

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

1974

februari

10

nr

4

jaargang 85

Tweetalig onderwijs

Google's PageRank

WisBase

Europees onderwijs

Bartjens Rekendictee

Ludolph van Ceulen
(1540-1610)



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

f e b r u a r i

1 0

n r

4

j a a r g a n g 8 5

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch

Klaske Blom, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Marjanne de Nijs

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Klaske Blom,

Westerdoksdiijk 39, 1013 AD Amsterdam

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tél. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovenensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tél. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tél. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tél. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 65,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 37,50
- studentleden: € 32,50
- gepensioneerden: € 37,50
- leden van de VVWL of het KWG: € 37,50

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 60,00

Instituten en scholen: € 140,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:

t.a.v. Annemieke Boere

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tél. (0318) 555 075

E-mail: a.boere@dekleuver.nl

KORT VOORAF

[Klaske Blom]

Verenigingsnummer

Dit nummer heeft een opvallend verenigingskarakter vanwege een groot aantal aan de NVvW gerelateerde bijdragen. Voor iedereen die niet aanwezig was op de studiedag van de vereniging in november 2009, en voor iedereen die nog eens wil herhalen, sla de jaarrede van Marian Kollenveld op en lees over ontdekkingsreizen, leraarschap en professionalisering. Naast de jaarrede vindt u ook een fotoreportage van deze dag, een sfeerimpressie waarmee we u willen overhalen om toch vooral dit jaar weer/wel te komen naar de NVvW-dag. Herinnert u zich nog dat Frank van den Heuvel in nummer 3 zich afvroeg of de naam NVvW nog wel up-to-date is, in zijn artikel *What's in a name?*, of dat we in de toekomst door het leven zullen gaan als *NVvW & NLT*? Ik weet het zo net nog niet. Wel weet ik dat Harm Jan Smid in dit nummer uiteenzet dat de NVvW toch een beetje een vakbond aan het worden is – *NVvW & Bond?*

En er is nog meer vanuit de vereniging: Marianne Lambriex doet verslag van de ontwikkelingen binnen en met het beroepsregister, en Kees Lagerwaard geeft zicht op zaken waarmee het bestuur zich bezig houdt.

Februari

Wat is dat toch voor periode? Het lijkt er één van relatieve rust, een tijd waarin u mogelijk nog aan het bijkomen bent van de NWD, waarin u langzamerhand toewerkt naar een afronding van de lesstof in de examenklassen en start met de voorbereiding op de examens. Maar het is ook de tijd waarin u uw vmbo-T-leerlingen een eerste advisering moet geven over het al dan niet opnemen van wiskunde in hun pakket in de vierde klas, waarin u een profieladvisering in 3-havo/vwo moet geven, de tijd van de Open Dagen en van de achtste groepers die voor *Leuke Lesjes* op bezoek komen. Het lijkt een periode van in-de-week-zetten, een tijd in afwachting van veel dingen-die-gaan-komen. En misschien nog steeds van sneeuw en sneeuwballen... Na februari is het gedaan, verdwijnt de rust als sneeuw voor de zon en snellen de verkorte weken aan ons voorbij.

Geniet er nu nog even van en neem de tijd om *Euclides* te lezen. Er is veel lezenswaard.

In dit nummer

In *Thank you for the interesting lesson* schrijft Josephine Buskes over het geven van wiskunde in het tweetalig onderwijs. Ouderwetse spelletjes doen en praten maar; voor haar is het een verrijking van haar werk geworden. En als leerlingen door de uitwisselingen met scholen in Engeland en passant nog een graantje meepikken van de Engelse beleefdheidsvormen, is dat helemaal mooi meegenomen.

Wat ook mooi is, is de prestatie van Allard Veldman: hij werd rekenkampioen bij het Bartjens Rekendictee 2009. Ed de Moor sprak met hem over rekenen (uiteeraard), zingen, programmeren en getalinzicht. Heeft u de sommen van het dictee al eens geprobeerd met een stopwatch naast uw kladpapier? Dat valt helemaal niet mee, kan ik u verzekeren.

Ruziemakende wiskundemeesters, ze blijken van alle tijden te zijn. In het tweede deel van onze serie over Van Ceulen en zijn werk schrijven Langenkamp en Loonstra over een ruzie tussen Van Ceulen en Goudaen waarbij Van Ceulen lijkt te triomferen: *'(...) maer Willem Goudaen voor hem neder siende en niet een woort sprekende scheen wel op die tijt verslaghen ende met geen bewijsredenen teghen mijn solutie voorsien te zijne.'* Misschien wat meer echt bij de tijd zijn de artikelen van Bram Theune over WisBase, van Jan Brandts over Google en van Christian Bokhove over een dynamisch meetkundeprogramma. Het artikel van Brandts, Google's PageRank, over kabouters en Goozles, biedt fantastisch materiaal voor leerlingen die graag verder kijken dan de gangbare schoolwiskunde. En ook voor docenten biedt het nieuws om te leren! Bram Theune toont weer eens aan in wat voor actieve, wiskunde-collegiale omgeving we ons bevinden – we kunnen zo aansluiten en meedoen! Bokhove is in de pen geklommen door een aantal artikelen uit een vorig nummer van *Euclides*. Hij laat u zien hoe hij deze artikelen via dynamische meetkunde met elkaar in verband brengt. Er zijn nog meer reacties op voorgaande artikelen: met een bijzonder algoritme toont Henk Hooijschuur aan dat de decimale ontwikkeling van $1/83$ geen 82 maar 41 repeterende decimalen heeft, en het stuk van Dick Klingens over *Een rij van cosinussen* krijgt aanvullingen van Paul Dillo en Joost Hulshof. Hessel Pot geeft in *Verhouding staat tot Breuk als 4 tot 1* antwoorden op de in eerdere nummers opgeroepen vragen.

Het doet mij persoonlijk goed te weten dat *Euclides* niet alleen gelezen wordt, maar ook uitdaagt tot schrijven. Ik zie uw bijdragen graag verschijnen!

Mocht u – ondanks de vele boeiende facetten van het Nederlandse wiskundeonderwijs – toch eens over de grenzen willen kijken, dan brengt het artikel van Rik Weeda u wellicht op goede ideeën. En mocht u besluiten om toch maar hier te blijven, dan graag weer tot een volgende *Euclides*!

INHOUD

137	Kort vooraf [Klaske Blom]
138	Ruzie met Van Ceulen [Gijs Langenkamp, Wiggert Loonstra]
141	'Thank you for the interesting lesson' [Josephine Buskes]
144	Boekbepreking / 50 inzichten wiskunde [Bram van Asch]
145	De UvA webklas wiskunde [Jan Brandts]
149	WisBase [Bram Theune]
153	Dynamische meetkunde [Christian Bokhove]
155	Verschenen
157	Lesgeven op een Europese school [Rik Weeda]
159	Rekenkampioen van Nederland 2009 [Ed de Moor]
161	Opgaven Rekendictee 2009
162	Het Geheugen [Harm Jan Smid]
165	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
167	Ekādhikena Pūrveṇa [Henk Hooijschuur]
168	Oppervlakteformules [Yvonne Killian]
168	Mededeling
169	Verhouding staat tot Breuk is als 4 staat tot 1 [Hessel Pot]
171	Een rij van cosinussen [Paul Dillo, Joost Hulshof]
172	Verschenen
174	Jaarrede 2009 Marian Kollenveld
177	Van de bestuurstafel [Kees Lagerwaard]
178	Het beroepsregister [Marianne Lambriex]
179	Persbericht
180	Jaarvergadering/studiedag 2009 [Metha Kamminga]
182	Recreatie [Frits Göbel]
184	Servicepagina

Aan dit nummer werkte verder mee: René Vlak.

Ruzie met Van Ceulen



[Gijs Langenkamp, Wiggert Loonstra]

In 2010 is het 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen overleed. Om verschillende redenen is het mooi om daar aandacht aan te besteden. Van Ceulen was een verwoed rekenaar die stevast ‘met lust ende arbeyt’ verder rekende waar anderen stopten. Doordat hij niet academisch geschoold was, nam hij niet altijd de meest voor de hand liggende weg; wel bedreef hij wiskunde van internationaal niveau. Er zijn inderdaad verschillende redenen waarom we van mening zijn dat Van Ceulen en zijn werk de moeite waard zijn om een serie artikelen aan te wijden. Zijn werk ademt steeds een werklustige frisheid, zijn wiskunde is vaak mooi en boeiend, en dat maakt het tot heel interessant materiaal om met leerlingen aan te werken. Het kijken naar de problemen waarmee wiskundigen in zijn tijd worstelden, geeft een verdieping aan de schoolwiskunde van nu. Daar komt nog bij dat Van Ceulen interessante, soms zelfs spetterende, relaties met zijn omgeving had en daardoor leren we dan weer iets over de tijd waarin hij leefde. Al met al dus genoeg reden om u acht (nu nog zeven) nummers lang te trakteren op Van Ceulen-verhalen, geschreven door diverse specialisten.

Herkent u het volgende? Een leerling komt na het teruggeven van de repetitie naar u toe om te vertellen dat een bepaalde som toch echt wel goed opgelost was. Rustig legt u uit dat hij of zij wel degelijk een fout heeft gemaakt en het aantal punten voor de opgave dus ongewijzigd blijft. De leerling, niet in staat uw antwoord volledig te doorzien, zet nog een nieuwe poging in. De sfeer wordt enigszins gespannen. Het meningsverschil dreigt uit te groeien tot een uitbarsting van de leerling. Maar dan gaat de bel, de pauze begint en het cijfer van wiskunde blijkt ineens oneindig veel minder belangrijk dan die vijftien vrije minuten. Verbaasd over deze plotselinge omslag, maar eigenlijk ook wel opgelucht, verlaat u het lokaal op weg naar de personeelskamer.

In deze tweede bijdrage van een serie artikelen over Ludolph van Ceulen gaat het over ruzie. Uitgedaagd door een probleem dat opgesteld is door rekenmeester Willem Goudaen, raken de collega's Van Ceulen en Goudaen verwickeld in een conflict. Het is hierbij overigens de vraag of de benaming rekenmeester voor Goudaen terecht is; iets wat u aan het einde van het artikel zelf mag bepalen. We beschrijven eerst de ruzie en nemen u vervolgens mee naar het vraagstuk waar het allemaal om draaide. Hopelijk voelt u zich uitgedaagd een oplossing te vinden, al dan niet voor een ‘kanne wijn’.

Willem Goudaen

In het vorige artikel (zie [5]) is uitgebreid stilgestaan bij de persoon en het leven van Ludolph van Ceulen. Over Willem Goudaen, de rekenaar met wie we in dit artikel kennis maken, is helaas maar weinig bekend. Hij heeft gewoond in Haarlem en leefde in elk geval rond de periode 1580-1583. Hij heeft zich tijdens zijn leven onder meer bezig gehouden met wiskunde. Goudaen is bekend of berucht geworden door problemen op te stellen en andere mensen uit te dagen deze op te lossen. Door het niet accepteren van (correcte) oplossingen, ontstonden interessante ruzies.

De ruzie

Ludolph van Ceulen schrijft in zijn boekje *Solutie ende Werckinghe op twee geometrische vraghen* (1584; zie [2]) over de ruzie die hij gehad heeft met Willem Goudaen. Hieronder volgt een samenvatting. De citaten zijn afkomstig uit het genoemde boek van Van Ceulen. Op 21 juni 1583 gaat Ludolph van Ceulen naar Haarlem om een opgave op te zoeken die Willem Goudaen daar aan een kerkdeur heeft vastgespijkerd. Het antwoord kan

bij Goudaen ingeleverd worden en moet dan binnen zijn vóór 27 juni van dat jaar, omdat Goudaen op 1 juli een openbare les zal geven waarin hij de opgave zal uitleggen. Als Van Ceulen bij de bewuste deur aankomt, blijkt de opgave verdwenen. Na enig aandringen bij Goudaen, die zegt dat hij eigenlijk te laat is, krijgt Van Ceulen het probleem toch te zien. De volgende dag al biedt hij de oplossing aan Goudaen aan. Deze wil het antwoord echter niet in ontvangst nemen en wederom krijgt Van Ceulen te horen dat hij te laat is. Als reactie daarop gaat Van Ceulen naar de kerkdeur waar hij al eerder is geweest. Hij spijkt de opgave tezamen met zijn oplossing op de deur. Daarbij geeft Van Ceulen op zijn beurt Goudaen een vraagstuk, zodat deze ook wat te rekenen heeft. Daarna vertrekt Van Ceulen weer naar Delft. Goudaen reageert op bovenstaande door een ‘lasterlijk schrift’ op te stellen waarin hij beweert dat Van Ceulen de oplossing niet gevonden heeft.

We staan even stil bij een belangrijk detail. Van Ceulen noemt in zijn tekst namelijk later nog een tweede opgave die in 1583 ‘aengeslaghen’ is door Goudaen, waar hij bij vermeldt ‘hoe wel nochtans niet zijn [i.e. Goudaens] inventie’. Deze tweede opgave waarmee Goudaen pronkte, was helemaal niet door Goudaen zelf opgesteld! Een andere rekenmeester, Nicolaus Petri, was eerder de uitdaging met Goudaen aangegaan en kreeg hetzelfde eerste probleem voorgelegd. Als reactie gaf Petri naast een correcte oplossing van het eerste probleem, een eigen opgave aan Goudaen. Deze tweede opgave die Goudaen (ook) aan de kerkdeur nagelde, is opgesteld door Petri om juist Goudaen mee uit te dagen. Er is dus sprake van plagiaat! Zie ook [4]. We vervolgen nu weer de gebeurtenissen van 1583, waarna we het eerste probleem (wel van Goudaen zelf dus) bespreken.



Het wordt 1 juli en Van Ceulen gaat weer naar Haarlem om bij de les die Goudaen gaat geven, aanwezig te zijn. Daarvoor moet overigens wel 'leergelt' van honderd daalders, of tenminste honderd guldens, betaald worden.

In de vergadering laat Goudaen weten, zo blijkt uit het verslag van Van Ceulen, dat niemand het probleem op heeft kunnen lossen. Bovendien beweert Goudaen dat iemand heeft geprobeerd zijn werk te beletten. Volgens de weergave van Van Ceulen zijn deze beide zaken onwaar. Van Ceulen reageert dan ook fel:

Dese ende meer andere belachlijke beuselinghen in mijn presentie ghelesen antwoorde ick: Willem Goudaen om alle dese voorghelesen articulen te beantwoorden soudon my wapenen ghebreken doch ist noodeloos dewijle my die ten minsten deel niet aen en gaen ben oock daerom niet hier gecomen: maer alleenlick om te hooren ende sien met wat bewijsredenen ghy mijn solutie op d'aengheslaghen vraghe sult willen wederlegghen welke mijne solutie oock zylcx is dat ick die niet besloten en behoefte over te geven maer vry voor alle verstandighe opentlijck mach ghetoont werden: hebbe hem hier mede de solutie mitsgaders het werck waer door d'selve was voortcomende gepresenteert: maer Willem Goudaen voor hem neder siende en niet een woort sprekende scheen wel op die tijt verslaghen ende met geen bewijsredenen teghen mijn solutie voorsien te zijne.

Van Ceulen presenteert vervolgens zijn oplossing. Goudaen reageert terneer-geslagen. Van Ceulen uit zijn verbazing: U zou mijn oplossing toch weerleggen? Van Ceulen krijgt de gelegenheid zijn oplossing alsnog in te leveren, maar gaat met deze gang van zaken niet akkoord. Hij besluit met de conclusie dat Goudaen zijn bezwaren niet vol kan houden. Hij wil dan ook dat deze zijn lasterlijk schrift terug-neemt. De zaak lijkt nu wél beslecht. Van Ceulen krijgt een biertje aangeboden van Goudaen; later geven ze elkaar de hand en Van Ceulen vertrekt.

Na verloop van tijd verschijnt er echter een nieuwe publicatie van Goudaen, *Openbare Presentatie*. Deze tekst is helaas verloren gegaan, evenals het eerder genoemde lasterlijk schrift. Blijkens het verslag van Van Ceulen wordt in de door Goudaen geschreven publicatie Van Ceulen zwart gemaakt, zonder dat er op de wiskunde ingegaan wordt. Goudaen weerlegt Van Ceulens oplossing niet, maar geeft ook

geen geldige eigen oplossing. Hij speelt op de man in plaats van dat hij het probleem bespreekt.

Dit laatste is, natuurlijk samen met het voorgaande, reden voor Van Ceulen om in een boekje de hele gang van zaken op te schrijven en iedereen die maar wil, te laten weten hoe de vork nu echt, althans volgens Van Ceulen, in de steel zit. Hij besluit zijn verslag van de ruzie met de volgende tekst, een passage die de sfeer van Van Ceulens tekst mooi weergeeft.

(...) my ghenoeghen laten dat ick die Solutie zijner voorsz. vraghen (die hy soo hooch ja bijcans ondoenlijk acht nochtans gheringh zijn) werckelijck (...) al de werelt voor ooghen stelle bereet zijnde tselve den onverstandigen t'onderrichten ende teghen alle wedersprekers in presentie van alle der const verstandighe (wiens oordeel ic my gaerne onderwerpe) te verdadighen. Hier by voeghende twee by my gheproponeerde exemplen daer ic Willem Goudaen (in plaetse van weer lasterens) mede vereere.

Het vraagstuk

We hebben gezien dat de ruzie tussen Van Ceulen en Goudaen gaat over twee vraagstukken die Goudaen op de kerkdeur spijkerde. We behandelen alleen het eerste vraagstuk, waarbij we opmerken dat het tweede vraagstuk een soortgelijke opgave is.

Eerste vraagstuk van Goudaen – Gegeven is de veelhoek *in figuur 1* op pag. 140. Opdracht is om de lengte van zijde AE te vinden. In de figuur staan lijnstukken AE en BC loodrecht op lijnstuk DC en staat lijnstuk FB loodrecht op lijnstuk AE.

Van Ceulen heeft op twee manieren de opgave opgelost. Hieronder volgt de oplossing van Van Ceulen die hij een oplossing met Cos' noemde. Waarbij we wel moeten opmerken dat de onderstaande oplossing een vrije vertaling is naar hedendaagse wiskunde. Het woord Cos' is een verbastering van het Italiaanse woord Cosa, dat *Ding* betekent. Het Ding is datgene wat je wilt vinden waarvan je doet alsof je het al hebt. Italiaanse wiskundigen hebben dit idee overgenomen van Islamitische wiskundigen. Tegenwoordig gebruiken we hier een letter voor, bijvoorbeeld x. Dus we hebben het hier over algebra. Toentertijd heette algebra nog niet algebra, maar de regel Cos. Onze notatie x en machten van x dateert van 1637 toen Descartes' *La Geometrie* verscheen.

Voordat we de oplossing geven hebben we het volgende resultaat nodig; het is Propositie 13 van het tweede boek van Euclides, *Elementen* II-13:

Laat driehoek ABC een driehoek zijn met alleen maar scherpe hoeken (*zie figuur 2*), dan geldt:

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot BD$$

Als we hoek ABC α noemen, dan hebben we $BD = AB \cdot \cos \alpha$. We krijgen nu:

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

Deze uitdrukking kennen we als de *cosinusregel*.

Bewijs. We zien na enig rekenwerk dat:

$$BC^2 + BD^2 = 2BC \cdot BD + (BC - BD)^2 = 2BC \cdot BD + DC^2$$

Tellen we hier AD^2 bij op, dan krijgen we:

$$BC^2 + BD^2 + AD^2 = 2BC \cdot BD + DC^2 + AD^2$$

Met 'Pythagoras' in driehoek CAD zien we dat:

$$BC^2 + AB^2 + AD^2 = 2BC \cdot BD + DC^2 + AC^2 - DC^2$$

En hieruit volgt dat:

$$BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot BD = AC^2 \quad \blacklozenge$$

Oplossing van Goudaens eerste vraagstuk

– Schrijf $AE = x$. Nu hebben we $FA = x - 5$,

en als we 'Pythagoras' toepassen in de

driehoeken AFB en AEC, zien we dat:

$$FB = \sqrt{-x^2 + 10x + 39} \text{ en } AC = \sqrt{10x + 39}$$

Gebruik nu Propositie 13 in driehoek CAD.

We zien dan:

$$12^2 = 10x + 39 + 16^2 - 2 \cdot EC \cdot 16$$

Nu kunnen we EC uitdrukken in x:

$$EC = \frac{151 + 10x}{32}$$

Er geldt dat $FB = EC$, maar we zagen al dat

$$FB = \sqrt{-x^2 + 10x + 39}. \text{ We hebben dus de volgende vergelijking:}$$

$$\sqrt{-x^2 + 10x + 39} = \frac{151 + 10x}{32}$$

Door links en rechts van het gelijkteken te

kwadrateren en alle termen naar links te

brengen krijgen we de volgende tweede-

graads vergelijking:

$$-1124x^2 + 7220x + 17135 = 0$$

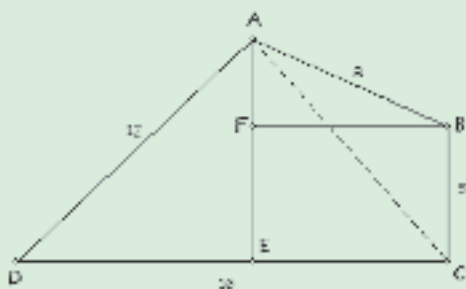
Omdat x groter dan 0 moet zijn, krijgen

we:

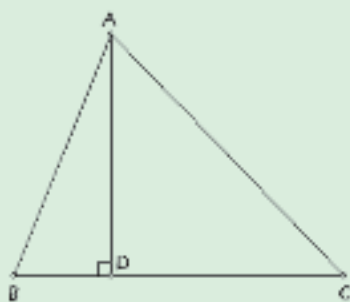
$$x = \frac{7220 + \sqrt{29167360}}{2248} = 3 \frac{119}{562} + \sqrt{25 \frac{44215}{78961}} \quad \blacklozenge$$

Volgens Van Ceulen beweerde Goudaen dat de oppervlakte (toentertijd werd dit inhoud genoemd) van figuur 1 niet uitgerekend kan worden zonder dat AE bekend is. Dat dit niet waar is, laat Van Ceulen met een tegen-voorbeeld zien.

We dagen de lezer uit om te laten zien dat inderdaad de oppervlakte uitgerekend kan worden zonder dat AE bekend is.



figuur 1 Het eerste vraagstuk van Goudaen



figuur 2 Driehoek ABC met hulplijnstuk AD dat loodrecht staat op BC

Beschouwing

Van Ceulen heeft op twee correcte manieren het eerste vraagstuk van Goudaen opgelost; ook heeft hij op twee correcte manieren het tweede vraagstuk van Goudaen opgelost. Maar zoals we gelezen hebben accepteerde Goudaen de oplossingen niet. Nicolaus Petri gaf ook correcte oplossingen voor de opgaven en ook deze accepteerde Goudaen niet, wat een ruzie tot gevolg had. We zagen zelfs dat Petri de maker is van de tweede opgave! Het was juist Petri die Goudaen uitdaagde om hiervoor een oplossing te vinden. De ruzie tussen Goudaen en Petri heeft dan ook vóór de ruzie tussen Goudaen en Van Ceulen plaatsgevonden. Het lijkt erop dat in beide gevallen de zaak werd uitgepraat, maar in het boekje *Generale Presentatie of Openbare Presentatie* (Petri en Van Ceulen noemen afwijkende titels, maar we mogen er van uit gaan dat dit om hetzelfde boekje gaat; zie ook [1], p. 28) haalt Goudaen hard naar hen uit. We hebben gezien dat Van Ceulen een uitgebreid verslag over dit voorval heeft geschreven, maar ook Petri kon dit niet langs zich heen laten gaan en heeft ook een uitgebreid weerwoord geschreven; zie [4]. Gezien de verslagen die beide personen geven, bekruipt ons het gevoel dat Goudaen weinig goeds in zich had.

We moeten er echter voor waken deze conclusie te voorbarig te trekken. Helaas is de *Openbare Presentatie* verloren gegaan. Dit betekent dat we geen enkel weerwoord van Goudaen zelf hebben om de bevindingen van Van Ceulen en Petri mee te vergelijken. Door de manier waarop zij hun teksten presenteren, worden we door hen doelbewust op een bepaald spoor gezet. In de slotpassage van het verslag van Van Ceulen over de ruzie zegt hij bijvoorbeeld dat hij met zijn oplossing Goudaen juist wil vereren, in plaats van lasteren. We horen duidelijk de sarcastische ondertoon.

We moeten ons dus realiseren dat we alles dat we over deze ruzie weten, zien door de bril van de benadeelde partij(en). Desalniettemin valt wel op dat we twee min of meer onafhankelijke verslagen hebben, waaruit blijkt dat Goudaen onterecht oplossingen van twee vraagstukken weigerde goed te keuren, en wel op zo'n manier dat zowel Petri als Van Ceulen ruzie kregen met Goudaen. Hierdoor zijn wij geneigd om de opvattingen van Van Ceulen als (grotendeels) waar aan te nemen. Er zijn geen concrete aanleidingen of bronnen

die ons hier direct van weerhouden, maar we moeten ons er bewust van blijven door wiens bril we kijken. En zo biedt deze ruzie na meer dan vierhonderd jaar nog steeds een interessante kijk op de praktijk van de rekenmeesters aan het einde van de zestiende eeuw.

Hoe lang weerklinken de woorden nog door naar aanleiding van de wiskunde-repetitie? De leerling pakt zijn spullen, de pauze is voorbij. Op naar de volgende les.

Referenties

- [1] C.P. Burger (jr) (1908): *Amsterdamsche Rekenmeesters en Zeevaartkundigen in de Zestiende Eeuw*. Amsterdam: C.L. Van Langenhuysen.
- [2] L. van Ceulen (1584): *Solutie ende Werckinghe op twee geometrische vrighen*. Amstelredam: Cornelis Claesz.
- [3] Sir Thomas L. Heath (1956): *Euclid / The Thirteen Books of the Elements*. New York: Dover Publications. Uitgegeven in drie delen; de gebruikte uitgave is de tweede herziene editie.
- [4] N. Petri (1584): *Vanden twee Geometrische vraeghen*. Amstelredam: Cornelis Claesz.
- [5] Steven Wepster (2009): *Ludolph van Ceulen 1540-1610 / In de ban van de cirkel*. In: *Euclides* 85-3; pp. 98-100.
- [6] Zie ook « <http://bc.ub.leidenuniv.nl/bc/tentoonstelling/pi> »

Over de auteurs

Gijs Langenkamp is afgestudeerd in de wiskunde en heeft de lerarenopleiding wiskunde gedaan. Hij is werkzaam als docent wiskunde op een middelbare school. E-mailadres: gijslangenkamp@hotmail.com Wiggert Loonstra heeft wiskunde gestudeerd en vorig jaar zijn onderwijs-master afgerond. Op dit moment is hij werkzaam als software-ontwikkelaar. E-mailadres: wiggertloonstra@gmail.com

'Thank you for the interesting lesson'

WISKUNDE IN HET TWEETALIG ONDERWIJS: EEN IMPRESSIE

[Josephine Buskes]

Het is verfrissend om met wiskunde bezig te zijn in het tto (tweetalig onderwijs). Als je al geruime tijd wiskunde geeft en denkt dat je het allemaal wel gezien hebt, dan geeft het Engels een nieuwe impuls aan je lessen. Ruim tien jaar geleden ben ik met dat Engelse avontuur begonnen toen onze directeur de concurrentiepositie van onze school wilde verstevigen door te starten met een tweetalige afdeling. Daar waren echter wel gekwalificeerde docenten voor nodig. Wie wilden opgeleid worden tot tto-docent? Spontaan heb ik me aangemeld. Ik had geen flauw idee van wat me boven het hoofd hing.

Screening en opleiding

We zijn destijds gescreend door het UTN, het Universitair Talencentrum Nijmegen^[1]: hadden we een kans van slagen? Vervolgens zijn we opgeleid voor de *Cambridge Advanced en Proficiency* examens.

Afhankelijk van je beginniveau doe je daar een of twee jaar over. Intussen hielden we ons ook bezig met *classroom English*. Stel je maar even voor dat je je hele les met alles erop en eraan in het Engels moet doen, de technische zaken als 'doe de zonwering maar even naar omlaag', het terechtwijzen van leerlingen, de praatjes tussendoor aan de bank, de grapjes op z'n tijd en af en toe gespeelde verontwaardiging. Dat gaat niet vanzelf in een vreemde taal. Mijn eerste groep leerlingen merkte dan ook fijntjes op, tegen bezoek in de klas, dat ik in hun eerste jaar zelden boos was geweest. De opleiding was hard werken: dat soort zaken moet toch meestal buiten schooltijd gebeuren; zeker de studietijd is vooral vrije tijd. Maar het was ook ontzettend inspirerend: onze opleiders kwamen naar onze school en we kregen de lessen met ons eigen clubje collega's. Dat creëerde een gevoel van verbondenheid, we waren pioniers.

We waren nog met onze opleiding bezig toen we begonnen met onze eerste klas: onze 'guinea pigs'. In eerste instantie boden we alleen tto-vwo aan, later volgde ook havo. Het tto-onderwijssysteem in Nederland is afgekeken van Canada en wordt het 'immersion system' genoemd. Door onderdompeling in de vreemde taal wordt de leerling uiteindelijk een 'near

native speaker' in die taal. Het Europees Platform in Nederland zorgt voor de regelgeving betreffende het tto en de handhaving ervan^[2]. Door middel van visitaties kun je het officiële tto-label verkrijgen en behouden. De *immersion* houdt in dat bij een Engelstalige les *alles* in het Engels gebeurt. Vanaf de eerste minuut dat een brugklassertje bij me binnenkomt, spreken we uitsluitend Engels met elkaar. Dat blijkt de snelste manier om het te leren en om te voorkomen dat er in die hoofdjess steeds een vertaalslag plaatsvindt. Natuurlijk gaat het niet altijd goed in het begin, je moet je ze er regelmatig aan herinneren. Er komt een moment dat ze me buiten de klas in een andere context Nederlands horen spreken en dan zijn er verbaasde reacties: 'Oh, ik dacht dat u Engelse was.'

Nog lang nadat ze de school verlaten hebben, is er de neiging om elkaar in het Engels aan te spreken, zo natuurlijk wordt het uiteindelijk. Dat gaat niet vanzelf, het vereist uiterst consequent gedrag van jou als lesgever en het vereist discipline en doorzettingsvermogen van de leerling. De eerste weken is het dan ook vrij rustig in mijn brugklas, er komt veel op ze af en dat moet allemaal verwerkt worden. Nu denkt u natuurlijk: 'Wat hard, en wat nou als het konijn is overleden?' Incidenteel kan het voorkomen dat een leerling iets kwijt wil en dat niet in het Engels kan, dan neem ik hem mee naar de gang en mag het daar eventjes in het Nederlands. Maar toen een mentorleerling wilde praten over de totaal onverwachte scheiding van zijn ouders en

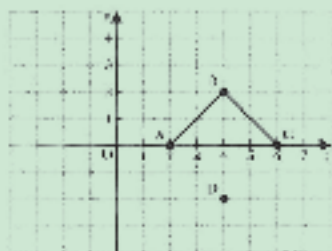
ik aanbod dat dan maar in het Nederlands te bespreken, ging hij gewoon in het Engels door. De leerlingen krijgen heel veel Engels, ruwweg 50% van hun lessen is compleet in het Engels. Naast het gewone vak Engels krijgen ze ook het vak Engels 2, dat gegeven wordt door een *native speaker*. Hun ontwikkeling gaat daardoor razendsnel.

Mathematics en wiskunde, is dat hetzelfde?

Hoe gaat dat dan precies in zijn werk, die eerste tijd in de wiskundeles in het Engels? Dat brengt me op de boeken. Welke boeken gebruik je? Tijdens onze studie voor de Cambridge examens zijn we naar Engeland geweest waar we scholen hebben bezocht en boeken hebben bekeken. Dat zijn dan wel boeken voor Engelse kinderen... Ook in Nederland ben ik bij scholen gaan kijken die al enkele jaren een tto-afdeling hadden, om te zien hoe Engelse wiskunde boeken werken bij Nederlandse kinderen. Op grond daarvan heb ik destijds gekozen voor een Engelse wiskunde methode (*STP Mathematics*, de A-serie van L. Bostock e.a.). Er waren toen nog geen vertaalde Nederlandse methoden trouwens. Daarop kom ik later nog terug.

In Engeland gaan kinderen op 11-jarige leeftijd naar de middelbare school. Hun brugklasboek bevat daarom ook zaken die onze brugklassers in groep 8 al gehad hebben. Dat helpt enorm bij de start. De leerlingen kunnen zich daardoor volledig concentreren op de Engelse wiskundetaal. Maar zelfs dan moet je ervoor zorgen dat je diverse alternatieven hebt in geval van problemen. De leerlingen spreken weinig Engels en geen wiskunde-Engels. Als ze het niet begrijpen, moet je ze ook helpen hun vraag te formuleren. Je eigen taalgebruik moet je afstemmen op dat van de beginnende brugklasser. En of je het nu wilt of niet, je wordt toch ook een beetje talenleraar. Nu ben je dat natuurlijk ook als je in het Nederlands lesgeeft. Maar in dit

If $A(2, 0)$, $B(4, 2)$ and $C(6, 0)$ are three corners of a square $ABCD$, we can find that the fourth corner, D , is two squares below the x -axis.



To describe the position of D we need to extend the scale on the y -axis below zero. To do this we use the numbers $-1, -2, -3, -4, \dots$. These are called *negative numbers*.

In the same way we can use the negative numbers $-1, -2, -3, \dots$ to extend the scale on the x -axis to the left of zero.

figuur 1

PROPERTIES OF THE SIDES AND ANGLES OF THE SPECIAL QUADRILATERALS

We can summarise our investigations in the last exercise as follows:

- | | |
|--------------------|--|
| In a square | <ul style="list-style-type: none"> all four sides are the same length both pairs of opposite sides are parallel all four angles are right angles. |
| In a rectangle | <ul style="list-style-type: none"> both pairs of opposite sides are the same length both pairs of opposite sides are parallel all four angles are right angles. |
| In a rhombus | <ul style="list-style-type: none"> all four sides are the same length both pairs of opposite sides are parallel the opposite angles are equal |
| In a parallelogram | <ul style="list-style-type: none"> the opposite sides are the same length the opposite sides are parallel the opposite angles are equal |
| In a trapezium | <ul style="list-style-type: none"> just one pair of opposite sides are parallel. |

figuur 2



figuur 3

geval zijn de leerlingen voor wat betreft hun wiskundevocabulaire van jou afhankelijk. Ook voor native speakers (die geen wiskundeleraar zijn) heeft het wiskundevocabulaire geheimen; dat is niet anders dan in het Nederlands. Als Nederlandse wiskundeleraar ben je geen native speaker, ook al ben je in het bezit van een Cambridge certificaat. Dan is het fijn als je een authentiek Engels boek gebruikt. Zelfs nu er Nederlandse wiskundemethoden vertaald zijn, blijft mijn voorkeur uitgaan naar een echt Engels boek. *Moderne Wiskunde* heeft het over de 'geo triangle', *Getal & Ruimte* noemt het 'geometrical triangle'. In Engeland kennen ze onze vertrouwde geodriehoek niet, daar gebruiken ze een gradenboog; 'protractor' geheten. Zo kom je ongetwijfeld voor andere dilemma's te staan. Maar misschien herken je ze niet als dilemma en neem je het verengelde Nederlandse woord klakkeloos over. Je leerlingen weten niet beter. Dat is jammer. Als je het in het Engels doet, dan ook echt helemaal in het Engels.

Naast het boek kent het Engelse basis- en middelbaar onderwijs tal van hulpmiddelen. Er zijn posters met daarop de symbolen voor de bewerkingen en het gebezigde vocabulaire erom heen. Die werken prima in de brugklas: een leerling wil wat zeggen, weet niet meer wat 'vermenigvuldigen' is en zoekt de betreffende kaart aan de muur of op het bord. Zulke posters zijn er ook voor de namen van meetkundige objecten. Soms komen er dan ouders op de ouderavond die vragen of ik af en toe niet een stukje in het Nederlands wil uitleggen. Want de problemen bij wiskunde worden wel eens op de instructietaal geschoven. Dan bespreek ik een voorbeeld en probeer duidelijk te maken dat het probleem niet in de taal zit. De 'moeilijke' wiskundewoorden zijn in het Nederlands vergelijkbaar 'moeilijk'. Het probleem zit in de wiskunde. Als ik daar met oudere leerlingen over praat, dan beamen zij dat volmondig. Het kan zijn dat je wiskunde een moeilijker vak vindt, maar het wordt niet moeilijker doordat Engels de instructietaal is.

Doen de Engelsen andere wiskunde dan wij?

Ook in Engeland wordt gewerkt met een realistische wiskundemethode. Er zijn boeken die sprekend lijken op Nederlandse boeken. Het nadeel is dat ze erg talig zijn

en dat is voor Nederlandse kinderen die wiskunde in het Engels krijgen, niet handig. De wiskunde moet liefst zonder al te veel talige franje zijn.

Het eerder genoemde boek geeft heldere definities en beperkt zich tot de 'core business'. Dat maakt dat leerlingen er zelfstandig mee uit de voeten kunnen. Bovendien wordt er meer aandacht besteed aan meetkundig redeneren en met onze vernieuwingen in het vizier zijn we daarmee dan weer modern bezig. In een gesprek met bovenbouwleerlingen werd de methode unaniem positief beoordeeld. Zowel door A- als B-leerlingen. Leerlingen hebben het gevoel echt met wiskunde bezig te zijn en het boek biedt voldoende houvast bij zelfstudie. De methode wordt in Engeland nog steeds gebruikt. Toen een leerling op vakantie was bij een neefje in Engeland en met hem mee naar school ging, was hij blij verrast dat ze met 'ons' wiskundeboek werkten.

Ouderwetse spelletjes en praten maar

Sinds ik in het tto lesgeef, laat ik leerlingen vanaf klas 1 een voordracht(je) houden.

Praten over wiskunde en vragen van klasgenoten beantwoorden om te laten zien dat ze het vocabulaire actief kunnen gebruiken. Dan kan het gebeuren dat Pythagoras je klas komt binnenwandelen om een voordrachtje te houden. Of dat een leerling uitlegt dat het schilderij 'de Koe' van Theo van Doesburg een voorbeeld van een fractal is. Maar ook dat leerlingen voor de klas ontdekken dat het ze niet makkelijk afgaat en dat er nog wat moet gebeuren.

Bij al deze activiteiten is het doel om leerlingen te laten praten over wiskunde, ze over de drempel te helpen en ze te laten ervaren dat je sneller leert als je praat. Fouten maken helpt daarbij.

Leerlingen mogen bij mij altijd spelletjes spelen als ze klaar zijn met het reguliere werk. Voorwaarde is dat ze Engels blijven spreken, ook als ze de spelregels bediscussieren of onenigheid krijgen. Hoor ik toch Nederlands, dan is het 'game over'. Er zijn zeer veel interessante spelletjes. Velen zullen zich de flippo's herinneren met de vier getallen erop die met de bekende bewerkingen 24 moeten opleveren. Perfect om in de brugklas het nieuw verworven vocabulaire te oefenen. De wiskundeles moet niet verworden tot een taalles en dat

risico loop je als je teveel met vocabulaire bezig bent; aan de andere kant kun je niet echt veel doen als je die woorden niet tot je beschikking hebt. Ze vinden 24-tigen ontzettend leuk en ze willen maar wat graag hun oplossing presenteren. In het Engels natuurlijk.

Nog een voorbeeld is het kaartspel 'Four Bidden' (*zie figuur 3*): je pakt een kaart met het woord 'square' en dan moet je je medeleerlingen dat woord laten raden, maar de vier gegeven woorden (en uiteraard het woord zelf) zijn verboden. Die vier gegeven woorden zijn dan bijvoorbeeld: 'four, sides, shape, equal'.

En het wiskunde-examen dan?

Nu moet de tto-leerling wel gewoon het Nederlandse wiskunde-eindexamen doen. Je kunt dus niet tot en met klas 6 (of 5) doorgaan in het Engels. Wij bieden daarom wiskunde in het Engels aan tot klas 4.

De tweede fase is een mooi moment om te stoppen. De overgang van klas 3 naar 4 is even lastig, maar veel minder lastig dan het begin van de brugklas. En hoe zit dat dan met het benodigde wiskunde vocabulaire? Daar hebben we de volgende oplossing voor. Vanaf de brugklas maken we per onderwerp een woordenlijst Engels-Nederlands van het wiskundevocabulaire. Aanvankelijk maak ik die, vervolgens doen we het samen en al snel leren leerlingen om de Engelse wiskunde termen in hun *glossary* schrift te noteren en regelmatig vertalen we die dan. Die glossaries maken deel uit van het proefwerk. Het Nederlandse vocabulaire heeft geen functie in de lessen op dat moment, maar het is een investering in een soepeler overgang van klas 3 naar 4. Ze hebben dan iets om in de eerste weken op terug te vallen. Blijft staan dat leerlingen zelfs in de zesde klas nog wel vragen: 'Hè, wat is *gradient* ook weer in het Nederlands?'

Leerlingen hebben het grote voordeel dat ze een wiskundeverhaal in het Engels makkelijk kunnen lezen. Soms zegt een niet-tto-er wel eens: 'Oh, maar dat kan ik ook hoor, ik heb een 9 voor Engels.' Die daag ik dan uit: 'Okay, vertel eens wat over de stelling van Pythagoras.' Dat lukt dus niet. Het vocabulaire ontbreekt totaal.

Hoe houd je je leerlingen bij?

Met het Cambridge diploma op zak ben je er natuurlijk niet. Je zult je Engels voortdurend moeten ontwikkelen. Dat

kan door mee te gaan op uitwisselingen en bij je collega's in het buitenland in de klas aan te schuiven. Je kunt lid worden van de Engelse vereniging voor wiskunde leraren, The Association of Teachers of Mathematics (www.atm.org/uk). De ATM brengen twee tijdschriften uit: *MT* (Mathematics Teaching) en *MicroMath*. Er is een jaarlijkse conferentie waar je als Nederlandse wiskundeleraar op twee fronten leert. Ook in Nederland zijn er allerlei activiteiten speciaal voor docenten in het tto: workshops georganiseerd door het UTN of netwerkbijeenkomsten waarin vakdocenten ervaringen uitwisselen. Er bestaat de mogelijkheid om een beurs aan te vragen voor eigen scholingsactiviteiten in het buitenland (Plato, Comenius).

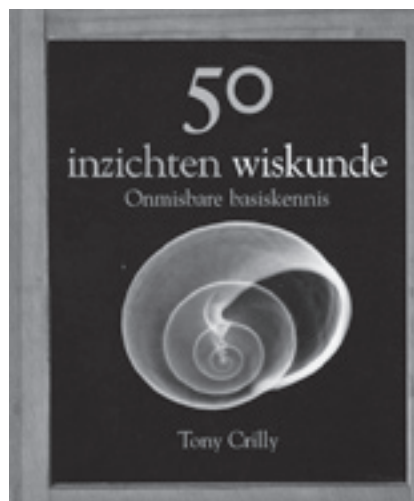
Je zou kunnen denken dat tto-leerlingen wiskundig wel minder ver zullen komen omdat ze aanvankelijk langzamer gaan. Dat langzame begin dat klopt, maar daar moet je je niets van aan trekken, dat trekt zeer snel bij. Tel daar bij op dat ze vanaf hun eerste jaar op uitwisseling gaan en in hun tto-loopbaan op Engelstalige scholen in het buitenland moeiteloos aanschuiven en meedoen, dan weet ik dat deze leerlingen een prachtige opleiding hebben genoten. Met de nadruk op genieten. En passant pikken ze ook nog een graantje mee van de Engelse beleefdheidsvormen en daar genieten wij lesgevers natuurlijk ook weer van.

Noten

- [1] Zie: www.ru.nl/utn/
[2] Zie: <http://netwerktto.europesplatform.nl/>

Over de auteur

Josephine Buskes is wiskundeleraar aan het Kandinsky College te Nijmegen en tutor bij het eerstejaars wiskundeonderwijs op de Radboud Universiteit Nijmegen. Email-adres: j.buskes@kandinsky.nl



Ondertitel: Onmisbare basiskennis
 Auteur: Tony Crilly
 Vertaling: Henny Hassebroek
 Uitgever: Veen Magazines BV, Diemen (2009)
 ISBN: 978-90-8571-204-6
 Prijs: € 19,95 (208 pagina's; hardcover)

De oorspronkelijke titel van het boekje luidt *50 Mathematics ideas you really need to know*, en het werd in 2008 in Engeland uitgegeven. In 2009 volgde dan de Nederlandse vertaling door Henny Hassebroek. In 50 korte essays van meestal 4 bladzijden komen verschillende basisbegrippen uit de wiskunde aan de orde. De volgorde is min of meer chronologisch gekozen, en ook per onderwerp wordt er een tijdlijn gegeven. Het begint met hoofdstukjes getiteld nul, getallenstelsels, breuken, en het eindigt met relativiteit, de laatste stelling van Fermat, de Riemann-hypothese. De hoofdstukjes zijn verhalend, nogal populair geschreven, en wiskundig niet diepgaand. Op de achterkant staat: Een heldere leesbare introductie! Voor wie en waarop is echter niet duidelijk. Voor mensen die niets van wiskunde weten, zal het toch al gauw te ingewikkeld worden, en voor wiskundigen is het wel heel oppervlakkig. Achterin het boek staat een korte verklarende woordenlijst, waarin echter

voor veel begrippen de betekenis niet echt veel duidelijker wordt. Zo wordt het eerste woord Algebra als volgt omschreven: Door met letters in plaats van getallen te werken om de wiskunde te kunnen uitbreiden is algebra een algemeen toepasbare methode geworden voor de gehele wiskunde, zuiver en toegepast. En een Breuk: Geheel getal gedeeld door een ander geheel getal. Wellicht kan het voor een wiskunde docent toch aardig zijn dit boekje achter de hand te hebben. Mocht men bijvoorbeeld in de klas iets over π , e of de rij van Fibonacci willen vertellen, dan is hier wel wat informatie te vinden. Om de prijs hoeft men het in elk geval niet te laten.

Over de recensent

Bram van Asch is redacteur van Euclides. Hij werkt als universitair docent aan de Technische Universiteit Eindhoven. E-mailadres: a.g.v.asch@tue.nl

Lesgeven in een unieke meertalige en internationale omgeving

Grenzen verleggen. Een nieuwe inspirerende internationale omgeving. Volop aandacht voor taal en cultuur. Goede arbeidsvoorwaarden. Het zijn de ingrediënten van een loopbaan bij een van de Europese scholen.

Stichting NOB (Nederlands Onderwijs in het Buitenland) zoekt in opdracht van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap per 1 september 2010:

1e graads VO-leerkrachten (LD-schaal)

Voor de Europese School in Luxemburg:

- Natuurkunde/Scheikunde en ICT
- Biologie/ANW en Wiskunde (Wiskundelessen alleen in de onderbouw)

Voor de Europese School München (Duitsland):

- Natuurkunde/Wiskunde

Voor de Europese School in Mol (België):

- Natuurkunde/Scheikunde
- Integrated Science (lessen worden gegeven in de Engelse taal)

Voor de Europese School Varese (Italië):

- Natuurkunde/ICT (ICT-lessen worden gegeven in de Engelse taal)

Meer informatie

Kijk voor functieprofielen en verdere informatie op www.stichtingnob.nl/vacatures-es.

De sollicitatiegesprekken vinden plaats van 19 tot en met 29 april 2010 bij Stichting NOB in Voorburg.



DE UvA WEBKLAS WISKUNDE

GOOGLE'S PAGERANK VOOR DUMMIES

[Jan Brandts]

Samenvatting – Het Google PageRank probleem houdt zich bezig met de vraag hoe Google de resultaten van een zoekopdracht ordent: welke bladzijde staat er bovenaan in de lijst, en waarom. Het achterliggende model is wiskundig van aard en bevat graaftheorie, lineaire algebra en numerieke wiskunde. Niet direct dagelijkse kost voor een middelbare scholier, en ook menig docent zal zich de fijnere details van die vakgebieden niet meer al te duidelijk herinneren. Maar dit hoeft ook niet. Als je de moeite neemt om precies na te gaan welke gereedschappen uit de diverse disciplines je nodig hebt, blijkt dat een groot deel van het succesverhaal rondom de PageRank zich laat vertalen in puzzels, eenvoudige diagrammen, en raadsels met kabouters en feetjes. De Webklas Wiskunde over Google's PageRank (zie [1]) laat leerlingen uit de bovenbouw van het vwo kennismaken met deze moeilijke wiskunde in een prettig ogende verpakking. Logisch redeneren staat centraal, rekenen is bijzaak.

1. Inleiding

Dit artikel heeft niet als doel om u volledig wegwijs te maken in de wiskunde die ten grondslag ligt aan de definitie en bepaling van de PageRank van Google. Mocht u daarin geïnteresseerd zijn, dan verwijs ik u naar de literatuur [2, 3, 4, 5], en naar de Webklas Wiskunde over Google's PageRank van de Universiteit van Amsterdam (zie [1]). In dit artikel gaat het om de vertaalslag naar de wiskundige wereld van een leerling uit de bovenbouw van het vwo van de volgende, nogal specialistische, wiskundige tekst.

Google's PageRank – definitie en eigenschappen

De PageRank vector P is een eigenvector behorende bij de enkelvoudige, dominante eigenwaarde 1 van de positieve stochastische matrix G , die een convexe combinatie is van

de connectiviteitsmatrix S van het World Wide Web, en een positieve rank-one update $T = \frac{1}{n}ee^$, waarbij e de bij P horende linker eigenvector van G is, en n de lengte van e . De Perron-Frobenius-theorie voor positieve matrices toont de existentie aan van P , en laat bovendien zien dat P positief gekozen kan worden. De Machtsmethode voor de berekening van de dominante eigenvector van G convergeert naar P met een snelheid evenredig aan het relatieve gewicht van T in G .*

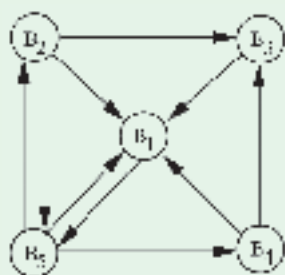
Als u zich wat ongemakkelijk voelt bij deze technische omschrijving, leest u dan vooral verder. Van een selectie van de voorkomende wiskundige begrippen zullen we namelijk laten zien dat ze ook kunnen worden uitgelegd aan een goede bovenbouw vwo-leerling met voldoende motivatie, middels raadsels en puzzels. Deze selectie is de volgende:

- eigenvectoren, verpakt als kabouter-raadsel;
- lineaire afbeeldingen en matrices, in termen van sudoku-achtige Google puzzles (Goozzles);
- matrices met positieve entrees (Perron-Frobenius-theorie), Goozzles met teleportatie;
- iteratieve methoden voor benadering van de eigendata van een matrix, herhaald Goozzelen.

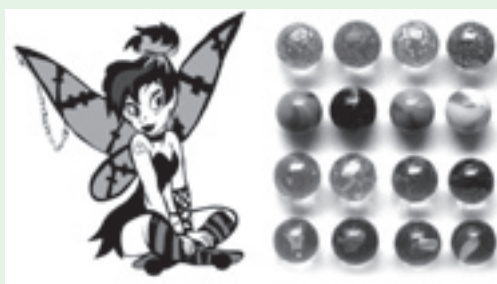
Mocht u de vertaling van het gehele bovenstaande stukje willen lezen, dan kunt u kiezen uit referentie [3] die geschreven is voor docenten wiskunde, of de inhoud van de Webklas Wiskunde via de site (zie [1]) doornemen. Hierin worden echt alle bewijzen van bovenstaande beweringen stuk voor stuk vertaald tot een niveau dat door een goede leerling te begrijpen is.

2. Eigenvectoren als kabouter-raadsels

Stel, er zijn vijf kabouters die we even B_1 , B_2 , B_3 , B_4 en B_5 noemen. Ieder van deze kabouters heeft vrienden voor wie hij alles over heeft. **In figuur 1** kan je zien wie een vriend van wie is: de pijl van B_2 naar B_1 betekent dat B_1 door B_2 als vriend wordt beschouwd. De kabouters wijzen dus in die figuur met pijlen hun vrienden aan. Behalve kabouters is er ook een goede fee, in het bezit van enorme hoeveelheden knikkers, die ze graag aan de kabouters wil uitdelen (**zie figuur 2**). Er is echter een



figuur 1 Niet-wederzijdse
vriendschapsrelaties



figuur 2 Typische goede fee met knikkers

probleem: zodra een kabouter knikkers krijgt, zal hij ze eerlijk verdelen over zijn vrienden. Zo zitten kabouters nu eenmaal in elkaar.

De fee besluit daarom elke kabouter een zodanig aantal knikkers te geven (minstens één), dat, nadat iedere kabouter zijn knikkers heeft verdeeld over zijn vrienden, ze allemaal weer net zoveel knikkers hadden als ervóór. Maar kan ze dat wel? En zo ja, hoe?

Omdat kabouter B_1 iets krijgt van B_2 tot en met B_5 , en B_2 iets krijgt van B_1 en van B_3 tot en met B_5 , enzovoorts, zien we dat er 5 lineaire vergelijkingen zijn voor de 5 hoeveelheden knikkers $P_1, \dots, P_5$. Deze vergelijkingen kunnen natuurlijk in matrixnotatie in compacte vorm worden opgeschreven:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix}$$

We zien dus dat de oplossing van het probleem van de fee een eigenvector is van de matrix H in bovenstaande vergelijking; immers, de oplossingsvector wordt door H op zichzelf afgebeeld. De bijbehorende eigenwaarde is dan gelijk aan 1.

Opmerking. Uiteraard staan de kabouters voor webbladzijden en de pijlen voor hyperlinks tussen die bladzijden. Google definieert een webbladzijde als belangrijk als deze, in kaboutertermen, veel knikkers heeft. Duidelijk is dat een kabouter veel knikkers heeft als een andere kabouter met veel knikkers hem als vriend aanwijst,

en deze verder weinig andere kabouters als vriend beschouwt. In webtermen: je bladzijde is belangrijk als belangrijke bladzijden jou als autoriteit aanwijzen, in plaats van je te noemen in een lange lijst van mogelijke bronnen.

Het blijkt dat vwo-leerlingen weinig moeite hebben dergelijke puzzels te begrijpen en op te lossen, mits er eerst enkele eenvoudigere voorbeelden worden gegeven dan het 5×5 -voorbeeld hierboven. Ook het verband met webbladzijden en de heuristieken rondom het belang van een webbladzijde worden als schappelijk beschouwd. Op dit moment hebben ze echter nog geen matrix of vector gezien.

3. Goozles: lineaire afbeeldingen verkleed als Google Puzzle

Een alternatieve grafische voorstelling van de kaboutertraadsels, Goozle genaamd, is de volgende. Het idee is (zie *figuur 3*):

- plaats knikkers in de bovenste drie vakjes;
- verdeel ze eerlijk over de lege vakjes er verticaal onder;
- verplaats ze horizontaal naar de rechter drie vakjes.

Als de hoeveelheden knikkers in de rechter-vakjes nu hetzelfde zijn als waarmee bovenin werd begonnen, is de oplossing gevonden. Bekijk bijvoorbeeld het eenvoudige 3×3 -puzzeltje, weer *in figuur 3*.

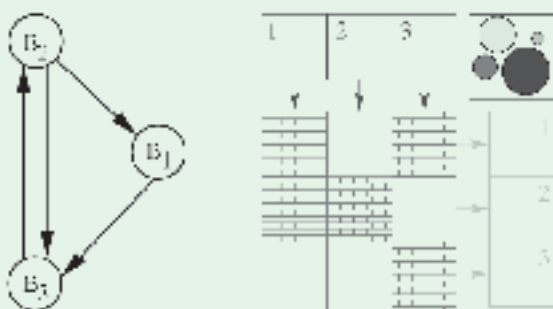
De representatie als Goozle lijkt iets overzichtelijker dan de representatie als graaf. Het weggeven van knikkers gaat verticaal, het ontvangen horizontaal.

Een belangrijk aspect van Goozles is dat ze het resultaat zijn van een vertaalslag. Een puzzel met kabouters, waarvan inmiddels

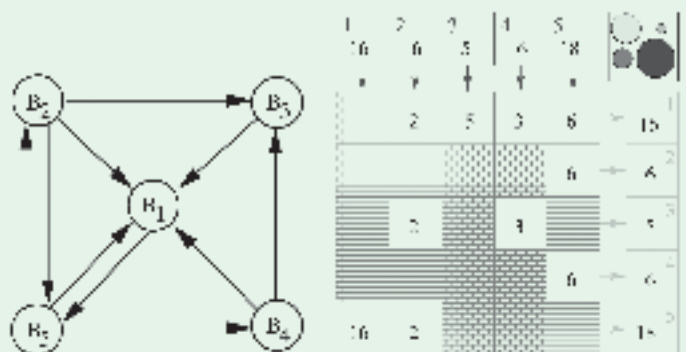
duidelijk is dat ze een internet(je) symboliseren, maar waarin de pijlen in principe alle kanten op kunnen wijzen, wordt herschreven in termen van een vierkant met volle en lege hokjes, een rijtje inputhokjes en een rijtje outputhokjes. In feite staat hier een matrix, waarvan de gevulde vakjes een nul bevatten, en de open vakjes, impliciet, de breuk $1/k$, waarbij k het aantal open vakjes uit de betreffende kolom van het vierkant is. Het gaat richting wiskunde, maar vooralsnog lijkt het nog meer op een *sudoku*. En als zodanig blijken Goozles een redelijke aantrekkingskracht te hebben op de gemiddelde leek, waaronder jongere kinderen, en ook ouderen die niets met wiskunde hebben.

Opmerking. Ook belangrijk is om in eerste instantie in gehele getallen te blijven rekenen, zodat de gehele Goozle doorlopen kan worden zonder een knikker in stukken te hoeven breken. Behalve dat dit gemakkelijker puzzelen is, is ook het existentiebewijs van een oplossing van het PageRank probleem in het uiteindelijke model relatief eenvoudig (zie [1]). In plaats van de dekpuntstelling van Brouwer op een compacte verzameling toe te passen, krijgen we te maken met een iteratie op een eindige verzameling. En dat is vwo-leerlingen prima uit te leggen; zie de website voor verdere details van dit aspect.

Duidelijk is dat de PageRank P_j een k -voud moet zijn als er k lege vakjes in de j -de verticale kolom van de Goozle staan. Gebruik makend van dit soort inzichten (en ook van het feit dat P_2 en P_4 direct volgen uit P_3) kan ook het oorspronkelijke kabouterprobleem uit *figuur 1* redelijk snel worden opgelost: zie *figuur 4*.



figuur 3 Klein kaboutertraadsel met bijbehorende Goozle



figuur 4 Goozle behorende bij het kaboutertraadsel uit figuur 1, met oplossing

Puzzelend, of Goozzelend, zijn ook twee belangrijke eigenschappen van matrix-rekening uit te leggen. Allereerst dat veelvouden van oplossingen (eigenvectoren) ook weer oplossingen zijn. En, door bijvoorbeeld met twee kleuren knikkers te werken, dat de output van een Goozzle lineair afhangt van de input. De verschillende kleuren knikkers vinden namelijk onafhankelijk van elkaar de weg door de Goozzle. Dit is van belang bij het bewijzen van de stelling dat er geen twee verschillende (niet elkaars veelvoud zijnde) oplossingen van een Goozzle bestaan. Oftewel, dat de eigenruimte van de eigenwaarde 1, één dimensionaal is, en dus dat het PageRank probleem niet ineens met twee heel verschillende ranglijsten voor het belang van de webblad zijden op de proppen komt.

In de UvA Webklas Wiskunde wordt, naast de manipulaties met Goozzles, ook wat lineaire algebra gegeven, maar dan in de hoedanigheid van een notatie voor Goozzles en hun oplossingen. Dit beperkt zich tot de matrix-vector-vermenigvuldiging en de lineariteit ervan.

4. Goozzles met teleportatie: positieve lineaire algebra

Het model, zoals boven gesuggereerd, is nog niet het definitieve model. Er zijn eenvoudige voorbeelden te geven van Goozzles die alleen de nuloplossing hebben, en zelfs van Goozzles die inderdaad twee oplossingen hebben, die niet elkaars veelvoud zijn. Zonder in detail te gaan wat de oorzaak is van deze tekortkomingen (zie bijvoorbeeld [3] voor een uitgebreide beschrijving), geven we hier een voorbeeld van het uiteindelijke type Goozzle, nadat alle

problemen de wereld uit zijn geholpen; zie **figuur 5**. Het wordt wel wat lastiger puzzelen.

Deze Goozzle kan worden gezien als een 3×3 -Goozzle van het eerdere type, waarbij we de doorstroom van knikkers garanderen door elk van de drie kolommen een fractie $1/5$ open te zetten. Dit is hier overigens omwille van de duidelijkheid van het plaatje niet in de juiste verhouding getekend! Hoe dan ook, knikkers uit een inputvakje moeten eerst in de verhouding $4 : 1$ verdeeld worden over de twee kleinere inputvakjes (een soort voorselectie), en pas daarna worden ze eerlijk verdeeld over de open vakjes er recht onder. En weer wordt alles horizontaal naar de vakjes aan de rechterkant verplaatst. De vraag is hetzelfde gebleven: een *stationaire* oplossing vinden.

Opmerking. Het openzetten van iedere kolom komt in het web overeen met het toevoegen van de mogelijkheid om vanuit een webblad zijde, met een bescheiden kans, naar een andere blad zijde te surfen, ook als daar geen hyperlink naar wijst. Dit kan bijvoorbeeld door in de browserbalk een nieuw adres in te tikken, en dit gebeurt natuurlijk ook geregeld. Het zich verplaatsen naar een andere webblad zijde zonder daarbij een hyperlink te hebben gevolgd wordt *teleportatie* genoemd. We zijn nu beland in het vakgebied van de positieve matrices: Perron-Frobenius-theorie. Door iedere kolom een klein beetje open te zetten bevat de bijbehorende matrix geen nullen meer.

Een van de centrale stellingen uit het vakgebied, die in de Webklas Wiskunde ook daadwerkelijk bewezen worden in termen van Goozzles, is dat de dominante

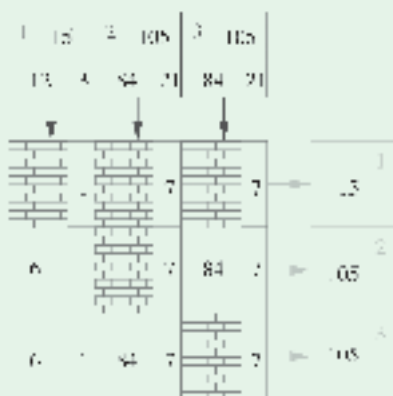
eigenvector positief gekozen kan worden, wat voor het concept PageRank natuurlijk wel van belang is. Immers, hoe vergelijk je een PageRank van 1 en -2? Deze vraag hoeft gelukkig niet te worden beantwoord.

Wat direct aan de puzzel te zien is, is dat de oplossing niet kan bestaan uit één nullen, én positieve getallen. Immers, een positieve hoeveelheid in één van de inputvakjes verdeelt zich in het rechterdeel van de bijbehorende kolom over alle outputvakjes. Dit eenvoudige resultaat staat centraal in enkele iets lastigere stellingen in deze context.

5. Stijgende ondergrenzen en de Machtsmethode

Als laatste voorbeeld van hoe een Goozzle kan helpen bij de uitleg van een wiskundig begrip, kijken we nogmaals naar de Goozzle uit **figuur 5**. Uitgaande van het feit dat er een oplossing bestaat in positieve gehele getallen die ook gehele getallen oplevert in alle vakjes van de Goozzle, kan deze gevonden worden middels een iteratie. Het idee is als volgt.

Als er een oplossing bestaat die overal in de Goozzle positieve gehele getallen heeft, kunnen we een eerste ondergrens afleiden voor de oplossing. Immers, teneinde gebroken knikkers te vermijden moet de input van de Goozzle uit **figuur 5** minimaal 15, 15, 15 zijn. Deze getallen zijn dus een (eerste) ondergrens voor de gezochte oplossing. Een tweede volgt door deze 15, 15, 15 knikkers volgens de Goozzle regels naar de outputvakjes te brengen. Het resultaat is 3, 21, 21. Ook deze drie getallen zijn ondergrenzen voor de gezochte oplossing. Voor twee van de drie vakjes levert dit zelfs een verbeterde ondergrens



figuur 5 Goozzle met teleportatie

op: combinatie van de gegevens geeft als beste ondergrens 15, 21, 21. Zoveel knikkers zijn er dus minimaal nodig. Maar omdat 21 niet deelbaar is door 15, en deelbaarheid door 15 noodzakelijk is om gebroken knikkers te vermijden, kunnen we de ondergrenzen weer ophogen tot 15, 30, 30. Deze hoeveelheden brengen we weer volgens de Goozzle regels naar de output-vakjes, enzovoorts.

Even nadenken over dit algoritme leert dat het convergeert naar de kleinste oplossing in positieve gehele getallen, die ook gehele getallen oplevert in alle vakjes van de Goozzle. Een monotone begrensde rij gehele getallen convergeert, en dat zelfs in eindig veel stappen. En, niet onbelangrijk, de limiet is inderdaad een oplossing.

Vervolgens kan met wat meer werk ook worden aangetoond dat dit proces convergeert zonder de aanname van de existentie, en ook in dit geval kan worden aangetoond dat de limiet een oplossing is. En dus levert dat de existentie van die oplossing op. Een wonderlijke constructie, maar wel zonder moeilijke wiskundige begrippen, allemaal vanwege het discrete karakter van gemakkelijk te begrijpen puzzels.

In de praktijk wordt de dominante eigenvector (de oplossing van de Goozzle) van de stochastische Google matrix G (van de Goozzle) bepaald door diezelfde iteratie, uiteraard in termen van lineaire algebra, genaamd de Machtsmethode. De Machtsmethode is niets anders dan het herhaald toepassen van de Goozzle op een gegeven beginsituatie, waarbij breuken wel worden toegestaan en de afrondstap dus ontbreekt. Gegeven de Google matrix G benadert de Machtsmethode de dominante eigenvector (dus de PageRank vector) van G middels de eenvoudige iteratie $x_{k+1} = Gx_k$, waarbij $x_0 \in \mathbb{R}^n$ een willekeurig gekozen startvector is. Convergentie van de Machtsmethode, voor een niet-symmetrische matrix zoals G , kan worden bewezen met behulp van een analyse van de Jordan-normaalvorm van G (zie [6]). Maar daarmee kan je natuurlijk in 5-vwo niet aankomen. Het mooie is dat bovenstaande variant met gehele getallen en afronding naar bepaalde veelvouden een veel eenvoudiger convergentiebewijs heeft, zonder dat dit ten koste gaat van de convergentiesnelheid.

6. Conclusies

In een toepassing zoals de PageRank van Google wordt vaak gebruik gemaakt van pittige wiskunde en stellingen met moeilijke

bewijzen. De reden dat die bewijzen vaak moeilijk zijn, is dat stellingen vaak zo breed en algemeen toepasbaar worden geformuleerd. Dat is de kracht van de wiskunde. Aan de andere kant, de toepassing zelf heeft vaak bij lange na niet die algemeenheid nodig, en is in die context eigenlijk slechts een speciaal geval. Om die reden kan het goed mogelijke zijn om de wiskundige algemeenheid weer teniet te doen ten gunste van de begrijpelijkheid ervan. Dit is precies wat de UvA Webklas Wiskunde over Google's PageRank heeft geprobeerd te doen. Gevolg is dat nu ook bovenbouw vwo-leerlingen kunnen meegenieten van de slimme trucs die Larry Page en Sergey Brin bedachten om hun zoekmachine zo optimaal mogelijk te laten functioneren.

Hieronder de mening van Dorien Lugt, die in 2008 één van de deelnemers aan de webklas was en inmiddels wiskunde studeert, terwijl ze dat vóór de webklas zelfs nog nooit overwogen had.

In het voorjaar van 2008 heb ik de wiskunde-webklas gevolgd aan de UvA. Toen ik besloot een webklas te gaan volgen, dacht ik niet meteen aan wiskunde. Ik bekeek het aanbod van webklassen en wiskunde leek me wel interessant. Het onderwerp van de webklas was: Google's PageRank. Ik had daar nog nooit van gehoord, en ik werd nieuwsgierig naar de manier waarop Google bepaalt welke zoekresultaten het belangrijkst zijn.

Aan het begin wist ik niet goed wat ik moest verwachten. Wiskunde, dat klinkt zo moeilijk. Maar toen ik aan de opdrachten begon, bleek het heel erg leuk! De eerste week was redelijk makkelijk, later moesten we ingewikkeldere dingen doen, zoals zelf algoritmes (her) schrijven.

Dit soort wiskunde kende ik helemaal niet van school. Je moest vooral zelf manieren bedenken om problemen op te lossen. Gelukkig kon je met je medeweeklassers discussiëren over de opdrachten op het forum. Daar kon je ook vragen stellen aan de webklasdocenten. Het leuke van de webklas vond ik vooral dat alles wat je leerde ook echt wordt toegepast in de realiteit. De vraag die ik op school nog wel eens heb bij wiskunde: 'Waar gebruik je dit in hemelsnaam voor?', was hier dus helemaal niet nodig. Ik vond het zelfs zo interessant, dat ik besloten heb dit als onderwerp voor mijn profielwerkstuk te gebruiken.

Aan het einde van de webklas werd er een middag georganiseerd waar alle deelnemers aan de wiskundewebklas naar toe mochten als ze wilden. Best leuk om de personen, die je alleen via het forum hebt gesproken, in het

echt te zien.

Ik vond het ontzettend leuk om via deze webklas met een 'ander soort' wiskunde in contact te komen. Ik denk dat het voor mensen die erover denken om wiskunde te gaan studeren, een hele goede kennismaking is. Maar ook als je daar helemaal niet aan denkt, is aan te raden een wiskunde webklas te volgen. Het is gewoon leuk!

Referenties

- [1] J.H. Brandts (2008): *UvA Webklas Wiskunde: de PageRank van Google in 12 uur*. Via: « <http://staff.science.uva.nl/~brandts> » (homepage van Jan Brandts).
- [2] J.H. Brandts (2007): *Google's PageRank: de grootste matrixberekening ooit*. In: *Nieuwe Wiskrant*, 27(2); pp. 8-12.
- [3] J.H. Brandts (2008). *De wiskunde die Google groot maakte*. In: *Uitwiskeling*, 24(4); pp. 8-18. Dit artikel is digitaal beschikbaar via: « <http://staff.science.uva.nl/~brandts/outreach/pdf/uitwiskeling.pdf> »
- [4] J.H. Brandts (2008): *Google danst*. In: *Pythagoras*, 48(1); pp. 8-12. Dit artikel is digitaal beschikbaar via: « <http://staff.science.uva.nl/~brandts/outreach/pdf/pythagoras.pdf> »
- [5] A.N. Langville, C.D. Meyer (2006): *Google's PageRank and Beyond / the science of search engine rankings*. Princeton, Oxford: Princeton University Press.
- [6] Wikipedia: *Power Iteration*. Via: « http://en.wikipedia.org/wiki/Power_iteration »

Over de auteur

Jan Brandts (1968) promoveerde begin 1995 aan de Universiteit Utrecht en werkte vervolgens in Bristol, Jyväskylä, Kiel, Praag en Sydney alvorens in 1999 als KNAW Fellow terug te keren aan de Universiteit Utrecht. Sinds 2002 heeft hij een vaste aanstelling aan het Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde van de Universiteit van Amsterdam, alwaar hij onderzoek doet in de (Numerieke) Lineaire Algebra en de Computationale Meetkunde, en onderwijs geeft in zowel de Bachelor als de (Nationale) Master. Daarnaast is hij betrokken bij outreach-activiteiten als Proefstuderen, Leve de Wiskunde, en de Webklas Wiskunde van de UvA. E-mailadres: J.H.Brandts@uva.nl

[Red.] De meesten van ons zijn geen lid van Wisbase (150 Wisbase-leden in vergelijking met 3000 Euclides-lezers). Misschien dat u zich, net als ik na lezing van dit artikel, realiseert dat u zichzelf tekort doet en een prachtkans laat lopen. Zo verging het mij wel. Leest en oordeelt u zelf. Bram Theune doet een boekje open over Wisbase in een heldere vraag- en antwoordstijl.

Wat is WisBase?

WisBase is een uitwisselingsbank voor allerlei soorten wiskundig lesmateriaal. Het meest gebruikte materiaal zijn de toetsen.

Wat kan een docent in de toetsenbank zoal vinden?

In de eerste plaats staan er toetsen in voor elke methode en elk niveau. Je kunt eventueel een paar jaar teruggaan naar wat oudere toetsen en die in een handomdraai aanpassen. Naast de toetsen zijn er veel antwoorden/uitwerkingen. Van veel hoofdstukken zijn er vaak wel 5 tot 8 paralleltoetsen, zodat er met knip- en plakwerk snel een geheel nieuwe toets ontworpen kan worden. Er staan zoveel toetsen in, dat ikzelf de bank zou durven openstellen voor mijn eigen leerlingen. Maar ik heb er begrip voor dat een aantal collega's daar anders over denkt.

Naast de normale toetsen zijn er ook: eindexamens, schoolexamens, dossiertoetsen, applets, handleidingen van software, lesbrieven, links naar andere sites, losse opgaven, soorten wiskundig papier, exitttoetsen, praktische opdrachten, uitwerkingen die horen bij bepaalde methodes, internationale toetsen, toetsen voor tweetalig onderwijs, informatie over omgaan met GR, praktische opdrachten, enz.

Welk didactisch principe steekt er achter WisBase?

WisBase is in te passen in elk didactisch concept. WisBase is niet gebaseerd op een bepaalde levensbeschouwing en of didactiek. Het materiaal op WisBase is in elke methode van aanpak te gebruiken.

Waarom heb je WisBase opgericht en hoe is het begonnen?

Voor de invoering van de tweede fase organiseerden we regelmatig bijeenkomsten met scholen uit de omgeving. Tijdens deze samenkomsten bespraken wij hoe we de vernieuwingen konden invoeren en zodoende leerden wij van elkaar. Op een gegeven moment kwam het plan ter sprake om een platform voor uitwisseling van toetsen op te richten. Direct daarop werd de vraag gesteld of ik daar kans toe zag. Mogelijk omdat ik de grootste mond had of omdat zij in mij een gewillig slachtoffer zagen. Wie zal het zeggen. Op een volgende bijeenkomst heb ik mijn visie en plannen toegelicht en vervolgens een oproep gedaan in de *Wiskunde-brief* in december 2001. Toen zich een aantal medestanders meldden, heb ik samen met twee collega's van mijn school (Paul van Dijk en David van Oorschot) in de loop van 2002 WisBase opgericht.

Hoe kun je lid worden van WisBase?

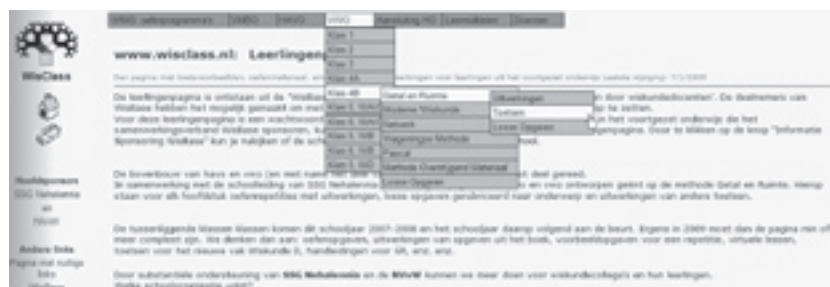
Door drie toetsen met antwoorden/uitwerkingen op te sturen naar actheune@versatel.nl samen met een ingevuld inschrijfformulier, dat je kunt downloaden van de website van WisBase (www.wisbase.nl) en dan via de menubalk naar *Voor Gasten | Inlichtingen en aanmelden*. Als dat niet lukt, is een mailtje naar mij ook al voldoende om een inschrijfformulier te ontvangen. Deze toetsen worden voorgelegd aan de moderator van de deelsite waarop de toetsen betrekking hebben. Zodra de moderator groen licht geeft, wordt de inzender toegelaten tot WisBase. De nieuwe deelnemer krijgt dan toegang tot de gehele database: al het lesmateriaal voor alle methodes en alle afdelingen van vmbo tot vwo (zie *figuur 1* en *figuur 2*).

Waarom maken jullie gebruik van een wachtwoord?

Toetsen, vaak met uitwerkingen en antwoorden, staan achter een wachtwoord. Een wachtwoord is nodig om er verzekerd van te zijn dat elke deelnemer op tijd een zekere inspanning levert om de (toetsen)bank aan te vullen. Op die manier komen er alleen mensen binnen die niet alleen willen halen, maar ook wat willen aanleveren. Verder willen we aan kwaliteits-



figuur 1 Procedure van aanmelding



figuur 2 Navigatie via de menubalk

Erik van den Hout: *WisBase levert mij vooral tijdswinst op bij herkansingen en inhaalwerken. Ik neem dan meestal een werk direct over uit WisBase. Het samenstellen van een proefwerk, door opgaven uit verschillende toetsen van WisBase te gebruiken doe ik ook regelmatig. Daarnaast vind ik het ook zeer verhelderend en leerzaam om te zien hoe collega's hun toetsen maken, en op welke onderdelen van een hoofdstuk zij de nadruk leggen in hun toets. Ook van schoolcollega's begrijp ik dat WisBase vaak veel tijdswinst oplevert.*

beheersing doen door elke inzending te controleren op bruikbaarheid en originaliteit.

Hoe is WisBase georganiseerd?

WisBase wordt geleid door het Centraal Beheer, bestaande uit David van Oorschoot en Bram Theune. Wij houden ons onder andere dagelijks bezig met administratie, het beantwoorden van vragen en opmerkingen en het bijhouden van pagina's die betrekking hebben op het algemene gedeelte van de website. Tevens zijn we moderator van een flink aantal deelsites die te maken hebben met een bepaalde methode en een bepaalde jaargroep. Daarnaast hebben we een groep van een kleine twintig moderatoren die ieder voor zich dat stukje beheren waarin zij deskundig zijn. Met zijn tweeën hebben we uiteraard niet de kennis om voor elke methode en elk niveau/klas te bepalen of een bijdrage geschikt is.

Hoe verzorgen jullie de contacten?

Heel veel ideeën en voorstellen worden uitgewisseld via e-mail. Om de twee weken geef ik een nieuwsbrief uit, waarbij de laatste nieuwtjes en aanwijzingen doorgegeven worden. De moderatoren vergaderen ook via e-mail in de

zogenoemde WBG, de WisBase Beheerders Groep. In deze groep vallen de beleidsbeslissingen bij meerderheid van stemmen. Maar om duidelijk te maken dat we eigenlijk geen echte tegenstellingen hebben gekend, kan ik zeggen dat er in het verleden nog nooit van stemming gebruik is gemaakt.

Welk principe steekt er achter WisBase?

WisBase wil in een behoefte voorzien voor zoveel mogelijk collega's. Docenten hanteren heel veel verschillende visies omtrent het onderwijs, daarom bemoeien wij ons niet met visies. WisBase is ontstaan uit de wens om de werkdruk onder docenten te verminderen. Als wij echter de ontwikkelingen van de laatste tijd beschouwen, zien wij dat de concurrentiegedachte in het onderwijs hoogtij viert. Wij vanuit WisBase willen ons inziens een grotere kracht mobiliseren: *solidariteit en samenwerking*. Misschien een utopie, maar wij geloven er heilig in.

Welke voordelen heeft WisBase?

De grootste voordelen zitten in de tijdswinst die je genereert als je toetsen uit de databank gebruikt. Verder zijn die toetsen van gemiddeld hoge kwaliteit. De kwaliteit van je lessen gaat er op vooruit, omdat je in de eerste plaats minder tijd kwijt bent met

het ontwikkelen van zelf gemaakt materiaal. Verder kun je de kwaliteit van het lesmateriaal nog verhogen door het aan te passen aan jouw wensen.

Het inzien van het materiaal van collega's geeft ook een kijkje in de keuken van andere scholen (*zie figuur 4*). Zo kun je je eigen schoolexamens spiegelen aan die van anderen. En daar heeft een docent heel veel steun aan. Verder kan WisBase bij elke lesaanpak gebruikt worden, omdat wij geen didactisch principe hanteren.

Welke nadelen heeft WisBase?

Als je van een nadeel wilt spreken, is het jaarlijks maken van een toets met uitwerkingen een extra belasting. Maar daar mag je een jaar over doen en als je ongeveer twee letters per dag intikt, is je proefwerk na een jaar vrijwel klaar.

Het echte nadeel zit meer in het systeem van WisBase zelf. Immers, als je toegelaten bent als deelnemer, krijg je de beschikking over de gehele toetsenbank. Het komt dus wel eens voor, dat mensen na één of twee jaar afhaken. Mogelijk denken ze de toetsenbank niet meer nodig te hebben.

Jullie maken toch wel kosten, zoals voor webhosting. Hoe worden die kosten gefinancierd?

Om de financiën te beheren hebben we een stichting op naam van WisBase in het leven geroepen. In de eerste plaats ontvangen we sponsorgelden van scholen die ons werk toejuichen. Ook de NVvW draagt een substantieel deel bij. Verder zijn er scholen die een schooldeelname pakket hebben aangeschaft. Bij schooldeelname hoort een verplichting om te sponsoren.



figuur 3 Van sommige hoofdstukken bestaan meer dan 10 paralleltoetsen



figuur 4 Kaartje met deelnemers/scholen

Leo Traas, COV-Prisma College Amersfoort: *WisBase, een uitkomst op de ISK! Ik ben wiskundedocent op de COV (Centrale Opvang Voorziening), de ISK voor Amersfoort en omstreken. Onze school verzorgt Eerste Opvang Onderwijs voor anderstaligen. De leeftijd van de leerlingen ligt tussen 12 en 18 jaar en hun opleidingsniveau is zeer divers, van analfabeet tot enkele jaren middelbaar onderwijs. Eén ding hebben ze gemeen: ze beheersen geen Nederlands. Na één tot anderhalf jaar intensieve NT2 lessen (20 uur per week) schakelen wij ze naar een passende opleiding. Dat loopt van speciaal onderwijs tot gymnasium of mbo.*

Alle leerlingen krijgen 4 uur wiskunde per week. Omdat de leerlingen in klassen ingedeeld worden aan de hand van hun niveau Nederlands zijn er per klas enorme verschillen wat wiskundenniveau betreft. Daarom werken leerlingen bij wiskunde individueel. Groot voordeel hiervan is dat leerlingen in hun eigen tempo kunnen werken en zodoende heel ver kunnen komen. Het maximum dat leerlingen bereiken is zo ongeveer vmbo-t klas 4. Ik heb voldoende stof en toetsmateriaal tot dat niveau. Alles voornamelijk zelf ontwikkeld. Een enkele keer tref ik een uitzonderlijk goede leerling aan die al het beschikbare materiaal af krijgt. Dan zit ik met mijn handen in het haar. Zoals onlangs: een Chinees meisje van 16 is na acht maanden door alle stof heen, voor het vmbo-t examen van vorig jaar dat ik haar laat maken, scoort ze zonder voorbereiding een 9,8. Ze heeft nog drie maanden te gaan bij ons. Dan maar eens een vwo-3 methode geprobeerd, Moderne wiskunde. Antwoordenboek erbij, zodat ze zelf kan nakijken. Maar daar horen natuurlijk ook toetsen bij, en die heb ik zelf niet paraat. Dan is WisBase een uitkomst. Daarin is een hele toetsbatterij bij de methode te vinden, mét uitwerkingen! Dat bespaart mij enorm veel tijd. En mijn top-leerling kan weer verder. Zij is uiteindelijk geschakeld naar vavo op niveau havo-3 en vindt wiskunde daar het makkelijkste vak.

Welke soorten van deelname kent WisBase?

Allereerst kun je moderator zijn. Dat betekent dat je dan beheerder bent van een bepaalde deelsite van WisBase, zoals G&R onderbouw, praktische opdrachten bovenbouw, e.d.

Voor gebruikers bieden we drie soorten van deelnames aan.

Individuele deelname – Drie originele toetsen insturen is voldoende om een jaar lid te worden. Om het lidmaatschap te verlengen is daarna elk jaar één toets (of ander lesmateriaal) voldoende.

Collegiale deelname – Als er op een school

een docent ingeschreven is als deelnemer, is het voor de volgende docent om lid te worden al voldoende om één toets in te sturen. Ook die tweede docent wordt dan als een volwaardig lid aangemerkt.

Schooldeelname – Als er bij WisBase van één school drie deelnemers ingeschreven zijn, bestaat de mogelijkheid om schooldeelname aan te vragen. Daartoe moet de school zich verplichten om elk jaar WisBase te sponsoren en dus elk nieuw schooljaar drie toetsen te leveren. Het voordeel voor de school is dan:

- alle docenten van de school krijgen toegang tot WisBase;

- alle leerlingen van de school krijgen toegang tot WisClass.

Wat is WisClass?

WisClass (www.wisclass.nl; zie **figuur 5**) is een wiskundetoetsenbank voor leerlingen.

Het is de bedoeling dat leerlingen het materiaal op de site onder strakke regie van de docent leren gebruiken. Op WisClass staan van de methode *Getal en Ruimte* voorbeeldtoetsen van bijna alle hoofdstukken. Ik zou graag ook toetsen van andere methodes hier plaatsen. Maar we zijn uiteraard afhankelijk van het aanbod. Verder staan er veel exittoetsen, instaptoetsen, schoolexamens en CSE's met uitwerkingen.

Een heel mooie toepassing is het aanbieden van uitwerkingen van opgaven uit de methodes *Getal en Ruimte* en *Moderne wiskunde*. Twee auteurs, Harry van den Beuken en Rob Onrust, zijn vrijwel continu bezig met het schrijven van uitwerkingen bij deze methodes voor de bovenbouw.

Deze uitwerkingen, in kleur, zijn dus vrij van auteursrechten en wegen qua kwaliteit zeker op tegen de commerciële versies.

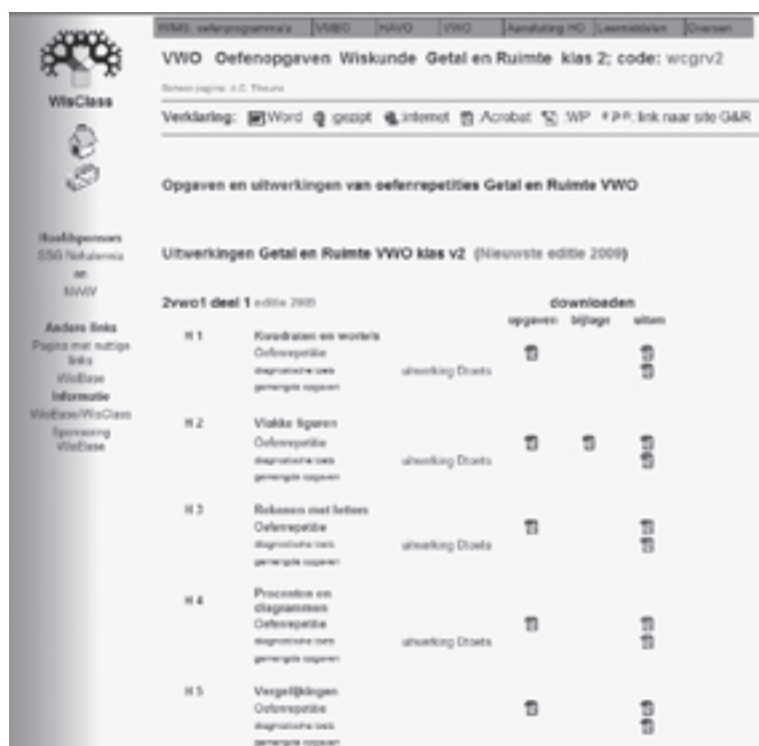
Alles wat wij op WisClass aanbieden kan door leerlingen thuis en op school gedownload worden. Op deze manier worden de mogelijkheden van de docent vergroot. Voor het mogen gebruiken van WisClass vragen wij wel of de betreffende school ons wil sponsoren.

Heeft WisBase ook contacten naar buiten toe?

WisBase heeft sterke banden met de NVvW. Verder heeft WisBase nauwe contacten met NKBW, de Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde. Leden van WisBase maken deel uit van de werkgroep toetsontwikkeling van NKBW. Deze groep ontwikkelt eindtoetsen voor het vo en instaptoetsen voor het ho. De bedoeling is dat hiermee een deel van de aansluitingsproblematiek vo-ho wordt gereduceerd op het gebied van algebraïsche vaardigheden. Gedurende het bestaan van WisBase hebben we getracht contacten op te bouwen met ho-instituten, maar dat heeft nog tot weinig concreets geleid. Blijkbaar is er in deze onderwijssoort geen behoefte om een verzameling toetsen aan te leggen. Koudwatervrees of te veel moeite? Wie zal het zeggen?

Zijn de deelnemers tevreden met WisBase?

Omdat deelnemers vrij zijn om wel of geen lid te worden van WisBase, kun je er rustig van uitgaan dat alle deelnemers tevreden zijn over WisBase. Als ik naar mijn eigen



figuur 5
Pagina met voorbeeldtoetsen op WisClass

Wim Haazen, Venlo: *WisBase betekent voor mij naast tijdsbesparing ook dat ik het niveau van de toetsen die ik zelf fabriceer, goed kan vergelijken met dat van mijn collega's. De toetsen die geplaatst zijn, zijn over het algemeen van goede kwaliteit; je kunt ze in principe zó gebruiken of in ieder geval enkele opgaven er uit. Vooral bij meetkundeproefwerken is de tijdsbesparing aanzienlijk omdat je de figuren niet allemaal zelf hoeft te maken. WisBase moet blijven, ook na het tijdperk Bram Theune!*

manier van werken kijk, zou ik niet meer zonder WisBase kunnen. Ik durf dan ook de stelling aan dat je je leerlingen te kort doet als je geen gebruik maakt van de databank van WisBase en WisClass.

Waarom gaat WisBase niet (voor een deel) commercieel?

Ik moet zeggen dat ik meerdere malen overwogen heb om WisBase tot een commercieel instituut om te vormen. Niet om er geld aan te verdienen maar om de service naar de deelnemers/klanten toe uit te bouwen. Je moet niet vergeten dat alles wat wij doen, in onze vrije tijd gebeurt, terwijl we ook nog eens gewone docenten zijn die met veel plezier voor de klas staan. Geld speelt alleen maar een rol om de kosten te dekken. Verder zijn wij allemaal idealisten, maar wel idealisten die met beide benen op de werkvloer blijven staan. Als je naast je werk voor school je dagelijks werk voor WisBase doet, blijft er eigenlijk te weinig tijd over om contacten te leggen met commerciële instituten.

Waarop ben je het meest trots?

Er wordt veel geëxperimenteerd binnen het onderwijs in Nederland. Dankzij de concurrentiegedachte, inspectie en niet te vergeten de ambitieuze managers is het voortgezet onderwijs een pluriforme lappendeken geworden. Het is zeker waar dat ouders daardoor iets te kiezen hebben. Maar menig manager met veel ambitie vliegt uit de bocht. Naast allerlei onderwijs-experimenten die uitgevoerd worden door bewogen docenten, zijn er toch veel mislukte projecten. En dat frustriert de docent, en voor de leerlingen is het ook niet goed.

Een heel simpele strategie om leerlingen een bepaald stuk leerstof op een efficiënte manier bij te brengen, is het werken met voorbeeldtoetsen. Uiteraard kan niet elke docent van elke toets ook nog eens een

voorbeeldtoets fabriceren. Maar als we dat *samen doen* (een lijfspreuk van WisBase) kan dat wel. Er staan inmiddels al heel veel voorbeeldrepetities voor de methode *Getal en Ruimte* op WisClass. De voorgestelde werkwijze is dan als volgt:

- Na het afsluiten van een hoofdstuk/leerstofgebied spreekt de docent een repetitiedatum en een datum voor vragen over het hoofdstuk af.
- De voorbeeldtoets met uitwerkingen staat geparkeerd op WisClass.
- Leerlingen maken thuis de voorbeeldtoets als voorbereiding op de echte toets.
- Leerlingen komen op school met vragen over de voorbeeldtoets.
- Leerlingen maken de repetitie die voor een bepaald percentage sterk lijkt op de voorbeeldtoets.
- De wat moeilijkere denk/toepassingsvragen staan aan het eind van de repetitie.

Voordelen:

- Leerlingen weten precies welke leerstof de docent belangrijk vindt.
- Ouders die vragen naar een parallel-repetitie om hun kind te laten oefenen, zijn tevreden.
- De definitieve repetitie kan aantoonbaar moeilijker gemaakt worden dan vroegere op zichzelf staande repetities.
- Onzekere leerlingen hebben steun aan de voorbeeldtoets, omdat ze precies weten op wat ze zich moeten voorbereiden.

In de praktijk zijn er in het begin nog wel eens leerlingen die de voorbeeldtoets aan zich voorbij laten gaan. Als hun cijfer voor de definitieve repetitie dan tegenvalt, zijn ze echter gauw genezen: een volgend proefwerk wordt dan beter voorbereid.

Ik weet dat bovenstaand leerproces via WisClass strak geregisseerd is, hetgeen bij sommige collega's weerstanden zal oproepen. Aan de andere kant wordt er in het onderwijs ook wel eens te vrijblijvend omgegaan met onderwijstijd. Efficiënt

omgaan met die tijd, omdat we toch allemaal opleiden voor hetzelfde examen en/of vervolgonderwijs, is voor mij als docent een zeer belangrijke factor.

Het klinkt allemaal zeer positief, maar zijn er ook problemen?

Ik vind het fijn dat die vraag gesteld wordt en zal er ook niet omheen draaien. De laatste tijd maak ik mij zorgen om het voortbestaan van WisBase. Het deelnemers-aantal (rond de 150) stabiliseert weliswaar, maar er komen steeds meer taken op het bordje van het centraal beheer, het dagelijks bestuur dus. We worden wel ondersteund door de NVvW (dank!!) maar dat is bij lange na niet voldoende. Blijkbaar is het voor de gemiddelde docent veel gemakkelijker om via de commercie rond het onderwijs aan het materiaal te komen dan één keer per jaar een toets in te leveren. Voor zo'n docent speelt gemak blijkbaar een grotere rol dan efficiënt met gelden omgaan.

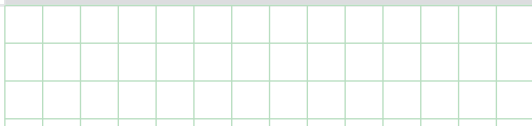
Mijn grootste zorg is echter dat David en ik een leeftijd hebben bereikt dat we er mee willen stoppen. Ikzelf ben al gedeeltelijk met fpu en David heeft plannen om aan het eind van dit schooljaar te stoppen. WisBase beschouw ik als 'mijn levenswerk' en ik zou heel graag het stokje willen doorgeven. Helaas zie ik daar momenteel nog niet de mogelijkheden voor. We hebben een enorm grote database opgebouwd en het zou jammer zijn dat die, op het moment dat wij stoppen, verloren zou gaan.

Ik sta open voor allerlei suggesties en ik ben bereid met iedereen te bespreken/onderhandelen op welke manier er een doorstart gemaakt zou kunnen worden.

Over de auteur

Bram Theune is oprichter van WisBase en van WisClass en voormalig wiskundedocent aan Nehalennia SSG te Middelburg. E-mailadres: actheune@versatel.nl

Michiel van Saagsvelt, Nehalennia SSG, Middelburg: *WisBase is gestart als instrument om het werk dat gepaard gaat met het construeren van toetsen, te verlichten. Wat niet voorzien was toen WisBase werd opgericht, is dat het niveau van de toetsen ongemerkt beter en beter geworden is. Deelnemers van WisBase stellen zelf steeds hogere eisen aan de bijdragen die zij leveren aan de 'WisBase-community', omdat niemand wil onderdoen voor reeds geplaatst materiaal. Daarmee krijgt de kwaliteit, vandaag de dag een hot item binnen het onderwijs, op het gebied van wiskundetoetsen met behulp van WisBase een belangrijke impuls.*



Dynamische meetkunde

[Christian Bokhove]

Dit stuk is geschreven naar aanleiding van enkele toevalligheden die bij elkaar kwamen in *Euclides* nummer 8 van jaargang 83. De eerste aanleiding was het artikel over de door het Barlaeusgymnasium gemaakte methode voor de eerste klassen.^[1] Een mooi initiatief! Ik werd echter geprikkeld door twee opmerkingen. Ten eerste de zinsnede over ‘vele extra’s als computergrafien...’. Het is zeker zo dat veel computerondersteuning gewoonweg erbij gesleept wordt. De meerwaarde is er soms wel en soms niet. Bij bestudering van de wiskundemethode is ‘ICT als hulpmiddel’ naar mijn mening wel heel karig bedeed. Zeker bij onderwerpen als meetkunde kan – zoals veel gebruikers van bijvoorbeeld *Cabri* en *Geocadabra* al weten – geprofiteerd worden van de dynamische mogelijkheden van een computerprogramma.^[2] Het artikel breekt ook een lans voor *open source*. Ik moest meteen denken aan het computerprogramma dat dit jaar voor het eerst onderwerp was van de internationale conferentie CADGME dat de Universiteit van Linz organiseerde: *Computer Algebra en Geogebra*. De website <http://www.geogebra.org> heeft het over:

Geogebra is een wiskundepakket dat meetkunde, algebra en analyse combineert. Enerzijds is Geogebra een dynamisch meetkundepakket. Je kan constructies uitvoeren met punten, vectoren, lijnstukken, rechten en kegelsneden en je kan deze tekenobjecten daarna dynamisch wijzigen.

Anderzijds kunnen functies, vergelijkingen en coördinaten rechtstreeks worden ingevoerd. Met Geogebra is het dus ook mogelijk om met variabelen te werken voor getallen, te rekenen met vectoren en punten, afgeleiden en integralen van functies te berekenen en er zijn ook commando’s voorzien om bijv. nulpunten of extrema te berekenen.

Deze twee standpunten zijn typisch voor Geogebra: een uitdrukking in het algebra-venster correspondeert met een object in het tekenvenster en omgekeerd.

En, in de rubriek ‘Vanuit de oude doos’ daagt Ton Lecluse regelmatig uit om oude meetkundeopgaven met een dynamisch computerprogramma te construeren; dit om inzicht te krijgen in de opgave. In dit artikel wil ik aan de hand van drie opgaven uit de methode van het Barlaeus en de uitdaging van Ton Lecluse^[3], in vogelvlucht, laten zien hoe *Geogebra* – of een ander dynamisch meetkundeprogramma – inzicht kan verschaffen in meetkundige constructies. Hierbij moet deze aanpak staan *naast* een pen-en-papier aanpak. Leerlingen kunnen van beide profiteren.

Voorbeeld 1

Constructie middelloodlijn van een lijnstuk AB

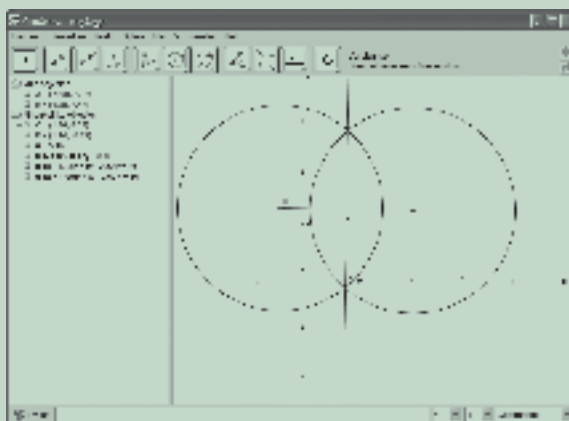
Met een passer en liniaal kan deze constructie eenvoudig uitgevoerd worden. In *Geogebra* kan dat ook vrij eenvoudig (*zie figuur 1*). De lengte van het lijnstuk kan veranderd worden door een eindpunt (*A* of *B*) te verschuiven. Hierdoor kan bijvoor-

beeld makkelijk geobserveerd worden dat de te tekenen cirkels een straal moeten hebben van minimaal de helft van de lengte *AB*. Dit lijkt tamelijk triviaal, maar het met passer en liniaal tekenen van meerdere situaties kan een tijdrovende bezigheid zijn. Bij een dynamisch programma is het een kwestie van slepen.

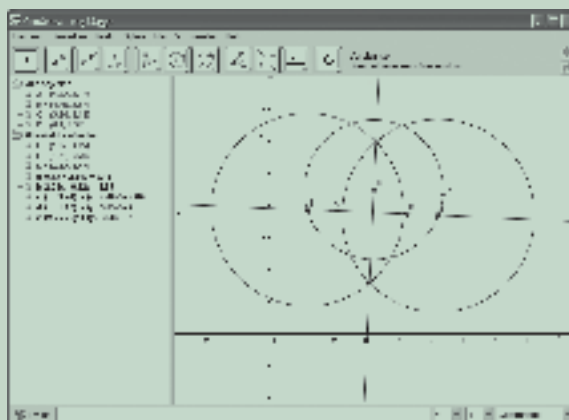
Voorbeeld 2

Loodlijn vanuit een punt *C* op een lijnstuk *AB*

Deze constructie is al wat ingewikkelder (*zie figuur 2*). Bij het meerdere keren (met passer en liniaal) construeren zal een leerling lang bezig zijn. Voor de motoriek is dat wellicht fijn, maar voor het ontdekken van ‘bijzondere gevallen’ zal een computerprogramma kunnen helpen. Zo kan door slepen bijvoorbeeld gezien worden dat de plaats van *A* of *B* op de lijn *AB* niet uitmaakt. Ook kan weer ontdekt worden hoe groot de straal van de hulpcirkel minimaal moet zijn.



figuur 1 De constructie van de middelloodlijn van een lijnstuk AB



figuur 2 De loodlijn uit een punt *C* op een lijnstuk *AB*

Voorbeeld 3

De rechte van Euler

Hoe complexer de vraag, hoe nuttiger een computerprogramma wordt. Niet omdat het programma mentaal werk uit handen neemt, maar juist omdat het de mogelijk tijdrovende tekeningen 'dynamisch' maakt, zodat veel sneller verschillende plaatjes kunnen worden getekend. In deze opgave wordt bijvoorbeeld gestart met een willekeurige driehoek. Maar wat gebeurt er met de 'bijzondere lijnen' (zwaartelijn, hoogtelijn, middelloodlijn) als een driehoekig gelijkbenig, rechthoekig, gelijkzijdig is? Zo kunnen we kijken naar de *rechte van Euler*: de lijn die door het hoogtepunt en het zwaartepunt van een driehoek gaat, en ook door het middelpunt van de omschreven cirkel daarvan (*zie figuur 3*, waarin H het hoogtepunt, G het zwaartepunt en M het middelpunt is). In de meeste lesboeken worden 'mooie' driehoeken gekozen die alle bijzondere punten tot hun recht laten komen. In een dynamisch meetkundeprogramma maak je gewoonweg een willekeurige driehoek en de constructie; na voltooiing kunnen dan de hoekpunten van de driehoek worden verplaatst. Ook kunnen naar believen lijnen en punten 'aan' en 'uit' worden gezet, zodat de tekening overzichtelijk blijft. In de met *Geogebra* gemaakte tekening is de rechte van Euler dikker aangegeven, en zijn vlot verschillende driehoeken gemaakt.

Voorbeeld 4

Vanuit de oude doos

De opgave uit de oude doos in *Euclides* van februari 2009 (jrg. 84) was uit een toelatings-examen wiskunde tot de universiteiten in 1928:

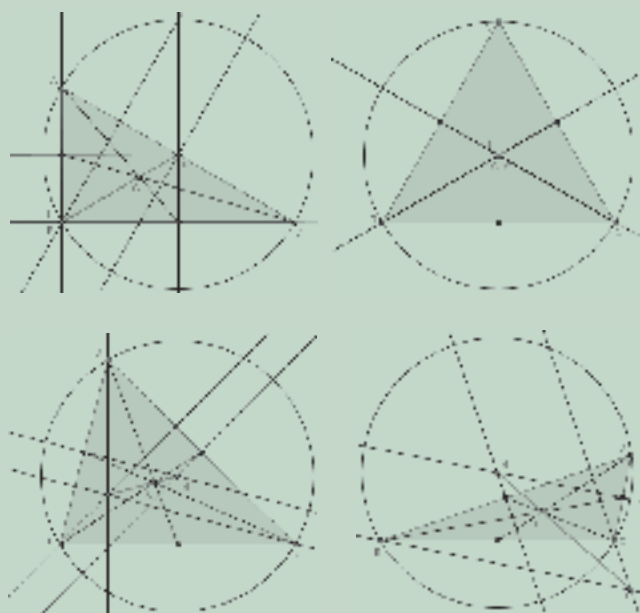
In een vierhoek $ABCD$ trekt men de diagonalen, die elkaar in S snijden. Bewijs, dat de cirkels beschreven om de driehoeken ASD en BSC elkaar snijden onder een hoek gelijk aan die, gevormd door AD en BC bij verlenging.

Uiteraard is het voorbeeld construeren niet hetzelfde als 'bewijzen'. Om inzicht te krijgen in de situatie kan een computer-programma helpen. Ook kan de tekening helpen bij het formuleren van bepaalde vermoedens. En zo ontstond *figuur 4*. Ook hier is het mogelijk om de hoekpunten van de vierhoek $ABCD$ naar believen te verplaatsen. Verplaatsen laat zien dat de in de opgave beschreven cirkels elkaar – zie de raaklijnen – in een hoek α blijven snijden die gelijk is aan hoek β die de verlengden van AD en BC maken. Ook laat de numerieke informatie aan de linkerzijde inderdaad zien dat de hoeken α en β gelijk blijven. Dit is natuurlijk nog geen bewijs. Sterker nog, het is een lastig punt van meetkundesoftware. In het laatste voorbeeld is de situatie zo ingewikkeld dat vaak alleen iets gezegd kan worden over de 'bijzondere gevallen'. Wat gebeurt er als we te maken hebben met een vierkant? Wat als het een rechthoek is? En een trapezium? Kijken we naar een simpeler voorbeeld, bijvoorbeeld dat van middelloodlijnen in een

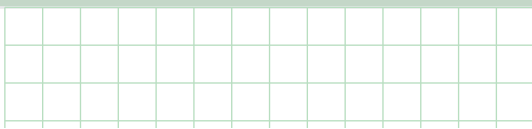
driehoek (een onderdeel van de figuur met de rechte van Euler), dan kunnen ook bijzondere driehoeken (zoals een rechthoekige driehoek) worden bekeken (*zie figuur 5*).

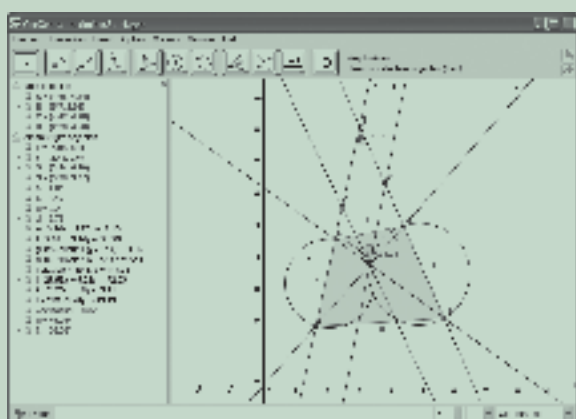
Uit figuur 5 blijkt redelijk makkelijk dat de middelloodlijn de schuine zijde AC in tweeën deelt. Daarnaast gaan de andere middelloodlijnen ook door dit punt D . In deze tekening wordt misschien net wat sneller duidelijk dat A en B even ver liggen van de middelloodlijn van AB , B en C even ver van de middelloodlijn van BC , en A en C even ver van de middelloodlijn van AC . Maar dan: als $|AD| = |CD|$ en $|BD| = |CD|$ en $|BD| = |AD|$, geldt natuurlijk dat $|AD| = |BD| = |CD|$ en dus dat A , B en C op de cirkel met middelpunt D en straal $|AD|$ liggen.

Toch blijft dit ook de achilleshiel van dit soort software. Uiteindelijk zal een leerling zelf de mentale stap van het bewijzen moet doen. Een vakgebied op het grensvlak van informatica en wiskunde is het onderzoek naar *proof assistants*, waarin software voor meetkunde gecombineerd wordt met *proof checkers*. Deze programma's kunnen op basis van axioma's afleidingen maken; een voorbeeld is *GeoProof* (*zie* <http://home.gna.org/geoproof/>). Die afleidingen kunnen onder andere gevonden worden door Gröbner-bases^[4] te gebruiken. Daarvan had ik nog nooit gehoord, totdat ik de 'uitvinder' van deze theorie voor het eerst tegenkwam op een conferentie die hij eerder organiseerde: de CADGME. Waarmee de cirkel in ieder geval rond is.

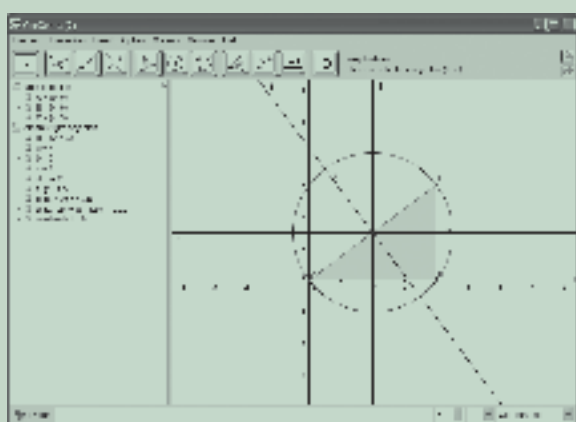


figuur 3 Vier verschillende driehoeken ABC met de bijzondere lijnen en de rechte van Euler (als lijnstuk)





figuur 4 Vanuit de oude doos in Euclides 84-4



figuur 5 Middelloodlijnen in een rechthoekige driehoek

Noten

- [1] Bart Zevenhek, Nora Blom (2009): *Een nieuwe wiskundemethode voor het gymnasium?* In: *Euclides* 84-8 (juli 2009); pp. 286-288.
- [2] Zhonghong Jiang (2007): *The Dynamic Geometry Software as an Effective Learning and Teaching Tool.* In: *Electronic Journal of Mathematics & Technology* 1(3).
- [3] Ton Lecluse (2009): *Vanuit de oude doos.* In: *Euclides* 84-4 (februari 2009); pp. 142-143.
- [4] Bruno Buchberger (2001): *Gröbner Bases / A Short Introduction for Systems Theorists.*
Dit artikel is digitaal beschikbaar via: « www.risc.uni-linz.ac.at/people/buchberg/papers/2001-02-19-A.pdf ».

Over de auteur

Christian Bokhove is wiskundeducator en ICT-coördinator op het St. Michaël College in Zaandam. Hij doet sinds 2007 een promotietraject in het Dudoc-programma van het Platform Beta Techniek.
E-mailadres: cbokhove@stmichaelcollege.nl

VERSCHEENEN / REKENEN IS LEUKER DAN/ALS JE DENKT



Auteurs: Marjolien Kool, Ed de Moor
Uitgever: Bert Bakker, Amsterdam (2009)
ISBN: 978 90 351 3433 1
Prijs: € 17,50 (paperback, 296 pagina's)

Van de achterflap – Hoe werkt de staartdeling? Hoe deel je door een breuk? Wat zijn priemgetallen? Hoeveel milliliter gaat er in een kubieke meter? Waarom zijn procenten (niet) moeilijk? Hoe denk en werk je bij hoofdrekenen? Wat leren kinderen eigenlijk in de rekenles? Wordt er wel genoeg geoefend op school? Waarom moeten we nog leren rekenen nu iedereen een rekenmachine heeft? Hoe moeilijk is de Cito-toets?

In dit boek worden vragen van ouders, leraren en studenten behandeld. Voorbeelden uit onderwijs, wereld en wetenschap laten zien hoe mooi ons getalensysteem in elkaar zit. Rekenen is geen verzameling trucjes en saaie regels, maar een dynamisch vak, dat meer betekenis krijgt als je leert nadenken over de achterliggende principes.

TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Een nieuwe visie vanuit meerdere wiskundige invalshoeken

Elke leerling leert op een andere manier.

De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

Als rekenmachine en als software voor de computer beschikbaar.

TI-Nspire™ TECHNOLOGIE
Voor een beter begrip van de wiskunde.

www.education.ti.com/nederland

1 ALGEBRA

2 LIJSTEN/
SPREADSHEETS

3 GRAFIEKEN/
MEETKUNDE

4 TEKSTVERWERKEN

VIERDYNAMISCH
GEKOPPELDE
OMGEVINGEN,
TE BEWAREN IN
ÉÉN DOCUMENT

Nu tijdelijk
TI-Nspire™ bundel
(handheld + software +
TI-84 toetsenbord)
voor slechts **€ 99,- !** *
tel 020 - 58 29 490

* exclusief € 9 verzendkosten

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

Lesgeven op een Europese School

'DIT HAD IK VAN MIJN LEVEN NIET WILLEN MISSEN'

[Rik Weeda]

Werken in een smeltkroes van nationaliteiten en kennismaken met een andere manier van lesgeven. Dit zijn twee voorbeelden van de uitdagende werkomgeving die de Europese School biedt. François Roosegaarde Bisschop en Boris Gasseling geven beide wiskundeles op een Europese School, de een in het Duitse Karlsruhe en de ander in het Belgische Mol.

Uitdagend begin

François Roosegaarde Bisschop had sinds 1978 al ruime ervaring als leerkracht op verschillende Nederlandse scholen voordat hij in oktober 2004 als wiskundeleraar terecht kwam op de Europese School in het Duitse Karlsruhe. 'Ik zag een advertentie bij Stichting NOB en heb gesolliciteerd. Ik wilde wat zien van de wereld. Niet als toerist, maar door deel te nemen aan een vreemde cultuur.'

De Europese School was tevens een kennismaking met een nieuwe manier van lesgeven. 'Je stelt grotendeels je eigen programma samen, en dat is een uitdagend begin. Het vak zelf heeft een andere, minder snelle ontwikkeling doorgemaakt dan in Nederland. Ik werk nu met de versie van *Getal & Ruimte* uit 2003. Daar kom ik goed mee uit de voeten voor wat betreft de onderbouw. In de bovenbouw maak ik veel gebruik van eigen materiaal. Maar dat is juist uitdagend. Je kunt je eigen creativiteit kwijt in het vak en oplossingen bedenken. Steeds met het doel dat je leerlingen die terug gaan een goede aansluiting biedt op het onderwijs in Nederland.'

'Omgaan met niveaoverschillen in de klas is wel lastig maar ook weer interessant. Het vergt veel training, veel samen doen met de leerlingen.'

Intensiever contact

Boris Gasseling is sinds januari 2006 docent op de Europese School in het Belgische Mol, waar hij lesgeeft aan de jaren 4 tot en met 7. 'Een leerzame ervaring', stelt hij. 'Op de Europese School duurt de bovenbouw vier jaar. Het vak zelf is heel anders dan in Nederland. Wij werken bijvoorbeeld nog niet met de grafische rekenmachine, wat volgend jaar wel gaat gebeuren. Ook verschillen de lesprogramma's. We geven les op het niveau van voor de 2e fase, waar ik me overigens uitstekend in kan vinden. De kinderen krijgen twee in plaats van vier soorten wiskunde, terwijl de niveaoverschillen – zoals het Nederlandse

'Werken op een Europese School is uitdagend. Je kunt je eigen creativiteit kwijt in het vak en oplossingen bedenken.'

onderwijssysteem die kent met havo, mavo en vwo – ontbreken.' Deze verschillen ziet Boris alleen maar als een uitdaging. 'Omgaan met niveaoverschillen in de klas is wel lastig maar ook weer interessant. Het vergt veel training, veel samen doen met de leerlingen.' Het feit dat de klassen in de regel kleiner zijn dan in Nederland, helpt. 'Dat maakt het lesgeven makkelijker en leuker. Je hebt veel intensiever contact met de leerling.'

Docent op een Europese school

Op veertien plaatsen in Europa staan Europese Scholen, met in totaal ruim 20.000 leerlingen. Als er voldoende Nederlandse en Vlaams leerlingen zijn, hebben de Europese Scholen ook een Nederlandse taalafdeling, met Nederlandse en Vlaamse docenten. In dat geval worden onder andere de vakken Nederlands, wiskunde en natuurkunde in het Nederlands aangeboden. De andere vakken volgen de leerlingen in hun tweede taal. Is er geen Nederlandse taalafdeling, dan krijgen leerlingen alleen het vak Nederlands in hun moedertaal.

Leerlingen starten, net als in Nederland, op hun vierde in de kleuterklas. Op hun achttiende verlaten ze de school met het Europese Baccalaureaat-diploma. Dit diploma is vergelijkbaar met een vwo-diploma. Hiermee hebben ze toegang tot universiteiten van alle landen van de Europese Unie.

Deelnemende landen en vertegenwoordigers van de Europese Unie vormen het bestuur van de scholen. Als materieel werkgever verzorgt Stichting NOB de personeelszaken, waaronder werving en selectie. Als u les wilt geven op een Europese School, heeft u een eerstegraads bevoegdheid nodig. Leraren worden voor een periode van maximaal negen jaar aangesteld. Vacatures kunt u tussen februari en juni vinden op de website van Stichting NOB (www.stichtingnob.nl/vacatures-es). Hier staat ook uitgebreide informatie over arbeidsvoorwaarden en de opzet van het onderwijs.

Boeiende werplek

Zijn behoefte aan avontuur wordt zeker beantwoord, vindt François. 'Anders dan in Nederland worden de werkweken hier bijvoorbeeld veel minder nauwkeurig gepland. Je moet meer improviseren als je met een Italiaanse, een Poolse en een Engelse collega de verantwoordelijkheid deelt. Ook moet je zelf zorgen voor je contacten en veel netwerken, zowel binnen als buiten de school.'

'Het komt allemaal niet vanzelf', zegt hij. 'Maar dan is het ook fantastisch om mee te maken. Zo kunnen Franse en Italiaanse collega's zich niet voorstellen hoe een normaal mens de middag kan overleven met een paar boterhammen als lunch, terwijl ik zelf 's middags in slaap zou vallen na een warme lunch met wijn. Zulke onderlinge cultuurverschillen maken de Europese School tot een boeiende werplek.'

Smeltkroes

Ook Boris wordt aangetrokken door het internationale karakter van de Europese School. 'Als je ziet hoe kinderen met elkaar omgaan, da's fantastisch. Zo snel als ze op het schoolplein met elkaar praten en van de ene naar de andere taal switchen. Als docent praat je met elkaar ook over andere zaken dan in Nederland, en je leert de dingen te bekijken vanuit andere invalshoeken. Het is een smeltkroes van nationaliteiten. Leuk om met Italianen en Spanjaarden een team te vormen.' En contact met Nederland? 'Geen probleem. Via de vakbladen, de Volkskrant en Stichting NOB.' François: 'Je komt niet in een gespreid bedje. Je moet zelf je weg zien te vinden, zowel sociaal als in je werk. Maar deze ervaring wilde ik van mijn leven niet missen.'

'Als je ziet hoe kinderen met elkaar omgaan, da's fantastisch. Zo snel als ze op het schoolplein met elkaar praten en van de ene naar de andere taal switchen.'

Over de auteur

Rik Weeda is werkzaam bij KEPCOM Creatieve Communicatie in Delft.
E-mailadres: rik@kepc.com.nl
tel.: +31(0)15 2192610

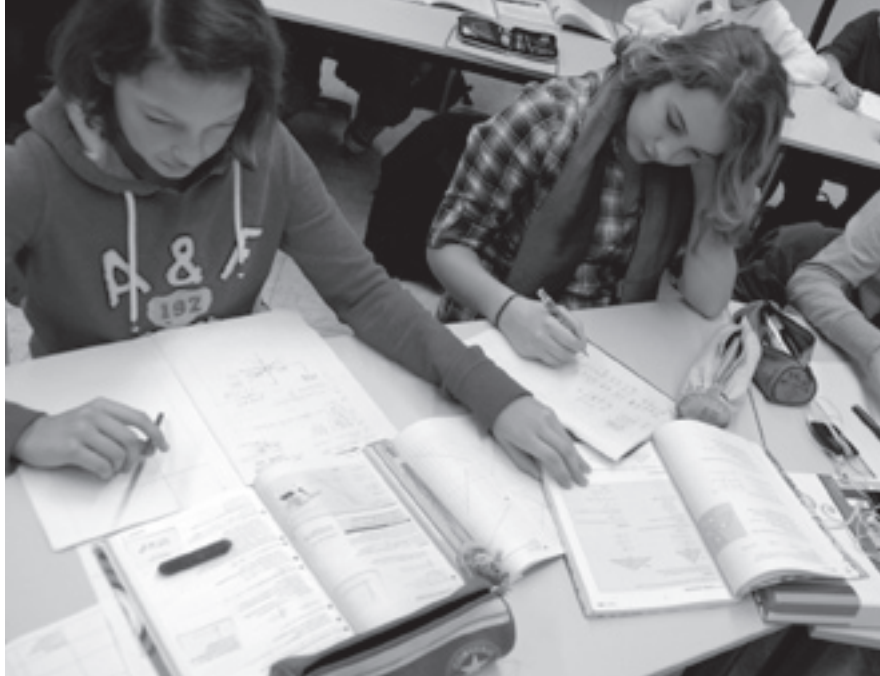


foto 1 ES Karlsruhe: wiskunde in een 3e klas

In welke landen vindt u Europese Scholen?

Nederland: Bergen (NH)
België: Brussel (I, II, III, IV) en Mol
Luxemburg: Luxemburg (I en II)
Duitsland: Frankfurt, Karlsruhe en München
Italië: Varese
Engeland: Culham
Spanje: Alicante
Zie verder: « www.eursc.eu »



VAN 12 TOT 18

BEKROOND VAKBLAD VOOR HET VOORTGEZET ONDERWIJS

Van 12 tot 18 volgt de veranderingen in het voortgezet onderwijs op de voet en besteedt iedere maand aandacht aan de onderwerpen die in het brandpunt van de belangstelling staan. In compacte, vlot geschreven artikelen worden nieuwe beleidsinzichten vertaald naar de praktijk van het klaslokaal. Volgens de Nederlandse Organisatie van Tijdschrift Uitgevers behoort Van Twaalf tot Achttien tot de drie beste Nederlandse vakbladen.

NEEM NU EEN (PROEF)ABONNEMENT

☐ Ik neem een jaarabonnement (10 nrs) en betaal daarvoor het eerste jaar slechts € 29,95

☐ Ik neem een vrijblijvend proefabonnement (2 nrs) voor slechts € 7,50

Naam instelling.....

Besteld door dhr./mw.....

Adres.....

Postcode.....Plaats.....

E-mail.....Telefoonnummer.....

☐ Ja, ik machtig Van 12 tot 18 het bedrag automatisch van mijn bank- of girorekening af te schrijven (geldt alleen voor Nederland)

Bank-/Girorekening.....

Datum.....Handtekening.....

STUUR DEZE BON IN EEN ENVELOP ZONDER POSTZEGEL NAAR
Van 12 tot 18, Antwoordnummer 17, 7940 VB Meppel

Rekenkampioen van Nederland 2009

BIJ HET “BARTJENS” REKENDICTEE

[Ed de Moor]

Op de laatste dag dat iedereen aan de voorronde van het *Bartjens Rekendictée* kon meedoen, las Allard Veldman uit Amsterdam in de ochtendkrant *Metro* een kleine advertentie met een oproep voor deelnemers. Inmiddels hadden al 7000 mensen aan deze voorronde via internet meegedaan. Diezelfde dag nog vulde hij de vragen in, hij kwam in de finale, die op 20 november 2009 in Zwolle werd gehouden en... hij won. In iets meer dan 10 minuten loste hij 14 reken-denkvragen (*zie pag. 161*) op waarvoor de deelnemers aan deze finale 28,5 minuten tijd was gegund. Er waren vijf categorieën: 45 scholieren (derde klas vwo), 14 pabo-studenten, 7 sponsors, 13 prominenten (waaronder vroegere winnaars) en de 71 besten van de internet-voorronde. De scholieren en internetters hadden zich via de voorronde geplaatst, de anderen waren op uitnodiging. In dit stuk beperk ik me hoofdzakelijk tot de internetdeelnemers. Een klein aantal finalisten was niet komen opdagen. Ik mocht deel uitmaken van de jury, waarvan Jan Terlouw voorzitter was. Het was een spetterend festijn onder de bezielende leiding van Marjolein Kool. Tien dagen later zat Allard, de overall-winnaar, bij mij thuis op de bank. Ik had een lange lijst met vragen want ik wilde een echt ‘interview’ afnemen; het werd echter een gezellig en interessant gesprek van meer dan twee uur.

Achtergrond en opleiding

Allard Veldman is een open goedlachse jongeman van 27 jaar. Hij komt uit Velsen, waar hij op de *Basisschool Jan Campert* onder meer rekenles had van Thea Peet. Daarna ging hij naar het *Gymnasium Felisenum*. Daar kreeg hij wiskunde van Jaap de Jonge. Als kleuter loste hij graag *Woordzoekers* op, taalpuzzels die zijn moeder hem toespeelde. Hij kan zich niet precies herinneren hoe zijn interesse voor getallen ontstaan is. Wel heeft hij rekenen altijd een heel plezierig vak gevonden, maar dat gold net zo goed voor taal en voor muziek, die in feite zijn grootste interesse heeft. Op mijn vraag hoe het rekenonderwijs op de basisschool was ingericht, weet hij alleen te vertellen dat er veel werd voorgedaan op

het bord en dat er daarna met zogenaamde ‘cijferkaarten’ werd gewerkt, wat hij heel prettig vond. Soms vroeg hij thuis aan zijn vader, die als planoloog bij Hoogovens werkte, om nog meer sommen. Ook op school zorgden zijn leraren steeds voor extra werk, maar wat voor opdrachten dat waren weet hij niet meer. Ook op het gymnasium ging alles van een leien dakje. Met wiskunde werkte hij vooruit en al in de vierde klas had hij alle stof voor het eindexamen af. Zijn leraar gaf hem daarom allerlei boeken met universitaire stof in handen. Ondertussen won hij in 1999 de Nederlandse Wiskunde Olympiade en nam deel aan de Internationale Olympiades in Roemenië en Zuid-Korea. Het kon bijna niet anders dan dat hij wiskunde ging studeren en wel in Leiden. Ook dat ging hem goed af. Tijdens die studie won hij een keer met grote overmacht een wedstrijd tussen wiskundigen in snel en effectief wiskundig rekenen. Op mijn vraag of die opleiding ook voldeed aan zijn verwachtingen was hij aarzelend. Aanvankelijk zag hij nog wel enige relatie met de vragen die zich over de dagelijkse wiskunde in zijn hoofd genesteld hadden, maar allengs werden de onderwerpen steeds abstracter en vooral van opzet minder intuïtief van karakter. Na zijn studie ging Allard als computerprogrammeur werken. Maar toen bleek dat hij dit werk tamelijk saai vond, besloot hij twee jaar geleden zijn hobby zingen – hij zong al in verschillende koren – als een nieuwe uitdaging op te vatten. Zonder enige vooropleiding deed hij auditie bij het conservatorium in Utrecht en hij werd aangenomen. Nu wil hij het liefst zanger van beroep worden.

Strategie van snelheid

Het was dus op het laatste moment dat Allard zich voor de finale plaatste. Hij had daar geen enkele voorbereiding of extra oefening voor gedaan. En toch verbaasde het hem niet dat hij tot de finale werd toegelaten. Wel ontstond toen de wil om deze wedstrijd te gaan winnen. En hij wist waar zijn sterke punt lag: snel rekenen, immers niet alleen het aantal goede antwoorden telde, maar ook de tijd waarin

je het antwoord op het stemkastje had ingetypt. Bijna iedereen, die ik later deze opgaven heb voorgelegd, vond de sommen van een pittig niveau, maar Allard vond ze eigenlijk allemaal makkelijk. Hij koos voor snelheid daar hij verwachtte dat er nog wel enkele vlugge rekenaars zouden zijn. Van de nummers 1 tot met 5 waren de scores respectievelijk 170, 160, 160, 155 en 155 punten, terwijl hun tijden op hele seconden afgerond 616, 783, 1045, 595 en 967 seconden luidden. Als nummer 4 geen fout gemaakt zou hebben, zou die winnaar geweest zijn. Hoe lastig de opgaven zijn en hoe goed ze discrimineerden, blijkt wel uit de percentages goedscores, die tussen haakjes bij de opgaven staan. Voor de scholieren was de totale goedscore 26%, voor de pabo-studenten 22%, de sponsors behaalden 47%, de prominenten 56% en de internetdeelnemers scoorden met 59% het hoogst. Toen ik Allard vroeg of hij niet nerveus was, bekende hij dat ook bij hem bij het laatste vraagstuk de zenuwen waren toegeslagen. Hier bleek dat hij beter een algebraïsche dan de door hem gebruikte probeer-methode had kunnen kiezen, maar gelukkig voor hem vond hij het juiste antwoord nog binnen de tijd.

Niveau van de opgaven

Zelfs als men alle tijd neemt, dan nog zijn de opgaven behoorlijk moeilijk. Allard vond vraagstuk 3 over de doodskest het gemakkelijkste, omdat hij direct inzag dat 4,16 zes maal in 24,96 past. Hier maakte hij dus gebruik van zijn flexibele en snelle getalinzicht. Maar je bent er dan nog niet, want er volgt nog enig gemanipuleer (uit het hoofd of op papier) met de gevonden tussenresultaten. Ik merkte tijdens ons gesprek dat Allard ook een ijzersterk geheugen heeft. Overigens was de gemiddelde goedscore van alle deelnemers op dit vraagstuk 42%. Makkelijk vond hij ook opgave 12 over de burgemeester met zijn enveloppen, waar het in feite alleen op denken aankomt. Als er precies 7 brieven in de goede envelop terechtkomen, dan moet de achtste ook goed zijn. De gevraagde kans is dus nul, waar nog eens 8 bij opgeteld moet worden (dit gegeven was toegevoegd omdat het

stemkastje het getal nul als antwoord niet kon accepteren). Hier heeft iemand die wel eens iets aan kansrekening heeft gedaan, natuurlijk voordeel. De gemiddelde goedscore was hier 52%, wat ik best goed vind. Het lastigste vraagstuk vond hij opgave 8 over de Amerikaanse vlag, vooral vanwege de zin: 'Het aantal lange rijen is 1 minder dan het aantal sterren in een lange rij.' Aan deze opgave valt als wiskundig probleem nog allerlei moois te ontdekken. Het leverde een algemene goedscore van 36% op, maar was kennelijk toch niet de allermoeilijkste vraagwaar de opgave 14 een goedscore van 33% had.

Flexibel getalinzicht

Toen ik Allard vroeg of hij bij het cijferen vaste algoritmen gebruikt of dat hij naar gelang van de aard van de opgave handelt, was hij met zijn antwoord al bijna klaar voor ik de vraag gesteld had. 'Natuurlijk kijk ik eerst altijd hoe een opgave er uitziet. Als ik bijvoorbeeld een aantal getallen moet optellen, kijk ik eerst even of er een paar handig bij elkaar te nemen zijn.' We waren het er snel over eens dat je 2003 – 1999 niet onder elkaar gaat zetten, maar dat gewoon doortellend uitrekent. Juist daarom vindt Allard het belangrijk dat kinderen een flexibel inzicht in getallen en de bewerkingen krijgen, maar tevens meent hij dat er gedegen geoefend moet worden. Over het gebruik van de rekenmachine op de basisschool heeft hij zijn twijfels, immers je moet juist goed schattend kunnen rekenen en vlot kunnen hoofdrekenen wanneer je een rekenmachine gebruikt. Bovendien worden de kinderen denkluï omdat sommigen elk sommetje, zoals 10×10 , gaan intikken. Ook zijn antwoorden soms benaderingen of afrondingen. Zo geeft een eenvoudige rekenmachine op $1 : 17$ als antwoord 0,058823529 maar hoe vind je de lengte van het repetendum (in casu 16)? Wat betekent het überhaupt dat $1 : 3 = 0,333333...$? Hoe kom je erachter dat $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, wanneer de rekenmachine 0,833333333 uitspuugt? 'De kinderen zouden juist moeten leren een rekenmachine met inzicht te gebruiken', opper ik, waar Allard graag mee instemt. 'Om die denkluïheid en afhankelijkheid van de rekenmachine tegen te gaan moet je regelmatig met getallen en rekenen bezig zijn', vindt Allard. Zo controleert hij altijd even de kassabonnen van de supermarkt: klopt het ongeveer, wordt er handig teruggegeven?

Reflectie

Aan het eind van het gesprek kon ik niet nalaten Allard deelgenoot te maken van mijn zorgen over de huidige situatie in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Ik noemde het KNAW-rapport *Rekenonderwijs op de basisschool*, waarvan de hoofdconclusie is dat de opleiding tot basisschoolleraar verbeterd moet worden. De zwakke positie van de pabo komt ook in deze wedstrijd tot uiting: de pabo-studenten presteerden het slechtst. De winnares van deze categorie had een score van 80. Ik benadrukte dat er van meet af aan een goed fundament voor het leren van wiskunde gelegd moet worden en dat een didactische aanpak die de mogelijkheid biedt om tot een flexibel getalgebruik en rekengedrag te komen gestimuleerd moet worden. Daarbij moet de mogelijkheid tot differentiatie bestaan, zowel voor de zwakkere rekenaars als voor de uitblinkers. Ook noemde ik nog eens het belang hieraan voortdurend aandacht te besteden. Allard lijkt hiermee in te stemmen, waar hij stelt: 'Het is wonderlijk hoeveel mensen *geen* belangstelling hebben voor rekenen, ja er zelfs mee koketteren dat ze niks van getallen weten en beweren geen aanleg voor rekenen te hebben. Voor mij hoeven de mensen niet allemaal een vierkantsvergelijking te kunnen oplossen, maar een beetje gecijferdheid zou toch wel handig zijn. Het moet toch mogelijk zijn dat iedereen na 12 jaar onderwijs iets weet van getallen en wat je er mee kan doen. Dit rekendictee is een geweldige stimulans voor het rekenonderwijs!' Mooi gesproken door de Rekenkampioen van 2009.



foto 1 Uitreiking van de prijzen door Jan Terlouw; de winnaars v.o.n.b. en v.l.n.r. (foto: Pedro Sluiter)



foto 2 Allard Veldman, winnaar Bartjens Rekendictee 2009 (foto Ed de Moor)

Over de auteur

Ed de Moor is reken-wiskundendidacticus in (on)ruste.
E-mailadres: e.w.a.demoor@planet.nl

Opgaven Finale Bartjens Rekendictee 2009

Na de opgave staat tussen haakjes de maximale tijd in minuten, het aantal punten en de goedscore in procenten.

1. Mexicaanse griep

Als 24 artsen in 20 uur 5000 mensen kunnen inenten tegen de Mexicaanse griep, hoeveel tijd hebben dan 30 artsen nodig om 12.500 mensen in te enten?
(1,5 / 10 / 40)

2. Alcohol en politiek

Hero Brinkman vult een vat met 100 liter wijn, gedeeltelijk met wijn van 2 euro per liter en gedeeltelijk met wijn van 3 euro per liter. De wijn heeft een totale waarde van 230 euro. Hoeveel liter wijn van 3 euro per liter zit er in het vat?
(2 / 10 / 63)

3. Doodskist

Een kartonnen doodskist met een oppervlakte van 9 m² kost € 24,96 aan karton. Goochelaar Hans Klok wil later begraven worden in een kartonnen kubus en slechts € 4,16 aan karton uitgeven. Hoe lang zijn de ribben van deze kubus in centimeters? (Laat plakranden buiten beschouwing)
(2 / 10 / 42)

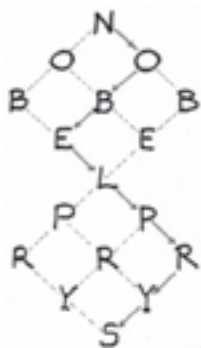
4. Vrijdag de dertiende

Vorige week – 13 november 2009 – was het vrijdag de dertiende. Wanneer was het de voorlaatste keer dat het vrijdag de dertiende was? Noteer het nummer van de maand.
(3 / 15 / 35)

5. Minister Donner

Minister Donner fietst om 8 uur naar zijn werk. Hij rijdt gemiddeld 12 km/uur. Zijn vrouw ziet dat hij zijn broodtrommel vergeten is en brengt hem in de auto de trommel na. Ze vertrekt om 8.20 uur. Als ze hem heeft ingehaald, geeft ze de trommel en keert zonder tijdverlies weer om. Om 8.30 uur is ze weer thuis. Hoe hard reed ze gemiddeld?
(2 / 15 / 56)

6. Nobelprijs voor



figuur 1

Obama belt zijn Michelle dat hij de Nobel-prijs heeft gewonnen. Ondertussen schrijft hij het letterschema *van figuur 1* op zijn kladblok. Op hoeveel verschillende manieren kan hij het woord NOBELPRYS hierin lezen?
(2 / 10 / 38)

7. Kaal

Hoeveel is 256×257 groter dan 255×258 ?
(1,5 / 15 / 65)

8. Sterren

In de Amerikaanse vlag staan 50 sterren. Die zijn geordend in horizontale rijen van twee lengtes: afwisselend een lange en een korte rij. De twee lengtes verschillen slechts 1 ster. De bovenste en de onderste rij zijn beide 'lang'. Het aantal lange rijen is 1 minder dan het aantal sterren in een lange rij. Hoeveel rijen zijn er?
(2,5 / 20 / 36)

9. Olympische winterspelen

Mark Tuitert rijdt de 500 meter in pakweg 35 sec., Marianne Timmer doet er afgerond 40 sec. over. Hoeveel meter voorsprong moet Mark aan Marianne geven zodat ze gelijk kunnen starten en ook gelijk kunnen finishen? Rond je antwoord af in hele meters.
(2 / 10 / 35)

10. Het klimaat

Beau van Erven Dorens en Winston Gerschtanowitz delen 323 led-lampen uit in een supermarkt. Ze moeten ze eerlijk verdelen onder de aanwezigen. Iedereen krijgt meer dan 1 lamp. Ze houden 18 lampen over. Hoeveel mensen waren er?
(1,5 / 10 / 79)

11. Mozambique

Maurice de Hondt heeft 104 mensen naar hun mening gevraagd over het vakantie-ressort van Prins Willem-Alexander in Mozambique. Eén-zevende deel van de mannen en één-achtste deel van de vrouwen was voor de bouw van de villa. Hoeveel mannen zijn er ondervraagd?
(2 / 10 / 46)

12. Burgemeester

Ex-burgemeester Vreeman van Tilburg schrijft 8 sollicitatiebrieven en adresseert de enveloppen. Helaas stopt zijn secretaresse de brieven lukraak in de enveloppen. Hoe groot is de kans (uitgedrukt in procenten) dat er precies 7 brieven in de juiste envelop komen? Tel hier het aantal enveloppen bij op.
(2 / 5 / 52)

13. Verliefd

Wesley is stapel op Yolante. Bij de juwelier liggen zes sieraden die respectievelijk €21, €23, €25, €27, €31 en €34 kosten. De 1e week koopt Wesley hiervan voor een 2x zo groot bedrag als de 2e week. Na 2 weken heeft hij één sieraad nog niet gekocht. Hoe duur is dat sieraad?
(2 / 15 / 41)

14. K3

De leeftijd van K3:

- Josje Huisman is 23 jaar;
- Karen Damen is 35 jaar;
- Kristel Verbeke is 33 jaar.

Hoeveel jaar geleden waren de leeftijden van Josje en Karen samen anderhalf keer de leeftijd van Kristel?
(2,5 / 15 / 33)

De antwoorden vindt u hieronder.

Antwoorden Finale "Bartjens" Rekendictee 2009

- | | |
|--------------------|---------------|
| 1: 40 uur | 8: 9 rijen |
| 2: 30 liter | 9: 63 meter |
| 3: 50 cm | 10: 61 |
| 4: 3 (maand maart) | 11: 56 mannen |
| 5: 60 km/uur | 12: 8 |
| 6: 36 | 13: 23 euro |
| 7: 2 | 14: 17 jaar |

162



SE

—

LC

EJ

Het doel en de middelen

Naast me ligt de eerste *Euclides* van deze jaargang. Maar liefst 6 pagina's zijn gewijd aan de jaarvergadering/studiedag van 7 november. Misschien bent u er geweest, maar erg groot is de kans daarop niet. Zo'n kleine driehonderd deelnemers is niet niks, maar het is toch minder dan 10 procent van de leden. Dat kun je betreuren, maar aan de andere kant: wat zou je met meer dan 3000 wiskundeleraars tegelijk moeten beginnen? Zowel dat percentage als de aandacht in *Euclides* voor deze dag zeggen iets over het karakter van de NVvW. Leden van een sport- of muziekvereniging ontmoeten elkaar geregeld om samen aan hun liefhebberij te doen. De eigen activiteit van de leden staat centraal. Je hebt ook heel andere verenigingen, zoals vakbonden. Die zijn opgericht om de belangen van de leden te behartigen. Leden zijn daarin meestal niet zo actief, dat hebben ze uitbesteed aan de leiding. Behoort de NVvW tot geen van deze soorten, of is ze van allebei een beetje? En hoe was ze eigenlijk ooit bedoeld?

Een Amsterdams initiatief

De voorganger van de NVvW, de vereniging van HBS-leraren in de Wiskunde, MEchanica en COSmografie, in de wandeling afgekort tot *Wimecos*, werd opgericht in 1925, op initiatief van een groepje Amsterdamse wiskundeleraars. De bedoeling was dat 'leraren in de wiskunde bijeenkomsten zouden houden ter bespreking van mogelijke en wenselijke wijzigingen in het wiskundeonderwijs', schrijft Jan Maassen in *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*. Het Amsterdamse initiatief resulteerde al heel snel in een landelijke vereniging; en dat maakte, zeker in die tijd, het organiseren van bijeenkomsten lastig. Daar kwam, behalve een matig bezochte jaarvergadering, niet veel van terecht. En welke 'mogelijke en wenselijke wijzigingen' zouden de initiatiefnemers in gedachten hebben gehad? Een paar jaar eerder was het wiskundeprogramma op het gymnasium gemoderniseerd, onder andere door de invoering van de analytische meetkunde. Maar op de HBS zou dat het einde van de beschrijvende meetkunde hebben betekend; toen ondenkbaar. Een andere vernieuwing van het gymnasiumprogramma in 1919 was het opnemen van onderdelen van de infinitesimaalrekening

– wat overigens weinig praktische betekenis zou krijgen. In het begin van de eeuw was dat ook voor de HBS voorgesteld, maar zonder resultaat. Die mislukking werd toen wel toegeschreven aan de omstandigheid dat de wiskundeleraars geen eigen vereniging hadden, en dat ze de algemene lerarenvereniging, waarin bijvoorbeeld ook de talenleraren zaten, niet mee hadden kunnen krijgen voor deze vernieuwing. Je zou kunnen veronderstellen dat de wiskundeleraars zich in 1925 verenigden om door middel van een soort actiegroep het al vele jaren stilstaande HBS-programma te moderniseren.

Geen daden, maar (weinig) woorden

Ik weet niet of zo'n actiegroep echt de bedoeling is geweest, in ieder geval kwam dat er niet van. De statuten van de nieuwe vereniging wezen al in een andere richting. (*zie figuur 1*) Als doel werd geformuleerd: 'aan de leden gelegenheid te geven van gedachten te wisselen...', uiteraard over het onderwijs in de vakken wiskunde, mechanica en cosmografie. Als tweede doel werd aangegeven het 'eventueel (doen van) stappen om tot verwezenlijking van de door de leden geuite wenschen' te komen. 'Wenschen' dus, en dat konden net zo goed wensen tot het behoud van het aantal lesuren of het bestaande programma zijn. Hoe moest die gedachtewisseling nu plaats vinden? Dat moest door 'vergaderingen van leden', en 'het verspreiden van meeningen door middel van de pers'. Makkelijker gezegd dan gedaan! Op de jaarvergadering, waar maar een handvol leden kwam, was natuurlijk wel gelegenheid om met elkaar van gedachten te wisselen, maar naast het huishoudelijk gedeelte bestond de hoofdmoot meestal uit lezingen van wiskundige aard. Andere bijeenkomsten waren er eigenlijk niet en over een eigen tijdschrift beschikte men niet. Met het zojuist opgerichte *Euclides* had de nieuwe vereniging niets te maken; dat blad was het geestelijk eigendom van Piet Wijdenes, een man die geen behoefte had aan bemoeienis van een vereniging waarvan hij nota bene niet eens lid mocht zijn. Zelfs van het plaatsen van mededelingen namens *Wimecos* in *Euclides* kwam het tot 1940 niet. Het 'doen van stappen' bestond in de praktijk uit het schrijven van brieven.

Daarmee kon men overigens wel enige invloed uitoefenen. De jaarvergaderingen werden al spoedig door de vakinspecteurs bijgewoond, en als die zich achter de wens van de vereniging konden stellen, was er een goede kans dat de minister akkoord ging. Maar om echt belangrijke dingen, laat staan vernieuwingen, ging het daarbij niet. Eerlijk gezegd: voor de oorlog had *Wimecos* niet zoveel te betekenen. 'Bespreking van mogelijke en wenselijke wijzigingen in het wiskundeonderwijs' vond in een ander kader plaats: meer behoudend in de kring van Wijdenes en Dijksterhuis rond *Euclides*, meer vernieuwend in de discussiegroepen van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa.

Naar een ander karakter

Na de oorlog werd *Wimecos* een meer actieve club. In de jaren vijftig ontwikkelde *Wimecos* zelf een voorstel voor een nieuw leerplan; dat zou overigens jammer genoeg ook voor het laatst zijn dat zoiets door leraren zelf gedaan werd. Grote veranderingen kwamen rond de jaren zeventig tot stand, toen het Nederlandse onderwijsbestel radicaal werd vernieuwd. *Wimecos* wordt de NVvW, al spoedig ook open voor leraren op de mavo en het lbo. Maar hoezeer het bestuur uit die tijd toch nog aan het verleden hing als een club van vooral academisch georiënteerde wiskundigen, blijkt wel uit hun voorstel de nieuwe vereniging naar L.E.J. Brouwer te noemen. Brouwer, een paar jaar daarvoor overleden, was met Huygens ongetwijfeld Nederlands belangrijkste wiskundige, maar ook een man die niets met onderwijs had. Gelukkig waren de aanwezige leden verstandiger en verwierpen het voorstel met 22 tegen 18 stemmen. In de statuten van 1969 bleef de gelegenheid tot gedachtewisseling als eerste doel geformuleerd. Een jaarvergadering die werd bezocht door enkele tientallen leden, en die voornamelijk bestond uit het aanhoren van lezingen, kon natuurlijk moeilijk als zo'n gelegenheid getypeerd worden. Op de agenda van de jaarvergadering van 1973, zelf nog traditioneel van opzet, stond daarom een punt 'Activiteiten van de vereniging'. Uit de toelichting blijkt dat het bestuur een discussie op gang wilde brengen over het organiseren van meer regionale activiteiten en het anders vormgeven van de jaarvergadering (*zie figuur 2*). Die discussie had resultaat. De jaarvergadering van 1975

figur 4

Vanuit de oude doos

[Ton Lecluse]

Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Gelijke oppervlakte

Naar aanleiding van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1927; de letterlijke opgave:

Van een vierhoek $ABCD$ is E het snijpunt der diagonalen AC en BD . Men verlengt EB met $BF = DE$ en EC met $CG = AE$ en verbindt F met G .

Bewijs, dat het oppervlak van $\triangle EFG =$ oppervlak vierhoek $ABCD$ is

U wordt eerst uitgedaagd een tekening te construeren die aan de gegevens voldoet, en het bewijs te leveren.

Dan pas onder de streep spieken! Wellicht helpt het dit model te tekenen met een dynamisch computerprogramma.



figuur 1

Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Deze opgave verspreidde ik op de jaarvergadering van de NVvW in november 2008. Dit leidde uiteindelijk tot een aantal heel aardige, verschillende bewijzen, die ik hier wil laten zien.

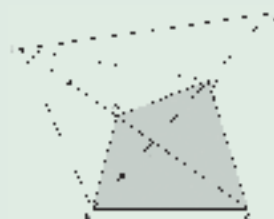
1. De aanpak van Agnes Verweij en Jeroen Spandaw: driehoeken met gelijke hoogte, waarvan ook de lengtes van de basis gelijk zijn, hebben gelijke oppervlakte.
2. De aanpak van Peter Kop en Leon van den Broek: de oppervlakte van een

driehoek ABC is gelijk aan $\frac{1}{2}bc \sin \alpha$.

3. De aanpak van Martin Kindt: gebruik van omgeschreven parallelogrammen.
4. De aanpak van Michel Roelens en mijzelf: de oppervlakte van een driehoek ABC is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte}$.

Wellicht wilt u één van deze aanpakken eerst zelf even uitproberen. Onder de streep staan ze alle vier afzonderlijk uitgewerkt.

1. Agnes en Jeroen



figuur 2

- $\text{opp}(\triangle CAB) = \text{opp}(\triangle EFB)$; basis $CA =$ basis EF , top B geeft dezelfde hoogte;
- $\text{opp}(\triangle ACD) = \text{opp}(\triangle FED)$; basis $AC =$ basis FE , top D geeft dezelfde hoogte.

Hieruit volgt:

$$\text{opp}(ABCD) = \text{opp}(\triangle CAB) + \text{opp}(\triangle ACD) = \text{opp}(\triangle EFB) + \text{opp}(\triangle FED) = \text{opp}(\triangle BDF)$$

Tot slot:

$$\text{opp}(\triangle BDF) = \text{opp}(\triangle EGF); \text{basis } BD = \text{basis } EG, \text{ top } F \text{ geeft dezelfde hoogte.}$$

2. Peter en Leon



figuur 3

$$\begin{aligned} \text{opp}(\triangle AED) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin x \\ \text{opp}(\triangle AEB) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(180^\circ - x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin x \\ \text{opp}(\triangle CED) &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(180^\circ - x) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin x \\ \text{opp}(\triangle CEB) &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin x \end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned} \text{opp}(ABCD) &= \frac{1}{2}(ad + ab + cd + cb) \cdot \sin x \\ &= \frac{1}{2}(a + c)(b + d) \cdot \sin x \\ &= \text{opp}(\triangle FEG) \end{aligned}$$

3. Martin (in: *Nieuwe Wiskrant*, april 2009)



figuur 4

Uitgaande van bovenstaand plaatje beschrijven we een parallelogram om de vierhoek:



figuur 5

Het parallelogram $EFHG$ is congruent met het parallelogram dat beschreven is om de gegeven vierhoek.

Zowel de driehoek EFG als die gegeven vierhoek zijn in oppervlakte juist de helft van dit parallelogram. Klaar!

4. Michel en Ton

Allereerst: trek CF .



figuur 6

Er geldt: $DE = BF$, dus $DB = FE$.

De driehoeken DBC en ECF hebben dan gelijke oppervlakte. Dus hebben de driehoeken DEC en BFC gelijke oppervlakte.

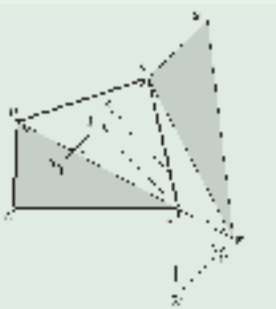
We zijn klaar indien we kunnen bewijzen dat de driehoeken ABD en CFG gelijke oppervlakte hebben.

We moeten natuurlijk gebruik maken van het gegeven dat $AE = CG$.

Hierbij is CG juist een zijde van driehoek CGF , en AE een zijde van de twee driehoeken AED en AEB , die samen driehoek ABD vormen.

Het ligt nu voor de hand van de driehoeken CGF , AED en AEB de zijde AE respectievelijk CG als basis te gebruiken en de hoogtelijn hierop te tekenen.

Verschuif nu driehoek DEA zó dat DE op BF valt. Het beeld is driehoek BFA' .



figuur 7

Door deze verschuiving is: $DI \parallel BF$.

Bovendien geldt: $DI \perp AG$ en $BF \perp AG$.

BF en BF' liggen dan in elkaars verlengde.

Dus is $FI'JK$ een rechthoek en geldt:

$$BF' + BF = FK$$

Stel (voor de leesbaarheid) $AE = CG = x$, dan is:

$$\begin{aligned} opp(\triangle AED) + opp(\triangle AEB) &= \frac{1}{2}x \cdot DI + \frac{1}{2}x \cdot BF = \frac{1}{2}x(DI + BF) \\ &= \frac{1}{2}x(BF' + BF) = \frac{1}{2}x \cdot FK \\ &= opp(\triangle CFG) \end{aligned}$$

Waarmee het karwei geklaard is.

Vervolg op 85-3

In 'Vanuit de oude doos' in *Euclides* 85-3 schreef ik aan het eind:

Je kunt het overdrijven. Maar laten we toch nog één stapje verder gaan.

Hoe groot is de straal van de kleinste (aan de andere cirkels rakende) cirkel *in figuur 8* als de straal van de grootste cirkel gelijk is aan R ?

Hier is het antwoord.



figuur 8

Stel de lengte van de straal van de kleinste cirkel is gelijk aan x . Dan is:

$$\begin{aligned} MJ &= R - x \\ MC &= R - \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}R \\ CJ &= \frac{1}{3}R + x \end{aligned}$$

De stelling van Pythagoras

geeft dan in driehoek MCJ :

$$\left(\frac{2}{3}R\right)^2 + \left(\frac{1}{3}R + x\right)^2 = (R - x)^2$$

$$\text{Dus } x = \frac{1}{6}R.$$

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: alecluse@casema.nl

Ekādhikena Pūrveṇa

[Henk Hooijschuur]

[Red.] Staartdelingen blijven boeiend, vooral als er mooie algoritmen mee gemoeid zijn! Opnieuw een reactie op een eerder geplaatst artikel.

Correctie

In *Euclides* 85-2 (oktober 2009) staat op bladzijde 79 een reactie van Joost Hulshof op het artikel ‘Staartdelen’ van Lonneke Boels. In de laatste alinea van deze reactie staat dat de decimale ontwikkeling van $\frac{1}{83}$ bestaat uit 82 cijfers. Dat is niet juist. De afgedrukte 82 decimalen herhalen zich al na 41 decimalen.

Hoofdrekenen

Overigens is er een charmante manier om deze 41 decimalen vlot (uit het hoofd) te berekenen. Deze methode staat in het boek *Vedic Mathematics* van Śrī Bhāratī Kṛṣṇa Tīrtha (zie [1]). In dit boek worden 16 *sūtra*’s en 13 *subsūtra*’s gegeven met behulp waarvan vele wiskundige berekeningen op relatief eenvoudige wijze kunnen worden uitgevoerd.

Onderstaand algoritme berust op de *sūtra* ‘Ekādhikena Pūrveṇa’, dat vertaald zou kunnen worden als ‘Door/met één meer dan de voorgaande’. De *sūtra* wordt hier toegepast op delingen waarbij de deler eindigt op een 9. Allereerst wordt daarbij dan volgens de *sūtra* één opgeteld. Daarna kunnen deeltal en deler door 10 worden gedeeld. Tenslotte worden met deze kleinere deler herhaalde delingen met rest uitgevoerd. Als volgt:

- $\frac{1}{83} = \frac{3}{249}$ (de deler eindigt nu op 9);
- $249 + 1 = 250$ (de *sūtra* toepassen);
- $\frac{1}{83} = \frac{3}{249} = \left\langle \frac{3}{250} \right\rangle = \left\langle \frac{0,3}{25} \right\rangle$

De ‘gebroken’ haken om een breuk geven hier aan dat herhaald delen (door 25) met rest moet worden toegepast. De rest bij de deling wordt steeds in subscript vóór de uitkomst van de deling geplaatst. De rest wordt mét de uitkomst als één getal gelezen dat vervolgens weer door 25 gedeeld wordt. $\left\langle \frac{0,3}{25} \right\rangle$ betekent dus: deel 0,3 herhaald door 25. Het antwoord begint met 0,...

25 op de 3 (van 0,3) gaat 0 keer rest 3 $\rightarrow$ ${}_30$ (lees 30) $\rightarrow$ uitkomst tot zover: $0,{}_30$ ofwel: 0,0...

25 op de 30 gaat 1 keer rest 5 $\rightarrow$ ${}_51$ (lees 51) $\rightarrow$ uitkomst tot zover: $0,{}_51$ ofwel: 0,01...

25 op de 51 gaat 2 keer rest 1 $\rightarrow$ ${}_212$ (lees 12) $\rightarrow$ uitkomst tot zover: $0,{}_512$ ofwel: 0,012...

25 op de 12 gaat 0 keer rest 12 $\rightarrow$ ${}_0120$ (lees 120) $\rightarrow$ uitkomst tot zover: $0,{}_512,{}_0120$ ofwel: 0,0120...

25 op de 120 gaat 4 keer rest 20 $\rightarrow$ ${}_4204$ (lees 204) $\rightarrow$ uitkomst tot zover: $0,{}_512,{}_0120,{}_4204$ ofwel: 0,01204...

25 op de 204 gaat 8 keer rest 4 $\rightarrow$ ${}_848$ (lees 48) $\rightarrow$ uitkomst tot zover: $0,{}_512,{}_0120,{}_4204,{}_848$ ofwel: 0,012048...

Enzovoorts.

De 42e decimaal ontstaat als ${}_30$ en is daarmee gelijk aan de 1e decimaal. De repetent [het repeterende deel; red.] is dus 41 cijfers lang; zodat:

$$\frac{1}{83} = 0,{}_30{}_51{}_21{}_20{}_42{}_31{}_6{}_9{}_2{}_7{}_2{}_7{}_2{}_1{}_2{}_1{}_0{}_8{}_4{}_9{}_3{}_1{}_8{}_3{}_7{}_1{}_2{}_3{}_4{}_9{}_3{}_9{}_7{}_2{}_5{}_9{}_0{}_1{}_5{}_3{}_6{}_1{}_1{}_4{}_4{}_1{}_9{}_5{}_2{}_0{}_7{}_8{}_3{}_8{}_1{}_6{}_3{}_1{}_3{}_2{}_7{}_5{}_0{}_3 \text{ (41 decimalen)} {}_30{}_51{}_21{}_20{}_42{}_31{}_6{}_9{}_2{}_7{}_2{}_7{}_2{}_1{}_2{}_1{}_0{}_8{}_4{}_9{}_3{}_1{}_8{}_3{}_7{}_1{}_2{}_3{}_4{}_9{}_3{}_9{}_7{}_2{}_5{}_9{}_0{}_1{}_5{}_3{}_6{}_1{}_1{}_4{}_4{}_1{}_9{}_5{}_2{}_0{}_7{}_8{}_3{}_8{}_1{}_6{}_3{}_1{}_3{}_2{}_7{}_5{}_0{}_3$$

De laatste decimaal van de repetent (${}_30$) is natuurlijk tevens het deeltal (de 3 van $\frac{3}{249}$). Daaruit volgt dat, als de decimalen (inclusief de rest) die in deze decimalenrij voorkomen optreden als deler, het antwoord direct kan worden afgelezen. Bijvoorbeeld:

$$\frac{111}{249} = 0,{}_114{}_14{}_4{}_19{}_5{}_20{}_7{}_8\ldots {}_{15}3{}_6{}_1{}_1{}_4\ldots$$

In de decimale ontwikkeling zoek je naar 111 in de vorm ${}_111$. Het getal erachter (${}_4$) is dan de eerste decimaal van je antwoord. De overige 40 decimalen komen dan in dezelfde volgorde achter ${}_114$.

Zo kunnen alle delingen van $\frac{1}{249}$ tot en met $\frac{248}{249}$ vlot worden berekend. Bijzondere gevallen daarbij zijn natuurlijk:

$$-\frac{83}{249} = \left\langle \frac{83}{250} \right\rangle = \left\langle \frac{8,3}{25} \right\rangle = 0,{}_83{}_83{}_83\ldots = 0,333\ldots$$

$$-\frac{166}{249} = \left\langle \frac{166}{250} \right\rangle = \left\langle \frac{16,6}{25} \right\rangle = 0,{}_16{}_6{}_16{}_6{}_16\ldots = 0,666\ldots$$

Van de 248 mogelijke decimalen (inclusief rest) komen er dus 2 (${}_83$ en ${}_166$) voor in bovenstaande delingen. De overige 246 decimalen (met rest) komen in groepen van 41 voor in de overgebleven 246 delingen. Aangezien $\frac{246}{41} = 6$ is, betekent dat dat er (waarschijnlijk – ga zelf na) 6 series van 41 decimalen zijn die optreden bij de decimale

ontwikkeling van $\frac{1}{249}$ tot en met $\frac{248}{249}$ (uitgezonderd $\frac{83}{249}$ en $\frac{166}{249}$).

Fantastisch algoritme

Als ik voor mijn leerlingen uit het hoofd $\frac{1}{19}$ (18 decimalen) uitreken, word ik er steevast van beschuldigd dat uit het hoofd te hebben geleerd. Maar als ik ook $\frac{1}{29}$ (28 decimalen) vlot op het bord schrijf (overigens zonder de resten te noteren), gaan ze toch twifelen. De rekenmachine blijkt dan toch weer beperkt. Die geeft slechts 11 (en met een beetje geknutsel 14) decimalen.

De door Lonneke Boels gepromote staartdeling is een fantastisch algemeen algoritme.

Bovenstaand algoritme, verbijsterend simpel maar slechts beperkt toepasbaar, benadrukt dat eens temeer.

Noot

[1] Śrī Bhāratī Kṛṣṇa Tīrtha: *Vedic Mathematics*. ISBN 0-89684-036-4.

Over de auteur

Henk Hooijschuur is docent wiskunde aan het Atlascollege, locatie Copernicus, te Hoorn.
E-mailadres: H.Hooijschuur@atlascollege.nl

Oppervlakteformules

[Yvonne Killian]

Zes formules of twee?

In de gangbare wiskundeboeken staan zes formules voor het berekenen van de oppervlakte van vlakke figuren. De cirkel heeft een eigen formule, maar de driehoek, het vierkant, de rechthoek, het parallellogram en het trapezium hebben er óók allemaal één.

Dit zijn zes formules die je uit je hoofd moet leren, die je tot en met de toets moet onthouden, die je tijdens de toets verhaspelt en na de toets weer vergeet. Misschien ben je als leerling beter af met slechts twee oppervlakteformules: één voor de cirkel en één voor de rest.

Oppervlakteformule voor de cirkel

Je ontkomt niet aan een aparte formule voor de oppervlakte van de cirkel. Maar deze hoeft je niet uit je hoofd te leren, want je kunt hem tijdens een toets zelf bedenken als je, in gedachten of op een kladje, om een cirkel heen een precies passend vierkant schetst, opgedeeld in vier kleine vierkantjes (zie figuur 1). Elk vierkantje heeft dan een zijde die even groot is als r , zodat de oppervlakte van het grote vierkant $4 \text{ keer } r^2$ is. De cirkel heeft een iets kleinere oppervlakte

dan het vierkant. En wat is iets kleiner dan $4 \text{ keer } r^2$? Inderdaad, *ongeveer* $3,14 \text{ keer } r^2$, ofwel $\pi \text{ keer } r^2$. De oppervlakte van een cirkel is dan ook $\pi \cdot r^2$ (zie ook mijn artikelje in *Euclides* 84-8).

Oppervlakteformule voor de rest

Elke leerling kan berekenen wat zijn of haar rapportcijfer wordt op basis van twee proefwerkcijfers, dus elke leerling kan het gemiddelde van twee getallen berekenen. Je kunt een leerling dan ook rustig de algemene oppervlakteformule *hoogte keer gemiddelde breedte* geven.

Deze formule geldt niet alleen voor alle hierboven genoemde vierhoeken (je hoeft ze alleen maar, zonodig, zó te draaien dat de onder- en bovenzijde evenwijdig zijn), maar ook voor de driehoek, als je die bekijkt als een vierhoek waarvan de lengte van de bovenste zijde gelijk aan nul is. Teken om een en ander te visualiseren (zie figuur 2) in een driehoek op het bord niet alleen een hoogtelijn maar ook een lijn door de top en een lijn halverwege de hoogte, beide evenwijdig aan de basis, en teken in het trapezium, waarvan parallellogram, rechthoek en vierkant immers een



figuur 1



figuur 2

speciaal geval zijn, op een willekeurige plek een verticaal stippellijntje voor de hoogte en halverwege de hoogte een horizontaal stippellijntje voor de gemiddelde breedte. De formule – *hoogte keer gemiddelde breedte* – ziet er dan logisch uit en is dus makkelijk te onthouden.

Over de auteur

Yvonne Killian is wiskundeleraar, schrijver en bedenker van (onder andere) onderwijsveranderingen en methoden. E-mailadres: yvonne.killian@planet.nl

MEDEDELING



/ WISKUNDE SCHOLEN PRIJS 2010

Ook uw school kan de Wiskunde Scholen Prijs winnen – u hoeft alleen maar het project dat u toch al doet, in te zenden! Veel docenten denken dat het wiskundeonderwijs dat zij ‘buiten het boek’ doen, niet bijzonder genoeg is om de Wiskunde Scholen Prijs mee te winnen. Daarin zouden ze zich wel eens kunnen vergissen...

Leest u hier voor het eerst over de Wiskunde Scholen Prijs? Kijk dan vervolgens op www.wiskundescholenprijs.nl en lees dan ook de (downloadbare) folder!

U kunt zich vrijblijvend aanmelden voor de Wiskunde Scholen Prijs 2010. U krijgt dan een inschrijfformulier toegestuurd.

De uiterste inzenddatum van uw project is 31 maart 2010.

Contactpersoon: Dédé de Haan (e-mailadres: scholenprijs@fi.uu.nl)

Verhouding staat tot Breuk is als 4 staat tot 1

[Hessel Pot]

[Red.] Zolang verhoudingen niet tot breuken leiden, vervolgen we in Euclides nog even de weg waarop we enige tijd geleden door Hessel Pot uitgenodigd zijn met de vraag 'Is een verhouding wel of niet hetzelfde als een breuk?'. Op de oproep in Euclides 84-8 volgde een reactie van Ronald Meester in Euclides 85-2. Uit zijn afsluitende alinea roep ik nog even de volgende zinnen in herinnering: 'Een bepaalde mate van vaagheid van begrippen blijft onontbeerlijk, hoe vreemd dat ook moge klinken voor de meest exacte van alle wetenschappen. Het is mede die 'vaagheid' die de wiskunde haar kracht geeft, en dat feit kan maar beter ook in het onderwijs erkend worden.' In 85-3 kon u de dupliek van Hessel Pot hierop lezen. We kregen nog een reactie binnen op de bijdrage van Ronald Meester. Mijns inziens zouden we te ver van het breuken- en verhoudingenspoor raken met een publicatie van de gehele reactie, maar een kort gedeelte uit de brief van Thomas Colignatus wil ik u niet onthouden: 'Hessel Pot stelt vragen die relevant zijn voor de werkvloer. Meester antwoordt dat er ambiguïteit bestaat. Dit is een theoretisch antwoord op dringende problemen uit de praktijk. Dit is het antwoord van Plato op een probleem van Aristoteles. Nu niet meer het antieke antwoord van absolute wiskundige zekerheid maar het moderne inzicht van relatieve wiskundige ambiguïteit. Theorie kan natuurlijk bevrijdend werken voor wie zich blindstaart. Maar, wie naar de problemen uit de praktijk kijkt kan constateren dat dit theoretisch antwoord nu niet relevant is.'

Hieronder volgt een artikel waarin Hessel Pot antwoorden geeft op de opgeroepen vragen.^[1] Daarmee beëindigen we voorlopig de publicaties over dit onderwerp, in de hoop dat u meer duidelijkheid hebt verkregen over de betekenis die uzelf en anderen op het oog hebben bij het gebruik van de woorden verhouding en breuk.

Open vragen

Mijn reactie op het stuk van Ronald Meester eindigde met een drietal open blijvende vragen, onder verwijzing naar een tekst waarin geprobeerd wordt op die vragen een bevredigend antwoord te geven. Hieronder volgt van die tekst een ingekorte versie.

Wat wordt bedoeld met het woord 'verhouding'?

Een inventarisatie van een groot aantal schoolboek-teksten laat zien dat de kern-betekenis van 'verhouding' te omschrijven is als: *een eigenschap van geordende groothedenparen* (ofwel: van groothedenkoppels). Iets concreter geformuleerd: *onder de verhouding van een groothedenkoppel wordt verstaan: de eigenschap die dat koppel gemeen heeft met de ermee **evenredige** koppels*.

Over dat 'evenredig zijn' van groothedenkoppels valt het een en ander te zeggen.

Gewoon-evenredig en dwars-evenredig

Een groothedenkoppel A_1-A_2 (onderling gelijksoortig) heeft dezelfde verhouding

als het koppel B_1-B_2 (ook onderling gelijksoortig) als die koppels *evenredig* zijn. Wat dat betekent staat al in de *Elementen* van Euclides: voor *elke* veelvoudindex n past A_1 even vaak in nA_2 , als B_1 in nB_2 . Door dit *gewoon-evenredig* zijn van geordende paren, is de *gewone* verhoudingseigenschap van groothedenkoppels beschreven.

Maar hoe zit het nu met een *lengte-tijd*-paar? Kun je bij zo'n tweesoortig paar ook over z'n verhouding praten (en wat bedoel je daar dan mee)?

Het gekke is dat in alle boeken staat dat dat niet kan; maar in de praktijk – ook in de praktijk van het onderwijs – doen we dat toch voortdurend. Het lijkt me toe dat je beide kampen gelijk kunt geven door er als volgt tegenaan te kijken.

Als voorbeeld nemen we twee lengte-tijd-koppels L_1-T_1 en L_2-T_2 . Het gewone evenredigheids criterium is hier niet op van toepassing (want je kunt onmogelijk zeggen hoe vaak de lengte L_1 in het tijdveelvoud nT_1 past). Maar we kunnen wél een variant van het gewoneevenredig zijn introduceren, via een soort blikwisseling. We noemen die variant hier: het *dwars-evenredig* zijn. Voelt

u 'm al aankomen...?

We noemen de koppels L_1-T_1 en L_2-T_2 *dwarsevenredig* indien de bijbehorende (dwars)koppels L_1-L_2 en T_1-T_2 gewoon-evenredig zijn. That's all.

En de eigenschap die een tweesoortig koppel L-T gemeen heeft met alle ermee dwarsevenredige koppels noemen we hier z'n *tweesoort-verhouding*. Dat is dus de variant van de gewone verhouding die volgens de boeken niet 'verhouding' mag heten, maar die iedereen in de praktijk toch 'verhouding' noemt.

Nietnorm-evenredig en norm-evenredig

We kijken nu nog naar een heel andere tweedeling van de dingen/eigenschappen die 'verhoudingen' genoemd worden. Iets waarbij de context waarin er over 'verhoudingen' gesproken wordt, een rol kan spelen. Met als conclusie – we verklappen het maar alvast – dat je afhankelijk van die context met het woord 'verhouding' de ene keer wél en de andere keer níét hetzelfde bedoelt als met het woord 'getal' (preciezer: met de aanduiding 'positief reëel getal'). Waar lijkt dit van af te hangen?

Van twee getallen weten we wat we onder hun *som* verstaan. En van twee verschillende getallen kunnen we zeggen welke de gróóteste is. Maar hoe zit dat als je het over verhoudingen hebt? Kun je twee verhoudingen optellen? En kun je van twee verschillende verhoudingen zeggen welke de grootste is? Dit wordt misschien duidelijk uit het volgende voorbeeld.

De boter-bloem-verhouding

Vraag: als je in een recept voor boterkoek de aangegeven boter-bloem-verhouding verdubbelt, wordt de koek dan vetter of juist meliger?

Ik vermoed dat niet iedereen hierop hetzelfde antwoord geeft. En vaak zal men zeggen: 'Dat hangt ervan af.'

Want moet je het 'verdubbelen van de verhouding' zien als het verdubbelen van het getal dat aangeeft hoeveel keer zo zwaar de bloem is ten opzichte van de boter? Of juist het getal dat aangeeft hoeveel keer zo zwaar de boter is ten opzichte van de bloem?

In sommige gevallen zal dat wel duidelijk zijn, in andere gevallen niet. Het hangt dus van de context-situatie af! Als uit de context, of uit de woordkeuze, duidelijk is welke grootheid als vergelijkingseenheid bedoeld is, heb ik het over een *normverhouding*, en anders over een *nietnormverhouding*. Als de boter-bloem-verhouding in het recept staat aangegeven als '250g bloem per 100g boter' dan zal verdubbeling van die normverhouding neerkomen op '500g bloem per 100g boter' (en dus een minder vette koek). Als er daarentegen in het recept zou staan 'per 100g bloem 40g boter' zullen we geneigd zijn om bij verdubbeling van die verhouding te denken aan 'per 100g bloem 80g boter' (en dus veel vettere koek). Tot slot: als een oude vader in z'n testament gezet heeft dat de erfdeel-verhouding tussen jongste en oudste zoon moet zijn als tussen vijf en drie, en hij schrijft op z'n sterfbed dat die verhouding verdubbeld moet worden, dan zou daar best eens ruzie van kunnen komen, omdat dat 'verdubbelen' moeilijk eenduidig te interpreteren is. Zo zul je, zonder een aanwijzing vanuit een context, niet kunnen zeggen of de (nietnorm-) verhouding '5 staat tot 3' groter dan wel kleiner is dan de verhouding '3 staat tot 5'. En om de verhouding '5 staat tot 3' te kunnen optellen bij de verhouding '4 staat tot 7' zul je eerst moeten weten wat de 'deeltallen' zijn en wat de 'delers' (je moet weten of je de vóórleden van de koppels gelijknamig moet maken, dan wel de vólgleden). Eveneens onmogelijk is het om te zeggen of de pythagoreïsche tripletverhouding '3 : 4 : 5' groter of kleiner is dan de tripletverhouding '5 : 12 : 13'.

Bedoelen we met 'normverhoudingen' (verhoudingen van groothedenkoppels waarbij bekend is welk van beide als norm bedoeld is) nu hetzelfde als met 'positieve reële getallen'?

Nee, want die overeenkomst is er alléén als het gaat om een normverhouding van twee *gelijksortige* grootheden. Met een lang woord: bij éénsoort-normverhoudingen. Een tweesoort-normverhouding is echt iets anders dan een getal. Kijken we bijvoorbeeld weer naar lengte-tijd-verhoudingen (met de tijdgrootheid als norm), dan hebben de koppels 100m-10s en 36km-1uur precies dezelfde normverhouding. Maar er is niet eenduidig een getal te noemen dat met die verhouding overeenkomt.

Vier soorten verhoudingen, waarvan er één overeenkomt met getallen

Het voorgaande samenvattend komen we tot vier soorten verhoudingen (van geordende paren):

- éénsoort-nietnormverhoudingen,
- éénsoort-normverhoudingen,
- tweesoort-nietnormverhoudingen,
- tweesoort-normverhoudingen.

Het spraakgebruik heeft het in al die gevallen over 'verhoudingen'. De tweede soort lijkt samen te vallen met wat we (positieve reële) getallen plegen te noemen. Dit sluit mooi aan bij wat Isaac Newton in 1720 schreef in de inleiding van zijn *Arithmetica Universalis*: 'By NUMBER we understand (...) the abstracted RATIO of any quantity to another quantity of the same kind, which we take for unity.'

Als gevraagd wordt wat een *getal* voor een ding is (beter gezegd: wat mensen bedoelen als ze het woord *getal* gebruiken), dan zou een antwoord kunnen zijn: *een mate van ongelijkheid van twee grootheden*. Nog iets preciezer: *een relatieve mate van ongelijkheid van een grootheid en een gelijksoortige normgrootheid*.

Breuken

De titel beloofde iets over 'breuken' – hier te lezen als 'rationale getallen', en niet als een benaming voor een bepaalde manier van noteren van getallen: met een 'breukstreep'.

Als een éénsoortig groothedenpaar de eigenschap heeft dat een zeker veelvoud van de ene grootheid, precies gelijk is aan een veelvoud van de andere, dan noemen we zo'n paar *rationaal*. En de verhouding van zo'n rationaal paar: een *rationale verhouding*. En eindelijk, als het om de *normverhouding* van een rationaal éénsoortig paar gaat, zijn we beland bij de (positieve) rationale getallen, oftewel de breuken.

Hoe worden verhoudingen opgeschreven en verbaal aangeduid?

De notaties en benamingen voor verhoudingen zullen, afhankelijk van de soort verhouding, kunnen verschillen.

De gewone (éénsoort)verhouding van het lengte-breedte-koppel 35m-12,5m kan met een dubbelepunt als verhoudingssymbool geschreven als 35m : 12,5m. Meestal zal men dit echter herleiden tot de vorm 14 : 5, met twee (gehele, delervrije) getallen in plaats van twee grootheden.

Als het een normverhouding betreft, met de breedte als standaard, zal in plaats van 14 : 5

soms gekozen worden voor de vorm 2,8 : 1, en ook wel voor de vorm 280 : 100.

Niet-rationale verhoudingen zullen nog vaker gepresenteerd worden in een vorm waarbij één van de beide leden 1 is (want met twee heeltallen lukt het nu niet).

Bij het verbaal aanduiden van een *nietnorm*-verhouding zal men een bewoording gebruiken waarin beide grootheden een gelijkwaardige rol hebben, dus bijvoorbeeld:

- de verhouding tussen ... en ... ;
- de verhouding van ... en ... ;
- ... tegen ... ;
- ... staat tot

Terwijl men een *norm*verhouding zal aanduiden op een manier die aangeeft welke grootheid als norm bedoeld is (meestal de láátstgenoemde):

- de verhouding van ... ten opzichte van ... ;
- de verhouding van ... vergeleken met ... ;
- ... per

Bij tweesoort-verhoudingen ligt dit weer anders. Een bepaalde standaard notatie is er nu niet.

Noot

- [1] Een uitgebreidere versie van dit artikel is te vinden op de NVvW-site (achter de login, via http://www.nvvw.nl/media/downloads/jv2009/handout_a6.pdf), dan wel aan te vragen bij de auteur.

Over de auteur

Het e-mailadres van Hessel Pot luidt: h.n.pot@hetnet.nl

Een rij van cosinussen

TWEE REACTIES

[Red.] Alsof drie bewijzen van een niet zo bekende formule nog niet genoeg zijn..., een meetkundig bewijs, een bewijs met de formules van Simpson en een bewijs met complexe getallen. Dick Klingens gaf deze drie bewijzen in Euclides 85-2 (oktober 2009), en daarop kwamen twee reacties binnen: Paul Dillo voegt een bewijs met volledige inductie aan de rij toe en Joost Hulshof koppelt de rij van cosinussen aan Fourier-reeksen.

Met volledige inductie

[Paul Dillo]

Een bewijs van de formule:

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos na = \cos\left(\frac{1}{2}(n+1)a\right) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}na}{\sin \frac{1}{2}a}$$

is natuurlijk ook uitstekend met *volledige inductie* te leveren. Om het typewerk te vereenvoudigen vervangen we a door $2a$; bovendien vervangen we n door $n-1$.

De te bewijzen formule wordt dan:

$$\cos 2a + \cos 4a + \dots + \cos 2(n-1)a = \cos na \cdot \frac{\sin(n-1)a}{\sin a}$$

Kiezen we $n=1$, dan zijn linker lid (lege som) en rechter lid beide gelijk aan nul.

Voor de inductiestap van n naar $n+1$

moeten we bewijzen:

$$\cos na \cdot \frac{\sin(n-1)a}{\sin a} + \cos(2na) = \cos((n+1)a) \cdot \frac{\sin na}{\sin a}$$

Deze uitdrukking kan herschreven worden als:

$$(*) \dots \cos(2na) \cdot \sin a = \cos(n+1)a \cdot \sin na - \cos na \cdot \sin(n-1)a$$

Gebruiken we nu in het rechterlid R van $(*)$ de volgende (standaard) formules:

$$\begin{aligned}\cos(n+1)a &= \cos(na+a) = \cos na \cdot \cos a - \sin na \cdot \sin a \\ \sin(n-1)a &= \sin(na-a) = \sin na \cdot \cos a - \cos na \cdot \sin a\end{aligned}$$

dan geeft dit:

$$R = (\cos na \cdot \cos a - \sin na \cdot \sin a) \cdot \sin na + \cos na \cdot (\sin na \cdot \cos a - \cos na \cdot \sin a)$$

of:

$$R = -(\sin na)^2 \cdot \sin a + (\cos na)^2 \cdot \sin a$$

Zodat, wegens:

$$(\cos na)^2 - (\sin na)^2 = \cos(2na)$$

duidelijk het linker en rechter lid van $(*)$ aan elkaar gelijk zijn.

Cosinusformules en Fourier-reeksen

[Joost Hulshof]

Als eenmaal duidelijk is dat:

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

een *goede* definitie is, bijvoorbeeld omdat

$$e^{nia} = (e^{ia})^n, \text{ dan kun je, zoals Dick}$$

Klingens deed, complex uitrekenen wat er komt uit:

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos na$$

Deze eindige som is het reële deel van:

$$\begin{aligned}e^{ia} + e^{2ia} + e^{3ia} + \dots + e^{nia} &= \\ = e^{ia} + (e^{ia})^2 + (e^{ia})^3 + \dots + (e^{ia})^n\end{aligned}$$

Het is een meetkundige reeks met reden e^{ia} , net als:

$$\begin{aligned}D_N(a) &= e^{-Nia} + \dots + e^{-2ia} + e^{-ia} + \\ &+ e^{0 \cdot ia} + e^{ia} + e^{2ia} + \dots + e^{Nia}\end{aligned}$$

Deze veel voorkomende eindige som heet

de *Dirichlet-kern*. Ook $D_N(a)$ is weer een

meetkundige reeks met reden e^{ia} , omdat

$$e^{Nia} = (e^{ia})^N, \text{ en de uitkomst is een breuk.}$$

In de teller daarvan staat het verschil van de eerste term en de eerste term die *niet* meer voorkomt in de eindige som. In de noemer staat 1 min de reden, de evenredigheidsconstante tussen twee opeenvolgende termen.

Er geldt dus:

$$\begin{aligned}D_N(a) &= \frac{e^{-Nia} - e^{(N+1)ia}}{1 - e^{ia}} = \\ &= \frac{e^{-(N+\frac{1}{2})ia} - e^{(N+\frac{1}{2})ia}}{e^{-\frac{1}{2}ia} - e^{\frac{1}{2}ia}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})a}{\sin \frac{1}{2}a}\end{aligned}$$

Deze formule voor de Dirichlet-kern $D_N(a)$

speelt een belangrijke rol in de theorie

van Fourier-reeksen, waarin algemene

2π -periodieke functies worden benaderd

met somfuncties van de speciale vorm:

$$\begin{aligned}f(x) &= C_N e^{-Nix} + \dots + C_2 e^{-2ix} + C_1 e^{-ix} + \\ &+ C_0 + C_1 e^{ix} + C_2 e^{2ix} + \dots + C_N e^{Nix} = \\ &= \sum_{k=-N}^N C_k e^{kix} = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N (A_k \cos kx + B_k \sin kx)\end{aligned}$$

In de derde regel staat de complexe

schrijfwijze en in de vierde regel de reële

schrijfwijze. Beide schrijfwijzen zijn equi-

valent. De complexe schrijfwijze ziet er wat

elegantier uit. Omrekenen van complex naar

reëel en omgekeerd kan met:

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

Het is niet moeilijk om voor zo'n functie f

na te gaan dat, met $k = -N, \dots, N$:

$$\begin{aligned}C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a) \cdot e^{-ika} da\end{aligned}$$

En het aardige is dat door invullen en

herschrijven blijkt dat:

$$\sum_{k=-N}^N C_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a) \cdot D_N(x-a) da$$

ook als we niet begonnen zijn met een

functie f van deze speciale vorm.

Voor algemene integreerbare 2π -periodieke

functies worden de complexe Fourier-

coëfficiënten C_k gedefinieerd als hierboven

en heet de zo gemaakte eindige som de

N -de orde Fourier-benadering van f . Als f

gewoon reëel is, dan zijn ook zijn Fourier-

benaderingen reëel.

Over de auteurs

Paul Dillo is verbonden aan het Fons Vitae Lyceum te Amsterdam.

Email-adres: dillo@fonsvitae.nl

Joost Hulshof werkt op de Afdeling

Wiskunde van de Vrije Universiteit in

Amsterdam.

E-mailadres: jhulshof@few.vu.nl

VERSCHENEN



Ondertitel: Cijfers en statistiek in krant en wetenschap

Auteur: Hans van Maanen

Uitgever: Boom Uitgeverij b.v., Amsterdam (2009)

ISBN: 978-90-850-6835-8

Prijs: €22,90 (paperback, 256 pagina's)

/ GOOCHELEN MET GETALLEN

Cijfers in het nieuws zijn als foto's in het nieuws. Ze kunnen schokkend en overtuigend zijn – 'Autodiefstallen met 6 procent gedaald', 'Elk glas alcohol verhoogt de kans op borstkanker met 13 procent', 'Een op drie kinderen pleegt delict' – maar ze kunnen ook misleiden. Hoe zat het met het aantal autodiefstallen in de jaren daarvoor? Is een verhoging van 13 procent iets om echt rekening mee te houden? Wat verstaan de onderzoekers allemaal onder 'delict'? Pas als het complete beeld geschetst wordt, de cijfers in een context geplaatst worden en hun ontstaansgeschiedenis wordt geschetst, weten we zeker dat ze een eerlijk beeld van de werkelijkheid geven. Langzamerhand raken we vertrouwd met het feit dat nieuwsfoto's kunnen liegen en bedriegen en ingezet worden door belanghebbende partijen die de opinie naar hun hand willen zetten. Maar we zijn er nog amper op bedacht dat, bijna nog meer dan foto's, ook cijfers geretoucheerd kunnen worden, uitgesneden kunnen worden, en gewoon kunnen liegen. Juist omdat ze zo koel en objectief klinken.

Goochelen met getallen biedt het gereedschap

om de stortvloed aan cijfers in het nieuws althans enigszins de baas te worden.

Gereedschap voor eenvoudige klusjes – hoe zat het ook al weer met het gemiddelde, de mediaan en de modus? – maar soms ook voor het zware werk: dan passeren standaardafwijking, significantie en zelfs de chi-kwadraattoets de revue. Afgewisseld met heuse, soms hilarische voorbeelden uit de journalistieke en wetenschappelijke praktijk.

Inhoud – Autodiefstallen, Getallen groot en klein, Percentages, Verhoudingen, Zonlicht maakt bijziend, Meten en precisie, Onzinnige wereldrecords, Gemiddelden, Spreiding, De normale verdeling, Veel koffie is goed, Kans en geluk, Risico's groot en klein, Hoe pak ik een terrorist?, Eerherstel voor Buikhuisen, Betrouwbaarheid, Negen maanden later..., Significant en betrouwbaar, Statistiek op de plaats delict, De toets der kritiek, Hart voor Oranje, Verbanden, Mannen en seks, Opiniepeilingen, Schijnverbanden, Seksisme op Berkeley, Terug naar de middelmaat.

VERSCHENEN



Titel: Hier heb ik niets aan!

Auteurs: diverse

Uitgever: Kennisnet (2009)

Prijs: gratis downloadbaar (zie verder)

/ ESSAYBUNDEL VAN KENNISNET

De titel van dit boek geeft in één simpele uitspraak een van de meest weerbarstige barrières weer die verdere integratie van ict binnen het onderwijs in de weg staat. Het probleem: leraren willen meer gebruik maken van digitaal leermateriaal, er is ook steeds meer materiaal beschikbaar, maar nog steeds vinden leraren en schoolleiders het aanbod niet bruikbaar. Waar ligt de oorzaak van dit probleem en welke maatregelen zouden we moeten treffen om te voorzien in de behoefte aan bruikbaar digitaal leermateriaal in het onderwijs? Kennisnet heeft experts uit verschillende disciplines uitgenodigd een antwoord te geven op deze vraag. Het resultaat treft u aan in de essaybundel *Hier heb ik niets aan!*.

De essays uit de bundel zijn (in z'n geheel of afzonderlijk) te downloaden via: <http://digitaallemateriaal.kennisnet.nl/publicaties/essaybundel>

Via een weblog (<http://kennisnetonderzoek.wordpress.com>) is het mogelijk online te reageren op de essays.

Eén van de essays, *Meerwaarde, waar ben je?*, is geschreven door Johan Gademan, onafhankelijk educatief specialist en voorzitter van de stichting Math4all. Hij werkt in dit essay twee stellingen uit:

- De vooronderstelde meerwaarde die verwacht wordt van het arrangeren van (digitaal) lesmateriaal zal tegenvallen.
- Digitaal leermateriaal voor wiskunde levert nog te weinig daadwerkelijke meerwaarde voor grote groepen (wiskunde)docenten.

Hij betoogt dat de Stichting Math4All een andere werkwijze hanteert die gericht is op lange doorlopende leerlijnen, op duurzaamheid en flexibiliteit en op daadwerkelijke meerwaarde voor grote groepen wiskundeleraars.



Oorspronkelijke titel: O Homem que Calculava
Ondertitel: Verbazingwekkende verhalen en raadselachtig gecijfer
Auteur: Malba Tahan
Vertaling: Joost de Wit
Uitgever: Sijthoff, Amsterdam (2009)
ISBN: 978 90 218 0318 0
Prijs: € 14,95 (paperback, 264 pagina's)

Synopsis – Hoe verdeel je een erfenis van 35 kamelen over 3 erfgenamen? Wat is er zo bijzonder aan het getal 142.857? Hoe stel je een groep van 10 soldaten op in rijen van 4? Tijdens een reis van Samara naar Bagdad wordt Beremiz Samir, een jonge man met een buitengewoon wiskundig talent, voortdurend geconfronteerd met mensen die een beroep op hem doen om allerlei rekenkundige dilemma's en ruzies op te lossen.

Spelenderwijs worden de problemen telkens weer uit de weg geruimd en weet Beremiz zijn publiek te vermaken met allerlei wiskundetrucjes en spelletjes. Voor elk schijnbaar onoplosbaar probleem heeft hij een oplossing, vaak zelfs zo eenvoudig dat de lezer zich zal afvragen waarom hij er zelf niet op kwam...

Malba Tahan is het pseudoniem van Júlio César de Mello e Souza (1895-1974), een van de gevierde wiskundigen van Brazilië. Hij publiceerde meer dan honderd boeken, waarvan *De man die kon rekenen* (1949) het bekendst is.

'Het zou verplicht moeten worden gesteld aan mensen die koket beweren dat ze "he-le-maal niets" met rekenen hebben.'
(De Pers)

Onze leerlingen kunnen wel wat hulp gebruiken

...en u ook!

De wiskunde op onze site is erg geschikt voor het elektronisch schoolbord, voor thuisgebruik en voor maatwerk op papier: Wiskunde voor de internetgeneratie.

Gratis praktische ondersteuning voor elke docent en leerling:
Theorie • Uitleg • Voorbeelden • Applets

Kom naar **www.math4all.nl** en... vergeet de site niet aan uw leerlingen door te geven. Wikiwijsversie op **www.wikiwijs-wiskunde.nl**

Onze site is ontwikkeld en wordt onderhouden door ervaren, deskundige en bevoegde liefhebbers van wiskunde.



Math4all

Wij kunnen óók hulp gebruiken.
Steun Stichting Math4all, geef de site door aan collega's en leerlingen.

Gratis! maar niet goedkoop



Jaarrede 2009

[Marian Kollenveld]

Dames en Heren,

Om te beginnen wil ik even stilstaan bij het overlijden van ons erelid Felix Gaillard, jarenlang bestuurslid, penningmeester, ledenadministrateur en organisator van de jaarvergadering/studiedag. Felix regelde het wel, en goed, want half goed was niet goed. Hij was een pietje precies. Hij was voor velen jarenlang het gezicht van de vereniging, en hij deed dat werk met grote toewijding, zoals u ook in het in memoriam van Jan Maassen in *Euclides* hebt kunnen lezen.

Felix is 80 jaar geworden. Het einde kwam niet onverwacht, hij heeft gelukkig de gelegenheid gehad om goed afscheid te nemen, en om – zichzelf getrouw – zijn eigen crematie te regelen inclusief degenen die het woord zouden voeren. Maar toch, en ik citeer nu zijn zoon: ‘Zo moeilijk als hij tijdens zijn leven zaken los kon laten, zo rustig was uiteindelijk zijn afscheid. De manier waarop hij zijn ziekte droeg, was bewonderenswaardig en toont zijn eigenlijke levenskracht. Het was goed zo.’

We nemen zo langzamerhand afscheid van een generatie, afscheid van de mensen die er in mijn beleving altijd al waren, vaak vanwege pensioen, en soms definitief. Zo kregen we ook bericht van het overlijden van mevrouw An Mijling, een van de eerste, zo niet de allereerste wiskundelerares in Nederland. Zij is 81 geworden en was tot het eind nog lid van de vereniging en geïnteresseerd lezer van ons blad.

En dat roert me toch altijd weer, dat mensen zo trouw zijn aan de vereniging, echt levenslang lid willen zijn van een vereniging van wiskundeleraren. Want wat is dat nou, dat cluppie van ons?

Ja, ik weet het wel, jullie zijn ook allemaal lid en ik hoop nog heel lang en in goede gezondheid, maar toch vind ik het elke keer weer heel bijzonder.

Voor mezelf heel bijzonder (en dit is een bruggetje van niks) was onze wereldreis, van het opgespaarde bapo-verlof. Mijn zomer-herfst-winter-voorjaarsvakantie, als het ware. Niet dat ik inmiddels gestopt ben met werken en dus altijd vakantie heb – dat duurt nog even – maar hoe moet je het anders noemen als je aan het eind van de zomervakantie weggaat, in de herfstvakantie terugkomt en tussendoor geweest bent op plaatsen waar het winter en voorjaar was. Ja, ik ben op nogal wat plaatsen geweest, de afgelopen maanden. En ik heb daar veel gezien en gehoord, waaronder een aantal zaken die ik de moeite waard vind om hier te vertellen.

Om te beginnen een gesprek dat ik in York had. York in Australië, wel te verstaan, je vindt namelijk Engeland niet alleen in de Verenigde Staten maar ook in Australië terug. Vreemd wel als je ook de oorspronkelijke steden kent. In York dus, in een mooi oud-Engels aandoend landhuis (*zie foto 1*), waar we een paar dagen verbleven, sprak ik met twee onderwijzers, die me onder andere vertelden dat je in Australië, om op de basisschool les te mogen geven, ten minste een vierjarige universitaire opleiding met succes moet afronden. Ja, dat hebt u goed gehoord. Om op een basisschool te mogen lesgeven. Ik voelde me toen heel ver van huis.

Het tweede dat ik wil noemen was in Singapore. Op een avond liepen mijn echtgenoot en ik langs een kade in Singapore (*zie foto 2*), en daar zagen we dat in een openluchttheatertje een voorstelling gegeven zou gaan worden. Geen idee wat het zou worden, maar we besloten even te gaan zitten. We kwamen terecht naast een meisje dat, zo zagen we ineens, bezig was met een grafische rekenmachine, een TI-84 Plus om precies te zijn. En weer een beetje scheef beter kijkend werd ook duidelijk wat ze deed: sommetjes maken, integralen uitrekenen zo te zien op het niveau van ons

vwo. Ik was nog onthecht genoeg om haar niet te gaan helpen. Ze ging daar overigens niet mee door toen de voorstelling begon, en wij waren ook snel weg; drie dj's die laten horen hoe goed ze kunnen scratchen – het is niet echt ons ding.

Ten derde een stuk in een Engelse krant, gelezen in een café in de Royal Albert Hall in Londen (*zie foto 3*). In dat artikel werd de staf gebroken over de kwaliteit van het Engelse onderwijs en met name over het Engelse micromanagement waar het onderwijs betreft: dat is minutieus voorschrijven wat de leraar moet doen in combinatie met een regen aan gestandaardiseerde tests. Dat bleek kennelijk niet zo goed te werken. De conclusie van het artikel was dat de enige manier om het onderwijs te verbeteren ligt in het vergroten van de kwaliteit van de docenten.

En toen wist ik dat ik weer bijna thuis was.

Vertel ik dat nu om duidelijk te maken dat je, hoe ver en hoe lang je ook op vakantie gaat, niet ontkomt aan dat vak van ons? Nee, dat is niet mijn bedoeling – hoewel het natuurlijk wel waar is. Ik vertel het vooral omdat het illustratief is voor wat mij, en met mij het hele bestuur, de laatste jaren bezig houdt: de kwaliteit van het wiskundeonderwijs. En daarbij gaat het ons niet om dat debat dat al een tijdje gaande is tussen voorstanders van realistisch rekenen, dan wel wiskunde, en voorstanders van technisch oefenen. Ik kreeg de indruk uit de krant, inmiddels bevestigd door het lezen van het rapport, dat de commissie Lenstra in elk geval bij rekenen ook tot de conclusie was gekomen dat de discussie daar niet over moet gaan. De kwaliteit van het rekenonderwijs is in hoge mate gekoppeld aan de kwaliteit van de docent; de gekozen methode doet er daarbij minder toe.

Dus ik hoop dat we daarover nu verder kunnen ophouden, omdat dat debat afleidt van waar het werkelijk om draait: de

essentie van ons vak – het vak van wiskundeleraar, en wat daar voor nodig is en hoe dat beter kan.

Over wat die essentie is, bestaan nog wel eens misverstanden. U komt ze vast wel tegen, met enige regelmaat zelfs. Vooral in de persoon van mensen die, als u vertelt dat u wiskundeleraar bent, u vol ontzag aanstaren en/of vertellen dat zij op school altijd zo'n moeite hadden met wiskunde. Ik zie er dan soms ook nog bij denken: 'Goh, een vrouw en wiskunde?', maar dat is in de loop van de jaren wel gewoner geworden. Ik noem ze de knobbeldenkers, een zeer langzaam uitstervend ras, als het al ooit uitsterft. Maar met mythes krijg je geen goed onderwijs.

Het misverstand aan de andere kant dat de inhoud er helemaal niet toe doet en het alleen maar om het leraarschap gaat, kom je inmiddels wat minder vaak tegen, ik hoor het althans niet meer zo vaak; de populariteit van de 'docent als coach' is dalend en ook het competentieleren wordt minder gezien als panacee, hoewel er in het mbo beschamend veel mensen onbevoegd worden ingezet op een vak dat niet het hunne is.

Maar wat je wel tegenkomt, zijn heel uiteenlopende opvattingen over wat dat leraarschap eigenlijk inhoudt.

Je zou kunnen zeggen dat er twee uitersten in zijn. Aan de ene kant de gedachte dat de leraar een soort gieter is, en de leerling een hol vat dat gevuld moet worden – en dat gevuld kan worden zonder daar zelf veel aan te doen. Gewoon, de leraar moet goed gieten. Het is een opvatting die je nog wel eens bij leerlingen en hun ouders tegenkomt, vooral als die leerlingen een jaar niets hebben gedaan en dan een onvoldoende op hun eindrapport of examen scoren.

De andere kant kom je wel eens tegen bij collega's. Die vertellen je dan, bijvoorbeeld, dat die leerlingen zo dom zijn. Dat ze nu, in de tweede, derde, vierde klas, nog geen lineaire vergelijking kunnen oplossen. En dat terwijl zij – de leraar dus – ze in de eerste klas toch alle sommen uit het boek hebben laten maken. Maar ja, ze werken ook niet, hè.

Geen van beide opvattingen is productief, en ze gaan ook allebei voorbij aan wat het leerproces feitelijk is, en wat daarin de optimale verhouding tussen leerling en leraar is.



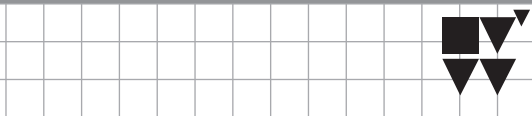
foto 1



foto 2



foto 3



Leren is in het Nederlands zowel een overdrachtelijk als een niet-overdrachtelijk werkwoord, en daar komt volgens mij veel van die verwarring vandaan. De leerling moet leren in de niet-overdrachtelijke zin. Het Engelse 'to learn', of het Duitse 'lernen'. Hij of zij moet kennis en ervaring opdoen, zichzelf eigen maken. Dat is een activiteit, en dat vergt dus inspanning. Leren is dus werken, voor de leerling. Onder meer zoals dat meisje in Singapore deed, door haar huiswerk te maken. Maar dat is het ook voor de leraar. Die moet leren in de overdrachtelijke zin – 'to teach' in het Engels, of 'lehren' in het Duits. Hij of zij moet de leerlingen iets bijbrengen, ze in staat stellen te leren, ze de stof zodanig aanbieden dat ze zich die eigen kunnen maken.

Leraar en leerling – ze moeten beiden werken. Je zou dan denken: de optimale verhouding tussen die twee is samenwerking. Maar dat is het eigenlijk niet, of alleen maar in een heel specifieke betekenis. Waar het veel meer op neerkomt, is dat het twee verschillende werkzaamheden zijn, waarbij het de taak van de leraar is om ervoor te zorgen dat hij of zij de leerling optimaal laat leren – in die niet-overdrachtelijke betekenis. En dat, dames en heren, is een vak. Ons vak. Of, iets specifieker: ervoor zorgen dat leerlingen optimaal in de gelegenheid zijn *om wiskundige kennis en vaardigheden* op te doen – en dat ze dat ook feitelijk doen. Dat is ons vak!

Als je dat eenmaal door hebt, dan ga je ook een hele hoop dingen zien. Bijvoorbeeld waarom al die energie die is gaan zitten in de discussie over realistische wiskunde tegenover oefenen, zo verspild is. Het is onzin om te denken dat er maar één methode is die goed is: leerlingen zijn verschillend, leren verschillend en dus moet je als leraar beschikken over een heel arsenaal aan methoden om die verschillende leerlingen te ondersteunen bij hun werk: het leren. Je moet het leren van de leerling bevorderen, en daarvoor is niet één manier, gelukkig maar, de leerling is geen machientje. Dat maakt het juist zo aardig, anders was ik allang iets anders gaan doen. Leerlingen moeten oefenen, en toepassen,

denken en redeneren. U vindt dat ook terug in de nadruk op de denkactiviteiten bij de vernieuwingscommissie cTWO (zie de workshop).

Tegenwoordig wordt er veel gesproken over professionaliteit, en hoe die onder druk is komen te staan doordat scholen steeds groter zijn geworden, het management en de politiek steeds meer is gaan voorschrijven en de uitgevers via hun methoden de leraren in een keurslijf hebben gedwongen. Professionaliteit wordt dan vooral gezien als vrijheid. Ik ben het met die gedachte wel eens – maar daar houdt het niet op. Professionaliteit vergt inderdaad vrijheid – de vrijheid om per geval je kennis en kunde in te zetten op de manier die daar bij hoort. Maar professionaliteit vergt dus ook die kennis en kunde. En wat is dat?

Weten wat je leerlingen moeten weten – het programma dus. Dat lijkt voor de hand te liggen, maar is dat niet en niet altijd zo extreem als die paar vmbo-scholen die een complete programmawijziging hadden gemist en daar pas op het examen achter kwamen. Maar op kleinere schaal gaat er elk jaar wel zo hier en daar wat mis, zoals dit jaar de exacte waarden bij gonio in het havo B-programma. We zijn er ook niet gerust op of bij de komende vwo-A-B-C examens alles duidelijk is. Dat is geen goede zaak. Onduidelijkheid is altijd ten nadele van de leerling.

Verder moet je de wiskunde beheersen die je leerlingen moeten beheersen, en méér dan dat. En, in staat zijn om die kennis op verschillende manieren over te brengen, en dan ook nog in staat zijn om te herkennen welke manier bij welke leerling werkt. Al deze zaken, en meer, zijn terug te vinden in ons professionaliseringsplan WiVa, waarover Marianne Lambriex u straks meer over zal vertellen.

Een positief bijproduct van alle gedoe rond het rekenen en de deplorabele staat waarin alles schijnt te verkeren, is dat de beleidsmatige wind een beetje is gedraaid. Vond de vorige minister nog dat we als wiskundigen niet zo moesten zeuren, de huidige bewindslieden hebben wat meer oog voor de resultaten van het onderwijs. En dan met name van het rekenonderwijs. We hebben de twee rekenprojecten die ik u vorig jaar noemde, gehonoreerd gekregen:

rekenen voor havo in C&M en rekenen voor vmbo-leerlingen zonder wiskunde in het pakket. We hebben het project Reken VOort genoemd. Informatie daarover vindt u vandaag in de NVvW-stand.

We maken ons in dit verband overigens wel zorgen over de hausse aan rekentoetsen die momenteel geproduceerd en over het onderwijs uitgestort wordt. Enige coördinatie en afstemming lijkt ons dringend gewenst.

Omdat de afstand tussen rekenen en wiskunde niet zo groot is en er veel overeenkomsten zijn in de problematiek, hebben we wederom het onderwerp contacttijd in relatie met het te bereiken resultaat op het ministerie aan de orde gesteld, mede naar aanleiding van het eerste havo B-examen. Krimpde lestijd en hogere ambities gaan namelijk slecht samen. Ahh, u heeft dat eerder gehoord? Ja, dat doen we al een jaar of tien, inderdaad, maar ach: Keulen en Aken, en de gestage druppel, wie het laatst lacht en zo. De aanhouder wint misschien zelfs wel. Kijk, en dan gaat de vlag uit, dat begrijpt u.

Die vlag ging ook uit toen Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade in 2011 mocht organiseren. We vinden dat een eervolle zaak en hebben dan ook royaal *onze* medewerking toegezegd, en we hadden daarbij eigenlijk *u* in gedachten. U zult daar vandaag ongetwijfeld meer van merken.

Uiteraard is er nog veel meer te vertellen, maar omdat we onze belofte van vorig jaar hebben ingelost en u op de site en in het blad regelmatig op de hoogte houden van wat er allemaal langskomt, wil ik het hierbij laten.

Het bestuur heeft het druk, of maakt zich druk, maar gelukkig voelen we ons in ons werk gesteund door velen. We zijn trots op al die mensen die zich voor de goede zaak willen inzetten, maar we kunnen er altijd meer gebruiken. Dus aarzelt u niet als u ook maar een kleine kriebel voelt bovenkomen; u bent van harte welkom. Er is nog veel te doen, we hebben nog veel onuitgevoerde plannen, en een bestuur kan dat nooit alleen.

Ik wil dus graag besluiten met alle huidige vrijwilligers hartelijk te danken voor hun inzet van dit jaar en alle komende voor hun inzet voor volgend jaar.

Wij rekenen op u! Dank u wel.

Van de bestuurstafel

[Kees Lagerwaard]

Vanzelfsprekend wil ik eerst even terugblikken op de jaarvergadering/studiedag van november. Het aantal deelnemers (ruim boven de driehonderd) was weer groter dan vorig jaar. Als deze groei doorzet, is de mooie aula van het Anna van Rijn College in Nieuwegein straks echt te klein voor het plenaire gedeelte en moet er een alternatieve locatie worden gezocht. Terwijl we verder heel tevreden zijn met deze plaats: het ligt mooi midden in het land en de voorzieningen zijn voortreffelijk.

Misschien lag de hoge opkomst ook aan het thema van de studiedag, het rekenen. Kennelijk een onderwerp dat veel collega's aanspreekt. En ook een thema dat vmbo- en mbo-docenten niet minder aanspreekt dan degenen die lesgeven op havo/vwo. Uit de talrijke reacties hebben we kunnen opmaken dat het weer een zeer geslaagde studiedag was.

Het bestuur nodigt tijdens de studiedag nieuwe leden uit voor een kennismakings lunch. Net als vorig jaar hebben we het genoeg gehad kennis te maken met enkele tientallen nieuwelingen. We willen hen aan het eind van het schooljaar opnieuw benaderen om te horen hoe zij dit eerste jaar hebben ervaren.

In het Meijerink-rapport (over de doorlopende leerlijnen rekenen en taal) worden tekorten aan rekenvaardigheid gesignaleerd in alle jaarlagen van alle schooltypen. Dat is niet zonder gevolgen gebleven. Zo hebben we als Vereniging het project RekenVOort kunnen opstarten waarin voor bovenbouw-leerlingen vmbo en havo zonder wiskunde een rekenprogramma wordt ontwikkeld om hen op het gewenste Meijerink-niveau 2F resp. 3F te brengen. Bij cTWO is men bezig voor rekenen/wiskunde in de onderbouw eindtermen te formuleren. Het ministerie is van plan vanaf 2014 met een eindexamen de rekenvaardigheid te toetsen, zowel in het vo als in het mbo. Onduidelijk is nog of het vak rekenen, waar mogelijk, kan worden ondergebracht bij wiskunde.

Gelet op de wat brede definitie van rekenen die de Commissie Meijerink hanteerde, lijken rekenen en wiskunde toch wel veel op elkaar. Maar betekent dit dat andere vakken geen bijdrage hoeven te leveren aan het verbeteren van de rekenvaardigheid?

Onlangs verscheen een rapport van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen over het rekenonderwijs op de basisschool. Daarin wordt gesteld dat de kwaliteit van het rekenonderwijs vooral afhangt van de kwaliteit van de docenten op dit gebied. Hun belangrijkste aanbeveling is dan ook om docenten in het rekenen veel beter op te leiden. Alleen dan kan het rekenpeil omhoog.

Misschien heeft dit rapport straks ook gevolgen voor het rekenonderwijs in het vo. Hoe het ministerie het rekenonderwijs in het vo ook zal willen inrichten, het lijkt onwaarschijnlijk dat we er als wiskundeleraars geen rol bij zullen gaan spelen. Maar we hebben nu ook al te maken met hogere eisen op het gebied van algebraïsche vaardigheden, terwijl het aantal lessen wiskunde niet toeneemt. Als rekenen ook nog extra aandacht, en dus tijd, gaat eisen in onze wiskundelessen, wordt het gat tussen wens en realiteit misschien nog groter.

Als bestuur zullen we dit alles nauwgezet en kritisch blijven volgen.

Afgelopen jaar waren er op het havo voor het eerst eindexamens wiskunde A en B volgens de herziene programma's. De resultaten bij het examen wiskunde B vielen tegen. Veel docenten kwamen tot de ontdekking dat de beschikbare lestijd onvoldoende was om de leerlingen goed voor te bereiden op dit examen. Zoals een collega zei: 'Ik moest in de lestijd van wiskunde B1 mijn leerlingen voorbereiden op een examen wiskunde B12.' Dat heeft wel tot onzekerheid geleid over de eerste vwo-examens wiskunde A, B en C die over enkele maanden worden afgenomen. De examenprogramma's en de erbij

gepubliceerde syllabi geven volgens het CvE (CEVO is met ingang van 1 oktober 2009 opgegaan in het *College voor Examinens*) voldoende informatie over die examens.

Maar verscheidene leden zouden het heel prettig hebben gevonden wanneer er een voorbeeldexamen zou zijn gepubliceerd. Ook als bestuur hebben we deze wens aan het CvE voorgelegd. Het CvE lijkt dit niet nodig te vinden omdat de herziene examenprogramma's maar weinig afwijken van de 'oude' Vernieuwde Tweede Fase-examens. Van de examens volgens de nieuwe door cTWO ontwikkelde examenprogramma's die over enkele jaren zullen verschijnen, zal vooraf veel meer bekend zijn. De nieuwe examenprogramma's zijn klaar en aan de syllabi wordt gewerkt. Voor scholen die met de nieuwe examenprogramma's experimenteren, zullen pilot-examens worden ontwikkeld. Die zullen na afname als voorbeeld kunnen dienen voor de toekomstige examens.

Het bestuur brengt de onzekerheid die bij docenten is ontstaan over de examens van de vernieuwde en de oude programma's (bezemexamens) onder de aandacht van het CvE. Binnenkort heeft een afvaardiging van het bestuur overleg met het CvE over allerlei actuele zaken rondom de wiskunde-examens. We hopen dat dit het begin zal zijn van een regelmatig overleg. De Vereniging heeft in elk van de drie CEVO-vaksecties wiskunde (wiskunde A, B en vmbo) een vertegenwoordiger. Ook in de syllabuscommissies zijn we steeds vertegenwoordigd. Maar daarnaast is een regelmatig overleg van het bestuur met het CvE gewenst over regelgeving, toegestane hulpmiddelen en informatieverstrekking over examens bij programmawijzigingen. We houden u op de hoogte.



Het beroepsregister

STAND VAN ZAKEN NOVEMBER 2009

[Marianne Lambriex]

Inleiding

Het bestuur van de NVvW heeft de projectgroep WiVa (Wiskundeleraar Vakvaardig) samengesteld, waarin ook SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren) en het Freudenthal instituut participeren. Doel is beroepsstandaarden voor wiskundeleraars vast te stellen en tevens registratiecriteria voor opname in het lerarenregister en vakspecifieke eisen voor continue professionalisering te ontwikkelen. De projectgroepleden zijn Marianne Lambriex (NVvW) en Dédé de Haan (FI). In dit artikel wordt de stand van zaken in november 2009 geschetst.^[1]

Historie

In het rapport *Leerkracht* (2006) adviseerde de commissie Rinnooy Kan om ter stimulering van de kwaliteit van onderwijsgeven een register voor leraren in te stellen, daarmee nieuw leven inblazend in een discussie die in de negentiger jaren van de vorige eeuw en in het begin van deze eeuw al aan de orde was. In zijn beleidsreactie ondersteunde de Minister van OCW dit advies en sprak hij zich uit voor een door de beroepsgroep zelf in het leven te roepen privaatrechtelijk register. Deze ontwikkelingen sloten aan bij het beleid van de NVvW: al jaren probeerde de NVvW beroepsstandaarden voor wiskundeleraars vast te stellen. Vandaar dat de NVvW vanaf het begin niet alleen heeft meegedacht maar ook mee-ontwikkeld; denk daarbij aan het WiVa-project en de pilot Beroepsregistratie. OCW werd om ontwikkelingsubsidie gevraagd en deze steun werd ook daadwerkelijk verleend, waarbij aan SBL werd gevraagd de regie te nemen en een coördinerende en faciliterende rol te vervullen. In voorjaar 2007 startte het door SBL aangestuurde project *Registratie van leraren* met in totaal 12 deelnemende

vakinhoudelijke vakverenigingen voortgezet onderwijs (zie voor de rol van de NVvW de artikelenreeks over WiVa die eerder gepubliceerd in *Euclides*).

In het voorjaar 2009 zijn ook ontwikkelactiviteiten voor het po van start gegaan, terwijl de eerste stappen voor een register beroepsonderwijs inmiddels ook zijn gezet. Op 24 juni 2009 heeft een symposium plaatsgevonden, waarop door vertegenwoordigers van vakinhoudelijke verenigingen voortgezet onderwijs (en waarnemers vanuit andere onderwijssectoren) is gediscussieerd over een aantal beslispunten ten aanzien van de opzet en werking van een register voor leraren. Op een groot aantal punten werd een hoge mate van overeenstemming bereikt (deze punten staan in de paragraaf Het Register onder 1 t/m 5 vermeld).

Project Registratie van leraren (periode 2007-2009)

Het register beoogt bij te dragen aan de professionele kwaliteit van leraren. Aan het register liggen beroepsstandaarden ten grondslag. De leraren voeren zelf de regie over het register. De NVvW heeft samen met andere vakverenigingen en onder regie van het SBL beroepsstandaarden ontwikkeld, criteria opgesteld voor opname in het register en eisen geformuleerd die aan het onderhoud van de professionaliteit gesteld zouden moeten worden (WiVa). Ook is een experimentele webomgeving voor registratie ontwikkeld en is er een proef gedaan met initiële registratie en met het administreren van professionaliseringsactiviteiten (pilot registratie).

De uitkomsten van deze projecten hebben uiteindelijk geleid tot de formulering van een aantal 'beslispunten' die op het symposium van 24 juni 2009 aan de vertegenwoordigers van de vakinhoudelijke verenigingen zijn voorgelegd. Op grond van

deze beslispunten kan de officiële webomgeving van het lerarenregister gebouwd worden. Deze beslispunten vormen ook de basis voor de organisatorische maatregelen die de deelnemende verenigingen en SBL moeten treffen om ervoor te zorgen dat alle procedures volgens afspraak kunnen verlopen. De planning is dat de officiële registratiesite in de eerste helft van 2010 gereed is.

Belangrijk uitgangspunt is dat de verenigingen streven naar zoveel mogelijk gelijkvormigheid wat betreft procedures, organisatie en criteria voor registratie, onder meer om het register naar buiten toe overzichtelijk te houden. Tegelijkertijd moeten de verenigingen binnen de vastgestelde kaders ruimte hebben voor het maken van eigen keuzes. Een ander belangrijk uitgangspunt is dat de invulling van de registratiesite op grond van beslissingen die nu worden genomen, niet tot in lengte van dagen vastligt. Er zal na openstelling van de registratiesite onderzoek worden gedaan naar het functioneren ervan en de uitkomsten van dit onderzoek kunnen aanleiding zijn tot aanpassingen.

Het Register

Na de vele overlegmomenten tussen de vakverenigingen liggen de onderstaande afspraken op tafel:

1. Er is sprake van een initieel register en van een beroepsregister.
2. Criteria voor toelating tot het initieel register zijn:
 - In het bezit zijn van een erkend diploma dat bevoegdheid^[2] verleent tot het geven van onderwijs in het vak c.q. de vakken die het register bestrijkt.
 - Onderschrijven van de beroepsstandaarden (generiek en vakspecifiek) en de beroeps-ethische code.

- Onderschrijven van een preambule bij het register, waarmee men verklaart de intentie te hebben de professionaliteit te onderhouden door middel van continue professionaliseringsactiviteiten.
3. Criteria voor toelating tot het beroepsregister zijn:
- Ingeschreven zijn in het initiële register volgens de daarvoor geldende criteria.
 - Op het moment van toelating een aanstelling hebben van minimaal 0,2 fte voor het vak waarvoor men registratie aanvraagt.
 - Voldoen aan de professionaliseringsverplichting: 160 uur bewijsbare professionaliseringsactiviteiten over een aaneengesloten periode van vier jaar.
 - Minimaal 40 uur daarvan moeten besteed zijn aan vakspecifieke (inclusief vakdidactiek) professionaliseringsactiviteiten en minimaal 40 uur aan generieke professionaliseringsactiviteiten. Van de resterende 80 uur mag maximaal 40 uur gerekend worden voor

professionaliseringsactiviteiten die niet direct zijn gericht op vergroting van de doceerkwaliteit.^[3]

4. De leraar moet aangeven waar en hoe de activiteiten kunnen worden gecontroleerd (in verband met steekproeven).
5. Er is sprake van een centrale registeradministratie (CRA), bij SBL ondergebracht, naast en nauw gelieerd aan de verenigingsadministratie van het register. De CRA is verantwoordelijk voor de gehele beheersmatige infrastructuur, is regievoerend, faciliterend en coördinerend voor de verenigingen en voorziet in de afhandeling van de standaard administratieve zaken. Hoofdtak van de verenigingsadministratie is het vaststellen of de aangemelde leraren aan de vereiste criteria hebben voldaan.

De NVvW ziet het lerarenregister als een instrument om de voortgaande professionele ontwikkeling van leraren – generiek én vakspecifiek – te stimuleren en daarmee de kwaliteit van het onderwijs te bevorderen. Tevens vindt de vereniging het belangrijk dat door middel van het lerarenregister

professionele kwaliteit van leraren transparant wordt gemaakt voor alle bij het onderwijs betrokkenen. Hoe dit in de toekomst verder geïmplementeerd gaat worden, kunt u in volgende artikelen in *Euclides* of op de website lezen.

Noten

- [1] Grote delen van de tekst zijn overgenomen uit het bestuurlijk beslisdocument.
- [2] Er zijn vakken in het voortgezet onderwijs die geen bevoegdheid kennen; in een latere fase zullen die in dit kader aan bod komen.
- [3] De vakvereniging kan ten aanzien van de genoemde professionaliseringsactiviteiten zelf nog aanvullende eisen formuleren.

PERSBERICHT / JONGE TECHNISCHE WERKNEMERS VOOR DE KLAS

Project 'Ambassadeurs van de Techniek' van start

Eindhoven, vrijdag 20 november 2009

Techniek is uitdagend, afwisselend en er is veel goedbetaald werk in te vinden. Dat is de belangrijkste boodschap van de Ambassadeurs van de Techniek die vanaf vrijdag 20 november verschillende scholen in Nederland afgaan. De ambassadeurs, studenten en jonge werknemers uit de technische sector, bezoeken vanaf die dag leerlingen van vmbo tot vwo om te vertellen over hun eigen ervaringen. Met als doel de jongeren te interesseren voor een technische studie en een technisch beroep. De aftrap van het project vindt plaats op het Eckart Pleincollege in Eindhoven. Reden voor het initiatief: een tekort van tienduizenden technici in de komende jaren. 'Ambassadeurs van de Techniek' is een initiatief van *TechniekTalent.nu* (www.techniektalent.nu), het landelijke samenwerkingsverband van 31 organisaties uit de technische sector. *TechniekTalent.nu* repre-

senteert meer dan 100.000 ondernemingen uit de installatie- en electrotechniek, metalectro, metaalbewerking, carrosserie, motorvoertuigen, isolatietechniek en goud & zilver.

Projectleider Marieke Mulder: 'Veel jongeren realiseren zich niet hoe belangrijk techniek is voor onze samenleving. Maar je kunt het zo gek niet bedenken of er zit een brok techniek achter. Van je sportschoenen tot aan je mobieltje. Onze jonge ambassadeurs zijn zelf werkzaam in de techniek en kunnen er enthousiast over vertellen. We hopen dat scholieren daardoor ook gaan nadenken over een studie of baan in de technische sector.'

Die interesse in een technische studie en loopbaan is hard nodig, omdat de komende jaren door de vergrijzing in het technisch bedrijfsleven een tekort van tienduizenden vakmensen dreigt te ontstaan. Ambassadeur Wouter Meindertsma (24),

zelf werkzaam bij TNO: 'Van de hightech industrie tot het ambachtelijk handwerk: er liggen allerlei mogelijkheden. In de energie-sector, de ruimtevaart, de auto-industrie, de infrastructuur en noem maar op. Zelf doe ik onderzoek naar nieuwe vormen van groene energie, bijvoorbeeld hoeveel energie turbines in rivieren kunnen opwekken. Dat is ontzettend interessant en ik doe zo meteen wat goeds voor het milieu.' Uiteindelijk hopen de Ambassadeurs van de Techniek scholieren een steuntje in de rug te bieden bij het kiezen van een vervolgopleiding. Het project gaat officieel van start in twee havo-4 klassen van het Eckart Pleincollege in Eindhoven.

Info

Website: www.techniektalent.nu
Email-adres: info@techniektalent.nu
Adres: Korenmolenlaan 4, 3447 GG Woerden;
telefoon: 0348 437309

Jaarvergadering/studied

Bestuur



Plenair



Nieuwe leden



Markt



Workshops



Fotografie: Metha Kamminga

Getallen

[Frits Göbel]

Op verzoek van een inzender krijgt u weer eens een paar opgaven over getallen en wel gehele getallen groter dan 0, ofwel natuurlijke getallen.

Het is bekend dat slechts 0% van de getallen te schrijven is als som van twee kwadraten (van gehele getallen). Zelfs met drie kwadraten worden niet alle getallen bestreken: de 8-vouden+7 (en vele andere getallen) vereisen vier kwadraten.

Als we niet de som maar het *verschil* van twee kwadraten nemen, wordt opeens 75% van de getallen bestreken. Dat min-teken maakt duidelijk een groot verschil. Je kunt je afvragen wat er gebeurt als je aan dit verschil een extra term toevoegt. Worden dan wél alle getallen bestreken?

Opgave 1

Laat zien dat elk getal n te schrijven is als:

$$n = x^2 + y^2 - z^2$$

(Het is misschien even wennen voor sommigen, maar ook de letters x , y en z stellen hier natuurlijke getallen voor!)

Als u de opgave tot een goed einde hebt gebracht, hebt u misschien gemerkt dat het resultaat ook nog geldt als de waarden van x tot een kleine verzameling worden beperkt. Kortom, het is verleidelijk om opgave 1 moeilijker te maken, bijvoorbeeld door de exponenten te vervangen door hogere. Met andere woorden, is ieder getal n te schrijven als $n = x^r + y^s - z^t$?

In deze algemene vorm is het probleem onopgelost. Maar er zijn diverse tripels (r, s, t) waarvoor de vraag kan worden beantwoord, hetzij bevestigend, hetzij ontkennend.

Opgave 2

Bepaal tripels (r, s, t) met r, s en $t > 1$, en minstens één van de drie exponenten groter dan 2, waarvoor het antwoord 'Ja' is.

Opgave 3

Bepaal tripels (r, s, t) met r, s en $t > 1$ waarvoor het antwoord 'Nee' is.

Bij beide opgaven voelt u zich hopelijk uitgedaagd om zo veel mogelijk tripels te vinden. En als u tot bepaalde vermoedens komt, wil ik die ook wel weten.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@uws.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.

Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.

De deadline is 9 maart 2010.

Veel plezier!

Doorsneden

Er waren 21 inzenders onder wie twee nieuwe: Anneke Grünefeld en Gert van Steeg. Hartelijk welkom!

Opgave 1 – We komen de volgende Platonische en Archimedische lichamen tegen: viervlak, afgeknut viervlak, achthoek, afgeknut viervlak, viervlak. Ik heb dit opgelost door uit te gaan van een stangenmodel van de hyperkubus. De doorsneden met onze ruimte zijn dan steeds puntverzamelingen. Met de symmetrie en de topologie van de hyperkubus is het niet zo moeilijk om je voor te stellen hoe die verzamelingen er uit moeten zien. De convexe omhulsels daarvan zijn dan de diverse doorsneden.

Jan Verbakel verblijdde mij met een schijfje waarop hij het hele gebeuren heeft vastgelegd! Verschillende anderen maakten fraaie tekeningen bij hun oplossing. Harm Bakker, Gerhard Riphagen en Lieke de Rooij gaven een analytische oplossing, waarna een tekenprogramma heel nauwkeurige figuren kon leveren.

Opgave 2 – Een mogelijkheid voor de gevraagde vergelijking is:

$$4R^2\left(\sin\frac{x}{2R}\right)^2 + y^2 = r^2$$

Ik vind deze wel mooi omdat de formule duidelijk aangeeft waar het verschil ligt met de ellips. Maar er waren ook andere versies en ik ben leuk bezig geweest om die te herleiden tot de mijne!

Opgave 3 is in principe de eenvoudigste.

Het was voor sommige inzenders niet duidelijk wat er moest worden geteld: standen van de vierkanten (dat was de bedoeling) of ribbelengten.

Voor het blok van $4 \times 6 \times 7$ is het antwoord 6 resp. 2. Alleen die standen van het snijvlak komen in aanmerking die evenwijdig zijn met een ribbe van het blok. (Alleen Wobien Doyer en Harm Bakker bewezen dit.) Het is dan voldoende om de snijlijnen van het vlak met een zijvlak van het blok te bekijken. De ribbe 7 van het vierkant is een lijn door het middelpunt van het zijvlak van 4 bij 6. Hiervoor zijn 4 mogelijkheden. Deze lijnen liggen twee aan twee heel dicht bij elkaar en het is misschien wel een leuk sommetje om die piepkleine hoek uit te rekenen. De ribbe 6 zit in het zijvlak van 4 bij 7, en daarvoor zijn 2 mogelijkheden. Totaal dus 6.

Voor het blok van $3 \times 6 \times 7$ zijn er slechts 2 mogelijkheden in totaal en slechts 1 voor het aantal mogelijke ribben.

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit.

H. Klein 508
L. v.d. Raadt 492
W. Doyer 467
T. Kool 380
J. Hanenberg 375
N. Wensink 322
H. Linders 319
H. Bakker 298
W. v.d. Camp 282
K. Verhoeven 257
K. v.d. Straaten 247
M. Woldinga 234

De complete ladder staat op de website van *Euclides* (www.nvww.nl/euclides.html).

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen

24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en Wiskunde
 28. Voorspellen met Modellen
 29. Getallenbrouwerij
 30. Passen en Meten met Cirkels
- Zie verder ook www.nvww.nl/zebrareeks.html en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvww.nl/lustrumboek2.html
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvww.nl/Publicaties2.html

Voor overige internet-adressen zie www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie www.wiskundeonderwijs.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvww.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	30 maart 2010	2 feb 2010
6	18 mei 2010	23 mrt 2010
7	6 juli 2010	11 mei 2010

wo. 11 en do. 12 februari, Utrecht

Expositie: Onderwijs & ICT
Organisatie VNU Exhibitions

1 maart t/m 31 maart (via internet)

Webklas wiskunde: Riemann-hypothese
Organisatie UvA

woensdag 3 maart, Utrecht

maandag 8 maart, Eindhoven

donderdag 18 maart, Zwolle

Workshop: Aansluitonderwijs wiskunde
Organisatie SURFacademy

maandag 15 maart, Utrecht

Studiemiddag: De werking van de hersenen voor wiskunde
Organisatie APS

donderdag 18 maart, op de scholen

Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie Stichting Kangoeroe

do. 18 en vr. 19 maart, Noordwijkerhout

Nationale Rekendagen
Organisatie FIsme

vrijdag 26 maart, regionaal

2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie Stichting NWO

vrijdag 9 april, Utrecht

Conferentie aansluiting mbo-hbo
Organisatie Werkgroep-HBO van de NVvW

woensdag 21 april, op de basisscholen

Grote Rekendag
Organisatie FIsme

do. 22 en vr. 23 april, Utrecht

46e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG
Zie ook pag. 115 in Euclides 85-3.

zaterdag 24 april, Utrecht

HKRWO-symposium XVI: Bloed, zweet en tranen
Organisatie HKRWO

ma. 17 mei t/m wo. 2 juni, op de scholen

Centrale examens
Organisatie CvE



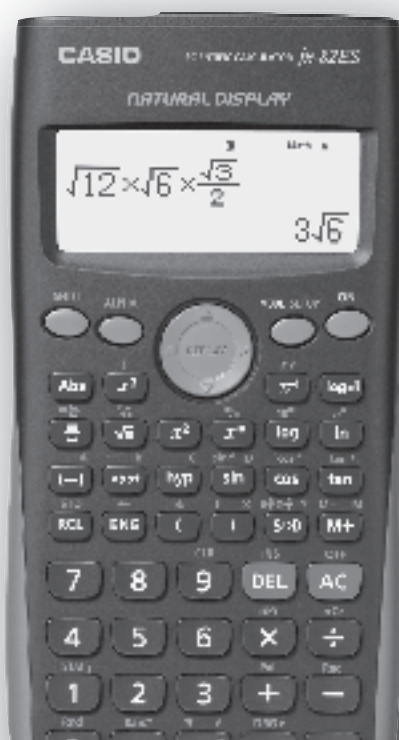
CASIO FX-9860GII SD

Snelste grafische rekenmachine

Comfortabel: de grafische rekenmachine FX-9860GII SD met Natural tekstboek display, backlight voor de donkere momenten, spreadsheet, uitwisseling via de PC en natuurlijk een SD-kaartslot.



3 jaar
garantie



CASIO FX-82ES

Met tekstboek display

De technisch- wetenschappelijke zakrekenmachine FX-82ES van CASIO zorgt voor overzicht: Op de Natural Textbook Display worden o.a. breuken en wortels weergegeven zoals in het leerboek.



Moderne wiskundedag 2010

Met onder andere werkgroepen over:

- Rekenen
- Aansluiting met het Basisonderwijs
- Examen voorbereiding
- Digitale algebra
- Digitale schoolborden
- Dyscalculie
- Practicum Geogebra
- Projecten

MODERNE WISKUNDE



Noordhoff Uitgevers

**Moderne wiskundedag
11 maart 2010 in De Reehorst te Ede**

U bent van harte welkom, ook als u niet met Moderne wiskunde werkt.

Meldt u nu aan op www.modernewiskunde.noordhoff.nl