei 13:30-16:30u
vmbo KB vmbo GL/TL	vrijdag 21 mei 13:30-15:30u
vwo A / B / C vwo A1 ^[1] vwo A12 / B1 / B12 ^[2]	dinsdag 25 mei 13:30-16:30u
vmbo BB (papier)	donderdag 27 mei 09:00-10:30u

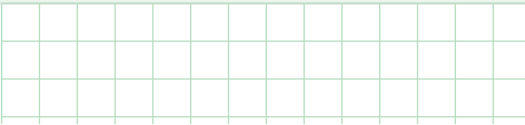
- [1] Centraal examen overeenkomstig het nieuwe examenvak wiskunde C.
Zie verder ook het 'Nader bericht CE 2010 wisC / WA1' op de NVvW-website (www.nvvw.nl/page.php?id=8046&rid=971)
- [2] Bezemexamen 'oude' stijl.
(Bron: www.examenblad.nl)

Examenfora

Het bestuur van de NVvW heeft besloten om de Examenfora op de NVvW-website *achter de login* te plaatsen. Dat wil zeggen dat die fora **alleen** nog toegankelijk zullen zijn **voor leden die zijn ingelogd**. De reden is dat op die manier de bijdragen in de examenfora vertrouwelijk blijven. Verschillende inzichten over correctiemodellen, puntenverdelingen, scores, het voorleggen van oplossingen van specifieke leerlingen blijven zo 'onder ons' en kunnen niet onder ogen komen van anderen. Vorig jaar is gebleken dat ook leerlingen op de site meekijken – zelfs reageerden – hetgeen tot onbedoelde en ongewenste situaties kan leiden.

Wie dus in de examenperiode een bijdrage wil leveren aan die fora, kan dat alleen doen als lid van de NVvW. Om in te loggen dient een e-mailadres bij de vereniging bekend te zijn en een wachtwoord te zijn verstrekt (informatie over een en ander zonodig via een e-mailbericht aan: webmasters@nvvw.nl).
Nb. Leden hebben na inloggen toegang tot een groot aantal pagina's op de website die voor anderen afgesloten zijn.

Het is niet uitgesloten dat om technische redenen het *Algemeen forum* tijdens de examenperiode ook afgesloten zal zijn voor niet-leden, maar in principe blijft dat een *open forum*.
(Bron: www.nvvw.nl)



In het meinumnummer van *Euclides* (jaargang 84, nummer 6) heeft bestuurslid Metha Kamminga geschreven over de in de afgelopen jaren vernieuwde NVvW-website, en in het laatst verschenen septembernummer (jaargang 85, nummer 1) is het examenforum op de website onderwerp geweest in het artikel 'Het examenforum 2009' door Klingens en Korthof. De website en de daarop voorkomende fora spelen een belangrijke rol binnen de vereniging. Reden om er nog eens een aantal woorden aan te wijden.

Website

Ongetwijfeld maken veel leden regelmatig gebruik van de website (www.nvvw.nl); men is dus bekend met de uitgebreide service die de vereniging via dit medium biedt. Naast het bieden van informatie over verenigingszaken en NVvW-activiteiten is de website binnen de vereniging een belangrijk platform voor de werkgroepen van de NVvW. Verder vindt u heel veel andere nuttige informatie over uiteenlopende onderwerpen: nieuws over het wiskundeonderwijs en uit de wiskunde-wereld, uitgebreide gegevens over de examens, veel informatie en linkmogelijkheden naar lesmateriaal en instanties die met het wiskundeonderwijs te maken hebben, en natuurlijk het forum waarop leden en niet-leden met elkaar van gedachten kunnen wisselen over allerlei zaken die het wiskundeonderwijs betreffen. Rondsnuffelen op de website levert je veel op! Een reden om de website dus regelmatig te raadplegen, ja, zelfs misschien als startpagina te installeren. Dan mis je niets.

De NVvW beschikt daarnaast met *Euclides* over nog een ander uitstekend functionerend communicatiemiddel, maar zoals hoofd-redacteur Klaske Blom al aangaf in haar Kort Vooraf in *Euclides* 85-2: de verschijnings-frequentie en het productieproces zijn dusdanig dat het blad altijd achterloopt op de actualiteit en moeilijk een alerte mogelijkheid kan bieden aan lezers om te reageren op artikelen in het blad. De website biedt wél de mogelijkheid actuele zaken direct door te geven. De vereniging en webmaster Lennart de Jonge maken daarvan dan ook doorlopend gebruik.

Daarom wil ik bij u de mogelijkheid onder de aandacht brengen om *via het forum* op de website op een snelle en directe manier te reageren op artikelen uit *Euclides*. Natuurlijk zijn de lay-outmogelijkheden van het forum zeer beperkt. Dit medium leent zich ook niet voor al te uitgebreide artikelen. Maar, het forum zou kunnen voorzien in een soort 'Lezers schrijven'-rubriek, zoals kranten en tijdschriften die alom kennen, maar waarvoor *Euclides* zich niet leent vanwege de iets te lange productielijnen. Voor uitgebreidere beschouwingen die over onderwerpen met een langere adem gaan en/of adequate illustratie vragen, blijft *Euclides* natuurlijk het aangewezen medium. Echter, forum en tijdschrift kunnen elkaar goed aanvullen.

Forum

Via de homepage is het *Algemeen forum* op twee manieren te bereiken. In de navigatie staat een link die toegang geeft tot het forum zelf en de complete lijst van topics. Rechtsboven op de pagina wordt een opsomming gegeven van de vijf meest actuele topics in het forum en daar kan meteen naar elk van die topics worden doorgelinkt. Leden die ingelogd zijn, kunnen onmiddellijk een *topic* starten of reageren; hun naam en e-mailadres worden automatisch toegevoegd aan het bericht. Wie niet ingelogd is, dient zelf naam, e-mailadres en, als beveiliging, een verificatiecode in te vullen. Voor deze forumdeelnemers blijven de e-mailgegevens in bijdragen afgeschermd. Het *Algemeen forum* blijft een open forum voor iedereen die de NVvW-website bezoekt.

Inmiddels is besloten om de *Examenfora*, die in mei weer op de website zullen verschijnen, *alleen toegankelijk* te maken voor ingelogde leden ('achter de login' heet dat); zie ook de Mededeling *op pag. 206* in dit nummer.

De Examenfora van afgelopen jaren zijn voor leden nog te raadplegen via de link *Eindexamens VO* in de *Navigatie* (links) op de homepage.

De forummoderator houdt de bijdragen in het forum bij. Om de lijst overzichtelijk te houden wordt een topic gesloten of verwijderd als er na verloop van tijd niet (meer) wordt gereageerd of als een topic zijn actualiteit verliest.

In 2007 werden er, buiten de examenfora om, 22 topics geopend en daarop kwamen in totaal 83 reacties. In 2008 waren het 37 topic en 126 reacties. Dit jaar is het aantal topics en reacties tot nu toe vergelijkbaar met 2007, blijkbaar is er iets minder behoefte om allerlei zaken aan de orde te stellen nu de nieuwe tweede fase goed op dreef is en het veranderde programma in het vmbo zijn weg ook gevonden heeft. Meestal loopt het aantal reacties op een topic niet hoog op, vooral als het om directe vragen over het wiskundeonderwijs of verzoeken ombepaalde informatie gaat. Maar als er een onderwerp wordt aangesneden dat kennelijk iedereen erg bezig houdt of veel stof doet opwaaien, dan kan het aantal reacties enkele tientallen bedragen.

In de afgelopen jaren is het onderwerp 'Het nieuwe leren' (nog steeds in het forum te vinden) onderwerp geweest van een uitgebreid en soms heftig en emotioneel

forumdebat, waar zelfs de vader van een leerling een bijdrage aan leverde. De teller is inmiddels gestopt bij 35 reacties; de discussie is nu gesloten. Een goede tweede is het onderwerp 'Meneer van Dale' (ook nog aanwezig; ook gesloten) met 26 reacties geweest, een discussie die goed weergaf dat er in de reken- en wiskundewereld heel verschillend gedacht en gehandeld wordt als het gaat over een basisprincipe als de volgorde van de rekenbewerkingen. De nodige verwarring wordt nog gestimuleerd door rekenmachines die bepaalde interpretaties ondersteunen, of juist niet. Verder hielden onderwerpen als het toekomstige docudentekort, het begrip (of pleonasme?) *rechte lijn*, de besluiten over de nieuwe tweede fase, de rol van de GR in het wiskundeonderwijs en beschouwingen over verhoudingen en breuken de gemoederen in het forum meer dan gemiddeld bezig. Het laatste onderwerp is inmiddels nader aan de orde gekomen in de bijdragen in *Euclides* 84-8 van Hessel Pot, die de discussie in het forum startte, en in *Euclides* 85-2 van Ronald Meester.

Overigens een mooi voorbeeld hoe forum en blad in elkaars verlengde kunnen liggen!

Meestal bevat het forum korte uitwisselingen van meningen of beantwoording van vragen door collega's onderling, zoals over rekenmachines, formules, dyscalculie, aantal decimalen of herleiden, dyslexie dan wel aankoop van geometrische vormen, of worden ideeën gelanceerd, zoals bijvoorbeeld over een oefen-toets-automaat, een wiskunde-wiki of wisD-excursies. Kortom, het forum blijkt te voorzien in een behoefte om elkaar te zoeken en te vinden over allerlei zaken aangaande het wiskundeonderwijs.

Iedereen kan zijn vragen en opmerkingen kwijt, maar dat heeft als logische keerzijde, dat het alleen maar functioneert als iedereen het forum blijft volgen en reageert daar waar zij of hij een zinvolle bijdrage kan leveren. Aan allen, in of rond het wiskundeonderwijs werkzaam, wordt daarom aandacht voor het forum en deelname daaraan warm aanbevolen!

Over de auteur

Erik Korthof werkt als forummoderator mee aan de website van de NVvW en was vóór zijn fpu docent wiskunde Tweede fase aan het Bonhoeffer College te Enschede. E-mailadres: eskorthof@hetnet.nl



AANKONDIGING / BLOED, ZWEET EN TRANEN...!

Examens als spiegel van veranderingen in het wiskundeonderwijs

Als programma's veranderen, doen examens dat ook. Door naar examens te kijken kun je zien wat een nieuw programma in de praktijk gaat betekenen. Door dat te vergelijken met de oorspronkelijke bedoelingen krijg je ook zicht wat er van die bedoelingen uiteindelijk is waargemaakt. Daarnaast kunnen examens ook veranderen zonder dat het formele programma verandert. Nieuwe ideeën over wat goed wiskundeonderwijs is, en nieuwe hulpmiddelen kunnen examens op termijn beïnvloeden zonder dat het officiële programma verandert. In het **XVIe symposium van de HKRWO** willen we aan beide aspecten aandacht geven.

Lezingen

- Joop Bokhove: *De Cito-toets*

Deze toets is al zo'n veertig jaar bepalend voor de toelating tot het voortgezet onderwijs, en rekenen speelt daarbij een belangrijke rol. In die veertig jaar zijn er grote veranderingen geweest in de opvattingen over het rekenen; denk maar aan de invloed van Wiskobas en het realistisch rekenen. Wat betekende dat voor de Cito-toets?

- Nanda Querelle: *Mavo en lbo*

Voor de oude Mulo en het beroepsonderwijs zijn de veranderingen eind jaren zestig enorm geweest, en misschien is de invloed van de 'New Math' daar nog wel het grootst geweest. Inmiddels is dat alweer lang verleden tijd en heeft het realistisch wiskundeonderwijs zijn invloed doen gelden. Wat heeft dat allemaal betekend voor de examens en diegenen die daarmee te maken hadden: leerlingen en leraren?

- Kees Lagerwaard: *Wiskunde A op havo en vwo*

De HEWET- en HAWEX-ontwikkelingen uit de jaren '80 brachten een heel nieuw vak in het wiskundeonderwijs: wiskunde A. Er leefden oorspronkelijk ook allerlei vernieuwende ideeën over hoe dat vak geëxamineerd moest worden. Wat is daarvan terecht gekomen en welke rol hebben de wiskunde A-examens gespeeld bij de ontwikkeling van dat vak tot een 'gewoon' schoolvak?

- Wim Groen: *Wiskunde B op havo en vwo*

Het analyseonderdeel van wiskunde B is lange tijd in formele zin grotendeels ongewijzigd gebleven. Toch zijn de analyseopgaven anno 2000 heel anders dan in de jaren '70. En zijn we nu weer op de weg terug? Welke trends zijn herkenbaar en wat vinden we daar achteraf van?

Plaats en datum

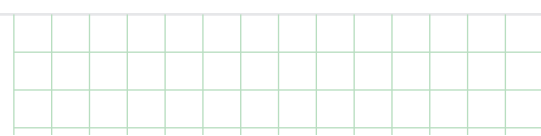
Symposium XVI vindt plaats op **zaterdag 24 april 2010** in de Domstad Hogeschool, Koningsbergerstraat 9 in Utrecht (een paar minuten lopen van CS).

Inloop en koffie vanaf 9:30u, start programma 10:15u, einde rond 15:30u.

Aanmelden en kosten

Aanmelding door het zenden van een e-mailbericht aan Harm Jan Smid (h.j.smid@ipact.nl) onder gelijktijdige overmaking van € 25,00 op girorekening 4657326 t.n.v. HKRWO te Leiden.

Inbegrepen zijn koffie, thee en fris, en een goed voorziene lunch.



Van Bijsterveldt lanceert IMO2011...

...EN EUCLIDES LANCEERT IMO-RUBRIEK!



[Quintijn Puite]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt in Nederland voor het eerst in de geschiedenis de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluit hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

Een goede IMO-opgave is er een die niet veel voorkennis vergt, maar juist een beroep doet op je inzicht en creatieve vermogens: je moet een originele stap zetten om eruit te komen. De opgaven komen daarbij traditiegetrouw voornamelijk uit het gebied van de algebra, combinatoriek, getaltheorie en (vlakke) meetkunde.

Achter elke IMO-opgave openbaart zich een prachtige, uitdagende wereld waarin het heerlijk rondlopen is. Je bekijkt eens wat voorbeelden en je probeert structuren te herkennen. Je slaat een paar wegen in, loopt misschien vast, maar dan probeer je gewoon weer wat anders. Je bekijkt het probleem eens van een hele andere kant. Je droomt erover weg in de trein of op de fiets. En als je eruit bent, spring je een gat in de lucht. Deze ervaring willen we de komende afleveringen graag met u delen. We hebben hiervoor een gevarieerde selectie van opgaven van IMO2002 t/m IMO2009 uitgezocht, die steeds door één van de toenmalige deelnemers zal worden besproken. Viereneenhalf uur de tijd hadden zij om drie van zulke opgaven op te lossen, en de volgende wedstrijddag nog eens. Dat is een lange ochtend blokken, maar toch meestal een veel te korte ochtend om volledig 'uit- en rondgedoeld' te zijn... De aftrap van de rubriek 'Op weg naar IMO2011' (zie pag. 210 in dit nummer) wordt gegeven door Birgit van Dalen, die sinds 2004 bij de training betrokken is en met wie ik sinds 2007 jaarlijks het team voor de IMO begeleid en de IMO-training coördineer. Mede dankzij haar ongelofelijk inzet bloeit de IMO-training als nooit te

voren. Een aantal andere oud-deelnemers die ook bij de training betrokken zijn, zullen in volgende afleveringen van deze rubriek de revue passeren.

In de laatste aflevering van de IMO-rubriek [in nummer 6 van de volgende jaargang van *Euclides*; Red.] wordt een opgave van IMO2010 besproken. Op dat moment staat het evenement zelf inmiddels op het punt om los te barsten. Nederland zal negen dagen lang in het teken staan van de olympiade. Mensen uit tientallen culturen zullen in Amsterdam samenkomen om hun passie voor wiskunde te delen. Maar net zo goed ook om samen te voetballen, te feesten en op excursie te gaan.

In 2011 vindt de IMO voor de 52ste keer plaats en doet Nederland voor de 41ste keer mee. Op vrijdag 29 januari 2010 gaf staatssecretaris Van Bijsterveldt het officiële startschot voor IMO2011. Tijdens een feestelijke bijeenkomst in NEMO benadrukte zij het belang van wiskunde, de aandacht voor talent en de promotie voor Nederland door het organiseren van de IMO. 'Ik vind het belangrijk dat jonge mensen de kans krijgen om te laten zien waar ze goed in zijn. Wat mij betreft mag dat best wel wat meer in onze cultuur gaan zitten: talent is iets om trots op te zijn!', aldus de staatssecretaris.

Het ministerie van OCW en het Platform Bèta Techniek zijn de grote sponsors van het evenement. Bedrijven en instituten die als partner optreden zijn de Vrije Universiteit Amsterdam, de Technische

Universiteit Eindhoven, Universiteit Leiden, ORTEC en het Nederlands Forensisch Instituut. Daarnaast zijn er nog vele andere bedrijven, instituten en instanties, waaronder de NVvW, die de IMO steunen of erbij betrokken zijn.

Tijdens deze *kick-off* vond ook de 49e eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Bijna honderd Amsterdamse deelnemers hebben de wedstrijd voor deze gelegenheid in NEMO gemaakt. Onder hen en de duizenden andere deelnemers zitten de zes scholieren die over anderhalf jaar het Nederlands team zullen vormen tijdens hun thuiswedstrijd. In juli 2011 zullen we 900 buitenlandse gasten verwelkomen. Daarnaast zullen zo'n 300 vrijwilligers in de organisatie actief zijn, waaronder bijvoorbeeld 80 wedstrijdbegeleiders die de wedstrijd op 18 en 19 juli in goede banen zullen leiden. Als u daarbij een rol wilt spelen, of als u elders in de organisatie mee wilt doen, aarzel dan niet uzelf op te geven via info@imo2011.nl. Het belooft een onvergetelijk evenement te worden!

Info

Website IMO2011: www.imo2011.nl

Over de auteur

Quintijn Puite is sinds november 2005 betrokken bij de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Hij was de teamleider tijdens de IMO in Slovenië (2006), Vietnam (2007), Spanje (2008) en Duitsland (2009). Hij is verder één van de hoofdorganisatoren (als hoofd jury) van IMO2011. Voor de olympiade is hij twee dagen per week verbonden aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Daarnaast is hij docent bij de Vakgroep Wiskunde van Instituut Archimedes, de lerarenopleiding van Hogeschool Utrecht. E-mailadres: g.w.q.puite@tue.nl

Op weg naar IMO2011

IMO2002 – OPGAVE 1

[Birgit van Dalen]



In de zomer van 2002 vertrok ik met vijf andere scholieren en twee begeleiders vanaf Schiphol naar Glasgow in Schotland voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Voor het eerst in de geschiedenis telde het Nederlandse team twee meisjes, en we zouden nog meer geschiedenis kunnen gaan schrijven door een medaille te halen; dat was een Nederlands meisje nog nooit gelukt. Op twee achtereenvolgende dagen kregen we in totaal zes pittige problemen voorgelegd. Het lukte mij om er hiervan twee op te lossen, maar dat was helaas net te weinig voor een bronzen medaille. Het deelnemen aan de wedstrijd was echter wel een heel mooie ervaring en ik heb met heel veel plezier aan de opgaven gewerkt. In dit artikel wil ik iets laten zien van mijn ervaringen met opgave 1 van deze Olympiade.

De opgave

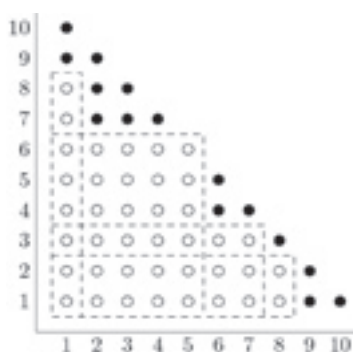
Zij n een positief geheel getal. We bekijken een driehoek van roosterpunten: de verzameling T bestaande uit de punten (x, y) met x en y positieve gehele getallen en $x + y \leq n + 1$. Elk punt van T is zwart of wit gekleurd. Als een punt (x, y) van T wit is, dan zijn ook alle punten (x', y') met $x' \leq x$ en $y' \leq y$ wit.

Een X -verzameling is een verzameling van n zwarte punten waarvan alle x -coördinaten verschillend zijn. Een Y -verzameling is een verzameling van n zwarte punten waarvan alle y -coördinaten verschillend zijn. Bewijs dat het aantal X -verzamelingen gelijk is aan het aantal Y -verzamelingen.

Op het eerste gezicht ziet deze opgave er ingewikkeld uit. Maar de ervaring leert dat je je daar bij de olympiade niet moet door laten afschrikken: de meest eenvoudig ogende opgaven zijn vaak het moeilijkst. Laten we gewoon maar eens gaan kijken wat deze opgave precies zegt.

We bekijken een driehoek van roosterpunten die op een bepaalde manier zwart en wit zijn gekleurd. Om precies te zijn: als een punt (x, y) wit is, dan is de hele rechthoek met hoekpunten $(1, 1)$, $(x, 1)$, (x, y)

en $(1, y)$ wit gekleurd. In feite bestaat het witte gebied dus uit een aantal (overlappende) rechthoeken die allemaal $(1, 1)$ als hoekpunt hebben. In *figuur 1* staat een voorbeeld van zo'n kleuring.



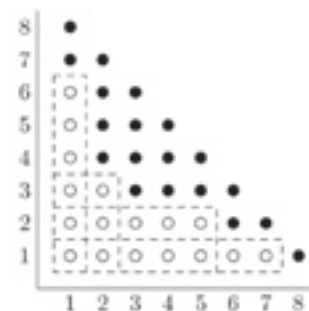
figuur 1 Een voorbeeld van een toegestane kleuring

Een X -verzameling bestaat uit n zwarte punten die allemaal een andere x -coördinaat hebben. Dat betekent dus dat er hoogstens één punt van zo'n X -verzameling in elke kolom zit. Maar aangezien we maar n kolommen hebben (met x -coördinaten $1, 2, \dots, n$) moet de X -verzameling dan wel precies één punt in elke kolom hebben. Dus we willen tellen op hoeveel manieren je een verzameling zwarte punten kunt samenstellen door uit elke kolom precies één punt te kiezen.

In het voorbeeld *van figuur 1* is dit makkelijk: in de 5e kolom zijn alle punten wit en kunnen we dus geen zwart punt kiezen. Dat betekent dat er geen X -verzameling bestaat. Hoe zit dit voor de Y -verzamelingen? Dat zijn verzamelingen van n punten waarvan er in elke rij precies één zit. Maar in de zesde rij zijn alle punten wit, zodat er geen Y -verzameling bestaat.

Met dit voorbeeld zijn we dus snel klaar: het aantal X -verzamelingen is nul en het aantal Y -verzamelingen ook, dus deze aantallen zijn gelijk.

Maar de opgave was vast niet zo makkelijk bedoeld. Als we nog eens een plaatje tekenen met een andere kleuring (*zie figuur 2*), blijkt al dat eenzelfde redenering niet



figuur 2 Een tweede voorbeeld

opnieuw opgaat. Bij nader inzien hadden we met ons eerste voorbeeld bij toeval een heel speciaal geval te pakken: er lag een wit punt op de diagonaal (dat zijn de punten (x, y) met $x + y = n + 1$), waardoor er geen X - en Y -verzamelingen bestonden. Maar hiermee zijn we nog niet veel wijzer geworden over het algemene geval. We kijken daarom verder naar het voorbeeld van *figuur 2*. Om een X -verzameling te maken moeten we uit kolom 1 tot en met 8 steeds één zwart punt kiezen. In kolom 1 zijn er 2 zwarte punten, waarvan we er eentje kiezen. Onafhankelijk daarvan kunnen we één van de 4 zwarte punten in kolom 2 kiezen. Samen hebben we dan al $2 \cdot 4$ mogelijkheden. Vervolgens kunnen we op 4 manieren in kolom 3 een zwart punt kiezen. Enzovoorts. Al met al wordt het aantal X -verzamelingen gelijk aan:

$$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$

Zo berekenen we ook het aantal Y -verzamelingen door in elke rij het aantal zwarte punten te tellen. We krijgen:

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$

We hoeven deze twee getallen niet uit te rekenen om te zien dat ze gelijk zijn: we vermenigvuldigen namelijk dezelfde getallen (weliswaar in een andere volgorde). Dit is wellicht de sleutel van de oplossing. Als het altijd zo is dat we voor de berekening van het aantal X -verzamelingen dezelfde getallen met elkaar vermenigvuldigen als voor de berekening van het aantal Y -verzamelingen, dan zijn we klaar: dan is

het aantal X -verzamelingen gelijk aan het aantal Y -verzamelingen.

Laten we toch even teruggaan naar het voorbeeld *uit figuur 1*. Als we daar dezelfde methode toepassen, krijgen we voor het aantal X -verzamelingen:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$$

en voor het aantal Y -verzamelingen:

$$2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$

We wisten al dat deze producten beide gelijk waren aan 0, maar we zien nu ook dat er in beide producten precies dezelfde getallen staan. Dat kan geen toeval zijn. We losten dit speciale geval in eerste instantie heel anders op, maar nu blijkt dat het toch op precies dezelfde manier opgelost kan worden als het algemene geval.

Tijd om wat notatie in te voeren. Zij c_i het aantal zwarte punten in kolom i en r_i het aantal zwarte punten in rij i . Ons vermoeden is nu dat het rijtje

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ een permutatie is van het rijtje $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$: het ene rijtje bevat dezelfde getallen als het andere, maar in een andere volgorde.

Laten we dit eerst eens voor een makkelijk geval bewijzen: een rooster waarin alle punten zwart zijn. Dan zijn de rijtjes C en R gelijk aan $C = (n, n-1, \dots, 2, 1)$ en $R = (n, n-1, \dots, 2, 1)$. Het is duidelijk waar dat de twee rijtjes precies dezelfde getallen bevatten.

Als we nu het punt $(1, 1)$ wit maken, veranderen alleen c_1 en r_1 : deze waren eerst gelijk aan n en worden nu gelijk aan $n-1$. De rijtjes C en R blijven dus dezelfde getallen bevatten.

Vervolgens maken we $(1, 2)$ wit. Dan veranderen alleen c_1 en r_2 : deze waren beide gelijk aan $n-1$ en worden nu gelijk aan $n-2$. Opnieuw blijft het waar dat C en R dezelfde getallen bevatten (maar nu wel in een andere volgorde). We kunnen zo één voor één de punten wit blijven maken. Na kolom 1 gaan we verder met kolom 2. We maken steeds *alleen* punten wit waarvoor geldt dat het punt links ervan en het punt

eronder (voor zover die bestaan) al wit waren. Op deze manier kunnen we alle toegestane kleuringen bereiken. We moeten nu bewijzen dat de eigenschap dat C en R dezelfde getallen bevatten, behouden blijft als we een extra punt wit maken. We hebben dit al gezien voor de punten $(1, 1)$ en $(1, 2)$, maar we willen het nog in het algemeen doen. Daarna mogen we concluderen dat bij alle toegestane kleuringen deze eigenschap geldt.

Stel dus dat bij een zekere kleuring geldt dat C en R dezelfde getallen bevatten. We kiezen een zwart punt (x, y) met de eigenschap dat $(x, y-1)$ wit is (of $y=1$, zodat dit punt niet bestaat), en dat $(x-1, y)$ wit is (of $x=1$, zodat dit punt niet bestaat).

Wat geldt er nu voor c_x en r_y ?

De zwarte punten in kolom x zijn precies de punten (x, y) , $(x, y+1)$, $\dots$, $(x, n-x+1)$.

Dit zijn er $n-x-y+2$; dus $c_x = n-x-y+2$.

De zwarte punten in rij y zijn precies de punten (x, y) , $(x+1, y)$, $\dots$, $(n-y+1, y)$;

dus $r_y = n-y-x+2$. We zien dat $c_x = r_y$.

Als we nu het punt (x, y) wit maken, heeft dit alleen invloed op c_x en r_y ; de rest van de c_i -tjes en r_i -tjes blijft gelijk. In kolom x en rij y verdwijnt een zwart punt, dus c_x en r_y worden beide 1 kleiner. Maar ze waren gelijk aan elkaar, dus ook in de nieuwe situatie zijn ze weer gelijk aan elkaar. Dat betekent dat er niets veranderd is aan het feit dat C en R dezelfde getallen bevatten. En dat is precies wat we wilden bewijzen.

Het bewijs is nu klaar, maar laten we nog even terugkijken. We hebben namelijk in feite méér bewezen dan wat de opgave ons vroeg. In onze notatie was de opgave om te bewijzen dat:

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n$$

Maar we hebben bewezen dat de rijtjes $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ en $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ precies dezelfde getallen bevatten. Daaruit volgt natuurlijk dat het product gelijk is, maar dat geldt niet andersom. Zo is $6 \cdot 10 \cdot 3 = 5 \cdot 9 \cdot 4$, maar de rijtjes $(6, 10, 3)$ en $(5, 9, 4)$ bevatten niet dezelfde getallen.

Het was eigenlijk een gewaagde stap om iets te gaan bewijzen dat sterker was dan het gevraagd; voor hetzelfde geld was het *niet* waar geweest. Maar dat is het leuke aan olympiadeopgaven: je hebt soms zo'n gewaagde, creatieve stap nodig om tot een oplossing te komen.

Dit en nog veel meer nuttige strategieën leer ik tegenwoordig aan toekomstige olympiadedeelnemers. Twee jaar na mijn eigen deelname aan de olympiade werd ik gevraagd om mee te helpen bij de training van deze getalenteerde leerlingen. Sindsdien stop ik met veel plezier het grootste deel van mijn vrije tijd in het vormgeven van de training en het begeleiden van de leerlingen. We hebben het trainingsprogramma de afgelopen jaren meer gestructureerd en flink uitgebreid; steeds meer leerlingen krijgen de kans om hun talent voor wiskunde te ontplooien en worden hierbij intensief begeleid door onze negen trainers. Het doel is natuurlijk de prestaties van Nederland bij de Internationale Olympiade te verbeteren. Het eerste Nederlandse meisje dat een medaille haalt, laat nog op zich wachten, maar ik heb goede hoop voor de toekomst.

Info

Website IMO2011: www.imo2011.nl

Over de auteur

Birgit van Dalen is promovendus wiskunde aan de Universiteit Leiden. Daarnaast is ze sinds november 2004 betrokken bij de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Ze was de vice-teamleider tijdens de IMO in Vietnam (2007), Spanje (2008) en Duitsland (2009). Ze is verder één van de hoofdorganisatoren van IMO2011 in Nederland.

E-mailadres: dalen@math.leidenuniv.nl

MEDEDELING

De Stuurgroep NLT heeft in september en december 2009 de volgende negen nieuwe NLT-modules gecertificeerd.

Voor havo twee modules:

- Door de zoete appel heen bijten;
- (Over)leven in het International Space Station.

/ NIEUWE NLT-MODULE GECERTIFICEERD

[Brechje Hollaardt]

Voor vwo zeven modules:

- Meten en interpreteren;
- Biosensoren;
- Drinkwater;
- 'Moderne energie! Of toch nog fossiel?;

- Echt of vals;
- Kunstnier en membranen;
- Food or Fuel.

Daarmee zijn er momenteel vijftig gecertificeerde modules (21 havo, 29 vwo).

Alle gecertificeerde modules staan op www.betavak-nlt.nl.



College voor Examens

Hebben toetsing, kwaliteitsborging en het niveau in uw vakgebied uw interesse? Bekijk dan de volgende vacature!

Vaksectievoorzitter wiskunde B havo/vwo

Het College voor Examens (CvE) werkt onder de verantwoordelijkheid van de minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap en heeft vier werkterreinen: de centrale examens in vwo, havo en vmbo, de staatsexamens VO, de staatsexamens NT2 en de centrale examens taal en rekenen MBO.

Op het eerstgenoemde werkterrein regisseert het CvE de werkzaamheden rondom de centrale examens vwo, havo en vmbo. Het CvE heeft daarbij drie hoofdtaken:

- vaststellen van de centrale examens;
- specificeren van de exameneisen in syllabi voor het centraal examen;
- verder ontwikkelen van de centrale examens.

De examens worden geproduceerd door Cito, bij de syllabi speelt SLO een rol.

Onder het college functioneren een bureau, syllabuscommissies en vaksecties. Iedere vaksectie bestaat uit twee of drie leden en een voorzitter. De leden zijn werkzaam als vakdocent in het onderwijs waarvoor zij als lid van de vaksectie examenopgaven vaststellen. De voorzitters komen uit het hoger onderwijs.

Met ingang van **1 augustus 2010** zijn wij voor het cluster Exact op zoek naar een **voorzitter** voor de **vaksectie**:

. wiskunde B havo en vwo

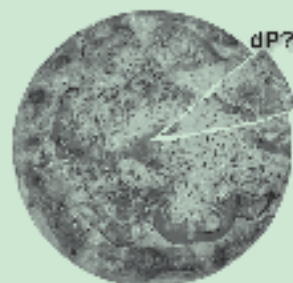
Taken:	vaststellen van de opgaven van de centrale examens; adviseren van het bureau over syllabi, examens en normering; leiding geven aan de vaksectie.	
Vereist:	u bent deskundig op het vakgebied; u kent het onderwijs waarin het examen wordt afgenomen; u bent niet betrokken bij leerboeken en ook anderszins onafhankelijk.	
Positie:	havo en vwo:	docent in het vak in het hoger onderwijs of een eerstegraads lerarenopleider.

Rechtspositie en honorering: voorzitters (en leden) van vaksecties blijven bij hun huidige werkgever in dienst en werken voor een deel van hun weektaak voor het CvE. Het CvE vergoedt de daarmee overeenkomende loonkosten. De vrijstelling verschilt per vaksectie en bedraagt 15 tot 25% van een volledige weektaak.

Meer weten of solliciteren?

Kijk op: www.cve.nl/vacatures. U kunt uw sollicitatie richten aan de directeur van het bureau van het College voor Examens, de heer G.W. van Lonkhuyzen, e-mail: sollicitatie@cve.nl. Uw sollicitatie dient **uiterlijk woensdag 14 april** in ons bezit te zijn.

Differentialen en Diepvriespizza's



[Dorien Lugt]

[Red.] Heeft u enig idee van het wiskundestudentenleven van tegenwoordig? Is wiskunde studeren nog was het was? Dorien Lugt is sinds augustus 2009 wiskundestudent aan de TU Delft en schrijft voor Euclides over haar belevenissen en observaties vanuit collegezaal en studentenhuys.

Technische Hogeschool Delft

De tafeltjes in het lokaal staan in drie rijen, twee aan twee. De twintig aanwezige studenten hebben zich in groepjes op de tafels en in de vensterbanken gevestigd. Bij het bespreken van de huiswerkopgaven heeft de docent bedacht dat we het eerst zelf maar eens moesten proberen.

Inmiddels is het een half uur later en zit iedereen druk te overleggen: 'Gaan we naar het huisfeest of naar de vereniging?' De docent komt voor de derde keer vragen of we 'nog iets gaan doen vandaag.' Nee, dit is geen vrijdagmiddagles op het vwo. Het is ons hoorcollege Analyse.

Ik baal er behoorlijk van dat het college nu al een half uur wordt onderbroken om opdrachten te gaan maken. Opdrachten die we eigenlijk voor het college af hadden moeten hebben. Ik vind het maar raar om, in een niet verplicht college, studenten te dwingen niet verplichte opgaven te maken. Bovendien is dit een hoorcollege. Voor het begeleid huiswerk maken, staan andere, speciaal daarvoor bestemde, uren in ons rooster.

Ik ging er vanuit dat we op de universiteit eindelijk zouden worden gedwongen onze eigen manier van werken te vinden. Maar dat valt tegen. We hebben zelfs een vak waar de docent ons standaard de tweede helft van het college laat werken. Toen er een student opstond om te vertrekken – huiswerk maken kon hij thuis ook wel – reageerde de docent fel: 'Je volgt het hele college, of helemaal niet.'

Laatst werd ik aangesproken door een andere docent, waarom ik gisteren niet langs was gekomen. We moeten in groepjes een verslag van tien kantjes schrijven en hem iedere week laten zien hoe het ermee staat. Kan het nog schoolser? Ook vroeg hij zich af waarom ik niet naar zijn colleges kwam. Alsof hij me van spijbelen

beschuldigde! Ik reageerde verbaasd; colleges zijn toch niet verplicht? Verplicht niet nee, maar hij vond het wel erg onbeleefd om niet te komen. Soms heb ik het gevoel dat er hier minder zelfstandigheid van me wordt verwacht dan in 6-vwo. Dat is in sommige gevallen irritant. Maar vaak vind ik het ook wel fijn;

door al die tussentoetsen en inleveropdrachten kost het me minder moeite de stof bij te houden. Ik vraag me wel af hoelang ze het moment nog uitstellen, dat ik echt in het diepe word gegooid. Hopelijk heeft mijn werkgever er later begrip voor, dat ik alleen kan werken volgens een door anderen opgesteld schema.

Onze leerlingen kunnen wel wat hulp gebruiken

...en u ook!

De wiskunde op onze site is erg geschikt voor het elektronisch schoolbord, voor thuisgebruik en voor maatwerk op papier: Wiskunde voor de internetgeneratie.

Gratis praktische ondersteuning voor elke docent en leerling:
Theorie • Uitleg • Voorbeelden • Applets

Kom naar **www.math4all.nl** en... vergeet de site niet aan uw leerlingen door te geven. Wikiwijsversie op **www.wikiwijs-wiskunde.nl**

Onze site is ontwikkeld en wordt onderhouden door ervaren, deskundige en bevlogen liefhebbers van wiskunde.



Math4all

Wij kunnen óók hulp gebruiken. Steun Stichting Math4all, geef de site door aan collega's en leerlingen.

Gratis! maar niet goedkoop

Wiskunde Scholen Prijs: voor iedereen!



[Dédé de Haan]

Dit jaar wordt voor de 9e keer de Wiskunde Scholen Prijs georganiseerd. Door het uitreiken van deze prijs willen we scholen stimuleren om met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden. Iedere school voor voortgezet onderwijs mag een project insturen dat gedaan wordt bij wiskunde, of in samenwerking met andere vakken. Om een idee te geven van wat voor soort projecten dat zijn, presenteer ik de winnende inzendingen van 2008 en 2009.

Categorie Bovenbouw HAVO/VWO

Praktische opdracht klas 4 – Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen

De 'Praktische Opdracht klas 4' is een dag waarop alle leerlingen uit klas 4 in groepjes een hele dag aan een wiskundige opdracht werken. Ze hebben keuze uit 10 verschillende opdrachten. Deze worden allemaal kort toegelicht. Er wordt dan tevens vermeld of de opdracht door iedereen gekozen kan worden, of alleen door leerlingen met wiskunde A/C, of alleen door leerlingen met wiskunde B.

De jury, bestaande uit een achttal mensen uit het veld, de NVvW, universiteiten en lerarenopleidingen, meldde hierover het volgende: *'De leerlingen mogen kiezen uit tien mooie, gevarieerde onderwerpen; hier zitten ook historische onderwerpen bij. De opdrachten zijn prachtig, met veel ruimte om zelf op onderzoek te gaan, zelf vragen te stellen, maar tevens met voldoende houvast. De leerlingen worden echt uitgedaagd. De onderwerpen zijn motiverend en laten goed zien wat je met wiskunde kunt doen. Daarbij ziet het er allemaal aantrekkelijk en zeer verzorgd uit. Zo'n dag in klas 4 is een prima voorbereiding op een Wiskunde A-lympiade of een Wiskunde B-dag in klas 5, en daarnaast nog eens uitstekend overdraagbaar.'*

Een aantal van de opdrachten kunt u vinden via de website van de NVvW, onder het kopje Onderwijs | Wiskundescholensprijs^[1].

Buiten het boekje – Stedelijk Gymnasium Nijmegen

De zoektocht naar een geschikte vorm voor praktische opdrachten bij wiskunde, passend bij het onderwijs en de school, heeft op het Stedelijk Gymnasium Nijmegen geleid tot een doorlopende leerlijn van opdrachtlessen voor onder- en bovenbouw. Een opdrachtles is een les waarin de leerlingen in tweetallen werken aan een uitdagend probleem. De opdrachtlessen vormen een rode draad in het onderwijs op het Stedelijk Gymnasium

Nijmegen en monden uit in een praktische opdracht in klas 6, die onderdeel is van het schoolexamen.

De jury zei hierover: *'De leerlijn is compleet, zorgvuldig doordacht en bevat mooie, uitdagende opdrachten. Deze opdrachten hebben een duidelijke opbouw: van een les in klas 1 tot en met 3, via een kleine praktische opdracht in klas 4 en 5 naar een grote praktische opdracht in klas 6. De opdrachten zijn echte onderzoeksopdrachten, en geschikt voor toetsing in tweetallen. De school is erin geslaagd om wiskunde het hoofddoel te laten zijn van deze leerlijn. Leerlingen worden niet gemotiveerd door een aardig thema dat hen de wiskunde inlokt, maar werken aan pittige problemen en ontwikkelen zo hopelijk intrinsieke motivatie voor de wiskunde zelf. De jury heeft hier bijzonder veel waardering voor. Dit is geen incidenteel project, maar een in het onderwijs geïntegreerde leerlijn, die het wiskundig inzicht in sterke mate bevordert, die overdraagbaar is naar andere scholen en die bijdraagt aan de imagoverbetering van het vak wiskunde.'* Eenieder die interesse heeft in de opdrachten, kan contact opnemen met Wilma van Donk (e-mailadres: W.van.Donk@stedelijkgymnijnijmegen.nl).

Categorie Onderbouw HAVO/VWO

Het wiskundedossier – IJsselcollege, Capelle a/d IJssel

Voor de onderbouw van de school (mavo, havo en vwo, klas 1 t/m 3) heeft de wiskundesectie bij elk hoofdstuk uit het boek een opdracht bedacht/gevonden, die de leerlingen verwerken tot één A4-tje in een dossier. Sommige opdrachten zijn er om op een leuke manier vaardigheden te oefenen, andere opdrachten zijn er om inzicht te verhogen; alle opdrachten zijn motiverend. De leerlingen moeten 10 van deze opdrachten uitwerken en kunnen op die manier een aantal keer een opdracht overslaan.

De jury zei hierover het volgende: *'De jury*

is onder de indruk van de enorme rijkdom aan opgaven. Het aanleggen van het dossier appelleert aan positieve leerervaringen, de jury is dan ook niet verbaasd dat de leerlingen trots zijn op hun dossier. De opdrachten zijn zeer enthousiasmerend en motiverend, zeker omdat er voor de leerlingen ook nog te kiezen valt. Het is duidelijk dat hier heel veel vrije tijd en aandacht in zit, en het materiaal is zo mooi gemaakt dat het meteen te gebruiken is door al die mensen die dit niet zelf kunnen maken, maar wel iets goeds kunnen herkennen als ze het zien.' Ingrid Berwald (*zie foto 1*), de docente die dit project toestuurde, heeft een groot aantal van de ideeën verzameld in het boekje *Wiskundeprikkels* (dit boek is verkrijgbaar via www.lulu.com). Tevens is er, naar een idee van Ingrid Berwald, door het Freudenthal Instituut een kaartspelletje uitgebracht voor in de klas: *Het Oppervlaktespel* (dit kaartspelletje is verkrijgbaar via www.fi.uu.nl).

Van Euler naar NS – Wartburg College (locatie Marnix), Dordrecht

De ontwikkeling van de grafentheorie wordt via 'exemplarisch onderwijs' door de onderbouwleerlingen 'herontdekt', in vijf dagdelen. Exemplarisch onderwijs is een vormingsgerichte pedagogiek en didactiek die zich richt op de vraag wat er in onderwijs daadwerkelijk toe doet. Er is voor grafentheorie gekozen omdat dit voor de wiskunde een belangrijk vakgebied is en omdat het een rijke historie biedt. Bij deze vorm van exemplarisch onderwijs wordt gebruik gemaakt van het socratisch leer-gesprek, sketches en opdrachten waarbij geredeneerd moet worden.

Uit het juryrapport: *'De jury is unaniem van mening dat dit project wat betreft originaliteit met kop en schouders boven alle inzendingen uitsteekt. Daarbij is het zeer gedetailleerd en zorgvuldig voorbereid. Er is ontzettend veel werk van gemaakt; allerlei soorten werkvormen en presentaties komen aan bod. Door de didactische keuze voor het exemplarisch onderwijs worden op een natuurlijke, maar tevens bijzondere wijze (bijvoorbeeld door het voeren van socratische gesprekken) de vakken wiskunde, aardrijkskunde, geschiedenis en Nederlands*

De Wiskunde Scholen Prijs

De prijs wordt jaarlijks uitgereikt sinds 2002. Het is een stimuleringsprijs, bedoeld om scholen uit te nodigen met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden, en op die manier goede initiatieven zichtbaar te maken en het imago van wiskunde te verbeteren. Scholen kunnen strijden in drie categorieën: vmbo, onderbouw havo/vwo en bovenbouw havo/vwo.

Ieder project dat ingezonden wordt (en dat kan van alles zijn – van vakoverstijgend tot verdiepend) wordt beoordeeld door een deskundige jury. In iedere categorie valt 1000 euro te winnen.

De Wiskunde Scholen Prijs is voortgekomen uit het WisKids Project. Dit was een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs.

geïntegreerd. De jury is onder de indruk van het mooie en rijke materiaal. Wel vindt ze het project erg ambitieus voor de onderbouw, en twijfelt ze in verband daarmee aan de overdraagbaarheid naar andere scholen.'

Lianne Noordzij, docente aan het Wartburg College, stuurde niet alleen dit project in, maar ook een ander project, waarbij leerlingen hun eigen kamer ontwerpen. Dit laatste project viel niet in de prijzen – maar is ook zeker interessant voor meer scholen! Tevens heeft ze op de 8e Wiskundeconferentie voor docenten wiskunde in het vmbo en de onderbouw havo/vwo die afgelopen januari door het APS werd georganiseerd, een werkgroep verzorgd over Van Euler naar NS. Voor meer informatie kan contact opgenomen worden met Lianne Noordzij (e-mailadres: JCN Noordzij@wartburg.nl).

Categorie VMBO

Were Di Wiskundeweken - Scholengemeenschap Were Di, Valkenswaard

Tijdens de 'Were Di Wiskundeweken' hebben ongeveer 2400 leerlingen van de school de reizende wiskundetentoonstelling 'Mathematik zum Anfassen' van het Mathematikum uit Gießen (D), bezocht. Tijdens de tentoonstelling waren 28 experimenten opgesteld die de leerlingen in groepjes en aan de hand van lesbrieven, op niveau, bezochten (*zie foto 2*). De secties wiskunde, natuurkunde, techniek, Duits en tekenen hebben deelgenomen aan het project. De docenten hebben gezamenlijk de lesbrieven gemaakt en de organisatie van dit omvangrijke project

verzorgd. Daarnaast zijn er kunstwerken van Koos Verhoeff opgesteld. Het project is schoolbreed opgezet: alle leerlingen van alle locaties (alle geledingen vmbo, havo, vwo, zowel voor onder- als bovenbouw) die wiskunde hebben, hebben deelgenomen aan het project.

De jury was erg onder de indruk van de grootse aanpak van dit project: *'De hele school doet mee, en ook mensen van buiten de school mogen de tentoonstelling bezoeken. Het populariseren van het vak wiskunde wordt hiermee erg goed aangepakt! De school wint de Wiskunde Scholen Prijs met name omdat de school erin geslaagd is een spectaculair evenement op uitstekende wijze te verzorgen, waar leerlingen in alle geledingen zeker voor te porren zullen zijn. Het enthousiasme voor het vak wiskunde wordt absoluut vergroot. Petje af voor de leraren die zo'n groot evenement durven te organiseren!'* Voor de reizende wiskundetentoonstelling (*Wanderausstellung*) zie de website van het Mathematikum^[2].

Gemeentepolitiek – Interconfessionele Scholengroep Westland, 's-Gravenzande

De leerlingen houden zich gedurende twee maanden bezig met een vakoverstijgend project van de vakken maatschappijleer, Nederlands en wiskunde. Ze bezoeken bijeenkomsten van de gemeenteraad en gaan met de raadsleden in debat over lokale, maatschappelijk relevante onderwerpen; ze enquêteren vervolgens ieder 25 mensen over de onderwerpen en ze verwerken de gegevens met behulp van VU-Statistiek.

De jury vond het een boeiende combinatie van vakken: *'Dit project is werkelijk vakoverstijgend, leerlingen leren Nederlands, wiskunde en maatschappijleer. De maatschappelijke relevantie is mooi. Daarbij is het project goed georganiseerd. Er is ruimte voor de leerlingen om echt een eigen werkstuk te maken, maar tussentijds is er voldoende sturing en feedback om daar werkelijk iets goeds van te maken. Het omgaan met het statistiekprogramma is zeer betekenisvol in deze context.'*

Contactpersoon: Bert van der Windt (e-mailadres: wnt@isw.info).

Waarom meedoen aan de Wiskunde Scholen Prijs 2010?

De projecten die ingestuurd worden zijn zeer gevarieerd. Wij denken dat veel meer scholen 'zulk soort dingen' wel doen, maar er nog nooit over gedacht hebben om wat zij toch al doen, in te sturen om mee te dingen naar de Wiskunde Scholen Prijs.

Wij hopen dat u dat dit jaar wél wilt doen! Het kan de school een prijs van 1000 euro opleveren (per categorie), en werkgroepen over het project op wiskundeconferenties, maar ook allerlei andersoortige 'spin-off':

- Geïnspireerd door het behalen van de eerste prijs in de Wiskunde Scholen Prijs heeft het Midden Brabant College te Tilburg hun project 'Smakelijk eten?' ook mee laten doen aan de Innovatiecampagne 2006 van de VO-raad. Het project viel wederom in de prijzen; deze keer een prijs van maar liefst 50 000 euro!

- In 2007 won het project 'Wiskunde zonder boek'^[4] van het Hermann Wesselink College te Amstelveen. Dit leidde tot een subsidie van ruim 70 000 euro van Kennisnet, om het project uit te breiden.

U kunt uw project nog insturen; meer informatie daarover vindt u op de website van de Wiskunde Scholen Prijs^[3].

Noten

[1] URL: <http://www.nvvw.nl/page.php?id=7720>

[2] URL: <http://www.mathematikum-unterwegs.de>

[3] URL: www.wiskundeschoolenprijs.nl

[4] URL: www.wiskundezonderboek.nl

Over de auteur

Dédé de Haan is werkzaam bij het Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (Universiteit Utrecht) en organisator van de Wiskunde Scholen Prijs.

E-mailadres: d.dehaan@fi.uu.nl



foto 1 Ingrid Berwald met prijs



foto 2 'Mathematik' op Were Di

Moet dat zo? Kan het echt niet anders?

[Sieb Kemme]

‘Kunt u me uitleggen wat het verschil is tussen wiskunde A, B, C en D?’, is een veel gestelde vraag van ouders en leerlingen aan decaan en/of docent wiskunde. Een antwoord? Moeilijk is dat niet. Een schemaatje van de profielen en de verschillende soorten wiskunde daarin is gauw gemaakt.

‘Dus C is de gemakkelijkste wiskunde, dan A, dan B, en D is het moeilijkste?’ Zo ongeveer wel ja.

‘Maar wat een rare volgorde is dat dan, je zou toch eerder de volgorde A, B, C, D verwachten van gemakkelijk naar moeilijk?’ Tja, moet je dan beginnen uit te leggen hoe dat allemaal zo is gekomen?

Maar deze vragen zijn de ergste niet. Veel erger is:

- dat leerlingen in havo C&M wiskunde kunnen laten vallen en dat daar nu juist de leerlingen tussen zitten die straks naar de pabo gaan;
- dat wiskunde A gekozen kan worden binnen E&M en N&G en dat daardoor het oude wiskunde A-programma sterk is opgeschoven in de B-richting;
- dat wiskunde C bijna een deelverzameling is van dat opgeschoven wiskunde A-programma, zodat veel scholen ervoor kiezen om deze leerlingen tot en met klas 5 in één groep te houden, zodat deze C'ers zitten te zwoegen onder het juk en het tempo van de A'ers;
- dat het havo B-programma stevig met extra algebra is aangezet, dat daar op veel scholen geen extra uren tegenover staan en dat het programma daardoor zwaar overladen is;
- dat de D-programma's voor de helft bestaan uit restanten uit de vroegere A-programma's, dat daardoor de D-leerlingen voor dat onderdeel de zo gewenste uitdaging zullen moeten missen;
- dat tenslotte de politiek bedacht heeft dat de leerlingen voor de kernvakken wiskunde, Nederlands en Engels op het centraal examen hooguit één 5 mogen halen.

Het gevolg hiervan is:

- dat leerlingen op safe gaan spelen en meer voor wiskunde A gaan kiezen, omdat je dan toch nog alle kanten uit kunt en je minder risico loopt op een onvoldoende op het cse;
- dat minder leerlingen voor wiskunde B gaan kiezen en dus ook nog minder leerlingen voor wiskunde D;
- dat scholen nog minder bereid zullen zijn om het dure wiskunde D in de lucht te houden omdat je dat toch nergens echt voor nodig hebt.

Is dit erg? Ja, de leegloop van wiskunde B en dus ook van wiskunde D gaat regelrecht in tegen de zozeer door de exacte en technische vervolgopleidingen gewenste versteviging van de basisvaardigheden wiskunde. En vooral niet te vergeten: ook de meeste wiskundeleraars zelf vinden dat die basisvaardigheden best wat steviger mogen worden aangezet, mits de randvoorwaarden dit in redelijkheid mogelijk maken.

Zullen we maar weer gewoon terug naar wiskunde A en wiskunde B? Wiskunde A weer als echt gamma-vak voor de profielen E&M en C&M. Dan heb je ook geen apart wiskunde C meer nodig. Misschien kun je nog denken aan een differentiatie in het schoolexamen voor de C&M-leerlingen en de E&M-leerlingen.

En dan wiskunde B weer gewoon voor N&G en N&T, maar dan wel met meer contacturen, zeker in de havo. Die uitbreiding van uren kan met gemak betaald worden door het verdwijnen van de kleine en dure C- en D-groepen.

cTWO is op dit ogenblik druk bezig met het experimenteren met nieuwe programma's, waaronder een C-programma met een geheel eigen gezicht. Is dit vergeefse moeite? Het lijkt me niet, want het levert nieuw en uitgetest materiaal op dat we snel kunnen inzetten in een andere opzet van een A-programma.

Als ik minister of staatssecretaris was dan wist ik het wel: liever twee volwaardige wiskunde A en B vakken, toegespitst op de

capaciteiten en interesses van de leerlingen, dan verder werken met de huidige half-gebakken A, B, C en D indeling, ongelukkig geboren uit het getouwtrek tussen politiek, schoolmanagement en vervolgopleidingen.

Over de auteur

Sieb Kemme studeerde wiskunde, gaf les aan leerlingen en studenten en houdt zich bezig met de ontwikkeling van lesmateriaal voor het wiskundeonderwijs. Van 2007 tot 2009 was hij, als projectleider van cTWO, ook betrokken bij beleidsmatige ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. E-mailadres: skemme@educadvb.nl

Vanuit de oude doos

A^o 1937

[Ton Lecluse]

Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Evenwijdig

Naar aanleiding van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1937; de eigenlijke opgave, letterlijk:

Gegeven $\triangle ABC$; de zijde BC is groter dan de zijde AC . De bissectrix van $\angle C$ snijdt AB in D . Op CD bepaalt men het van D verschillende punt E , zodat $AE = AD$. Bewijs, dat AE evenwijdig is met de raaklijn, in C aan de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ getrokken.

U wordt eerst uitgedaagd een tekening te construeren die aan de gegevens voldoet, en het bewijs te leveren.

Dan pas onder de streep spieken! Wellicht helpt het dit model te tekenen met een dynamisch computerprogramma.



figuur 1

Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Verleng CD tot het punt G op de cirkel, en trek AG en BG . Ga op zoek naar gelijke hoeken.



figuur 2

Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.



figuur 3

Omdat CD bissectrice is van hoek C , zijn de hoeken ACG en BCG gelijk; dus de bogen AG en BG ook.

Omtrekshoeken op deze bogen zijn gelijk. Dit zijn de vier met x gemarkeerde hoeken. Op boog AC zijn de met y gemarkeerde omtrekshoeken ACF en AGC gelijk. Hoek ADE is buitenhoek van driehoek AGD , dus:

$$\angle ADE = \angle DAG + \angle DGA = x + y$$

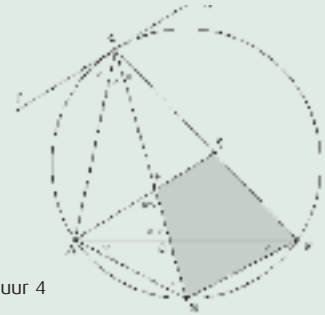
Omdat driehoek ADE gelijkbenig is, is dus ook $\angle AED = x + y$.

Dus $\angle AED = \angle FCD = x + y$, waaruit volgt dat de raaklijn evenwijdig is met AE (F -hoeken).

En dan nog de toetjes

Deze keer was het een relatief eenvoudige opgave, en dan is het wellicht de moeite waard te bekijken of er verder nog iets leuks te ontdekken is in de tekening.

En jawel hoor, verleng AE tot deze BC snijdt (in K). Nu blijkt $BKEG$ een koorden-vierhoek te zijn.



figuur 4

Hoezo? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

$\angle ABC = \angle AGC = y$ (beide staan als omtrekshoek op boog AC).

Dus:

$$(1) \dots \angle GBK = x + y$$

$$(2) \dots \angle GEK = 180^\circ - \angle GEA = 180^\circ - (x + y)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$\angle GBK + \angle GEK = 180^\circ$; dus is $BKEG$ een koorden-vierhoek.

Tot slot

Er zijn nogal wat driehoeken waarin de hoeken x , y en $x + y$ een rol spelen. Dit levert een aantal gelijkvormige driehoeken op. Ook leuk om na te gaan:

- $\triangle ABC \sim \triangle ACK$;
- $\triangle ACD \sim \triangle BCG \sim \triangle BDG \sim \triangle CEK$;
- $\triangle ACE \sim \triangle ACG \sim \triangle ADG \sim \triangle BCD$;
- $\triangle BCE \sim \triangle CGK$.

En wie er niet genoeg van kan krijgen...

Er zijn leuke koppels driehoeken met gelijke oppervlakte:

ABE en BDK , ACD en BCE , ACE en CDK , ADK en BEK .

Bron

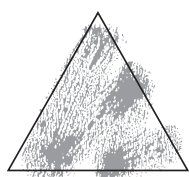
Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.

E-mailadres: alecluse@casema.nl

Vooruitzien op Texel



DE HOGEBERG

OPENBARE SCHOLENGEMEENSCHAP VMBO - HAVO - VWO

In onze missie zeggen we o.a. dat we zo mogelijk voor elke leerling op Texel geschikt voortgezet onderwijs aanbieden. De OSG De Hogeberg is een van de kleinste brede scholengemeenschappen van Nederland.

We zijn hard aan het werk met de nieuwe onderbouw, de realisering van werkplekkenstructuur en praktijksimulatie in het VMBO, doorlopende leerlijnen, de vernieuwde 2^e Fase, teamontwikkeling en dit alles met ingang van schooljaar 2010/2011 in een nieuw schoolgebouw.

Een school, waar volgens het laatste inspectierapport: 'de leerling nog echt gezien wordt' en bovenal een kleinschalige school op een eiland omringd door zee, strand, natuur en ruimte.

Wij zoeken collega's voor de volgende vacatures:

Voor zo spoedig mogelijk:

Docent wiskunde 2^e graads 0,80 FTE

Bij voorkeur met ervaring in VMBO bl, kl en LWOO

Docent wiskunde 1^e graads 0,80 FTE

Bij voorkeur met ervaring in bovenbouw HAVO/VWO

Combinatie van vacatures is mogelijk.

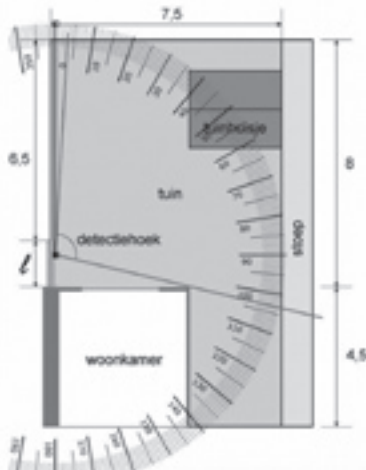
Wij zoeken enthousiaste collega's die bereid en in staat zijn in teamverband te functioneren en mee willen helpen binnen die teams de leerling centraal te stellen. Gelieve sollicitaties vóór 19 april te richten aan Mw. A. de Vries, postbus 153, 1790 AD, Den Burg - Texel, of per e-mail naar directie@dehogeberg.nl.

Voor nadere inlichtingen over de vacatures kunt u mailen naar bovenstaand adres of bellen naar: **06-22398521**.

Nieuwe examens vmbo-basis

EEN GOEDE ONTWIKKELING, MAAR NOG NIET RIJP GENOEG

[Henk Bijleveld]



figuur 1 'Digitale geodriehoek' uit
VMBO-BB 2009 (digitaal)

Wel even wennen

Zoals aan alle veranderingen in het onderwijs moest ik als docent ook even wennen aan de nieuwe computerexamens. Ik weet niet hoe het u vergaan is. Het kan zijn dat u allang op de hoogte was, of dat het u overvallen heeft doordat u om de een of andere reden niet goed opgelet heeft, of doordat de directie u niet tijdig heeft geïnformeerd. Maar we zullen er aan moeten, aan de nieuwe examens wiskunde vmbo-basis die we op de computer gaan afnemen. Het resultaat van dit examen blijft voor de helft meetellen in het eindcijfer. In de Werkgroep-VMBO en van collega's in het land heb ik heel wat verschillende reacties gehad. De een was positief verrast en de ander was niet helemaal tevreden. We zijn nu wel af van heel wat werk, omdat er geen kilo's papier door het land gaan.

Voordelen: rust en geen stress in de examenzaal

Een groot voordeel is dat leerlingen het examen mogen maken op tijden die de school zelf kan bepalen. Je kunt leerlingen dus in kleine groepjes en in een vertrouwde omgeving de toets af laten leggen. Ik weet uit ervaring dat met name basis-leerlingen in de examenzaal erg veel stress hebben. Het

is ongewoon en alles is dan heel officieel. Je kunt in je eigen klas en je eigen lokaal op een rustige manier examen doen. Dan komen de vaardigheden die de leerling geleerd heeft, het best tot uiting. Het werken met computers heeft echter ook nadelen. Op veel scholen is ICT helaas de sluitpost en is een goede werking van alle computers in het computerlokaal niet altijd gewaarborgd. Dat geeft niet alleen stress bij de docent maar ook bij de leerling.

Zijn oefenexamens handig?

Om bekend te raken met de nieuwe vorm van examineren zijn er oefenexamens beschikbaar gesteld. Bij deze oefenexamens zat een vraag die bij beantwoording tot gevolg had dat het systeem vastliep. Als je de vraag oversloeg, dan kon je wel verder. Een collega vertelde mij dat hij zijn leerlingen altijd de belangrijkste gegevens en getallen eerst liet opschrijven, om daarna pas de som te gaan uitrekenen. Bij het examen heeft geen van zijn leerlingen dat gedaan, terwijl dat met de papieren versie wel goed ging. Dit is dus een vaardigheid die bij computerexamens opnieuw geoefend moet worden. Voor leerlingen is het niet vanzelfsprekend de aangeleerde gewoontes bij een papieren examen ook toe te passen bij het computerexamen. Het nabespreken van de oefenexamens met leerlingen ging eigenlijk niet omdat ze niet uitgeprint konden worden. Mijn collega had zijn leerlingen gevraagd om de sommen, waar ze moeite mee hadden, op te schrijven; maar ook dat kwam er niet van. De leerlingen krijgen wel een cijfer voor hun proefexamen en dat geeft een indicatie van hun niveau en van hun vaardigheden met de computer. Gelukkig is het nakijken van de examens simpel, want het correctie-model is duidelijk. De meerkeuze-vragen worden door de computer nagekeken en de open vragen corrigeert de docent zelf. Bij twijfel kan de docent gemakkelijk kijken hoe hij dat bij een andere leerling heeft beoordeeld.

Vmbo-leerlingen lezen niet erg vlot

Voor vmbo-leerlingen in het algemeen, en basis-leerlingen in het bijzonder, is het moeilijk om geconcentreerd te lezen, zeker vanaf een beeldscherm. Als ze van een beeldscherm lezen, dan doen ze dat bij voorkeur snel en vluchtig, zoals ze dat gewend zijn met msn'en in de chatbox. Het blijkt dat ze tijdens het examen te snel lezen en niet lang willen nadenken om een antwoord te vinden. Veel leerlingen vinden het fijn om op papier wat aantekeningen te maken naast de opgave, wat te onderstrepen of om een rijtje op te schrijven. Dat kan niet op een beeldscherm. Je kunt natuurlijk wel een kladblaadje nemen, maar dat is niet zoals ze dat gewend zijn als ze de opgaven op papier krijgen. Docenten moeten hun leerlingen dus aanleren om een blaadje naast de computer te gebruiken waarop ze belangrijke gegevens of een stukje berekening of wat dan ook kunnen opschrijven. Het is echt belangrijk dat hiermee geoefend wordt, omdat leerlingen er niet uit zichzelf aan beginnen en er niet bekend mee zijn.

Het is toch anders

Veel vaardigheden die basis-leerlingen geleerd hebben, hebben ze zich op papier eigen gemaakt. Een hoek tekenen gaat lastig op het beeldscherm en een collega vertelde mij dat hij nog nooit leerlingen op de manier van het examen een hoek had laten opmeten. De vraag in het examen was 'meet met behulp van de hoekmeter die hoek op'. Je moest de hoekmeter met de muis op de te meten hoek leggen en dan de benen van de hoekmeter zo leggen dat ze een hoek vormden die precies even groot was als de te meten hoek (zie figuur 1). Klaar. Mijn vraag is daarbij wat de leerlingen moeten weten en welke vaardigheid er wordt getoetst. En hoek meten zullen ze nooit meer op die manier doen. Een andere vraag die meteen opgeroepen wordt is of het voor leerlingen moeilijker geworden is met dit computerexamen. Maken leerlingen een computerexamen

slechter dan een gewoon papieren examen? Of doen ze het wel slechter, maar zijn de vragen zelf makkelijker, waardoor de schade meevalt? Het uiteindelijke gemiddelde cijfer week niet af van de resultaten die voorgaande jaren gehaald werden (zie: www.cito.nl/volce/verslag/eind_fr.htm).

De opgaven zelf

Vakinhoudelijk was er ook veel commentaar uit verschillende hoeken. Maar ja, wat voor de ene docent een goed examen is, is voor de andere weer een waardeloze toets. Ik denk dat je als docent toch je eigen belangrijke onderdelen in het examenprogramma hebt. Dat is niet zo verwonderlijk want de meisjes van verzorging hebben andere vaardigheden nodig dan de jongens uit de bouw. Toch maken alle BB-leerlingen hetzelfde examen. Dat was bij de gewone papieren examens ook al zo. De vraag is bijvoorbeeld of het voor zorg&welzijn-leerlingen wel zo nuttig is om meetkunde te krijgen, maar dat is geen exclusieve vraag voor het computerexamen.

Tot slot

Ik denk dat de makers van de examens goed moeten luisteren naar de docenten in het veld, en daarmee hun voordeel moeten doen. Maar om te kunnen luisteren moeten er wel geluiden uit het veld komen. Daarom is het jammer dat er geen regionale examenbesprekingen zijn voor het vmbo; maar collega's: Laat u zich wel horen! U kunt uw opmerkingen over de examens altijd sturen naar mij en/of de Werkgroep-VMBO. En, u kunt ze plaatsen op het forum op de website van de Vereniging (www.nvvw.nl) of een stukje insturen naar *Euclides* (e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl).

Over de auteur

Henk Bijleveld is wiskundedocent op de Meerwaarde in Barneveld, school voor vmbo-onderwijs en bestuurslid van de NVvW voor het VMBO. Zijn e-mailadres is: h.bijleveld@nvvw.nl



Gecijferd! - een multimediaal leermiddel voor rekenen

Gecijferd! biedt een andere kijk op het omgaan met de kwantitatieve wereld om ons heen.

De realiteit wordt zo veel mogelijk benadrukt, beeld en gesproken taal vervangen de talige contexten en onnodige abstractie van het traditionele rekenen wordt liever vermeden.

Bewerkingen worden als middel ingezet om een probleem op te lossen en zijn geen doel op zich.

Gecijferd! is het eerste product dat het referentieniveau 2F uit het rapport-Meijerink uitgewerkt heeft in een compleet leermiddel.



Gecijferd! is te bereiken via de website www.gecijferd.nl en biedt

- een moderne techniek om te leren rekenen
- diagnostische deoltoetsen
- een volwassen benadering van de doelgroep
- voorstelbare en aansprekende contexten
- tientallen video's en honderden animaties
- gesproken tekst
- honderden trainingsopgaven
- gratis werkbladen
- sturende feedback bij iedere opgave

Meer info: surf naar www.gecijferd.nl. **Wilt u meer weten over het product of heeft u andere vragen?** Mail of bel Madeleine Vliegthart, m.vliegthart@aps.nl, 06 2505 1941. **Gecijferd!** is SCORM-compliant en werkt binnen en buiten elo's.



VERSCHENEN



Ondertitel: Waarom? Wat? Hoe?

Auteurs: Kees Hoogland, Martin van Reeuwijk, Suzanne Sjoers, Madeleine Vliegthart, Rachel van Vugt, Peter van Wijk

Uitgever: APS, Utrecht (2009)

Prijs: € 9,50, (64 pagina's)

/ REKENEN IN HET VOORTGEZET ONDERWIJS

Van de achterflap – Dat leerlingen goed moeten kunnen rekenen, daar is iedereen het eigenlijk wel over eens. Hoe je leerlingen nu effectief, zinvol en motiverend een repertoire aan bruikbare rekenvaardigheden bijbrengt is een zoektocht die velen wereldwijd ondernemen.

Het is ook een zoektocht die verandert met de jaren. Onderwijs is onderdeel van de maatschappij en binnen het onderwijs zijn leerkrachten en docenten voortdurend op zoek naar wegen om leerlingen adequaat voor te bereiden op het functioneren in de huidige en toekomstige maatschappij. Zo ook binnen het rekenonderwijs.

In de publicatie *Rekenen in het voortgezet onderwijs. Waarom? Wat? Hoe?* is een groot scala aan wetenswaardigheden, visies, voorbeelden, tips en handvatten samengebracht die docenten in het voortgezet onderwijs kunnen helpen of inspireren bij hun zoektocht naar goed rekenonderwijs voor hun leerlingen. Het boekje bestaat uit

een kleine dertig bijdragen van ieder twee pagina's over rekenen in het voortgezet onderwijs. De bijdragen zijn ingedeeld in drie delen: *waarom*, *wat* en *hoe*, en zijn afzonderlijk van elkaar te lezen. Er is geen vaste leesvolgorde.

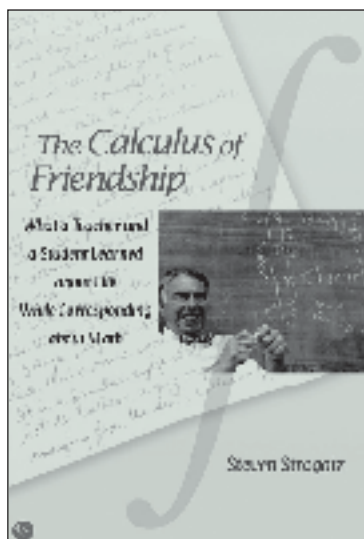
In sommige teksten wordt verwezen naar uitgebreidere bronnen (websites) en andere publicaties.

Bestelinformatie

Deze publicatie kan besteld worden via de APS-website (www.aps.nl); klik dan op 'publicaties'. Bestelnummer: 962002.

Bestellen kan ook telefonisch bij Boom, Meppel: telefoon 0522-237555.

VERSCHENEN



Ondertitel: What a Teacher and a Student Learned about Life While Corresponding about Math

Auteur: Steven Strogatz

Uitgever: University Presses of California, Princeton (2009)

ISBN: 9780691134932

Prijs: € 19,99 (166 pagina's, hardcover)

/ THE CALCULUS OF FRIENDSHIP

Synopsis – *The Calculus of Friendship* is the story of an extraordinary connection between a teacher and a student, as chronicled through more than thirty years of letters between them. What makes their relationship unique is that it is based almost entirely on a shared love of calculus. For them, calculus is more than a branch of mathematics; it is a game they love playing together, a constant when all else is in flux. The teacher goes from the prime of his career to retirement, competes in whitewater kayaking at the international level, and loses a son. The student matures from high school math whiz to Ivy League professor, suffers the sudden death of a parent, and blunders into a marriage destined to fail. Yet through it all they take refuge in the haven of calculus—until a day comes when calculus is no longer enough (...).

Recensie (door Avento op 'bol.com') – De subtitel van dit boek is 'What a teacher and a student learned about life while corresponding about Math'. Nu moet ik zeggen dat dit boek voor 80% gaat over de wiskunde,

en 20% over het verhaal er achter. Oftewel, zo veel over 'Life' gaat het niet. En hoewel het verhaal wel wat emoties heeft, is het geen verhaal waarvan je echt tranen in je ogen krijgt, of iets dergelijks. Wel leest het best makkelijk weg.

Wat dit boek ook wel heeft, is een paar stukjes met erg interessant en vooral mooie/galante wiskundige uitwerkingen, die ik persoonlijk erg mooi vond om te zien. Voor fans van wiskunde is dit boek dus wel aan te raden. Enig nadeel: dit boek vereist wel best wat voorkennis. (Dingen als Dimensional Analysis en Fourier Series komen voorbij.) En hoewel de schrijver dit ook op een makkelijke manier heeft geprobeerd uit te leggen, is dat lang niet altijd gelukt. Dus, ik zou zeggen dat het wel min of meer vereist is om ten minste een Calculus-vak gevolgd te hebben op universitair niveau, of iets soortgelijks, om de stukjes in dit boek echt goed te volgen.



Van de bestuurstafel

GEBOEID DOOR WISKUNDE

[Henk van der Kooij]

Vooraf

Leuk idee: schrijf als bestuurslid een bijdrage voor *Euclides* waarin je vertelt wat je binnen het bestuur doet en over het andere (betaalde) werk dat je van de straat houdt.

Ik heb het een en ander aan veranderingen meegemaakt als docent (startend met de HEWET, begin jaren tachtig), als FI-medewerker (HAWEX, eind tachtiger-jaren, en het TWIN-project in het mbo, eindjaren '90), als lerarenopleider (Archimedes in Utrecht) en als clustercoördinator exact bij CEVO (2003-2008, o.a. met de PEP-operatie rond de programma-wijzigingen havo/vwo van 2007). Door dat soort activiteiten ontstaat vanzelf een breed netwerk van docenten, beleidsmakers en politici. Ik ben dan ook een van-alles-wat-figuur in het bestuur die zich graag bemoeit met zaken die te maken hebben met de kwaliteit van het wiskundeonderwijs. Over de bewogen jaren die voorbij lijken te zijn, wil ik een keer op persoonlijke titel schrijven.

In deze bestuursrubriek wil ik het vooral hebben over de zaken die mij nu – binnen het bestuur – bezighouden.

Algebraïsche vaardigheden

In 2005 werkten syllabuscommissies, onder regie van de CEVO (nu CvE), aan detaillering van het deel van het globale examenprogramma dat in het CSE wordt getoetst. Een belangrijk onderdeel van elke syllabus werd gevormd door een hoofdstuk met een aanscherping van de algebraïsche vaardigheden die leerlingen zonder gebruik van formulekaart of GR dienen te beheersen. In december 2005 was dat werk klaar en de resultaten werden via een

raadpleging voorgelegd aan het veld.

In twee bijeenkomsten (havo en vwo) in januari 2006 bleek dat de aanwezige docenten in grote lijnen instemden met deze aanscherpingen, maar er werd ook gewaarschuwd dat het bereiken van dat niveau meerdere jaren zou vergen, en er was ook twijfel of dat wel ooit bereikt zou kunnen worden binnen de beperkte onderwijstijd die werd gegund. De resultaten bij de examens havo-B van 2009 laten dan ook duidelijk zien dat we er zeker nog niet zijn. Intussen waren het bestaan van entreetoetsen in het hoger onderwijs en de exittoets voor wiskunde-B van de Werkgroep HAVO/VWO mede aanleiding voor de start van het SURF-project NKBW (Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde), dat als doel had het in kaart brengen van de kloof tussen vo en ho op het gebied van algebraïsche vaardigheden en ook om te onderzoeken hoe die kloof verkleind zou kunnen worden. Gelukkig kwam er een langer lopend project NKBW2 waarin meer tijd is om ook daadwerkelijk iets te doen. Eén van de resultaten is dat er voor vwo-B, vwo-A en havo-B nu voorbeeldtoetsen zijn, die voor de vo-docenten weergeven wat leerlingen die doorstromen naar het hoger onderwijs, echt moeten kennen en kunnen, en die voor het hoger onderwijs aanduiden wat de kennisbasis is van aankomende studenten. Binnenkort zullen die toetsen in *Euclides* worden besproken. Als u nu al wilt weten wat er dan zoal wordt gevraagd, dan kunt u de toetsen die in 2009 zijn afgenomen, bekijken op de website van NKBW (www.nkbw.nl). Het belang voor het wiskundeonderwijs is dat binnen het NKBW-project, in goed onderling overleg

tussen vo en ho, wordt geprobeerd het aansluitingsprobleem aan te pakken. Maar dat probleem verhelp je niet met een korte actie. Daarom wordt er getracht deze landelijke toetsen nog tenminste vier jaar te construeren en te laten gebruiken in vo en ho, en die tijd ook te benutten om de discussie tussen vo en ho over de aansluiting voort te zetten.

Rekenvaardigheden

Tegelijk met de commotie rond algebraïsche vaardigheden (Lieve Maria; begin 2006) kwamen ook de slechte prestaties van beginnende pabo-studenten op het gebied van rekenen in de politieke aandacht. Een direct gevolg was dat de politiek een Expertgroep Taal en Rekenen (commissie Meijerink) liet instellen om er voor te zorgen dat deze problematiek zo snel mogelijk zou worden beschreven en vervolgens aangepakt en opgelost. Het gevolg is dat er nu referentieniveaus zijn beschreven en dat er vanuit OCW veel geld – verspreid over heel veel afzonderlijke initiatieven – beschikbaar is om het probleem snel op te lossen. Er is geen regie en dus gebeuren er overal dingen die door niemand worden gecoördineerd. De NVvW heeft twee rekenprojecten in gebieden waar wiskunde niet een verplicht examenvak is: vmbo Zorg & Welzijn en Economie, en in havo het profiel C&M. Om enige landelijke afstemming te bereiken hebben we klankbordgroepen samengesteld waarin alle belanghebbenden zijn verenigd. Met name de wildgroei in toetsing van de referentieniveaus 2F en 3F (onder andere de Cito-toetsen) staat hoog op de agenda van deze klankbordgroepen. Wij hopen tegen het einde van het project (juli 2010) een bijdrage te hebben geleverd

aan een coherente aanpak van de rekenproblematiek. Ook over dit onderwerp zal een artikel verschijnen in *Euclides*.

Geboeid door wiskunde

Natuurlijk zijn er ook zaken in de wiskunde en het wiskundeonderwijs die minder problematisch zijn. Gelukkig weten veel docenten hun leerlingen te boeien met de mooie kanten van het vak. Daarnaast zijn er veel initiatieven die buiten het schoolboekje om gaan: Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Kangoeroe, Olympiade, A-lympiade en Wiskunde B-dag zijn voorbeelden.

Ik ben binnen het bestuur verantwoordelijk voor de inhoud van de studiedag en op de komende studiedag (in november 2010) willen we graag de leuke en inspirerende kanten van de wiskunde centraal stellen. Als voorlopige titel hanteren we 'Geboeid door wiskunde'.

In de volgende *Euclides* komt een korte beschrijving en een oproep aan alle docenten om actief bij te dragen aan het succes van die dag.

BOEKBESPREKING

/ LOGICOMIX

[Peter Lanser]



Ondertitel: Een epische zoektocht naar de waarheid

Auteurs: Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou

Vertaling: Mat Schifferstein

Uitgever: De Vliegende Hollander, Amsterdam (2009)

ISBN: 9789049500405

Prijs: € 19,95 (354 pagina's, paperback)

Mijn zoontje van drie heeft 's avonds wel eens moeite om in slaap te komen. Om allerlei gedoe te voorkomen – na een lange werkdag snakken wij als ouders immers ook naar onze rust – mag hij dan in ons bed slapen. Meerdere malen trof ik hem vervolgens aan met het boek *Logicomix* dat normaal gesproken op mijn nachtkastje staat, maar die keren naast, onder of op hem lag. Een boek dus dat ook driejarigen weet te boeien.

Logicomix is een tamelijk ongewoon boek dat de geschiedenis van de wiskunde en specifiek die van de logica beschrijft. Of beter gezegd, waarin die historie is opgetekend, letterlijk. Mogelijkerwijs is het niet het eerste stripboek dat over wiskunde gaat, het is echter wel het eerste wiskunde-stripboek dat ik in mijn handen had. En laat ik dan ook maar eerlijk bekennen dat ik enigszins huiverig was: mijn associatie met strips, die ik net als vele anderen in mijn

kinderjaren veel gelezen heb, is vooral die van vermaak.

Logicomix – een epische zoektocht naar de waarheid beschrijft het leven van de filosoof, wiskundige en politiek activist Bertrand Russell (1872-1970). Hoe hij als jongen in de wiskunde de structuur vindt, die zijn leven dan ontbeert. Over het ontstaan van *Principia Mathematica*, begin twintigste eeuw een standaardwerk binnen de wiskunde, over Russell's bijdragen aan de fundamenteën van de wiskunde, over zijn, overigens louter fictieve ontmoetingen met Wittgenstein, Frege en Cantor, maar ook over zijn diepgaande worstelingen met zijn pacifisme en het gevaar van het fascisme en communisme.

Logicomix gaat evenwel ook over het ontstaan en de creatie van het stripboek *Logicomix*, of beter gezegd, over de logica van deze vertelling in stripvorm zelf. Toegegeven, ik heb door de jaren heen meerdere werken van Russell gelezen en voel veel sympathie voor hem als een geëngageerd wiskundige. Toch denk ik dat ook zonder enige voorkennis de mix van de diverse logica's *Logicomix* tot een uiterst fascinerend stripboek maakt voor jong en oud, tot een boek dat je niet loslaat, sterker nog, dat je wilt blijven lezen, ook als je het al gelezen hebt. Net zoals bij mijn zoontje dus, al zal zijn fascinatie voor dit boek voor mij een mysterie blijven.

Over de recensent

Peter Lanser is wiskundedocent en teamleider op de Werkplaats Kindergemeenschap te Bilthoven en schrijver van *De Laatste Stelling van Fermat* (Zebrareeks 7).



Examenbesprekingen 2010

[Grada Fokkens en Conny Gaykema]

Het schema van de examenbesprekingen 2010 is nog onvolledig omdat bij het ter perse gaan van dit nummer niet alle gegevens bekend waren. Het kan zijn dat er inmiddels een gespreksleider gevonden is voor de examenbespreking van uw interesse. U vindt het definitieve schema op de NVvW-website (www.nvvw.nl).

Mocht er voor een examen in een bepaalde plaats geen gespreksleider gevonden zijn, dan gaat de regionale bespreking niet door (raadpleeg daartoe de website). In dat geval kunt u er voor kiezen zich aan te melden voor de *centrale* examenbespreking van het betreffende examen. Deze centrale bespreking wordt gehouden te Utrecht op de dag voorafgaande aan die van de regionale bespreking. Hiervoor kunt u zich dan tot uiterlijk 30 april aanmelden bij Grada Fokkens (e-mail: gfokkens@onc.nl).

VMBO TGK
centraal: dinsdag 25 mei 2010 /
16:00-18:00u

UTRECHT

Jaarbeurs, Beatrixgebouw
Omdat het examen vlak voor het lange Pinksterweekend plaatsvindt, zal er *alleen* een **centrale bespreking** gehouden worden. De resultaten daarvan zullen vanaf woensdag 26 mei op de website van de NVvW worden gepubliceerd (www.nvvw.nl).

Bent u een docent(e) met veel ervaring in de examenklas, dan bent u van harte uitgenodigd om mee te praten over de normering. U kunt zich tot uiterlijk 30 april aanmelden bij Conny Gaykema (gespreksleider; e-mail: c.gaykema@orange.nl). Begin mei ontvangt u dan nader bericht.

HAVO A
vrijdag 21 mei 2010 / 16:00-18:00u

HAVO B
donderdag 20 mei 2010 /
16:00-18:00u

AMERSFOORT

S.G. Guido de Brès
Paladijnenweg 251 (033-4792900)
A: dhr. A.B. v.d. Roest (0318-543167)
B: dhr. J.S. Dominguez (06-10397591)

AMSTERDAM

CSG Buitenveldert
De Cuserstraat 3 (020-6423902)^[1]
A: dhr. S.T. Min (0229-237756)
B: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)

's-GRAVENHAGE

CC De Populier
Populierstraat 109 (070-3648808)
A: mw. M.P. Kollenveld (070-3907004)
B: dhr. C. van Someren (033-4807461)

GRONINGEN

Röling College
Melisseweg 2 (050-5474141)
A: dhr. L. Tolboom (050-3146093)
B: mw. H. Lüder (0516-432889)

NIJMEGEN

Mondialcollege
Leuvenbroek 30-01 (024-3786993)
A: nog onbekend
B: mw. L. Dirven (024-3239329)

ROTTERDAM

Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-2862930)^[2]
A: dhr. R. van Oord (0182-617089)
B: dhr. H.J. van Lien (010-5113530)

ZWOLLE

Van der Capellen SG
Lassuslaan 230 (038 4262850)
A: nog onbekend
B: nog onbekend

VWO A / C

vrijdag 28 mei 2010 / 15:30-18:00u

VWO-B

donderdag 27 mei 2010 /

16:00-18:00u

AMERSFOORT

SG Guido de Brès

Paladijnenweg 251 (033-4792900)

A/C : nog onbekend

B: nog onbekend

AMSTERDAM

CSG Buitenveldert

De Cuserstraat 3 (020-6423902) ^[1]

A/C: dhr. F. Pach (020-6926136)

B: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)

regio Arnhem: ROZENDAAL

Het Rhedens

Kleiberglaan 1 (026-3646845)

A/C: dhr. Ph. Thijsse (0315-342436)

B : dhr. A.W.M. Tromp (026-3254829)

's-GRAVENHAGE

CC De Populier

Populierstraat 109 (070-3648808)

A/C: dhr. C. van Someren (033-4807461)

B: mw. M.P. Kollenveld (070-3907004)

GRONINGEN

Röling College

Melisseweg 2 (050-5474141)

A/C: mw. H. Lüder (0516-432889)

B: mw. N. den Braber (050-5893847)

ROTTERDAM

Geref. SG Randstad

Valenciadreef 15 (010-2862930) ^[2]

A/C: dhr. J. Kisteman

B: mw. A.E.L. de Jongh Swemer

(010-4138432)

ZWOLLE

Van der Capellen SG

Lassuslaan 230 (038-4262850)

A/C: mw. A.C.H. Gieles (038-4656988)

B: dhr. A.T. Sterk (0418-641564)

Noten

[1] CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51.

[2] Station NS Rotterdam Alexander.
Parkeren op het parkeerterrein
Almeria-erf 8 is toegestaan.

Nieuws van de Werkgroep-HBO

[Metha Kamminga, Hans van Walen]

De laatste tijd is er steeds meer aandacht voor de aansluitingsproblematiek van mbo en hbo. Niet alleen vanuit het werkveld, maar in toenemende mate vanuit de besturen (MBO-raad en HBO-raad) en de politiek (Onderwijsraad en Commissie Meijerink) wordt gezocht naar verbeteringen en misschien zelfs oplossingen van de problemen. De Werkgroep-HBO van de NVvW speelt hierop in en organiseert daarom op **vrijdag 9 april 2010** te Utrecht (van 13:00u tot 17:00u) een conferentie over **de aansluiting mbo-hbo** en dan gaat het met name over de sectoren Techniek en Economie.

We verwachten veel belangstelling vanuit zowel het hbo als het mbo. Niet alleen beleidsmakers maar ook docenten, studenten en mensen uit het bedrijfsleven worden benaderd om mee te denken. Het programma van de middagconferentie wordt op de website van de werkgroep bekend gemaakt en daar wordt ook de mogelijkheid geboden van een online aanmelding. Het Ministerie van Onderwijs zal onder andere een inleiding houden om de beleidslijnen uiteen te zetten met daaropvolgend een forum om daarover nog verder te discussiëren.

Ook worden er voorbeelden gegeven van projecten waarbij mbo-hbo-samenwerking tot goede resultaten leidt en op welke fronten dat aandacht nodig heeft.

Tot slot zal er een begin worden gemaakt met het uitzetten van een Competentiebasis-doorstroom Wiskunde die er in ieder geval zou moeten zijn voor Techniek en voor Economie. Aan rekenen wordt gewerkt, maar dat is voor Techniek en Economie vaak niet voldoende.

Nu alvast kunnen we u verwijzen naar de NVvW-website, www.nvvw.nl (rechtstreeks via www.nvvw.nl/page.php?id=599), naar Werkgroepen | Werkgroep-HBO voor het laatste nieuws over de werkzaamheden van de werkgroep.

Over de auteurs

Metha Kamminga is voorzitter van de Werkgroep-HBO van de NVvW (e-mailadres: m.kamminga@nvvw.nl). Hans van Walen is secretaris van die werkgroep (e-mailadres: j.van.walen@pl.hanze.nl).

Deelrijen

[Frits Göbel]

We beginnen met een opgave waarin een algoritme wordt gevraagd.

Opgave 1

Gegeven is een tekst van n symbolen op tape.

Bepaal een algoritme die het aantal deelrijen van de vorm a, b, c bepaalt. (De komma's en de spaties behoren uiteraard niet tot de deelrij.) De tekst mag slechts eenmaal worden doorlopen en de gebruikte geheugenruimte bij deze algoritme is onafhankelijk van n .

Misschien ten overvloede: een deelrij bestaat niet perse uit opvolgende termen. Maar de volgorde blijft intact. Dus behalve 5, 7, 11, 13 is ook 5, 59, 101, 113 een deelrij van de priemgetallenrij, maar 11, 5, 7 niet.

De volgende opgave betreft rijen van n symbolen waarin geen andere symbolen dan a, b en c voorkomen. Er zijn dus 3^n zulke rijen denkbaar.

Opgave 2

Geef een recursieve methode voor het aantal zulke rijen waarin tenminste één deelrij van de vorm a, b, c voorkomt. U mag natuurlijk ook de oplossing van de recursie geven, maar dat is geen mooie formule en die wordt niet gevraagd.

Tot slot een eenvoudige opgave met een statistisch tintje.

Opgave 3

In een tekst van n symbolen geldt: voor iedere term wordt geloot welk symbool het zal worden: a, b of c . Loting is met gelijke kansen en alle lotingen zijn onderling onafhankelijk.

Bepaal het verwachte aantal deelrijen van de vorm a, b, c .

Commentaar op de opgaven is altijd van harte welkom, maar het is niet toegestaan om op te merken dat de laatste opgave ontzettend flauw is!

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@uws.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 27 april. Veel plezier!

Kikkersprongen

Er waren 26 inzenders. Alle oplossers op één na hadden vrijwel alles goed! Wat betreft de presentatie waren de inzendingen zeer uiteenlopend. Naast heel summiere ontving ik er ook nogal wat met borden in mooie kleuren.

Voornamelijk voor de lezers die wél mee-puzzelen maar niet insturen, geef ik nu eerst de antwoorden.

Bij de gewone paardsprong (2, 1) kunnen alle velden worden bereikt. Het verste veld is h8, op afstand 6. Er zijn 26 velden die niet op een kortste pad van a1 naar h8 liggen.

Ook bij de (4, 1)-sprong kunnen alle velden worden bereikt. De verste velden zijn b2 en e5, op afstand 8.

Zowel bij (4, 3) als bij (5, 2) zijn a8 en h1 de verste velden, in beide gevallen op afstand 13. Bij (4, 3) kunnen alle velden worden bereikt, bij (5, 2) de middelste vier velden niet. Dit laatste is direct in te zien als je bedenkt dat iedere (5, 2)-sprong vanuit zo'n veld buiten het bord belandt.

Velden die niet voorkomen in een kortste route naar zo'n verste veld, werden door vrijwel iedereen bepaald door 'terug te werken' vanaf de verste velden.

Twee inzenders, Herm Jan Brascamp en Wobien Doyer, werden geïnspireerd door het overeenkomstige gedrag van de gevallen (4, 3) en (5, 2).

Wobien Doyer gaf een vrijwel complete analyse van het $n \times n$ -bord waarop de kikker (p, q) -sprongen maakt met $p + q = n - 1$ en $\text{ggd}(p, q) = 1$. Zij ontdekte onder andere dat er, behalve de velden in het midden, vanuit a1 nog andere onbereikbare velden kunnen zijn.

Ik moet bekennen dat ik stomverbaasd was. Het kleinste voorbeeld ziet u *in figuur 1*. Hier is $n = 18$, $p = 5$, $q = 12$.

Voor grotere waarden van n kan de situatie nog aanmerkelijk gecompliceerder zijn.

Laderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

H. Klein 528

L. v.d. Raadt 512

W. Doyer 487

T. Kool 400

J. Hanenberg 395

H. Linders 339

N. Wensink 322

H. Bakker 318

W. v.d. Camp 302

K. Verhoeven 277

K. v.d. Straaten 267

H.J. Brascamp 239

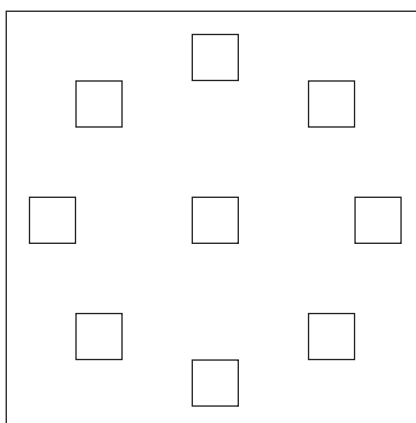
Dit betekent dat de Ladderprijs van 30 euro is gewonnen door Hans Klein.

Van harte gefeliciteerd!

Het spijt ons dat we vergeten zijn om in nummer 3 de winnaars van de kerstprijzen te vermelden. Zij hebben inmiddels hun boekenbon ontvangen, maar hun namen zijn nog niet genoemd. Bij deze doen we dat alsnog.

De winnaars van de kerstprijzen zijn Wobien Doyer en Harm Bakker; van harte gefeliciteerd!

De complete ladder staat op de website van *Euclides* (www.nvww.nl/euclides.html).



figuur 1

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen

24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en Wiskunde
 28. Voorspellen met Modellen
 29. Getallenbrouwerij
 30. Passen en Meten met Cirkels
- Zie verder ook www.nvww.nl/zebrareeks.html en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvww.nl/lustrumboek2.html
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvww.nl/Publicaties2.html

Voor overige internet-adressen zie www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie www.wiskundeonderwijs.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvww.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	18 mei 2010	23 mrt 2010
7	6 juli 2010	11 mei 2010

vrijdag 9 april, Utrecht

Conferentie aansluiting mbo-hbo
Organisatie Werkgroep-HBO van de NVvW

woensdag 21 april, op de scholen

Grote Rekendag
Organisatie Flsme

do. 22 en vr. 23 april, Utrecht

46e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG
Zie pag. 115 in *Euclides* 85-3.

zaterdag 24 april, Utrecht

HKRWO-symposium XVI: Bloed, zweet en tranen...!
Organisatie HKRWO
Zie pag. 208 in dit nummer.

woensdag 12 mei, Utrecht

Studiemiddag: Rekenbeleid bij u op school
Organisatie APS

di. 18 t/m do. 27 mei, op de scholen

Centrale Examen wiskunde
Organisatie CvE
Zie pag. 206 in dit nummer.

do. 20 t/m vr. 28 mei, regionaal

Examenbesprekingen 2010
Organisatie NVvW
Zie pag. 224 en pag. 225 in dit nummer.

vrijdag 28 mei, Utrecht

Studiemiddag: Rekenen, de overgang van po naar vo
Organisatie APS

maandag 31 mei, Utrecht

Studiemiddag: Schoolvisie op rekenen ontwikkelen en formuleren
Organisatie APS

vrijdag 4 juni, Utrecht

Wiskunde D-dag
Organisatie cTWO

vrijdag 11 juni, Utrecht

Studiemiddag: Rekenproblemen
Organisatie APS

vrijdag 18 juni, Utrecht

Studiemiddag: Hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles
Organisatie APS

TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Eenvoudig het geheel zien

Elke leerling leert op een andere manier.

De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

www.education.ti.com/nederland

**Nu tijdelijk
TI-Nspire™ 2in1
-rekenmachine + software-
voor slechts € 55* !
tel. 00800 484 22 737
(gratis)**

* exclusief 9 € verzendkosten

**NU MET
TOUCHPAD EN
LETTERTOETSEN!**



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

Noordhoff Examentrainer

Doelgericht kennishiaten opsporen en wegwerken

Noordhoff Examentrainers:

- 3 recente eindexamens
- het originele examen van 2009-1
- uitgebreide uitwerkingen
- de lastigste onderwerpen slim uitgelegd
- tips en valkuilen
- verwijzingen naar de methode(s)
- medewerking van Cito

Bestel nu voor het centraal examen 2010

 Noordhoff Uitgevers

€9,95
per stuk



Ga voor meer informatie en bestellen naar www.noordhoffexamentrainers.nl