

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

juni

08
nr 7

jaargang 83

Wiskundeprogramma's
veranderen,
wiskunde A

Voortbestaan van
wiskunde in het hbo

Wiskunde in scenario 5
deel 2

WwF: Feitenvel Malawi

Meisjes en wiskunde

Digitaal toetsen

Euclides en de hbs
aflevering 2



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

juni

08

nr7

jaargang 83

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom
Marja Bos, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Joke Verbeek

Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de
hoofdredacteur: Marja Bos,
Koematen 8, 7754 NV Wachtum
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in
drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op
papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk
en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.de-kleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 63 78
E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
Tel. (038) 444 70 17
E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 52,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te
geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende
nummer.

Niet-leden: € 55,00

Instituten en scholen: € 140,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:

t.a.v. Ada Valkenburg

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: a.valkenburg@de-kleuver.nl



KORT VOORAF

[Marja Bos]

INHOUD

Ingreep OCW in examenvoorstellen cTWO

Op 8 april jl. reageerde staatssecretaris Van Bijsterveldt-Vliegthart op de cTWO-voorstellen voor de 2013-examenprogramma's wiskunde havo/vwo met een aantal ingrijpende wijzigingen, met name voor wiskunde A en C. Daarbij lijkt doorstroomrelevantie het enige criterium geweest te zijn. Natuurlijk is doorstroomrelevantie een belangrijk punt, maar het schoolvak wiskunde kent toch ook nog andere dan alleen instrumentele doelen?

De staatssecretaris voorziet haar besluit van een toelichting waarbij ze de leerstof indeelt in vier nieuwe categorieën: harde kern, binnenring, middenring en buitenring. Zo behoort algebra volgens haar tot de onmisbare harde kern, en statistiek tot de overtuigend geachte buitenring van wiskunde A. Deze visie op statistiek werd in de jaren '50 van de vorige eeuw inderdaad nog breed gedeeld, zie de terugblik van Wim Kleijne in onze special van februari, maar inmiddels is er veel veranderd. Statistiek neemt al jarenlang in heel veel vervolgoopleidingen een belangrijke plaats in.

Het dubbele gezicht van wiskunde A

De merkwaardige constructie waarbij wiskunde A vanaf 2007 een dubbelrol kreeg, te kiezen als 'gammawiskunde' bij het profiel EM maar ook als bètavak bij NG, die spagaat wrekt zich nu: om NG-leerlingen voldoende toe te rusten voor allerlei bèta-opleidingen, kiest OCW ervoor om vanaf 2013 van het vwo-vak wiskunde A een (slap) aftreksel van wiskunde B te maken, met veel aandacht voor analyse, algebra en wat goniometrie, en een substantiële beperking van de voorgestelde statistiek en kansrekening. Het theezakjesmodel *revisited*. (Voor havo zijn de aanpassingen wat minder rigoureuze, al wordt ook daar de statistiek ingeperkt.) Het zou m.i. logischer en eenvoudiger zijn als bepaalde opleidingen (bijvoorbeeld in het technisch hbo) gewoon wiskunde B verplicht zouden stellen – maar kennelijk is men benauwd dat dat te weinig studenten oplevert...

Anderzijds hebben niet alleen allerlei sociale wetenschappen maar ook medische en biologische opleidingen belang bij een behoorlijke portie voorkennis op het gebied van de statistiek. Voor deze opleidingen is het huidige vak wiskunde A bepaald niet ongeschikt. Dat dat binnen NG niet zo best combineert met natuurkunde, is een probleem dat OCW had kunnen voorzien. Destijds mochten er bij de plannen voor de vernieuwde Tweede Fase per profiel namelijk maar drie profielvakken worden vastgesteld, en aldus sneuvelde natuurkunde als verplicht NG-profielvak. Dit werd door ambtenaren van OCW onder meer verdedigd met het argument dat natuurkunde heus niet verplicht gesteld zou worden door de medische faculteiten – een inschatting die velen toen al verbaasde. En inderdaad, de geneeskunde-opleidingen besloten uiteindelijk wel degelijk NG met natuurkunde (of NT met biologie) als toegangseis te stellen. Tsja.

Wiskunde C als doorstroomrelevant vak?!

OCW wil in de programma's voor wiskunde C meer algebra. De doelgroep voor dit vwo-CM-vak wordt met name gevormd door leerlingen die wiskunde liever kwijt dan rijk zijn en voor wie wiskunde A niet haalbaar lijkt. Afgaand op gegevens van vóór de invoering van de Tweede Fase is dat slechts zo'n 5% van de vwo-populatie. Het zijn leerlingen die bijvoorbeeld geschiedenis, een taal of rechten zullen gaan studeren. De bijbehorende schoolwiskunde hoeft daarvoor natuurlijk niet of nauwelijks 'doorstroomrelevant' te zijn; voor deze leerlingen zou het m.i. vooral moeten gaan om zaken als gecijferdheid, wat statistiek en een paar bijzondere toepassingen van wiskunde in bijvoorbeeld maatschappij en kunst. Maar algebra?!

Wiskunde B en het doekje voor het bloeden

Verschillende keren verwijst Van Bijsterveldt bij geschrapte onderdelen in wiskunde B naar de ruimte die daarvoor gemaakt zou kunnen worden binnen wiskunde D en NLT. Dat was natuurlijk te verwachten: wiskunde D, het doekje voor het bloeden bij de teloorgang van wiskunde B12, kan nu dienen als excuus-Truus voor al die onderdelen die door cTWO belangrijk werden gevonden maar door OCW geschrapt worden. Let wel: wiskunde D is een door scholen facultatief aan te bieden en vervolgens door leerlingen facultatief te kiezen vak, voor geen enkele studie verplicht, concurrerend met bijvoorbeeld het schoolvak biologie waarmee ook vwo-NT-leerlingen toegang krijgen tot de zo populaire medische studies.

Wiskunde D zal uiteindelijk maar door een klein deel van de N-profielers gekozen worden, verwacht ik. Uitdagende wiskunde die stimuleert tot de keuze van een exacte of technische vervolgstudie, die wiskunde hoort in het reguliere programma thuis. In wiskunde B dus.

325	Kort vooraf [Marja Bos]
326	Euclides en de hbs vóór de Tweede Wereldoorlog, aflevering 2 [Martinus van Hoorn]
331	Vernieuwde eindexamenprogramma's niet vóór 2012 [Berenice Michels]
332	Wiskundeprogramma's veranderen; wiskunde A voor havo en vwo [Jenneke Krüger]
335	Vakvernieuwing bèta in de Tweede Fase [Berenice Michels]
336	Voortbestaan van wiskunde in het hbo: in actie! [Hans Daale]
340	Wiskunde in scenario 5, deel 2 [Vincent Jonker e.a.]
346	Meisjes en wiskunde [Bert Zwaneveld]
349	Feitenvel Malawi [Jan Zuidema]
350	Digitaal toetsen vraagt een strakke aanpak [Metha Kamminga]
353	Wiskundige CSI [André Heck]
357	Boekbespreking / Zebra 26 [Chris van der Heijden]
359	Verschenen
361	Oproep NVvW-studiedag 2008 [Wim Kuipers]
362	Recreatie [Frits Göbel]
364	Servicepagina

Rectificatie Euclides 83-4

In het artikel 'Bijziendheid en geboortemaand' is een foutje geslopen. Op pag. 170, linkerkolom, 11e regel onder tabel 2, moet het getal 517 vervangen worden door 617.

Euclides en de hbs vóór de Tweede Wereldoorlog

AFLEVERING 2

[Martinus van Hoorn]

In aflevering 1 (zie *Euclides* 83(6), pp. 286-291) werd de hogere burgerschool (hbs) beschreven. Ook werd de oprichting van de lerarenorganisaties Wimecos en Liwenagel gememoreerd, en die van het tijdschrift *Euclides*.

2 Het schoolvak wiskunde

2.1 Het wiskundeonderwijs

De meeste lessen op de hbs'en en gymnasia zullen op traditionele wijze zijn gegeven: de leraar gaf uitleg over een gedeelte van de leerstof, en de leerlingen moesten de theorie kennen en vraagstukken maken. Groot belang werd gehecht aan formulekennis. Dit verminderde, herhaaldelijk leest men dat het begrijpen van de stof voorop werd gesteld. Door teveel reproductiewerk was begripvorming allicht in het gedrang gekomen.^[22] Het wiskundeprogramma omvatte in de onderbouw stelskunde (algebra) en planimetrie (vlakke meetkunde). In stelskunde was ook rekenkunde opgenomen. Veel aandacht kreeg het werken met logaritmetafels. Het eindexamen 5-jarige hbs omvatte stereometrie, beschrijvende meetkunde, algebra, en gonio- en trigonometrie. Beschrijvende meetkunde werd op het gymnasium, bij de modernisering van het leerplan in 1919 aldaar, vervangen door analytische meetkunde.

De 'euclidische' planimetrie werd axiomatisch opgebouwd, althans dat heette zo te zijn. Elke nieuwe stelling moest uit voorafgaande stellingen en axioma's worden bewezen. Daarom werden vreemde elementen geweerd, zoals de sinus- en de cosinusregel. De cosinusregel werd omzeild met de projectiestelling. Trigonometrie (= driehoeksmeting) bevatte de sinus-, de cosinus- en de tangensregel, en nog veel meer. Gonio- en trigonometrie hadden een eigen cultus, rechtstreekse tafels van goniometrische verhoudingen mochten niet worden gebruikt, slechts tafels van *log sin* en *log tan* waren toegestaan. Er waren mensen die deze cultus afwezen.^[23] Het functiebegrip speelde een ondergeschikte rol. Gonio- en trigonometrie en algebra waren rekenvakken met veel formules. Kwadratische functies - met een batterij formules - kwamen tot op het eindexamen voor. Differentiaal- en integraalrekening bleef op de hbs nog buiten

het leerplan. Op het gymnasium was in 1919 differentiaal- en integraalrekening in het leerplan opgenomen, maar niet in het examenprogramma. De gerichtheid op formulekennis en rekentechniek was niet zo vreemd. In veel technische toepassingen moest flink gerekend worden. De Polytechnische School c.q. Technische Hogeschool was tot 1917 de hoogste reguliere vervolgopleiding van de hbs. Beschrijvende meetkunde was belangrijk voor technisch tekenwerk. Maar differentiaal- en integraalrekening was allang onmisbaar voor technici die bij de tijd wilden blijven.^[24] De hbs-wiskunde begon inhoudelijk achter te lopen. Voor een middelmatige leerling kon wiskunde een rampzalig vak zijn. Hiervan getuigt de volgende zinsnede, bij de oprichting van de eerste afdeling hbs-A (in 1924 te Hoogezand): de A-afdeling gaf leerlingen de gelegenheid 'aan het zuware wis-, natuur-, schei- en werktuigkunde-programma (werktuigkunde = mechanica) te ontkomen'.^[25]

2.2 Het werk van Hilbert en Klein

In de negentiende eeuw beleefde de wiskunde een geweldige opmars. Nieuwe gebieden kwamen op, zoals niet-euclidische meetkunde, groepentheorie, differentiaalmeetkunde, de leer der reële getallen en statistiek. Nadere studie van de grondslagen lag voor de hand. David Hilbert zette de toon. In zijn *Grundlagen der Geometrie* (1899) bouwde hij euclidische en niet-euclidische meetkunde helemaal op. Hij begon met een verzameling (van punten), tezamen met zekere deelverzamelingen (lijnen), en voegde de ongedefinieerde begrippen *congruent* en *tussenliggend* toe. Verder werkend kon hij wel of niet een parallellenaxioma toevoegen, en een theorie ontwikkelen omtrent lengte. Een definitie hiervan werd in *Euclides' Elementen* op subtiële wijze vermeden.^[26]

David Hilbert (1862-1943) was hoogleraar te Göttingen, destijds het mondiale centrum van de wiskunde. Ook Gauss en Riemann hadden er gewerkt. Hilbert was rond 1900 de leider.



David Hilbert



Felix Klein

Eveneens te Göttingen werkte Felix Klein (1849-1925), die bovendien voorstellen deed ter verbetering van het wiskundeonderwijs. Hij wilde meetkundige begrippen geleidelijk introduceren, via aanschouwelijke voorbeelden, zonder het euclidische kader, contexten uit bijvoorbeeld de landmeetkunde gebruiken en transformaties invoeren. Het genetisch principe, d.w.z. een zorgvuldige opbouw, moest blijven. Klein wilde rekening houden met schooltype en individu.^[27] Zijn opvattingen werden onderschreven door de bekende Franse wiskundige Henri Poincaré (1854-1912). Het wiskundeonderwijs zou op de helling moeten. Maar in Nederland gebeurde niets, al werd het werk van Hilbert en Klein onder insiders natuurlijk wel bekend. Zo'n insider was Fred. Schuh, die enkele semesters bij Hilbert en Klein gestudeerd had.



Fred. Schuh (1875-1966), hoogleraar te Delft (1907-1909 en 1916-1945) en te Groningen (1909-1916).

Schuh schreef vele bijdragen voor het *Nieuw Tijdschrift* en *Euclides* - Wijdenes had zulke deskundige en productieve auteurs nodig. Soms bleek iets van Schuh's opvattingen. Op 28 december 1927 hield hij voor Wimecos de voordracht 'De waarde van het wiskundig redeneren', die als artikel verscheen in *Euclides*.^[28] Hij pleitte daarin tegen het 'tijdverknoeien' door oefeningen zonder begrip, en hij achtte het functiebegrip en differentiaal- en integraalrekening noodzakelijk. Hij wilde zo spoedig mogelijk over de meetkundige axioma's heenlopen omdat deze niet behoorden tot 'de stof die de leerling moet kunnen reproduceren'. Ook in hogere leerjaren wilde hij niet een strenge opbouw vanuit axioma's, want 'een geheel onaanvechtbare behandeling is vrijwel onmogelijk'. Schuh was een diplomaat, hij wist dat behandeling van Hilbert's *Grundlagen* op de hbs ondenkbaar was, maar dat zei hij niet. In 1928 publiceerde Schuh in *Euclides* een 'Axiomatische behandeling der meetbare en onmeetbare grootheden', geen gemakkelijk stuk. Niet ieder zal het hebben doorgewerkt.

2.3 De discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis

In 1924 ontstond een hevige discussie. Eerst publiceerde Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa (1876-1964) de brochure *Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven?*^[29] Mevrouw Ehrenfest wist wat ze schreef, zij had gestudeerd bij Hilbert en Klein, zij was in Rusland lerares geweest, en zij had met velen gesproken over het Nederlandse wiskundeonderwijs. Zij was in 1912 naar Nederland gekomen vanwege de benoeming van haar echtgenoot Paul Ehrenfest tot hoogleraar in Leiden, als opvolger van Lorentz.



Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

53. In welcher Himmelsrichtung soll man aus Berlin auf einem Aeroplan herausfliegen um auf dem kürzesten Wege nach Moskau zu kommen? Dasselbe für Berlin - Java. - Auf dem Globus mit Hilfe einer gespannten Schnur feststellen. - Ist der Bogen eines Parallelkreises die kürzeste Linie auf der Kugeloberfläche zwischen beiden Enden?

57. Es sollen sich drei Schüler längs einer Geraden vor die Klasse aufstellen - ohne irgend welche Hilfsmittel zu gebrauchen; ein vierter Schüler soll sie, ebenfalls ohne Hilfsmittel kontrollieren. - Worauf beruht die Möglichkeit dieser Aufgabe?

69. Warum läuft der Mond uns nach? Warum laufen uns die nahen Gegenstände rascher vorbei, als die entfernten, wenn wir etwa in einem Zuge fahren? - Eine schematische Zeichnung machen.

101. Ein Glas so halten, dass man seinen obersten Rand als eine Gerade erblickt (mit einem Auge anschauen!). Dann ihn allmählig nach unten bewegen. Wie erscheint nun dieser Rand? Wie soll man ihn zeichnen? - Eine Glasplatte zwischen Auge und Glas aufstellen und darauf den Rand zeichnen so, wie man ihn sieht. - Wie soll man das Glas halten, damit auf der Glasplatte der Rand exakt kreisförmig herauskommt?

Enkele Übungen van mevrouw Ehrenfest

In haar brochure pleitte mevrouw Ehrenfest voor een intuïtieve inleiding tot de meetkunde, die moest worden opgevat als ruimteleer. Zij wees een volledig logisch-deductieve aanpak af, met name omdat door een grote nadruk op axioma's en stellingen het ruimtelijk begrip op de tweede plaats kwam, terwijl het daar toch om ging. De zaak werd verergerd doordat minder getalenteerde leerlingen axioma's en stellingen uit het hoofd gingen leren. Mevrouw Ehrenfest werkte haar ideeën uit in de *Übungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse* (1931).^[30] Vanaf 1936 was zij actief in de Wiskunde Werkgroep van de WVO.^[31]

De brochure van mevrouw Ehrenfest werd zeker gelezen door E.J. Dijksterhuis, die leraar was aan de Rijks hbs te Tilburg. Eduard Jan Dijksterhuis (1892-1965) had een grote kennis van de Griekse oudheid en had al naam gemaakt als wetenschaps-historicus. Zijn favoriete filosoof was Plato. Hij had in Groningen colleges gevolgd bij Schuh, die hij waardeerde. Hij zou nog redacteur worden van het literaire tijdschrift *De Gids*.^[32] Dijksterhuis was ervan overtuigd dat de wiskunde geheel exact moest worden behandeld. Reeds in 1921 had hij daarover geschreven, waarbij ook bleek dat hij niets moest hebben van pedagogische vernieuwingen.^[33] Hij was onaangenaam getroffen door mevrouw Ehrenfest's publicatie en wilde als reactie zelf een

brochure uitbrengen, die hij aanbood aan uitgever Noordhoff. Deze vroeg advies aan Wijdenes, die nu een kans zag te beginnen met een periodiek voor leraren. Dit werd het *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen*. Het eerste nummer opende met het stuk van Dijksterhuis: 'Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? Opmerkingen naar aanleiding van een brochure van Mevrouw Ehrenfest-Afanassje[e]wa'.



E.J. Dijksterhuis

Dijksterhuis meende dat hetgeen mevrouw Ehrenfest verlangde 'een aanslag zou betekenen op wat steeds als een der meest kostelijke vruchten van het wiskunde-onderwijs heeft gegolden: op de zuiverheid en eerlijkheid van het mathematische denken en spreken, op de geestelijke tucht, orde en reinheid, die de mathesis nastreeft'. Aanschouwelijke voorbeelden

konden volgens Dijksterhuis juist een verkeerde begripsvorming oproepen, en het aanbrengen van ruimtelijk begrip, waarmee volgens mevrouw Ehrenfest zoveel misging, behoorde toch te worden voorafgegaan door de behandeling van de vlakke meetkunde, waarin zulke begripsverwarring niet denkbaar was, maar waaraan zij vrijwel voorbijging. Een vergelijk tussen beiden was ondenkbaar. De ideeën van mevrouw Ehrenfest stonden op afstand van de dagelijkse lespraktijk. Dijksterhuis nam een uitgesproken positie in.

2.4 Wijdenes terechtgewezen door Dijksterhuis
Maatgevend waren de boeken van P. Molenbroek, het *Leerboek der vlakke meetkunde* en het *Leerboek der stereometrie*, beide bestemd voor de akteopleidingen.^[34] Wijdenes, die de rechten erop had overgenomen, stond voor de inhoud. In Euclides' *Elementen* werden lengte en hoekgrootte niet gedefinieerd, en er werd dan ook niet mee gerekend. Wel kon van een lijnstuk een rationaal veelvoud worden geconstrueerd, en van een hoek de helft of de dubbele. Stelling 80 - hierbij afgedrukt - zou, om te passen in een strikt euclidisch systeem, moeten worden gherformuleerd, omdat in deze stelling lengtes worden benoemd. Het is interessant te zien dat Wijdenes rekende met lengtes en hoekgroottes. Dat moest hij funderen, en daarom moest hij een lengtebegrip definiëren. In de zevende druk uit 1931 van het *Leerboek der vlakke meetkunde* schreef hij: 'Om tot een

uitdrukking voor de grootte van een voorwerp in getallen te geraken, is het altijd nodig, dat voorwerp te vergelijken met een ander voorwerp van dezelfde soort'. Wijdenes werkte toe naar een eenheid van lengte, die gerepresenteerd moest worden door een lijnstuk. Hij moest daarbij omschrijven wanneer twee lijnstukken gelijk zijn: 'twee lijnstukken worden gelijk genoemd, als zij zodanig geplaatst kunnen worden, dat zij elkander bedekken'. Maar hiertoe moest hij laten zien hoe het ene lijnstuk op het andere kon worden afgepast: 'gegeven zijn twee rechten l en m; op l is een lijnstuk AB gegeven [en op m een punt A']; **men postuleert**, d.i. men eist, de mogelijkheid, dat het lijnstuk AB vanuit A' uit op m kan worden afgepast; men zet dan AB = A'B'.' Wijdenes schreef 'men postuleert', met andere woorden hij sluisde een postulaat (ofwel axioma) in, ongenummerd en midden in een zin. Wijdenes wist waarom hij dat deed, hij wilde aldus de mogelijk onmeetbare^[35] onderlinge verhouding van twee lijnstukken meenemen - zoals de verhouding tussen diagonaal en zijde van een vierkant. Dit werd in de *Elementen* vermeden. Maar nu deze stap eenmaal gezet was, kon volgens Wijdenes de som van elk tweetal lijnstukken worden gedefinieerd, ook wanneer hun verhouding onmeetbaar was, en daarmee werd het mogelijk een lengte-eenheid te definiëren. Wijdenes' werkwijze kwam niet van Euclides, maar al sinds Archimedes, die na Euclides leefde, werd met lengtes gerekend. Veel later wilde onder anderen Adrien-Marie Legendre



Pieter Wijdenes (22 december 1872-17 februari 1972).

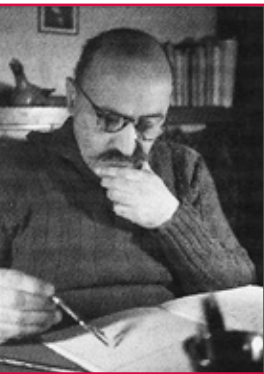
(1752-1833) dit funderen. Legendre's leerboek *Éléments de géométrie* (1794) brak volgens Struik met het platonische ideaal van Euclides, sloot aan bij moderne opvattingen, en had blijvende invloed.^[36] Legendre voerde inderdaad lengtes en hoekgroottes in. Misschien kwam Wijdenes' werkwijze, langs een omweg en wat gewijzigd, van Legendre. Elders wijst Wansink op de boeken van Jan Versluys (1845-1920), die stellig onder Franse invloed stonden.^[37] Voor Hilbert waren Legendre's grondslagen ontoereikend. In 1929 verscheen in *Euclides* een recensie door Dijksterhuis van de zevende druk van het *Leerboek der Stereometrie* (uit 1928) van Molenbroek c.q. Wijdenes. Dijksterhuis roemde het boek vanwege de bruikbaarheid voor de akte-examens en als handboek voor docenten. Maar: '[ik kan] echter niet verzwijgen, dat er nog wel heel wat [is] overgebleven. Immers evenmin als de Planimetrie van Molenbroek-Wijdenes is de Stereometrie op de hoogte van de tijd, wat de axiomatische fundering betreft. In beide werken worden terloops enkele axioma's ingevoerd, die in het geheel niet voldoende zijn, om daarop de meetkunde op te bouwen; daarna wordt dan natuurlijk zo vaak een beroep op de aanschouwing gedaan, dat die enkele axioma's ook wel weg hadden kunnen blijven.' Wijdenes moest zich dit aantrekken. In latere drukken deed hij het dan ook anders.^[38] Achterin het boek kwam een aanhangsel, waarnaar hij in het openingshoofdstuk met een voetnoot verwees: 'Dat het inderdaad mogelijk is, aan de lijnstukken maatgetallen toe te kennen, die aan deze eisen voldoen, wordt in het aanhangsel aangetoond. Tevens blijkt, dat de maatgetallen door de keus van de lengte-eenheid ondubbelzinnig bepaald worden.' Dit aanhangsel was niet door

Wijdenes geschreven, maar door zijn leerling K. Harlaar. Deze gaf een uiteenzetting gebaseerd op een nieuw boek van B.L. van der Waerden. Ná het aanhangsel werden, kennelijk door Wijdenes, 40 wiskundigen beschreven; Legendre en Klein werden daarbij zelfs niet genoemd en Hilbert moest het doen met de tekst: 'Hij werd in 1895 hoogleraar te Göttingen. Hilbert is een der grote wiskundigen van de nieuwere tijd. Zijn sterke invloed op de axiomatische behandeling der meetkunde begint met zijn Grundlagen der Geometrie (1899).'

Wijdenes liet zien dat hij de nieuwe axiomatiek kende, maar de gebruikers van zijn boeken mochten het aanhangsel overslaan. Moderne grondslagen behoorden niet tot de stof voor K I - vandaar waarschijnlijk de terloopse verwijzing. Hilbert's *Grundlagen* vereisten een theorie over onmeetbare verhoudingen. In de negentiende eeuw was een leer van het reële getal gevormd, onder meer door Dedekind en Cantor. Dit vervlechten in het schoolonderwijs leek geen optie. Van der Waerden had een weg gewezen, die nog niet eenvoudig was.

2.5 Schogt terechtgewezen door Dijksterhuis
Euclides-redacteur Schogt schreef naast al zijn werk ook leerboeken voor de hbs. Schogt stond bekend om zijn precisie. Waarschijnlijk juist daarom werden zijn leerboeken weinig gebruikt. In 1929 kwam bij Noordhoff uit zijn *Beginselen der Vlakke Meetkunde*. Een leerboek voor beginners, overeenkomstig de hedendaagse inzichten in de Euclidische Meetkunde. Dit boek werd door Dijksterhuis omstandig in *Euclides* besproken.

Dijksterhuis verwees naar een eerder verschenen mechanicaboek van Schogt, en zei: 'De heer J.H. Schogt [...] heeft thans een inleiding in de euclidische meetkunde het licht doen zien, die voorbestemd schijnt om in nog hogere mate dan het eerstgenoemde werk mathematische lof te oogsten en didactische onenigheid te veroorzaken.' Dijksterhuis beschreef Schogt's nauwkeurige manier van werken: 'Als een voorbeeld wil ik noemen de onderscheiding tussen lijn, halve lijn, lijnstuk, lengte van een lijnstuk en goniometrische maat van een lijnstuk, die ook consequent wordt volgehouden in het spreken van hoogtelijnstukken, zwaartelijnstukken [...].'



J.H. Schogt

Daarna bezag Dijksterhuis de didactische waarde van het boek: 'Ik kom thans tot het moeilijkste punt van deze bespreking, tot de vraag namelijk, hoe men het boek van de heer Schogt moet beoordelen, wanneer men onder de beginners, waarvoor het geschreven is, de leerlingen uit de eerste drie klassen van een H.B.S. verstaat.'

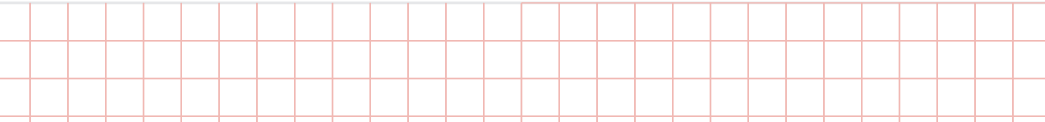
Dijksterhuis stelde: 'Het komt mij ongelooflijk voor, dat men in een eerste klas van een H.B.S. met leerlingen, die pas van de Lagere School komen, zo te werk zal kunnen gaan.' Aan het slot van zijn verhaal merkte Dijksterhuis op: 'De heer Schogt had nog maar meer terug moeten gaan tot Euclides; hij had maar in dezelfde beperkte mate als zijn illuster voorbeeld gebruik moeten maken van het bewegingsbegrip en de superpositiemethode, onbekommerd om de wetenschappelijke bezwaren, die daartegen kunnen worden aangevoerd. Want die bezwaren worden toch nooit spontaan door een leerling gevoeld, en

H.J.E. Beth op zijn zeventigste verjaardag in 1950. Geheel rechts Dijksterhuis, naast hem de zoon E.W. Beth.



men moet van dat gemis aan kritiek maar liever dankbaar gebruik maken [...].' Hier stelde Dijksterhuis de euclidische grondslagen boven de nieuwere.

2.6 Voorstellen van de commissie-Beth
Bovenstaande recensies verschenen in *Euclides* in 1929 en 1930. Toen had Dijksterhuis zijn gezag allang verworven. Zo was hij in 1925 lid geworden van een leerplancommissie, die werd geïnstalleerd door het college van inspecteurs. Deze commissie moest, indien nodig geoordeeld, voorstellen doen om het wiskundeonderwijs op de hbs te verbeteren.^[39] Voorzitter werd H.J.E. Beth, directeur van de Rijks hbs te Deventer, secretaris werd E.J. Dijksterhuis, en leden werden J. van AnDEL, directeur van de christelijke hbs te Den Haag, en P.J.J.H.M. Cramer, leraar aan de rooms-katholieke hbs te Rolduc. Van AnDEL en Cramer moesten de belangen van het protestants-christelijk en het rooms-katholiek onderwijs behartigen. Naar de beginletters van de achternamen heet de commissie wel ABCD-commissie, maar vaker wordt zij commissie-Beth genoemd. Hermanus Johannes Elisa Beth (1880-1952) was medewerker van *Euclides* en waardeerde Dijksterhuis. Jan van AnDEL (1884-1958) zou in 1927 voorzitter worden van de 'Vereeniging van Leeraren bij het Christelijk Middelbaar Onderwijs'. Patricius Cramer (1888-1955) was in 1911 tot priester gewijd, studeerde daarna te Amsterdam wis- en natuurkunde en



was van 1918-1933 leraar te Rolduc (bij Kerkrade). Daarna werd hij dorpspastoor. Een stichting beijvert zich voor zijn zaligverklaring.^[40]



J. van Andel



P.J.J.H.M. Cramer

In 1926 kwam de commissie-Beth met haar rapport. Zij wilde meer nadruk op het functiebegrip en invoering van differentiaal- en integraalrekening. De opbouw van de meetkunde vanuit axioma's moest worden gehandhaafd. Invoering van dit voorzichtig vernieuwde programma werd echter geblokkeerd, namelijk door de wiskundige binnen het college van inspecteurs, E. Jensema. Elibert Jensema (1867-1939) was directeur geweest van 's lands oudste Rijks hbs, te Groningen. Als inspecteur moest hij de kwaliteit van het hbs-onderwijs bewaken. Hij zag de vele nieuwe scholen en nieuwe leraren, en kende de goede reputatie van de hbs - die verkregen was met het oude programma. Enige voorzichtigheid ten aanzien van programmawijzigingen lag zeker voor de hand. Jensema stond niet alleen, ook de Delftse hoogleraren met voorop J.G. Rutgers voelden niet voor het nieuwe leerplan. Zij meenden dat de rekenvaardigheid van aankomende studenten eronder zou lijden. Rutgers had in 1923 zijn *Inleiding tot de analytische meetkunde* het licht doen zien, met honderden formules en vrijwel niets over grondslagen. Mogelijkerwijze hoopten sommigen die zich tegen de voorstellen van de commissie-Beth uitspraken, aldus een 6-jarige hbs dichterbij te brengen. Deze hoop was ijdel, een 6-jarige hbs was te duur. Inspecteur Jensema geldt als conservatief. In een bespreking op school had hij gezegd dat voor een tweede of derde generatie stedelingen 'terugkeer tot het leven des landmans geboden was wegens dan wel noodzakelijk geworden regeneratie, opdat weer een periode later een herhaalde transfusie zou kunnen volgen'.^[41] Zou iemand met een zo romantische cultuur-opvatting ooit vóór modernisering kunnen zijn?

Jensema's uitspraak werd weergegeven door Oene Bottema (1901-1992),^[42] die oud-leerling van Jensema was. Bottema schreef dat Jensema een uitstekend directeur was, en vermeldde over diens lessen: '*Hij was, zonder enig voorbehoud, een voortreffelijk docent. Boeken en formules schoof hij, als niet-essentieel, van de tafel. [...] De les voltrok zich in een vrij laag tempo, omdat zoveel mogelijk op de beginselen werd teruggegrepen, terwijl bovendien het gehoor zeer intensief in de redenering werd betrokken. [...] Zijn wijze van doen zou de Socratische methode genoemd kunnen zijn, maar dan niet door hemzelf, want methodiek en pedagogiek, daar hield Jensema niet van*'. Jensema werd als wiskunde-inspecteur opgevolgd door Van Andel, die zelf lid van de ABCD-commissie was geweest.^[43]



E. Jensema

Nu mocht medewerking worden verwacht, en in 1937 verscheen een nieuw hbs-leerplan, met meer aandacht voor functies en grafieken en invoering van differentiaal- en integraalrekening. In *Euclides* schreef H.J.E. Beth: '*hoofddoel van het wiskundeonderwijs is het bijdragen tot geestelijke vorming en ontwikkeling; nevensdoel het aanbrengen van nuttige kennis*'. Differentiaal- en integraalrekening kwam niet in het examenprogramma, wel in het leerplan - net als bij het gymnasium.

2.7 Het wiskundeonderwijs in andere landen
Een vraag is hoe de Nederlandse leerplannen zich verhielden tot die in andere landen. Door de Eerste Wereldoorlog was de kaart van Europa gewijzigd en werd internationaal overleg gefrustreerd. Toch vond de redactie

van *Euclides* deskundigen uit andere landen bereid te schrijven over het wiskundeonderwijs aldaar. Misschien speelde Nederland's neutraliteit gedurende WO I hierbij mee. Samenvattend kan men zeggen dat Nederland niet vooropliep bij de vernieuwing van leerplannen. In enkele andere landen werden veel eerder vakinhoudelijke vernieuwingen doorgevoerd en/of pedagogische vernieuwingen aanbevolen. Onder meer in België liep men sneller. In 1930 schreef Paul De Vaere, zelf medewerker van *Euclides*, over het Belgische onderwijs. In 1924 was in België het leerplan gewijzigd, waarbij het functiebegrip en '*de grafische voorstelling*', de grondbeginselen der differentiaalrekening, '*de natuurlijke waarden*' der goniometrische functies, en een bescheiden propedeutische meetkundecursus waren ingevoerd. De Vaere merkte op: '*De in België gebruikte meetkundeboeken huldigen nog steeds de door Legendre ingevoerde en met die van Euclides niet overeenstemmende verdeling der meetkunde in acht Boeken*'. In België was men zich bewust van de gehanteerde grondslagen. De Vaere gaf ook een samenvatting van (in 1926) in België uitgebrachte '*methodologische wenken*': '*Het hoofddoel van het wiskundeonderwijs is niet het verstrekken van een zekere dosis wetenschap, wel het scholen van de geest en het leren wiskundig denken. Daartoe zal in de eerste plaats het logisch verband tussen de verschillende delen van de leerstof in het licht gesteld worden; zal elk nieuw vraagstuk zo voorgesteld en behandeld worden dat de leerlingen actief meewerken tot zijn oplossing; zal het ex-cathedra onderwijs zoveel mogelijk vermeden worden [...]*'. In een naschrift reageerde De Vaere op een opmerking van Schogt over het Belgische wiskundeonderwijs: '*Voor zover mijn omgang met een paar Hollandse wiskundeleraars en met Hollandse leerboeken en tijdschriften mij in staat stelt het wiskundeonderwijs ten noorden en ten zuiden van de Moerdijk met elkaar te vergelijken, zou ik de mening willen uiten dat in België aan een zorgvuldige uiteenzetting van de theorie meer aandacht geschonken wordt dan tot dusver in Holland gebruikelijk was; dat de gemiddelde Hollandse leerling het echter wellicht van zijn Belgische makker haalt wat de vaardigheid in het maken van ingewikkelde sommen betreft. Misschien is men in België soms te ver gegaan in de richting van de theorie, en was het niet overbodig dat de aanschrijving*

van 1926 de leraars wees op het grote belang van de zelfwerkzaamheid der leerlingen in de klas. Zorgvuldige fundering van de theorie kan trouwens gebeuren met medewerking van de leerlingen en sluit vaardigheid bij het oplossen van vraagstukken niet uit.' Zo vergeleek De Vaere het Nederlandse en het Belgische wiskundeonderwijs. Nederlandse leerlingen waren vooral goed in het maken van sommen. (Opmerkelijk is dat De Vaere de grens met België bij de Moerdijk situeerde - weliswaar de zuidgrens van het gewest Holland, maar geen staatsgrens.)

Verwijzingen

De verwijzingen 1-21 staan in Euclides 83(6), april 2007, op de pagina's 290 en 291.

- [22] Zie ook Dirk Struik in: *Honderd jaar wiskundeonderwijs*.
- [23] P. Wijdenes in *Euclides* 6 (1929-1930), pp. 244-249. *De illusie van het streng redeneren* van Pierre van Hiele in: *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. Inspecteur Van Andel onderschreef Van Hiele's opvatting.
- [24] Van der Woud voornoemd (zie [6]), met name het hoofdstuk *De technische cultuur*.
- [25] Martinus van Hoorn, *Gymnasia en hbs'en vóór de Tweede Wereldoorlog*, in: *Historisch Jaarboek Groningen* 7 (Groningen, 2007).
- [26] Een uiteenzetting geeft Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond* (New York, 2000).
- [27] De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; voornoemd (zie [7]), pp. 231-236.
- [28] Als artikel verschenen in *Euclides* 4 (1927-1928); pp. 181-209. Nb. Wimecos vergaderde tussen Kerst en Oudjaar.
- [29] Bij J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij te Groningen, de concurrent van Noordhoff.
- [30] De *Übungensammlung* was niet zonder precedent. De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; pp. 243-245.

- [31] Ed de Moor in: *Honderd jaar wiskundeonderwijs*.
- [32] Van Berkel voornoemd (zie [10]).
- [33] De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde*; en Klomp voornoemd (zie [10]).
- [34] De boeken bevatten de meetkunde-stof voor het examen K I. Een deel van de stof was voor de LO-akte.
- [35] Onmeetbaar is hier vooralsnog niet-rationaal. De begrippen 'onmeetbaar' en 'irrationaal' zijn echter niet identiek.
- [36] D.J. Struik, *Geschiedenis van de wiskunde* (herziene druk, Utrecht, 1990); p. 197.
- [37] Joh.H. Wansink, *Some aspects of the development of the Dutch school-book market from 1800 to 1940*, in: *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3) XXVI (1978); pp. 206-230.
- [38] Hier is uitgegaan van de elfde druk van het *Leerboek der Vlakke Meetkunde* uit 1952.
- [39] Wim Groen in: *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. *www.pastoorcramer.web-log.nl* (gezien 21 november 2007). Cramer was leraar hbs en gymnasium te Rolduc.
- [41] O. Bottema in: *Gedenkboek Rijks Hogere Burgerschool te Groningen 1864-1964* (Groningen, 1964).
- [42] *Euclides* 77(4), januari 2002, het Bottema-nummer. Van eerdere datum: *Nieuw Archief voor Wiskunde* (4) V, nummer 3 (1987), ook een Bottema-nummer.
- [43] Voor Van Andel zie ook [23].

Over de auteur

Martinus van Hoorn was hoofd-redacteur van *Euclides* gedurende de periode 1987-1996. E-mailadres: *mc.vanhoorn@wxs.nl*

Vernieuwde examenprogramma's niet vóór 2012

[Berenice Michels, SLO / Stuurgroep Vakvernieuwing β5]

De vernieuwingscommissie wiskunde, biologie, natuurkunde en scheikunde hebben concept-examenprogramma's opgeleverd bij het ministerie van OCW. Deze examenprogramma's worden op haalbaarheid, onderwijsbaarheid en toetsbaarheid beproefd in examenexperimenten (pilots). In 2010 zullen de commissies biologie, scheikunde en natuurkunde de staatssecretaris op basis van deze experimenten adviseren over de invoering van vernieuwde programma's. De commissie wiskunde adviseert in 2011. Bij docenten en andere belanghebbenden blijkt onduidelijkheid te bestaan over het moment waarop deze vernieuwde examenprogramma's daadwerkelijk landelijk ingevoerd kunnen worden. De details over deze invoering zijn nog niet bekend, omdat deze zullen afhangen van de resultaten van de pilots. Wel is duidelijk dat tussen het aflopen van de examenpilots en de landelijke invoering van de nieuwe programma's minimaal twee jaar zal verstrijken. Dit in verband met nascholing en het ontwikkelen van nieuwe leermiddelen. Dat betekent dat de vernieuwde programma's voor biologie, natuurkunde en scheikunde op zijn vroegst in 2012 zullen worden ingevoerd en de vernieuwde wiskundeprogramma's niet voor 2013.

Wiskundeprogramma's veranderen

WISKUNDE A VOOR HAVO EN VWO

[Jenneke Krüger]

In dit artikel probeer ik een overzicht te geven van de inhoudelijke wijzigingen in de examenprogramma's voor wiskunde A, havo en vwo, sinds 1998 en vooruitkijkend naar 2013. Dat laatste is natuurlijk nog erg voorlopig, de syllabuscommissies zijn net begonnen met specificaties te formuleren. De staatssecretaris heeft op 9 april haar besluit over de conceptprogramma's bekend gemaakt en aan de vernieuwingscommissie, cTWO, verzocht de door haar aangegeven wijzigingen in de tekst van de diverse programma's op te nemen. Op het moment van schrijven (15 april) is dat nog niet gebeurd. Met name voor het vwo-programma A (en C) zijn de wijzigingen ingrijpend. In dit artikel wordt niet ingegaan op het besluit: alleen de consequenties voor wiskunde A worden in het overzicht betrokken.

Wiskunde A; 1998-2007-2011/2013
Wiskunde A12 is het uitgangspunt voor het programma wiskunde A 2007 geweest, zowel voor havo als vwo. In principe kan cTWO een geheel nieuw programma voorstellen, maar wat betreft onderwerpen verandert er niet zo heel veel. De omvang blijft ook na 2013 hetzelfde: 320 slu voor havo en 520 slu voor vwo. Wiskunde A is bestemd voor zowel profiel E&M als N&G. Enkele aandachtspunten:

- Algebraïsche vaardigheden krijgen meer nadruk in 2007; in de syllabus is gespecificeerd welke algebraïsche technieken een leerling minimaal moet beheersen voor het centraal examen. In 2013 wordt deze lijn voortgezet.
- 'Statistiek en Kansrekening' krijgt van cTWO in 2013 een andere benadering met meer nadruk op dataverwerking. Dit is in de globale eindtermen niet onmiddellijk zichtbaar, het komt tot uiting in de voorgestelde specificaties.

- Het domein 'Vaardigheden' krijgt een wat andere invulling. In 2007 zijn onder andere de historische aspecten verdwenen, voor 2013 heeft cTWO onderscheid gemaakt tussen algemene vaardigheden, toepassingsgerichte vaardigheden en wiskundige vaardigheden; *zie figuur 1*. Toepassingsgerichte vaardigheden komen overeen met onderzoeksvaardigheden uit 2007, maar zijn minder gedetailleerd gespecificeerd. Wiskundige vaardigheden zijn een combinatie van technisch-instrumentele en algebraïsche vaardigheden.
- Eén wiskundeprogramma voor twee profielen, een bètaprofiel en een maatschappijprofiel, wordt als problematisch ervaren.
- Er is de komende jaren nog gelegenheid om uw mening te geven over de programma's voor 2011/13.

figuur 1 Domein A voor wiskunde A 2013

Algemene vaardigheden

De kandidaat heeft kennis van de rol van de wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

Toepassingsgerichte vaardigheden

De kandidaat kan een probleemsituatie in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.

Wiskundige vaardigheden

De kandidaat beheerst de bij het eindexamenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en, waar nodig, met ICT-hulpmiddelen.

De resonansgroep, door de staatssecretaris ingesteld om te adviseren over doorstroom-relevantie van de programma's voor 2013, dringt aan op meer wiskunde B aspecten in vwo wiskunde A, met name met het oog op de studies economie en bedrijfskunde. De staatssecretaris heeft de wensen van de resonansgroep volledig ingewilligd. Bij de in dit artikel opgenomen vergelijking tussen de programma's van 2007 en 2013 is voor 2013 uitgegaan van de globale eindtermen en zijn de door cTWO voorgestelde specificaties niet in de beschouwing betrokken. Die specificaties zijn voorstellen voor de syllabuscommissie, waarin ook een vertegenwoordiger van cTWO is opgenomen. Uiteindelijk is CEVO echter verantwoordelijk voor de specificaties van de globale eindtermen voor het CE. Het is heel waarschijnlijk dat de uiteindelijke syllabus op onderdelen zal verschillen van de voorstellen van cTWO. Wat betreft de toewijzing van onderdelen aan het CE, heeft de staatssecretaris beslist dat voor wiskunde A (havo en vwo) Statistiek en Kansrekening en het Keuzeonderwerp, indien aanwezig, alleen in het SE getoetst moeten worden. Alle andere onderwerpen dienen in het CE getoetst te worden (en mogen in het SE getoetst worden).

Havo; 1998 - 2007

Voor wat betreft havo wiskunde A12 zijn er geen noemenswaardige negatieve reacties vanuit het hoger onderwijs op de programma's van 1998 gekomen. Inhoudelijk zijn er niet zo veel verschillen tussen de programma's 1998 en 2007. De meeste onderwerpen bleven gehandhaafd, met uitzondering van Toegepaste Analyse: daarvan bleven in het 2007-programma alleen exponentiële, gebroken en machtsfuncties over. Differentiëren wordt geschrapt; *zie figuur 2*. Een gedetailleerder overzicht van de verschillen en overeenkomsten tussen de programma's 1998 en 2007 is te vinden in de Handreiking wiskunde havo A, Bijlage 2 (www.slo.nl).

Onderwerp	2007 t.o.v. 1998 verdwenen uit het hele examenprogramma	toegevoegd	alleen in SE getoetst, dus geen specificaties
Vaardigheden	- Informanten kiezen en bevragen - Geschiedenis wiskunde - Voorbeelden van gebruik van wiskunde in andere gebieden	- Algebraïsche en rekenkundige vaardigheden (A5)	- Oriëntatie op studie en beroep
Statistiek	- Gebruik van tabellen bij binomiale verdeling - Standardiseren van normale verdeling en gebruik van bijbehorende tabellen. - Bij permutaties en combinaties wordt het begrip 'faculteit' niet meer genoemd.		- Populatie en steekproef (D1) - Verwerken en samenvatten van statistische gegevens (D2)
Analyse	- Driedimensionale grafieken - Differentiëren - Toepassingen van differentiëren		- Exponentiële functies, gebroken lineaire functies en machtsfuncties (F1 en F2)

figuur 2 Havo A; wijzigingen in 2007 ten opzichte van het programma 1998
A1 is buiten beschouwing gelaten, alleen wijzigingen worden getoond. Als een onderwerp niet in het CE getoetst wordt, moet het in het SE getoetst worden. Specificatie is in dat geval aan de school.

Havo; conceptprogramma's 2011/2013

Rekenen (berekeningen uitvoeren met getallen en daarbij gebruik maken van de hoofdbewerkingen en van het werken met haakjes) en algebraïsche vaardigheden zijn in de inhoudelijke domeinen opgenomen. Het functiebegrip is nauwelijks terug te vinden, er is meer nadruk op formules. Ook dit is een voortzetting van veranderingen die in 2007 in gang zijn gezet. De belangrijkste veranderingen van 2007 en het conceptprogramma van 2011 zijn

in figuur 3 opgenomen. Zoals eerder opgemerkt, is het overzicht gebaseerd op globale eindtermen wat betreft 2013. Zie voor vergelijkingen tussen 1998, 2007 en 2013 ook het verschildocument van cTWO (www.ctwo.nl). De staatssecretaris spreekt twijfels uit over de haalbaarheid van de voorgestelde opzet van Statistiek en Kansrekening, maar brengt geen wijzigingen aan in het conceptprogramma.

Onderwerp	2013 t.o.v. 2007 verdwenen uit het hele examenprogramma	toegevoegd	wijzigingen door staatssecretaris, 9-4-2008
Vaardigheden	- Oriëntatie op studie en beroep	- Toepassingen en belang van wiskunde in maatschappij herkennen en benoemen	
Statistiek en kansrekening	- De eindtermen zijn globaler, uitdrukkingen als populatie, steekproef, centrum- en spreidingsmaten, binomiale verdeling, etc. staan niet in de globale eindtermen.	- Bij een probleem een statistisch onderzoek herkennen	
Rekenen en algebra		Berekeningen correct kunnen uitvoeren, inclusief gebruik van haakjes	
Analyse			

figuur 3 Havo A; concept wijzigingen voor 2013 ten opzichte van het programma 2007
Statistiek en Kansrekening moeten in het SE getoetst worden, andere onderwerpen mogen in het SE getoetst worden. Specificaties voor 2013 zijn buiten beschouwing gelaten, omdat daarover teveel onzekerheid is.

Havo; doorstroomrechten programma 2007

Een havo-diploma geeft toegang tot een aantal studierichtingen hbo. Dit is vastgelegd als toegangsrechten, doorstroomrechten of (nadere) vooropleidingseisen. Hoe zit het nu met wiskunde A wat betreft studiemogelijkheden? Hbo heeft gekozen voor toegangsrecht voornamelijk per profiel. Leerlingen met profiel N&G en profiel E&M mogen in dat profiel in wiskunde A examen doen. Tot welke studierichtingen geeft het profiel N&G, ook met wiskunde A, toegang? De meeste Economische opleidingen, soms wordt aanvullend economie, M&O of een tweede taal geëist; bijna alle opleidingen uit de sector Gedrag en maatschappij; bijna alle opleidingen uit Landbouw en natuurlijke omgeving; bijna alle opleidingen uit Onderwijs; alle opleidingen uit Taal en cultuur en bijna alle opleidingen uit Techniek, soms wordt daar natuurkunde of NLT geëist. Men moet wel concluderen dat hbo-opleidingen niet veel belang hechten aan wiskunde B.

Vwo; 1998 - 2007

Van sommige faculteiten Economie kwamen en komen klachten over het gebrek aan algebraïsche vaardigheden en technieken van studenten met wiskunde A1,2. In het vwo-programma is in de versie 2007 meer geschrapt dan bij havo. Discrete dynamische modellen, Lineair programmeren en Grafen en Matrices zijn in het programma 2007 niet opgenomen. Combinatoriek, Statistiek en Kansrekening zijn in het 2007 programma niet gewijzigd; *zie ook figuur 4*. Een gedetailleerd overzicht van verschillen wat betreft eindtermen en specificaties vindt u in de Handreiking wiskunde vwo A, Bijlage 2 (www.slo.nl). Voor vwo lijkt de spagaat die ontstaat door een wiskundeprogramma voor twee profielen, geprononceerder dan voor havo. Dat komt onder andere door de grotere diepgang die met name de bètavakken op vwo hebben en de hogere eisen die universitaire opleidingen stellen aan de wiskundige voorkennis, vergeleken met hbo-opleidingen.

Vwo; conceptprogramma's 2011/2013

Opvallende wijzigingen in het concept-programma 2011 ten opzichte van 2007 zijn, naast de wijzigingen in Statistiek en Kansrekening:

- apart inhoudelijk subdomein Algebra,
- lineaire vergelijkingen (ook stelsels) toegevoegd.

De belangrijkste veranderingen van 2007 en het conceptprogramma van 2011 zijn *in figuur 5* opgenomen. Zie voor vergelijkingen tussen 1998, 2007 en 2013 ook het verschildocument van cTWO (www.ctwo.nl).

De staatssecretaris heeft bepaald dat de volgende wijzigingen in het concept-programma van cTWO moeten komen.

In het domein Verbanden toevoegen:

- abc-formule;
- de functies sinus, cosinus en tangens.

In het domein Verandering (analyse) toevoegen:

- alle rekenregels voor differentiëren;
- exponentiële en logaritmische functies, dus ook e-macht en ln.

In het domein Statistiek en Kansrekening laten vervallen:

- E7 en E8 (Schatten van een parameter en Relatie tussen twee variabelen).
- Hypothese toetsen mag vervallen, maar dat hoeft niet.

Eventueel kan Keuze-onderwerpen (domein F) vervallen.

Vwo; doorstroomrechten programma 2007

Een vwo-diploma geeft toegang tot een aantal studierichtingen wo. Dit is vastgelegd als toegangsrechten, doorstroomrechten of (nadere) vooropleidingseisen. Hoe zit het nu met wiskunde A wat betreft studiemogelijkheden?

Naar economische opleidingen met profiel E&M en wiskunde A is mogelijk, maar opleidingen Econometrie eisen wiskunde B. Datzelfde geldt voor studenten met profiel N&G. Het profiel N&G in de opleidingen Gezondheidszorg moet vaak aangevuld worden met natuurkunde; wiskunde A is voldoende. Sommige opleidingen in Landbouw en natuurlijke omgeving stellen bij N&G wiskunde B en natuurkunde

verplicht, hetzelfde geldt voor opleidingen Natuur. Voor opleidingen Techniek is met profiel N&G bijna altijd wiskunde B en natuurkunde verplicht.

Universitaire opleidingen stellen dus voor het profiel N&G tamelijk vaak wiskunde B verplicht.

Tendens

De tendens lijkt om voor wiskunde de onderdelen die als doorstroomrelevant beschouwd worden door de Resonansgroep, in het CE te toetsen; Statistiek en Kansrekening zal gemarginaliseerd worden. Welke keuzes maken leerlingen in profiel N&G en E&M: wiskunde A of toch B (als dat mag van de school)? Een steekproef van het Tweede Fase Adviespunt lijkt te wijzen op een grotere keuze voor wiskunde B. Zal dat de resultaten in examens beïnvloeden?

De komende tijd

cTWO wil het gesprek met de staats-secretaris aangaan; onduidelijk is wat daarvan de uitkomst zal zijn. De komende maanden moet er meer duidelijk worden over de conceptprogramma's en de syllabi. Duidelijk is dat de staatssecretaris waar discrepanties zijn tussen de wensen van leraren en/of cTWO en/of de resonans-groep, consequent de wensen dan wel eisen van de resonansgroep heeft gehonoreerd. Ook is duidelijk dat wiskunde een uitzon-deringspositie bekleedt binnen het totale curriculum van de Tweede Fase. Immers er is geen vak waar de doorstroomrele-vantie als zo belangrijk wordt beschouwd dat dit bijkans het enige criterium is voor vakinhoud, er is geen vak waar bijna 100% van de vakinhoud centraal geëxamineerd wordt, er is geen vak waar de staatssecretaris persoonlijk de inhoud van examen-programma's bepaalt tot op het niveau van een *abc*-formule.

Gebruik de komende jaren tot 2011 in ieder geval om informatie te krijgen, via *Euclides*, de website van de NVvW, en andere informatiebronnen en om uw mening te geven tijdens raadplegingen, via fora en in de WiskundeE-brief.

In komende nummers van *Euclides* zullen artikelen gepubliceerd worden die een overzicht geven over achtereenvolgens wiskunde B, wiskunde C en eventueel D.

Bronnen

- www.ctwo.nl (examenprogramma 2013, verschildocument)
- www.slo.nl (examenprogramma en handreikingen 2007)
- www.eindexamen.nl (syllabus havo)
- www.nvvw.nl

Over de auteur

Jenneke Krüger was o.a. docent wiskunde. Vanaf 2003 werkt ze als leerplanontwik-kelaar voor SLO, aandachtsgebied exacte vakken Tweede Fase. Ze was o.a. secre-taris van de vijf PEP-commissies en de vijf syllabuscommissies voor 2007 en schreef mee aan de handreikingen 2007. Ze was secretaris van de programmacommissie van cTWO vwo B/D. Ze is secretaris van de syllabuscommissie wiskunde B. E-mailadres: j.kruger@slo.nl

Onderwerp	2013 t.o.v. 2007 verdwenen uit het hele examenprogramma	toegevoegd	wijzigingen door staatssecretaris, 9-4-2008
Vaardigheden	- Oriëntatie op studie en beroep	- Toepassingen en belang van wiskunde in maatschappij herkennen en benoemen	
Statistiek en kansrekening	- De eindtermen zijn globaler, uitdrukkingen als populatie, steekproef, symmetrie, binomiale kansverdeling, etc. staan niet in de globale eindtermen.	- Bij een probleem een statistisch onderzoek bedenken - Schatten van een parameter - Relatie tussen twee variabelen - Berekeningen correct kunnen uitvoeren, inclusief gebruik van haakjes	- Niet: Schatten van parameter OF Relatie tussen twee variabelen - Twijfelachtig: hypothese toetsen
Berekenen en algebra			- Tellan
Functies en grafieken	Goniometrische functies		abc-formule - de functies sinus, cosinus en tangens
Analyse	- De rekenregels voor het bepalen van de afgeleide worden niet gespecificeerd in de eindtermen		- rekenregels voor differentiëren - exponentiële en logaritmische functies, inclusief e-macht en ln

figuur 5 Vwo A; concept wijzigingen voor 2013 ten opzichte van het programma 2007. Statistiek en Kansrekening moeten in het SE getoetst worden, andere onderwerpen mogen in het SE getoetst worden. Specificaties voor 2013 zijn buiten beschouwing gelaten, omdat daarover teveel onzekerheid is.

Vakvernieuwing bèta in de Tweede Fase

[Berenice Michels, SLO / Stuurgroep Vakvernieuwing β5]

De vernieuwing van de examenprogramma's voor wiskunde, biologie, natuurkunde en scheikunde en de implementatie van de nieuwe vakken wiskunde D en NLT bevindt zich in een belangrijke fase. Voor alle vakken zijn er nu (concept)examenprogramma's. Voor de meeste vakken zijn ook de bijbehorende syllabi voor het centraal examen en handreikingen voor het schoolexamen gereed of bijna gereed. Voor wiskunde wordt aan de syllabi gewerkt. Nu worden deze examenprogramma's in de praktijk getest. Voor natuurkunde, scheikunde en biologie zijn dit jaar examenexperimenten gestart op diverse scholen. Wiskunde D en NLT worden op meerdere scholen geïmplementeerd. Vanaf komend schooljaar starten examenexperimenten voor de nieuwe wiskunde-programma's en staan examenexperimenten gepland met meerdere vernieuwde examen-programma's tegelijk op één school (de zogenaamde 'multipilots'). Deze pilots zullen onafhankelijk geëvalueerd worden door een onderzoeksteam onder leiding van Wilmad Kuiper (SLO).

Sinds december 2007 is er een *Stuurgroep Vakvernieuwing β5* die bestaat uit Berenice Michels (voorzitter, SLO), Kerst Boersma (namens de vakvernieuwingscommissies), Jeroen Gommers (Platform Bèta Techniek). De stuurgroep wordt geadviseerd door Henk van der Kooij (CEVO). Deze stuurgroep is ingesteld om ervoor te zorgen dat de vakvernieuwingscommissies in 2010 en 2011 (wiskunde) kunnen komen tot een goed gefundeerd advies aan de staatssecretaris over de vernieuwde examenprogramma's. Ook moet de stuurgroep ervoor zorgen dat de implementatie van de vernieuwde examen-programma's zo goed mogelijk voorbereid wordt. Belangrijke taken daarbij zijn het bevorderen van een optimale uitvoering van alle examenpilots en van de communicatie met het brede bètaveld. Belangrijke zaken waarover afstemming en overleg nodig is, worden besproken in het Platform Vakvernieuwing Bèta5, waarin alle vakvernieuwingscommissies, SLO, PBT, CEVO en Cito vertegenwoordigd zijn. Namens de NVvW neemt Marian Kollenveld als waarnemer deel aan het platformoverleg.

Voortbestaan van wiskunde in het hbo: in actie!

[Hans Daale]

Een mooie contextsom. Neem 12 maart, een permanent waaiende zeer harde storm en een drukbezochte NVvW-conferentie over de bedreigingen rond de hbo-wiskunde, die 13:30 uur in Utrecht begint. Denk aan mogelijke vertragingen met de trein, dus check internet tot aan het moment van vertrek van Amsterdam Amstel en voorzie geen problemen. Hoe laat kom je dan aan bij Hogeschool Domstad om alles aan te horen? Antwoord: te laat. Na twee stoptreinen (sprinters genaamd...), overstappen en tegen de wind in lopen, kan ik tegen 14:00 uur bij de actiebeluste zaal aanschuiven.

Gelukkig was al snel het gehele verslag op de NVvW-website te vinden ^[1]. Daarop viel te lezen wat ik zoal gemist had. Maar het geeft mij ook de mogelijkheid om vooral een impressie te schetsen met de ‘krenten uit de inleidingen- en discussiepap’ van deze bijeenkomst van de werkgroep HBO-wiskunde.

Zo blijkt mij achteraf dat na de opening van Metha Kamminga als werkgroepvoorzitter in ieder geval de toon werd gezet door Roel van Asselt als algehele regelaar om de schouders onder het pleidooi voor hbo-wiskunde te zetten naar aanleiding van

een brief van de HBO-raad aan de NVvW over de positie van wiskunde en rekenen in ons onderwijs. Duidelijk is dat de HBO-raad samen met OCW wordt gezien als mede-eigenaar van de problemen met wiskunde dan wel als cruciale partner voor het oplossen ervan.

Geluiden uit het mbo

Ook kan ik constateren dat Heimen van Andel, CvB-voorzitter bij ROC Aventus, maar ook ex-docent wiskunde (zoals veel managers overigens), als eerste inleider aangaf dat alle aandacht in het mbo uitgaat

naar de invoering van competentiegestuurd opleiden in combinatie met kennis, kunde en houding die er voor wiskunde natuurlijk ook moet zijn en blijven. Maar dan wel graag in een beroepscontext, ook bij het hoger technisch onderwijs. Samenwerking met mbo-docenten kan helpen om hbo-docenten ook zover met hun aanpak te krijgen, meent Heimen op basis van hetgeen hij in zijn omgeving ziet. In mijn vertaling: gewoon ‘professionele’ wiskunde en geen ‘academische’ wiskunde in het hbo gebruiken. Overigens typeerde hij de geformuleerde stellingen (*zie het kader* met de uitslag van de meningspeiling) als een afspiegeling van een Calimero-opstelling. Wil hij daarmee het hbo een minderwaardigheidscomplex aanpraten?

Geluiden uit de HBO-raad

Joke Snippe, CvB-lid bij Hogeschool Inholland, baseert haar verhaal op hetgeen binnen het bestuur van de HBO-raad periodiek aan de orde wordt gesteld over de actuele onderwijsontwikkelingen. Daarbij gaat ze uiteraard in op het huidige reken- en taalonderwijs, met als duidelijk voorbeeld de pabo. Ze bekent ruiterlijk dat ook zichzelf niet zomaar even aan de keukentafel alle sommen kan maken. ‘Maar dat toont vooral aan dat gaat om het onderhouden van het rekenen. De Commissie Meijerink is daar verbazend helder over, als je kijkt wat er nu gebeurt tussen het 12e en 16e levensjaar.’ Daarmee sluit ze aan bij degenen die pleiten voor het doorlopende aandacht besteden aan de benodigde basis-kennis- en vaardigheden. Er moet naast alle plannen voor de toekomst op korte termijn iets gebeuren. ‘De HBO-raad is van mening dat alle hbo-opleidingen ruim voor binnenkomst van een student een soort “foto” van hem of haar moet maken, via een intake-assessment. En dan kan er een flankerend beleid voor wiskunde plaatsvinden, met extra lessen op een middag of via een summer course.’ Maar er gaan ook geluiden binnen



foto 1 Metha Kamminga, voorzitter van de HBO-werkgroep, opent de vergadering

de HBO-raad op om te komen tot een leertijdverlenging als het nodig is, met een extra jaar. ‘Voor een systeemverandering is een investering nodig, maar kijk eens wat de extra zaken bovenop het normale curriculum nu ook al kosten?’

Geluiden vanuit een hogeschool

Als derde inleider mag Toine van den Boogaart als directeur van het Instituut Educatie en Communicatie van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden - en ook nog docent bij een groep - zijn licht laten schijnen over de hbo-wiskunde. ‘Er is een sterke wisselwerking nodig tussen theorie en praktijk. Maar daarnaast zijn de basisvaardigheden, los van de vraag wat

je daaronder verstaat aangezien je het dan hebt over een lastig te bepalen grijs gebied, gewoon als leerlijn nodig, dus zonder context. De kwaliteit daarvan dient goed te zijn en je moet het er met elkaar over eens zijn wat je ermee wilt bereiken. Want daarover worden soms warrige discussies gevoerd. *Just in time*-wiskunde, dus pas iets aanleren als je het nodig hebt, leidt in ieder geval tot kunstjes...’ Toine hoopt dat er qua tijd en deskundigheid ruimte is en blijft om aan goed onderwijs te bouwen. De lerarenopleidingen in het hbo zijn in ieder geval in verwarring. Er worden onverenigbare eisen aan gesteld: zowel breed studeren als de diepte ingaan. ‘De schok die studenten krijgen als ze in de praktijk aan de slag gaan, is dan ook nog steeds groot. Want in scholen verandert veel, steeds weer.’ Hij schetst het beeld van een kloof tussen theorie en praktijk die snel moet worden gedicht.

Geluiden vanuit het forum

Toen was het tijd voor een forum met de sprekers, aangevuld met Sieb Kemme als landelijk coördinator wiskunde-D (‘...ik zie helaas geen steunpunten voor havo-D in de hogescholen...’) en mensen uit het bedrijfsleven: Hans Homma, Right Marktonderzoek (‘...ik zie mijn statistiekdocent van de heao in de zaal...’), Albert Drost van Wärtsilä (‘...ik zie ook mensen van de HAN waar ik heb gewerkt...’) en Arjen Schat, Philips. Hier een persoonlijke

selectie uit de meest opvallende uitspraken. Sieb geeft aan geschokt te zijn door de woorden van Heimen, over het feit dat competentiegericht onderwijs niet te combineren valt met gewoon voor de klas staan en lesgeven, want bij wiskunde moet dat volgens hem wel. ‘En met mij vele anderen, merk ik steeds.’ Wat dat betreft - en Albert valt hem bij - steunt hij toch meer de inzichten van Toine. Heimen legt nogmaals uit dat het vertrekpunt is hetgeen je moet kunnen in de beroepspraktijk. ‘Vroeger hadden we eindtermen, met cursorisch onderwijs. Maar binnen het huidige systeem kun je ook best rekenen en zo laten doen op een wijze die niet altijd per se gekoppeld hoeft te zijn aan de praktijk. Maar dan heb je het dus echt over het aanleggen van bypasses, als blijkt dat de reguliere aanpak onvoldoende is.’ Arjen heeft een verzoek. Hij zou wel eens graag een ontmoeting willen hebben met de man uit het bedrijfsleven die heeft gezegd dat het beroepsonderwijs competentiegericht moet werken. ‘Wijs ’m maar eens aan... Stamp er toch gewoon kennis in op school en wij doen binnen het werk wel de vaardigheden.’

Uiteraard laat de zaal zich ook niet onbetuigd. Een oud-hto-docent is van mening dat de HBO-raad wel mooie plannen presenteert, maar de toelatings-eisen zijn gewoon te soepel: ‘Je kunt het strenger maken van de toelatingseisen gewoon op korte termijn regelen, en dan wordt ook meteen het rendement beter.’ Joke geeft aan dat de HBO-raad haar beleid op dat punt niet zal aanscherpen. ‘Je moet er in regionaal verband meer aan doen. Je kunt proberen leerlingen in hun vooropleiding eerder een keuze kenbaar te laten maken, dus een soort van voorsorteren, en vervolgens vanaf dat moment al extra bagage meegeven. We zien daar veel meer heil in. Overigens zijn er meer studenten nodig, erg broodnodig, dus laten we die in de onderwijsketen goed voorbereiden.’ Zoiets wil een zaal natuurlijk niet horen. Iemand verwoordt de onvrede: ‘Mooi streven, maar die markt is erg weerbarstig. Het gaat toch om kwaliteit, en niet om kwantiteit?’ Joke: ‘Sommige zaken kunnen nu niet anders. Maar we moeten wel het gesprek aangaan met de vooropleidingen over de doorstroom naar het hbo, om steeds samen zaken op dat punt goed inhoudelijk



foto 2 Roel van Asselt, dagvoorzitter en discussieleider

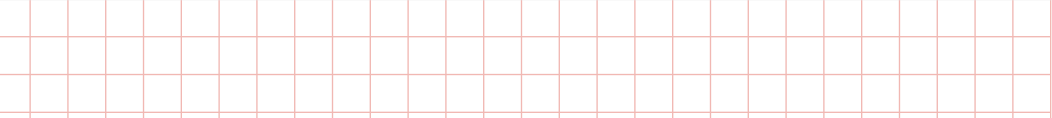




foto 3 Geïnteresseerd publiek met vooraan studenten (vlnr) Marco ten Hoff en Sibren Stienstra, met daarnaast Arjen Schat

af te stemmen.’ Reactie van dezelfde persoon: ‘Moeten we dan met een landelijke instroom alles met iedereen gaan regelen? Ik zie het al voor me...’

Joke geeft verder aan dat we geen mensen moeten afwijzen aan de poort als ze het mogelijk toch nog kunnen redden. ‘Zo verdwijnt bij de pabo van de groep alloch-tone studenten zo’n 70 procent... maar ze zijn wel nodig.’

Sieb benoemt het probleem dat we met z’n allen ongeveer weten wat een havist of een vwo’er kan dan wel zou moeten kunnen, maar ‘bij het mbo is dat onduidelijk, dus waarom zouden we dat niet scherper kunnen gaan regelen?’ Kennelijk leeft dit punt erg sterk. Iemand in de zaal die bij een pabo lesgeeft: ‘Klopt, mbo-studenten met een spw-opleiding zonder wiskunde lopen overal tegenaan. Ze zijn dan wel onderwijsassistent, maar bijvoorbeeld het behandelen van een artikel van drie pagina’s lukt al niet.’ Een docente voegt hieraan toe dat alle vaardigheden verdwijnen en maar vier procent bij haar de rekentoets de eerste keer haalt. ‘Leerlingen doen alles op de korte termijn, ze onderhouden niks en de grafische rekenmachine heeft ook heel wat teweeg gebracht... maar niet ten goede.’

Vanuit de technische hoek komt bijval van een docent: ‘Vroeger had je een nulde jaar, als iemand van de mts naar de hts ging. Nu denken alle mts’ers dat ze wel even de hts gaan halen. Maar de werkelijkheid is dat de helft al na een maand afhaakt. Je moet als docent ook veel te veel herhalen en op peil brengen kost een jaar. Geen wonder dus.’

Geluiden vanuit het FI

Na de pauze, waarin iedereen onder de koffie gewoon doorgaat met het bespreken van alle pijnpunten, is het woord aan Henk van der Kooij, werkzaam bij het Freudenthal Instituut. Zijn motto is: *Wiskunde in het hbo? Ja, natuurlijk!* Hij wijst erop dat zijn uitroeptekens niet zo vanzelfsprekend is voor leerlingen en studenten. ‘Je moet dan ook de wiskunde niet doen om de wiskunde, maar gebruiken als nuttig gereedschap, bij modelleren en structureren.’

Hij wijst erop dat de discussies over het vak wiskunde van alle dagen is. In 1995 werd al in een landelijk project voor het mbo aan de docenten gevraagd welke zaken nu echt nuttig waren. Er was bijvoorbeeld

gebleken dat veel mbo-studenten die slecht in wiskunde waren, toch goed uit de voeten konden in het hbo. Dat leidde tot een koppeling in de onderbouw van wiskunde aan voorstelbare zaken en zelfs tot een doorstroomprogramma voor mbo-hbo. ‘Duidelijk werd dat als je de wiskunde teveel formeel aanpakt, de meeste studenten simpelweg afhaken... en dat doen ze minder als ze zich er iets bij kunnen voorstellen, in een ander vak.’

Henk pleit voor een herstel van het doorstroomprogramma mbo-hbo, inclusief een centrale examinering in het mbo. En: ‘Ga op onderwijskundig niveau je eigen gang, los van alle bestuurlijke discussies, en toon aan dat wiskunde z’n waarde verdient in praktijksituaties.’

foto 4 Tijdens de discussie krijgt Marjan van der Vegt het woord



Geluiden uit de BON-hoek

Als laatste spreker is Hans Fischer aan de beurt, namens *Beter Onderwijs Nederland*, maar het gaat toch ook om zijn visie op de functie van de wiskunde in het technisch hbo. Die vindt hij zorgelijk. ‘Daarom is het goed dat zowel met de commissie Dijsselbloem als via geluiden uit het werkveld nu kritisch wordt gekeken naar ontwikkelingen zoals het competentiegericht opleiden. Er is behoefte aan concrete vaardigheden.’ Hij wijst erop dat ook binnen bepaalde geledingen van de NVvW kennelijk wordt getwijfeld aan het nut van algebräische vaardigheden. Hans maakt zich duidelijk zorgen over hetgeen hijzelf ziet in zijn omgeving. ‘Laat ik nu maar meteen het bedrijfsleven waarschuwen: de laatste student die nog weet hoe een CD-speler werkt en in elkaar zit, zal dit studiejaar het hbo verlaten!’ Zijn vrees is dat hogescholen in de toekomst afgestudeerden naar het werkveld zullen gaan doorsturen zonder de kennisbagage die daar nu nog als bekend wordt verondersteld.

Hans schetst ook een andere spagaat waarin het hbo verkeert. Het hbo moet de juiste mensen leveren voor het bedrijfsleven en eventueel de doorstroom naar de universiteit, maar de instroom met een lager niveau maakt dit niet meer mogelijk. Door het competentiegericht onderwijs komen volgens hem studenten zelfs bij schakelprogramma’s in problemen - en dan komen we er met het aanleren van kunstjes niet meer mee.

Interactie in tweede instantie

Na de tweede ronde inleidingen was het woord weer aan de zaal en het forum met de inleiders en dezelfde externen uit de eerste interactieve sessie.

Hans Homma ziet een afkalving van het imago van het vak wiskunde. ‘Om dat te kunnen oppoetsen moet je de taal van de studenten kunnen spreken. Ik merk in mijn contacten met hogescholen dat dit nog niet zo eenvoudig is, als ik vraag om simpelweg uit te leggen wat een studie inhoudt. Die communicatie kan dus beter.’ Arjen Schat suggereert om goed te luisteren naar mensen die in de praktijk werken en vaak in staat zijn om wel een verband te leggen tussen een vak en de bruikbaarheid in de praktijk.

Na wat uitwisseling van gedachten over de wijze waarop wiskunde aan de orde komt in hbo-opleidingen, wordt aan een van de

aanwezige studenten gevraagd hoe hij tegen het gebruik van de grafische rekenmachine aankijkt. Hij is in ieder geval heel erg duidelijk: ‘Laten ze het eerst maar zonder doen, zodat we weten wat zo’n ding doet. Je leert er nu in ieder geval geen moer van...’

Transparante studententaal dus, van iemand die werktuigbouwkunde doet. Tijd voor Roel van Asselt om de zaal te kietelen met de opmerking dat er geen enkele hbo-docent is die alleen nog maar wiskunde sec doet - en dat men dus ook de context meeneemt. ‘Nou, ik wel, bij de pabo’, wordt hem tegengeworpen, ‘ik doe eerst een aantal weken lang alleen maar rekenen.’ Henk vult aan dat je er volgens hem niet om de context als zodanig iets omheen moet gaan verzinnen. ‘Natuurlijk heb je een basis nodig, maar verdiep je als wiskundecent ook goed in de opleiding zelf. Isoleer jezelf niet, want er zijn genoeg managers die om die reden zaken uit een opleiding verwijderen...’

Iemand uit de zaal verzucht: ‘Ik ben al hele dagen bezig om alle onderwijskundigen en het CvB te vertellen wat het nut van het vak wiskunde is. Natuurlijk, als studenten mogen kiezen, pakken ze eerst de doe- en dan pas de denkvakken. Laten we ervoor zorgen dat managers de opleidingen gewoon zo invullen dat ze die keuze helemaal niet hoeven te maken. Scheelt een heleboel energie en discussie.’

Stemming digitaal peilen

Met die constatering is het tijd voor een afronding van het gedeelte met inleidingen en discussies en kan worden overgegaan tot het uiten van bepaalde (on)genoegens via het stemmen over een aantal stellingen. Dat gebeurt door de ‘antwoorden’ van de meerkeuzestellingen via een sms’je naar een computer bij de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden te sturen, waarna via een speciaal programma de telling weer via het internet naar de zaal op het scherm wordt geprojecteerd. **In het kader** bij dit stuk treft u de uitkomsten van deze exercitie aan, waarbij het u niet zal verbazen dat men uitermate kritisch is ten aanzien van de ontwikkelingen rond wiskunde in het hbo. De oproep aan degenen die dit allemaal ten goede kunnen gaan keren, is in ieder geval helder.

Bij de afsluitende borrel met hapjes wordt dat nog eens goed aan elkaar doorgegeven. Beleidsmakers, het is vijf voor twaalf, dus aan de slag ermee...



foto 5 Het forum van de eerste ronde met achter de tafel (vlnr) Sieb Kemme, Albert Drost, Arjen Schat en Hans Homma

Noot

[1] Het complete verslag van deze bijeenkomst is te vinden op www.nvww.nl/page.php?id=7589 (website van de NVvW | HBO-werkgroep).

Fotografie

Metha Kamminga: foto 2 en foto 5
Rob Goosen: foto 1, foto 3 en foto 4

Over de auteur

Hans Daale is lid van de redactie van *Euclides*. Hij is betrokken bij allerlei projecten in het hoger beroepsonderwijs, onder meer rond de aansluiting op het hbo. E-mailadres: daale-zwol@planet.nl

Wiskunde in scenario 5

DEEL 2, WISKUNDE OP HET AMADEUS LYCEUM

[Corine van den Boer, Vincent Jonker, Martin van Reeuwijk, Monica Wijers]

- Scenario 1** De school blijft dicht bij het bekende, huidige model. De afzonderlijke schoolvakken blijven bestaan en leraren stemmen onderling af op relevante punten.
- Scenario 2.** De school vult een deel van het programma in met projecten. Leraren werken voornamelijk nog vanuit hun eigen vakinhoud, maar werken soms ook vakoverstijgend.
- Scenario 3.** Docenten en leerlingen werken vanuit geïntegreerde delen (de leergebieden).
- Scenario 4.** De school werkt niet meer vanuit een traditioneel rooster, maar stelt de coaching van haar leerlingen centraal. De leerlingen kunnen hun eigen leerroutes samenstellen en arrangementen uitkiezen.

De omschrijving van de vier scenario's die door de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming in 2004 zijn voorgesteld

Inleiding

In dit artikel over 'wiskunde binnen vernieuwende scholen' (Van den Boer e.a., 2007) staat dit keer het Amadeus Lyceum uit De Meern (in het gebied Leidsche Rijn) centraal. De school profileert zich als cultuurschool (zie verderop bij 'Cultuurgebaseerd Onderwijs'), maar kiest ook bewust voor een herkenbare, enigszins traditionele lijn voor wiskunde. Men ontwikkelt ook eigen materialen, maar het wiskundeboek (Getal & Ruimte) levert de basis voor het wiskunde-onderwijs. Amadeus heeft leerlingen in zowel vmbo(-t) als havo-vwo. Typerend voor de wiskundeaanpak binnen het Amadeus Lyceum is enerzijds het behoud van een goede structuur in de opbouw van het wiskundeonderwijs van onderbouw naar bovenbouw, en anderzijds het benutten van de mogelijkheden van de vernieuwing (in organisatie en inhoud), om recht te doen aan de keuzes van de cultuurschool. Dit artikel geeft eerst een beeld van het Amadeus Lyceum en vervolgens van het wiskundeonderwijs op die school; het eindigt met enkele dilemma's die daarbij spelen.

De school in een nieuwe wijk

De school zal vanaf 2008 gehuisvest zijn in de Cultuurcampus van Vleuterweide en geeft daarmee ook integraal vorm aan nieuwe ideeën over hoe schoolgebouwen kunnen functioneren in nieuwbouwwijken (vestiging in hetzelfde gebouw als het kunstencentrum; gezamenlijk gebruik van ruimtes zoals een theaterzaal, e.d.). Het Amadeus Lyceum is als nieuwe school in schooljaar 2004/2005 gestart. Leerlingen werken vanuit hun eigen interesse en verantwoordelijkheid en er wordt recht gedaan aan verschillen tussen leerlingen en individuele leerstijlen. Door het individuele aanbod van de leerstof kan elke leerling

op zijn eigen niveau werken. Dit betekent overigens niet dat er continu 'zelfstandig gewerkt' wordt. Veel activiteiten worden uitgevoerd in tweetallen of in groepsverband. Amadeus profileert zich graag als cultuurschool, en in dat kader is een recente subsidie in het kader van de regeling 'Durven, delen, doen' (www.durvendelendoen.nl) het vermelden waard, waarin men 'Cultuurgebaseerd Onderwijs' vormgeeft.

Cultuurgebaseerd Onderwijs

Het Amadeus Lyceum is één van de 13 scholen voor voortgezet onderwijs in Nederland die gedurende de jaren 2007-2009 door middel van een subsidie (van de VO-raad) de kans krijgen om te innoveren. Kunst en Cultuur worden meer in samenhang met de andere vakken gebracht en cultureel erfgoed in het algemeen en in de directe omgeving wordt in de leerstof geïntegreerd. Het programma van de Tweede Fase zal mede vanuit het perspectief van Cultuurgebaseerd Onderwijs vormgegeven worden. Samen met het IVLOS, de HKU, UCK, Stichting Erfgoed en docenten van onze school wordt aan dit programma gewerkt.

Wat betreft wiskunde participeert het Amadeus Lyceum sinds de oprichting in het netwerk Scenario 5 (Van den Boer e.a., 2007).

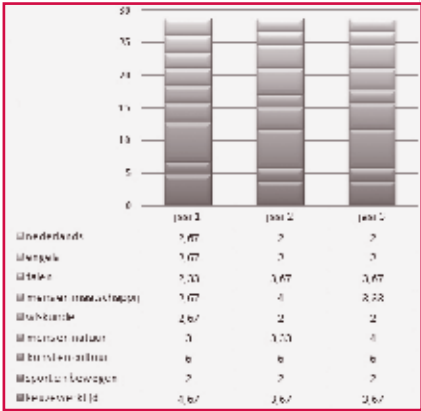
Onderwijs op het Amadeus Lyceum

De leerstof wordt in de onderbouw aangeboden in vijf leergebieden waarin vakken in samenhang worden gepresenteerd. Het Amadeus Lyceum profileert zich primair als cultuurschool, maar zoekt ook naar een gedegen doorlopende lijn voor de bèta-vakken, die samengebracht zijn in het leergebied Mens & Natuur. (*zie tabel 1*)

Leerlingen werken aan modules en aan projecten. Binnen de modules zijn er verplichte onderdelen en keuzeonderdelen. In een project werken leerlingen aan één vraagstuk waarin ze actief de stof uit verschillende leerstofgebieden en onderliggende vakken gebruiken. Leerlingen werken naast zelfstandig ook een deel van de tijd in vaste kleine groepen van zo'n 4 of 5 leerlingen. De volgende urentabel geeft overzicht van de urenverdeling in de eerste drie leerjaren.

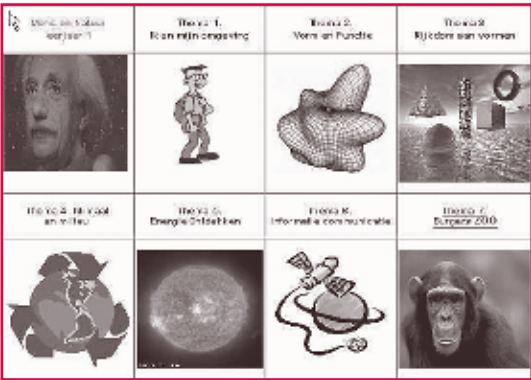
Talen	Mens & Maatschapij	Mens & Natuur	Kunst & Cultuur
Nederlands	Geschiedenis	Wiskunde	Drama
Engels	Aardrijkskunde	Natuurkunde	Dans
Frans	Economie	Scheikunde	Muziek
Duits	Filosofie	Biologie	Tekenen
Grieks		Science	Handvaardigheid
Latijn		Techniek	Audiovisueel
		Verzorging	

tabel 1 De leergebieden. Het vijfde leergebied is het domein 'Sport & Bewegen'.



figuur 1 Onderwijstijd op het Amadeus (gemiddeld per week, max. 28.66 uur; uitgesplitst per leerjaar)

In het leergebied 'Mens & Natuur' wordt gewerkt met zeven thema's per jaar.

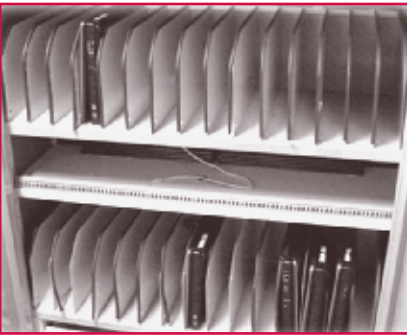


figuur 2 Thema's uit Mens & Natuur (schermafdruk uit 'Moodle')

De onderwijsvisie van het Amadeus Lyceum en de uitwerking daarvan in leergebieden en projecten hebben een aantal kenmerken van authentiek onderwijs: het leren is betekenisvol voor de leerlingen, er wordt aangesloten bij de individuele leerstijl en er zijn keuzes mogelijk zodat het leren aansluit op eigen kennis en interesses van de leerling; met name projecten vertonen kenmerken van complexe taaksituaties (Wijers en Jonker, 2007). Organisatorisch moet er in de tijdelijke huisvesting van het Amadeus Lyceum geïmproviseerd worden. Zo wordt er gewerkt in 'het domein', een grote ruimte waar een grote groep leerlingen van meer dan 60 leerlingen tegelijkertijd aan het werk is. Deze ruimte is niet optimaal geschikt: slecht zicht op de totale groep; te laag. Overigens is het goed mogelijk om delen van de ruimte zo in te richten dat er instructie gegeven kan worden (wat voor de verschillende vakken ook regelmatig gedaan wordt).



figuur 3 Het 'domein'



figuur 4 Laptops stonden klaar voor alle leerlingen

Elke leerling heeft een eigen laptop. De laptops worden centraal beheerd en worden door de leerlingen uit een centraal 'magazijn' gehaald en aan het eind van de dag weer teruggebracht; ze blijven dus op school.

Een 'gemiddelde dag' op Amadeus

Middels mondelinge interviews met 8 leerlingen uit klas 1, klas 2 en klas 4 hebben we nagevraagd hoe een dag verloopt op het Amadeus en hoe de leerlingen hun activiteiten plannen. We hebben daarbij

met name doorgevraagd hoe de wiskunde is gepositioneerd binnen het grotere geheel van Amadeus. Via deze interviews wordt duidelijk dat 'eigen keuzeruimte voor de leerling' niet betekent dat de sturing van de docent helemaal verdwijnt. Juist bij wiskunde is gekozen voor regelmatige instructiemomenten, omdat de leerlingen deze steun nodig hebben bij het doorwerken van de methode.

Elektronische leeromgeving

De leerlingen bepalen aan de hand van digitale leerstofpakketten hun eigen tijdspad en leerroute, hoewel hier sturing door docenten gegeven wordt, bijvoorbeeld in het planningsmoment van iedere dag. De leerstof wordt aangeboden binnen de Elektronische LeerOmgeving 'Moodle' (Moodle, 2005).

In 2005 is in samenwerking met het Freudenthal instituut een afstudeeronderzoek uitgevoerd op het Amadeus Lyceum naar de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. In het kader van dat onderzoek zijn ook lesmateriaal en (digitale) toetsen ontwikkeld. Linders (2005) beschrijft in haar thesis de praktijk van wiskundeonderwijs en toetsing: *'De leerlingen van het Amadeus Lyceum werken allemaal met hun eigen laptop in een grote centrale ruimte; het domein. Het is de bedoeling dat het lesmateriaal steeds meer digitaal aangeboden wordt aan de leerlingen. Naast digitaal lesmateriaal, staan er boeken van lesmethodes in de kast, waaruit de leerlingen opdrachten maken, of waarin zij iets kunnen nalezen. [...]*

Start van de dag	Om 8:30u wordt gestart met een dagopening (de zoutkorrel). De leerlingen gaan naar hun eigen groep/klas (dus klas 1 bij elkaar, klas 2 bij elkaar etc.)
Planningsmoment	Na de dagopening wordt onder leiding van enkele docenten per klas de dagplanning doorgenomen.
Indeling van de dag	In de 1e en 2e klas wordt er gewerkt met vaste schema's. Je hebt dagen met 4 blokken van 85 minuten (en drie pauzes) en dagen met 3 blokken van 85 minuten (en twee pauzes).
Instructie en begeleiding	Voor wiskunde is er over het algemeen twee keer per week een instructiemoment ingepland. Dit instructiemoment (klassikale les) wordt gegeven door de docent wiskunde. Deze instructiemomenten variëren in duur tot maximaal de duur van één blok.

tabel 2

Bij deze school speelt ICT een belangrijke rol. Er is één computer per leerling beschikbaar. De opdrachten en deadlines haalt de leerling uit de digitale leeromgeving. Veel van de prestaties kunnen ook elektronisch ingeleverd worden. Het gebruik van digitale leermiddelen, zoals bijvoorbeeld applets en gebruik van internet, is dus geen enkel probleem.

Het zou voor dit artikel in *Euclides* te ver voeren om in te gaan op de details van systeem-, applicatie- en netwerkbeheer, maar het is voor te stellen dat hier verstandige keuzes gemaakt moeten worden om een en ander beheersbaar te houden. Het helpt dan als er ‘personele unies’ zijn: mensen die zowel vakinhoudelijk goed op de hoogte zijn als voldoende deskundigheid bezitten in het gebied van ict.

Wiskunde op het Amadeus Lyceum

Hoewel het leren op Amadeus in het algemeen moet aansluiten bij leervragen van de leerling zodat het leren betekenis heeft, heeft men er ook bewust voor gekozen om het ‘stapelkarakter’ van het vak wiskunde (Van den Boer e.a., 2007) te behouden en daar in principe gewoon de lijn uit de wiskundemethode (Getal & Ruimte) te volgen. Met stapelkarakter wordt bedoeld dat wiskunde een sterk (concentrisch) opgebouwd vak is, waardoor er behoefte bestaat aan een zorgvuldig opgebouwd geheel. Als bepaalde cruciale bouwstenen ontbreken of te zwak zijn, kan de wiskunde daarop niet verder bouwen. Wanneer je dit stapelkarakter niet voldoende bewaakt en er te rigoureuus ‘geëxperimenteerd’ wordt bestaat het gevaar dat bepaalde garanties (voortgang, bewaking van vaardigheden-opbouw etc.) niet meer afgegeven kunnen worden.

Een andere factor die meespeelt bij de keuze om een aantal onderdelen apart aan te bieden is dat sommige meer formele onderdelen van de wiskunde, zoals bijvoorbeeld algebräische vaardigheden, of kwadratische functies en vergelijkingen, lastig volledig binnen een thema in samenhang met andere vakgebieden aan te bieden zijn. Ook bij andere vernieuwende scholen speelt dit. De school moet daarbij een eigen koers kiezen. Bijvoorbeeld een thematische instap en dan van daaruit de wiskundige diepte in (waarbij het thema weer uit beeld verdwijnt) of een open onderzoeksbenadering, waarbij leerlingen een onderwerp uit

de wiskunde - bijvoorbeeld oppervlakte van verschillende meetkundige figuren - in een open opdracht zelf onderzoeken. Reguliere wiskunde-methoden kunnen daarbij functioneren als naslagwerk.

Binnen Amadeus heeft men vanaf het begin in de ontwikkeling en positionering van het vak wiskunde getracht rekening te houden met alle genoemde aspecten. De keuzes zijn gemaakt door docenten die overzicht hebben over de vereisten van de onderbouw, en die tevens goed op de hoogte zijn van wat er in de bovenbouw verwacht wordt. Dit is een zeer belangrijke voorwaarde. Als er in het team van een school geen docenten zijn die goed zicht hebben op de bovenbouw (wat bij startende scholen nog wel eens kan voorkomen), dan is een goede planning van doorlopende leerlijnen moeilijk uit te voeren.

Voor wiskunde wordt op het Amadeus in beperkte mate eigen materiaal ontwikkeld en ontsloten in Moodle. In Moodle zijn alle paragrafen van Getal & Ruimte als aparte onderdelen digitaal beschikbaar. De leerlingen geven aan hier goed mee te kunnen werken. We citeren nogmaals Linders (2005):

‘Tot nu toe wordt voor wiskunde voornamelijk de methode Getal en Ruimte gebruikt. De leerlingen gebruiken zowel de boeken als de cd-rom, die op de laptops geïnstalleerd is. Na afloop van een hoofdstuk maken zij een toets op papier. De toetsen bestaan uit een aantal korte vragen of opdrachten en zijn voor de leerlingen in ongeveer een kwartiertje te maken. Voor de docent zijn ze snel na te kijken, zodat de leerling, wanneer dit nodig is, meteen door kan gaan met het extra oefenmateriaal. Eventueel kunnen de leerlingen een cijfer krijgen voor de toets.’

Uit de interviews met de leerlingen wordt duidelijk hoe precies gewerkt wordt. De week- en dag-planning voor wiskunde kan eenvoudig verwijzen naar de digitale paragrafen van Getal & Ruimte. Vervolgens werken de leerlingen gewoon met schrift en pen om de opgaven te maken.

Het Amadeus Lyceum zou overigens graag iets ‘losser’ van het wiskundeboek willen werken. Zo vertelt de docent wiskunde dat in de bovenbouw voor het vak wiskunde D eigen materiaal wordt samengesteld (wat ook wel logisch is voor dit nieuwe vak) en dat dit eigenlijk wel bevalt (zowel de docent

als de leerling). De docenten wiskunde zien wel mogelijkheden voor de inzet van grotere open opdrachten, zo kan bijvoorbeeld voor vmbo-t de statistiek in de vorm van een onderzoeksproject worden uitgewerkt. De school moet echter keuzen maken in hoe de expertise en tijd van de medewerkers wordt ingezet. Ontwikkeling van eigen lesmateriaal voor wiskunde heeft daarbij op dit moment geen hoge prioriteit. Al met al kan het wiskundeonderwijs op Amadeus gekenschetst worden als onderwijs dat volgens de principes van ‘scenario2/scenario3’ wordt gegeven. Het is dan mogelijk om ‘af en toe’ een uitstapje te maken naar project-onderwijs, een overstijgende opdracht en groepswork.

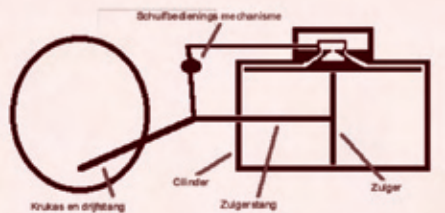
Voorbeeld 1

We geven een voorbeeld van een grotere opdracht (voor dit artikel enigszins ingekort), over de werking van cilinders in motoren (lesmateriaal van Amadeus ontwikkeld in 2005-2006). Deze opdracht is gesitueerd binnen het leergebied Mens & Natuur.

Stoommachine

Het hart van een stoommachine wordt gevormd door de ‘cilinder’. De cilinder van een stoommachine is een soort hele grote ‘beschuitbus’ die meestal op z’n kant ligt. In deze ‘cilinder’ beweegt een ‘zuiger’ heen en weer. Deze zuiger heeft vrijwel dezelfde diameter heeft als de cilinder. In werkelijkheid natuurlijk een ‘ietse pietsie’ kleiner anders kan de zuiger niet heen en weer bewegen in de cilinder.

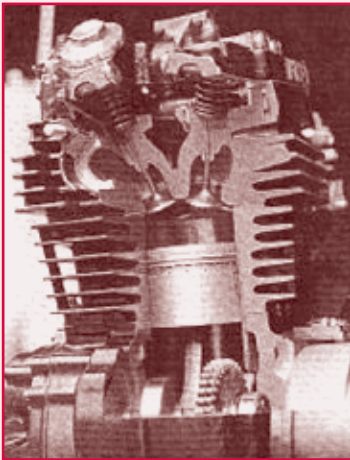
Om de werking van een stoommachine te kunnen begrijpen gaan we naar de volgende site over ‘Hoe werkt een stoommachine?’: www.destoomtrein.nl/techniek/inleiding.htm



figuur 5

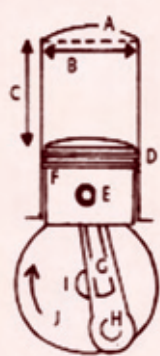
Op deze site over stoommachines zie je hoe een heen en weer gaande beweging van een zuiger wordt omgezet in een ronddraaiende beweging van een wiel. Dit kunnen opwekken met behulp van stoom van een ronddraaiende beweging heeft uiteindelijk geleid tot de industriële revolutie aan het begin van de 19de eeuw. Maar daarover meer bij Mens & Maatschappij. Voor Mens & Natuur is van belang dat dit principe van een heen en weer gaande zuigerbeweging in een ronddraaiende beweging van een wiel (meestal een zogeheten vlieg wiel) nog steeds in dezelfde vorm wordt toegepast bij de bouw van motoren voor motorfietsen en auto's.

Het hart van een motor wordt dan ook genoemd het cilinderblok. Meestal een aantal cilinders naast elkaar. Soms een blok met daarin maar 1 cilinder. Van zo'n 1-cilinder blok zie je hier een voorbeeld.



figuur 6 Een opengewerkt 1-cilinder motorblok

Van belang zijn de begrippen Boring en Slag van een motor. Zie hiervoor de volgende afbeelding.



figuur 7

Met de gegevens over Boring en Slag en het aantal cilinders kun je de cilinderinhoud van een motor berekenen. Dit is de totale inhoud van alle cilinders bij elkaar opgeteld. De inhoud van een motor wordt uitgedrukt in cc.

Opdracht 1

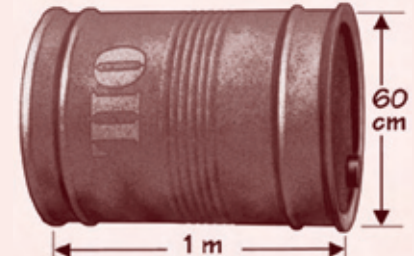
- Wat wordt bedoeld met de eenheid cc? Druk 1 cc uit in een voor ons bekende metrische maat.
- Mijn motor heeft een Boring van 3,543 inch en een Slag van 3,071 inch en mijn motor heeft 4 cilinders. Hoeveel cc is de cilinderinhoud van mijn motor?
- Vraag je ouders om de handleiding van hun auto. Bij het overzicht van alle technische gegevens kun je Boring, Slag en aantal cilinders terugvinden. Anders zoek je deze gegevens op op de webstek

van de fabrikant/dealer.

Reken nu zelf de cilinderinhoud na. Als je deze waarde gaat vergelijken met de waarde die genoemd staat in de technische gegevens, zul je zien dat er meestal sprake is van een afronding. Is dit bij jullie auto ook het geval? Hoe groot is de afronding?

Opdracht 2

Nog een voorbeeld van het berekenen van de inhoud van een cilinder. Hieronder zie je een tekening van een olievat.



figuur 8

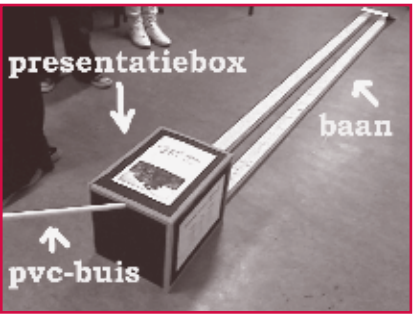
- Hoeveel liter olie kan er in dit vat?
- (Voor havo-vwo:) Om het vat worden plakstrips aangebracht waarvan de uiteinden precies op elkaar aansluiten. Hoeveel cm is de lengte van één zo'n strip?

Om de ‘setting’ van deze wiskunde-opdracht te begrijpen: deze wordt aangeboden op het moment dat er bij andere vakken gewerkt wordt met het thema ‘Machines’, een thema uit Mens & Natuur. Op dat moment zijn leerlingen dus al bezig om bijvoorbeeld proefopstellingen te maken, begeleid door natuurkunde-, scheikunde- en biologiedocenten. De opdrachten die dan bij wiskunde aan bod komen, krijgen een extra betekenis in het kader van die proefopstellingen of het uitwerken van een project.

Voorbeeld 2

Binnen cultuurgebaseerd onderwijs zoekt men ruimte voor projecten. De vakken (zoals wiskunde, natuurkunde) worden op gezette tijden gedurende het cursusjaar thematisch aangeboden en zo mogelijk vakoverstijgend. In het volgende voorbeeld zijn de leerlingen van de tweede klas aan de gang gegaan met projecten rondom ‘machines’ (hetzelfde thema als bij voorbeeld 1: industriële revolutie, mechanisering). Zij konden zelf kiezen welk onderwerp ze nemen. Vier meisjes hebben gekozen voor het onderwerp wrijving en hebben een proefopstelling gemaakt met een knikkerbaan. Deze proefopstelling is gemaakt om data te verzamelen en vervolgens de resultaten van hun onderzoek te tonen. Op een vrijdagmiddag werden de ouders uitgenodigd om op school de presentaties van hun kinderen te zien, waarbij ouders en docenten (van alle vakken) ook gevraagd wordt een beoordeling te geven van de presentaties.

De knikkerbaan is opgebouwd uit een box/ doos waar schuin een pvc-buis ingestoken is. Aan de andere kant vormen twee latten de zijkanen van de baan, zodat daar de afstand gemeten kan worden en het aantal seconden geklokt. Op de presentatiebox/ doos hebben de vier meisjes hun uitkomsten van het onderzoek geplakt, in de vorm van een korte schets van de context, de wijze waarop het onderzoek is uitgevoerd, en de resultaten (in de vorm van tabellen, een grafiek en een formule).



figuur 9 Knikkerbaan

Formule: $Snelheid = \frac{Afstand}{Tijd} = \frac{M}{s}$

Afstand	Tijd	Snelheid
1 Meter	0.5 sec.	2 m/s
3 Meter	1 sec.	3 m/s
5 Meter	2 sec.	2.5 m/s
7 Meter	3 sec.	2.5 m/s
10 Meter	4 sec.	2.5 m/s

figuur 10 Presentatie van de gegevens

In het gesprekje dat één van de auteurs van dit artikel met dit viertal meisjes had, vallen een aantal zaken op. Ze presenteren met veel vuur, en ze hebben veel tijd gestoken in het verkrijgen van de goede meetresultaten (verschillende plekken in de school geprobeerd). Ze hebben hulp gehad van docenten om een goede proefopstelling te krijgen (waarbij de docent natuurkunde ook een stapje verder heeft gezet in verband met wrijving, maar deze materie was te complex om in de proefopstelling mee te nemen). Het project stelde dus centraal het meten (stopwatch, afstand meten) en de presentatie van de gegevens in tabel, grafiek en formule concentreert zich op de afgelegde weg, de tijd die daarmee gemoeid was en gemiddelde snelheid. De vier meisjes hebben (volgens henzelf) wiskunde gebruikt om de gegevens te presenteren.

Toetsing

Het is erg belangrijk dat er getoetst kan worden op een manier die recht doet aan de keuzes van de school zoals het rekening houden met individuele leerstijlen, en die zicht geeft op de vorderingen en het niveau van de leerlingen. Voor wiskunde betekent dit dat het niet zozeer moet gaan over het ‘aftoetsen’ van eindtermen of losse doelen, maar dat er toetsing moet zijn die het leren reflecteert, en met veel flexibiliteit voor individuele trajecten. Leerlingen zijn idealiter verantwoordelijk voor het leveren van het bewijs dat ze een bepaald stuk stof beheersen. Daartoe moet een goed en helder systeem van (zelf-) toetsing en beoordeling beschikbaar zijn. Voor de flexibilisering, in verband met individuele leerwegen, en voor het

verkrijgen van een goed zicht op het vaardighedeniveau van de leerlingen wordt gebruik gemaakt van elektronisch toetsen. Zo heeft men recentelijk geëxperimenteerd met materiaal van Mathadore^[1] en gaat men gebruik maken van de DWO^[2]. In dergelijke systemen is het mogelijk te oefenen, en tevens op gezette tijden, gekozen door de leerling zelf of door de docent, toetsen af te nemen. De onmiddellijke feedback is dan een groot voordeel zowel voor de leerling als voor de docent. Binnen digitale toetsen is het vaak eenvoudiger om meer gesloten kleine vragen op te nemen; authentiek en open toetsen is lastiger binnen een digitaal systeem en heeft vaak meer nadelen dan voordelen. Er wordt op Amadeus overigens ook nog vaak (gewoon) op papier getoetst. De toetsen uit de methode worden gebruikt en meestal aangepast aan de heterogene populatie (met vmbo-t- en havo/vwo-vragen). Een vorm van toetsing die in literatuur over wiskundeonderwijs regelmatig voorkomt en waar men binnen Amadeus ook belangstelling voor heeft, is ‘balanced assessment’. Balanced assessment (o.a. De Lange, 1995) is een vorm van toetsing die wat een aantal kenmerken betreft goed past bij principes van authentiek toetsen, maar die ook deels vorm kan krijgen in meer traditionele schriftelijke vormen van toetsing. Balanced assessment houdt in dat een toets evenwichtig moet zijn samengesteld, onder andere wat betreft verschillende cognitieve niveaus waarop een beroep wordt gedaan. Zo zullen er naast reproductievragen ook vragen moeten zijn die een beroep doen op het kunnen leggen van verbandingen (connections) en ook taken die om reflectie (reflection) vragen.

Dilemma’s voor wiskunde binnen het Amadeus Lyceum

We willen dit artikel besluiten met enkele dilemma’s die spelen bij het geven van wiskundeonderwijs op het Amadeus Lyceum.

Kan/moet alle wiskundeonderwijs authentiek zijn?

Het is niet nodig om binnen het wiskundeonderwijs alles betekenisvol en direct toepasbaar aan te bieden binnen de context van grotere thema’s en zelfgekozen leeropdrachten. Amadeus heeft gekozen voor een duidelijke structuur van enerzijds leer-

gebieden (met veel integratie en samenhang) en anderzijds aparte tijd voor wiskunde. Het stapelkarakter en de abstractie van het vak wiskunde vragen op onderdelen aparte aandacht en sturing vanuit de docent.

Moet Amadeus de wiskunde-inhoud zelf maken?

Amadeus heeft er voor gekozen in principe alle lesstof aan te bieden via Moodle. Het kan daarbij gebruik maken van de digitale materialen van Getal & Ruimte. Hoewel in de wiskundeboeken voor het voortgezet onderwijs veel wordt gewerkt met betekenisvolle contexten, bieden ze toch weinig ondersteuning voor het realiseren van authentiek leren (Kemme e.a., 2003; Wijers e.a., 2004). Ook is zelfs een oppervlakkige aansluiting bij lopende thema’s lastig te realiseren, doordat de volgorde in de methode vastligt en niet aansluit bij de volgorde van wiskundige elementen in de thema’s. Dat is de reden dat er ook de wens ligt om eigen materiaal te ontwikkelen. In dit verband is het interessant de discussie te volgen die door de landelijke politiek wordt aangezwengeld in hoeverre deze schoolmaterialen vervolgens weer beschikbaar kunnen komen van alle scholen in Nederland. Er zal nog flink wat tijd en moeite overheen gaan voordat hier werkbare modellen voor ontwikkeld zijn.

Moet de wiskunde in een cultuurschool even belangrijk zijn als op een ‘bètaschool’?

In de huidige tijd lijkt elke school voor voortgezet onderwijs een eigen identiteit te zoeken met onderscheidend vermogen ten opzichte van de scholen in de regio. Toch is duidelijk dat hier ook een evenwicht wordt gezocht. Een cultuurschool zal ook goed bèta-onderwijs aanbieden en een Technasium zal ook op het gebied van culturele ontwikkeling willen laten zien dat er een goed fundament gelegd wordt.

Is het bij wiskunde mogelijk om de leerling ‘zelfsturend’ te laten werken?

Amadeus kiest zeer vooruitstrevend voor veel sturing vanuit de leerling. Voor de school als geheel is het een duidelijk uitgangspunt, maar juist voor wiskunde geldt dat ‘sturende begeleiding’ en ‘interactie’ essentiële onderdelen zijn voor het welslagen van een leertraject.

Noten

- [1] Digitaal aangeboden lesmateriaal voor de profielen tweede fase wiskunde; zie www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Mathadore.
- [2] Digitale Wiskunde Oefenomgeving voor onderbouw, en in toenemende mate ook voor bovenbouw; zie www.fi.uu.nl/wiki/index.php/DWO.

Verwijzingen

- Amadeus Lyceum schoolgids 2007-2008 (zie: <http://www.amadeuslyceum.nl>).
- Moodle. Open-source content management system software (2003); zie: <http://moodle.org/>.
- C. van den Boer, V. Jonker, M. van Reeuwijk, M. Wijers (2007): *Wiskunde in scenario 5, deel 1*. In: *Euclides* 83(2); pp. 54-56.
- S. Kemme, M. Wijers, V. Jonker (2003): *Authentieke contexten in wiskunde-methoden in het vmbo*. Utrecht: Freudenthal instituut, Onderwijskunde, Universiteit Utrecht.
- J. de Lange (1995): *No change without problems*. In: T. A. Romberg (ed.), *Reform in school mathematics*. Albany: Suny Press; (pp. 87-173).
- C. Linders (2005): *Wiskunde in scenario 4. De invulling van wiskunde op nieuwe scholen, die thematisch onderwijs toepassen*. Utrecht: Freudenthal Institute. Zie: www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6596.pdf.
- M. Wijers, V. Jonker (2007): *Digitale authentiek toetsen van wiskunde*. Utrecht: Universiteit Utrecht. Zie: www.fi.uu.nl/wisweb/klool/digitaaltoetsen/documents/20070329_klo_authentiek.pdf.
- M.M. Wijers, V.H. Jonker, S.L. Kemme (2004): *Authentieke contexten in wiskundemethoden in het vmbo*. In: *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen* 21(1); pp. 1-19.

Over de auteurs

Corine van den Boer is werkzaam op het Freudenthal Instituut en voert daar een kleinschalig onderzoek uit naar de plaats van wiskunde in de nieuwe onderbouw. Daarnaast werkt zij als wiskundedocente op het St. Gregorius College in Utrecht. E-mailadres: c.vandenBoer@fi.uu.nl Vincent Jonker is werkzaam op het Freudenthal Instituut, en is daar onder andere betrokken bij het scholennetwerk Scenario5. E-mailadres: v.jonker@fi.uu.nl Martin van Reeuwijk werkt op het APS. Hij is betrokken bij enkele nieuwe scholen die nieuwe vormen van het wiskundeonderwijs aan het onderzoeken en vormgeven zijn. Eén van de deze scholen is De Nieuwste School in Tilburg. E-mailadres: m.vanreeuwijk@aps.nl Monica Wijers is werkzaam op het Freudenthal Instituut en begeleidt daar onder andere samen met Vincent Jonker het scholennetwerk Scenario5 en ontwikkelt samen met de docenten het wiskundeonderwijs voor het Vathorst College in Amersfoort. E-mailadres: m.wijers@fi.uu.nl



Meisjes en wiskunde

[Bert Zwaneveld]

In het kader van een Europees project dat erop gericht was meer meisjes naar ict-opleidingen of ict-gerelateerde opleidingen (zoals multimedia-opleidingen) te halen^[1], heb ik me verdiept in de achtergronden van het verschil in keuze voor ict-gerelateerde opleidingen tussen meisjes en jongens. Vervolgens heb ik iets dergelijks ook voor meisjes en wiskunde gedaan. In deze bijdrage probeer ik de bevindingen voor de geringe keuze van meisjes voor ict-gerelateerde opleidingen over te zetten naar meisjes en wiskunde, althans voor zover dat mogelijk is. Hier volgt mijn uitwerking, waarbij ik aanteken dat het verschijnsel dat in Nederland zo weinig meisjes voor een opleiding met een aanmerkelijke wiskundecomponent kiezen (dit in tegenstelling tot bijvoorbeeld Frankrijk en Italië), van alle tijden is. Ik verwacht dan ook niet dat er snel iets zal veranderen.

Factoren

Er zijn veel factoren die een rol spelen bij de keuze voor een bepaalde opleiding. Op de meeste hebben we nauwelijks invloed, bijvoorbeeld op hoe er thuis of onder de vrienden of vriendinnen wordt gesproken. Uit onderzoek (Van Langen, 2007) blijkt dat het schoolsysteem in Nederland met relatief veel keuzevrijheid in havo/vwo niet bevorderlijk werkt op de keuze voor bètatechniek door meisjes. In landen waar wiskunde verplicht is tot het eind van het voortgezet onderwijs kiezen meer meisjes voor bètatechniek. De invoering van de profielen in 1998 met minder keuzevrijheid ten opzichte van het daarvoor vigerende systeem heeft in de praktijk overigens averechts gewerkt. Door de invoering van de deelvakken kozen uiteindelijk zeer weinig meisjes voor het profiel Natuur & Techniek, en daarmee kozen veel minder meisjes voor wiskunde B12 dan daarvoor het geval was voor wiskunde B. Op één factor, de wijze waarop de leraar of lerares voor de klas met wiskunde omgaat en daarmee impliciet een beeld geeft van wiskunde, hebben we als wiskundeleraressen en -leraren wel invloed. Over dit aspect gaat deze bijdrage voornamelijk. Er is in Nederland een groot verschil in deelname tussen meisjes en jongens aan opleidingen met een aanmerkelijke wiskundecomponent. Er zijn geen duidelijke redenen waarom zo weinig meisjes voor dergelijke opleidingen kiezen. Nederland heeft het laagste aantal afgestudeerde meisjes in het domein van bèta/techniek in Europa (OECD, 2005 en 2006). **Tabel 1** geeft enig inzicht in deze scheve verdeling. Er zijn weinig argumenten om aan te nemen dat dit voor wiskunde anders zou zijn.

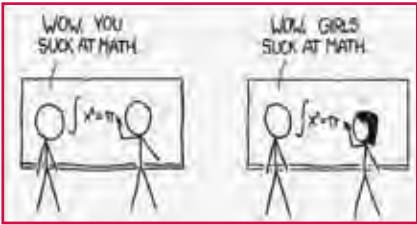
de meisjes uitvalt bij de ‘softer’ geachte profielen Natuur & Gezondheid in havo en vwo. Merk ook op dat in het hoger onderwijs verhoudingsgewijs meer vrouwen voorkomen in de sector Natuurwetenschappen, wiskunde, informatica van het wetenschappelijk onderwijs dan in die sector van het hoger beroepsonderwijs. Ik vermoed dat dit te maken heeft met het beeld dat opleidingen in het bètatechniek-domein van het hoger beroepsonderwijs ‘harder’ zijn dan in het vergelijkbare domein van het wetenschappelijk onderwijs. Dat meisjes en jongens ondanks zekere, maar marginale verschillen in vrijwel gelijke mate toegerust zijn om in wiskunde-gerelateerde opleidingen te participeren, staat buiten kijf (zie bijvoorbeeld www.kennislink.nl). Er zijn dan ook voldoende redenen om te proberen wat aan de scheve verdeling tussen jongens en meisjes te veranderen. Het belang van bèta/techniek, en dus van wiskunde, hoeft in dit blad niet onderstreept te worden. De rol van motivatie van de leerlingen voor een vak in het algemeen komt in de volgende paragraaf. Vervolgens komen een paar relevante aspecten uit het genderonderzoek aan bod. Daarna gaat het over de rol van de leraar/lerares.

Wiskunde zit met een niet onbelangrijke handicap. Helaas blijkt de rol van wiskunde bij bètatechniek in de praktijk vaak niet

Schoolsoort	Sector	Percentage meisjes	Percentage jongens
3/4 vmbo	Sector techniek	4,5	49,1
5 havo	Profiel Natuur & Techniek	1,4	18,0
	Profiel Natuur & Gezondheid	17,2	16,5
6 vwo	Profiel Natuur & Techniek	3,5	25,1
	Profiel Natuur & Gezondheid	34,5	24,0
mbo	Sector techniek	7,9	47,3
hbo	Techniek, industrie, bouwkunde	1,7	13,4
	Natuurwetenschappen, wiskunde en informatica	1,2	12,6
wo	Techniek, industrie, bouwkunde	2,7	14,7
	Natuurwetenschappen, wiskunde en informatica	6,4	13,2

Tabel 1 Deelname meisjes en vrouwen in bèta/techniek (in procenten van de totale populatie meisjes, respectievelijk jongens, in de aangegeven onderwijssectoren)

expliciet. Zo is het mobiele bellen van tegenwoordig zonder wiskunde onmogelijk, alleen merk je in de praktijk niets van die wiskunde. Mede hierdoor is het lastig een goed beeld van de rol van wiskunde neer te zetten. Bij alles wat volgt geldt: wat goed is voor meisjes, is niet slecht voor jongens, en andersom.



How it works (bron: www.xkcd.com)

Intrinsieke motivatie

In de onderzoeksliteratuur worden twee elkaar aanvullende onderzoekslijnen bij intrinsieke motivatie genoemd: de Self-determination Theory (Ryan & Deci, 2000) en het Dual Processing Self-Regulation Model (Boekaerts, 2005). De kern van beide lijnen is het belang van een leeromgeving die de autonomie van de leerlingen vergroot, die veiligheid biedt en die de leerlingen het gevoel geeft hun eigen competenties te ontwikkelen. Ze ervaren zulke leeromgevingen als in lijn met hun eigen leerdoelen. Martens & Bastiaens (2005) onderzochten de relatie tussen de autonomie van de lerenden en hun intrinsieke motivatie. Uitgangspunt is dat leerlingen wel geïnteresseerd zijn - maar de intrinsieke motivatie wordt vervolgens verstoord als de leeromgeving erg directief is en leerlingen slechts beperkte controle over hun leren hebben. De onderzoeksvraag van Martens & Bastiaens was, welke vorm van autonomie het best werkt en wanneer gebrek aan controle verwordt tot anarchie en er absoluut niet meer geleerd wordt. Hun beperkte onderzoeksopzet geeft helaas nog geen eenduidige antwoorden, maar hun gegevens duiden aan dat er inderdaad een sterke correlatie is tussen autonomie en intrinsieke motivatie. Het lijkt er verder ook op dat het beter is de leerlingen autonomie te geven met betrekking tot de inhoud dan met betrekking tot de manier waarop het

onderwijs georganiseerd wordt. Ook dit hoeft niet te verwonderen. De leraar of lerares is bij uitstek degene die in staat is de uitvoering van het onderwijs zo te organiseren dat de leerlingen, meisjes en jongens, gemotiveerd aan het werk gaan en blijven. Voor het basis- en voortgezet onderwijs met vrijwel vastliggende onderwijsprogramma's en eindtermen is het evenwel niet eenvoudig deze conclusies naar de onderwijspraktijk te vertalen. Laat ik toch een poging wagen. Sleuteltermen zijn: controle over het eigen werk, in veiligheid aan het werk zijn, het gevoel hebben dat het werk bijdraagt aan de eigen ontwikkeling doordat aan de eigen leerdoelen gewerkt wordt. Om met het laatste te beginnen: dit houdt in dat leerlingen duidelijk zicht moeten hebben op datgene waarover het in de komende lessenreeks zal gaan (aan het leerplan ontleend en dus niet erg door de leraar/lerares te beïnvloeden) en op welke ‘voordelen’ zij daaraan op korte en misschien ook lange termijn zullen hebben. In veiligheid eraan kunnen werken betekent een zodanige werkvorm dat leerlingen hun eigen ideeën (of zelfs creativiteit) kwijt kunnen en daarbij het gevoel hebben serieus genomen te worden. Controle over het eigen werk betekent een zekere vrijheid in tempo, aanpak, verantwoordelijkheid voor het nagaan of de leerdoelen bereikt zijn. Daarnaast moet het, zeker in de onderbouw, mogelijk zijn af en toe onderwerpen aan de orde te laten komen die door de leerlingen zelf worden gekozen en niet aan het leerplan zijn ontleend.

Genderspecten

Uit onderzoeken naar de vraag wat de belangrijkste oorzaken zijn voor de verschillen tussen meisjes en jongens wat betreft deelname aan ict-gerelateerde opleidingen blijkt duidelijk dat meisjes wel degelijk over kwaliteiten beschikken die goed passen in het profiel van de ict-werker: communicatieve vaardigheden, strategisch inzicht, bereidheid te luisteren, hoog-kwalitatieve resultaten willen boeken, gemotiveerd zijn voor samenwerking (Valkenburg, 2006). Nu zijn wiskunde en ict zeker niet over één kam te scheren. Dat geldt echter wel voor het beeld dat

beide er zijn voor nerds die in hun eentje moeilijke problemen proberen op te lossen die weinig met de werkelijkheid te maken hebben. Voor wiskunde op school geldt dit beeld niet (en voor ict al helemaal niet). Begripsvorming, probleemaanpak, vaak gebaseerd op realistische situaties, zijn zaken die wel degelijk gezamenlijk door leerlingen gedaan kunnen worden. Daarbij spelen strategisch inzicht, bereidheid tot luisteren en resultaatgerichtheid wel degelijk een rol. Het verwerven van met name wiskundige vaardigheden zal echter wel individueel gedaan moeten worden. Dit betekent dat we om meer meisjes naar wiskunde-gerelateerde opleidingen te trekken, misschien meer moeten inspelen op de voorkeur van meisjes voor rijke leeromgevingen met ook voor meisjes uitdagende voorbeelden. Denk daarbij ook aan puzzels, games en simulaties, maar zonder competitie-element, en met een te behappen moeilijkheidsgraad, kortom voor meer gelegenheid voor samenwerkend leren boven individueel leren, meer aandacht voor creativiteit en authenticiteit. Daarnaast valt te overwegen klassen met alleen meisjes te formeren, zodat de meisjes zich niet door de jongens overvleugeld hoeven te voelen. Bij scholen die in de bovenbouw havo/vwo informatica aanbieden, is dit succesvol gebleken. Nu is dit laatste voor wiskunde wellicht heden ten dage niet erg realistisch, maar wel realiseerbaar is (bijvoorbeeld bij Praktische Opdrachten) het samenstellen van groepjes die alleen uit meisjes óf alleen uit jongens bestaan. Dit heeft ook nadelen, maar om de hiervoor genoemde reden zeker ook voordelen.

Verder moeten leerkrachten zich bewust worden van hun vaak impliciete ideeën over meisjes en jongens, en bijvoorbeeld machogedrag niet tolereren. Zij kunnen vrouwelijke rolmodellen voor de klas halen om over het gebruik van wiskunde in hun bedrijven of opleidingen te vertellen.

Rol van leerkrachten

Om meer meisjes naar wiskunde-gerelateerde opleidingen te krijgen moet het beeld dat de leerlingen, meer in het bijzonder de meisjes, van wiskunde hebben of krijgen zo realistisch mogelijk zijn zodat zij zo goed mogelijk kunnen inschatten of het iets voor hen is, inhoudelijk maar vooral wat betreft hun capaciteiten. De wiskundelaren en -leraressen spelen daarbij een belangrijke rol. Zij kunnen het best bij de voorlichting over de profielen in het voortgezet onderwijs en over vervolg-opleidingen in het hoger onderwijs de inhoud en de vorm van het onderwijs in wiskunde duidelijk maken. Misschien betekent dit wel dat zij zich op dit laatste punt nog wat moeten bijscholen. Een punt dat speciaal aandacht vraagt is het misverstand dat meisjes, ook al zijn ze op school heel redelijk of zelfs goed in wiskunde, niet mee zouden kunnen komen in wiskunde-gerelateerde opleidingen. Wat de namen van de profielen betreft kan hier terzijde het volgende worden opgemerkt. De term ‘Natuur & Techniek’ is een term die de lading niet dekt. Misschien wél als het om het vervolgonderwijs gaat, maar niet ten aanzien van de inhoud van de schoolvakken in de Tweede Fase van havo en vwo, behalve dan op Technasia. Misschien moet de term ‘techniek’ in de naam van het meest exacte profiel uitgebannen worden, omdat het mogelijk deze term is die meisjes in klas 3 afschrikt, terwijl ‘gezondheid’ (in de naam van het profiel Natuur & Gezondheid) zo lekker sociaal en vriendelijk klinkt.

Het allerbelangrijkste is natuurlijk het optreden van de wiskundeleraar of wiskundelerares in de klas. Het is bijvoorbeeld bekend dat jongens vaker een beurt krijgen dan meisjes. Een verklaring hiervoor is dat (nog steeds) ook wiskundelaren (onbewust), net als bijvoorbeeld ouders, aannemen dat jongens beter in wiskunde zijn dan meisjes (zie Jussim & Eccles, 1992). Juist wiskundeleerkrachten moeten dit gedrag vermijden, om het beeld van wiskunde als een jongensbezigheid te ontkrachten.

In relatie hiermee kan ook opgemerkt worden dat wiskundelaren de neiging hebben om meisjes, die toch al gauw denken dat wiskunde niets voor hen is (waarschijnlijk als gevolg van het beeld dat wiskunde speciaal voor mannen/ jongens is), negatief te adviseren over het volgen van wiskunde op school of in een vervolgopleiding.

Aanbevelingen

We zetten de aanbevelingen van de vorige paragrafen op een rij. De eerste drie zijn algemeen en werken zeker ook voor meisjes positief.

- Geef de leerlingen zicht op waarover het gaat, waartoe het leidt, wat ze ervan (moeten) leren, wat voor voordeel op korte en lange termijn het werk voor hen oplevert.
- Geef de leerlingen waar mogelijk controle over het eigen werk zodat zij de verantwoordelijkheid voor dat werk kunnen nemen.
- Behandel waar mogelijk door de leerlingen aangedragen onderwerpen.
- Kies een didactiek die aansluit bij voor meisjes plezierige activiteiten: samen werken aan zaken als probleemaanpak (gebaseerd op realistische situaties), begripsvorming, zodat een beroep gedaan wordt op, dan wel bijgedragen wordt aan de ontwikkeling van strategisch inzicht en vaardigheden als bereidheid tot luisteren, resultaatgerichtheid.
- Zorg voor rijke leeromgevingen met uitdagende voorbeelden, puzzels, simulaties, (niet-competitieve) games en behapbare opdrachten.
- Overweeg, bijvoorbeeld bij Praktische Opdrachten, groepjes met uitsluitend meisjes te formeren om overvleugeling door jongens te voorkomen.
- Tolereer geen machogedrag van jongens.
- Neem actief deel aan de voorlichting over de profielkeuze en zet daarbij een realistisch beeld van wiskunde neer zodat ook meisjes voor het profiel Natuur & Techniek kiezen.
- Gedraag je in de klas ‘sekseneutraal’, want wellicht hebben vooral wiskundelaren onbewust nog steeds het idee dat jongens beter zijn in wiskunde dan meisjes.

Noot

[1] ICT-Ster, gesubsidieerd door het Europese Equal Project ESF (*www.ictster.nl*)

Geraadpleegde literatuur en weblocaties

- M. Boekaerts (2005): *Self-regulation with a focus on the self-regulation of motivation and effort*. In: I. E. Siegel, K. A. Renninger (eds.), Handbook of Child Psychology. New York: Wiley.
- L. Jussum, J.S. Eccles (1992): *Teachers Expectations II: Construction and Reflection of Student Achievement*. In: Journal of Personality and Social Psychology, 63(6); pp. 947-961.
- Rob Martens, Theo Bastiaens (2005): *De relatie tussen autonomie en motivatie*. In: Onderzoek van Onderwijs 34(1); pp. 37-40.
- R.M. Ryan, E.L. Deci (2000): *Self-Determination Theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development and well-being*. In: American Psychologist, 55(1); pp. 68-78.
- Miranda Valkenburg (2006): *Kennisdocument genderinclusiviteit, naar aantrekkelijke ict-opleidingen voor meisjes*. Amsterdam: HBO-I-stichting (document in het kader van het Europese Equal programma (ESF))
- J. Van Damme, A. De Munter (1999): *Het verschil in schools presteren tussen jongens en meisjes*, Katholieke Universiteit Leuven (zie *www.ond.vlaanderen.belobpwo/projecten/1999/van_damme_en_elchardus9905.htm*).
- A. van Langen (2007): *Meisjes in havo/ vwo en de keuze voor bètatechnisch onderwijs*. Den Haag: Platform Bèta Techniek.
- Monique Volman (2005): *A variety of roles for a new type of teacher. Educational technology and the teaching profession*. In: Teaching and Teacher Education (21); pp. 15-31.
- M.L.L. Volman (2006): *Jongleren tussen traditie en toekomst, de rol van docenten in leergemeenschappen*. Amsterdam: Onderwijscentrum VU, Vrije Universiteit Amsterdam.

- B. Zwaneveld (2005): *Wiskunde en informatica: innovatie en consolidatie, over vragen in het wiskunde- en informaticaonderwijs*. Heerlen: Open Universiteit Nederland.
- Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs (2007): *Rijk aan betekenis, Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: commissie Toekomst WiskundeOnderwijs
- Asha ten Broeke (2008): *Waar zijn de wiskundevrouwen?* Website Kennislink: *www.kennislink.nl/web/show?id=186469*

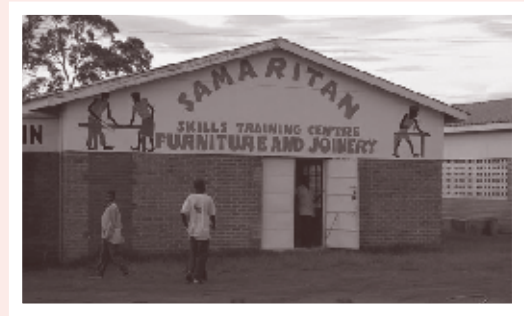
Over de auteur

Bert Zwaneveld is hoogleraar ‘professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica’ aan de Open Universiteit Nederland. E-mailadres: *Bert.Zwaneveld@ou.nl*

Feitenvel Malawi

WERELDWISKUNDE FONDS: PROJECT IN VOGELVLUCHT

[Jan Zuidema]



Land	Malawi
Aanvrager	Muriel Lycklama a Nijeholt
Projectjaar	2006-2007, 2007-2008
Projectschool	Skills Centre en Chitolera House van The Samaritan Trust, Blantyre, Malawi
Sociale situatie	In Malawi is basisonderwijs gratis, maar voortgezet onderwijs niet. Veel families kunnen het zich financieel nauwelijks veroorloven om hun kinderen naar het voortgezet onderwijs te sturen. The Samaritan Trust (TST) is een organisatie die zich inzet voor verbetering van de situatie van straatkinderen in Blantyre. Straatkinderen zijn (vaak) geen weeskinderen, en de opzet is dan ook om deze kinderen terug bij hun families te brengen, ter plekke oplossingen te zoeken, waardoor ze daar kunnen blijven. In situaties waar dit niet mogelijk is biedt TST een onderkomen en een beroepsopleiding. Het Skills Centre biedt een interne plek aan ongeveer 40 straatjongens; in het Chitolera House wonen ongeveer 60 schoolkinderen intern.
Soort school	Middelbare school van ongeveer 100 leerlingen. De niveaus zijn uiteenlopend. Sommige leerlingen kunnen niet lezen en schrijven. Er zijn nogal wat leerlingen met gedrags- en leerproblemen, bijvoorbeeld autisme en agressiviteit. TST bekostigt de scholing van enkele ex-stratkinderen die het goed doen op school.
Wiskundeonderwijs	Rekenonderwijs
Ondersteuning	Wiskundeboeken en wiskundemateriaal: € 650,00. In dit bijzondere geval voor twee jaar het salaris van een leraar die gespecialiseerd is in onderwijs aan kinderen met gedrags- en leerproblemen: € 3625,00.

Het Wereldwiskunde Fonds (WwF) is een werkgroep binnen de NVvW. Eén van de doelen van het WwF is ondersteuning van wiskundeonderwijs in de Derde Wereld door middel van financiële bijdragen aan jaarlijks door de werkgroep te bepalen projecten. Contactpersoon van het WwF is Wim Kuipers (*w.kuipers@nvvw.nl*). Zie ook *www.nvvw.nl* (klik op Werkgroepen | Wereldwiskunde Fonds).

Digitaal toetsen vraagt een strakke aanpak

HET MAGISCHE GETAL 4

[Metha Kamminga]



Al jaren kampen hogescholen met een gebrek aan routine in wiskundige basisvaardigheden van studenten. Sinds een paar jaar wordt bij de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden (NHL) geprobeerd deze basisvaardigheden voor alle studenten (weer) op routineniveau te brengen met behulp van een interactieve instapcursus. Met twee schriftelijke eindtoetsen wordt nagegaan of het vereiste niveau is behaald. In het volgende wordt uiteengezet hoe de organisatie daarvan geregeld is, wat de resultaten daarvan zijn en hoe het ‘magische getal 4’ hierin een rol speelt.

Inleiding

In een eerder artikel in *Euclides*^[1] staan de eerste resultaten van het werken met het systeem Maple T.A. beschreven. Vele mogelijkheden van dit toetssysteem kwamen daar aan de orde. Sindsdien zijn we een stuk verder gekomen met de mogelijkheden om digitaal toetsen in te zetten bij het wiskundeonderwijs. Sinds september 2007 werkt op de NHL het Maple T.A.-systeem ook binnen de digitale leeromgeving Blackboard, wat een aantal voordelen oplevert, niet alleen voor het vak wiskunde, maar ook voor andere vakken, zoals talen en fysisch georiënteerde vakken. In dit artikel beperken we ons met het digitaal toetsen tot het vak wiskunde bij de afdeling Bouwkunde en Civiele Techniek waar we een klein onderzoek hebben gedaan. De uitkomsten van het onderzoek zijn in het artikel verwerkt. Tot slot zijn ook de ervaringen van de gebruikers van het toetssysteem in het voortgezet onderwijs meegenomen.

Aanpak

Er wordt bij de afdeling Bouwkunde en Civiele Techniek het eerste halfjaar, gedurende twee perioden van 8 weken, slechts één maal per week een contacttijd van 90 minuten aangeboden in groepen van maximaal 15 studenten in een computer-lokaal. Een deel van deze wekelijkse contacttijd wordt besteed aan uitleg op het bord met voorbeelden en toelichting van een aantal onderwerpen. Denk daarbij aan de elementaire algebraïsche vaardigheden, vergelijkingen, kennis van functies, werken met eenheden en ten slotte inleiding differentiëren. De les kan later digitaal nogmaals nagelopen worden in Wisnet (*www.wisnet.nl*) met interactief lesmate-

riaal en voorbeelden met toelichting. Voor studenten die van het mbo komen is deze basistof toch nog vrij pittig, maar er wordt wel rekening gehouden met de vrij beperkte wiskundekennis van deze instroom - hoewel dat erg lastig is in verband met de beperkte tijd die ons gegeven is, zoals op bijna alle hbo-instellingen het geval is. Vervolgens gaan de studenten opgaven maken in de vorm van formatieve toetsing, waarbij gewerkt wordt aan het *op routineniveau brengen* van de basisvaardigheden. In de eerste drie weken wordt het ‘huiswerk’ onder begeleiding van assistenten gemaakt. Studenten moeten namelijk nog wennen aan het systeem. Wat nieuw voor ze is, is dat de opgaven via de computer worden aangeboden en ook op de computer moeten worden beantwoord. Niet iedereen kan daarmee direct goed omgaan. Ten eerste is het intikken van een formule voor velen al een probleem (wat ons erg verbaast). Als hulpmiddel zit in het Maple T.A.-systeem een knop om de ingetikte formule te bekijken zoals deze ook gedrukt of geschreven zou worden. De opgaven worden in een bepaalde volgorde aangeboden, afgedwongen door het systeem. De bedoeling hiervan is frustratie te voorkomen, opdat studenten niet aan iets moeilijks kunnen beginnen als het voorgaande nog niet goed beheerst wordt. Assistenten zien er op toe dat de student de formule van de opgave overschrijft en de uitwerking in het schrift maakt, waarna het antwoord in de computer wordt ingevoerd. Het is vooral in het begin van groot belang hier goed op te letten. Het is een hele strijd (die soms wel een paar weken duurt) om studenten de opgaven in het schrift te laten maken en twee schriften te hanteren: één voor aantekeningen en één voor de

training. In het begin belandt kladpapier vaak in de prullenmand, zodat er later geen mogelijkheid meer is om feedback te geven op gemaakte fouten. Het is dus niet wat vaak gedacht wordt: ‘opgaven maken op de computer’, maar: ‘opgaven maken in het schrift’. Er mag geen gebruik gemaakt worden van kladpapier (de uitwerkingen komen namelijk geheel in het schrift te staan) en de grafische rekenmachine mag maar heel beperkt worden gebruikt. De voordelen van het aanbieden van de opgaven per computer zijn, naast de dosering en de volgorde, dat de computer feedback geeft die direct beschikbaar is na afsluiten van de toets en ook achteraf beschikbaar blijft. Dat het antwoord ingetoetst moet worden, zien de studenten eerst als nadeel, maar het blijkt op den duur een groot voordeel te zijn. Studenten worden meer en meer bedreven in het invoeren van formules en zien steeds meer de structuur ervan in. De praktijk is dat de formule-angst na deze ‘onderdompeling’ wordt overwonnen. Assistenten helpen alleen als de feedback van de digitale toets niet toereikend is, ze helpen bij voorkeur dus niet met het maken van de toetsen zelf.

Trainingstoetsen

Een trainingstoets bestaat meestal uit vijf opgaven en voor een dergelijke toets, die een minuut of 15 duurt, moet de student minimaal 80% scoren. Scoort hij minder, dan kan dezelfde toets herkanst worden nadat de feedback bestudeerd is. De feedback wordt bij deze trainingstoetsen volledig vrijgegeven. Niet alleen het goede antwoord wordt gepresenteerd, maar soms ook nog een mogelijke weg om tot het antwoord te komen of er worden verwijzingen naar het lesmateriaal gegeven. Tijdens het maken van de toets zijn ook vaak hints beschikbaar. Echter bij bepaalde onderwerpen waar we écht het routineniveau eisen, geven we soms een bepaalde toets meerdere keren: eerst mét hints en uitgebreide feedback, daarna een toets zonder hints en ten slotte een toets met tijdslimiet om de routine op te voeren. In de reeks

van toetsen is op dat moment, wat niveau betreft, een pas op de plaats ingebouwd ten behoeve van de routine. Doordat het Maple T.A.-systeem verregaande randomisering mogelijk maakt, krijgt de student bij het herkansen van ‘dezelfde toets’ steeds andere vragen. De student kan dus de toetsen die nog niet met 80% score zijn afgerond op eigen initiatief herkansen op elk moment wanneer hij maar wil met dien verstande dat er steeds maximaal vier pogingen mogelijk zijn. Dit is allemaal instelbaar in het toetssysteem.

Het magische getal 4

Het aantal van vier is erg belangrijk. Op grond van jarenlange ervaring hebben we geconcludeerd dat dit precies het aantal is waarop een soort ‘frustratieomslagpunt’ bereikt wordt. Bied je namelijk meer pogingen aan dan vier, dan is de student kwistiger met zijn pogingen en wordt het ten slotte gokken en een kunstje om de opgaven te kunnen maken. Ook is het vrij frustrerend voor studenten als ze meer dan vier keer onder de maat presteren. De kans dat ze dan het bijltje erbij neergooien, wordt vrij groot. Bovendien is het leereffect van de toets ook niet groot meer als het zo vaak misgaat. Bied je minder dan vier pogingen aan, bijvoorbeeld drie, dan heeft een student niet de broodnodige oefening, waardoor het al gauw jammer en helaas is als nét niet de verplichte 80% gescoord wordt. Als de student na een vierde poging nog niet de vereiste score heeft behaald, wordt het tijd de docent of assistent in te schakelen voor hulp, zo de student dat al niet eerder doet. Er moet dan wel goed gekeken worden naar wat er mis is. Vervolgens kan de docent of assistent een nieuwe poging vrijgeven en meestal is het daarmee wel gedaan. Vaak is het in het begin - bij de hele simpele vragen - een kwestie van niet goed intikken van het antwoord. Om die reden besteden we daar in het begin van de cursus extra aandacht aan. Bij de volgende opgaven is het probleem meestal een kwestie van niet goed opschrijven van de uitwerking in het schrift. De student moet dan ook het schrift

kunnen tonen bij de vraag om hulp. Wat vaak voorkomt is het half-op schrijven van de uitwerking en uit het hoofd bedenken wat de rest van het antwoord zou moeten zijn, zodat het nét verkeerd ingevuld wordt in de computer. Ook is het mogelijk dat de student helemaal de voorbeelden niet bekeken heeft of de les niet gevolgd heeft en eigenlijk niet weet hoe het moet en toch begint met de trainingstoetsen.

Norm van 80%

Het blijkt dat genoemde norm van 80% voor de trainingstoetsen zeer snel geaccepteerd wordt. (Hoewel er natuurlijk altijd studenten blijven die een 6 ook wel voldoende vinden.) Deze 80%-norm heeft als voordeel dat de student zich niet ervan af kan maken en bepaalde vragen stelselmatig kan overslaan die hem moeilijk voorkomen en waarvoor hij zich niet wil inspannen. Alle soorten opgaven moeten worden beheerst en er worden geen concessies gedaan. Dit heeft tot gevolg dat de student uiteindelijk echt wil weten hoe het zit voordat hij naar de volgende toets gaat. Omdat de aangeboden wiskundestof in het eerste halfjaar van de opleiding zeer beperkt is, is de 80%-norm ook wel nodig om de kennis en vaardigheid in de praktijk in te zetten bij de toegepaste vakken zoals statistiek en mechanica. De trainingstoetsen zijn *verplicht* en iemand ‘die het al kan’ is er snel doorheen, want het maken van een toets kost ongeveer 15 minuten. Dat maakt het ook minder bezwaarlijk om nog een poging te wagen als het een keer mislukt. Een student heeft meestal wel een kwartier maar geen uur de tijd.

Extra begeleiding

Een groot struikelblok is het feit dat er voor extra begeleiding en ondersteuning geen tijd is opgenomen in de onderwijsplanning en dat deze dus niet in studiepunten wordt uitgedrukt. Studenten hebben de mogelijkheid om tijdens de les vragen te stellen over de gemaakte toetsen. Vooral in het begin worden hierbij extra mensen ingezet om te assisteren. Maar ook is het mogelijk op een digitaal forum in de digitale leeromgeving vragen te stellen. Elke dag worden de vragen afgehandeld. Er kan door de docent en de assistenten in het toetssysteem gekeken worden bij de verrichtingen van de student. Alle pogingen van de studenten blijven bewaard en kunnen op verzoek worden herbeoordeeld, waarbij bij een vraag boven-

dien extra commentaar geschreven kan worden om de student op het goede spoor te zetten. Bovendien biedt de NHL de mogelijkheid om zwakke studenten te adviseren zich bij het zogenoemde Learning Centre te melden, waar ze op twee middagen per week bij voorintekening terecht kunnen om onder begeleiding van twee zeer enthousiaste studenten van de wiskundelerarenopleiding te werken aan hun opgaven. Deze assistenten zijn volledig op de hoogte van de gang van zaken en hebben autorisatie om in de ‘back office’ van het toetssysteem feedback te geven en zo nodig nieuwe pogingen vrij te geven. De assistenten die het afgelopen jaar hebben meegewerkt waren zelfs zó enthousiast dat ze bij hun stageperiode op het voortgezet onderwijs ook het Maple T.A.-toetssysteem gaan inzetten. Deze extra begeleiding wordt door de meeste studenten positief beoordeeld.

Eindtoetsing

Er is na elke periode van 8 weken een schriftelijke eindtoets waaraan alléén deelgenomen kan worden als het trainingstraject met goed gevolg is doorlopen. Het is verbazend te merken hoe hard studenten voor de oefentoetsen werken om toch maar te mogen meedoen aan de eindtoets. Uitstelgedrag wordt voor een deel tegengegaan doordat het in de praktijk onmogelijk is om op het laatste moment zo’n 35 kleine oefentoetsen met een minimale score van 80% af te ronden zonder ergens te blijven hangen. Toch geven studenten aan dat het verschrikkelijk veel moeite kost om regelmatig te werken. Cursorisch onderwijs verliest het op dit punt in feite altijd van projectonderwijs waar studenten hogere prioriteiten stellen aan het direct verzilveren van studiepunten bij het afronden van een project. Tijdens het trainingstraject is er dan wel binnen een dag hulp beschikbaar, maar er is toch tijd nodig om te studeren en aan de verbetering van de fouten te werken en misconcepties eruit te trainen. Het is overigens verbazend hoeveel misconcepties studenten in hun vooropleiding hebben opgebouwd die allemaal weer afgebroken moeten worden. Waar die misconcepties door ontstaan... Mijn man kocht onlangs een nieuw rekenmachientje omdat de batterij van zijn oude op was. Na intikken van ‘1 + 3 × 5’ gaf het als antwoord ‘20’. Is het dan verbazend dat studenten als volgt vereenvoudigen:

$$\frac{2+6a}{2}=4a\text{ ?}$$

De eindtoets is schriftelijk omdat anders de beoordeling te gevoelig is. Er kan in de eindtoets wel iets half goed gerekend worden waar de computer alleen maar goed of fout kent. De eindtoets duurt een uur en de uitwerkingen moeten geheel opgeschreven worden. Er mag geen kladpapier worden gebruikt en geen formuleblad en het gebruik van de rekenmachine wordt tot een minimum beperkt. We hebben wel eens kladpapier verstrekt, maar daardoor kregen de studenten te maken met tijdgebrek.

Aan het eind van de eerste periode van acht weken was het uiteindelijke slagingspercentage ruim 90%. Degenen die bij de eerste ronde niet meegedaan hebben, konden met de herkansing twee weken later meedoen op voorwaarde dat de training alsnog wordt afgerond. Studenten die ondanks een goed verloop van het trainingstraject niet geslaagd waren voor de eindtoets, werden op het spreekuur uitgenodigd. Het ging daarbij om slechts enkele studenten. We komen er eigenlijk altijd achter wat de oorzaak van de onvoldoende is geweest. Dit kan bijvoorbeeld te maken hebben met een teveel aan hulp tijdens het maken van de oefentoetsen, of het onvoldoende aan zelfdiagnose te hebben gedaan of het niet goed in orde hebben van het werkschrift.

Fraude komt eigenlijk niet voor. Ze realiseren zich té goed dat ze toch zelf de schriftelijke eindtoets moeten doen, de uiteindelijke afrekening. Het trainingstraject is slechts een voorwaarde om mee te mogen doen met de eindtoets. Voor de training zelf worden absoluut geen punten gegeven. Ook voor studenten die het op grond van hun vooropleiding in principe al kunnen, is de training verplicht. Hiermee wordt ervoor gezorgd dat de formulevaardigheid op de computer wordt afgedekt.

Onderzoeksresultaten

Aan het eind van de cursus is een enquête gehouden over de gang van zaken in het eerste half jaar. Wat daar uitgekomen is, is voor een deel verwerkt in het bovenstaande. Voornaamste conclusie: De student heeft over het algemeen bijna tweemaal zoveel tijd nodig als er voor gegeven wordt in het curriculum. (De inspanning wordt echter wel beloond al is het maar één studiepunt per periode.) Slechts 21% kan het binnen

de daarvoor gestelde tijd doen. Verder zeggen studenten meer zelfvertrouwen te krijgen door het oefenen en daardoor meer open te staan voor nieuwe stof. Van de studenten die met de cursus meededen, is in de eerste periode 91% geslaagd. We hebben het dan niet over de studenten die vroegtijdig afgehaakt zijn en studenten die niet op de lessen komen en ook geen huiswerk doen. Het gaat bij deze percentages om de studenten die meegedaan hebben met de stroomlijn van de cursus. Voor de tweede periode is een fors aantal studenten afgehaakt wegens overbelasting van de studie en die moeten in het volgend jaar de tweede periode nog meelopen en herkansen. Voor degenen die periode 2 wel meegedaan hebben is het aantal geslaagden ruim 80%. Sommige studenten geven aan dat de tweede periode zelfs gemakkelijker was dan de eerste. In vergelijking met voorgaande jaren, waar er op vrijblijvende basis oefenstof werd aangeboden, is het slagingspercentage voor de eindtoets nu spectaculair toegenomen en we kunnen er van uitgaan dat de kennis eindelijk weer toepasbaar is geworden in de toegepaste vakken.

Ervaringen in het voortgezet onderwijs

Een aantal scholen voor voortgezet onderwijs heeft ook al kennism gemaakt met het toetssysteem. Kortgeleden ben ik nog in Terneuzen geweest om mensen van omliggende scholen voor voortgezet onderwijs gedurende een dag te laten werken met de mogelijkheden van het systeem. Ook in Friesland is al belangstelling getoond. Op de cursus Maple T.A. die ik vorig jaar in Amsterdam gaf, heb ik Ton Meulman leren kennen van de Wolfert Dalton school voor VMBO, HAVO en VWO te Rotterdam. Hij werkt nu een half jaar met het systeem en we kunnen daarover al heel wat melden. Ook op zijn school maken ze zich al een aantal jaren zorgen over de algebraïsche vaardigheden van de leerlingen. Veel leerlingen in zowel onderbouw als bovenbouw hebben de grootste moeite om het tempo bij te benen en verliezen niet zelden het plezier in het maken van de opgaven doordat er telkens rekenfouten in zitten. Succeservaringen, zo nodig om het oefenen vol te houden, maken deze leerlingen voor

wiskunde vaak te weinig mee. Hun eerste aanzet met het programma AlgebraNet is nu uitgemond in de invoering van Maple T.A. in de onderbouw die zeer enthousiast is opgepakt. Leerlingen en ouders vinden het erg prettig dat ze nu een handvat hebben om het wiskundeprobleem aan te pakken. Voor de hogere klassen geldt dat gaten in de kennis snel duidelijk worden en kunnen worden aangepakt. Plotseling is oefenen leuk. Leerlingen genieten van het halen van een hoog cijfer voor een toets en nog belangrijker: de vaardigheden gebruiken ze ook in de gewone lessen. Als de leerlingen eenmaal aan het oefenen zijn is de tijdwinst groot. Weinig uitleg nodig, geen nakijkwerk, leerlingen kunnen op eigen houtje zoveel oefenen als ze willen. Docenten verwijzen in de lessen bij een gebrek aan vaardigheden nu meteen naar het toetssysteem. U kunt het systeem van Wolfert Dalton in werking zien op <http://mapleta.can.nl/classes/wolfertdalton>. U kunt zich hier ook registreren en toetsen maken.

Dank

Met dank aan Ton Meulman (tmm@wolfert.nl) en Jeanine Bakx (jba@wolfert.nl) van de Wolfert Dalton school, verder aan Christaan Boudri die met zijn ervaring op de Hogeschool Arnhem Nijmegen vele goede aanwijzingen voor dit artikel gaf, en niet in de laatste plaats aan Wim Caspers van de Technische Universiteit Delft die nog wat lijn in het verhaal heeft gebracht en zeer gecharmeerd was van het magische getal 4.

Noot

[1] Metha Kamminga: *Digitaal toetsen met Maple TA*. In: *Euclides* 81(6), april 2006, pp. 286-290. Dit artikel is digitaal beschikbaar via: www.nvvw.nl/media/files/werkgroepen/euclides/euclides81p.286290.pdf

Over de auteur

Metha Kamminga is docent aan het Instituut Techniek van de Noordelijke Hogeschool te Leeuwarden. Haar e-mailadres is kamminga@tech.nhl.nl. Zij is ook bereikbaar om informatie te geven over het toetssysteem Maple T.A. Meer informatie op de site www.tech.nhl.nl/~kamminga.

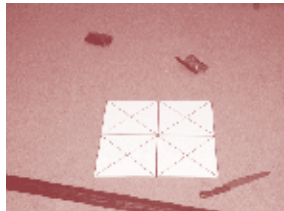
Wiskundige CSI

[André Heck]

Metten op een foto

In elke aflevering van de tv-serie *Numb3rs* helpt wiskundige Charlie Eppes zijn broer, FBI-agent Don, met speels gemak om een misdaad op te lossen. In programma's als *CSI* en *Law & Order* zijn resultaten van DNA-testen, toxicologisch onderzoek en van zoektochten in databanken in een mum van tijd beschikbaar. In deze misdaadprogramma's kunnen de meest wazige foto's en videobeelden en de slechtste geluidsopnames gemaakt op een plaats delict zodanig opgepoetst worden dat allerlei details snel beschikbaar komen. De werkelijkheid is weerbarstiger en minder melodramatisch. Bij echt forensisch onderzoek gaat het om zorgvuldige en objectieve verzameling, documentatie en veiligstelling van sporen op een plaats delict of op een plek waar een ongeval plaatsgevonden heeft. Forensische fotografie is een van de technieken die hierbij gebruikt wordt. Vaste onderdelen zijn het maken van overzichtsfoto's vanuit diverse gezichtspunten, het maken van *mid-range* foto's waarin de aandacht uitgaat naar de onderlinge positie van objecten die in het criminele onderzoek of de juridische afhandeling een rol kunnen spelen en het maken van close-up foto's voor interessante details. In dit artikel ga ik in op de tweede soort van forensische foto's.

In **figuur 1** is een foto te zien die gemaakt is tijdens de werkgroep *Wiskunde ontwikkelen met foto's* op de Nationale Wiskunde Dagen 2008^[1].



figuur 1 Foto van de plaats delict

Het is een foto van de plaats delict van een ter plekke in scène gezet misdrijf. Toegegeven, de kwaliteit van de foto voor forensisch gebruik is voor verbetering vatbaar, maar het doel in de werkgroep was te laten zien dat je in vijf minuten tijd zo'n foto kunt maken, importeren op de computer en desgewenst kunt bewerken voor verder gebruik in een dynamisch meetkundepakket zoals het

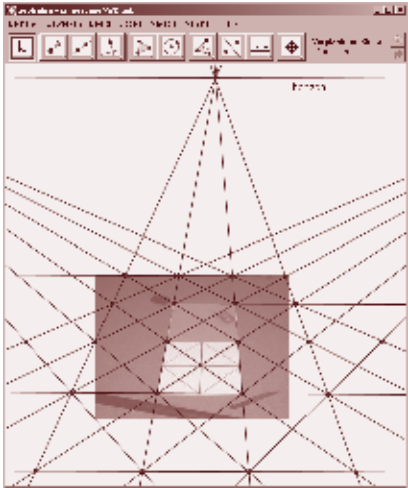
gratis te downloaden pakket GeoGebra^[2] of in een computerwerkomgeving zoals Coach^[3]. Het mes, de brillendoos en de portemonnee zijn de door deelnemers meegebrachte objecten die in de fictieve misdaad een rol gespeeld hebben. Maar de fotograaf heeft nog een vierde object ter plekke neergelegd: een zogenoemd *perspectiefvierkant*, bestaande uit vier tegels van gelijke soort en met identieke afmetingen die zodanig aan elkaar geschoven zijn dat ze samen een vierkant vormen. Het perspectiefvierkant is het enige object op de foto waarvan de werkelijke afmeting bekend is; het zal gebruikt worden om de grootte en de onderlinge positie van de andere objecten te bepalen. Zo'n hulpmiddel is nodig omdat je de plaats delict op de foto in perspectief ziet en hierdoor geen zodanig eenvoudige afstandsrelatie tussen objecten hebt dat je deze simpelweg met een liniaal kunt opmeten.

Gebruik van het perspectiefvierkant in een meetkundige aanpak

Er zijn twee redenen om een perspectiefvierkant in de forensische foto te gebruiken:

1. het is een object op de foto waarvan de werkelijke afmeting in ieder geval nauwkeurig en buiten alle twijfel bekend is;
2. de vorm van dit object is zodanig gekozen dat –zoals de naam suggereert– voor afstandsmetingen met de perspectivische vervorming op de foto rekening gehouden kan worden.

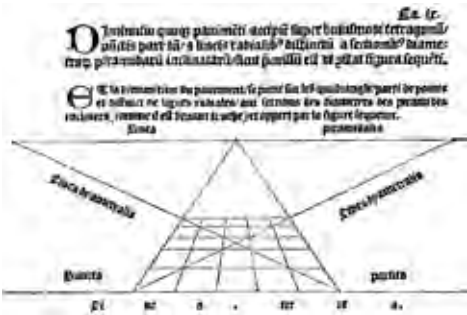
De tweede reden is de belangrijkste en voor de keuze van het perspectiefvierkant heb ik me laten leiden door de gedetailleerde beschrijving in het recente boek *Crime Scene Photography* van Edward Robinson^[4]. In deze sectie leg ik kort uit hoe het vierkant gebruikt kan worden om de locaties van de objecten op de foto met elke gewenste precisie te bepalen. Enerzijds gebeurt dit door een proces van uitbreiding van het perspectiefvierkant tot een groter tegelpatroon over de vloer en anderzijds door een proces van verfijning van dit rooster. **Figuur 2** toont de uitbreidingsoperatie uitgevoerd met het dynamische wiskundepakket GeoGebra. Het vierkant waarbinnen de brillendoos zich bevindt is gearceerd. De uitbreiding van het gegeven perspectiefvierkant tot een



figuur 2 Uitbreiding van het perspectiefvierkant tot een groter tegelpatroon

betegeling van een groter vloeroppervlak vindt zijn oorsprong in de constructies van tegelvloeren in eenpunts- of centraal perspectief die in de Renaissance in de schilderkunst ontwikkeld zijn. Een van de meest bekende methoden is afkomstig van Leon Battista Alberti (1407-1472), die hij *modo ottimo* ('beste manier') noemde in zijn verhandeling getiteld *Il Trattato della Pittura e I Cinque Ordini Archittonici* ('over schilderen', 1436) en die beter bekend is onder de Italiaanse naamgeving van 'costruzione legittima' ('legitieme constructie'). Een meer wiskundige onderbouwing van deze methode is door Piero della Francesca (1412-1492) opgeschreven in de trilogie *De Prospectiva Pingendi* ('over perspectief bij schilderen', verschenen in de periode 1484-1487). De geïnteresseerde lezer wordt voor meer details verwezen naar het prachtige boek *Piero della Francesca, A Mathematician's Art* van J.V. Field^[5] en naar vakliteratuur.^[6,7] Hans de Rijk^[8] heeft eerder in Euclides een toegankelijke beschrijving van Alberti's aanpak gegeven.

Maar in feite is de methode waarop het perspectiefvierkant in de forensische praktijk gebruikt wordt, meer verwant met de zogenaamde *distantiepunt-constructie*. Deze methode is voor het eerst beschreven door Jean Pélerin (alias Viator, 1445-1524) in zijn boek *De Artificiali Perspectiva* uit 1505, maar was vermoedelijk ook al in Italië in de vijftiende eeuw bekend. **Figuur 3** toont een fragment uit de derde editie van dit boek^[9] dat gaat over de genoemde

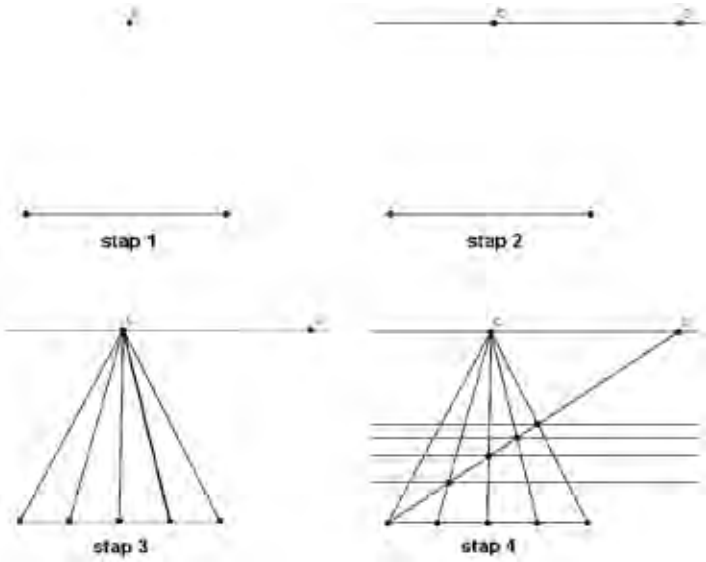


figuur 3 Fragment uit Pélerin's boek over de distantiepunt constructie

methode, waarvan aangetoond kan worden dat deze dezelfde resultaten oplevert als Alberti's methode. We zullen in de laatste paragraaf het bewijs leveren. Dan zal ook meer duidelijk worden waarom de distantiepunt-methode goed werkt en welke rol de (gewenste) afstand van het oog tot het tafereel speelt. **Figuur 4** toont de vier stappen in de distantiepunt-constructie voor een tegelvloer met zestien vierkanten. Deze constructie is met een dynamisch meetkundepakket eenvoudig na te doen. De stappen uit de distantiepunt-constructie zijn:

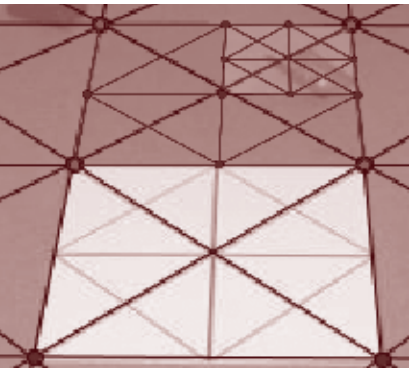
1. Teken de basislijn voor de tegelvloer en kies de positie van het centrale punt C .
2. Teken de horizon door C en kies een punt D zodat de afstand CD gelijk is aan de (gewenste) afstand van het oog tot de afbeelding.
3. Verdeel een stukje van de basislijn in een gewenst aantal gelijke delen en verbind de verdelingspunten met C .

figuur 4 Stappen in de distantiepunt-constructie van Pélerin



4. Teken een rechte lijn van D naar het tegenoverliggende einde van het basislijn-stuk en teken door elk snijpunt van deze lijn door D met de lijnen door C een lijn parallel aan de basislijn.

De verfijning van het tegelpatroon tot een rooster waarin met meer precisie de locatie van een object is vastgelegd, is een proces waarin in de eerste stap elke gewenste kopie van het perspectiefvierkant in het uitgebreide tegelpatroon op zijn beurt verdeeld wordt in vier gelijkvormige perspectief-vierkanten met gehalveerde grootte. Dit proces kun je vervolgens zo vaak herhalen als je nodig acht. In het gegeven voorbeeld is de werkelijke lengte van elke zijde van het oorspronkelijke perspectiefvierkant gelijk gekozen aan $\frac{1}{2}$ meter. Na de eerste verfijning ontstaat een vierkant met de werkelijke lengte van elke zijde gelijk aan $(\frac{1}{2})^2$ m. Na de tweede stap in het verfijning-proces is de werkelijke lengte van elke zijde $(\frac{1}{2})^3$ m. Na n stappen is de nauwkeurigheid waarmee een werkelijke positie bepaald kan worden dus gelijk aan $(\frac{1}{2})^n$ m. Je kunt dus zo nauwkeurig werken als je nodig acht. **Figuur 5** illustreert de eerste stap in het verfijningsproces voor het vierkant waarin de brillendoos ligt. Ruw geschat op basis van deze figuur ligt de brillendoos $\frac{3}{8}$ m rechts en $\frac{1}{8}$ m naar voren toe van de portemonnee vandaan. Dit geeft een ruwe schatting van de tussenliggende ruimte van $\frac{1}{8}\sqrt{10}$ m $\approx$ 39,5 cm. De verfijningsprocedure is als volgt:



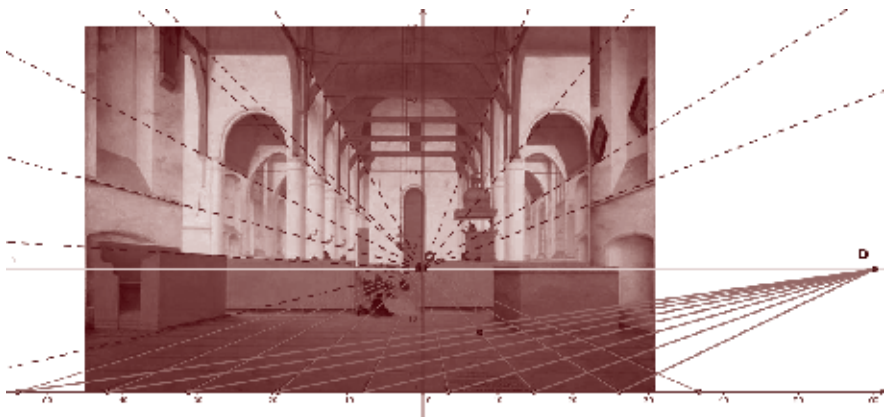
figuur 5 Verfijning van het rooster

1. Kies een vierkant in het uitgebreide rooster, markeer de vier hoekpunten en verbind ze onderling met lijnstukken.
2. Construeer de middens van de lijnstukken die de gemarkeerde hoekpunten verbinden.
3. Verbind de in de vorige stap gevonden punten met lijnstukken: je hebt nu een kopie van het oorspronkelijke perspectief-vierkant geconstrueerd.
4. Kies in de kopie van het oorspronkelijke perspectiefvierkant een kwadrant, zeg rechtsboven, en herhaal de eerste drie stappen voor dit vierkant. Je hebt nu een perspectiefvierkant geconstrueerd dat tweemaal zo klein is als het perspectief-vierkant waar je mee begon.

Het is eigenlijk wel aardig dat de moderne toepassing van wiskunde in forensisch onderzoek teruggrijpt op de wiskunde van het perspectief zoals die in de Renaissance voor schilderkunst ontwikkeld is. Leerlingen zouden met precies dezelfde middelen, dat wil zeggen projectieve meetkunde en computergebruik, perspectief in kunst kunnen bestuderen. Een interessante link tussen wiskunde en het schoolvak “kunst” (beeldende vormgeving) is te realiseren; het Zebraboekje *Perspectief, hoe moet je dat zien?*^[10] is hierbij uitermate nuttig. Een meer veelzijdige toepassing van dezelfde wiskunde is haast niet denkbaar. Met ICT-ondersteuning in de vorm van een dynamisch meetkundepakket en gebruikmakend van foto's van schilderijen kunnen leerlingen zelfstandig onderzoek naar het gebruik van perspectief in de schilderkunst uitvoeren. Het is dan wel relevant dat in de gebruikte schilderijen duidelijke aanwijzingen te vinden zijn van gebruik van perspectiefleer omdat anders het gevaar van ‘wishful thinking’ op de loer ligt.

{{er ontbreekt (mi) een horizontale lijn boven: Analyse -De rekenregels... -rekenregels voor...}}

?



figuur 6 Pieter Jansz. Saenredam, Interieur van de Sint-Odulphuskerk te Assendelft (Rijksmuseum, Amsterdam). Hulplijnen toegevoegd.

In **figuur 6** is te zien hoe de distantiepunt-methode gebruikt is om een schilderij van Pieter Jansz. Saenredam (1597-1665) te analyseren. De tegelvloer is gebruikt om het oogpunt O en het distantiepunt D op de horizon te bepalen. Het assenstelsel is zodanig gekozen dat de oorsprong met het punt O samenvalt en de schaling van de assen past bij de werkelijke afmetingen van het schilderij (76 $\times$ 50 cm). Tussen twee haakjes, het schilderij betreft een olieverf op paneel uit 1649, getiteld *Interieur van de Sint-Odulphuskerk te Assendelft*. Het schilderij maakt onderdeel uit van de collectie van het Rijksmuseum te Amsterdam. Stippellijnen in de figuur illustreren dat de schilder, zoals altijd, in éénpuntperspectief gewerkt heeft. Om in de sfeer van een wiskundige thriller terug te keren kun je de vraag stellen of met de kennis van het distantiepunt dat bij het schilderij past, te achterhalen is of de schilder wel in staat geweest kan zijn om fysiek binnen in de kerk op het oog aan het schilderij te werken, of dat hij gebruik gemaakt heeft van zijn artistieke vrijheid. Welke gegevens van de werkelijkheid zouden dan nog meer bekend moeten zijn? Hans de Rijk heeft in een aantal columns die in 2002 verschenen zijn op de website van *Ars et Mathesis*^[11], voorbeelden gegeven van schilderijen en tekeningen waarin het perspectief ‘liegt’ en de schilder wel stiekem het oogpunt verplaatst moet hebben om een deel van de omgeving scherp te kunnen zien en te schilderen. Dergelijke studies zijn een spannende speurtocht voor de liefhebber.

Laten we terugkeren naar de situatie van de analyse van een plaats delict. Vanzelfsprekend wordt tegenwoordig de

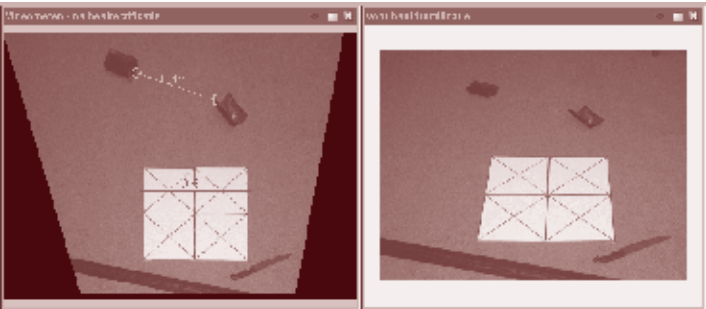
distantiepunt-methode niet meer met de hand door een forensisch onderzoeker gedaan, maar is deze ingebouwd en geautomatiseerd in computerprogramma's zodat direct op digitale foto's gemeten kan worden en posities van objecten te bepalen zijn. Projectieve meetkunde is bij de computerimplementatie van deze methoden de broodnodige fundering.

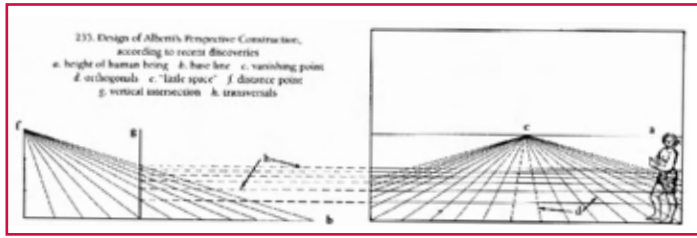
Gebruik van het perspectiefvierkant voor beeldrectificatie

Het grootste probleem met het meten van posities en afstanden op de foto van de plaats delict is zoals gezegd de perspectivische vervorming. Een alternatief voor de eerder beschreven meetkundige aanpak van het probleem is om, voorafgaand aan het opmeten van foto's en videoclips, het digitale beeldmateriaal dusdanig te bewerken dat de perspectivische vertekening van objecten verdwijnt. Het is mogelijk om een projectieve transformatie toe te passen op de foto die de perspectivische vertekening van het perspectiefvierkant ongedaan maakt en een foto oplevert vanuit frontaal-parallel gezichtspunt. Het

resultaat, dat verkregen is met de computer-werkomgeving Coach, is in **figuur 7** te zien. Dit herstel van rechte hoeken en parallelle lijnen in het grondvlak is een voorbeeld van beeldrectificatie. Hierna kunnen posities en afstand direct gemeten worden op de bewerkte foto ten opzichte van een zelfgekozen assenstelsel. De gebruikersinterface is door iedere leerling en leraar te hanteren: op de oorspronkelijke foto leg je een vierhoek zodanig neer dat de hoekpunten overeenstemmen met de hoekpunten van een object dat in werkelijkheid een rechthoek is. De software rekent de projectieve afbeelding uit die de geselecteerde vierhoek in een rechthoek transformeert en past deze afbeelding op de digitale foto toe. In dit geval wordt het perspectiefvierkant als rechthoek aangewezen. Hierna is het slechts een kwestie van vergroten of verkleinen in beide richtingen (en eventueel verschuiven van het zichtbare gedeelte van de foto) om uiteindelijk tot een foto met het vierkant en de objecten in beeld te komen. Met een digitale liniaal is dan op de gercificeerde foto direct te achterhalen dat de werkelijke afstand tussen brillendoos en portemonnee gelijk is aan 40 cm en dat het mes in werkelijkheid 32 cm lang is. Het eerste resultaat stemt goed overeen met de eerdere ruwe schatting op basis van roosterverfijning. Voor meer details en andere toepassingen van beeldrectificatie met Coach verwijs ik naar een eerder artikel verschenen in de *Nieuwe Wiskrant*.^[12] De in dit artikel beschreven toepassing kan dienen als uitbreiding van de gecertificeerde NLT-module *Forensisch onderzoek, every contact leaves a trace* voor havo waarin momenteel slechts 3 pagina's gewijd worden aan wiskunde (forensische statistiek).

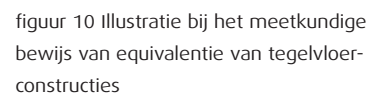
figuur 7 Beeldrectificatie in Coach 6





figuur 9 Alberti's constructie van een tegelvloer in perspectief

Figuur 8 is ontstaan door eerst Alberti's methode toe te passen en dan het punt D te construeren dat bij toepassing van de distantiepunt-methode dezelfde tegelvloer zou opleveren. Eerst wordt een hulplijn loodrecht op de basislijn FG getrokken. Laat N het snijpunt zijn van deze lijn met de horizon door C . Kies links van N het punt E zodanig dat het lijnstuk NE een lengte heeft die gelijk is aan de gewenste afstand van het oog tot het taferel. Verbind E met de equidistant uitgezette punten op het basislijnstuk FG . Teken door de snijpunten van deze lijnen met de lijn FN horizontale lijnen (dus parallel met de basislijn en de horizon). De snijpunten van deze horizontale lijnen met de lijnen vertrekkend uit C naar de equidistante punten op de basis vormen de hoekpunten van de tegels op de vloer. Kies als punt D nu het snijpunt van de diagonaal FH van



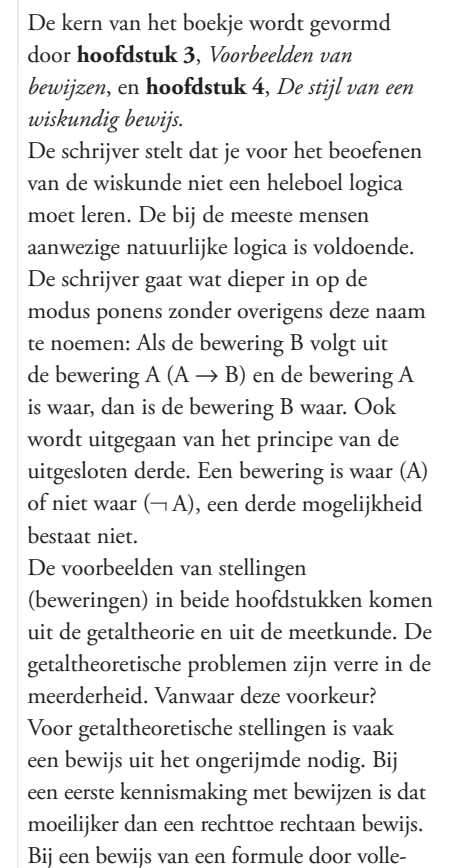
Op de website van de NWD 2008^[1] zijn lesmaterialen beschikbaar gesteld, te weten GeoGebra- en Coach-activiteiten, alsmede een online artikel over meten op foto's^[14].

André Heck is projectmanager aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam op het gebied van ICT-toepassingen in onderwijs bij wiskunde en natuurwetenschappen.
E-mailadres: heck@science.uva.nl

[Chris van der Heijden]

De vraag is of deze zo enthousiast begonnen nieuwe aanpak van het wiskundeonderwijs heeft beantwoord aan de (te) hoge verwachtingen. Er zijn relatief weinig leerlingen van het vwo die een exacte studie willen volgen, hoewel er momenteel een kentering is. Ook voor de theoretisch ingestelde vwo-leerlingen blijft de motivatie voor wiskunde beperkt tot het besef dat 'je het overal voor nodig hebt'. Er gaat van de wiskunde weinig uitdaging uit. Hoe komt dit? Is het idee dat op toepassing gericht wiskundeonderwijs de motivatie zou verhogen geen mythe? Zijn we in het wiskundeonderwijs te veel blijven steken in een intuïtieve benadering met hier en

Een samenstel van feiten die elk op zich niet overtuigend zijn kunnen het bewijs voor een misdrijf aanvaardbaar maken, maar een kans op fouten blijft aanwezig. In de economische wetenschap is de theorie en modelvorming nog steeds ontoereikend om goede voorspellingen te doen. Bovendien spelen politieke en morele overwegingen daar een rol. Bij de bewijsvoering in de wiskunde speelt niet alleen het bewijs een rol. Het begripkader waarbinnen de uitspraken zich afspelen moet, uitgaande van veronderstelde voorkennis, gedefinieerd worden. Ten slotte moet door een bewijs aangetoond worden of een bewering of stelling waar of niet waar is. Dit laatste lukt niet altijd (vermoeden van Goldbach). De meeste tijd gaat echter zitten in het proberen en experimenteren om tot het opstellen van een vermoeden te komen. Deze fase wordt meestal niet in een wiskundeboek besproken.



dige inductie stellen leerlingen ongetwijfeld de vraag hoe je aan deze formule komt. Het aardigst zijn toch de bewijzen van stellingen uit de meetkunde. Stelling 3.4: *Binnen elke scherphoekige driehoek in een plat vlak kan een vierkant beschreven worden waarvan de hoekpunten op de zijden van de driehoek liggen*, wordt analytisch bewezen door het aanbrengen van een assenstelsel, gangbaar in het huidige wiskundeonderwijs. Terloops wordt opgemerkt dat het ook anders kan, namelijk door vermenigvuldiging van figuren en gelijkvormigheid. Hiervoor geldt dan de in de *Inleiding* genoemde uitspraak van Hermann Weyl: ‘Wiskunde is meer een bezig zijn dan een theorie’, want we kunnen met passer en liniaal dit vierkant construeren en het bewijs met gelijkvormigheid volgt dan vanzelf. Zo verkrijg je door doen en denken inzicht, het uiteindelijke doel van een bewijs. In **hoofdstuk 5**, *De regels van het spel*, worden enkele opmerkingen over de grondslagen van de wiskunde gemaakt. Dit hoofdstuk is niet alleen voor leerlingen interessant, maar ook voor docenten. De verschillende stromingen in het grondslagenonderzoek zijn gekoppeld aan beroemde wiskundigen met op de achtergrond Plato. De metafoer van de grot van Plato is in het boekje (en ook hier) in een kader geplaatst. Een platonist in de wiskunde is iemand die ervan overtuigd is dat alle wiskundige waarheden onafhankelijk van de mens bestaan. Een wiskundige moet deze waarheden proberen te ontdekken. Veel wiskundigen zijn platonist. Andere wiskundigen, zoals Henri Poincaré, geloofden dat wiskundige ideeën en stellingen door de mens uitgevonden worden.

Plato’s ‘Grotmetafoer’ (verkort)

Vergelijk de positie van de mens, wat inzicht en onwetendheid aangaat, een toestand als de volgende. Denk aan mensen in een ondergronds, grotachtig verblijf. Daarin vertoeven mensen van jongsaaf aan, hun benen en nekken in boeien zodat ze zich niet kunnen verplaatsen en alleen recht voor zich uit kunnen kijken. Achter hun rug brandt een vuur en tussen vuur en gevangenen is een laag muurtje. Nu dragen andere mensen langs die

Uitgaande van basiselementen en een axiomastelsel kunnen met behulp van definities en bewijzen bijvoorbeeld de meetkunde van Euclides en de getaltheorie opgebouwd worden. De basiselementen van de meetkunde zijn punt en lijn en van de getaltheorie de natuurlijke getallen. Als voorbeeld van een axiomastelsel van de getaltheorie wordt dat van Peano genoemd. De wiskundige David Hilbert was van mening dat op deze wijze ons wiskundige weten, onze kennis van de waarheid, geheel kon worden opgebouwd. Dit stelde wel als eis aan het wiskundig redeneren dat bewijzen door volledige inductie en bewijzen uit het ongerijmde werden toegestaan. Aan deze mening kwam rond 1930 een abrupt einde toen Kurt Gödel aantoonde dat binnen een dergelijk uit axioma’s opgebouwd stelsel er altijd stellingen geformuleerd kunnen worden waarvan zowel de waarheid als de onwaarheid (de beslisbaarheid) niet aangetoond kan worden. Aan de axiomatiek wordt de naam van David Hilbert verbonden. Nog voordat Gödel zijn Onvolledigheidsstellingen publiceerde, kritiseerde de wiskundige Brouwer deze axiomatische opzet van de wiskunde. In zijn opvatting was wiskunde allereerst een ‘constructie-activiteit’, een ‘doe-vak’, maar dan ‘doen’ in de mentale sfeer. Hij verwierp het logische principe van de uitgesloten derde mogelijkheid en daardoor een bewijs uit het ongerijmde. Veel stellingen uit de klassieke wiskunde zijn daarom vanuit intuïtionistisch standpunt niet meer geldig.

Computers spelen een essentiële rol in de experimentele fase van een wiskundige theorie. Voor het ontdekken en bewijzen

muur voorwerpen die er boven uitsteken, ook beelden en dieren. De gevangenen zien alleen maar schaduwen die door het vuur op de grotwand voor hen worden geworpen. Als ze met elkaar praten, zouden ze dan niet de schaduwbeelden namen geven en menen het over de voorwerpen, beelden en dieren zelf te hebben? Nooit zouden ze iets anders voor het wezenlijke houden dan de schaduw der dingen.

van stellingen kan men de creativiteit van de menselijke geest niet missen, maar de computer kan wel als hulpmiddel ingeschakeld worden.

Bruikbaarheid

Het Zebraboekje is geschreven in een voor leerlingen toegankelijk taalgebruik en het wordt gecombineerd met vijftien van een aanwijzing voorziene opgaven, plus nog vijf extra opdrachten. In het ‘Conceptprogramma 2013 vwo wiskunde D’ doet de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) voor het domein D: *meetkunde* onder andere de volgende voorstellen:

- *Subdomein D1: Analytische en synthetische methoden*
24. *De kandidaat kan analytische en synthetische methoden en redeneringen toepassen op meetkundige probleemsituaties en daarmee eigenschappen bewijzen.*
- *Subdomein D2: Kegelsneden: synthetisch en in coördinaten*
25. *De kandidaat kan kegelsneden zowel synthetisch als algebraïsch beschrijven, en op grond van een synthetische of algebraïsche beschrijving ligging en eigenschappen bij de bijbehorende figuren onderzoeken en bewijzen.*

De docenten kunnen dit boekje goed als inleiding hiervoor gebruiken. Maar het is wellicht ook geschikt voor een profielwerkstuk. De literatuurlijst bevat elf referenties die zowel voor leerlingen als docenten interessant zijn, met verhoudingsgewijs veel referenties die verwijzen naar de meetkunde.

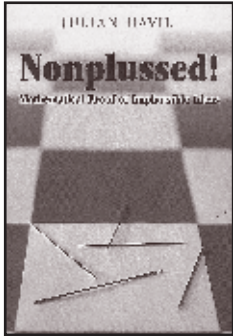
Tot slot

In dit boekje worden veel beroemde wiskundigen genoemd zoals: Euclides, Gauss, Hardy, Hilbert, Gödel, Poincaré, Brouwer en Weyl. Zij zijn een inspiratiebron voor het wiskundeonderwijs en interessant voor leerlingen. Dit boekje wordt van harte aanbevolen.

Over de recensent

Chris van der Heijden was van 1969 tot 2001 wiskundedocent en later ook school-leider aan de scholengemeenschap CSG Blaise Pascal in Spijkenisse. E-mailadres: *chris-van-der-heijden@uws.nl*

VERSCHENEN / NONPLUSSED!



Ondertitel: Mathematical proof of implausible ideas
Auteur: Julian Havil
Uitgever: Princeton University Press, Princeton (USA)
ISBN 978 0 691 12056 0
Prijs: € 28,96 (gebonden, 196 pagina’s)

Martin Gardner: “*Nonplussed!*, as the title suggests, is a marvelous study of some two dozen choice mathematical problems that boggle the mind. Unlike so many books on recreational math, Havil doesn’t hesitate to give crystal-clear proofs and their necessary equations. John Conway’s great checker-jumping puzzle is here, along with amazing non-transitive betting paradoxes and other confounding results almost impossible to believe. No one interested in recreational mathematics on an intermediate level should pass up this stimulating, delightful volume.” Paul J. Nahin: “In *Nonplussed!*, his new book of fascinating discussions of mathematical questions, Julian Havil’s literary signature is evident even without seeing his name on the cover. The presentation always displays his strong ability to weave together the historical with what is often a surprising mathematical twist, even for those problems that have been around long enough to be called classic. *Nonplussed!* will be a classic, too.”

VERSCHENEN / GEOMETRY OF CONICS



Auteurs: A.V. Akopyan, A.A. Zaslavsky
Vertaling uit het Russisch: Alex Martsinkovsky
Uitgever: American Mathematical Society (2007)
Serie: Mathematical World, volume 26
Prijs: \$ 26,00 (134 pagina’s))

Flaptekst – The book is devoted to the properties of conics (plane curves of second degree) that can be formulated and proved using only elementary geometry. Starting with the well-known optical properties of conics, the authors move to less trivial results, both classical and contemporary. In particular, the chapter on projective properties of conics contains a detailed analysis of the polar correspondence, pencils of conics, and the Poncelet theorem. In the chapter on metric properties of conics the authors discuss, in particular, inscribed conics, normals to conics, and the Poncelet theorem for confocal ellipses. The book demonstrates the advantage of purely geometric methods of studying conics. It contains over 50 exercises and problems aimed at advancing geometric intuition of the reader. The book also contains more than 100 carefully prepared figures, which will help the reader to better understand the material presented. Zie ook: *www.ams.org/bookstore?fn=20&arg1=mawrldseries&item=MAWRLD-26*

VERSCHENEN / KUNST EN WISKUNDE (ZEBRA 27)



Ondertitel: Verwondering en verbeelding
Auteurs: Bruno Ernst, Ton Konings
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2008)
ISBN 978-90-5041-101-1
Prijs: € 9,00 (64 pagina’s)
Prijs voor NVvW-leden: € 7,00 (op bijeenkomsten)

Flaptekst – Deze Zebra gaat over “wiskunst”, het raakvlak van wiskunde en kunst. Je komt in dit boek bijzondere vlakvullingen tegen, bouwplaten van torens, kunst op rotondes, vormveranderingen, kerkramen en nog veel meer. Ook M.C. Escher komt even om de hoek kijken. De wiskunde is vooral meetkundig van aard. Dit Zebra-boekje nodigt je uit om zelf aan de slag te gaan met kunst en wiskunde. Zo leer je zelf met een wiskundige blik naar kunst kijken, maar je kan ook je verbeelding gebruiken en je eigen wiskunst maken. Laat je verwonderen en inspireren. De Zebra-reeks wordt uitgegeven in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars. Zie ook: *www.epsilon-uitgaven.nl*

VERSCHENEN / AFRIKAANSE ZANDTEKENINGEN UIT ANGOLA



Ondertitel: Levende Wiskunde
Voor kinderen vanaf 8 jaar
Auteur: Paulus Gerdes
Uitgever: Lulu Enterprises, Morrisville, VS (2007)
Distributie: <http://stores.lulu.com/pgerdes>
Prijs € 7,20 (download € 2,01); 72 pagina’s

Uit het *Woord vooraf*: “Hoe tekenen we een antilope waar een wiskundig patroon in zit? Hoe vindt de ooeivaar zijn weg door het moeras en waar zit het ritme in de tekening van de leeuwin? Paulus Gerdes toont het ons. En hij heeft het op zijn beurt geleerd van de Tsjokwe bevolking in Angola. Zij houden ervan verhalen te vertellen en deze uit te tekenen met sporen in het zand. In dit verrassend boekje worden kinderen en jongeren ingeleid in de rijke zandtekeningentraditie van de Tsjokwe. Via verhalen komen zandtekeningen tot leven en worden kinderen gestimuleerd allerlei figuren te analyseren en na te tekenen waarbij ze een rijkdom aan meetkundige ervaringen opdoen. Ze leren patronen herkennen en verderzetten, verkennen de richting van bewegingen in netwerken van punten, leren figuren bekijken vanuit wisselende referentiepunten en gaan op zoek naar symmetrieassen. Paulus Gerdes biedt deze zandtekeningen aan niet alleen als rijke schemata voor het verkennen van meetkundige inhouden maar koppelt er ook procedures aan vast voor een originele exploratie van de getallenwereld. Daarbij worden jongeren voortdurend geactiveerd en gestimuleerd om vanuit ‘ritmes’ en ‘regelmaat’ hypothesen te formuleren en wetmatigheden te vertalen in wiskundige formules. [...] Paulus Gerdes kan dit als geen ander. Hij studeerde wiskunde en culturele antropologie aan de universiteit van Nijmegen en is universitair docent in Mozambique sinds 1977. [...] Met dit boekje brengt Paulus Gerdes dan ook nieuw leven in onze wiskundedidactiek en verruimt hij onze horizons [...] en omdat het zo praktisch is zal menig leraar er direct aan willen beginnen. Dit boekje [...] kreeg al een speciale vermelding in de Braziliaanse Stichting voor Kinderboeken.” (Greet Van Keymeulen, Arteveldehogeschool, Gent)

(advertentie)

Nationale Wiskunde Dagen

Op vrijdag 6 en zaterdag 7 februari 2009 worden de

15e Nationale Wiskunde Dagen

gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Kosten per persoon

€ 380,00 bij overnachting op een tweepersoons kamer en

€ 415,00 bij overnachting op een eenpersoons kamer.

Begin september wordt de programmaproef met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Meer informatie over de **NWD** is nu al te vinden op www.fi.uu.nl/nwd.

Inlichtingen

Ank van der Heiden, telefoon: 030-263 55 55 of e-mail: nwd@fi.uu.nl



Een intelligent (relatie)geschenk?

Deze 3-dimensionale puzzel (gemaakt door Robert Dalloz) is één van de vele bijzondere objecten, puzzels en spellen gerelateerd aan natuurkunde, wiskunde en logica uit de Arabesk collectie. U vindt de volledige catalogus op internet:

www.arabesk.nl

OOSTZEEDIJK BENEDEN 113 - 3061VP ROTTERDAM
TELEFOON: (010) 214 03 61 - FAX: (010) 214 03 90
E-MAIL: ARABESK@ARABESK.NL



Oproep / NVvW-studiedag 8 november 2008

WISKUNDEONDERWIJS:

HET KAN NIET ZONDER DIDACTIEK

[Wim Kuipers]

Wiskunde wordt op scholen gegeven door wiskundeleraren en niet door ministers, schoolboekenauteurs, voorzitters van adviescommissies, hoogleraren wiskunde of onderwijskundige adviseurs. Door de dagelijkse omgang met leerlingen en de leerstof zijn wiskundeleraars bij uitstek *de* specialisten in hoe je mooi en goed wiskundeonderwijs kunt geven (didactiek dus). Zijn er docenten die gebruik maken van allerlei zinvolle hulpmiddelen om hun leerlingen aan het denken en het leren te krijgen, die buiten hun leerboek om gaan? (Dat laatste kunnen Nederlandse docenten heel moeilijk!) Graag willen wij docenten die zich hierdoor aangesproken voelen, uitnodigen een werkgroep te verzorgen. Ook willen we lerarenopleiders en onderzoekers die rond dit thema werkzaam zijn, vragen een bijdrage te leveren. Onderstaande subthema's kunnen daarbij een leidraad vormen, maar ze zijn zeker niet bindend.

Subthema 1: werkvormen

Denk aan: groepswerk, gebruik ict, grafische rekenmachine, smartboard en digitale borden, consolideren en onderhouden.

Subthema 2: type opdrachten

Denk aan: productief en reproductief, routine onderhouden, onderzoeksvaardigheden, wedstrijden en competities.

Subthema 3: didactische vondsten

Denk aan: discrete snelheden-grafiek van Doorman, oppervlaktetmodel voor kwadratische vormen, nadenken over misconcepties, omgaan met verhoudingstabellen, nieuwe didactieken bij wiskunde C en D.

Subthema 4: de docent los van het boek

Denk aan: hoofdstukvervangende projecten, hybride methodes, klassikale uitdaging en inspiratie.

Subthema 5: vakdidactisch

(promotie-)onderzoek door docenten
Denk aan: ...

Subthema 6: didactiekhandboek

Denk aan: presentatie van enkele katernen van het nieuwe wiskunde-didactiekboek dat spoort met het Manifest 2005 van de Vereniging.

Voelt u zich aangesproken om een bijdrage te leveren? Meldt u dan aan bij één van de organisatoren,
Pauline Vos (f.p.vos@rug.nl)
Henk van der Kooij (h.v.d.kooij@nvvw.nl)
Wim Kuipers (w.kuipers@nvvw.nl)
Bert Zwaneveld (bert.zwaneveld@ou.nl)

Drie formules gezocht

[Frits Göbel]



U krijgt deze keer geen puzzels, maar wiskundige opgaven, en wel drie opgaven waarin gevraagd wordt om formules te bedenken.

Het eerste probleem betreft ‘robuuste’ permutaties. Als je een permutatie van $\{1, 2, \dots, n\}$ van links naar rechts bekijkt, kan het gebeuren dat hij op een bepaald punt afbreekt, in die zin dat er een getal k is, $k < n$, waarvoor de eerste k elementen van de permutatie een permutatie van $\{1, 2, \dots, k\}$ vormen. Een permutatie die niet afbreekt, noemen we robuust.

Laat $a(n)$ het aantal robuuste permutaties van $\{1, 2, \dots, n\}$ zijn.

Bijvoorbeeld: $a(3) = 3$, $a(4) = 13$.

Er wordt geen expliciete formule voor $a(n)$ gevraagd, maar wel een recurrente betrekking ofwel recursie.

Opgave 1
Bepaal een recursie voor $a(n)$ en met behulp daarvan $a(7)$.

Voor de tweede opgave duiken we de sportwereld in. Het aantal denkbare volgorden waarin n hardlopers of wielrenners over de finish gaan is gelijk aan $n!$. Maar met name bij wielervedstrijden is het normaal dat groepen deelnemers als tegelijk aankomend worden gekwalificeerd.

Een mini-voorbeeld: bij 3 deelnemers A, B, C zijn er dan niet 6 mogelijke uitslagen, maar 13: alle drie apart (6); eerst X, dan Y en Z tegelijk (3); X en Y tegelijk, dan Z (3); alle drie tegelijk (1).

Laat $b(n)$ het aantal denkbare uitslagen zijn bij n deelnemers. Wederom wordt er geen expliciete formule voor $b(n)$ gevraagd.

Opgave 2
Bepaal een recursie voor $b(n)$ en met behulp daarvan $b(7)$.

Als u er aardigheid in hebt, mag u ook nog de genererende functie van $b(n)/n!$ bepalen, maar dat resultaat telt niet mee voor de ladder.

De laatste opgave gaat over idempotenten. Een idempotent is een afbeelding f van V naar V die voldoet aan $f(f(x)) = f(x)$ voor alle x in V . Het huis-tuin-en-keukenvoorbeeld is de meetkundige projectie.

In onze opgave is $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Laat $c(n)$ het aantal idempotenten zijn onder alle n^n afbeeldingen van V naar V .

Voor $c(n)$ bestaat geen expliciete formule, maar wel een eenvoudige somformule.

Opgave 3
Bepaal een formule voor $c(n)$ en met behulp daarvan $c(7)$.

Ook van de rij $c(n)/n!$ kan, hors concours, de genererende functie worden bepaald.

Als uitsmijter een flauw sommetje waarbij de recursie gegeven is.

$$\text{Laat } d(n+1) = \frac{d^2(n)}{n} \text{ voor } n > 0.$$

Er is een getal x waarvoor geldt: als $d(1) > x$, is de rij $d(1), d(2), d(3), \dots$ op den duur stijgend en als $d(1) < x$, is die rij op den duur dalend.

De opgave is nu: bepaal x in 10 decimalen. Ook dit telt niet mee voor de ladder.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 18 juni 2008. Veel plezier!

Een ongewone vergelijking

Er waren 23 inzenders, onder wie één nieuwe: Jan Verbakel, Monica Woldinga, Floor van Lamoen, R.A. Kortram, Jozef Hanenberg, Frans Lipperts, Herm Jan Brascamp, Gé Groenewegen, Kees Verhoeven, Hans Klein, Kees van der Straaten, Ton Kool, Leo H. van den Raadt, Wim van den Camp, Jan Meerhof, Hans Linders, René Meulemans (welkom!), Gerhard Riphagen, Wobien Doyer, Harm Bakker, Ruud Stolwijk, Lieke de Rooij, Hub Cilissen.

De oplossingen.

Opgave 1. De gegeven tabel (**zie tabel 1**) leidt tot het vermoeden dat bij elk oneven priemgetal p de oplossing $8p$ behoort. Inderdaad geldt $d(8p) = 4 \times 2 = 8$. Bij $k = 2$ behoort $n = 8$. Deze opgave is door alle inzenders goed opgelost.

n	$d(n)$	k	n	$d(n)$	k
1	1	1	40	8	5
2	2	1	56	8	7
8	4	2	60	12	5
9	3	3	72	12	6
12	6	2	80	10	8
18	6	3	84	12	7
24	8	3	88	8	11
36	9	4	96	12	8

tabel 1

Ook **opgave 2** gaf geen problemen. Als $k = p^3$, moet n van de vorm $p^a \times q$ zijn, waarbij q geen factor p bevat.

Dan is $d(n) = (a + 1) \times d(q)$.

Substitutie in $k \times d(n) = n$ geeft nu: $(a + 1) \times d(q) = p^{a-3} \times q$

We proberen $a = 3$ en krijgen $4 \times d(q) = q$.

In de tabel zien we bij $k = 4$ de waarde 36 voor n staan, en inderdaad is $n = 36 \times p^3$ een oplossing voor $p > 4$. (In feite de enige oplossing.)

Het tweede deel kan op dezelfde manier worden aangepakt. De oplossing is: $n = p \times 2^{p-1}$

Opgave 3 werd door menigeen overgeslagen. En sommigen die er aan begonnen, brachten het bewijsje niet tot een goed einde.

Laat $n = 5^a \times q$ waarbij q geen factor 5 bevat. Uit $625 \times d(n) = n$ volgt dan: $(a + 1) \times d(q) = 5^{a-4} \times q$

Hierin moet a minstens 4 zijn, maar 4 kan niet want dan zou q toch een factor 5 bevatten.

Voor $a = 5$ komt er $6 \times d(q) = 5q$, dus nu is q deelbaar door 2 en door 3. Dit leidt tot $4 \times d(r) \geq 5r$, hetgeen weer onmogelijk is.

Tenslotte: $a \geq 6$ voert tot $d(n) > n$. Dus voor $k = 625$ is onze vergelijking niet oplosbaar.

R.A. Kortram merkt op dat de vergelijking ook onoplosbaar is voor $k = p^{p-1}$ waarin p een willekeurig priemgetal > 5 is. Hij gebruikt hierbij de afschatting $d(n) < 2n/3$.

Monica Woldinga vond de (scherpere) afschatting $d(n) < 2\sqrt{n}$.

Bij de opgaven merkte ik ten onrechte op dat de k -rijen waarvoor de vergelijking niet oplosbaar is, allemaal snel stijgen. Toen Helmut Postl en ik een jaar of negen geleden aan dit probleem werkten, vonden we al dat ook voor $k = 9p$ (p priem) de vergelijking onoplosbaar is, en dat is bepaald geen snel stijgende rij.

Opgave 4. Twee k -waarden die drie oplossingen leveren, zijn 25 en 49.

Menige inzender die deze twee getallen vond, zag dat er ook (minstens) drie oplossingen behoren bij iedere k van de vorm p^2 voor $p > 3$ en priem.

De oplossingen zijn dan $n = c \times p^2$ met $c = 9, 18$ en 24 .

Er werden veel andere k 's met drie oplossingen gemeld: losse waarden zoals 40, 54, 125, 135 en enkele machten van 2, maar ook rijen. Hiervan noem ik alleen het metaresultaat van Herm Jan Brascamp: iedere k waarvoor $3a \mid d(a)$ geheel is, bijvoorbeeld p^{p-1} en p^{3p-1} .

Jan Meerhof bekeek de rij p^{p-2} . Deze levert

drie oplossingen voor $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, en slechts twee voor $p = 19$ en $p = 31$, maar daar tegenover *vier* voor $p = 29$. Brascamp vond zelfs een k met zes oplossingen: $2^{11} \times 3^{23}$.

Ton Kool en Gerhard Riphagen hebben veel computerresultaten ingestuurd; de laatste vond zes oplossingen bij $k = 82\,944$ en bij $k = 456\,192$.

Helmut Postl slaagde er in om k -waarden met veel grotere aantallen oplossingen te vinden ($> 100\,000$), maar dat zijn onvoorstelbaar grote getallen.

Ladderstand
De kop van de ladder ziet er nu als volgt uit:

- J. Meerhof 435
- L. de Rooij 413
- G. Riphagen 356
- L. van den Raadt 277
- W. Doyer 256
- H. Klein 255
- N. Wensink 208
- T. Kool 170
- K. Verhoeven 144
- J. Hanenberg 120

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

22. Spelen en Delen
 23. Experimenteren met kansen
 24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en wiskunde
- Zie verder ook www.nvww.nl/zebrareeks.html en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvww.nl/lustrumboek2.html
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvww.nl/Publicaties2.html

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepeersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvww.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html.

nr. verschijnt deadline
8 1 juli 15 mei

jaargang 84 (voorlopig)
1 29 juli 16 septemebr
2 9 september 28 oktober

vrijdag 6 juni, Utrecht

Tweede Wiskunde D-dag
Organisatie cTWO

dinsdag 17 juni, op de scholen

Examen 2e tijdvak vmbo KB, 13:30-15:30u
Examen 2e tijdvak vmboTL/GL, 13:30-15:30u

woensdag 18 juni, op de scholen

Examen 2e tijdvak vmbo BB, 13:30-15:00u
Examens 2e tijdvak havo, 13:30-16:30u
Examens 2e tijdvak vwo, 13:30-16:30u

wo. 18 t/m vr. 20 juni, TU/e Eindhoven

Onderwijs Research Dagen
Organisatie TU/e

vrijdag 20 juni, Utrecht

Bèta onder de Dom, workshops voor bètadocenten
Organisatie Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht

vr. 20 t/m di. 24 juni, Maastricht

9e Internationale Mathematica Symposium
Organisatie IMS'08 en TU/e
(<http://bmia.bmt.tue.nl/people/BRomeny/IMS2008/EducationDay/main.html>)

za. 28 en zo. 29 juni, Blankenberge (België)

14e Congres van de VVWL
Organisatie Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars

zo. 13 t/m vr. 18 juli, RAI, Amsterdam

Fifth European Congress of Mathematics
Organisatie VU, CWI en UvA

do. 24 t/m di. 29 juli, Leeuwarden

Bridges Leeuwarden (11th Bridges Conference): Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture
Organisatie The Bridges Organisation (www.bridgesmathart.org)

vr. 22 en za. 23 augustus, TU/e Eindhoven

vr. 29 en za. 30 augustus, CWI Amsterdam

Vakantiecursus 2008: Wiskunde en profiel
Organisatie CWI

vrijdag 12 september, TU/e Eindhoven

2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2008
Organisatie Stichting NWO



NN **NETWERK**

wiskunde die werkt!

Nieuw: Netwerk 4e editie

Compleet voor vmbo, havo en vwo onderbouw en Tweede Fase



Noordhoff Uitgevers

- Compacte leerlijnen
- Pragmatisch
- Voor vmbo: wiskunde met je handen
- Voor havo/vwo: puzzelen en denken
- Aandacht voor rekenvaardigheden

Meer informatie op www.netwerk.noordhoff.nl