

E U C L I D E S

v a k b l a d v o o r d e w i s k u n d e l e r a a r

april

09

nr

6

jaargang 84

Digitaal schoolbord

Op bezoek bij...

Diophantische
vergelijkingen

Euclides gearchiveerd

Examenbesprekingen
2009

Conferentie vmbo
& onderbouw



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

april

09

nr 6

jaargang 84

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch

Klaske Blom, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Gert de Kleuver, voorzitter

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Marjanne de Nijs

Joke Verbeek

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Klaske Blom,

Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovenensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 57,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 28,00
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Niet-leden: € 55,00

Instituten en scholen: € 140,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:

t.a.v. Annemieke Boere

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: a.boere@dekleuver.nl



Archief

Bewaart u eigenlijk uw oude *Euclides*-nummers? En bewaart u ze dan allemaal of alleen bijzondere afleveringen of slechts de lopende jaargang of gewoon helemaal niets? Voor iedereen die ooit 'iets' terugzocht en het niet meer in eigen beheer kon vinden, doet het me deugd te kunnen schrijven dat sinds kort (bijna) alle oude nummers van *Euclides* te vinden zijn in de Koninklijke Bibliotheek in Den Haag. Er wordt al 84 jaargangen lang geschreven: door docenten, door opleiders, door hoogleraren, door didactici. Het is bijzonder fijn om te weten dat (bijna) elk artikel dat ooit gepubliceerd is in *Euclides*, terug te vinden is. Gert de Kleuver beschrijft het tot stand komen van dit archief in het artikel 'Euclides in een archief'.

In mijn vorige 'Kort Vooraf' heb ik geschreven dat we als redactie ons best doen om voor alle lezers interessante artikelen te publiceren. Ik hoop dan ook dat er weer genoeg van uw gading bij is in het spectrum van een fotoreportage van de 7e Wiskundeconferentie tot het wiskundige 'Klassikaal' van Dick Klingens.

Ontwikkelingen en nieuws

Er zit weer vaart in de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs: staatssecretaris Van Bijsterveldt heeft half maart ingestemd met de plannen van cTWO voor de nieuwe programma's in de Tweede Fase waardoor de pilotscholen volgend schooljaar echt aan de slag kunnen en de ontwikkelcommissies hun werk, dat gestagneerd was tijdens de impasse, weer hebben kunnen hervatten. Verder heeft cTWO, in februari reeds, een *Trajectenboek* uitgebracht voor de leerjaren 1 tot en met 3. In dit boek vindt u per leerjaar en per leerlijn een overzicht van onderwerpen die aan bod kunnen en moeten komen. Daaruit volgt dan als vanzelf welke voorkennis men per examenprogramma mag verwachten in klas 4. Mocht u geïnteresseerd zijn in verdere details, dan kunt u die vinden op de website van cTWO (www.ctwo.nl). De NVvW is op vele terreinen actief; Metha Kamminga doet een boekje open over haar werk voor de Vereniging en de Werkgroep-HBO. U vindt haar bijdrage op de Verenigingspagina's. Een nieuwe werkgroep van de NVvW is de werkgroep Reken VOort, een project van de NVvW, gestart met middelen van OCW (zie www.nvww.nl onder Werkgroepen). Doel van deze werkgroep is het ontwikkelen van rekenprogramma's voor vmbo-3/4 en havo-4/5 en dan met name voor die groepen leerlingen die geen wiskunde gekozen hebben, maar wel een vervolgopleiding gaan doen waarin basale rekenvaardigheden niet alleen handig, maar ook noodzakelijk zijn. Je vraagt je toch af het een verstandige keuze is geweest om wiskunde niet verplicht te stellen en niet als ingangseis te hanteren bij bepaalde vervolgopleidingen.

Verder in dit nummer

Onder de titel 'Verplicht of niet verplicht, dat was de kwestie' wijdt Harm Jan Smid zijn column aan de verhitte discussies die in de jaren tachtig gevoerd werden over het verplichtend karakter van wiskunde voor iedereen. Misschien zouden we de argumenten uit vroeger tijden nog eens moeten bestuderen, om de bekende valkuilen te vermijden.

Uiteraard zijn onze andere vaste columnisten, Frits Göbel en Ton Lecluse, ook weer van de partij. Dat er gepuzzeld wordt, blijkt uit de inzendingen van diverse lezers. Maar hoe zit het met de oproepen die Ton regelmatig doet: 'Niet spieken onder de streep, maar eerst zelf proberen'. Doet u het ook echt? En hoe gaat het u af? Lastig soms hè, maar zo leuk die meetkunde!

Van de hand van twee van onze zuiderburen, Lisette Motmans en Roger Mercken, is het artikel 'Van het getal e tot continue verdiscontering in het waarderingsmodel van financiële forwards'. Mocht u in deze tijden van recessie willen aansluiten bij de actualiteit in uw lessen, dan biedt dit misschien een goede handreiking. Peter Vaandrager beschrijft welke nieuwste snufjes hij op de onderwijsvakbeurs, de NOT 2009, is tegengekomen: mooie nieuwe kieskastjes bij het ACTIVboard. Steven Wepster gunt u een blik op het nieuwe materiaal over Diophantische vergelijkingen dat is ontwikkeld als module voor wiskunde D. Hoe de Slag bij Hastings in een wiskundemodule terecht kwam...

In dit nummer vindt u ook een verslag van een gesprek dat ik voerde met twee docenten van de vakgroep wiskunde van Focus uit Harderwijk. Twee bevlogen collega's met hart voor vmbo-leerlingen vertellen over hun drijfveren in het onderwijs en over het verrassende lesmateriaal dat ze gebruiken: duimstok en tijdschrift 'Boerderij'. In de komende nummers zult u regelmatig interviews vinden met wiskundecollega's van diverse scholen; de redactieleden gaan op pad om verhalen en ervaringen van collega's op te tekenen. Mocht u het leuk vinden om ook met collega's van uw vakgroep geïnterviewd te worden, dan horen we dat graag (redactie-euclides@nvww.nl).

Ik wens u weer veel leesplezier.

205	Kort vooraf [Klaske Blom]
206	Digitaal schoolbord & NOT [Peter Vaandrager]
208	Wiskundeonderwijs in de dagelijkse praktijk [Klaske Blom]
212	Diophantische vergelijkingen [Steven Wepster]
214	Euclides in een archief [Gert de Kleuver]
215	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
217	De zevende wiskundeconferentie [Gert de Kleuver]
221	Van het getal e tot continue verdiscontering [Lisette Motmans, Roger Mercken]
226	Mededeling
228	Het Geheugen [Harm Jan Smid]
231	Verschenen / Mededeling
232	Klassikaal [Dick Klingens]
234	De belevenissen van een bestuurslid met interessante klussen [Metha Kamminga]
236	Examenbesprekingen 2009 [Grada Fokkens, Conny Gaykema]
238	Recreatie [Frits Göbel]
240	Servicepagina
240	Examenrooster 2009

Aan dit nummer werkten verder mee:
Christine Verspuij en Martin van Reeuwijk.

Digitaal schoolbord & NOT

[Peter Vaandrager]

Peter Vaandrager bezocht de NOT 2009 en stond een dag in de stand van 'The ACTIVboard people'. De NOT is de tweejaarlijkse onderwijsvakbeurs voor onderwijsprofessionals. De beursdagen stonden bol van leuke nieuwtjes, prijsuitreikingen en innovaties (zie ook www.not-online.nl). Peter laat u onder andere kennis maken met de nieuwste kieskastjes.

Een dag NOT

Het is dinsdag 27 januari. In de trein zit ik tussen heel veel onderwijsmensen die de NOT bezocht hebben. Ze zijn makkelijk te herkennen: heel veel gratis tassen van exposanten, gratis posters, gratis pennen, gratis hebbedingetjes die je allemaal lekker mee neemt!

Lopend over de NOT zie je in bijna elke stand wel een digitaal schoolbord. En op de meeste scholen hebben digitale schoolborden al hun intree gedaan of zullen dat waarschijnlijk binnenkort wel doen. Hoe kijk jij tegen zo'n digitaal schoolbord aan? Hoor jij bij die categorie die niet kan wachten totdat je met zo'n bord kan werken. Of heb je niets met computers en denk je dan ook eigenlijk niets te kunnen met een digitaal schoolbord of zie je op tegen al dat extra werk die de invoering van een digitaal schoolbord waarschijnlijk met zich meebrengt. Bij welke categorie collega je ook hoort, zorg er voor dat je, als een digitaal bord op school geplaatst is, geschoold wordt. Mijn ervaring als trainer is dat op trainingen vaak bezuinigd wordt. Ten onrechte, want het is toch een behoorlijke investering en zonder scholing worden de meeste borden niet optimaal gebruikt.

Ervaringen met het digitaal schoolbord

Wat zijn mijn eigen ervaringen? In het begin is het leuk, vinden leerlingen het fantastisch. Wat vinden dan zo leuk? Het schrijven met de speciale pen op zo'n bord (*zie figuur 1*). Tip bij het zoeken naar het juiste bord: vraag naar de pen; zit er een batterij in, moet je de pen elke dag opladen of is het een pen zonder batterij.

Als schrijven op het bord het enige is dat je met een digitaal schoolbord doet, dan kun je je afvragen of zo'n investering wel de moeite waard is. Tijdens een basistraining leer je al meer over het bord dan alleen het schrijven. In een goede basistraining zit mijns inziens, naast het schrijven op het bord, het openen



figuur 1 De productregel op het bord

en opslaan van je werk, het halen van plaatjes van bijvoorbeeld internet en het maken van een link naar internet bij een plaatje of een tekst. Bij dat laatste denk ik aan een link naar een filmpje dat je bij wiskunde kunt gebruiken of naar een applet van het Freudenthal Instituut of naar de website waar animaties staan, horende bij je methode. Op onze school gebruiken we *Moderne wiskunde* en op de site van *Schoolwise* staan animaties met aanwijzingen voor het stapsgewijs oplossen van bepaalde vraagstukken. Dit vind ik een hele mooie ondersteuning van je uitleg in de les. En dan zijn er nog veel meer mogelijkheden: je kunt een actie invoeren waardoor je op een internetsite komt of een actie waarmee je een ander document kunt openen. Verder kom je gereedschappen tegen die je vooral bij wiskunde kunt gebruiken (ruitjesbord, passer, liniaal, gradenboog). Sommige collega's kunnen dat zelf uitzoeken, voor anderen is het goed om zich daarin te laten scholen.

Oude en nieuwe kieskastjes

Was er nog wat nieuws te zien op de NOT? Het enige dat ik gezien heb en waarmee ik ook gewerkt heb, zijn de nieuwe kieskastjes van het ACTIVboard, de zogenoemde ACTIV expressions (*zie figuur 2*). Dat zijn kieskastjes waarmee je meerdere type vragen kunt stellen aan je leerlingen. Op onze school hebben we een koffer met 32 'oude' kieskastjes waarmee je alleen meerkeuzevragen kunt stellen waarbij één antwoord goed is. Op zich is er niets mis mee met die kastjes, maar nu die nieuwe er zijn... Hoe werken die kastjes? Het zijn draadloze kastjes die een radiosignaal uitzenden. Het ACTIVboard, of een speciale *hub*, is de ontvanger van die signalen. Hoe maak je de vragen? Er hoort een programma bij ACTIV expression waarmee je de vragen kunt maken. Als de nieuwste versie van het programma, dat bij het ACTIVboard hoort, uitkomt, zit dat vragen maken er automatisch bij. En wat voor vragen kun je maken? Dat zijn: goed/fout-vragen,





figuur 2 ACTIVE expression

meerkeuzevragen (*zie figuur 3*) waarbij je kunt aangeven hoeveel antwoorden juist zijn (dat kan dus meer dan één zijn), in de goede volgorde zetten, een woord of een tekst als antwoord, een getal als antwoord en meningsvragen op de schaal van Likert (*zie figuur 4*).

Voorbeelden van verschillende typen vragen zouden kunnen zijn:

Stelling, waar of niet waar: 'Elke rechthoek is een vierkant'.

Meerkeuzevraag met meerdere juiste antwoorden: 'Welke vergelijkingen hebben dezelfde grafiek?'

In goede volgorde zetten: 'Orden de volgende breuken van klein naar groot'.

Woord invoeren: 'Wat is de naam van de grafiek die is afgebeeld?'
Getal als antwoord: 'Bereken de oppervlakte van onderstaande figuur'.

Deze kieskastjes geven dus weer meer mogelijkheden en vragen, aan de andere kant ook weer een herbezinning op je didactiek. Hoe ga je die kastjes gebruiken en waarom gebruik je de ene keer dat vraagtype en een andere keer een ander type, terwijl misschien het antwoord hetzelfde is? Wat vinden leerlingen van de kieskastjes?

Ik gebruik ze zelf wel, maar niet elke week. Er zijn klassen die expliciet vragen: 'Meneer, wanneer gaan we de kieskastjes weer gebruiken?'

Vinden alle leerlingen het leuk? Ja, de meeste leerlingen vinden het leuk om hier mee te werken. Sommige leerlingen, denk aan dyslectische leerlingen, hebben soms meer tijd nodig. Je kunt per vraag namelijk aangeven binnen hoe veel seconden de vraag beantwoord moet zijn. Als je dat niet doet, zijn sommige leerlingen allang klaar en zitten te wachten op die 'slome' leerlingen, hetgeen tot irritatie kan leiden. Een ander voor leerlingen spannend moment is het moment waar alle resultaten op het bord te zien zijn. Natuurlijk is het niet leuk als bijna al je antwoorden rood en dus fout zijn. Vooraf heb ik in mijn

figuur 4 ACTIVE vote



figuur 3 Een toets

groepen dan ook duidelijk gemaakt dat de vragen diagnostisch bedoeld zijn, en dus niet voor een cijfer: 'Fouten maken mag en daar kun je veel van leren. Als je steeds de antwoorden van je buurman invult, heb je er zelf niets aan.'

Als je dit systeem wilt gebruiken voor een toets die becijferd gaat worden, dan vraagt dat om een strakke hand en een goed overzicht. Leerlingen kunnen achter je rug om even snel hun kieskastjes uitwisselen. Of 'per ongeluk' het antwoord hardop zeggen, al dan niet het juiste antwoord. Dus tot nu toe gebruik ik de kieskastjes alleen diagnostisch en valt er veel te leren voor de leerlingen, en soms ook voor mij als docent.

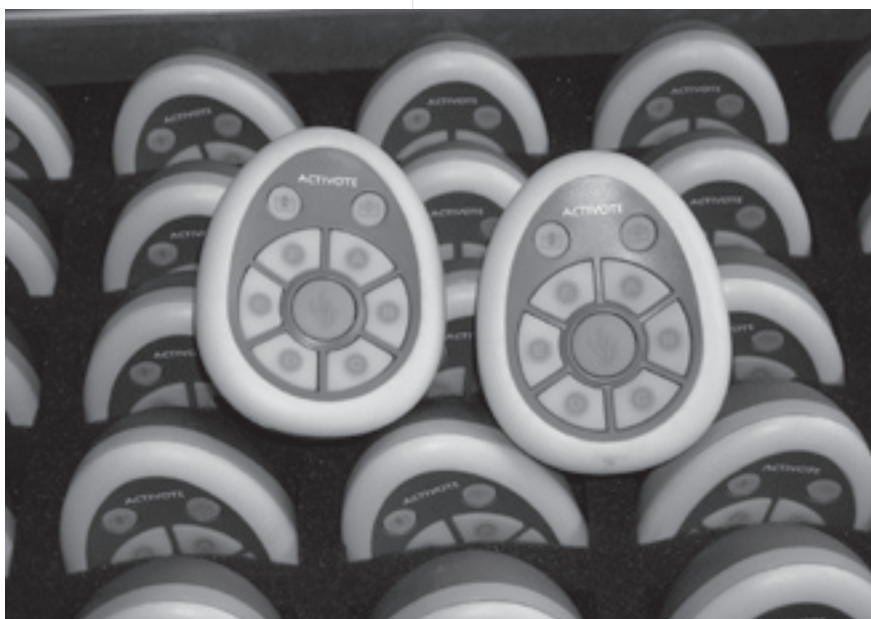
Tot slot

Een dag in de stand van 'The ACTIVboard people' was boeiend: gesprekken met collega's over het gebruik van zo'n bord in je les, het laten zien hoe je kieskastjes kunt gebruiken. Is het niet altijd leuk om met collega's over (wiskunde)onderwijs te praten, en doen we dat niet te weinig?

Over de auteur

Peter Vaandrager is leraar wiskunde aan het CGS Liudger in Drachten en trainer ACTIVboard.

E-mailadres: peter@tab63a.nl



Wiskundeonderwijs in de dagelijkse praktijk

OP BEZOEK BIJ FOCUS, CHR. VMBO IN HARDERWIJK

[Klaske Blom]

De vakgroep wiskunde van Focus

De sectie bestaat uit 5 personen; ik spreek met twee van hen: Jan Willem Schutter en Cor Aarssen, beiden door de wol geverfd met 30 jaar ervaring in het onderwijs. Jan Willem gaf naast wiskunde ook geschiedenis, maar helaas heeft hij vanwege zijn werkzaamheden als decaan en examensecretaris daarvoor geen tijd meer. Cor is wiskundedocent en ook docent natuurkunde en techniek en is een belangrijk voortrekker van het 'Anders Leren'-traject binnen Focus. De overige sectieleden zijn jong en enthousiast. Vakgroepvergaderingen kennen ze nauwelijks, alles gebeurt in de wandelgangen en via de mail. Sinds dit schooljaar werken ze voor het eerst met een voortrekker per leerjaar en dat bevalt uitstekend. In de woorden van Cor en Jan Willem: *Ons onderlinge samenwerken is niet zo gestructureerd, maar ondertussen gebeurt er wel veel samen omdat de wil er is.*

Profiel van de school

Focus heeft de laatste jaren ingezet op vernieuwing van het onderwijs en van de organisatie. Ik noem vier, voor Focus kenmerkende, zaken:

1. Anders leren

Een deel van de leerlingen zit in een Anders Leren-traject (AL) en een deel in een regulier traject. In het eerste en tweede leerjaar zijn er aparte AL-klassen, in het derde en vierde leerjaar zitten de leerlingen gemengd.

Cor licht dit toe: *Voor een reguliere les is eigenlijk door de docent alles per les uitgeschreven. In AL krijgt een leerling te horen aan welk onderwerp gewerkt moet worden en wanneer de toets gepland is. De leerlingen zijn vrij in het bepalen van hun eigen route om de eindstreep te halen. Ze werken in groepjes van vier, hebben een vast lokaal en per groepje de beschikking over een computer.*



Jan Willem Schutter



Cor Aarssen

2. Inloopuren

Elke morgen, voordat de lessen beginnen, mogen leerlingen gedurende een half uur langs komen bij vakken naar hun keuze. De vakdocenten zijn over de week verdeeld en houden een soort spreekuur, waar je een vraag kunt stellen.

3. Huiswerkbegeleiding

Elke dag kunnen leerlingen aan het eind van de dag intekenen voor huiswerkbegeleiding, voor een periode van zeven weken.

Er is geen mogelijkheid tot het stellen van vragen, maar er is wel rust en er kan gewerkt worden.

De reden dat de school dit organiseert, is dat veel leerlingen thuis niet aan werken toekomen. Er zit een docent bij (gefaciliteerd in taakuren) die de rust bewaakt en de absentie controleert; als een leerling intekent, is hij verplicht om een aantal weken te komen.

4. Open leercentrum

Focus heeft een open leercentrum, een ruimte waar leerlingen zelf kunnen werken achter computers, met slechts cameratoezicht (kijkt u ook eens op www.focusharderwijk.nl).

De wiskundedocent aan het werk

Wiskunde in het AL: belangrijke begrippen hier zijn 'eigen verantwoordelijkheid' en 'verankeren'.

Cor en Jan Willem vinden het juist wat betreft het vak wiskunde prettig om in het AL te werken: *Bij wiskunde zijn de niveauverschillen in de klas altijd groot. En de neiging van ons als docenten is de langzaamste als norm te nemen waardoor de snelste te kort komt. Dat is niet goed. Bij AL kan iedereen op zijn eigen tempo werken en je kan de langzaamste meer tijd geven en de snelle meer uitdagen. Je kan meer tijd investeren daar waar het nodig is.*

Cor: *Ik begin de les alleen maar met een klassikale uitleg als er een vraag van een leerling is; zo niet, dan gaat iedereen zelf aan het werk. Als ik daarna al rondlopend in de gaten hebt dat overal hetzelfde probleem speelt, dan volgt er wel even iets klassikaal. Ik leg alleen uit op verzoek. Ik spreek leerlingen wel aan op hun tempo en op de manier waarop ze bezig zijn.*

"En succes met de voorbereidingen van de repetitie jongens."
"Ja meneer, we gaan de 'Boerderij' lezen."

Beiden constateren ze dat leerlingen die vanaf klas 1 in AL gezeten hebben, makkelijker met hun verantwoordelijkheid om gaan dan degenen die er later instromen: *Leerlingen die gewend zijn om voor zichzelf te werken, redden zich goed. Leerlingen die dat nog niet gewend zijn, kunnen soms de vrijheid in de hogere klassen niet aan. Het allerbelangrijkste is daarom dat leerlingen steeds weer gewezen worden op het feit dat ze hier voor zichzelf zitten en voor zichzelf moeten werken, willen ze verder komen.*

“Wiskunde is voor luie mensen: het is een taal met weinig woorden.”

Cor heeft een nieuwe lesopzet bedacht voor de AL-leerlingen: op school maken ze tijdens de les opgaven en thuis moeten ze hun werk nakijken. Via de ELO kunnen ze, op een beperkt aantal dagen, antwoordbladen vinden en moeten dan dus nakijken. De docent kan zien of ze de site bezocht hebben en weet dus of ze hun werk gecontroleerd hebben. Als ze dat niet doen, spreekt hij ze daar op aan. Cor vindt namelijk dat nakijken tijdens de les een verkeerde besteding is van de contacttijd. Nakijken kunnen ze ook zonder hem en vragen die opkomen naar aanleiding van de fouten in het gemaakte werk, kunnen ze later weer in de les stellen. Cor en Jan Willem ervaren het beiden als een mooi alternatief voor het gefrustreerd thuis vastlopen bij te moeilijke opgaven. Een moeilijkheid blijft dat leerlingen slecht ‘verankeren’, het favoriete begrip van Jan Willem. Hij zegt: *Leerlingen verankeren slecht. Ze kijken wel na, maar doen er niet zoveel mee. En toch ga ik echt die schriftjes niet meer nakijken. Als leerlingen niet aan het werk gaan, moeten ze maar op de blaren zitten. Het is hun eigen verantwoordelijkheid. Ik blijf leerlingen wel aanspreken maar ga ze niet dwingen. Je moet leerlingen de indruk geven dat ze zelf verantwoordelijk zijn, en er ondertussen wel achteraan blijven zitten. Soms duurt het lang voordat leerlingen hun verantwoordelijkheid pakken. Maar als ze het doen en ze zijn er doorheen, dan heb je ze ook. Helaas gaat er veel opbouw van verantwoordelijkheid bij leerlingen verloren omdat er te weinig continuïteit is van docenten die gekoppeld zijn aan een groep. Als niet alle collega's mee doen in deze training in verantwoordelijkheid, dan wordt het lastig om de opbouw vast te houden. En daardoor kan het echt te lang duren, en pakt een leerling in T4 zijn studie soms nog niet goed aan. Inmiddels zijn er gelukkig veel jonge collega's bij het team gekomen die graag op de AL-wijze*

willen werken, dus de verwachting is dat het de goede kant op gaat.

En nog iets dat zo belangrijk is bij het aanspreken van leerlingen: ze moeten het gevoel hebben dat ze gekend worden; eerst moet de relatie goed zijn en dan komt het werk vanzelf wel. Je moet hierin dus tijd investeren.

De specialiteiten van het wiskunde-onderwijs op Focus

1. Werken met de methode Netwerk

Netwerk wordt als een prettige methode ervaren, zowel in de reguliere als in de AL-klassen. Vooral in de AL-klassen heb je een methode met een duidelijke lijn en structuur nodig. Netwerk voldoet en is zowel geschikt voor klassikaal onderwijs als om leerlingen zelfstandig mee te laten werken.

2. Rekenvaardigheden

Op het Focus staan de rekenvaardigheden van leerlingen in de aandacht. Omdat leerlingen hun tafels niet kennen, is het volgende bedacht: op de ELO staat een blad met alle getallen van 1 t/m 100 en bij elk getal zijn al zijn delers aangegeven. Leerlingen moeten dit blad uit hun hoofd leren zodat ook de getalherkenning van deze getallen bevorderd wordt. Leerlingen worden geacht hiermee te oefenen zoveel als nodig is en in de klas wordt er niet uitgebreid



aandacht aan besteed. Het komt natuurlijk wel ter sprake bij opgaven als - De oppervlakte is 12, de breedte is 3, wat is de lengte? - opgaven die leerlingen tot verbijstering van Cor en Jan Willem niet zonder rekenmachine kunnen maken: *ze hebben de meest elementaire rekenbewerkingen niet paraat. Natuurlijk kun je niet in de klas zeggen dat je iets niet wilt uitleggen, omdat je ze dan kwijt bent en het verwijt krijgt dat je niet wilt uitleggen. Het is een subtiel spel waarbij je toch moet proberen de leerlingen zelf aan de slag te krijgen.* Leerlingen moeten zich dus zelf voorbereiden op een rekentoets: in november wordt de toets afgenomen in klas 4, in december in klas 3 en in januari in klas 2. Deze toets moet voldoende gemaakt worden; zo niet, dan moet een leerling verplicht herkansen in eigen tijd. De hoop is dat in de toekomst een dergelijke toets alleen in klas 2 nodig is, en dat het daarna een kwestie is van bijhouden.

Cor en Jan Willem vinden het onzinnig om van vmbo-leerlingen te eisen dat ze uit hun hoofd kunnen werken met breuken. Er is nauwelijks een toepassingsgebied te vinden, dus waarom zouden leerlingen geen rekenmachine mogen gebruiken? Cor heeft ooit een prijs uitgelooft voor een leerling die een zinvolle praktische toepassing wist te verzinnen voor het werken met breuken. Er kwam er één: “Hoelang is een half uur plus een kwartier?”

3. Concrete hulpmiddelen: duimstok, systeemplafond, bord, lege melkpakken. Jan Willem gebruikt zijn duimstok te pas en te onpas. Voor het bespreken van veelhoeken, vormen, uitleg over de begrippen oppervlakte en omtrek. Een passer en een duimstok kun je ook gebruiken om hoeken aan te geven. Scherp, recht en stomp kan je voelen: en scherpe hoek doet zeer, een stompe niet. Hij gebruikt ook heel veel troep uit zijn bureaula en zijn omgeving en verder: een kartonnen cirkel om de omtrek van een fietswiel te tekenen; het systeemplafond voor het uitleggen van evenwijdige lijnen.

Cor: *De gelijkbenige driehoek vraagt een bepaald standje met de benen, de gelijkzijdige driehoek gaat nog net, maar als ik verder ga krijg je een spagaatdriehoek en dan moeten ze me overleiden helpen...*

Jan Willem: *Raamkozijnen hebben rechte hoeken. De zijkanen van het bord zijn 1 m² en het binnenbord is 2 m². Verwondering wekken bij leerlingen en visualiseren: rondlopen als een brandweerman die met een*



Praktisch tentamen Wiskunde / Sector economie



De Westerscheldetunnel

Op vrijdag 14 maart 2003 is de Westerscheldetunnel in Zeeland geopend. Deze tunnel is 6,6 km lang en de aanleg heeft 780 miljard euro gekost. Per dag zullen er gemiddeld zo'n 12000 voertuigen door de tunnel rijden. Hier- van is 40% een vrachtwagen, 5% een motor en 55% een personenwagen. Om uit de kosten te komen wordt er tol geheven. Motoren en personenauto's betalen € 4,00 en vrachtauto's betalen € 15,00.

- 1 Bereken hoeveel euro er per dag aan tol ontvangen wordt.
- 2 Bereken hoeveel dat per jaar is.

Men verwacht dat jaarlijks 3,5% van de ontvangsten gebruikt zullen worden voor het onderhoud van de tunnel en voor salariskosten.

- 3 Bereken het jaarlijkse bedrag aan uitgaven.

Eens in de vijf jaar wordt er groot onderhoud gedaan. De kosten hiervan, inclu- sief de salarissen, komen dat jaar overeen met de inkomsten van een jaar tol ontvangen.

- 4 Bereken de inkomsten over een periode van 5 jaar.
- 5 Bereken de uitgaven over een periode van 5 jaar.
- 6 Hoeveel is de "winst" in vijf jaar ?
- 7 Bereken na hoeveel jaar de 780 miljard euro terugverdiend zal zijn.

Natuurlijk kunnen er meer invloeden zijn waardoor de tunnel eerder of later te- rugverdiend is.

- 8 Bedenk een paar invloeden waardoor de tunnel eerder of later terug- verdiend is.
Geef aan of de invloed positief of negatief is.

straal... Door te visualiseren komt een beeld bij wat je zegt, en dat hebben onze leerlingen nodig!

En ook van belang: altijd de actualiteit erbij halen. Narcose in je lijf na een operatie gaat over rekenen met een groeifactor; door de beurskrach ligt procentenrekenen zo voor het oprapen. Je moet regelmatig aansluiten bij de belevingswereld van je leerlingen.

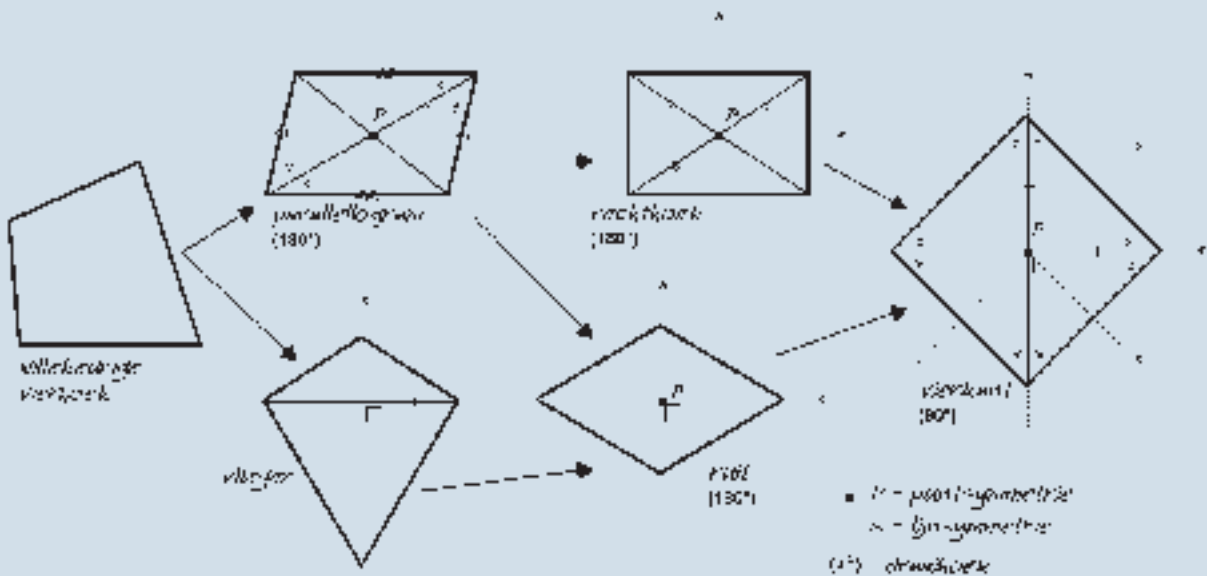
Cor en Jan Willem integreren de actualiteit moeiteloos in hun les: Jan Willem gebruikt geschiedenisfeiten om zijn wiskundige onderwerpen te illustreren en Cor maakt met veel humor toetsopgaven waarin hij materiaal uit krant of tijdschriften verwerkt. Cor vertelt een leuke anekdote: Een tijd geleden verwerkte ik informatie uit een artikel uit de 'Boerderij' in een toets. De running gag werd vanaf toen natuurlijk: "Jongens, succes met het voorbereiden van de repetitie."

"Komt goed meneer, we gaan de 'Boerderij' lezen." Er valt ook veel te vinden op internet, leuke filmpjes, spelletjes van wisweb of kennisnet, en tegenwoordig zetten we alles op de ELO zodat leerlingen er makkelijk bij kunnen.

Cor en Jan Willem ervaren een groot gebrek aan praktische opdrachten wiskunde op internet voor vmbo-leerlingen.

Er wordt veel meer geschreven voor havo/vwo dan voor vmbo. En dat terwijl er zoveel leerlingen op het vmbo zitten en dat juist zij erg gebaat zijn bij praktische opdrachten. Deze verzuchting leidt tot de conclusie dat er dus veel materiaal te vinden moet zijn bij vmbo-docenten zelf, want iedereen moet voor zichzelf het wiel uitvinden. Jan Willem: Misschien is het niveau van ons wiskundeonderwijs wel wat lager dan een flink aantal jaren geleden.

Maar de grote winst is dat we nooit meer de vraag krijgen: "Waarom doen we wiskunde?" Die vraag is weg. Het gaat nu gewoon over de wereld om ons heen.



Vierhoeken-schema
(auteur: Jan Willem Schutter)

Uw leerlingen kunnen best wat hulp gebruiken

...Uook!

De wiskunde op onze site is uitermate geschikt voor het elektronisch schoolbord, voor thuisgebruik en voor maatwerk op papier. Kort gezegd: wiskunde voor de internetgeneratie.

GRATIS! praktische ondersteuning voor elke docent en leerling:

- Theorie
- Uitleg
- Voorbeelden
- Applets

Noteer de url van onze site www.math4all.nl

Kom eens langs en... vergeet de site niet aan uw leerlingen door te geven.

De site is ontwikkeld en wordt onderhouden door ervaren en deskundige liefhebbers van wiskunde.

Wij kunnen óók hulp gebruiken.
Met een pilot, met geld,
met support...

GRATIS!
maar niet goedkoop

Math4all

Cor en Jan Willem zouden het bijzonder plezierig vinden om veel meer van elkaars werk gebruik te kunnen maken. Om een goede start te maken met een uitwisseling van materiaal komt Cor te voorschijn met een praktische opdracht, de Westerscheldetunnel, die hij zelf gemaakt heeft. U mag hem gebruiken, net als het vierhoeken-schema van Jan Willem.

Ik dank Jan Willem en Cor voor hun openhartige inkijk in hun ideeën en werk!

Over de auteur

Klaske Blom is hoofdredacteur van *Euclides* en als wiskundedocent werkzaam op 't Hooghe Landt in Amersfoort.
E-mailadres: klaskeblom@gmail.com

Diophantische vergelijkingen

EEN WISKUNDE D-MODULE VAN DE UNIVERSITEIT UTRECHT

[Steven Wepster]

In de 'Handreiking wiskunde D' staat: 'Wiskunde D vormt een goede voorbereiding op een exacte of technische vervolgopleiding. In de vervolgopleiding zal de leerling profiteren van grotere voorkennis. Al tijdens de middelbare schoolperiode wordt contact met het hoger onderwijs mogelijk gemaakt. Daarvoor zijn het havo-domein 'Wiskunde in technologie' en het vwo-domein 'Wiskunde in wetenschap' ontwikkeld. Deze domeinen worden vormgegeven in nauwe samenwerking met instellingen voor het hoger onderwijs.^[1] Eén van de manieren waarop docenten het domein 'wiskunde in wetenschap' kunnen invullen, is met de module Diophantische vergelijkingen: mogelijkheden en onmogelijkheden. Deze module is ontwikkeld door Gunther Cornelissen en het Bètasteunpunt Utrecht (BEST-Utrecht) in samenwerking met een aantal vwo-docenten. In zekere zin slaat de module een brug tussen de vwo-aanpak van wiskunde, en de manier waarop aan de universiteit met wiskundige kennis wordt omgegaan. De module bestaat uit twee hoofdstukken, 'Mogelijkheden' en 'Onmogelijkheden'. Die twee hebben een nogal verschillend karakter.

Mogelijkheden

Het hoofdstuk 'Mogelijkheden' begint met het vragen naar de oplossingen van een aantal vergelijkingen. Hoewel de vergelijkingen eenvoudig ogen, raken de leerlingen al heel gauw geconfronteerd met de vraag wat er nu eigenlijk precies bedoeld wordt met 'oplossen'. Ze worden uitgedaagd begrippen als variabele en parameter precies te onderzoeken. Als de opgave bijvoorbeeld is om de vergelijking $x^2 - ax + 1 = 0$ op te lossen, dan neemt bijna iedereen voetstoots aan dat x de variabele is waarnaar opgelost dient te worden. Maar dat hoeft natuurlijk niet. Met evenveel recht kunnen we vragen naar de oplossing met a als variabele. Na aanvallende weerstand zien de leerlingen in dat ze bepaalde conventies hanteren (nl. x is altijd de variabele) die ze soms moeten loslaten. De leerlingen die de module hebben uitgetest vonden het uiteindelijk leuk om hierover na te denken. Maar ook met x als variabele zit er nog genoeg smaak aan diezelfde vergelijking. De oplossingen hangen duidelijk af van de parameter a . U kunt makkelijk nagaan dat er twee oplossingen bestaan als $a > 4$, één als $a = 4$, terwijl voor kleinere waarden van a de oplossingen verdwijnen. Althans, dat vertelt u de leerlingen meestal, want in uw achterhoofd houdt u de complexe getallen paraat. Met andere woorden: het is ook belangrijk

om te expliciteren met *wat voor soort* oplossingen we tevreden zijn. In het geval van Diophantische vergelijkingen vragen we naar rationale oplossingen: breuken en gehelen dus. Bij het zoeken naar die rationale oplossingen komt een mengsel van algebra en meetkunde aan bod. Leerlingen gaan aan het werk met het parametriseren van rechte lijnen, cirkels, en ellipsen, en daar komt heel wat formulewerk bij kijken. Er is steeds een tastbaar verband tussen de formule-manipulaties en hun betekenis in een figuur: de leerlingen redeneren tegelijk meetkundig en algebraïsch. Merkwaardige producten en het manipuleren van polynomen zijn hier essentiële ingrediënten. *En passant* werkt dit hoofdstuk dus aan het verbeteren van algebraïsche vaardigheden door deze in te bedden in een meetkundig kader. Er komt ook een aantal echte bewijzen aan bod. Bijvoorbeeld, hoe weet je zeker dat $\sqrt{2}$ niet op één of andere manier als een breuk is te schrijven? Ook bij bewijzen komt het aan op precisie, zowel van de gehanteerde begrippen als van de redeneringen. Dit hoofdstuk besluit met een eindopdracht waarin de Slag bij Hastings (1066), een Pell-vergelijking, vervalsing, en de bevolkingsomvang van Groot-Brittannië een rol spelen (*zie figuur 1*). In de proefflessen

kwam er een echte discussie op gang over de resultaten.

Hier komt, zijdelings, ook al ter sprake wat rekenmachines en computers niet kunnen, als kiempje voor het volgende hoofdstuk.

Onmogelijkheden

De aard van het tweede hoofdstuk is heel anders dan van het eerste. De vraagstelling verschuift van 'vind alle oplossingen' naar 'bepaal of er oplossingen zijn', en tenslotte naar 'kunnen we een computer laten bepalen of er oplossingen zijn'. De rode draad hierbij is dat we stapje voor stapje wiskundig aantonen dat iets niet te berekenen is, ook niet door een computer. Het denken over computer-programma's in termen van een voorschrift dat invoer omzet in uitvoer vereist een abstracter denkniveau dan in het eerste hoofdstuk. Dit niveau blijkt met leerlingen die met de computer zijn opgegroeid nogal makkelijk te bereiken. Zij hebben een goede intuïtieve notie van algoritme, programma, en dergelijke begrippen. Er is veel gelegenheid om met ze te filosoferen over wiskunde, berekenen, bewijs. De stelling van Gödel (nl. dat je in elk consistent systeem waarin je kunt rekenen, een bewering kunt formuleren die wel waar is, maar niet bewijsbaar) ligt dan heel dicht bij: sommige leerlingen filosoferen graag mee over het verschil tussen 'waar' en 'bewijsbaar', en überhaupt over de betekenis van 'waar'.

Toepassingen?

De module laat geen directe toepassingen van de behandelde wiskunde zien. Het gaat er eerder om dat de leerlingen in aanraking komen met een andere wijze van tegen problemen aankijken, en om een gezonde scepsis te ontwikkelen over beweringen uit de cryptografie en de informatica. Zie het citaat van Lex Schrijver: 'Wiskunde is als zuurstof. Als het er is merk je het niet. Als het er niet zou zijn, merk je dat je niet zonder kunt'. De elliptische krommen achter cryptografie, achter codering in mobiele telefoons; het ontstaan van de 'echte' computer uit de

abstracte computer via logica, Turing, Gödel, ... Het is interessant de leerlingen te laten merken dat de wiskunde letterlijk in hun broekzak zit. Ze moeten zich ook afvragen wat die wiskunde daar doet en hoe die daar gekomen is. Hierbij kan ook ter sprake komen dat wiskunde niet altijd wordt ontwikkeld omwille van de toepassing; soms blijkt een 'nutteloos' stuk wiskunde later ineens toch een toepassing te hebben.

Ervaringen

Gunther Cornelissen heeft de module volledig gedoceerd aan het Junior College Utrecht (JCU) in het voorjaar van 2008, en in 2009 doet hij dat opnieuw. In 2008 besloeg de module ca. 21 uur, in blokken van drie uur met een inleveropgave per week. Daarnaast waren er enkele groepsopdrachten. Bijna alle JCU-leerlingen (88%) vonden de module leuk en/of interessant met een duidelijke lijn. Alle leerlingen vonden het voldoende afwisselend en meenden een goede indruk van wiskunde als onderzoeksgebied te hebben gekregen. 83% was tevreden over de aansluiting bij hun voorkennis en 94% had veel nieuws geleerd. Huiswerk kostte doorgaans (en gelukkig) minder dan de verwachte 3 uur per week. Bijna een derde vond het niet altijd duidelijk wat er bij opdrachten werd verwacht. De module is daarnaast bijna volledig gedoceerd als 'masterclass' voor geselecteerde leerlingen aan het Minkema College in Woerden door Mattias Visser en Gunther Cornelissen. Er waren maar 15 contacturen beschikbaar en dat bleek toch wel erg weinig. Er was wekelijks een huiswerkopgave, en op het eind hielden de leerlingen een presentatie aan de hand van een aantal opgaven. Als afsluiting van de module waren de leerlingen te gast bij het departement Wiskunde op de Universiteit Utrecht. De Minkema-leerlingen vonden de stof over het algemeen verbredend, wel lastig, maar niet te moeilijk. Sommigen misten toepassingen, of vonden het te hard gaan door het genoemde gebrek aan tijd. Bijna iedereen was te spreken over het niveau en de huiswerkopgaven. Het bezoek aan de universiteit vonden ze positief, vanwege de afwisseling en omdat ze zo alvast een indruk kregen. Een computerpracticum was op dat moment helaas niet mogelijk en dat was een gemis. Ze vonden het lastig om de module af te sluiten met een presentatie.



Fig: Hunkel op zijn voorhoofd lastig van de wiskunde, bron: wikipedia commons

Aangezien we niet weten over het laatste, kijk dan bijvoorbeeld op

<http://www.beenot.nl/an.diloger/html/tagewm.html>

1.18.3. Nag in de derde eeuw is ook een boekje geschreven over die slag bij Hastings van 14 oktober 1066, die Caen van de Engelsen. Daarbij doet Eng. lissel op van Amiens. We zullen om met behulp van wiskunde zien van de overwinning in dit boekje in twi- el treden. Lees meer:

Harold's mannen stonden als gewoontte dicht oengepakt in 10 rijen van gelijke grootte, en was de Norman die het veldgevecht zocht een fa- lout' te hebben overwonnen. Maar toen Harold's mannen de slag af zochten, namen de Caen'se gevecht als gewoontte overwinning van de typen en stroomden voortwaarts onder de slagkretsen. (Cory, "Mathematics" en "Geometry")

De "Saksen" (Norman, "Harold's mannen") zijn niet overwonnen de "Angelsaksen" die in de 5e eeuw van het Britten Eiland naar Engeland zijn gekomen.

1.18.4. Opdracht. Als het aantal manschappen op een rij in het grote veldgevecht, en het in 4e rijen veldgevecht, was, is dan het verband tussen de rijen?

1.18.5. Historisch Intermezzo. Het is ook gevonden dat $n^2 = 13n^2 = 14 \cdot 101$ een zogenaamde "Pythagoreïsche" getallen naar John Pell (1629-1682). Het is duidelijk of de vergelijking wel zijn naam verdient, want al in het oude Indië boekt hij Brahmagu- na van Bhaskara's eerste boek met een naam afgehangen. Er zijn hier en daar



Fig: John Pell, Jurek'sche school

Van Dijk'sche school

figuur 1 Een pagina uit de module

Rondom de module

De leerlingentekst van de module is te downloaden van de website van het Bètasteunpunt Utrecht (het adres staat hieronder). Er is tevens een docentenhandleiding; daarin staan ook uitwerkingen van alle opdrachten, met commentaar en achtergrondopmerkingen. De docentenhandleiding is te verkrijgen door een e-mail te sturen aan het Bètasteunpunt. Er zijn twee films beschikbaar om de module te ondersteunen. De film 'Julia Robinson and Hilbert's Tenth Problem' (met Nederlandse ondertiteling) is geschikt om een discussie over 'vrouwen in de wiskunde' te starten, en geeft daarnaast ook een kijkje in de 'professionele' wiskunde-wereld. De tweede film is de bekende BBC-documentaire over Andrew Wiles' bewijs van de Laatste Stelling van Fermat. Dvd's met deze films met Nederlandse ondertitels zijn te leen via het Bètasteunpunt van de Universiteit Utrecht. En ook bestaat de mogelijkheid om de module af te sluiten met een bezoek aan de Universiteit Utrecht. Daarbij krijgen de leerlingen een programma bestaande uit een

college, film en/of computerpracticum met Mathematica. Ook hiervoor kan contact worden opgenomen met het Bètasteunpunt. We zijn uitermate benieuwd naar uw ervaringen. U kunt ze mailen naar info@best-utrecht.nl onder vermelding van 'Diophantus-module'.

Noot

- [1] Handreiking schoolexamen wiskunde D havo/vwo, juli 2007, pp. 47-48.

Adressen

Op de website www.best-utrecht.nl (direct: www.best-utrecht.nl/dio.pdf; ca. 6Mb) vindt u de moduletekst. Voor de docentenhandleiding, de films, of verdere informatie, kunt u per e-mail contact opnemen met info@best-utrecht.nl.

Over de auteur

Dr. Steven Wepster is coördinator van Wiskunde D van BEST, het BÈtaSteunpunt Utrecht en docent aan het departement Wiskunde van de Universiteit Utrecht. E-mailadres: s.a.wepster@uu.nl

Euclides in een archief

[Gert de Kleuver]

KB

Sinds enige tijd zijn (bijna) alle oude nummers van *Euclides* te vinden in de Koninklijke Bibliotheek (KB) in Den Haag. Mocht u onderzoek doen, geïnteresseerd zijn in of op zoek zijn naar een bepaald artikel, dan kunt u de daar aanwezige nummer opvragen.

Als redactie van *Euclides* verheugt dit ons bijzonder en we zijn onze vorige hoofdredacteur Marja Bos en het bestuur erkentelijk voor het tot stand brengen hiervan.

Historie

De oudere leden zullen misschien nog wel weten dat *Euclides* niet altijd eigendom van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) is geweest. In 1924 verscheen voor het eerst het 'Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde' (subtitel: 'gewijd aan Onderwijsbelangen') en dit werd na drie jaar een op zichzelf staand blad met een eigen naam: *Euclides*. *Euclides* werd niet alleen gedrukt bij Noordhoff, en later Wolters-Noordhoff (WN), maar het bedrijf had ook de eigendomsrechten. In het septembernummer van 1996 (jaargang 72, nummer 1) werd in een artikel, geschreven door toenmalig hoofdredacteur Bert Zwaneveld, gemeld dat het eigendomsrecht van *Euclides* was overgedragen aan de NVvW.

Jan Maassen schrijft in het boek 'Honderd jaar Wiskundeonderwijs' dat *Euclides* met ingang van de cursus 1993-1994 overgedragen werd aan de vereniging (zie pag. 49). In de twee daaropvolgende jaren verzorgde WN nog wel de productie en distributie. In 1996 werd de relatie met WN helemaal beëindigd en nam de NVvW ook de productie en distributie van *Euclides* voor haar rekening. Jan Maassen maakt duidelijk waarom het noodzakelijk was dat het eigendomsrecht bij de vereniging terecht kwam: 'Er waren meningsverschillen tussen de redactie en het bestuur over beleidszaken.' Gelukkig werd de impasse doorbroken en konden de partijen werken aan een nieuwe structuur met een nieuw redactiestatuut. Toen Kees Hoogland in 1996 Bert Zwaneveld opvolgde als hoofdredacteur, kreeg hij onder andere de taak om de vernieuwde relatie met het bestuur verder uit te bouwen.



De overdracht

Marja Bos werd in 2001 hoofdredacteur en zij heeft zich in haar tijd sterk gemaakt voor de overdracht van het archief van *Euclides* door Wolters-Noordhoff aan de Vereniging. Marja heeft ervoor gezorgd dat in 2002 alle oude jaargangen van *Euclides*, op een paar nummers na, door uitgeverij Wolters-Noordhoff aan onze vereniging geschonken werden. Er was wel een voorwaarde aan gesteld, zoals ik uit de mailwisseling tussen Marja Bos en Reina Wierda van WN kon opmaken. Marja schreef: 'WN is tot mijn grote plezier bereid, alle aanwezige oude nummers kosteloos over te dragen aan de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, mits zorg gedragen zal worden voor een goed beheer.'

Die zomer werd uit het magazijn in Groningen de bijna complete verzameling afleveringen vanaf jaargang 4, keurig verpakt, overgedragen aan Wim Kuipers, toen secretaris van de NVvW. De jaargangen 1, 2, 3 – destijds nog

verschenen als 'Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde' – zijn helaas niet aanwezig, op één nummer na: Danny Beckers heeft het allereerste Bijvoegsel uit 1924 (dus nummer 1 van de 1e jaargang) afgestaan voor de collectie. Wij zijn hier heel blij mee. Danny, bedankt! Het was de bedoeling dat het Noord-Hollands Archief zich over het materiaal zou ontfemen. Toen dit helaas geen doorgang vond, was de NVvW genooddaakt om een andere oplossing te zoeken. Marja Bos heeft ervoor gezorgd dat het beheer van de oude jaargangen op de agenda van het bestuur bleef staan. Zij had de overkomst van de jaargangen geregeld met WN en voelde zich verantwoordelijk voor een goede archivering. Vanuit het bestuur is vervolgens het initiatief genomen met de KB in Den Haag contact te zoeken. Dit leidde uiteindelijk tot het onderbrengen van alle beschikbare nummers in de KB.

Toegankelijkheid

Elk oud nummer van *Euclides* is nu vanuit het magazijn van de Koninklijke Bibliotheek op te vragen. Hiervoor dient u echter wel te beschikken over een KB-jaarpas. Meer informatie over de jaarpas en het aanvragen ervan vindt u op de website van de KB (via de link www.kb.nl/hpd/kbpas/index.html).

Volledigheidshalve vermeld ik dat de KB bezit:

jaargang 1, nummer 1 (1924/1925);
jaargang 4 (1927/28) t/m
jaargang 42 (1966/67);
jaargang 43, nummer 5 (februari 1968) t/m
jaargang 47, nummer 10 (juli 1972);
jaargang 49, nummer 5 (1973) tot heden.

Mocht u nog ontbrekende *Euclides*-nummers in uw bezit hebben en er een goede bestemming voor zoeken, dan houden wij ons bijzonder aanbevolen. We verzoeken u in dat geval contact op te nemen met de secretaris van de NVvW (e-mail: secretaris@nvvw.nl). Het zou prachtig zijn als we de collectie kunnen completeren.

Over de auteur

Gert de Kleuver is redactievoorzitter van *Euclides* en afdelingsleider aan het Ichthus College te Veenendaal.

E-mailadres: g.de.kleuver@gmail.com

Vanuit de oude doos

MCMXXIX

[Ton Lecluse]

Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Construeren

Naar aanleiding van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1929:

De bissectrix van hoek B snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in D , de zijde AC in E .

Bewijs dat $DC^2 = DE \times DB$.

Geef vervolgens aan hoe een driehoek geconstrueerd kan worden als daarvan gegeven is de basis, de tophoek en de bissectrix van de tophoek.

In de opgave wordt met bissectrix wellicht de eerste keer de halve lijn bedoeld, en de tweede keer alleen het deel binnen de driehoek, dus lijnstuk BE .

We maken een tekening (zie *figuur 1*).

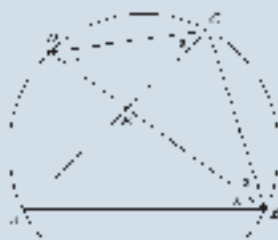


figuur 1

Probeer nu eerst zelf eerst eens te bewijzen dat $DC^2 = DE \times DB$. (Dan pas onder de streep spieken!) Wellicht helpt het dit model te tekenen met een dynamisch computerprogramma.

Gegeven is dat de hoeken bij B aan elkaar gelijk zijn.

En ook is $\angle ABD = \angle ACD$; deze omtrekshoeken staan beide op boog AD (zie *figuur 2*).



figuur 2

De driehoeken DBC en DCE zijn dus gelijkvormig (hb ; beide hebben hoek D en een x -hoek).

Dus geldt $DB : DC = DC : DE$, of:
 $DC^2 = DE \times DB$

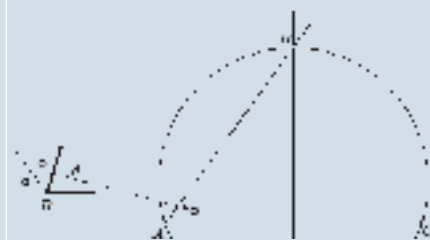
Het tweede deel van de opgave is van een heel ander kaliber.

Vertaald naar de tekening: wanneer je lijnstukken gegeven hebt die gelijk zijn aan AC en BE , en bovendien een kopie van hoek B (de in de opgave bedoelde tophoek) gegeven is, hoe kun je daaruit, met passer en liniaal, driehoek ABC construeren? (*Toelichting.* De klassieke constructie met passer en liniaal houdt in dat je de liniaal alleen mag gebruiken om rechte lijn(stuk)ken te tekenen (dus niet om de lengte te meten) en de passer om cirkels te tekenen en een lengte 'over te brengen' (in computerjargon: 'maat overbrengen').

Nu niet verder lezen, eerst zelf proberen!

In plaats van het tekenen van driehoek ABC alleen kunt u ook proberen de gehele tekening zoals hierboven te construeren. De cirkel ligt vast. U hoeft slechts één mogelijke positie van punt B te tekenen, waarna u de omgeschreven cirkel van driehoek ABC kunt tekenen. Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Een handige keuze is bijvoorbeeld driehoek ABC gelijkbenig te maken. Omdat hoek B gegeven is, zijn dan de basishoeken ook construeerbaar (zie *figuur 3*).



figuur 3

In *figuur 3* zijn het lijnstuk AC en $\angle B = \beta$ gegeven. Hoek A is geconstrueerd waarna het tweede been van die hoek de middelloodlijn van AC snijdt in B . Daarna is de omgeschreven cirkel van driehoek ABC getekend. Hoe gaat u verder? Niet verder lezen, probeer het eerst zelf.

We laten deze cirkel op zijn plaats, en laten punt B hierover bewegen. Hierbij verandert de grootte van omtrekshoek $ABC = \beta$ niet. In **figuur 1** is duidelijk te zien dat de gelijke omtrekshoeken ABD en CBD ook niet in grootte veranderen. Daarbij ligt punt D op het midden van boog AC . Dus kun je punt D erbij tekenen (*zie figuur 4*).



figuur 4

En nu de grote uitdaging: ook een kopie van BE is gegeven. Hoe kunt u die gebruiken om de juiste positie van punt B (op de grote cirkelboog AC) te construeren? Niet verder lezen, eerst zelf proberen. Wanneer u nog een hint wilt hebben, mag u verder lezen.

De eerste vraag in deze opgave stond er natuurlijk niet voor niets. We gaan dus gebruik maken van $DC^2 = DE \times DB$.

Herschrijf dit als:

$$DE \times (DE + EB) = DC^2$$

Wanneer we een lijnstuk kunnen construeren met de lengte van DE , zijn we klaar.

Immers, dan ligt in bovenstaande tekening DC vast.

Het volgende probleem moet dus worden opgelost. Het wordt hier beschreven in algemene termen om het daarna in dit model te kunnen toepassen:

Gegeven twee lijnstukken met lengte a en b . Construeer een lijnstuk met lengte x zó, dat $x(x + a) = b^2$.

Herleid deze vergelijking tot

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 = b^2 + (\frac{1}{2}a)^2, \text{ waaruit u } x$$

meetkundig kunt oplossen met de stelling van Pythagoras in een driehoek met rechthoekszijden b en $\frac{1}{2}a$ (*zie figuur 5*).



figuur 5

Niet verder lezen. Maak nu de gevraagde constructie zelf.

Substitueer in deze hulpconstructie $a = BE$ en $b = CD$ en construeer de lengte $x = DE$. Verleng x met het gegeven lijnstuk met lengte BE en u heeft een lijnstuk met lengte BD .

De cirkel met middelpunt D en straal BD snijdt de omgeschreven cirkel in twee punten die elk als punt B kunnen dienen.

In de slottekening (*zie figuur 6*) is één van de twee oplossingen getekend.



figuur 6

Figuur 6 is gebaseerd op de volgende gegevens:

Lijnstukken AC (midden) en BE (rechtsboven, met midden M) en $\angle B = \beta$ (links).

Tot slot

Wanneer u de constructie uitvoert in een dynamisch tekenpakket, kunt u fraai laten zien bij welke waarde(n) van β , AC en BE de constructie niet mogelijk is.

Wanneer is er precies één oplossing?

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: alecluse@casema.nl

De zevende wiskundeconferentie

VOOR DOCENTEN IN HET VMBO EN ONDERBOUW HAVO/VWO

[Gert de Kleuver]

Goed bezocht

Op maandag 26 januari j.l. werd voor de zevende keer een conferentie gehouden speciaal voor de onderbouw docenten van havo, vwo en het gehele vmbo. Dit jaar was de belangstelling erg groot: er waren 122 inschrijvingen en iedereen kwam! 20 mensen stonden op de wachtlijst. De conferentie werd ook dit jaar in het APS-gebouw te Utrecht gehouden. Martin van Reeuwijk heeft een fotoreportage gemaakt van de dag waardoor we u ook een beknopt beeldverslag kunnen voorleggen. In Utrecht zag ik weer veel deelnemers die ik bijvoorbeeld niet op de jaarvergadering van de NVvW tegenkom. Ik vind het een goede ontwikkeling dat het aanbod van deze wiskundeconferentie van het APS goed aansluit bij de behoefte van onderbouw- en vmbo-docenten.

Het programma

De programmacommissie heeft geprobeerd een gevarieerd programma aan te bieden, natuurlijk wel aansluitend bij de actualiteit. Dat betekent dat er de nodige aandacht voor het rekenonderwijs was. Het programma zag er zo uit dat zowel vmbo- als onderbouw havo/vwo-docenten, echt verschillende doelgroepen, aan hun trekken kwamen.



Toppers

Zoals gebruikelijk haal ik er, heel subjectief, altijd een paar toppers uit. Peter de Wert van Fontys OSO uit Tilburg gaf een mooie presentatie over het doortrekken van de doorlopende rekenlijn vanuit de basisschool naar het voortgezet onderwijs. Dit is speciaal voor de zwakke rekenaars van belang. Hij liet voorbeelden van opdrachten zien binnen drie gebieden: geld, procenten en meten. U raadt het vast al: 'procenten' vinden de leerlingen nog steeds erg lastig. Eric Postma was uitgenodigd om, na een goede lunch, zijn verhaal over het Ritme van Van Gogh te houden. Ik had hem in augustus 2008 ook al gehoord tijdens de vakantiecursus in Eindhoven. Het was een mooi en goed te volgen verhaal voor alle deelnemers.

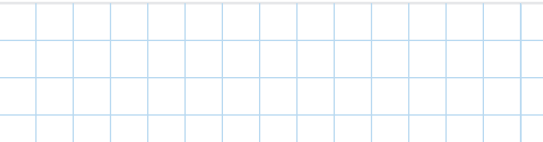
Organisatie



Plenair



Markt



Daarna heb ik een werkgroep gevolgd van Inge Verstraete van het Steunpunt Autisme Noord Holland, die alle deelnemers de opdracht had gegeven hun wiskundeboeken mee te nemen. Er werd gekeken naar de manier waarop kinderen met een stoornis in het autistisch spectrum, zogenaemde ass-kinderen, op opdrachten reageren maar ook hoe zij opdrachten interpreteren. Zij had haar werkgroep 'een som oplossen in water' genoemd. Een mooi voorbeeld om aan te tonen welke problemen een ass-kind heeft met de opdracht: 'het oplossen van een som'. Oplossen doe je toch in water, nietwaar?

Ideeën?

De foto's spreken voor zich en ik hoop echt dat ook volgend jaar weer velen zich inschrijven voor deze conferentie. Als u nog ideeën hebt voor zaken die u graag op de conferentie van volgend jaar zou willen horen, doen en/of meemaken, dan roep ik u op deze aan mij te mailen. Ik zal uw ideeën zeker doorgeven aan de programmacommissie.



Workshopleiders



Deelnemers



Fotografie

Martin van Reeuwijk (APS)

Over de auteur

Gert de Kleuver is redactievoorzitter van *Euclides* en afdelingsleider aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: g.de.kleuver@gmail.com

Van het getal e tot continue verdiscontering

TOEGEPAST IN HET WAARDERINGSMODEL VAN FINANCIËLE FORWARDS

[Lisette Motmans en Roger Mercken]

Woord vooraf

Dit artikel wil aan leraren wiskunde en leraren economie achtergrondinformatie verschaffen als stimulans om enkele lestijden te besteden aan een vakkenintegrerend project.

In deze bijdrage kiezen we voor een bedrijfs-economische context. We definiëren het getal e als limiet van een rij. Die rij ontstaat bij het gebruik van samengestelde interest bijna op natuurlijke wijze. Het gevolg is dat het getal e een centrale rol gaat spelen bij het bepalen van de tijdswaarde van geld. In de literatuur spreekt men van de principes van continu samengestelde interest en continue verdiscontering. Wereldwijd wordt dit principe in financiële modellen gebruikt om een toekomstige geldeenheid te kunnen vergelijken met een geldeenheid van nu. In de praktijk dient gewoon een formule te worden gebruikt die het getal e bevat. Die formule is eenvoudig, kort, duidelijk en handig.

De indeling van dit artikel is als volgt: eerst definiëren we het getal e als limiet van een rij, waarbij enkele bewijzen worden opgenomen; deze aanpak verschilt van de afleiding van het getal e in de meeste schoolboeken. Dan bespreken we op eenvoudige wijze wat wordt verstaan onder de tijdswaarde van geld en introduceren de begrippen continu samengestelde interest en continue verdiscontering. Daarna volgt een formele aanpak van de begrippen de tijdswaarde van geld, continu samengestelde interest en continue verdiscontering. Tenslotte gaan we als toepassing in op een basismodel voor het waarderen van een *forward* op een onderliggende waarde. In de loop van de tekst worden de nodige economische begrippen uitvoerig geïntroduceerd.

Het getal e als limiet van een rij

We bestuderen de rij met algemene term

$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ met n een natuurlijk getal verschillend van nul. Gebruik een (liefst grafisch) rekentoestel om enkele termen te berekenen:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_{10}, \dots, u_{1000}, \dots, u_{10000}, \dots, u_{100000000}, \dots$$

(Antwoorden: $2 / 2,25 / 2,3704 / \dots / 2,5937 / \dots / 2,7048 / \dots / 2,7169 / \dots / 2,7181 / \dots / 2,7183$; alle afgerond tot op 4 decimalen).

Deze berekeningen doen vermoeden dat de rij convergeert. Om dit te bewijzen maken we gebruik van de stelling die zegt:

Een stijgende, naar boven begrensde rij is convergent.

Eerst herschrijven we de algemene term u_n vertrekkend van het binomium van Newton:

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

De rij is *stijgend*. Immers, als we n vervangen door $n+1$ dan is er een positieve term meer. Bovendien wordt elke andere term in de notatie met het sommatieteken groter want de positieve factoren $1 - \frac{a}{n}$ worden vervangen door de factoren $1 - \frac{a}{n+1}$. De rij is *naar boven begrensd* door 3. Immers,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

zodat:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$$

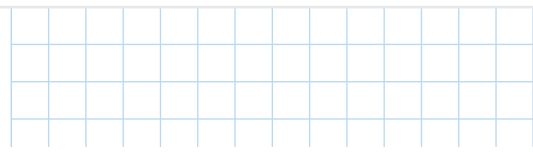
Aangezien

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1 \text{ geldt}$$

$$\text{dat: } k! \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}.$$

Bijgevolg is:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 3$$



We mogen dus besluiten dat de rij convergeert naar een reëel getal. We noteren dat getal als e . Vandaar dat:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bij benadering is $e = 2,71828$.

Men kan aantonen dat $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ met x een willekeurig reëel getal.

De volgende *eigenschap* is verder in de tekst handig. Voor elk positief reëel getal a geldt dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Het bewijs (voor $a \neq 0$) is een gewone berekening:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}} \right)^a$$

Met $(n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{n}{a} \rightarrow \infty)$ geeft dit:

$$L = \lim_{\frac{n}{a} \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}} \right)^a$$

En substitutie van $x = \frac{n}{a}$ en een eigenschap van limieten leidt dan tot:

$$L = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^a = e^a$$

De tijdswaarde van geld: een kennismaking en verder...

Geld heeft een tijdswaarde. Als je het bij een betrouwbare bank plaatst, levert het namelijk interest op die het oorspronkelijke bedrag laat aangroeien. Anders geformuleerd, je kan nu 1 euro op je spaarrekening zetten tegen bijvoorbeeld 2,5% interest op jaarbasis. Die ene euro groeit tegen samengestelde interest aan als volgt.

NU	1
na 1 jaar	$1 + 2,5\% = 1,025$
na 2 jaar	$1 + 2,5\% + 2,5\%(1 + 2,5\%) = (1 + 2,5\%)^2 = 1,0506$
na 3 jaar	$(1 + 2,5\%)^2 + 2,5\%(1 + 2,5\%)^2 = (1 + 2,5\%)^3 = 1,0769$
na 4 jaar	$(1 + 2,5\%)^4 = 1,1038$
na 5 jaar	$(1 + 2,5\%)^5 = 1,1314$

De interest op *jaarbasis*, zoals geafficheerd door de banken, noemen we de *nominale* interestvoet r ; dus hier is $r = 2,5\%$.

In de financiële wereld zal men bij het maken van berekeningen niet kiezen voor deze bankafhankelijke interestvoet.

Wel opteert men voor de nominale interestvoet op jaarbasis die gebruikt wordt bij staatsleningen (staatsobligaties).

Deze interestvoet r is veel stabiel(er) en wordt vaak constant verondersteld en voor iedereen duidelijk. Bovendien zijn staatsleningen in principe risicovrij: als je inschrijft op een staatslening ter waarde van 10.000 euro met nominale interestvoet 3% voor 5 jaar, krijg je 5 jaar na elkaar 300 euro rente uitbetaald en op het einde van de rit krijg je je kapitaal van 10.000 euro integraal terug.

Nu is de beslissing om interest te berekenen jaar na jaar, al dan niet op 31 december, en bij het kapitaal te voegen (samengestelde interest) redelijk arbitrair. Waarom niet kiezen voor drie jaar, of 1,5 jaar, of een maand, of een dag om interest te berekenen en bij het kapitaal te voegen? In financiële modellen heerst de conventie dat, zeg maar elke nanoseconde, interest wordt berekend en bij het kapitaal wordt gevoegd, zodat ook deze rente weer opnieuw interest genereert in de volgende nanoseconde enzovoort. We spreken dan van '*continue samengestelde interest*'. Intuïtief zou de lezer tot de conclusie kunnen komen dat hij met weinig geld via continu samengestelde interest schatrijk kan worden. Natuurlijk niet! Zoals we in een verdere paragraaf aantonen, geeft een startkapitaal van P euro na t jaren een eindkapitaal van Pe^{rt} euro. Veronderstel bijvoorbeeld dat $P = 100$ en $r = 3\%$. Dan is het eindkapitaal na 1 jaar gelijk aan $100e^{0,03} = 103,04545$ wat duidelijk meer is dan de klassieke 103 euro, maar niet spectaculair meer.

Mondiaal is nu de afspraak dat we de formule Pe^{rt} gebruiken om met de tijdswaarde van geld om te gaan. Merk op dat deze formule handig is in gebruik: we hebben enkel het startkapitaal P , de nominale interestvoet r op jaarbasis en de tijd t als fractie in jaren nodig. Er is dus geen geknoei met periodes en bijhorende omzettingen!

Laten we één en ander illustreren met een voorbeeld.

Als $r = 3\%$, dan correspondeert met 100 euro nu binnen 15 maanden precies

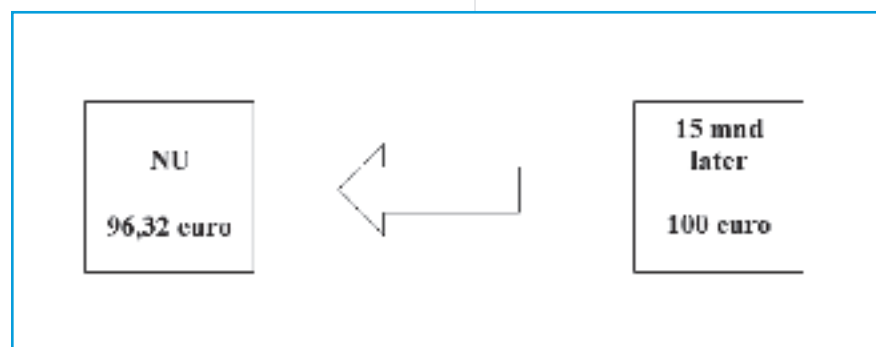
$100e^{(0,03)(1,25)}$ euro of 103,82 euro.

Omgekeerd stemt 100 euro binnen 15 maanden overeen met:

$$\frac{100}{e^{(0,03)(1,25)}} = 100e^{-(0,03)(1,25)}$$

dus met 96,32 euro NU.

We zeggen dat de actuele (huidige) waarde van 100 euro te ontvangen binnen 15 maanden gelijk is aan 96,32 euro. Als we het principe van continu samengestelde interest toepassen in deze omgekeerde richting, spreken we van '*continue verdiscontering*'.



De tijdswaarde van geld: formele aanpak

Geld heeft een tijdswaarde: één euro nu, die ik nu bezit, is meer waard dan één euro die ik later zal ontvangen. Waarom?

De belangrijkste reden is dat wij die euro van nu kunnen beleggen (wat een interestinkomen oplevert) en die euro van later nog niet. Toekomstige bedragen moeten daarom verdisconteerd worden vooraleer zij kunnen worden vergeleken met bedragen van nu.

In berekeningen probeert men toekomstige bedragen uit te drukken in termen van NU.

We zeggen dat die toekomstige bedragen verdisconteerd worden.

We veronderstellen een perfecte kapitaalmarkt waarop alle nodige financiële middelen worden gevonden tegen r , en ook alle overtollige middelen tegen diezelfde r worden belegd, met r de nominale interestvoet op jaarbasis die gebruikt wordt bij staatsleningen.

Eindwaarde. Een euro belegd gedurende n jaren groeit, tegen samengestelde interest, aan als volgt:

NU	1
na 1 jaar	$1 + r$
na 2 jaar	$1 + r + r(1 + r) = (1 + r)^2$
na 3 jaar	$(1 + r)^2 + r(1 + r)^2 = (1 + r)^3$
$\vdots$	$\vdots$
na n jaar	$(1 + r)^n$

Een startkapitaal X_0 is na n jaar aangegroeid tot een eindbedrag X_n met:

$$X_n = X_0(1 + r)^n$$

Actuele waarde. Omgekeerd geldt dan dat X euro die pas over n jaar te ontvangen is, wordt verdisconteerd door X te delen door $(1 + r)^n$.

Een eindbedrag X_n te ontvangen over n jaar heeft nu een actuele waarde X_0 met:

$$X_0 = \frac{X_n}{(1 + r)^n}$$

Bij samengestelde interest wordt de actuele (of huidige) waarde van 1 euro te ontvangen over n jaar bij een nominale interestvoet r op jaarbasis gegeven door:

$$\frac{1}{(1 + r)^n}$$

Illustratie. Dat de tijdswaarde van geld belangrijk is, blijkt wel uit het volgende voorbeeld. In 1626 werd volgens de legendarische brief van Pieter Schagen het eiland Manhattan door de Lenape Indianen verkocht aan gouverneur Peter Minuit, functionaris van de West-Indische Compagnie, tegen de prijs van 60 Nederlandse gulden. Rekening houdend met de prijsrevolutie komt dat wat koopkracht betreft overeen met ongeveer 700 Amerikaanse dollar. Indien de verkopers die 700 dollar tegen 6% per jaar belegd hadden, zou dat kapitaal zijn aangegroeid tot $700 \cdot (1,06)^{(2008-1626)} \approx 3,25 \cdot 10^{12}$ of ongeveer 3250 miljard dollar. Dat bedrag zou waarschijnlijk volstaan hebben om het eiland te kunnen terugkopen, inclusief een aantal wolkenkrabbers.

Opmerking. Zoals hoger geformuleerd heeft de tijdswaarde van geld op de eerste plaats te maken met de beleggingsopbrengst. Vaak haalt men ook andere argumenten aan. Een van die argumenten is dat de koopkracht van één euro van later door inflatie kleiner is dan de koopkracht van één euro nu.

Het getal e en de tijdswaarde van geld in complexe financiële modellen

Om de tijdswaarde van geld uit te drukken in iets of wat complexe financiële modellen wordt gewoonlijk het principe van *continue samengestelde interest* en *continue verdiscontering* gebruikt. Het voordeel is dat het resultaat een eenvoudige formule is waarin enkel het startkapitaal, de nominale interestvoet op jaarbasis en de looptijd als jaarfractie dienen te worden ingevuld. De formule is dus ‘periodevrij’ en is dus handig voor verdisconteringen voor zowel periodes van enkele dagen, als voor pakweg 2 jaar en 91 dagen.

Het volgende overzicht geeft een afleiding van de formule. We noteren het startkapitaal als P en de nominale interestvoet op jaarbasis als r .

We bekijken eerst het geval van $r = 0$:

De interest wordt na t jaren bijgevoegd:
het eindkapitaal na t jaren is $P(1 + 0t)$.

De interest wordt na $\frac{1}{2}$ jaren bijgevoegd:
- na $\frac{1}{2}$ jaren is het kapitaal $P(1 + \frac{0}{2})$;
- het eindkapitaal na t jaren is $P(1 + \frac{0}{2})^2$.

De interest wordt na $\frac{1}{n}$ jaren bijgevoegd
(met n een natuurlijk getal $\neq 0$):
- na $\frac{1}{n}$ jaren is het kapitaal $P(1 + \frac{0}{n})$;
- na $\frac{2}{n}$ jaren is het kapitaal $P(1 + \frac{0}{n})^2$;
...
- het eindkapitaal na t jaren is $P(1 + \frac{0}{n})^{nt}$.

De interest wordt ‘continuu’ bijgevoegd:
het eindkapitaal na t jaren is
 $P \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{0}{n})^{nt} = P \cdot e^{0t}$
door gebruik te maken van de eerder
vermelde eigenschap in verband met het
getal e .

We bekijken nu voorbeeld met:
 $P = 100$, $r = 0,04$ en $t = 1$.

De interest wordt na 1 jaar bijgevoegd:
het eindkapitaal na 1 jaar is $100(1 + 0,04)$.

De interest wordt na $\frac{1}{2}$ jaar bijgevoegd:
- na $\frac{1}{2}$ jaar is het kapitaal $100(1 + \frac{0,04}{2})$;
- het eindkapitaal na 1 jaar is $100(1 + \frac{0,04}{2})^2$.

De interest wordt na $\frac{1}{n}$ jaar bijgevoegd
(met n een natuurlijk getal $\neq 0$):
- na $\frac{1}{n}$ jaar is het kapitaal $100(1 + \frac{0,04}{n})$;
- na $\frac{2}{n}$ jaar is het kapitaal $100(1 + \frac{0,04}{n})^2$;
...
- het eindkapitaal na 1 jaar is $100(1 + \frac{0,04}{n})^n$.

De interest wordt ‘continuu’ bijgevoegd:
het eindkapitaal na 1 jaar is
 $100 \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{0,04}{n})^n = 100e^{0,04}$
door gebruik te maken van de eerder
vermelde eigenschap in verband met het
getal e .

MEDEDELING / UITSLAG 1E RONDE NWO

De 1e ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2009 vond op 30 januari jl. plaats op 230 deelnemende middelbare scholen. Deze olympiade biedt uitdagende wiskundeproblemen, die niet veel voorkennis vereisen. Zo wordt geprobeerd leuke wiskunde onder de aandacht van de jeugd te brengen en wiskundig talent al vroeg op te sporen en te stimuleren.

De opgaven waren dit jaar misschien een tikkeltje lastiger dan vorig jaar, maar er was ook een fikse toename in het aantal deelnemers. Vorig jaar nog nipt boven de 3000, dit jaar waren er bijna 4400 deelnemers! Deelnemers uit klassen 1, 2 en 3 met 20 of meer punten (van de maximaal 36) zijn door naar de tweede (finale) ronde. Deelnemers uit klas 4 hebben minimaal 23 punten nodig, en voor deelnemers uit de 5e klas ligt de cesuur op 26 punten. In totaal gaan zo'n 130 leerlingen door naar de 2e (finale) ronde in september.

De klasseafhankelijke cesuur is ingevoerd om ook jongere leerlingen aan te moedigen en door te kunnen laten stromen naar het trainingsprogramma. Op die manier proberen we het niveau van de Wiskunde Olympiade op te voeren.

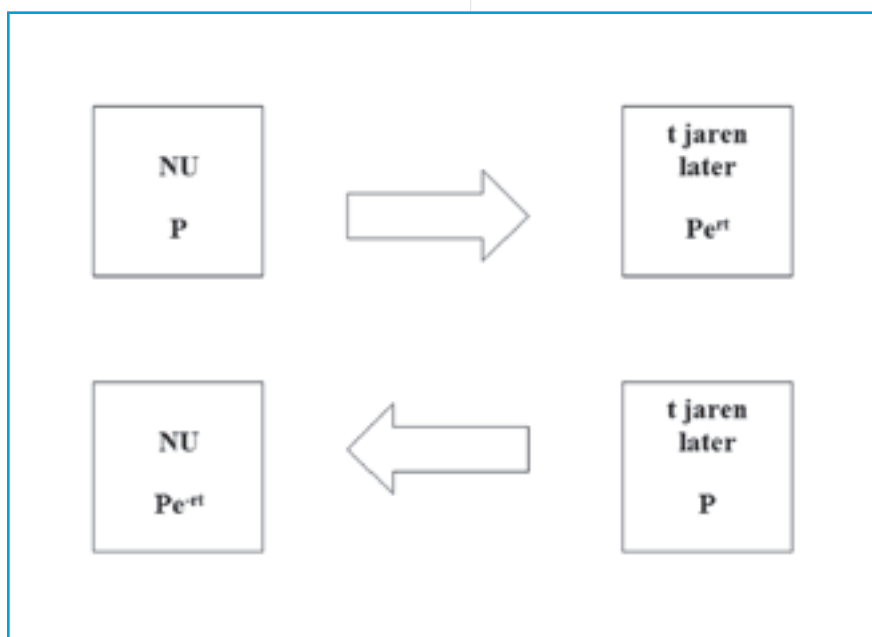
De scholenprijs (voor de hoogste somscore van de beste vijf leerlingen van een school) ging ook dit jaar weer naar het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. Die prijs wordt binnenkort aldaar feestelijk uitgereikt.

Voor meer informatie (opgaven, oplossingen, agenda, ...) zie

www.wiskundeolympiade.nl

Dit betekent dus :

een bedrag P NU is volgens het principe van continu samengestelde interest binnen t jaren Pe^{rt} waard; omgekeerd geldt dat de actuele waarde van een bedrag P binnen t jaren gelijk is aan Pe^{-rt} .



Het getal e bij het waarderen van financiële forwards

Een *forward* of een *forward contract* is een overeenkomst tussen een koper (ook houder genoemd) en een verkoper (ook schrijver genoemd). In dat contract wordt overeen-gekomen dat:

- de houder de plicht heeft op een vooraf bepaalde datum, de uitoefendatum genoemd, een vooraf bepaald bedrag, de uitoefenprijs genoemd, te betalen aan de schrijver;
- de schrijver de plicht heeft de onderliggende waarde te leveren aan de koper op de uitoefendatum en tegen de uitoefenprijs.

Die onderliggende waarde kan een aandeel zijn, of een vat olie, of een ton koffiebonen, enzovoort.

Bron

Wiskunde Persdienst (05-3-2009)



Veronderstel bijvoorbeeld een 40-dagen-forward op het aandeel Fiction met een uitoefenprijs van 65 euro. Laten we bovendien aannemen dat de koers van één aandeel Fiction vandaag 64,95 euro is en dat de nominale interestvoet op jaarbasis $r = 2,5\%$ is. Een vraag die zich dan opdringt is: wat is de huidige prijs van het contract, of anders geformuleerd, wat is het contract vandaag waard?

De winst of het verlies voor de koper op de uitoefendatum t is eenvoudig te bepalen, namelijk $S_t - 65$ met S_t de koers van het aandeel Fiction op de uitoefendatum. De waarde van de forward NU is moeilijker. Omdat S_t nu nog een grote onbekende is, is het logisch S_t te vervangen door de huidige koers van het aandeel Fiction. De uitoefenprijs van 65 euro op de uitoefendatum kunnen we continu verdisconteren. Aangezien $t = 40/365 = 0,1096$ is de huidige waarde van de uitoefenprijs gelijk aan $65e^{-(0,025)(0,1096)} = 64,82$. De waarde van de forward NU is dus $64,95 - 64,82 = 0,13$; dus 13 eurocent. Merk op dat de houder natuurlijk hoopt op een fikse koersstijging van het aandeel!

In het algemeen wordt de winst of het verlies voor de houder van een forward op de uitoefendatum t gegeven door:

$$F_t(S_t) = S_t - K$$

met

F_t : de waarde van de forward berekend op de uitoefendatum t ;

S_t : de koers van de onderliggende waarde op de uitoefendatum t ;

K : de uitoefenprijs.

De huidige waarde voor de houder van een forward wordt gegeven door

$$F(S) = S - Ke^{-rt}$$

met

F : de huidige waarde van de forward;

S : de huidige koers van de onderliggende waarde;

K : de uitoefenprijs;

r : de constant veronderstelde nominale interestvoet op jaarbasis die bekomen wordt op staatsleningen;

t : de tijd tot de uitoefendatum uitgedrukt als fractie in jaren.

De huidige waarde voor de houder van een forward is dus het verschil van de koers van vandaag van de onderliggende waarde en de uitoefenprijs continu verdisconteerd over de looptijd.

Het risico voor de twee partijen is erg verschillend. Bedenk dat het verlies bij een forward voor de houder beperkt is tot K , maar voor de schrijver onbeperkt groot kan zijn... Hij is immers verplicht de onderliggende waarde te leveren tegen de uitoefenprijs K . De koers van die onderliggende waarde kan ondertussen zeer hoog zijn.

Tot slot

In deze bijdrage hebben we het getal e als limiet van een rij ingevoerd. Bij een studie van samengestelde interest waarbij elke nanoseconde (en nog vaker) interest wordt berekend en bij het kapitaal wordt gevoegd, ontstaat die rij als vanzelf. Het gevolg is dat het getal e een cruciale rol speelt wanneer we toekomstige bedragen willen verdisconteren om uitdrukking te geven aan de tijdswaarde van geld. Als illustratie van een financieel model waarin continue verdiscontering en dus het getal e een centrale rol speelt, hebben we een basismodel voor het waarderen van een forward op een onderliggende waarde bekeken.

Referenties

- [1] H. Bierman, S. Smidt (2006): *The capital budgeting decision* (9e ed). United Kingdom: Taylor & Francis, Ltd.
- [2] M. Capinsky, T. Zastawniak (2003): *Mathematics for finance / An introduction to financial engineering*. Londen: Springer-Verlag.
- [3] W. Megginson, S. Smart, L. Gitman (2007): *Corporate finance*. Mason: Thomson South-Western.
- [4] S.M. Ross (2003): *An elementary introduction to mathematical finance / Options and other topics*. Cambridge University Press.
- [5] J. Stampfli, V. Goodman (2001): *The mathematics of finance / Modeling and hedging*. Pacific Grove: Brooks/Cole.

Over de auteurs

Drs. Lisette Motmans is werkzaam aan de Universiteit Hasselt, Faculteit Bedrijfseconomische Wetenschappen en doceert wiskunde.

E-mailadres: lisette.motmans@uhasselt.be

Prof.dr. Roger Mercken is hoogleraar bedrijfskunde aan de Universiteit Hasselt, Faculteit Bedrijfseconomische Wetenschappen.

E-mailadres: roger.mercken@uhasselt.be

Beiden publiceren regelmatig in *Wiskunde & Onderwijs*, het tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pikt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en zoekt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

Verplicht of niet verplicht, dat was de kwestie

Soms ben je zó aan iets gewend, dat je niet meer beseft dat het eigenlijk een beetje bijzonder is. Dat realiseerde ik mij opeens bij het lezen van het artikel 'Kunt u het nog volgen?' van Marian Kollenveld (in: *Euclides* 84, nummer 3). Daarin staat ergens 'De politieke keuze om voor alle havo/vwo leerlingen (sinds augustus 2007 met uitzondering van havo-C&M) wiskunde verplicht te stellen [...]'. Wiskunde verplicht, dat was nog niet zo lang geleden toch heftig omstreden? Het is waar, het verplicht stellen van wiskunde binnen alle profielen bij de invoering van de Tweede Fase in 1998 is tamelijk geruisloos verlopen. Maar nog kort daarvoor waren er juist verhitte discussies over 'wiskunde verplicht'. Dat was rond 1985, in de tijd van staatssecretaris Nell Ginjaar-Maas.

Dat die discussie heftig was, blijkt wel uit het volgende citaat uit een interview met haar uit 1999: 'Een geweldig struikelblok was het idee van wiskunde verplicht. Dat heeft een onvoorstelbare hoeveelheid weerstand opgeroepen. Zo zeiden wiskundeleraren: *Moeten wij straks die stomme kinderen ook wiskunde leren?*'

Ook toen al: vernieuwing van havo/vwo

Die discussie brandde los naar aanleiding van de *Lyceumnota* van Ginjaar-Maas waarin de gedachte van wiskunde verplicht werd geopperd. Eerst even iets over de context. Tot diep in de jaren tachtig had de wiskunde die op havo/vwo (en trouwens ook op de mavo) werd gegeven een 'wiskunde B' karakter, en de algemene overtuiging was dat die wiskunde beslist niet voor alle leerlingen geschikt was. De experimenten die moesten leiden tot wiskunde A op het vwo, waren net van start gegaan, de vernieuwing van de havo-wiskunde was nog niet eens begonnen. Ginjaar-Maas had een samensmelting van havo en vwo tot een zesjarige school in gedachten, waarin alle vakken op twee niveaus zouden worden aangeboden. Wiskunde zou daarbij dan in twee varianten worden gegeven, in de woorden van de staatssecretaris 'de zogeheten praktische en theoretische wiskunde, beter bekend onder wiskunde A en B'. In totaal zouden er dus vier verschillende eindexamenvakken wiskunde moeten komen, waarvan iedere leerling er in de opvattingen van Ginjaar-Maas minstens één zou moeten kiezen.

Discussiëren op de vrije zaterdag

De vakgroep OW&OC (nu FIsme) organiseerde op een zaterdag in december

1984 een druk bezocht symposium over die plannen. Er waren allerlei werkgroepen en een afsluitende forumdiscussie aan de hand van een aantal stellingen. Ook Ginjaar-Maas nam daaraan deel en misschien heeft ze daar die merkwaardige uitspraak over die *stomme kinderen* wel opgepikt. In de *Nieuwe Wiskrant* van mei 1985 wordt van dit symposium uitgebreid verslag gedaan. Naast de gebruikelijke argumenten als 'wiskunde is overal' en 'zonder wiskunde kan je je in de maatschappij niet redden' (waarbij nooit duidelijk wordt waarom dat met drie of vier jaar wiskunde niet, en met vijf of zes jaar wiskunde opeens wel lukt), komen ook andere argumenten voorbij. Ginjaar-Maas haalde zelf een wel heel oude koe uit de sloot: 'Bovendien merk ik nog op dat wiskunde een vakdiscipline is, die volstrekt logisch is opgebouwd. Door wiskundige problemen in theoretische of praktische zin te leren oplossen krijgt de leerling een grotere vaardigheid om logisch te leren denken. En dat laatste is een noodzakelijke vaardigheid voor ieders maatschappelijke ontplooiing'. Ach ja ...

Wiskunde en emancipatie

Interessanter is haar argument dat 'wiskunde verplicht' een bijdrage kan leveren aan de emancipatie van meisjes. In haar opinie zou het verplicht stellen van wiskunde meisjes extra kansen geven in de maatschappij (*zie figuur 1*). Dat was een argument dat toen zeker aansprak. Kort daarvoor was binnen de NVvW de groep *Vrou Wiskundig* actief geworden, die uitdrukkelijk aandacht vroeg voor de sterk achterblijvende positie van meisjes en vrouwen in het wiskundeonderwijs. Die groep was ook op het symposium aanwezig en verzorgde een werkgroep, maar uit het verslag blijkt dat ze niet tot een eensgezind standpunt kwam. Sommige leden konden zich, juist op grond van het emancipatieargument, wel vinden in 'wiskunde verplicht', anderen vonden het alleen symptoombestrijding en dus verwerpelijk.



figuur 1
Uit: Nieuwe Wiskrant,
jrg. 4(3), mei 1985

Kennelijk waren er ook hier rekkelijken en preciezen.

In het symposiumverslag merk je niet zo veel van die 'onvoorstelbare hoeveelheid weerstand'. Waar wel voortdurend op gewezen werd is dat de schoolwiskunde, van het B-type dus, veel te abstract was en daarom de leerlingen afstootte – overigens ook een argument dat zó uit 1820 komt. Er moesten dus eerst andere programma's komen, en er moest wat aan de onderbouw gebeuren, en misschien ook nog wel aan de basisschool. Maar dat was ook precies wat Ginjaar-Maas zelf zei (*zie figuur 2*), en het is dan ook een beetje raadselachtig waarom het NVvW-bestuur, dat daar ook voortdurend op wees, toch jarenlang de boot bleef afhouden. In november 1984 luidde het: 'Ons bestuur vindt de tijd nog niet rijp

Emancipatie

Het verplicht stellen van wiskunde als onderdeel van het eindexamenpakket heeft nog een ander doel, namelijk bevordering van het door het kabinet tot taak gestelde emancipatiebeginsel. U weet ongetwijfeld dat meisjes gemiddeld minder vaak wiskunde kiezen als onderdeel van het eindexamenpakket. Dat komt volgens mij door het stereotype vakkenpatroon dat mannen en vrouwen in onze cultuur opgelegd krijgen.

Daardoor blijft het percentage vrouwelijke studenten bij B-studies achter bij hun mannelijke collega's. Van verschillende kanten krijg ik te horen dat deze vorm van emancipatie een contradictio in terminis is, met andere woorden, dat ik hiermee de emancipatiegedachte geen goed zou doen.

Daartegenover stel ik dat, willen wij werkelijk ernst maken met het gelijkheidsbeginsel van man en vrouw, de kansen van vrouwen op de arbeidsmarkt zoveel mogelijk gelijk moeten zijn aan die van mannen. Emancipatie betekent immers het recht op gelijke ontplooiingskansen voor mannen en vrouwen.

Het verplicht stellen van wiskunde zie ik als een extra kans voor vrouwen om gelijkwaardig te participeren in onze maatschappij. Omdat alleen juridische gelijkheid in vele gevallen onvoldoende blijkt te zijn om het gevestigde cultuurpatroon te doorbreken, vind ik dat het verplicht stellen van wiskunde als een extra "stimulans" voor feitelijke gelijkheid moet worden gezien.

Francis Meester

lerares, lid van vier–hoofdige schoolleiding, auteur VrouWiskundig.

De noodzakelijke veranderingen die in het wiskunde-onderwijs moeten plaatsvinden opdat wiskunde voor allen wordt, moeten vooral gericht zijn op het toegankelijk maken van de wiskunde voor meisjes.

De mythe van de keuzevrijheid had niet beter doorgeprikt kunnen worden dan door wiskunde verplicht te stellen.

Drs. Nell Ginjaar-Maas

staatssecretaris Onderwijs en Wetenschappen, lid VVD

'Wiskunde verplicht' lijkt een beperking van de vrijheid van keuze, maar doordat met wiskunde in het pakket nog vele mogelijkheden voor verdere studie openliggen geeft dit juist vrijheid.

Verplicht wiskunde-onderwijs in de bovenbouw vereist:

- a. Een gedifferentieerd aanbod van twee soorten gelijkwaardige wiskunde op twee niveaus.
- b. Een herziening van het onderbouwprogramma voor het gehele V.O. en een nieuw plan voor het reken/wiskunde-onderwijs op de basisschool.

figuur 2
Uit: Nieuwe Wiskrant,
jrg. 4(3), mei 1985

om wiskunde als verplicht examenvak in te voeren', maar ook bijna vijf jaar later was het bestuur nog niet verder gekomen dan het 'vooralsnog' ontraden om wiskunde verplicht te stellen. Wel pleitte het voor meer lesuren; trouwens ook nu geen onbekend geluid (*zie figuur 3*).

Terug naar toen?

De totale omvorming van het wiskunde-onderwijs in onder- en bovenbouw is er in de jaren negentig inderdaad gekomen, maar 'wiskunde verplicht' aanvankelijk niet. Dat gebeurde pas bij de invoering van de tweede fase en de profielen, toen de herziening van de schoolwiskunde, ook in de onderbouw, voltooid was. Hoe die wiskunde daarbinnen functioneert, is nu ook al weer omstreken en de huidige staatssecretaris schrappt bovendien weer de verplichting tot wiskunde bij het havo-C&M-profiel. 'Wiskunde is in dat profiel ook niet noodzakelijk, want leerlingen die het volgen komen bijvoorbeeld terecht in het sociaal werk. Door het verplicht te stellen, frustreer je leerlingen alleen maar', is haar standpunt, een argument dat zo uit de discussie uit 1985 gehaald zou kunnen zijn. Het is een maatregel die vooral voor de meiden op de havo van belang is, want de laatste jaren koos meer dan de helft daarvan een C&M-profiel, en jongens kiezen maar weinig C&M. De meeste meisjes zullen dus, anders dan nu, wiskunde niet meer als verplicht eindexamenvak hebben, en ik moet nog zien hoeveel vrijwillig wiskunde zullen kiezen. Nee, Van Bijsterveldt is geen Ginjaar-Maas, en het merkwaardigste is nog wel dat er op het schrappen van wiskunde voor havo-C&M nauwelijks gereageerd is. In plaats van de door Ginjaar-Maas voorgestelde vier wiskundevakken op havo/vwo, waarvan iedereen er minsten één zou moeten kiezen, krijgen we er nu maar liefst zeven. Een belangrijke groep, die toch al zwaar ondervetegenwoordigd is in de exacte hoek, kan wiskunde laten vallen. Ach, het zijn maar meisjes, niet waar? Misschien vindt u dat vooruitgang, maar ik niet.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is overtuigd van het nut van wiskunde voor de toekomst van vele leerlingen, doch is er niet van overtuigd dat daarom wiskunde op het eindexamen verplicht moet worden. Het bestuur ziet meer heil in een uitbreiding van de basislessen-tabel voor wiskunde en meent vooralsnog te moeten ontraden wiskunde als verplicht eindexamenvak in het programma op te nemen.

Euclides Verenigingsnieuws 245

figuur 3 Uit: *Euclides*, jrg. 64(8), mei 1989 – een stukje uit het verslag van de jaarvergadering van 1988

Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO). E-mailadres: h.j.smid@ipact.nl

VERSCHEENEN /



Auteur: Paulus Gerdes
Uitgever: Lulu.com (www.lulu.com),
Morrisville, NC 27560, USA
Distributie: <http://stores.lulu.com/pgerdes>
Prijs: \$ 9.50 (download \$ 2.50); 76 pagina's.

HET BISOSPEL: PUZZELPLEZIER

Vorig najaar verscheen van dezelfde auteur het boekje 'Afrikaanse zandtekeningen uit Angola: Levende wiskunde', waaraan in *Euclides* 83(7) aandacht besteed is. Ook dit nieuwe boek is een puzzelboekje dat de auteur voor zijn jongste dochter ontworpen en geschreven heeft.

Omslagtekst – Wie houdt er niet van een tijdverdrijf dat zowel ontspannend als leerzaam is? Bisospuzzels maken is zo'n activiteit. Verscheidene puzzels worden in dit boekje voorgesteld. Om de puzzels op te lossen heb je soms enkele, soms de negen stukken van het spel nodig. De stukken heten 'bisos'.

Het puzzelen bestaat uit het maken van figuren die bepaalde eigenschappen hebben. Deze bisospuzzels en -spelletjes kunnen thuis gebruikt worden of in clubs als leerrijk tijdverdrijf maar ook op school door onderwijzers en leraren om verschillende begrippen (parallellogram, trapezium, ruit, veelhoek, symmetrie, ...) die in het leerplan zijn opgenomen, te verdiepen. Antwoorden en oplossingen zijn in het boekje opgenomen.

De bisospuzzels en -spelletjes zijn toegankelijk voor kinderen en volwassenen van zes tot honderd jaar oud.

MEDEDELING / MATH-BRIDGE

OU PAKT ONTBREKENDE WISKUNDEKENNIS EU-STUDENTEN AAN

Dit voorjaar start het project Math-bridge dat op Europees niveau de problemen aanpakt die studenten hebben met wiskunde door onderwijsmaterialen uit te wisselen en via internet gratis beschikbaar te stellen. De Open Universiteit (OU) is de Nederlandse partner in dit project waaraan elf Europese universiteiten deelnemen. 'De problematiek van de wiskunde aansluiting tussen middelbare scholen en universiteiten speelt niet alleen in Nederland, maar in heel Europa', aldus Johan Jeuring, hoogleraar bij de faculteit Informatica van de OU, 'Met een gezamenlijke aanpak gaan we ervoor zorgen dat studenten hun wiskundedeficiënties kunnen wegwerken en een betere start maken in het hoger onderwijs.'

Rol Open Universiteit

De inbreng van de OU bestaat uit drie elementen. Allereerst ontwikkelt ze het benodigde onderwijsmateriaal en stelt dit via open standaarden beschikbaar. Daarnaast wordt dit materiaal ingezet en uitgetest bij haar eigen studenten. De derde inbreng bestaat uit het doorontwikkelen en toepassen van unieke systemen om geautomatiseerde intelligente feedback te realiseren.

Intelligente feedback

'Intelligente feedback maakt onze inbreng onderscheidend', vertelt Jeuring, 'Bovendien hebben we de didactische aanpak onderzocht, zodat we straks op individueel niveau kunnen bepalen wanneer de student gecorrigeerd moet worden en hoe de student zo goed mogelijk gemotiveerd kan worden door automatische feedback.' De OU heeft in het SURF-project 'Intelligente feedback' een systeem ontwikkeld dat op detailniveau volgt welke stappen een student neemt bij het oplossen van wiskundige vraagstukken. Vervolgens kan het systeem daarop gepaste

automatische feedback geven op het niveau van syntax, semantiek en strategie. Dit project was voor de Europese partners aanleiding om de OU uit te nodigen voor het Math-bridge project.

Nederlandse problematiek

Ook Nederlandse studenten kampen met een tekort aan voorkennis van wiskunde. De OU heeft, door haar open toelating tot het hoger onderwijs, hier al langer ervaring mee. Daarom biedt zij op line voorkennis-toetsen aan waarmee studenten kunnen testen of zij voldoende voorkennis hebben om te starten met een specifieke opleiding of cursus van de OU. Ook organiseert zij voorbereidingscursussen wiskunde. Deze cursussen bereiden voor op Voortentamen Wiskunde B1 die studenten kunnen doen als ze een deficiënt vakkenpakket hebben en niet direct toelaatbaar zijn tot opleidingen in het hoger onderwijs waarvoor toelatingseisen gelden.

Bron

Wiskunde Persdienst (27-2-2009)

Klassikaal

PYTHAGORAS VIA DE GONIOMETRIE

[Dick Klingens]

Een verschilformule

Bij het herhalen van wat gonio-formules in 6-vwo (B1's samen met B12's) – het kan geen kwaad zo vlak voor het centraal examen – kwamen we (mijn klas en ik) uiteraard de *som-* en *verschilformules* tegen, waaronder:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

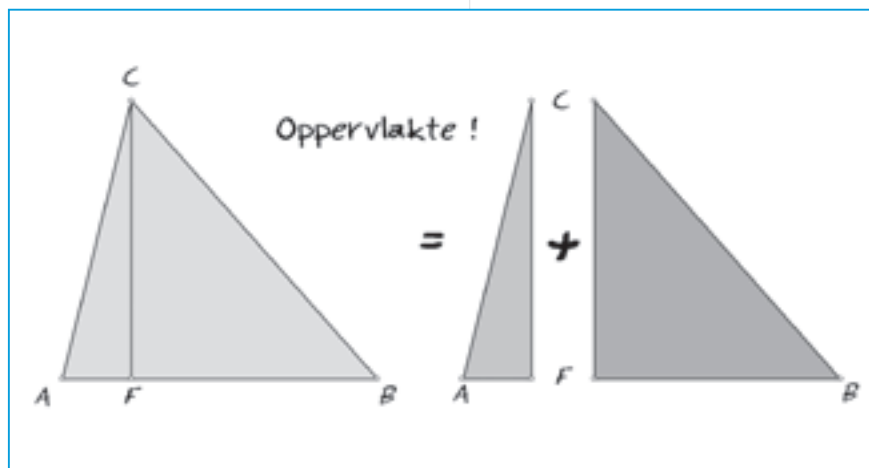
'Moeten we het bewijs daarvan kennen?', was een vraag. Mijn (min of meer uitdagende) antwoord was: 'Wat is in dit verband kennen? Je kunt het bewijs best wel zelf reproduceren.' Uiteraard volgde: 'Hoe dan?'

Ik zette, met de woorden 'Hieruit volgt die formule na wat rekenwerk', **figuur 1** op het bord^[1].

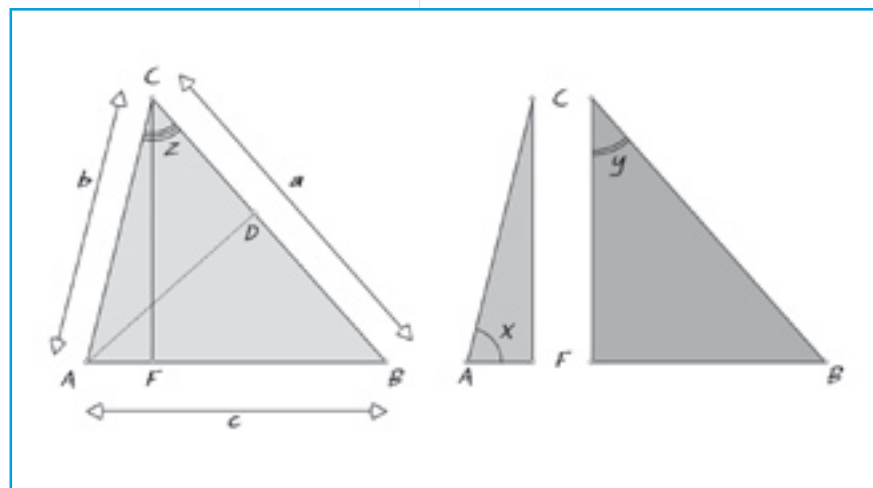
Uiteraard was een toelichting zeer gewenst (en niet alleen voor mijn klas, denk ik).

We plaatsen allereerst wat meer letters en tekenen de extra hoogtelijn AD ;

zie **figuur 2**.



figuur 1



figuur 2

En dan berekenen we de oppervlakte O van driehoek ABC :

$$(1) \dots O = \frac{1}{2} a \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin z$$

En voor de beide in F rechthoekige deeldriehoeken hebben we:

$$(2a) \dots$$

$$Opp(AFC) = \frac{1}{2} AF \cdot CF = \frac{1}{2} b \cos x \cdot CF$$

$$(2b) \dots Opp(BFC) = \frac{1}{2} BF \cdot CF = \frac{1}{2} a \sin y \cdot CF$$

Verder is (kijk eerst in driehoek BFC en vervolgens in driehoek AFC):

$$CF = a \cos y = b \sin x$$

zodat, en we vermenigvuldigen 'handig':

$$(3a) \dots Opp(AFC) = \frac{1}{2} ab \cos x \cdot \cos y$$

$$(3b) \dots Opp(BFC) = \frac{1}{2} ab \sin x \cdot \sin y$$

De klas reageerde gelaten. Slechts een enkele opmerking: 'Ja, dat's duidelijk.'

Ik: 'Druk nu hoek z uit in x en y . Jullie zijn aan zet!'

Heel snel vonden ze (de B12's zijn hierbij toch enigszins in het voordeel boven de B1's):

$$z = (90^\circ - x) + y = 90^\circ - (x - y)$$

En toen concludeerde een B1-leerling (zie formule (1)): 'En dan is in de formule van O de sinus van z gelijk aan de cosinus van x min y !'

Als we dan uitdrukking (1) samen met (3a) en (3b) bekijken, blijkt (vanwege de gelijkheid van de oppervlaktes):

$O = \frac{1}{2}ab \cos(x - y) = \frac{1}{2}ab \cos x \cos y + \frac{1}{2}ab \sin x \sin y$
en na deling van de tweede en derde uitdrukking door $\frac{1}{2}ab$:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Of de klas onder de indruk was van dit bewijs, is me niet duidelijk geworden: het bleef stil. Ik gaf ze daarom (als huiswerk) de opdracht bovenstaand bewijs te vergelijken met het bewijs in hun leerboek^[2], waarvan in **figuur 3** het bijbehorende plaatje staat.

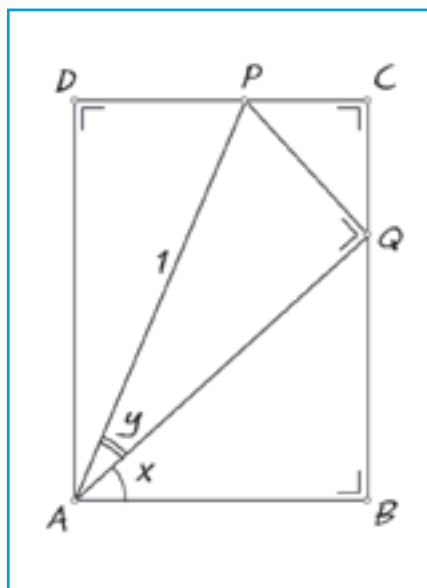
Er was aan het eind van de les nog tijd voor: 'Bewijs nu dat: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ '. Het duurde gelukkig maar heel even... Dezelfde B1-leerling: 'Je moet y gelijk aan x kiezen, dan staat het er al.' Inderdaad, de bekende goniometrische gedaante van de stelling van Pythagoras laat zich eenvoudig afleiden uit de onderhavige verschilformule.

Voor een volgende les?

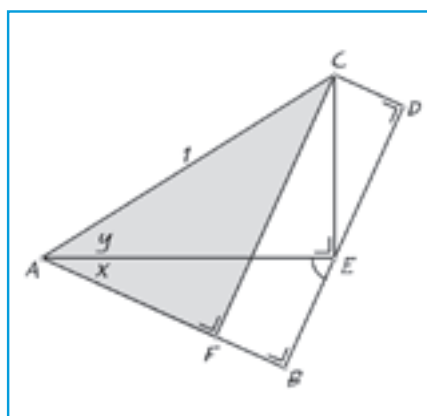
Ook de formule

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
kan met *visual thinking* (zie de boektitel bij [1]) worden aangepakt. Zie daartoe **figuur 4**, waarin AC gelijk aan 1 is, zodat:
 $\sin(x + y) = CF = BD$

In driehoek AEC is: $AE = \cos y$ en $CE = \sin y$, en daarmee vinden we:
 $BE = \sin x \cdot \cos y$
In driehoek CED is $\angle CED = x$, zodat:
 $ED = \cos x \cdot \sin y$
Gevolg:
 $\sin(x + y) = BD = BE + ED = \sin x \cos y + \cos x \sin y$



figuur 3



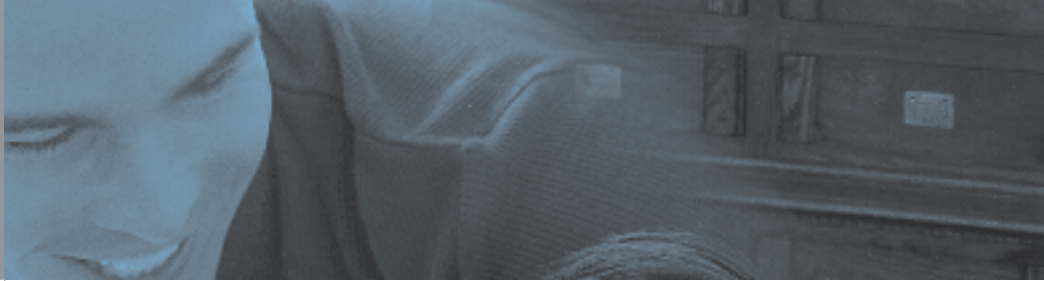
figuur 4

Noten

- [1] Ik vond mijn inspiratie voor hetgeen volgt in:
Roger B. Nelson (1993): *Proofs without Words / Exercises in visual thinking*.
Washington (USA): Mathematical Association of America.
- [2] We gebruiken *Moderne wiskunde B1* / deel 5 (7e editie). Daarin staat op pagina 24 de aanzet voor een bewijs van de formule voor $\cos(x + y)$ waarbij gebruik gemaakt wordt van de lengtes van lijnstukken (zie **figuur 3** waarin $AP = 1$, $PD = AB - PC$ en $\angle APD = x + y$).

Over de auteur

Dick Klingens is leraar wiskunde aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Daarnaast is hij eindredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: dklingens@pandd.nl



De belevenissen van een bestuurslid met interessante klussen

NEVER A DULL MOMENT

[Metha Kamminga]

Leuk initiatief van *Euclides* om eens de bestuursleden naar voren te halen en te laten vertellen over dat wat hen zoal bezig houdt! Op het moment van dit schrijven is het in het Noorden van het land krokusvakantie. Geen krokus te zien en het sneeuwt zelfs nog! Mooi tijd voor achterstallig onderhoud! Behalve mijn taak op de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden (NHL), waar ik in het project Wisnet (www.wisnet.nl) zit en verder de wiskunde bij verschillende afdelingen verzorgt met behulp van geavanceerde digitale middelen, ben ik voor de NVvW al jaar en dag, zoals *Marian Kollenveld* dat in haar jaarrede verwoordt, de vertegenwoordiger van de wiskunde in het hbo. Er is binnen de NVvW een Werkgroep-hbo die over verschillende onderwerpen met elkaar van gedachte wisselt en communiceert met de achterban (wiskundedocenten in het hbo) en met verschillende geledingen die met het hbo te maken hebben. Vanuit het NVvW-bestuur ben ik van 2003 tot 2007 bestuurslid geweest van het KWG (Koninklijk Wiskundig genootschap) en verder momenteel nog bestuurslid van de NOCW (Nederlandse Onderwijscommissie Wiskunde). Het is allemaal leuk en afwisselend en in al die overlegorganen hoor je nog eens wat en wordt de complexe wiskundewereld voor mij een beetje completer. Ook door mijn werk voor het softwarebedrijf dat het computergebruik MapletA levert, kom ik op diverse hogescholen en – tegenwoordig ook – op scholen voor voortgezet onderwijs om trainingen te geven aan docenten. Op die manier blijf ik een beetje op de hoogte van de gang van zaken in wiskundeland. Als u

dit zo leest, zult u zich afvragen of ik nog wel aan mijn werk op de NHL toekom en aan mijn hobby's zeilen en fotograferen, maar ik heb op de NHL slechts 0,65 fte, dus dat kan allemaal! Dan vergat ik ook nog te vertellen dat ik vanuit het bestuur verantwoordelijk ben voor de verbouw van de NVvW-website.

De website

In deze krokusweek zonder krokussen leggen we de laatste hand aan de nieuwe lay-out van de NVvW-site en zetten de laatste puntjes op de i. Er is op dit moment druk overleg met de bouwers van de site die al sinds 2006 bezig zijn op hun vrije zaterdagen de site geheel van de grond af aan opnieuw op te bouwen.

De samenwerking met deze bouwers van het weekendbedrijf *Othila* en onze webmaster *Lennart de Jonge* is reuze inspirerend en als ik zo terugkijk, hebben we toch een prachtig leerzaam traject afgelegd waarin een mooi product is afgeleverd. Zo op het eerste gezicht merkt u er vanaf de voorkant niet zo heel veel van, maar werkelijk alles achter de schermen is geautomatiseerd. Ook het gebruikersmanagement is kortgeleden afgerond. We kunnen daardoor nu langzamerhand wat meer gaan delegeren. Werkgroepleiders hebben hun eigen pagina's op de site in beheer om deze up-to-date te houden en u op de hoogte te stellen van alles wat er speelt.

Al een paar jaar bent u gewend om van de dynamische mogelijkheden gebruik te maken op de site. Een voorbeeld is het inschrijven voor de jaarvergadering. Dat gaat de laatste jaren via de site, waar u ook uw keuze kunt maken voor de workshops en lezingen van de studiedag; en zelfs

voorafgaande aan de jaarvergadering kunt u zien wie en hoeveel mensen er zullen komen. De organisatie van de jaarvergadering onder leiding van *Marianne Lambriex* is erg blij met deze dynamische mogelijkheden: het bespaart veel werk en het komt de samenwerking tussen het team dat zich bemoeit met de jaarvergadering, ten goede. Ook inschrijven als nieuw lid van de vereniging gaat dynamisch via de site. De aanmeldingen worden automatisch doorgesluisd naar *Elly van Bommel* van de ledenadministratie en eenmaal ingeschreven bij de ledenadministratie krijgen de nieuw aangemelde leden een welkomstbericht met een wachtwoord voor de website per e-mail toegestuurd. Daarop kom ik straks nog even terug.

Verder hebben we een van onze leden, *Erik Korthof*, die vaak aan het forum meedoet en een zeer ervaren docent is, bereid gevonden om de discussiefora te *modereren*; dat wil zeggen: in de gaten houden en opschonen, nieuwe discussies aanslingeren en oude discussies afsluiten en archiveren, zodat u als lid er eventueel (na een *login*) nog wel bij kunt. Daarbij denken we aan oude examendiscussies die voor docenten in de opleidingsfase en voor nieuwe leraren wel eens interessant kunnen zijn. Straks beginnen de examens weer. Wij zijn er helemaal klaar voor zodat u straks weer volop mee kunt discussiëren op het examenforum dat nu eerst nog onder het kopje Eindexamens VO | Examens in het hoofdmenu staat maar tijdens het examen onder het Algemeen forum zal staan. In het verleden is gebleken dat het examenforum wel het meest bezocht werd van alle discussiefora op de site! We zouden de communicatie met u nog wel wat willen aanscherpen.



Inloggen op de site

Het is ons gebleken – laatst bij een oproep waar we u dringend nodig hadden – dat er wel erg veel leden zijn van wie geen of niet het juiste e-mailadres op de site ingevoerd is. Ook voor uzelf als lid van de NVvW zal het in de toekomst steeds belangrijker worden dat u met uw e-mailadres inlogt op de site. Dat doet u rechtsboven op de pagina van de NVvW-site. U ziet ingelogd wel degelijk meer pagina's die specifiek voor leden zijn, zoals de pagina's van het bestuur, van de vakbond of bepaalde nieuwsberichten voor leden en discussiefora waarin we met onze leden graag van gedachten willen wisselen. Dat zullen in de toekomst in feite steeds meer pagina's en nieuwsberichten worden die achter de login voor leden komen te staan. Ook is het voor uzelf sowieso altijd handiger om in te loggen bij het gebruik van het discussieforum, want dan hoeft u verder geen velden vooraf in te vullen ten behoeve van de beveiliging. Bent u uw wachtwoord kwijt?... Op het moment dat u deze *Euclides* onder ogen krijgt, is er een extra voorziening getroffen waarmee u een automatisch gegenereerd nieuw wachtwoord krijgt als uw e-mailadres bij ons op de site bekend is. Het inloggen rechtsboven in de pagina gaat namelijk altijd met het e-mailadres als login. Is uw e-mailadres niet bij ons bekend, dan kunt u middels een e-mailbericht naar webmasters@nvvw.nl uw gegevens sturen met uw lidmaatschapsnummer en dan maken wij uw profiel in orde, zodat u voortaan volop met alles mee kunt doen en niets u zal ontgaan. Kijkt u ook eens op de Vacaturepagina op de site. Zoals *Marian Kollenveld* al in haar jaarrede noemde, kunnen we nog wel wat versterking gebruiken voor ons vrijwilligerswerk! Vooral het vmbo is zwak vertegenwoordigd. Het heeft geholpen dat we een oproep hebben geplaatst op de site én in *Euclides*, want er is al versterking voor bijvoorbeeld de Werkgroep-hbo op afgekomen. Jong bloed is zeer welkom! U heeft al begrepen dat ik dus voorzitter ben van deze werkgroep.

De Werkgroep-hbo

De Werkgroep-hbo bestaat uit (wiskunde) docenten uit zoveel mogelijk hbo-sectoren (techniek, economie, lerarenopleidingen, informatica) en we hebben zelfs een

werkgroep lid van buiten, *Arjen Schat*.

Hij houdt zich voornamelijk bezig met de inspanning die Philips (samen met 30 andere bedrijven) doet om bètastudies onder de aandacht te brengen van middelbare scholieren in het kader van Jet-Net (Jongeren en Technologie Netwerk). Verder zit hij in de Raad Opleiding van het KIVI (Koninklijk Instituut van Ingenieurs). Onze werkgroep leden hebben allemaal een groot netwerk en in ieder geval goede kennis van hun eigen hbo-instituut, zodat ze goed weten hoe het er overall aan toe gaat. We dekken helaas niet alle hbo-instituten in het land; daarbij, onze achterban die we regelmatig op de hoogte houden, blijft vrij constant in aantal. Het is vrij lastig om wiskundigen te vinden die in het hbo werken. In het verleden zijn veel wiskundigen uit het hbo wegbezuinigd, alsof die mensen daar niet nodig zouden zijn! Het vak wiskunde is bij veel afdelingen namelijk opgegaan in de toegepaste vakken. Men komt van deze constructie inmiddels weer wat terug en de dramatische aansluitproblematiek, vooral met betrekking tot de overgang mbo/hbo, heeft onze directe zorg, want problematisch is het zeker! In het hbo wordt de laatste jaren steeds meer competentiegericht onderwijs ingevoerd. Over de wijze waarop dit moet gebeuren, wordt heel verschillend gedacht. Bij de meeste opleidingen in het hbo wordt er minder dan voorheen cursorisch onderwijs aangeboden. De vakken wiskunde en natuurkunde zijn echter het meest gebaat bij cursorisch onderwijs. Dit staat echter haaks op de manier van doen bij projecten waarvoor de benodigde kennis meestal fragmentarisch aangebracht wordt of door de studenten zelf verworven moet worden. Als dat niet lukt, wordt geklaagd over de vooropleidingen. Er is een grote discrepantie tussen de benadering van de wiskunde op het hbo en de veronderstelde voorkennis en het toepassen van competentieonderwijs.

Verder gaat het met de ontwikkeling van het nieuwe vak wiskunde D nog niet zoals we het zouden willen. We merken dat havisten niet in groten getale wiskunde D kiezen en de bedoelde contacten tussen vo en hbo komen maar mondjesmaat van de grond. We hopen dat het in de nabije toekomst in ieder geval weer een beetje de goede kant opgaat en dat het vak wiskunde

D een goede voorbereiding zal blijken te zijn voor aankomende techniekstudenten in het hbo. We zorgen ervoor dat we gesprekpartners blijven, ook binnen ons eigen hbo-instituut. De media besteden gelukkig ook steeds aandacht aan het reken- en wiskundeonderwijs. Verder moet er voortdurend gewerkt worden aan het leggen van contacten tussen de hogescholen onderling. We hebben contacten met de HBO-raad, MBO-raad, cTWO (commissie Toekomst Wiskundeonderwijs) en het LICA (Landelijk Informatie- en expertise-Centrum Aansluiting hbo) en nog veel meer geleidingen waar er besluiten worden genomen met betrekking tot de aansluiting. Ongeveer twee keer per jaar zien we als Werkgroep-hbo elkaar tijdens een avondvergadering in Utrecht waarna we zeer geïnspireerd huiswaarts keren om weer meer te weten te komen over wiskunde in hbo-land met al zijn problematiek. In de tijd van de voorbereiding van een conferentie komen we wat vaker bijeen. Onze laatste conferentie, in maart 2008 over *Het voortbestaan van de wiskunde in het hbo*, werd goed bezocht door onze achterban en ook door mensen van het ministerie en de hbo-raad met wie we regelmatig communiceren. U kunt de verslagen van de conferenties die we in het verleden georganiseerd hebben, op de site lezen: onder Werkgroepen bij de Werkgroep-hbo. Verder vindt u op de website van de werkgroep wie de leden van de groep zijn en wat zij allemaal doen. Hopelijk inspireert het u ook om buiten uw gewone baan eens wat verder te kijken en mee te doen met hetgeen waarvoor u zich interesseert en waarin u deskundig bent. In ieder geval kunnen we elkaar ontmoeten op de website en in *Euclides*.

Over de auteur

Metha Kamminga is onder meer bestuurslid van de NVvW.

E-mailadres: m.kamminga@nvvw.nl



Examenbesprekingen 2009

[Grada Fokkens en Conny Gaykema]

VMBO TGK

centraal: vrijdag 22 mei 2009 /
16:00-18:00u

UTRECHT

Jaarbeurs, Beatrixgebouw

Omdat het examen vlak voor het lange Hemelvaartweekend plaatsvindt, zal er *alleen* een **centrale bespreking** gehouden worden. De resultaten daarvan zullen op zaterdag 23 mei na 12:00 uur op de NVvW-website worden gepubliceerd (www.nvvw.nl).

Bent u een docent(e) met veel ervaring in de examenklas, dan bent u van harte uitgenodigd om mee te praten over de normering. U kunt zich uiterlijk 30 april aanmelden bij Conny Gaykema (gespreksleider; e-mail: c.gaykema@orange.nl). Begin mei ontvangt u dan nader bericht.

HAVO A

maandag 25 mei 2009 /
16:00-18:00u

HAVO B

maandag 25 mei 2009 /
16:00-18:00u

AMERSFOORT

S.G. Guido de Brès

Paladijnenweg 251 (033-4792900)

A: dhr. F.O. van Leeuwe (0341-492843)

B: dhr. F. van den Heuvel (030-2730898)

AMSTERDAM

CSG Buitenveldert

De Cuserstraat 3 (020-6423902)

(*CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51*)

A: dhr. F. Pach (020-6926136)

B: dhr. J.S. Dominguez (06-10397591)

's-GRAVENHAGE

Hofstad Lyceum

Colijnplein 9 (070-3687670)

A: voorzitter nog niet bekend ^[1]

B: dhr. C. van Someren (070-3368216)

GRONINGEN

Röling College

Melisseweg 2 (050-5474141)

A: dhr. L. Tolboom (050-3146093)

B: mw. H. Lüder (0516-432889)

NIJMEGEN

Mondialcollege

Leuvenbroek 30-01 (024-3786993)

A: geen bijeenkomst

B: dhr. A.W.M. Tromp (026-3254829)

ROTTERDAM

Geref. SG Randstad

Valenciadreef 15 (010-2862930) ^[2]

(*Station NS Alexanderpolder*)

A: dhr. R. van Oord (0182-617089)

B: mw. A.E.L. de Jongh Swemer
(010-4138432)

ZWOLLE

Van der Capellen SG

Lassuslaan 230 (038-4225202)

A: dhr. C. Alderliesten (038-4657244)

B: dhr. Ph. Thijsse (0315-342436)

VWO A1 / A12
woensdag 27 mei 2009 /
15:30-18:00u
VWO B1 / B12
donderdag 4 juni 2009 /
15:30-18:00u

AMERSFOORT

SG Guido de Brès
Paladijnenweg 251 (033-4792900)
A: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)
B: dhr. F. van den Heuvel (030-2730898)

AMSTERDAM

CSG Buitenveldert
De Cuserstraat 3 (020-6423902)
(*CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51*)
A: dhr. S.T. Min (0229-237756)
B: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)

regio Arnhem: ROZENDAAL

Het Rhedens
Kleiberglaan 1 (026-3646845)
A: geen bijeenkomst
B: dhr. A.T. Sterk (055-3666466)

's-GRAVENHAGE

Hofstad Lyceum
Colijnplein 9 (070-3687670)
A: mw. M.P. Kollenveld (070-3907004)
B: dhr. R.J. Klinkenberg (070-3559938)

GRONINGEN

Röling College
Melisseweg 2 (050-5474141)
A: mw. O. Eringa (0512-519160)
B: mw. N. den Braber (050-5893847)

's-HERTOGENBOSCH

Ds. Pierson College
G. ter Borchstraat 1 (073-6442929)
(*Station NS Den Bosch-OOST*)
A: geen bijeenkomst
B: dhr. H.J. Kruisselbrink (073-5216386)

NIJMEGEN

Mondialcollege
Leuvenbroek 30-01 (024-3786993)
A: mw. L. Dirven (024-3239329)
B: geen bijeenkomst

ROTTERDAM

Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-2862930) ^[2]
(*Station NS Alexanderpolder*)
A: dhr. G. de Jong (0118-628903)
B: mw. A.E.L. de Jongh Swemer
(010-4138432)

ZWOLLE

Van der Capellen SG
Lassuslaan 230 (038-4225202)
A: mw. A.C.H. Gieles (038-4656988)
B: dhr. H. Schutjes (0529-427306)

Noten

- [1] Kijk op de website (*www.mvuw.nl*) of de bespreking doorgang vindt.
- [2] Parkeren op parkeerterrein Almeria-erf 8 is toegestaan.



Rekenkundige rijen van kwadraatsommen

[Frits Göbel]

Onder een kwadraat verstaan we hier: een kwadraat van een positief geheel getal. De verzameling van de getallen die zijn te schrijven als som van twee zulke kwadraten, noemen we voor het gemak A . De rij van getallen die tot A behoren, begint dus als volgt:

2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 37, 40, 41, 45, 50, 52, 53, 58, 61, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100

Een nodige voorwaarde opdat een getal tot A behoort is: priemfactoren van de vorm $4k + 3$ hebben een even exponent. Een gevolg hiervan is dat $(9\text{-vouden} + 3)$ en $(9\text{-vouden} + 6)$ niet in A zitten. Een ander gemakkelijk te herkennen type getallen zijn de $(4\text{-vouden} + 3)$, die evenmin tot A behoren aangezien ieder kwadraat modulo 4 gelijk is aan 0 of 1.

In de opgaven bekijken we *rekenkundige rijen* waarvan de termen tot A behoren.

Er heeft onlangs een doorbraak op wiskundig gebied plaats gevonden toen werd bewezen dat er willekeurig lange rekenkundige rijen van priemgetallen bestaan; zie het artikel van Rob Tijdeman, *Ostrowskiprijs voor Green en Tao*, in *Euclides* 82(5).

Onze verzameling A heeft een grotere dichtheid dan de priemgetallen en meer structuur. Daardoor kan hier met eenvoudige middelen iets over rekenkundige rijen worden gezegd. Maar of ze willekeurig lang kunnen zijn, weet ik niet.

Om te beginnen bekijken we rijen met verschil 2. Bij de priemgetallen is 3, 5, 7 de enige mogelijkheid. In de verzameling A moeten we wat verder zoeken.

Opgave 1

Bepaal in A een rekenkundige rij van drie termen met verschil 2.

Zo'n rij (met verschil 2) kan in A natuurlijk niet meer dan drie termen hebben. Maar rijen van precies drie termen zijn er genoeg.

Opgave 2

Bewijs dat er in A oneindig veel rekenkundige rijen van drie termen met verschil 2 bestaan.

Net als bij de priemgetallen moet je voor langere rekenkundige rijen in het algemeen een groter verschil nemen.

Opgave 3

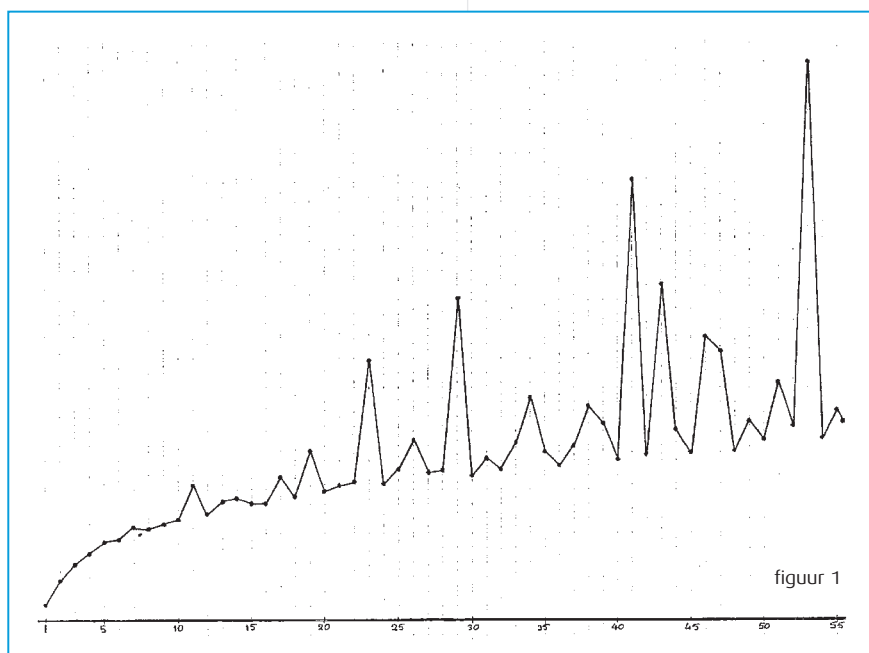
Bepaal een rekenkundige rij in A van vijf termen met verschil 4.

Opvallend is dat het verschil 8 al veel eerder optreedt, namelijk beginnend bij 2. Wie de volgende opgave zonder computer wil oplossen, heeft wel wat geluk nodig.

Opgave 4

Bepaal een rekenkundige rij in A van minstens 13 termen met een verschil naar keuze.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@uws.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 12 mei 2009. Veel plezier!



figuur 1

Verschil van twee kwadraten

Er waren 23 inzendingen waaronder één van een nieuwe oplosser: Boudewijn Coster. Hartelijk welkom!

De opgaven waren niet al te moeilijk, maar verschillende inzenders hebben veel meer gedaan dan werd gevraagd, en zo werd het toch nog interessant.

Opgave 1 werd door iedereen correct opgelost. Het antwoord is:
 $(n, k) = (31, 29), (17, 13), (13, 7), (11, 1)$

Het antwoord op *opgave 2* is: 3, 15, 45, 96, 192, 240, 576, 480, 720, 960.

Met name $m = 7$ gaf wel eens problemen. Ook waren er enkele oplosers die aannamen dat na 96 en 192 alle verdere aantallen steeds twee maal zo groot worden! Sommige anderen daarentegen vonden de uitdaging te klein, en gaven een keurige probleemanalyse.

Wobien Doyer gebruikte de functie $t(m) = 2 \cdot a(m) + k(m)$, waarbij $a(m)$ het aantal ontbindingen is van m in twee factoren met verschillende pariteit en $k(m) = 1$ of 0 al naar gelang m een kwadraat is of niet. Ze laat zien dat $t(m)$ multiplicatief is, en dus eenvoudig te bepalen voor alle m . Hierna moet natuurlijk nog wel wat werk verzet worden. Gerhard Riphagen schakelde na zijn analyse de computer in en ging tot $m = 100$; Jan Verbakel zelfs tot 200.

Opvallend in deze getallenrij zijn de uitschieters naar boven. Zo is het kleinste getal met precies 23 oplossingen al gelijk aan 50331648.

Beide heren merken op dat het kleinste getal met m oplossingen ($m \geq 5$) gelijk is aan $3 \cdot 2^{m+1}$ wanneer zowel m als $2m + 1$ priem zijn.

Zie ook de grafiek (*in figuur 1*) waarin horizontaal m is uitgezet, van 1 tot en met 56, en verticaal de natuurlijke logaritme van het kleinste getal v met m oplossingen voor $x^2 - y^2 = v$.

Herm Jan Brascamp vond de rij op internet bij Integer Sequences (www.research.att.com/~njas/sequences/). Hans Klein meldt een interessante verzameling problemen bij Project Euler (<http://projecteuler.net/>) waaraan hij (als ik hem goed begrijp) enige tijd geleden ook een probleem, nummer 176, heeft bijgedragen, dat nauw verwant is aan opgave 2.

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

L. de Rooij 552
 G. Riphagen 494
 L. van den Raadt 395
 H. Klein 392
 W. Doyer 375
 N. Wensink 267
 T. Kool 266
 J. Hanenberg 257
 K. Verhoeven 217
 H. Linders 212

De tussentijdse ladderprijs, een boekenbon van 30 euro, gaat naar Lieke de Rooij. Van harte gefeliciteerd!

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDE
VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen

24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en Wiskunde
 28. Voorspellen met Modellen
- Zie verder ook www.nvvw.nl/zebrareeks.html en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase
havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en
tabellen

Formule- en tabellenboekje met formule-kaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs,
lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvvw.nl/lustrumboek2.html
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvvw.nl/Publicaties2.html

Examenrooster 2009	CE	bespreking regionaal
havo A/B	di 19 mei 13:30-16:30u	ma 25 mei 16:00-18:00u
havo A12 (bezem)	di 19 mei 13:30-16:30u	geen
havo B1/B12 (bezem)		
vmbo TKG	wo 20 mei 13:30-15:30u	geen ⁽¹⁾
vmbo BB		
vwo A1/A12	ma 25 mei 13:30-16:30u	wo 27 mei 15:30-18:00u
vwo B1/B12	di 2 juni 13:30-16:30u	do 4 juni 15:30-18:00u

⁽¹⁾ Het verslag van de centrale bespreking TKG wordt op zaterdag 23 mei rond 12:00u gepubliceerd op de NVvW-website.

Zie ook het NVvW-Examenforum via www.nvvw.nl/page.php?id=1843

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvvw.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	2 juni 2009	7 april 2009
8	7 juli 2009	19 mei 2009

Voor examens en examenbesprekingen zie het overzicht linksboven en pag. 236 in dit nummer.

donderdag 23 april, Utrecht

Nascholing Wiskunde D
Organisatie FIsme

vrijdag 24 april, Amsterdam

KdVI-congres: Leve de Wiskunde!
Organisatie UvA

donderdag 7 mei, Utrecht

Nascholing Wiskunde D
Organisatie FIsme

vrijdag 8 mei, Leiden

Nascholingsdag: Dekpuntstelling van
Brouwer
Organisatie Universiteit Leiden

woensdag 13 mei, Utrecht

Studiemiddag 'Rekenproblemen van "ik snap het niet" tot dyscalculie'
Organisatie APS

zaterdag 16 mei, Utrecht

HKRWO-symposium XV: Top of Flop?
Organisatie HKRWO
Zie pag. 184 in nummer 5.

maandag 18 mei, Utrecht

Studiemiddag 'Rekenen, de overgang van
po naar vo'
Organisatie APS

woensdag 20 mei, Utrecht

Centrale bespreking havo A/B
Organisatie NVvW

vrijdag 22 mei, Utrecht

Centrale bespreking vmbo TKG (16:00-
18:00u)
Organisatie NVvW
Zie pag. 236 in dit nummer.

dinsdag 26 mei, Utrecht

Centrale bespreking vwo A1/A12
Organisatie NVvW

donderdag 28 mei, Utrecht

Nascholing Wiskunde D
Organisatie FIsme

woensdag 3 juni, Utrecht

Centrale bespreking vwo B1/B12
Organisatie NVvW

getal & ruimte rekenboek

extra
rekenlessen
enthousiast
ontvangen

Rekenboeken*

- + voor klas 1 t/m 4 vmbo (bk, kgt, t/havo)
- + voor klas 1 t/m 3 havo-vwo
- + sluiten aan bij rapport Meijerink
- + ook digitaal beschikbaar
- + met begin- en eindtoetsen per leerjaar

*de rekenlessen zijn ook opgenomen in de werkboeken van de nieuwe onderbouw editie 2008

Meer weten? Kijk op www.epn.nl/getalenruimte
Of neem contact op met klantenservice via
030 638 3001 of e-mail salesupport.vo@epn.nl

epn

MET GETAL EN RUIMTE KUN JE REKENEN



NETWERK

wiskunde die werkt!



PER 01-08-2009
OOK
ENGLISH EDITION
VOOR VWO

Netwerk 4e editie

Compleet voor vmbo, havo en vwo onderbouw en Tweede Fase



Noordhoff Uitgevers

- Compacte leerlijnen
- Pragmatisch
- Voor vmbo: wiskunde met je handen
- Voor havo/vwo: puzzelen en denken
- Aandacht voor rekenvaardigheden
- Uitgebreide ICT voor vmbo en havo/vwo

Meer informatie op www.netwerk.noordhoff.nl