

# E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

mei

07  
nr 7

jaargang 82

**Als ik zeg  
wiskunde, wat  
zegt u dan?**

**Vmbo-3 en  
meetkunde**

**Het HSA-vierkant**

**Contexten en  
eindexamens**

**Bruno Ernst  
Symposium**



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

# COLOFON

mei

07  
nr 7

jaargang 82

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging  
van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

## Redactie

Bram van Asch

Klaske Blom

Marja Bos, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Gert de Kleuver, voorzitter

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Joke Verbeek

## Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de

hoofdredacteur: Marja Bos,

Koematen 8, 7754 NV Wachtum

E-mail: [redactie-euclides@nvvw.nl](mailto:redactie-euclides@nvvw.nl)

## Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in  
drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op  
papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

[www.nvvw.nl/euclricht.html](http://www.nvvw.nl/euclricht.html)

## Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk  
en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, [www.de-kleuver.nl](http://www.de-kleuver.nl)

## Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: [www.nvvw.nl](http://www.nvvw.nl)

### Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 63 78

E-mail: [m.kollenveld@nvvw.nl](mailto:m.kollenveld@nvvw.nl)

### Secretaris

Wim Kuipers,

Waalstraat 8, 8052 AE Hattum

Tel. (038) 444 70 17

E-mail: [w.kuipers@nvvw.nl](mailto:w.kuipers@nvvw.nl)

### Ledenadministratie

Elly van Bemmelen-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: [ledenadministratie@nvvw.nl](mailto:ledenadministratie@nvvw.nl)

### Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 50,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te  
geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

### Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende  
nummer.

Niet-leden: € 55,00

Instituten en scholen: € 140,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50

Betaling per acceptgiro.

### Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie:

t.a.v. Ada Valkenburg

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: [a.valkenburg@de-kleuver.nl](mailto:a.valkenburg@de-kleuver.nl)

129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146,  
147, 148, 150, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 165,  
166, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 180, 182, 183, 184,  
185, 186, 187, 188, 189, 190, 192, 194, 195, 196, 198, 200, 201, 202, 203,  
204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219,  
220, 221, 222, 224, 225, 226, 228, 230, 231, 232, 234, 235, 236, 237, 238,  
240, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 255, 258,  
259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 270, 272, 273, 274, 275, 276,  
278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 294, 295,  
296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 308, 309, 310, 312,  
314, 315, 316, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329,  
330, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346,  
348, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365,  
366, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 384,  
385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400,  
401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418,  
419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435,  
436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452,  
453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469,  
470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486,  
487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503,  
504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520,  
521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537,  
538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554,  
555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571,  
572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588,  
589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604,  
605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620,  
621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636,  
637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652,  
653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669,  
670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686,  
687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703,  
704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720,  
721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737,  
738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754,  
755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771,  
772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788,  
789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805,  
806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822,  
823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839,  
840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856,  
857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873,  
874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890,  
891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907,  
908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924,  
925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941,  
942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958,  
959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975,  
976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992,  
993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

## KORT VOORAF [ Marja Bos ]

### Examenbesprekingen

Velen van ons zitten op dit moment weer midden in de examens. Altijd weer spannend, en niet alleen voor de kandidaten...

Zoals ieder jaar heeft de Vereniging een groot aantal examenbesprekingen georganiseerd, verspreid over het land. Een overzicht van data en locaties is te vinden in het aprilnummer (nummer 6) van Euclides, op pagina 241. De 'live' discussie tijdens die regionale bijeenkomsten maakt mijns inziens niet alleen een betere standpuntbepaling mogelijk; de ontmoeting met collega's van andere scholen is ook in meer algemene zin stimulerend, verfrissend en vaak domweg 'leuk', als ik dat inmiddels ernstig besmette woord nog mag gebruiken.

### Special 2008

De redactie is van plan volgend jaar een themanummer uit te brengen over statistiek en kansrekening. We zijn met name nog op zoek naar ervaringen van docenten, rechtstreeks vanuit de lespraktijk. Daarom nodigen we u van harte uit uw ervaringen met statistiek en kansrekening 'op papier' te zetten. Conceptbijdragen voor de special kunnen worden ingediend tot 1 september a.s.

### Algebra?

De discussie over de plaats die algebra al dan niet zou moeten innemen in de diverse schooltypen en over een geschikte didactiek voor algebra-onderwijs, inclusief het gebruik van hulpmiddelen als de grafische rekenmachine en de formulekaart, die discussie is nog lang niet uitgewoed. Ook in dit nummer van Euclides vindt u in bijdragen van Simon Biesheuvel, Jan van de Craats, Anne van Streun en Pauline Vos een aantal uiteenlopende visies op dit onderwerp.

### En verder

Actueel: een bijdrage van Arno van den Essen over de recente landelijke aandacht voor het speciale magische vierkant dat door drie scholieren werd ontworpen. Wat was dat precies voor vierkant, en hoe ontstond de mediahype eromheen?

In dit nummer starten we met een nieuwe rubriek: 'Feiten en meningen', door Pauline Vos. Zij zal kritisch kijken naar redeneringen over wiskundeonderwijs. In deze eerste aflevering gaat het over verwarring van gelijktijdigheid met oorzakelijkheid, toegespitst op de discussie over het gebruik van de grafische rekenmachine.

Een jaar geleden promoveerde Sacha la Bastide-van Gemert op een studie over Freudenthal. Lourens van den Brom las haar proefschrift en zoomt in op een deelaspect, Freudenthals kritiek op het mechanicaonderwijs zoals dat destijds op de hbs gestalte kreeg.

Hans de Rijk (alias Bruno Ernst) kreeg eind maart ter ere van zijn 81e verjaardag een symposium aangeboden; Klaske Blom doet verslag.

Joke Verbeek vertelt hoe zij haar slecht gemotiveerde vmbo-3-klas aan het kwartetten zet en de leerlingen daarmee 'wint' voor haar wiskundelessen.

Ingeborg Huisman ging met haar sectiegenoten een weekendje op stap, naar het Mathematikum in Giessen, Duitsland. Dat leverde een boel plezier op vanwege alle wiskundige spelletjes en experimenten, maar ook vanwege de schnitzels en het bier. De sfeer tijdens het sectie-overleg op school is er vast door veranderd!

### Dikkere leraren, dunnere boeken

Eind maart hield Frits van Oostrom (ja, diezelfde van de historische canon) in de Volkskrant een hartstochtelijk pleidooi voor 'dikkere leraren en dunnere boeken': wie inhoudelijk goed beslagen ten ijs komt (én uiteraard 'de leerling lief heeft!'), heeft meer mogelijkheden om z'n leerlingen te inspireren. Ons onderwijs kan daardoor een stuk beter worden, wilde Van Oostrom maar zeggen. Jammer genoeg lijken wij hier in Nederland tegenwoordig tamelijk vastgebakken aan ons schoolboek, onze 'methode'. In combinatie met knellende werkwijzers of weekplanners kan die afhankelijkheid van het schoolboek leiden tot saaie lessen, zonder veel inbreng van de echte expert, de docent – zeker als hij of zij vakinhoudelijk ook nog eens mager opgeleid is! Laten we daarom als wiskundeleraren maar (weer?) eens tegen de trend in gaan, en het sonjabakkeren overlaten aan anderen. Laten we maar zorgen dat we een stevige kennisbasis krijgen, met ruim voldoende body, inhoud, om aantrekkelijk en kwalitatief hoogwaardig wiskundeonderwijs te verzorgen. 'Een dikke leraar is een goeie leraar!' Ik zeg het Van Oostrom graag na...

## INHOUD

|     |                                                                                                   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 246 | Kort vooraf<br>[Marja Bos]                                                                        |
| 247 | 'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'<br>Aflevering 3: Wiskunde? Heerlijk!<br>[Klaske Blom e.a.] |
| 250 | Feiten en meningen<br>[Pauline Vos]                                                               |
| 251 | Vmbo-3 en meetkunde<br>[Joke Verbeek]                                                             |
| 253 | Bruno Ernst Symposium<br>[Klaske Blom]                                                            |
| 255 | Het HSA-vierkant<br>[Arno van den Essen]                                                          |
| 258 | Bereken, bereken exact, en verder...?<br>[Simon Biesheuvel]                                       |
| 261 | Contexten en examens<br>[Jan van de Craats]                                                       |
| 267 | De lerarenopleiding bevestigd<br>[Vincent Jonker e.a.]                                            |
| 271 | (Wiskundig) kiezen / De Minder is Meer<br>Paradox<br>[Rob Bosch]                                  |
| 274 | Parate kennis en algebra / Aflevering 5:<br>Algebraïsche vaardigheden<br>[Anne van Streun]        |
| 277 | Een vakgroep-uitje naar het Mathematikum<br>[Ingeborg Huisman]                                    |
| 280 | Boekbespreking / 'Elke positieve actie<br>begint met kritiek'<br>[Lourens van den Brom]           |
| 283 | Somgetallen, priemgetallen en machten<br>van 2, deel 2<br>[Rob van der Waal, Roger Hendrickx]     |
| 286 | Verschenen                                                                                        |
| 286 | <b>Aansluiting NVvW bij CMHF/MHP</b><br>[Swier Garst]                                             |
| 287 | Recreatie<br>[Frits Göbel]                                                                        |
| 289 | Servicepagina                                                                                     |

Foto voorpagina: Arie Nagel, Eindhoven

Aan dit nummer werkte verder mee: F. van der Blij.

### Misdruk

Van het aprilnummer van Euclides (nummer 82-6) zijn in een aantal exemplaren enkele pagina's niet en enkele pagina's dubbel opgenomen. De ontvangers van een dergelijk nummer (een collector's item!) kunnen contact opnemen met mevrouw E. van Dijk van De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v., tel. (0318) 55 50 75 of via e-mail: [e.vandijk@de-kleuver.nl](mailto:e.vandijk@de-kleuver.nl).



# 'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'

## AFLEVERING 3: WISKUNDE? HEERLIJK!

[ Klaske Blom, Hans Daale, Wim Laaper, Joke Verbeek ]

Voor u ligt opnieuw een aflevering van onze serie interviews<sup>[1]</sup>. We vroegen mensen op straat, in de trein, in de wachtkamer bij de tandarts naar hun eerste reacties op de vraag: 'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?' En we hoorden: 'foefjes', 'Pythagoras', 'leuk vak', 'nachtmerrie' en nog veel meer. In het vorige nummer van Euclides kon u daarnaast uitgebreid kennis maken met de opvattingen van Cecile Eikenaar, onderwijzeres in het basisonderwijs, en met die van Loek Hermans, oud-minister van Onderwijs.

### Inleiding

Voor dit nummer hebben we gekozen voor een compilatie van vier langere interviews. We spraken met:

- **Wil Ruiter**, 60 jaar, opzichter-directievoerder in bouwprojecten;
- **Jeanne Driessen-Engels**, 52 jaar, manager bij de RABO-bank;
- **Frank Schotel**, 49 jaar, manager van consultants die zich bezig houden met optimaliseren van bedrijfsprocessen;
- **John van Dijk**, 50 jaar, evenementenorganisator, fondsenwerver en bijlesleerkracht wiskunde.

Neem kennis van hun ideeën en laat uw eigen gedachten gaan over een dergelijke verscheidenheid aan belevingen en meningen. Het laat zien waarvoor we het toch allemaal doen, dat wiskundeonderwijs. Maar het leidt zeker tot vragen als: Hoeveel variatie kunt u aanbrengen in uw uitleg? En: Hoe streng en controlerend bent u nog? Dat blijken ook onderwijs- en docenttalenten te zijn die op prijs gesteld worden. Leest u zelf maar.

### Voor de vuist weg

In de vorige afleveringen in deze serie bent u de vraag al tegengekomen: 'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'

Wil en Frank zijn behoorlijk positief.

Zo zegt Wil: *Wiskunde? Dat is algebra en meetkunde. Ik ben blij dat ik het gehad heb.*

Vooraf de meetkunde vond ik interessant.

*Logische redeneringen op weten op te zetten, daar heb je wat aan. Ik ben een technicus, weet je...* En Frank somt op: *Meetkunde, algebra, logaritme, een langgerekte f, statistiek, vormen,*



foto 1 Frank Schotel (links) en John van Dijk

*parallelepipedum, rekenen.* Logaritmische schalen en integralen zijn weliswaar uit het leven van Frank verdwenen, maar verder heeft hij het idee dat hij door het vak wiskunde zijn logisch en analytisch denken gescherpt heeft, en dat hij het zonder hoofdrekenen niet zo ver had kunnen schoppen. Jeanne verwoordt het als volgt: *Ik denk nog steeds aan wiskunde als een boeiend, interessant en bovendien nuttig vak. Het helpt me op een bepaalde, gestructureerde manier te denken. Daarmee kan ik zowel in mijn werk als ook daarbuiten allerlei praktische problemen oplossen. Het stukje wiskunde dat ik me eigen heb gemaakt, is daarmee als het ware een deel van mezelf geworden.*

En de spontane reactie van John is zo'n kreet waarin misschien velen van u zich herkennen: *Wiskunde? Heerlijk!*

### Gecijferdheid

En dan, voorbij de associaties op onze simpele vraag... waar hebben ze het nou voor nodig, die leerlingen, dat vak wiskunde? Hoe denken onze geïnterviewden

over de noodzaak van gecijferdheid?

Wil, werkzaam als opzichter-directievoerder in bouwprojecten, zegt dat de computer ook in de bouw een vaste plaats verworven heeft. *De computer is niet meer weg te denken. Daarom is het ook heel goed dat daar aandacht aan wordt besteed in het onderwijs. Het apparaat is een fantastisch hulpmiddel. Maar je moet wel goed weten waar je mee bezig bent. Gevoel voor grootte van getallen en verhoudingen, ook bij afmetingen, is heel belangrijk. Het is triest dat op verschillende fronten dat rekenen zo'n probleem is tegenwoordig.*

Ook Jeanne maakt zich zorgen over de elementaire rekenkunst: *Aan de ene kant is het goed dat de rekenmachines en computer oprukken in het onderwijs. Aan de andere kant is er ook het gevaar van blindvaren op de resultaten van machines. Het gevoel voor getalsverhoudingen en het getalbegrip kunnen al snel in het gedrang komen. Maar de computer is ook weer erg handig bijvoorbeeld bij het werken met formules in spreadsheets. Onderwijzers waren vroeger goed in rekenen. Ik merk, ik lees in kranten dat er elementaire stukjes ontbreken. Ik schrik daar van. Goed dat men zich daar druk om maakt de laatste tijd.*

Frank, die denkt dat hij het zonder hoofdrekenen niet ver zou schoppen, vindt het absoluut van belang om goed begrip te hebben voor getallen, om te kunnen hoofdrekenen en te kunnen schatten. *Ik wil snel kunnen inschatten of mijn personeel wel of niet voor een bonus in aanmerking komt, en gezien de al dan niet gehaalde targets de grootte van de bonus kunnen bepalen. Ik wil ook snel het gewerkte aantal uren per maand kunnen overzien op grond van de omvang van de diverse gedane klussen. Natuurlijk, dit kan ook allemaal met een rekenmachine, maar het is toch wel bijzonder plezierig dat je in een gesprek 'gewoon' gevoel hebt voor de betekenis die je moet toekennen aan de cijfers die over tafel gaan. En ook in het dagelijks leven zijn er trouwens genoeg voorbeelden om aan te tonen dat gecijferdheid belangrijk is voor iedereen.*





foto 2 Wil Ruiter

*Het is toch verschrikkelijk als iemand achter de kassa in een winkel je gerust 40 euro in plaats van 4 euro laat betalen voor een pak melk, wat koekjes en een pakje kauwgom, zonder dat er een lampje gaat branden?*

John is een gedreven, veeleisende man die zich opwindt over de onnozelheid die hij regelmatig tegenkomt. Hij studeerde bedrijfseconomie aan de heao, vervolgens praktische bedrijfskunde en werd evenementen-organisator, fondsenwerver en bijlesleerkracht wiskunde. *Ik hield al jong van 'het maken van lijstjes' en had een groot getalinzicht. Het lezen van tabellen en grafieken in kranten vind ik een must. Tijdens mijn lessen commerciële economie en statistiek op de heao kwam dit natuurlijk veelvuldig aan bod. Maar eigenlijk zou niemand dergelijke informatiebronnen moeten overslaan. Je leert er veel van, en het zou tot ieders basisvaardigheden moeten behoren om tabellen en grafieken goed te kunnen interpreteren.*

### Huidig werk

Jeanne is manager bij de RABO-bank. Na het gym ging ze naar de Technische Universiteit om scheikundige technologie te studeren en deed vervolgens de Master of Business Administration (MBA). *Ik werk bij Rabobank Nederland, in het directoraat Groep ICT en ik ben daar manager van een kleine tweehonderd business-analisten. We vertalen de eisen en wensen van opdrachtgevers en eindgebruikers in specificaties waar de systeemontwikkelaars van Groep ICT mee uit de voeten kunnen. Mijn belangrijkste opdracht is om het specificatietraject effectiever en efficiënter te maken. Dat doen we door het proces en de producten te standaardiseren. Maar ook door kennis, vaardigheden en competenties van onze mensen op een hoger niveau te tillen en hun vakmanschap rondom systeemontwikkeling verder te verbeteren. Zonder het bewust te beseffen gebruik je hier*

*veel kennis die je bij wiskunde hebt geleerd. Ik denk aan analyseren, probleem-oplossen, structuren doorzien, werken met wiskundige modellen. Het zit als het ware in je; snel de kern uit een probleemstelling halen en getal-matige verhoudingen doorzien. Een voorbeeld hiervan is het interpreteren en doorzien van financiële en operationele managementinformatiemodellen en resultaten van de financiële rekenkunde.*

*Bij nieuwe medewerkers zie je vaak dat ze de statistiek vrij goed beheersen, maar moeite hebben met het werkelijk doorgronden van een probleem en het modelleren van een oplossing. Als de probleemanalyse lastig is wordt vaak té snel een oplossing gekozen. Het is een kwestie van onervarenheid. Het ontbreekt niet aan theoretische kennis van zaken, maar de toepassing van die kennis moet nog groeien. Dat is niet erg, zolang nieuwe, talentvolle mensen maar wegblijven bij de gedachte dat ze 'er al zijn'. Jeanne benadrukt het lange traject dat beginnende collega's nog moeten doorlopen, voordat ze hun theoretische wiskundekennis kunnen toepassen in grondige analyses en het opzetten van modellen in de praktijk.*

Frank daarentegen ziet als manager dat zijn jonge collega's een voorsprong hebben omdat ze relevante technieken geleerd hebben voor hun werksituatie. Frank heeft een ruime werkervaring met het aansturen van consultants die zich bezig houden met optimaliseren van bedrijfsprocessen met behulp van software dat door hun eigen bedrijf is ontwikkeld. Hij studeerde aan de hts en aan Nyenrode. *Ik moet in Excel af en toe ingewikkelde formules gebruiken. Ik moet de bonus voor mijn personeel exact berekenen aan de hand van hun gehaalde targets. De formules die ik hierbij gebruik, maak ik zelf, omdat de hoogte van de bonus variabel is en afhankelijk is van de ook weer variabele targets. Ik moet het zelf doen omdat daarvoor geen kant en klaar computerprogramma bestaat. Verder gebruik ik af en toe 'if...then'-programmaatjes. Dit zijn eigenlijk de enige onderdelen van mijn werk waarvoor ik wiskunde concreet gebruik. Deze Excelkennis en -vaardigheid heb ik uiteraard niet op school gehad, maar die heb ik mezelf eigen moeten maken. Het zou handig geweest zijn als ik het wel tijdens mijn opleiding geleerd had, net als bijvoorbeeld het werken met draaitabellen. Het lukt best om het nu nog te leren, maar ik ben altijd wat trager dan de jongere collega's.*

Wil is het meest concreet in de toepasbaarheid van zijn opgedane kennis op school, hoewel ook hij, net als Jeanne, ingaat op het 'echte leren' van de fijne kneepjes in de praktijk: *Aan de meetkunde op de ULO en de UTS (Uitgebreide Technische School) heb ik later erg veel gehad. Vooral bij het lezen en interpreteren van technische tekeningen. Als opzichter maak je zelf niets. Je bent de spil in het web dat bestaat uit de opdrachtgever, de architect en uitvoerende partijen zoals de aannemer, de installateur en de overheid. Je organiseert de samenwerking zodat een bouwwerk tot stand kan komen binnen de gestelde randvoorwaarden.*

*Voor mijn huidige werk als opzichter is niet alleen het leren op de ULO en UTS belangrijk geweest maar vooral ook de dertig jaar die ik in de bouwsector als constructietekenaar actief ben geweest. Daar leer je de technische kneepjes van het vak. Daar ontwikkel je ruimtelijk inzicht, voortbordurend op je schoolkennis, technische tekeningen lezen. Het logisch denken, geleerd bij wiskunde, brengt je verder bij het oplossen van bouwkundige constructie en organisatieproblemen. Je wordt pas opzichter als je overzicht hebt ontwikkeld over alle aspecten van de bouw. Dat leer je in de praktijk. Omdat in de bouw ook veel buitenlanders werken is het voor mij belangrijk Duits en Engels te kunnen spreken. Ook moet ik wel eens naar toeleveringsbedrijven in Duitsland. Een nette brief opstellen naar een instantie of bedrijf is ook een vaardigheid die ik regelmatig nodig heb.*

### En wat herinneren zij zich nog over vroeger?

#### Hoe was de wiskunde op school?

Uit onderstaande citaten kunnen wij allemaal onze didactische lessen trekken. Het lijkt alsof alle geïnterviewden een voorkeur hebben voor een combinatie van een ruim creatief arsenaal aan uitlegmethoden en een fikse strengheid wat de orde betreft.

John, de alleskunner, op zijn vijftigste: *Tot en met de vierde klas van de middelbare school was ik helemaal niet zo goed in wiskunde, maar in de vijfde klas kreeg ik meneer Meulman. Toen, en in de zesde klas, heb ik alles geleerd. Ik had opeens een 8 voor wiskunde-I en op mijn centraal examen zelfs een 9,6. Deze leraar legde tenminste normaal uit: gedegen, gestructureerd, gebruikte verschillende methodes van uitleggen: ging het niet linksom, dan gingen we rechtsom. En als dat ook niet lukte, maakten we nog*

een omweg; hij had altijd wel een uitleg die jij begreep. Verder was hij heel streng: als je je huiswerk niet gemaakt had, volgden er sancties. Voor mij werkte dit prima; natuurlijk waren er ook leerlingen die het veel beter deden bij zijn laconieke collega, maar voor mij was hij heel goed.

Linksom, rechtsom, voor iedereen een andere wijze van uitleggen als dat nodig is. Hier doemt een mooi ideaalplaatje op. Het wordt nog een keer genoemd, dit keer door Frank: *Ik herinner me nog dat ik les had van een aardige kleine, harige man die ontzettend slim leek. Hij kon zaken wel op 20 verschillende manieren uitleggen zodat uiteindelijk iedereen het snapte. Geweldig. Hij was ook streng, de les ging over niets anders dan over wiskunde, maar wat kon die man uitleggen! Zelf had ik er het meest baat bij als hij ook tegelijkertijd het bord gebruikte. Alles wat ik ook visueel binnen kreeg, bleef goed hangen. Gelukkig deed deze man enorm veel op het bord. Eigenlijk deden we alles klassikaal, en dan moest je thuis al je huiswerk nog maken. Ik deed niet zo veel, maar gelukkig leerde ik makkelijk en kreeg al veel mee door op te letten in de klas. Bij deze leraar ging dat goed.*

Over strengheid gesproken. Wil vertelt: *Wij hadden wiskundeles van de heer Poorthuis. Dat was een speciaal iemand onder de leraren. Heel strak, zo doceerde hij ook. Duidelijk in zijn uitspraak, veel structuur, altijd met het krijtje op het bord. Ik ken natuurlijk nog wel de stelling van Pietje Goras en ook de oppervlakte van de cirkel, maar dat is toch meer een formule, geen stelling. De heer Poorthuis was bepaald niet de sympathiekste leraar, dat was meneer Van Leeuwen van aardrijkskunde, een interessant vak, hij motiveerde je ook echt. Meneer Poorthuis werkte klassikaal frontaal. Je schreef alles over van het bord, daardoor leerde je ook, je nam het op. Het was altijd komisch die strenge meneer Poorthuis te zien worstelen met de grote haak en driehoek om een figuur goed op het bord te krijgen. Dat was lachen.*

Een mooie illustratie van het belang van een goede relatie met je klas komt van Jeanne: *Van mijn wiskundeleraar kan ik me nog herinneren dat hij eens een proefwerk wilde uitstellen omdat hij weg moest. Zo angstig was hij voor onze resultaten. Maar wij wilden helemaal geen uitstel, we wilden er van af zijn en hebben toen als klas, zonder docent, het proefwerk gemaakt. Hoewel hij bang was dat er heel veel gespiekt zou worden, gaf hij ons*

*het vertrouwen om zonder toezicht te werken. Na afloop kregen wij zijn complimenten omdat we zijn vertrouwen niet geschaad hadden.*

*De stelling van Pythagoras, die ken ik natuurlijk nog wel. Maar had je nog meer stellingen? Ik kan me nog een docent herinneren die ons eerst het spel zelf liet ontdekken en daarna kwam met de logica en de structuren; ontdekken en reflecteren dus. Hij stelde ons vragen en gaf niet meteen het antwoord op onze vragen.*

*Maar verder was het bij veel leraren ook: huiswerk nakijken, stukje nieuwe leerstof op het bord, daarna oefenen. En los van wiskunde, toepassingen bij natuurkunde en scheikunde vonden we écht moeilijk.*

### Wiskundeonderwijs in de toekomst

Welke wensen, eisen, ideeën hebben onze geïnterviewden over ons werk in de toekomst?

Volgens Wil moeten we leerlingen op de middelbare school wiskunde flink op niveau laten kiezen. Veel nadruk op gestructureerd leren nadenken en problemen oplossen. En dan later goed kunnen verdienen, want: *Als je een baan als wetenschappelijk onderzoeker ambieert moet je al gauw naar het buitenland. Hou die mensen toch in Nederland. De geldkraan voor wetenschappelijk onderzoek moet weer open in ons land.*

John heeft ervaring met het geven van bijlessen. Hij constateert dat leerlingen niet meer kunnen rekenen met breuken, en schetst: *Het is werkelijk abominabel. Ze gaan helemaal op tilt als ze ermee moeten rekenen. Ik vind dat ze het wel zouden moeten kunnen, het is toch een soort basisvaardigheid. Maar ja, hun getalbegrip is over het algemeen ook slecht. En omdat ze geen gevoel voor getallen hebben, gaat het ook mis als ze hun rekenmachine gebruiken. Maken ze een tikfout, krijgen vervolgens een bijzonder raar antwoord, en hebben dat helemaal niet in de gaten...*

*Ik zou ervoor willen pleiten dat basisschool-leerkrachten een hoger niveau van wiskunde hebben dan de gemiddelde havo-leerling. Dat zal uiteindelijk het niveau in het basisonderwijs ten goede komen omdat het makkelijker is om rekenen aan te leren als je er zelf ver boven staat. Elke leerling op de middelbare school op havo- en vwo-niveau moet toch breuken aan procenten kunnen relateren, om maar eens iets te noemen? En wat dan belangrijk is tijdens het leerproces: gewoon samen met een leerling*

*aan het werk gaan; stimuleren dat hij of zij vragen gaat stellen, fouten durft te maken en hardop durft na te denken. Ze kunnen dan vaak meer dan ze ooit gedacht hadden; zelfs 45 minuten geconcentreerd bezig zijn.*

### Slot

Dank aan Wil, Jeanne, John en Frank. Ze hebben genuanceerd en uitgebreid antwoord gegeven op onze vragen en uitspraken gedaan die tot nadenken stemmen over de zin van ons onderwijs. Uiteraard vormen ze geen representatieve, laat staan aselechte steekproef waarmee we nu conclusies kunnen trekken over 'de' mening van 'de Nederlander' over het nut en de inrichting van ons wiskundeonderwijs. Wel vertolken ze gevoelens die nu leven. Op grond van hun eigen ervaringen met het gebruik van wiskunde in hun werk en 'gewone' leven, doen ze uitspraken over de inrichting van ons onderwijs.

In een volgende – en laatste – aflevering in deze serie willen we verslag doen van een gesprek met docenten uit alle stromen van ons voortgezet onderwijs. In dit gesprek buigen we ons onder meer ook over vragen over de toekomst van ons wiskundeonderwijs gelet op latere werkrelevantie. Mocht u zelf hierover een uitgesproken mening hebben, en wilt u deze opschrijven, dan bent u van harte uitgenodigd om dat te doen. Met name van wiskundeleraars in het beroepsonderwijs zouden we graag horen over hun ervaringen en meningen. Wie weet kunnen we dan ook van uw bijdragen weer een compilatie maken.

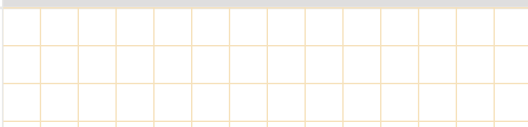
### Noot

- [1] Eerdere afleveringen in deze serie verschenen in *Euclides* 82(5), maart 2007, en *Euclides* 82(6), april 2007.

### Over de auteurs

Klaske Blom, Hans Daale, Wim Laaper en Joke Verbeek maken deel uit van de redactie van *Euclides*.

E-mailadres: [redactie-euclides@nvvw.nl](mailto:redactie-euclides@nvvw.nl)



# Feiten en meningen

[ Pauline Vos ]



## Gelijktijdigheid en oorzakelijkheid

Op de lerarendag in Groningen in december 2006 werd door een hooggeleerde meneer beweerd dat de afname van algebraïsche vaardigheden is veroorzaakt door de invoering van de grafische rekenmachine (GR). Zijn argument: 'Het is precies gelijktijdig gebeurd.'

Gelijktijdigheid dus als 'bewijs' van oorzakelijkheid. Dat is een heikele manier van redeneren: als de opwarming van de aarde gelijktijdig optreedt met een toename in de CO<sub>2</sub>-waarden, is de ene factor dan een oorzaak van de andere?

Overigens volgt uit een oorzakelijk verband wel een tijdsverband. De ravage komt altijd na de ramp, niet andersom.

Over het omkeren van redeneringen weten we als wiskundelaren allemaal: 'als A dan B' impliceert niet automatisch 'als B dan A'.

Maar laten we kijken naar de feiten rondom de algebraïsche vaardigheden en de GR. Het oudste knipsel in mijn map 'klachten uit het hoger onderwijs' is een interview in de NRC van september 2002. Hierin klaagt



wiskundedocent Fons van Engelen (toen van de Erasmus Universiteit over de gebrekkige algebraïsche vaardigheden van zijn eerstejaarsstudenten. We kunnen dus stellen dat de problemen in het hoger onderwijs van een eerdere datum stammen, want het duurt altijd even voordat een signaal verwoord wordt en opduikt in het klachtencircuit. De grote hausse aan berichten kwam vervolgens in 2004 op gang, met de eerste entreetoetsen voor de hogescholen en universiteiten. Kortom, er loopt een soort breuklijn tussen de eerstejaarsstudenten die vóór, respectievelijk ná 2000 aan een studie in het hoger onderwijs begonnen – een jaar eerder of later kan ook.

Drie jaar eerder, in 1997, werd besloten dat leerlingen bij de centrale schriftelijke eindexamens wiskunde havo/vwo de GR mochten gaan gebruiken. Dit besluit viel samen met de invoering van de nieuwe Tweede fase (profielen) én het Studiehuis. De invoering was gefaseerd, dus er werd begonnen in de vierde klas. De vierdeklassers uit 1997 gingen in 1999 (havo) en 2000 (vwo) naar het hoger onderwijs; zij waren het eerste cohort leerlingen dat de GR tot zijn beschikking had, maar óók het eerste cohort dat massaal met de Tweede fase en het Studiehuis te maken had. Dus, om maar wat te noemen, met veel meer vakken, minder contacturen, PTA's en praktische opdrachten. Dit cohort leerlingen verschildte op veel punten van z'n voorgangers; de tsunami van de Tweede fase en het Studiehuis viel dus samen met de tsunami van de GR en veroorzaakte een waterscheiding tussen leerlingen. Dit verschil werd enkele jaren later in het hoger onderwijs opgemerkt.

Maar dat is niet de enige 'gelijktijdigheid'. De eerstejaarsstudenten van 2000 zaten zes jaar eerder in de brugklas, bijna tegelijk met de invoering van de basisvorming. Deze werd officieel in 1993 ingevoerd, maar op veel scholen was de invoering wat vertraagd. De basisvorming bracht de woordformules en een reductie in algebraïsche oefeningen in de onderbouw. De nieuwe aanpak zal een impact hebben gehad op de verwerving van algebraïsche vaardigheden. Kortom, de

breuklijn van voor en na de GR valt ook samen met de breuklijn van voor en na de basisvorming.

Als het vloed is, dan stijgt het water aan onze kustlijn. Als er noordwesterstorm staat, dan stijgt het water aan onze kustlijn. Als het ijs in Groenland smelt, dan stijgt het water aan onze kustlijn. Ik kan dus heel wat mogelijke oorzakelijke verbanden aanwijzen, die de breuklijn tussen de eerstejaarsstudenten van voor en na 2000 kunnen verklaren.

Kortom: de eerstejaars in het hoger onderwijs van 2000 en daarna verschilden op veel punten van hun voorgangers. Er kunnen geen afzonderlijke factoren geïsoleerd worden. Het is dus een beetje simpel om - onder verwijzing naar de gelijktijdigheid - de invoering van de grafische rekenmachine als de enig mogelijke oorzaak aan te wijzen van de geconstateerde gebreken in de algebraïsche vaardigheden.

Als A dan B. Maar nu we B hebben geconstateerd, betekent dit dan dat A de oorzaak is?

En dan hebben we het nog niet gehad over de vraag of zaken die gelijktijdig gebeuren, ook altijd een verband hebben. Zoals die tsunami op Tweede Kerstdag in 2004.

### Over de auteur

Pauline Vos was wiskundelares en werkt nu aan de Rijksuniversiteit Groningen, waar zij onderzoek doet naar het wiskundeonderwijs.

E-mailadres: [f.p.vos@rug.nl](mailto:f.p.vos@rug.nl)



# Vmbo-3 en meetkunde

[ Joke Verbeek ]

## Klas v3c

Ja, ik geef het toe, het valt me niet mee de wiskundelessen te verzorgen in klas v3c. Deze vmbo-klas met leerlingen uit de theoretische en gemengde leerweg maakt me het leven drie keer per week niet gemakkelijk. Hoe ze dat doen? Nou, daar hebben ze een heel repertoire aan maatregelen voor tot hun beschikking. Ik noem er een paar:

- Wegblijven (al ervaar ik dat een paar minder dan 29 de klas soms een stuk verteerbaarder maakt).
- Te laat komen. 'Moet ik echt een briefje halen? Pfft, wat kinderachtig zeg! Alsof u zelf altijd op tijd komt!'
- Spullen niet meenemen. 'Mijn boek ligt in mijn kluisje, mag ik hem halen?', 'Mijn werkboek ben ik al lang kwijt, dat weet u toch wel?', 'Pen? Eh...', 'Mijn rekenmachine heeft het begeven', enzovoorts, enzovoorts.
- Consequent iets anders doen in de les. 'Ja, u snapt wel, als ik geen boek heb kan ik beter Frans doen dan niks...', 'Ik heb alles al af maar het ligt thuis', 'Ik ben moe.'
- De orde verstoren. 'Het was echt heel leuk juf, u zou zelf ook hard moeten lachen als u wist waar het over ging!'

Ze vertonen dit gedrag overigens niet alleen in de wiskundeles, begrijp ik van mijn collega's, maar dat is slechts een schrale troost. Massaal halen ze slechte cijfers, en niet alleen bij wiskunde, en dat beschouwen ze vervolgens als bewijs dat het niet aan hen ligt maar aan de docent, de leerstof of het lesrooster, uiteraard in die volgorde.

Natuurlijk doen niet alle leerlingen hieraan mee. Er zijn ook harde werkers in v3c, leerlingen die hun voldoende moeten halen door het krijgen van veel uitleg, van alle opgaven maken, in de Daltonuren extra uitleg vragen en doordat ik een beetje de hand over het hart strijk bij het nakijken van het proefwerk. Ze lijden zo mogelijk nog meer dan ik aan dit wiskunde-uur en zuchten minstens zo vaak als ik. Ze zijn in de minderheid, dat wel.

## Leuk

Op een donderdag ben ik wat laat bij het lokaal. De klas, of althans het gedeelte ervan dat van plan is aanwezig te zijn, staat gelaten op de tweede etage te wachten op wat komen gaat.



'Kunt u de wiskundeles niet eens een keer leuk maken?', vraagt Erwin trouwhartig terwijl ik het lokaal open doe. 'Wiskunde is altijd leuk', mijn standaardantwoord op deze vraag, maar ik schrik toch wel. Ik maak de lessen voor deze klas inderdaad niet erg leuk, dat heeft de wat zwaarmoedige Erwin toch wel haarscherp gevoeld. Ik steek er geen energie in, en dat is nu net wat ik hen verwijt. Dat kan en mag niet zo zijn.

In het weekend denk ik na over een 'leuke' les. Hoofdstuk 10 is bijna af, een meetkundehoofdstuk dat vaak extra veel onvoldoendes oplevert bij het proefwerk. Hoe krijg ik ze aan het denken en aan het werk?

## Kwartet

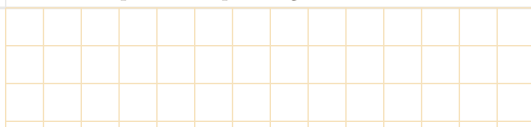
Als de klas die dinsdag weer verschijnt, kondig ik aan dat ze een groepso opdracht krijgen die ingeleverd moet worden. 'Het telt mee met het proefwerkcijfer', roep ik er nog achteraan. Een zwakgebod, ik weet het, maar ik ben ook maar een mens. Groepso opdrachten zijn niets ongewoons – we zijn tenslotte een Daltonschoon – maar een die meetelt voor het proefwerkcijfer? Ze worden nieuwsgierig.

Ze beginnen met zelf de groepjes samen te stellen. Slechts voor een enkeling die er niet is wordt een plek gereserveerd. Voor het cijfer zijn ze immers mede afhankelijk van hun groepsgenoten, en degenen die er regelmatig niet zijn worden niet beschouwd als degenen die een positieve bijdrage zullen gaan leveren. Mooi.

Na een korte uitleg gaan de zes groepen aan de slag. Ze moeten een kwartetspel afmaken dat de leerstof van het hoofdstuk als onderwerp heeft, en natuurlijk moet het spel ook minstens één keer gespeeld worden. De taken per persoon liggen vast in de opdracht, maar ze mogen elkaar wel helpen. En ze hebben een wiskundeboek nodig, zoals altijd, maar nu geven ze elkaar op de kop als dat niet het geval is in plaats van dat als mijn taak te beschouwen.

Voor de opdracht krijgen ze 3 lessen de tijd en ze mogen er ook thuis of in de Daltonuren aan werken. Voor het eerst zie ik groepjes uit v3c binnenwandelen in mijn Daltonuur. Hun mentor vraagt wat er aan de hand is, want onder zijn les Engels wordt er wiskunde bedreven.

Het werkt dus, ze zijn gemotiveerd en ik ben ervan overtuigd dat ze al doende veel wiskunde opsteken. Op de dag erna is de



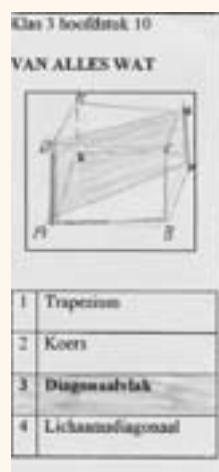


klas vol. De zevende groep wordt samengesteld uit de afwezigen van de vorige keer, op één leerling na die bij geen enkele groep welkom is. Zij krijgt van mij vriendelijk maar genadeloos de boodschap dan maar in haar eentje de 4-persoonsopdracht te maken. 'Eigen schuld', denk ik stiekem, 'had je je maar harder moeten uitsloven.' De leerlingen willen weten hoe het zit met die tangens, de koers en de stelling van Pythagoras, dus ik ben aardig druk met het allemaal nog eens uit te leggen bij de diverse groepjes. Er wordt getekend, geknipt en geplakt en we genieten met zijn dertigen, de 29 leerlingen van v3c en ik.

Op de dag dat de kwartetten moeten worden ingeleverd, ontbreekt natuurlijk het kwartet van één groep. Of het ook de volgende dag ingeleverd mag worden? 'Natuurlijk', zeg ik, 'maar dat kost wel een punt. En je moet het bij me thuis afleveren, want ik ben op vrijdag niet op school.' U weet waarschijnlijk net als ik wel welke groep dat is, maar de volgende dag ligt het spel keurig thuis in mijn brievenbus. En Brigitte die het in haar eentje moest doen heeft het knap voor elkaar, op tijd en bijna zonder fouten. Petje af!

### In beweging

Erwin komt naar me toe. 'Dit bedoelde ik nou met een leuke les', zegt hij samenzweerderig. 'Dat weet ik wel joh,' zeg ik eerlijk. 'En omdat jij het vroeg heb ik deze opdracht bedacht.' Hij kijkt tevreden. Ben ik ook tevreden?



Het proefwerk? Nou ja, er waren onvoldoendes. En de motivatie voor de wiskundelessen? Kan beter. 'Eigen schuld', denk ik soms opnieuw, maar dan heb ik het wel tegen mezelf. Want als me één ding duidelijk is geworden met deze lessenserie, is het wel dat je ook een ongemotiveerde klas in beweging kunt krijgen. Al is het maar tijdelijk. En als ik wat meer tijd steek in het bedenken van 'leuke lessen', dan steken zij ook ietsje meer tijd in de wiskunde en zijn we in ieder geval allemaal vrolijker. En dat is ook belangrijk. Quod erat demonstrandum (hetgeen te bewijzen viel).

### Zelf aan de slag

Wilt u ook aan de slag met een klas en een kwartetspel?

Via de website van de NVvW<sup>[1]</sup> kunt u het spel downloaden dat hoort bij hoofdstuk 10 van Getal en Ruimte 3vmba TKG. Het spel is vrij eenvoudig aan te passen aan andere leerjaren en/of hoofdstukken.

- Verdeel de leerstof in 9 delen (meer of minder kan ook).
- Maak bij elk deel vier deelonderwerpen (het kwartet). De leerlingen moeten zelf de plaatjes maken bij de deelonderwerpen.
- De groep zelf vormt ook een kwartet (met een getekend zelfportret). Zo ziet u meteen wie er in de groep zitten, maar ook wie welk nummer gemaakt heeft!

### Opdracht Kwartetspel

- Je werkt in een groepje van 4 (\*). Knip de kaarten netjes uit.
- Begin met jullie namen in te vullen op de kaart 'groepsleden', op elke kaart dezelfde volgorde!
- Ieder groepslid heeft het *vette* nummer dat voor zijn naam staat.
- Ieder groepslid krijgt de 10 kaarten met zijn nummer.
- In ieder vakje moet een tekening komen die hoort bij het onderwerp van het *eigen* nummer. De tekening moet duidelijk zijn en zo precies mogelijk laten zien wat bedoeld wordt. Je mag het boek gebruiken om voorbeelden te zoeken. Iets knippen en opplakken mag ook, als het maar binnen de lijnen blijft.
- Geef in de tabel onder de tekening het vetgeschreven onderwerp een kleur. De andere drie hokjes krijgen geen kleur.
- Als iedereen klaar is speel je het spel een keer.
- Het complete spel moet worden ingeleverd. Jullie krijgen er als groep een cijfer voor.

(\*) Ben je met minder dan 4? Dan hebben jullie extra werk want het spel moet wel compleet worden ingeleverd.

### Noot

- [1] [www.nvww.nl/media/downloads/eucl\(827\)kwartet.doc](http://www.nvww.nl/media/downloads/eucl(827)kwartet.doc)  
(Word-document)

### Over de auteur

Joke Verbeek is docent op het Aretheem College (locatie Middachtensingel, voor vmbo-GT en havo) te Arnhem, en redacteur van Euclides.  
E-mailadres: [jokeverbeek@chello.nl](mailto:jokeverbeek@chello.nl)

# Bruno Ernst Symposium

## EEN IMPRESSIE

[ Klaske Blom ]

Bruno Ernst, pseudoniem van J.A.F. de Rijk, heeft inmiddels zijn 81e verjaardag gevierd. Om zijn verdiensten voor het onderwijs en de wetenschapspopularisatie niet ongemerkt te laten passeren organiseerden de opleidingen sterrenkunde, wiskunde en natuurkunde van de Universiteit Leiden een middagsymposium op 30 maart jl.

### Bruno Ernst

Wedden dat u allemaal de naam Bruno Ernst kent? Had hij niet iets met Wiskunde & Kunst te maken, of met Escher? Zeker, en met nog veel meer: met natuurkunde, met zonnewijzers, met *Pythagoras* en *Archimedes*, met de volkssterrenwacht *Simon Stevin*, met kalligrafie en broeders. Ter ere van deze grand old man van de popularisering van de exacte wetenschappen, die ook wel 'een levende legende' wordt genoemd, werd op vrijdagmiddag 30 maart in Leiden een symposium georganiseerd.

De organisatoren, Prof. Saris en Dr. De Jeu, hadden Hans de Rijk (de man achter het pseudoniem Bruno Ernst) gevraagd naar zijn wensen voor lezingen. Zijn wensenlijstje bleek lang en breed georiënteerd. Dit resulteerde in een boeiende middag met uiteenlopende voordrachten: van betegelingen tot oneindigheid en verre planeten. Voordat de lezingencyclus begon kreeg De Rijk een cadeau overhandigd door Hendrik Lenstra en Bart de Smit. Deze twee wiskundigen hebben enkele jaren geleden het 'gat' gedicht in een van de tekeningen van Escher, de *Prentententoonstelling* (1956) met het Droste-effect. Een toeschouwer in een overdekte galerij kijkt naar een schilderij van een mediterrane stad aan zee. De gebouwen in de stad vervormen tot ze aansluiten op de galerij. In het midden van de tekening is het wit. In 2002 hebben Lenstra en De Smit dit gat ingevuld<sup>[1]</sup>. Van hun werk is een nieuwe prent gemaakt die in een oplage van 10 is afgedrukt. Eén van deze exemplaren werd nu overhandigd aan Hans de Rijk.

De zaal was gevuld met ongeveer 100 bezoekers. Toen men aan Hans de Rijk voorstelde om een dergelijke symposium te zijner ere te organiseren, was hij niet geheel enthousiast omdat hij vreesde alleen

met zijn familie en een paar vrienden op de eerste twee rijen te zitten in een verder lege zaal. Een ruime onderschatting van zijn aantrekkingskracht. Uiteraard weet ik niet in welke hoedanigheid alle afzonderlijke deelnemers aan het symposium aanwezig waren, wel waren er onmiskenbaar veel docenten: wis- en natuurkundedocenten, bleek in de pauze en bij de borrelgesprekken. We herkennen elkaar wonderlijk genoeg toch onmiddellijk en ons onderwijs blijft een dankbaar en belangrijk gespreksonderwerp.

De grootste gemene deler van de aanwezigen bleek echter Bruno Ernst zelf te zijn. Voor velen is hij een inspirator geweest, en nog. Sommigen kregen als scholier een abonnement op de eerste uitgaven van *Pythagoras*, het wiskundeblad voor jongeren dat door Hans de Rijk werd opgericht en nog steeds bestaat. Dit blad won velen voor de wiskunde. Anderen raakten in de ban van Escher door de boeken die De Rijk onder zijn pseudoniem Bruno Ernst schreef. Tijdens de lezing van Chris Zaal stond één van de aanwezigen, de kunstenaar Popke Bakker, op om te vertellen dat hij zich één van de eerste leerlingen van Bruno Ernst voelde: hij maakt wiskundige kunstwerken (de onmogelijke kubus stond hier werkelijk tentoongesteld) en beschouwt Bruno Ernst als zijn leermeester en inspirator omdat Hans hem geholpen heeft de moeilijke constructies van onmogelijke figuren mogelijk te maken in zijn kunstwerken.

### Hans de Rijk

Chris Zaal liet een deel van het leven van Hans de Rijk voor onze ogen tot leven komen in de beelden 'held', 'superman', 'stilist' en 'speels kind'. Hans de Rijk heeft rond de 250 boeken en 1000 artikelen gepubliceerd onder diverse pseudoniemen.



Foto: Jan Gerritsen

Bruno Ernst is de bekendste; andere pseudoniemen zijn Broeder Erik, Ben Engelhart en Ben Elshout. Onder het pseudoniem Ben Engelhart publiceerde hij werken over grafologie en schrift, als Ben Elshout schreef hij over fotografie en film. Iemand uit het publiek vroeg naar zijn drijfveren voor al deze pseudoniemen. Het leek alsof De Rijk dit punt eigenlijk niet zo interessant vond: is het werkelijk zo belangrijk wat mij als persoon beweegt? Hij antwoordde toch, en uit zijn antwoord bleek zijn grote bescheidenheid: hij zei altijd op zoek te zijn geweest naar een mooie naam met de initialen BE omdat zijn eerste 'tweede naam', broeder Erik, hem dierbaar was. 'Engelhart' vond hij gewoon in het telefoonboek... en de reden voor het schrijven onder pseudoniemen: *'...dan zouden ze [het lezerspubliek] niet denken, oh jee, daar heb je die man alwéér! Heeft hij over dat onderwerp ook al iets te melden?'*

### Sterren en planeten

Twee van de overige lezingen gingen over de nieuwste ontdekkingen in ons heelal. Prof. Kuijken en Dr. Snellen vertelden over de fascinerende zoektocht naar nieuwe sterren en planeten. Dr. Van Gent liet aan de hand van prachtig mooie platen zien

hoe de beelden over hemel en aarde in de loop van de eeuwen verschoven zijn van geocentrisch naar heliocentrisch. Dr. De Jeu probeerde op verzoek van Hans de Rijk antwoord te geven op de vraag hoeveel oneindig is, en riep en passant nog twee van die boeiende breinkrakers op: 'Hoe lang duurt de eeuwigheid?' en 'Wat is er voorbij het heelal?'

Jeanine Daems, aio van de Universiteit Leiden, hield een boeiende voordracht over symmetriegroepen.

Het is de bedoeling dat op de speciale symposium-website<sup>[2]</sup> samenvattingen komen te staan van de lezingen die op dit Bruno Ernst Symposium gehouden zijn.

In volgende nummers van Euclides zullen artikelen verschijnen van Jeanine Daems en Marcel de Jeu, gebaseerd op hun lezingen tijdens dit symposium.

Uiteraard gaat er niets boven het daadwerkelijk bijwonen van een boeiende voordracht, maar voor al diegenen die moeilijk de school uitkomen is een artikel een goed alternatief.

### Noten

- [1] Zie <http://escherdroste.math.leidenuniv.nl>
- [2] Zie [www.strw.leidenuniv.nl/cms/web/2007/20070330/abstracts.php3?wsid=4](http://www.strw.leidenuniv.nl/cms/web/2007/20070330/abstracts.php3?wsid=4)

### Over de auteur

Klaske Blom is redacteur van Euclides en wiskundedocent in Amersfoort aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt.

E-mailadres: [kablom@tiscali.nl](mailto:kablom@tiscali.nl)



# Het HSA-vierkant

## DE HYPE, SENSATIE EN ACHTERGROND

[ Arno van den Essen ]

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
| 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
| 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  | 31  | 32  | 33  | 34  | 35  | 36  |
| 37  | 38  | 39  | 40  | 41  | 42  | 43  | 44  | 45  | 46  | 47  | 48  |
| 49  | 50  | 51  | 52  | 53  | 54  | 55  | 56  | 57  | 58  | 59  | 60  |
| 61  | 62  | 63  | 64  | 65  | 66  | 67  | 68  | 69  | 70  | 71  | 72  |
| 73  | 74  | 75  | 76  | 77  | 78  | 79  | 80  | 81  | 82  | 83  | 84  |
| 85  | 86  | 87  | 88  | 89  | 90  | 91  | 92  | 93  | 94  | 95  | 96  |
| 97  | 98  | 99  | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 |
| 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 |
| 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 |
| 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 |
| 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 |
| 157 | 158 | 159 | 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 |
| 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 |
| 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 | 191 | 192 |
| 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 |
| 205 | 206 | 207 | 208 | 209 | 210 | 211 | 212 | 213 | 214 | 215 | 216 |
| 217 | 218 | 219 | 220 | 221 | 222 | 223 | 224 | 225 | 226 | 227 | 228 |
| 229 | 230 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 236 | 237 | 238 | 239 | 240 |
| 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 |
| 253 | 254 | 255 | 256 | 257 | 258 | 259 | 260 | 261 | 262 | 263 | 264 |
| 265 | 266 | 267 | 268 | 269 | 270 | 271 | 272 | 273 | 274 | 275 | 276 |
| 277 | 278 | 279 | 280 | 281 | 282 | 283 | 284 | 285 | 286 | 287 | 288 |
| 289 | 290 | 291 | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 | 299 | 300 |

Toen ik op 22 maart om 9:20u met de trein vanuit Nijmegen richting Parijs vertrok voor het geven van een lezing over mijn onderzoeksgebied, het Jacobi-vermoeden, had ik geen flauw idee dat amper een half uur later in Nederland een mediahype van start zou gaan rond een magisch vierkant, dat zo'n drie maanden eerder door drie middelbare scholieren in mijn Masterclass *Magische Vierkanten en Sudoku's* gevonden was. Wiskunde was voor een dag voorpaginanieuws in Nederland. In dit verhaal zal ik ingaan op de voorgeschiedenis, de fascinatie, het vierkant zelf en de 'nasleep'.

### De Masterclass

Op 28 september 2006 kwamen 69 leerlingen naar de RU te Nijmegen om deel te nemen aan één van de Masterclasses die daar gedurende zes donderdagmiddagen gegeven werden. De onderwerpen waren *Krommen, Bestaat Toeval?* en *Magische Vierkanten en Sudoku's*. Nadat ieder van de drie docenten een inleidend praatje van zo'n twintig minuten over zijn onderwerp gehouden had, kregen de leerlingen de gelegenheid tijdens de pauze om te beslissen welke Masterclass ze wilden gaan volgen. Zo'n dertig leerlingen kozen voor *Magische Vierkanten en Sudoku's*.

In de volgende drie bijeenkomsten, die om de twee weken plaatsvonden, werden drie onderwerpen aan de orde gesteld, op grond waarvan de leerlingen een profielwerkstuk konden gaan maken. Deze onderwerpen waren: Sudoku's en modulo-rekenen (week 2), alfa-magische vierkanten (week 3) en Franklin-magische vierkanten (week 4). In de vijfde week werd een tiental mogelijke onderzoeksvragen geformuleerd en gingen de leerlingen hun onderzoeksvraag bepalen. In de zesde week werd er in groepjes aan het gekozen onderwerp gewerkt, onder begeleiding van de studentassistenten Stephan Berendonk, Dion Coumans, Mieke Janssen en mijzelf.

### Het Franklin-mysterie

Rond 1750 construeerde de Amerikaanse staatsman en wetenschapper Benjamin Franklin (1706-1790) een vijftal bijzondere magische vierkanten. Een ervan is bovenstaand 8x8 vierkant. Deze verscheen op 17 januari 2006 op een postzegel van US Postal Service ter gelegenheid van Franklins 300e geboortedag.

Het bijzondere aan dit vierkant is dat niet alleen de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom gelijk is aan 260, maar dat bovendien de som van alle getallen in iedere halve rij en iedere halve kolom (vanaf de rand gerekend) gelijk is aan 130. Bovendien is ook de som van alle getallen in ieder 2x2 deelvierkant gelijk aan 130. In tegenstelling tot een 'gewoon' magisch vierkant is de som der getallen op de diagonaal niet gelijk aan de magische som. In plaats daarvan is de som van alle getallen op ieder van de vier gebogen diagonalen zoals bijvoorbeeld 52, 3, 5, 54, 43, 28, 30, 45 of 45, 30, 28, 43, 23, 40, 34, 17 gelijk aan 260. Maar nog is niet alle magie beschreven. Ook alle parallelle gebogen diagonalen zoals bijvoorbeeld 61, 62, 12, 43, 23, 56, 2, 1 of 20, 51, 5, 6, 58, 57, 15, 48 hebben 260 als som. Een bijzonder vierkant!

Hoe Franklin dit – en andere soortgelijke vierkanten – (in een avond) gemaakt had, bleef tot voor kort een mysterie. Toen ik in juni 2006 bezig was een hoofdstuk over Franklin-magische vierkanten voor mijn boek<sup>[1]</sup> te schrijven en daartoe bovenstaand Franklin-vierkant analyseerde, werd het mij al snel duidelijk hoe Franklin zulke vierkanten gemaakt zou kunnen hebben. Voor mijn oplossing maakte ik gebruik van een idee van Leonhard Euler (1707-1783) dat hij in 1776 gebruikte om 'gewone' zuiver magische vierkanten te maken. Voor de volledigheid: een  $n \times n$  getallenvierkant heet een *magisch vierkant* (van orde  $n$ ) als de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom en op ieder van de twee diagonalen hetzelfde is. Als de getallen in het vierkant bovendien de opeenvolgende getallen  $1, 2, 3, \dots, n^2$  zijn, heet het vierkant een *zuiver magisch vierkant*.

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
| 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
| 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  | 31  | 32  | 33  | 34  | 35  | 36  |
| 37  | 38  | 39  | 40  | 41  | 42  | 43  | 44  | 45  | 46  | 47  | 48  |
| 49  | 50  | 51  | 52  | 53  | 54  | 55  | 56  | 57  | 58  | 59  | 60  |
| 61  | 62  | 63  | 64  | 65  | 66  | 67  | 68  | 69  | 70  | 71  | 72  |
| 73  | 74  | 75  | 76  | 77  | 78  | 79  | 80  | 81  | 82  | 83  | 84  |
| 85  | 86  | 87  | 88  | 89  | 90  | 91  | 92  | 93  | 94  | 95  | 96  |
| 97  | 98  | 99  | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 |
| 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 |
| 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 |
| 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 |
| 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 |
| 157 | 158 | 159 | 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 |
| 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 |
| 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 | 191 | 192 |
| 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 |
| 205 | 206 | 207 | 208 | 209 | 210 | 211 | 212 | 213 | 214 | 215 | 216 |
| 217 | 218 | 219 | 220 | 221 | 222 | 223 | 224 | 225 | 226 | 227 | 228 |
| 229 | 230 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 236 | 237 | 238 | 239 | 240 |
| 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 |
| 253 | 254 | 255 | 256 | 257 | 258 | 259 | 260 | 261 | 262 | 263 | 264 |
| 265 | 266 | 267 | 268 | 269 | 270 | 271 | 272 | 273 | 274 | 275 | 276 |
| 277 | 278 | 279 | 280 | 281 | 282 | 283 | 284 | 285 | 286 | 287 | 288 |
| 289 | 290 | 291 | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 | 299 | 300 |

Het is eenvoudig in te zien dat een veelvoud van een magisch vierkant en de som van twee magische vierkanten van dezelfde orde (onder de matrixoptelling) weer een magisch vierkant is. Om nu een zuiver magisch vierkant van orde  $n$  te maken redeneerde Euler als volgt: Zoek eerst twee zogenoemde *Latijnse vierkanten*  $N$  en  $M$ , dat wil zeggen vierkanten bestaande uit de getallen  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$  met de eigenschap dat in iedere rij en iedere kolom de getallen  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$  precies één keer voorkomen (een Sudoku is dus een Latijns vierkant van orde 9 met nog wat extra eigenschappen). Neem nu aan dat ook op de diagonalen van  $N$  en  $M$  de getallen  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$  precies één keer voorkomen. Dan is het duidelijk dat zowel  $N$  als  $M$  magische vierkanten zijn met als som  $0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)$ . Vorm dan het vierkant  $V := n \times N + M$ . Dit vierkant is dan ook magisch en al zijn getallen zijn minstens 0 en hoogstens  $n \times (n-1) + (n-1) = n^2 - 1$ . Het kan echter gebeuren dat sommige getallen in  $V$  meer dan een keer voorkomen. Om dit te voorkomen legde Euler aan de vierkanten  $N$  en  $M$  nog een eis op, namelijk dat ze *orthogonaal* zijn. Dit betekent dat het vierkant der paren dat ontstaat als je  $N$  en  $M$  op elkaar legt, uitsluitend uit verschillende paren moet bestaan. Met niet al te veel moeite kan men dan inzien dat het vierkant  $V$  alle getallen  $0, 1, 2, \dots, (n^2 - 1)$  ook daadwerkelijk bevat. Het vierkant  $V+1$ , dat ontstaat door bij alle getallen uit  $V$  het getal 1 op te tellen, is dan een zuiver magisch vierkant!

Toen ik bovenstaand  $8 \times 8$  Franklin-vierkant bekeek, vroeg ik mij af of dit vierkant ook van de vorm  $8 \times N + M + 1$  is, waarbij  $N$  en  $M$  Franklin-magische vierkanten zijn bestaande uit de getallen  $0, 1, 2, \dots, 7$ . Het antwoord op mijn vraag bleek niet alleen bevestigend te zijn, maar bovendien bleek, zoals ieder eenvoudig kan narekenen, dat de vierkanten  $N$  en  $M$  een bijzonder eenvoudige structuur hebben. Om de leerlingen in mijn Masterclass deze structuur zelf te laten vinden wordt hun het  $8 \times 8$  Franklin-vierkant voorgelegd en de opdracht is dan  $N$  en  $M$  te bepalen en vervolgens het patroon erin te ontdekken.

### De uitdaging

Het waren Petra Alkema (15), Jesse Hoekstra (17) en Willem Schilte (17) die geboeid raakten door de eenvoud van de

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 142 | 11  | 136 | 8   | 138 | 5   | 139 | 12  | 135 | 2   | 141 |
| 120 | 27  | 110 | 33  | 113 | 31  | 116 | 30  | 109 | 34  | 119 | 28  |
| 121 | 22  | 131 | 16  | 128 | 18  | 125 | 19  | 132 | 15  | 122 | 21  |
| 48  | 99  | 38  | 105 | 41  | 103 | 44  | 102 | 37  | 106 | 47  | 100 |
| 73  | 70  | 83  | 64  | 80  | 66  | 77  | 67  | 84  | 63  | 74  | 69  |
| 60  | 87  | 50  | 93  | 53  | 91  | 56  | 90  | 49  | 94  | 59  | 88  |
| 85  | 58  | 95  | 52  | 92  | 54  | 89  | 55  | 96  | 51  | 86  | 57  |
| 72  | 75  | 62  | 81  | 65  | 79  | 68  | 78  | 61  | 82  | 71  | 76  |
| 97  | 46  | 107 | 40  | 104 | 42  | 101 | 43  | 108 | 39  | 98  | 45  |
| 24  | 123 | 14  | 129 | 17  | 127 | 20  | 126 | 13  | 130 | 23  | 124 |
| 25  | 118 | 35  | 112 | 32  | 114 | 29  | 115 | 36  | 111 | 26  | 117 |
| 144 | 3   | 134 | 9   | 137 | 7   | 140 | 6   | 133 | 10  | 143 | 4   |

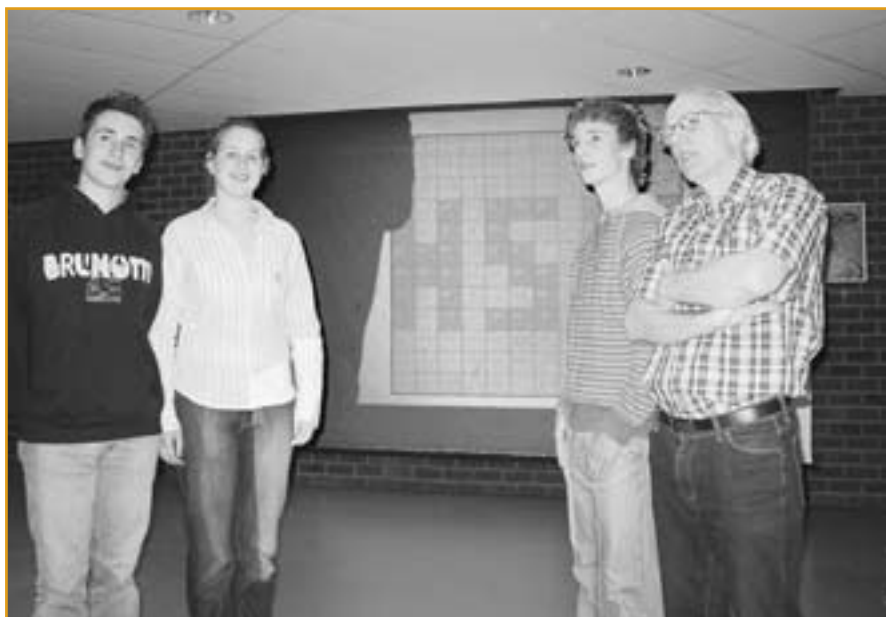
methode en vervolgens zelf aan de slag gingen om een zuiver  $8 \times 8$  Franklin-vierkant te maken dat ook nog *panmagisch* is (dat wil zeggen waarvan ook de gebroken diagonalen de magische som van 260 hebben). Ze noemden het door hen gevonden vierkant **Frappant!** Vervolgens besloten ze, in navolging van Benjamin Franklin, ook  $16 \times 16$  zuiver Franklin-magische vierkanten te maken. De ultieme uitdaging was echter: kun je een zuiver  $12 \times 12$  Franklin-magisch vierkant maken, want zo'n vierkant is tot nu toe nog niet gevonden!

Uitgedaagd door deze vraag en het succes bij het maken van de  $8 \times 8$  en  $16 \times 16$  Franklin-vierkanten besloten Petra, Jesse en Willem hun profielwerkstuk over het onbekende  $12 \times 12$  Franklin-vierkant te maken. Het bleek echter geen eenvoudige opgave te zijn. Steeds maar weer lukte het niet om Franklin-vierkanten  $N$  en  $M$  te vinden die zowel orthogonaal waren alsook de halve kolom/rij eigenschap bezaten. Stephan Berendonk stelde daarom voor de halve kolom/rij eigenschap te vervangen door de '*1/3-de rij/kolom eigenschap*', met andere woorden door de eis dat de som van alle getallen in ieder één-derde deel van een rij en ieder één-derde deel van een kolom (vanaf een rand gerekend) steeds hetzelfde is. Dit bleek een cruciale suggestie te zijn, die er uiteindelijk toe leidde dat op 14 december 2006 (mijn verjaardag!) het inmiddels veelbesproken HSA-vierkant<sup>[2]</sup> door Petra, Jesse en Willem gevonden werd. Ik was zeer enthousiast over deze nieuwe vondst en liet hun weten het vierkant in de Engelse versie van mijn boek te zullen opnemen. Inmiddels is er in de tweede druk van mijn boek ook uitvoerig aandacht aan dit vierkant besteed.

### De presentaties

Op 1 maart 2007 tijdens de laatste bijeenkomst van de Masterclass, waarop de leerlingen hun resultaten aan de andere deelnemers mochten presenteren, merkte Willem op dat hij in het vierkant ook *cirkels* met de magische som van 870 had ontdekt. Het was deze opmerking die mijn interesse in het vierkant nieuw leven inblies en mij na wat experimenteren deed inzien dat het nog bijzonderder was dan dat ik oorspronkelijk al gedacht had. Zo bleek dat, als  $L$  de horizontale lijn is die het vierkant in twee gelijke delen verdeelt, de som van ieder getal en zijn gespiegelde ten opzichte van  $L$  steeds 145 is. Als gevolg hiervan zijn niet alleen cirkels met som 870 te maken maar ook bijna alle letters van het alfabet en natuurlijk allerlei figuren die symmetrisch ten opzichte van  $L$  zijn en uit twaalf getallen bestaan.

Ik vond het vierkant wel zó bijzonder dat ik op 13 maart besloot een klein stukje voor het Wiskundig Genootschap te schrijven getiteld 'Het HSA-vierkant'. Bovendien leek mij dit resultaat uitstekend geschikt om wat publiciteit voor wiskunde te krijgen: het is immers voor iedereen eenvoudig te begrijpen en het is verkregen door middelbare scholieren. Ik nam daarom contact op met Lex Plantaz, het afdelingshoofd van het Dominicuscollege te Nijmegen, de school van Jesse en Willem. Hij was inmiddels door wiskundelerares Hanneke Abbenhuis op de hoogte gesteld van het schitterende resultaat en reageerde terecht enthousiast. Op 21 maart tijdens de profielwerkstukkenavond werden de leerlingen door Klaas Landsman in het zonnetje gezet, nadat ik een kleine toelichting op het vierkant had gegeven. Na afloop



Van links naar rechts: Jesse, Petra, Willem, Arno.

werd ik benaderd door een van de ouders van een van de andere leerlingen. Ze werkte bij het ANP. Ik vertelde haar enthousiast dat dit vierkant *het meest magische vierkant* is dat ooit gemaakt is en dat het een *sensatie* is in de wereld der magische vierkanten.

### Het ANP-bericht

De volgende morgen vertrok ik niets vermoedend van wat er komen ging met mijn vrouw naar Parijs voor het geven van een lezing. De betreffende journaliste van het ANP had mij wel gezegd dat er reacties zouden komen, maar door mijn eerdere ervaringen met de pers dacht ik dat dat wel mee zou vallen. (Toen ik bijvoorbeeld in oktober vorig jaar het 250 jaar oude Franklin-mysterie oploste, was niemand geïnteresseerd!) Maar zoals inmiddels bekend werd het HSA-vierkant een mediahype.

Natuurlijk rijst de vraag: waarom? Het antwoord ligt besloten in het ANP-bericht dat, door enige spraakverwarring, een aantal dingen onjuist weergaf. Zo werd er gesproken over een *wereldwijde sensatie*, terwijl ik steeds gesproken (en geschreven) had over een sensatie in de *wereld der magische vierkanten*. Ook werd er gezegd dat de leerlingen een eeuwenoud probleem hadden opgelost, terwijl ik juist vorig jaar het 250 jaar oude Franklin-mysterie had opgelost en de leerlingen deze *methode*

*gebruikt hadden*. Natuurlijk speelde ook de leeftijd van de scholieren (15 en 17) een cruciale rol: deze jonge leerlingen tegenover al die wiskundige genieën.

### De nasleep

Bij terugkeer uit Parijs bleek ik te zijn overladen met e-mails van heel veel enthousiaste mensen die dachten het ontbrekende  $12 \times 12$  vierkant te hebben gevonden of die nog grotere magische vierkanten gemaakt hadden, waarnaar we helemaal niet op zoek waren. Het heeft mij dan ook dagen gekost een groot aantal van deze reacties te beantwoorden. Maar wiskunde had, althans voor een paar dagen, de aandacht van een groot publiek: we stonden weer op de kaart. Natuurlijk waren er, zoals altijd, ook negatieve reacties, vanzelfsprekend van negatieve mensen, maar dat hoort erbij. Voor mij was het allerbelangrijkste dat er over wiskunde gepraat werd en dat er zelfs in wiskundelessen tijd besteed werd aan magische vierkanten. Ook vind ik het zeer positief dat wiskunde in de persoon van Petra, Jesse en Willem drie ambassadeurs gekregen heeft!

Wat ik van deze ervaring geleerd heb?

Op de eerste plaats dat er in Nederland nog heel wat wiskundig talent rondloopt en ook dat, wanneer ik weer eens op reis ga één dag nadat ik met de media gesproken heb, ik mijn mobiele telefoon aan zal laten!

### Noten

- [1] Arno van den Essen (2006): *Magische Vierkanten, Van Lo-Shu tot Sudoku*. Diemen: Veen Magazines.
- [2] Genoemd naar de ontwerpers: Hoekstra, Schilte, Alkema.

### Over de auteur

Arno van den Essen is als wiskundige verbonden aan de Radboud Universiteit te Nijmegen. Zijn onderzoeksgebied is algebra. Daarnaast houdt hij zich bezig met het populariseren van wiskunde en het maken van propaganda voor het verband tussen reuma en voeding.

E-mailadres: [A.vandenEssen@math.ru.nl](mailto:A.vandenEssen@math.ru.nl)

# Bereken, bereken exact, en verder...?

[ Simon Biesheuvel ]

## Aanleiding

In klas 5-havo, wiskunde B12, hebben we klassikaal een opgave met de cosinusregel besproken. Een driehoek, gehaald uit een kubus, met zijden  $\sqrt{20}$ ,  $\sqrt{34}$  en 5.

De opdracht was: *bereken in hele graden de hoek tegenover de zijde met lengte 5.*

Dus begonnen we met

$$5^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{34}^2 - 2 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{34} \cos \alpha.$$

Nodig waren nu de volgende stappen:

- $\sqrt{20}^2 = 20$ ,  $\sqrt{34}^2 = 34$  (dit moet van mij uit het hoofd);
- links en rechts min 20 en min 34;
- dan delen door  $-2 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{34}$  (en niet plus);
- daarna pas  $\cos^{-1}$  (en niet  $\cos$ ).

Met de tussen haakjes geplaatste kwesties hadden enkele leerlingen problemen.

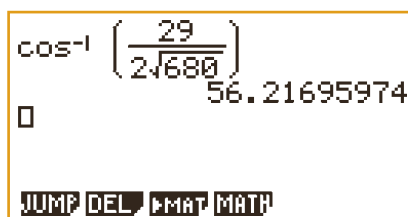
Dit leek me een nuttige opgave omdat er nogal wat wiskunde in zit die vaker toepasbaar is, ook bij vragen naar exacte oplossingen. Tot een leerling opperde: 'Dit kan toch ook in de Solver?'

De *Solver* is een mogelijkheid op onze grafische rekenmachine van het merk Casio om een vergelijking in te typen, vaak met een startgetal, soms met een domein, en de machine berekent dan één oplossing.

Dus hebben we

$5^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{34}^2 - 2\sqrt{20}\sqrt{34}\cos x$  bij de *Solver* van onze rekenmachine ingetypt, en als startgetal bij het zoeken 40 graden meegegeven. Daar komt direct uit  $x = 56,2169597$ .

Dit werkt dus ook, en bij een berekening in hele graden is het inzetten van de grafische rekenmachine toegestaan, ook op het examen<sup>[1]</sup>.



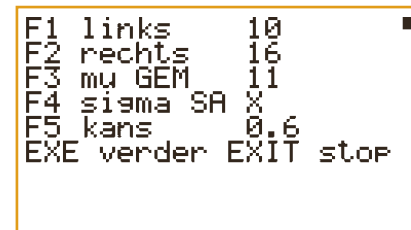
figuur 1 Exact berekende hoek en daarna benaderd

## 'Bereken exact' tegenover 'Bereken'

Staat in een opgave de formulering '*bereken exact*', dan wordt van een leerling verwacht dat hij aan een formule of vergelijking kan komen (soms wordt die gegeven) en de structuur van die formule zo goed begrijpt dat hij zelfstandig kan doorrekenen naar een antwoord. Bij dit doorrekenen moeten algebraïsche vaardigheden worden ingezet. Vervolgopleidingen vinden deze vaardigheden belangrijk. Ze vormen ook een groot deel van het wiskundeonderwijs op de middelbare school.

Bij de formulering '*bereken*' of '*bereken in twee decimalen*' is hetgeen van een leerling wordt verwacht, nogal wisselend:

- a. Zelf een vergelijking opstellen en die met de grafische rekenmachine oplossen. Dit kan door plotten en het snijpunt laten bepalen, of door de hele vergelijking in een *solver* in te typen en één antwoord eruit laten rollen.



figuur 2 Normsolv invoer; EXE geeft de waarde van sigma

- b. Een programmaatje inzetten. Bijvoorbeeld bij de normale verdeling. Van de vijf parameters (linkergrens, rechtergrens,  $\mu$ ,  $\sigma$  en de kans) vul je er vier in, en de vijfde rolt er uit. En bijvoorbeeld bij berekeningen in een driehoek. Van de zes parameters (3 zijden en 3 hoeken) vul je er drie in en de andere drie rollen er zo uit, evenals de oppervlakte.
- c. Via een formule zelf doorrekenen (net als bij '*bereken exact*') en daarna het antwoord intypen in de rekenmachine en afronden.

Dit lijstje is niet uitputtend.

Punt b springt er als eenvoudigste uit,

omdat het kiezen van het programma de moeilijkste actie is voor de leerling. Het is in dit geval niet nodig de cosinusregel te kennen of te kunnen gebruiken.

Punt a is bijna net zo simpel, zeker als de formule al gegeven is; de leerling moet (op de Casio) alleen nog *ViewWindow* instellen. Bij de hoekberekening uit het voorbeeld hierboven moet de leerling nog wél herkennen dat de cosinusregel nodig is, en deze moet vervolgens ook nog op de juiste manier 'ingevuld' worden.

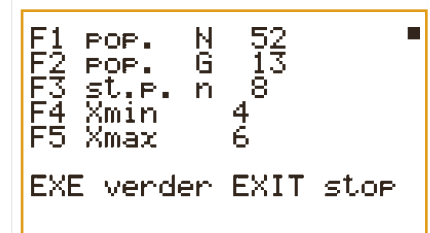
Punt c is moeilijker dan exact berekenen, want na het vinden van het exacte antwoord moet nu de GR nog gebruikt worden om het benaderde antwoord in het gewenste aantal decimalen te vinden.

Voor een goede voorbereiding van de leerlingen op hun vervolgopleiding is een mix van deze methoden noodzakelijk. Hoe moeilijker de wiskunde (straks van C via A naar B en D), hoe meer er exact gerekend moet worden.

## De vele mogelijkheden van de GR

### 1. Aan de GR toegevoegde programma's

Tot nu toe gaf ik mijn leerlingen programma's voor berekeningen die onze Casio-machine niet direct aankan, maar andere merken wel. Op die manier wordt het eindexamen voor de ene groep leerlingen niet moeilijker dan voor de andere groep. Zo gebruiken we bijvoorbeeld bij kansrekening *Normsolv*, een programma dat de ingebouwde methode van andere merken nabootst. Je stopt er vier gegevens



figuur 3 Invoer hypergeometrische verdeling; EXE geeft direct het antwoord



in en het antwoord komt eruit. Ook hebben we een programma dat - bij benadering - de vergelijking van een raaklijn geeft.

Omgekeerd geven veel andere docenten hun leerlingen een programma voor de *abc*-formule, een programma dat in onze Casio-machine al is ingebouwd.

De firma Casio deed een verzoek voor Nederlandse aanpassingen van hun grafische rekenmachine. Nu de Casio's een *flash memory* hebben, is het mogelijk een Nederlands *Operating System* in te bouwen. Het eerste verzoek van docenten was *Normsolv* gewoon in te bouwen, het tweede was de hypergeometrische verdeling met alternatief (ook cumulatief) in te bouwen. (Bij hypergeometrisch kun je denken aan een trekking van 8 kaarten uit een set van 52, zonder teruglegging, en dan de kans berekenen op een resultaat tussen de 3 en 7 harten.)

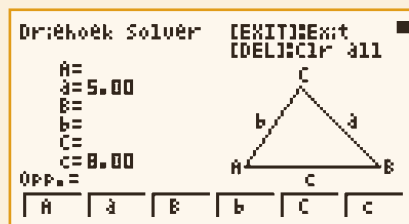
Als de hypergeometrische verdeling ingebouwd wordt, hebben we wel iets nieuws, iets dat een opgave weer erg eenvoudig maakt voor de leerlingen. Het denken aan meerdere volgordes wordt nu vóór je gedaan, net als bij de ingebouwde opties voor de binomiale verdeling.

## 2. Downloads

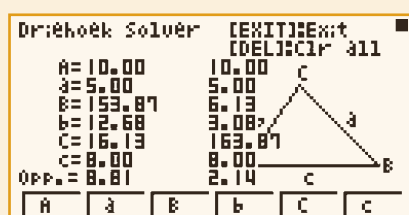
Een programma voor berekeningen in een driehoek bestaat al lang, maar tot nu toe hebben leerlingen dit nooit gebruikt (nooit kunnen vinden?). Mijn leerlingen gebruiken alleen programma's die ik hun geef, en ook leerlingen van wie ik de tweede correctie deed, hebben kennelijk geen bijzondere extra programma's. Toch zijn er op internet veel programma's te vinden.

Op de website van Casio Worldwide<sup>[2]</sup> vond ik een pas gereedgekomen *Add-in* product, genaamd *Geometry*, dat geschikt is voor de Casio fx-9860G. Via een menu-icoon is dat programma net zo simpel aan te zetten als bijvoorbeeld *Recursie*. Dit programma kunnen leerlingen wel vinden, want onlangs heeft een leerling *Physium* (ook een *Add-in*) vanaf deze plek op internet gehaald. Geef bij *Geometry* de zijden van een driehoek de juiste lengtes en je kunt alle hoeken en ook de oppervlakte opvragen. Ook andere figuren kunnen worden gebruikt.

Het downloaden op een grafische rekenmachine met USB-aansluiting gaat net zo eenvoudig als een liedje op je MP3-speler zetten. Dat kan iedere leerling wel.



figuur 4 Driehoek Solver; nog aan te vullen met A=10



figuur 5 Driehoek Solver: twee oplossingen

## 3. Opslagruimte voor spiekbriefjes

In het steeds groter wordende geheugen kunnen echt heel veel spiekbriefjes. De discussie 'wel of geen formulekaart' is een gepasseerd station: de hele formulekaart kan in de machine gezet worden, met getallenvoorbeelden en zelfs met oplossingsvoorbeelden.

Maar de trend om veel te kunnen vinden en niet alles echt paraat te hebben zal zich wel doorzetten – en is dit nu echt een probleem? Voor natuur- en scheikunde staat in het informatieboek BINAS ook alles wat ik vroeger uit mijn hoofd moest kennen en zelfs nog veel meer.

Hoe meer je kunt vinden op je grafische rekenmachine, hoe meer je uit je hoofd moet weten. Bij een open-boek-repetitie kun je toch ook niet de hele tijd zitten bladeren en toch je werk op tijd af hebben? Gun een leerling zijn zekerheid bij het twijfelen aan een enkele formule. Als de Casio fx-9860G SD met een mogelijk geheugen van 1 GB gebruikt wordt, dan kan er echt veel te veel in. Hoe meer hoe beter, denk ik dan.

## Oplossing: 'Bereken wiskundig'

Het niet gebruiken van de cosinusregel was de aanleiding voor dit artikel. Als ik kennis over de cosinusregel en de bijbehorende algebraïsche vaardigheden wil toetsen, moet ik dat in de vraag opnemen. 'Bereken exact' vind ik daarvoor geen goede manier. Het antwoord is in dat geval immers  $\arccos(-\frac{29}{2\sqrt{680}})$ , en dat bedoelde ik niet. Het is ook erg ongebruikelijk om hoeken exact te vragen, als er dit soort antwoorden uitkomen.

In mijn schoolexamens (SE) schreef ik tot nu toe: 'bereken zonder plotten'. Daar kwam al snel bij: '... zonder *solver* en zonder programma's'. Maar wat moet er nog meer bij? Zo'n opsomming wordt veel te lang.

Dus heb ik met mijn klassen een afspraak gemaakt. Wil ik een berekening zien die ligt tussen 'bereken' en 'bereken exact', dan schrijf ik: 'Bereken wiskundig'.

De betekenis hiervan is: los exact op, maar toegestaan is om op de grafische rekenmachine de knoppen voor wortel, macht, sin, cos, tan, ln, log en hun inversen te gebruiken.

Dit is ook een oplossing voor centrale eindexamens (CE). Als deze derde manier van vragen landelijk ingevoerd wordt, hoeven we ook geen examens in twee delen te gebruiken, een deel zónder en een deel mét grafische rekenmachine.

Mijn leerlingen vinden het niet vreemd dat ik op deze manier méér van ze vraag dan alleen plotten en snijpuntbepaling. Ze kunnen er blijkbaar goed mee leven.

Zo maak ik op dit moment verschil tussen SE en CE. Op het CE mag van mij de grafische rekenmachine ruimer ingezet worden dan op het SE, en op het CE geef ik met plezier zoveel mogelijk punten aan mijn leerlingen. Op het SE ben ik strenger in de leer. Mijn leerlingen scoren op het SE dan ook doorgaans wat lager dan op het CE.

## Discussie

In een gesprek met een wiskundedocent van een andere school bleek dat hij zijn leerlingen de normale verdeling nog met een Z-waarde leert. Ik vond dat jaren geleden al uit de tijd. Het was handig toen er nog met een tabel gewerkt moest worden, maar nu niet meer. Hij vond tot mijn verbazing weer wel dat leerlingen (na een tijdje eerst zelf berekenen) een programma voor de hyper-

geometrische verdeling mogen gebruiken. Hier was ik juist tegen, omdat je met gebruikmaking van een dergelijk programma niet meer kunt testen of de leerlingen aan volgordes denken. Ook wil ik zien of ze, bij vijf trekkingen met drie harten, de twee niet-harten-kaarten niet vergeten. Het is bijzonder te ontdekken dat je blijkbaar op je gevoel dit soort beslissingen neemt. Elkaar overtuigen lukt echt niet. Allebei kiezen we de ene keer voor het gemak en de andere keer voor het meer zelf laten nadenken door de leerling. Als docent leid je je leerlingen niet alleen op voor het eindexamen, maar moet je ze ook goed voorbereiden op een vervolgstudie – dus kies je niet steeds voor het gemak. Maar keuzes worden verschillend gemaakt.

### Zijn afspraken mogelijk?

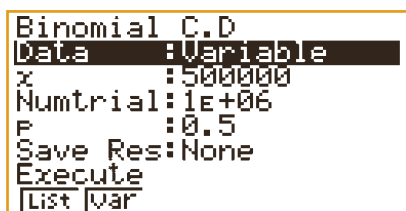
Toen ik een paar jaar geleden de tweede correctie havo wiskunde B12 uitvoerde, merkte ik dat maar weinig leerlingen van de andere school alle punten behaalden bij het oplossen ('bereken in twee decimalen') van een wortelvergelijking (kwadrateren, haakjes uitwerken, tweedegraads vergelijking oplossen, antwoord controleren), terwijl mijn eigen leerlingen gingen plotten en daarmee alle punten binnenhaalden. Zo'n verschil zou er bij een CE niet horen te zijn, vind ik.

Er moeten dus afspraken komen over toegestane en verboden mogelijkheden en programma's; je hoeft niet alles toe te laten wat mogelijk is. Grafische rekenmachines waarin computeralgebra-programma's zijn geladen (en die daarmee bijvoorbeeld afgeleide functies kunnen geven) mogen bijvoorbeeld niet gebruikt worden tijdens het CE. Een dergelijk verbod moet toch in meer gevallen opgelegd kunnen worden? Het zou handig zijn als alle docenten in Nederland op één lijn komen, zodat tijdens het CE sprake is van gelijke behandeling en daar niet meer de situatie optreedt dat sommige kandidaten alle punten krijgen door GR-gebruik en anderen minder omdat ze meer zelf doen en daarbij wat fouten maken.

Afspraken zijn belangrijk, maar ook moeilijk te maken, omdat de ontwikkelingen bij rekenmachines maar doorgaan. Hiervan twee voorbeelden.

- Onze onderbouwleerlingen hebben een eenvoudige fx-82ES rekenmachine.

Deze rekenmachine herleidt wortels. Dit onderwerp wordt door ons al sinds de tweede fase niet meer onderwezen en zou in september 2007 weer terugkomen in de bovenbouw. Op mijn vraag hierover aan de CEVO kreeg ik als antwoord: op de lijst van toegestane hulpmiddelen bij het CE van alle vakken staat ook de gewone rekenmachine, bij wiskunde hoort daar de GR bij, wiskundekandidaten mogen dus beide machines meebrengen naar het examen. Leerlingen in de examenklas vroegen al, hoe zinvol het is dit model erbij te kopen.



figuur 6 Binomiale verdeling met  $n = 1000000$

- We hebben sinds kort een grafische rekenmachine die bij een binomiale verdeling antwoorden geeft ongeacht de waarde van  $n$ . Een steekproefaantal van een miljoen is dus geen probleem meer. Onze leerlingen hoeven bij grote waarden van  $n$  niet meer over te stappen op een benadering met de normale verdeling, leerlingen met een ander apparaat moeten dat soms wel.

Zo zijn er al weer meer verschillen tussen verschillende merken rekenmachines. Kortom: het blijft tobben.

### Noten

- [1] (Red.) Uit het *Nomenclatuurrapport* Examenprogramma's havo/vwo van de NVvW (advies 1999): "Bereken" - Hierbij moet de berekening altijd opgeschreven worden; het antwoord mag ook een met de (grafische) rekenmachine gevonden antwoord zijn. Bij het gebruik van de grafische rekenmachine moet duidelijk worden aangegeven hoe men tot het antwoord komt. Wanneer een antwoord wordt vereist dat langs algebraïsche weg en niet via benaderingen met de (grafische) rekenmachine dient te worden gevonden, wordt dat in de vraagstelling expliciet aangegeven. Dit kan op de volgende manier: "Bereken (eventueel met een toevoeging als 'langs algebraïsche weg' of 'met differentiëren' of iets dergelijks) de exacte waarde van ..."
- [2] [http://world.casio.com/edu/product/fx9860g/geo\\_9860.html](http://world.casio.com/edu/product/fx9860g/geo_9860.html)

### Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent wiskunde aan het Willem de Zwijger College in Bussum. E-mailadres: [biesheuvel@zonnet.nl](mailto:biesheuvel@zonnet.nl)

# Contexten en eindexamens

[ Jan van de Craats ]

In haar *Standpunt ten aanzien van de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later*<sup>[1]</sup> pleit de resonansgroep wiskunde voor splitsing van het centrale schriftelijke eindexamen (CE) voor alle wiskundevakken van havo en vwo in twee delen: een deel zonder hulpmiddelen (grafische rekenmachine en formulekaart) en een deel met hulpmiddelen. Daarnaast doet de resonansgroep de aanbeveling de rol van contexten in het wiskundeonderwijs te heroverwegen. In dit artikel zal ik nader ingaan op enige achtergronden van deze voorstellen. De bijlage (opgenomen na de Noten) bevat een chronologisch overzicht van de recente ontwikkelingen met betrekking tot de examenprogramma's.

## Contexten in het wiskundeonderwijs

Over de rol van contexten in het wiskundeonderwijs bestaan verschillende opvattingen. Consensus is er echter over het feit dat contexten een belangrijke rol kunnen spelen bij de introductie van nieuwe begrippen. Denk bijvoorbeeld aan goniometrische functies, e-machten en logaritmen. Of aan kansrekening en statistiek. Verder zijn alle betrokkenen het erover eens dat contexten bij speciale projecten inspirerend en motiverend kunnen werken, bijvoorbeeld bij praktische opdrachten en profielwerkstukken.

In zulke gevallen kan ook uitgebreid aandacht worden besteed aan kritische modelvorming, dat wil zeggen aan de vertaling van de context naar een wiskundig model en een discussie van de validiteit van die modelkeuze. Dit is van groot belang bij vrijwel alle toepassingen van de wiskunde. Ook bij het nieuwe verdiepvak wiskunde D voor havo en vwo zullen juist dit soort aspecten aan de orde kunnen komen.

Contexten, met aandacht voor de bijbehorende wiskundige modelvorming, vormen zo inderdaad een verrijking van het wiskundeonderwijs. Ze vereisen echter vaak een grote inzet van docenten en leerlingen en kosten dan ook veel tijd. Als je zulke contexten serieus aanpakt, zul je je er namelijk terdege in moeten verdiepen. Maar er is ook een ander gebruik van contexten in het wiskundeonderwijs, en daarop is de laatste tijd steeds meer kritiek te horen. Niet alleen in publicaties van de resonansgroep wiskunde, maar bijvoorbeeld ook in het visiedocument 'Rijk aan betekenis'<sup>[2]</sup> van de commissie Toekomst

Wiskundeonderwijs (cTWO). Die kritiek richt zich op gekunstelde contexten waarin formules ongemotiveerd uit de lucht komen vallen en waarin het verhaal alleen maar een aanleiding is om wat te rekenen of wat met formules te stoeien. Wie de huidige schoolboeken inkijkt of recente eindexamenopgaven raadpleegt, komt er tientallen voorbeelden van tegen.

Zulke contexten zijn naar mijn stellige overtuiging schadelijk en contraproductief. Ze geven namelijk een volstrekt verkeerd beeld van de manier waarop wiskunde in de beroepspraktijk, in het onderzoek en in het vervolgonderwijs wordt gebruikt. Bovendien frustreren ze het ontwikkelen van een kritische houding met betrekking tot wiskundige modelvorming. Je moet immers meestal de gegeven context kritiekloos aanvaarden omdat je anders de som niet kunt maken.

## Contexten in examenopgaven

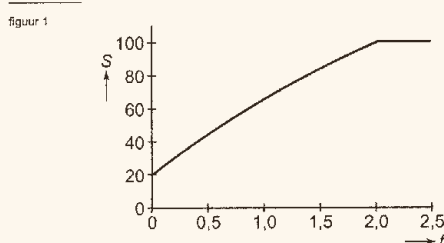
Elke docent weet hoe belangrijk de rol van het centraal schriftelijk eindexamen (CE) voor het wiskundeonderwijs is. Het visiedocument<sup>[2]</sup> van cTWO onderstreept dit: *Het CE is in Nederland in de praktijk een richtinggevende standaard voor het niveau van het schoolexamen en het onderwijs als geheel – scholen richten zich met het schoolexamen immers veelal op het CE. Daarmee bepaalt het voor een belangrijk deel de invulling van de eindtermen.* Als je dus veranderingen in het wiskundeonderwijs aan wilt brengen, kun je niet om de rol van de eindexamens heen.

En dat veranderingen noodzakelijk zijn, met name bij de havo- en vwo-vakken wiskunde A en wiskunde B, staat buiten kijf. Er is de afgelopen tien jaar namelijk een aansluitingsprobleem ontstaan van voortgezet onderwijs naar hoger onderwijs. Aankomende studenten vertonen een ernstig gebrek aan rekenvaardigheid, formulevaardigheid en kennis van elementaire functies. Het is niet toevallig dat het ontstaan van die aansluitingsproblematiek samenvalt met de introductie van de grafische rekenmachine (GR) en de formu-

## Sauna

Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Dan geldt:  $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$ . Hierin is  $S$  de temperatuur in de sauna in graden Celsius en  $t$  de tijd in uren vanaf 15.00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100 °C. Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden. In figuur 1 staat de grafiek van  $S$ .



- 4p 1 ☐ Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.
- 4p 2 ☐ Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de temperatuur in de sauna toeneemt om 16.00 uur. Geef je antwoord in tienden van graden Celsius per minuut.
- Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die  $t$  uitdrukt in  $S$ .
- 4p 3 ☐ Druk  $t$  uit in  $S$ .

figuur 1 Een examenopgave  
vwo wiskunde B, 2006

|                                                      |                                                                                          |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9. De oplossing van de vergelijking $e^{2x} = 16$ is | A. 35%                                                                                   |
| A. $\ln(4)$                                          | B. 39%                                                                                   |
| B. $\ln(8)$                                          | C. 21%                                                                                   |
| C. $\frac{(\ln(4))^2}{2}$                            | D. 5%                                                                                    |
| D. $\ln(64)$                                         | <i>E-machten en logaritmen worden traditioneel slecht gemaakt, ook met formulekaart.</i> |
|                                                      | Antwoord: A                                                                              |

figuur 2 Een opgave uit de instaptoets 2006  
van de drie technische universiteiten

lekaart als toegestane hulpmiddelen bij het eindexamen. Ik zal dat illustreren aan de hand van enige vwo-eindexamenopgaven van vorig jaar.

Maar voordat ik aan die voorbeelden begin, wil ik een belangrijke opmerking maken. Niets is gemakkelijker dan het bekritisieren van eindexamenopgaven. De vele eisen waaraan zulke opgaven moeten voldoen, leggen de samenstellers ervan enorme beperkingen op. Prachtige ideeën worden in de loop van het constructieproces niet zelden steeds verder uitgehouden omdat er bij zo'n examen absoluut geen ongelukken mogen gebeuren. Het examen moet maakbaar zijn en voldoen aan de verwachtingen die leerlingen en leraren hebben. Juist omdat ik zelf jarenlang voorzitter geweest ben van de sectie wiskunde van de CEVO, weet ik hoe zorgvuldig de examenprocedures worden doorlopen en met hoeveel inzet en deskundigheid de constructiegroepen tewerk gaan.

De opmerkingen over examenopgaven hieronder zijn daarom niet bedoeld als kritiek op de ontwerpers of de CEVO. Ze willen slechts de mechanismen blootleggen die resulteren in het feit dat veel studenten het hbo of de universiteit binnengaan met een voldoende examencijfer voor wiskunde, maar niettemin toch niet beschikken over de wiskundige vaardigheden die voor het vervolgonderwijs noodzakelijk zijn. Dat wordt duidelijk uit de resultaten van diagnostische instaptoetsen wiskunde die het hoger onderwijs afneemt en die volledig betrekking hebben op officieel vastgestelde havo- of vwo-stof. Intensieve bijspijker-cursussen zijn het gevolg. In het artikel <sup>[6]</sup> van André Heck en Nellie Verhoef over het MathMatch-project van de Digitale Universiteit wordt van al deze bijspijkeractiviteiten een uitgebreid overzicht gegeven.

### Een examenopgave vwo wiskunde B

**Figuur 1** laat de gemeenschappelijke eerste opgave zien van de vwo-examens wiskunde B1 en wiskunde B12 van 2006 (eerste tijdvak; zie [4]). Het is een typisch voorbeeld van een opgave waarin noch de context (een sauna, in dit geval), noch de modelvorming een wezenlijke rol spelen. De context fungeert slechts als ruis. De wiskundige kern van de opgave ligt besloten in de formule  $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$



In vraag 1 moeten de kandidaten de vergelijking  $S(t) = 100$  oplossen met behulp van de grafische rekenmachine (GR). In vraag 2 gaat het om de berekening van  $S'(100)$ . De benodigde formule voor de afgeleide van de e-macht en de kettingregel staan op de formulekaart en de rest gaat met de GR. In vraag 3 moet  $t$  als functie van  $S$  worden geschreven. De essentiële formule hierbij: uit  $e^A = B$  volgt  $A = \ln B$ , is weer te vinden op de formulekaart.

Dit is de enige opgave in het examen waarbij de voor het vervolgonderwijs zo belangrijke e-machten en logaritmen een rol spelen. Hun kenmerkende eigenschappen worden niet getoetst: GR en formulekaart doen al het werk. Wat het gevolg daarvan is, laat een opgave zien uit de instaptoets van de drie technische universiteiten die dezelfde kandidaten drie maanden later voorgezet kregen als ze aan een technische studie begonnen. Gebruik van GR en formulekaart waren daarbij niet toegestaan.

Die toets bestond uit 22 korte meerkeuzevragen. In **figuur 2** staat opgave 9.

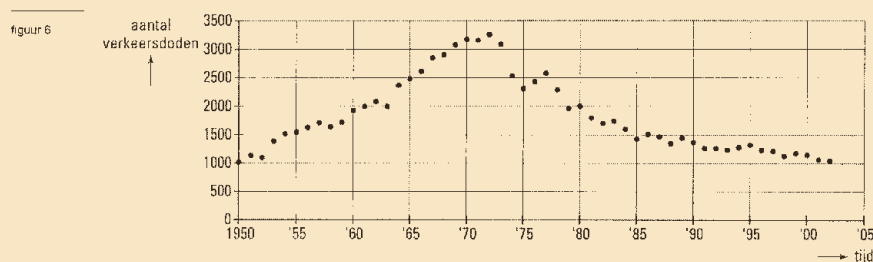
De percentages en het commentaar zijn van de Universiteit Twente (zie ook [3]). Slechts 35 procent kon deze opgave de baas. Niet minder dan 39 procent denkt dat  $\frac{1}{2} \ln 16 = \ln 8$ . Verder denkt 21 procent dat  $\ln 16 = (\ln 4)^2$  en naar wat de overige 5 procent heeft gedacht, kan men slechts gissen. Duidelijk is wel dat 65 procent van de populatie geen flauw idee heeft van de eigenschappen van logaritmen. En dat voor studenten aan een TU, met vrijwel allemaal wiskunde B12 in hun pakket!

Het is natuurlijk maar één voorbeeld, maar de andere 21 vragen geven hetzelfde beeld: een volstrekt gebrek aan de wiskundige vaardigheden die voor een technische studie noodzakelijk zijn. Instaptoetsen aan andere universiteiten bij de bètarichtingen vertonen soortgelijke resultaten. Ook bij de overgang van havo wiskunde B naar de exacte hbo-richtingen zijn er zulke ernstige aansluitingsproblemen, en ook daar kunnen de aard van de eindexamenopgaven en de rol daarbij van GR en formulekaart als belangrijkste oorzaak worden aangemerkt.

### Examenopgaven vwo wiskunde A

Het vak wiskunde A bereidt voor op opleidingen in de economische en de (para-)medische sector (wiskunde A havo) respectievelijk universitaire studies met

In **figuur 6** zie je een grafiek van het aantal verkeersdoden voor de jaren 1950 tot en met 2002.



In **figuur 6** is te zien dat het aantal verkeersdoden het grootst was in 1972. Toen waren er 3264 verkeersdoden. Door een actief beleid inzake verkeersveiligheid is sinds die tijd het aantal verkeersdoden afgenomen tot 1066 in het jaar 2002. Weliswaar steeg het aantal verkeersdoden in sommige jaren, maar toch is er een duidelijke dalende trend waarneembaar in de periode 1972-2002. We kunnen deze trend beschrijven met een model waarbij het aantal verkeersdoden exponentieel afneemt van 3264 in 1972 tot 1066 in 2002. Volgens dit model zou het aantal verkeersdoden tussen 1972 en 2002 jaarlijks met een vast percentage dalen.

4p 18 □ Bereken dit percentage.

Het verloop van het aantal verkeersdoden, zoals je dat ziet in **figuur 6**, kan bij benadering worden beschreven met de volgende formule:

$$N = 0,8 + \frac{t + 2}{10 + (0,04t)^{6,8}}$$

In deze formule is  $N$  het aantal verkeersdoden per jaar in duizendtallen en  $t$  is de tijd in jaren vanaf 1950, dus  $t = 0$  in 1950.

Deze formule is slechts een model dat hoort bij **figuur 6**. Daarom komt de grafiek die hoort bij de formule niet precies overeen met de grafiek uit **figuur 6**. Een belangrijk verschil is bijvoorbeeld dat volgens de formule de piek in het aantal verkeersdoden niet in 1972 plaatsvond, maar in een ander jaar.

3p 19 □ Onderzoek in welk jaar de piek plaatsvond volgens bovenstaande formule.

figuur 3 Vragen uit het examen vwo wiskunde A12, 2006

een sociaal, economisch, bedrijfskundig of medisch-biologisch karakter (wiskunde A vwo). Ook daarbij zijn er ernstige aansluitingsproblemen, die in alle opzichten vergelijkbaar zijn met de aansluitingsproblemen van wiskunde B. Ook daar is er een grote discrepantie tussen de officiële examenstof, die ook in het vervolgonderwijs gebruikt wordt, en de wiskundige vaardigheden die de aankomende studenten daadwerkelijk beheersen, vooral op het gebied van de analyse. En ook daar kunnen de aard van de examenopgaven en de rol van de GR en de formulekaart als de belangrijkste oorzaken van dit aansluitingsprobleem worden aangemerkt. Meer nog dan bij wiskunde B worden de examenopgaven bij wiskunde A door contexten gedomineerd. Het Visiedocument<sup>[2]</sup> van cTWO zegt daarover: *In de examens wiskunde A bestaat er een*

*traditie van opgaven waarin de context essentieel is voor de vraag: de context is feitelijk de vraag. De commissie beschouwt dit als een goede situatie (...).* De vervolgoopleidingen, met name de universitaire studierichtingen economie en bedrijfskunde, gezamenlijk goed voor duizenden eerstejaarsstudenten per jaar, denken hier echter heel anders over, zoals ik nog zal laten zien! Maar eerst geef ik weer enige voorbeelden om te illustreren wat er getoetst wordt en hoe er wordt getoetst. Deze voorbeelden zijn ontleend aan het eerste tijdvak van het examen vwo wiskunde A12 van 2006. Ze illustreren ieder op hun manier ook de bezwaren die ik hierboven geformuleerd heb tegen het gebruik van contexten in examenvraagstukken: gekunstelde vragen, formules die uit de lucht komen vallen en geen aandacht voor kritische modelvorming. Het zijn zulke examenopgaven

waartegen de resonansgroep in haar *Standpunt*<sup>[1]</sup> bezwaar maakt: *De resonansgroep is van oordeel dat examenopgaven alleen in een context geplaatst mogen worden wanneer die context bestand is tegen een kritische analyse en wanneer de vraagstelling in de opgave uitmondt in het oplossen van zinnige problemen met daartoe geëigende wiskundige hulpmiddelen. Zij ziet liever contextloze opgaven dan opgaven waarin niet aan deze voorwaarden is voldaan.*

**Figuur 3** geeft twee vragen uit een grote opgave over verkeersslachtoffers in Nederland. De grafiek laat het jaarlijkse aantal verkeersdoden zien in de periode van 1950 tot 2002. Zo op het oog is er tot het begin van de jaren 70 een vrijwel lineaire toename terwijl er daarna ('door een actief beleid inzake verkeersveiligheid') een dalende trend is waar te nemen. Vraag 18 heeft betrekking op die tweede periode. Als model wordt exponentiële daling verordonneerd, en de kandidaten wordt gevraagd het jaarlijkse dalingspercentage volgens dit model te berekenen, uitgaande van 3264 doden in 1972 en 1066 doden in 2002. Dit is een vraag waar de kandidaten goed op zijn voorbereid, en met behulp van de GR is het antwoord snel gevonden (*zie figuur 4 op pag. 265*).

Toch wringt er iets, zoals uit de inleidende tekst bij de volgende opgave ook al blijkt: als er werkelijk sprake is van exponentiële afname, gaat het aantal verkeersslachtoffers op den duur naar nul, en dat is niet erg realistisch. Het model wordt daarom bijgesteld. Voor de hand ligt om een constante bij de exponentiële daling op te tellen zodat er een functie van de vorm  $A \cdot g^x + B$  ontstaat. De constanten kun je vervolgens zo kiezen dat de data in de periode 1972–2002 er zo goed mogelijk bij passen.

In plaats daarvan toveren de examenmakers een totaal andere functie uit de hoge hoed die pretendeert het hele traject vanaf 1950 te beschrijven. Wat voor een indruk moeten leerlingen krijgen van een dergelijke wijze van modelvorming, waarbij twee duidelijk gescheiden trajecten tot één functievoorschrift worden verenigd?

Ook van de bijbehorende vraag 19 is de realiteitswaarde vrijwel nihil. Men zou er nog vrede mee kunnen hebben als ermee getoetst zou worden of leerlingen enig begrip hebben van de manier waarop in de

wiskunde een maximum wordt bepaald met behulp van de afgeleide, maar ook daarvan is geen sprake. Blijkens het correctievoorschrift (zie weer *figuur 4*) wordt al het werk gedaan door de GR.

Voor alle duidelijkheid herhaal ik weer mijn opmerkingen van hierboven: deze kritiek is niet bedoeld om de examenmakers in een kwaad daglicht te stellen: het examen voldoet ongetwijfeld volledig aan de verwachtingen van leraren en leerlingen, maar vanuit een hoger standpunt bekeken stel ik de vraag aan de orde of zulke examenvragen goed voorbereiden op de wiskunde die in de vervolgopleidingen wordt gebruikt.

Dat haast al het wiskundige werk in het wiskunde A examen aan de GR kan worden gedelegeerd, blijkt ook uit een andere vraag uit hetzelfde examen (*zie figuur 5*). Het gaat hierbij om een prooi-roofdiervraagstuk waarvoor een wortelfunctie als model wordt geponeerd. Gevraagd wordt de afgeleide te schetsen en aan de hand daarvan twee kwalitatieve uitspraken toe te lichten. Uit het correctievoorschrift (*zie figuur 6*) blijkt dat vaardigheid in het differentiëren voor het beantwoorden van deze vraag niet nodig is: je kunt de GR de grafiek van de afgeleide laten tekenen.

Ik merk nog op dat dit de *enige* vraag in het gehele examen is waarbij differentiëren ter sprake komt. Het voorstel van de PEP-commissie vwo-wiskunde A om de rekenregels voor differentiëren niet meer te toetsen in het centraal schriftelijk eindexamen lijkt dus een bevestiging te zijn van een bestaande praktijk. Op advies van de resonansgroep heeft minister Van der Hoeven dit voorstel in haar besluiten van 14 december 2006 echter afgewezen: de rekenregels blijven examenstof en zullen in de toekomst dus weer worden geëxamineerd (zie bijvoorbeeld de homepage van de resonansgroep<sup>[1]</sup> voor de besluiten van de minister).

### Welke wiskunde willen de universitaire opleidingen economie en bedrijfskunde?

Drs. Herman ten Napel, lid van de resonansgroep wiskunde en als docent wiskunde verbonden aan de faculteit economie en bedrijfskunde van de Universiteit van Amsterdam, organiseert jaarlijks een bijeenkomst van wiskunde-

docenten aan universitaire opleidingen economie, econometrie en bedrijfskunde. Op 29 juni 2005 heeft hij namens die opleidingen een brief aan de CEVO verstuurd over de aansluitingsproblematiek wiskunde, en op 2 december 2005 een brief aan (toenmalig) staatssecretaris Rutte over hetzelfde onderwerp. De opleidingen klagen daarin over de discrepantie tussen het officiële examenprogramma vwo wiskunde A en de wiskundige vaardigheden die aankomende studenten met dat diploma op zak daadwerkelijk bezitten: *Het manipuleren met wat meer ingewikkelde algebraïsche formules, (wortels, breuken, haakjes, exponenten e.d.) ontbreekt vrijwel volledig. Het differentiëren van functies beperkt zich tot de meest eenvoudige machtsfuncties, terwijl de wat verdergaande differentieer-regels (productregel, kettingregel) nooit aan bod komen. Dit heeft tot gevolg dat er op sommige scholen zelfs een neiging bestaat om de hele differentiaalrekening maar over te slaan, want "daar wordt toch (vrijwel) niets over gevraagd".*

In het kader van zijn lidmaatschap van de resonansgroep heeft Ten Napel zijn destijds opgestelde lijst van gewenste wiskundige onderwerpen (die allemaal ook tot de officiële examenstof vwo wiskunde A behoren) aan de wiskundeleraars van de faculteiten economie en bedrijfskunde van Groningen, Rotterdam, Amsterdam (VU en UVA), Wageningen, Maastricht, Tilburg en Utrecht ter goedkeuring voorgelegd. De aldus geaccordeerde lijst is beschikbaar op zijn homepage (toegankelijk via de site van de resonansgroep<sup>[1]</sup>). Waar het om gaat zijn zaken als rekenvaardigheid, formulevaardigheid, kennis van elementaire functies en differentiaalrekening. Niet de stof die thans in wiskunde A wordt geëxamineerd, maar de traditionele wiskundige vaardigheden. Die worden vervolgens in voortgezette wiskundevakken bij de economie- en bedrijfskundestudie gebruikt voor onderwerpen als integraalrekening, functies van meer variabelen, partiële afgeleiden, convexiteit, gradiënt *et cetera*.

Een signaal dat de nijpende situatie bij de economie en de bedrijfskunde onderstreept, verscheen op 20 januari jl. in een artikel in NRC Handelsblad over de prestaties van Nederlandse eerstejaarsstudenten aan de Universiteit van Maastricht in vergelijking met die van hun Duitse medestudenten.

Een uitgebreider artikel hierover van de hand van Dirk Tempelaar is verschenen in het maartnummer 2007 van Nieuw Archief voor Wiskunde<sup>[5]</sup>.

Wat er thans aan veel economie-faculteiten gebeurt, is een stoomcursus van 7 tot 8 weken waarin de gehele analyse-stof van het vwo in hoog tempo, en zonder enige aandacht voor contexten, wordt herhaald, te beginnen met haakjes uitwerken, en eindigend met de rekenregels voor differentiëren. Natuurlijk is het niet eenvoudig voor de studenten om zich de stof in zo'n tempo eigen te maken, maar ze moeten wel, want daarna wordt erop voortgebouwd, en in sommige gevallen (bijvoorbeeld aan de UVA) volgt een negatief bindend studieadvies als ze het bijbehorende tentamen niet halen.

Veel leraren zeggen dat dit volstrekt onterecht is: volgens hen moeten de faculteiten aansluiten op de schoolstof en niet omgekeerd. Maar waarom eigenlijk? Waar staan de letters vwo ook al weer voor? En laat men zich ook goed realiseren dat de leerlingen opgaven als die van de eindexamens en de schoolboeken nooit in hun studie tegen zullen komen. Daar is het vak zelf de context. De wiskunde is een van de instrumenten die ze gewoon moeten kunnen gebruiken, net als Engels of Nederlands.

Denk overigens niet dat de inhoud van de wiskundevakken aan de opleidingen economie en bedrijfskunde vooral bepaald wordt door hobby's van de daar aangestelde wiskundedocenten. Elk uur voor een steunvak als wiskunde moet binnen de faculteit voortdurend inhoudelijk verantwoord worden: als iets niet gebruikt wordt in het hoofdvak, wordt het onmiddellijk geschrapt want overal heersen urentekorten en overal staan hoofdvakdocenten klaar om overschietende uren over te nemen. Hetzelfde geldt ook voor alle andere universitaire en hbo-richtingen waar wiskunde als steunvak wordt gegeven.

Een andere tegenwerping die soms gemaakt wordt, is dat economie en bedrijfskunde niet de enige studies zijn waarop wiskunde A voorbereidt. Inderdaad, maar in studententaallen uitgedrukt gaat het hier wel om duizenden eerstejaarsstudenten per jaar. Aan de UVA bijvoorbeeld zijn er zo'n 500 eerstejaarsstudenten, meer dan 300 ervan

#### Maximumscore 4

18 □ • De groeifactor per 30 jaar is  $\frac{1066}{3264}$  ( $\approx 0,3266$ )

- De groeifactor per jaar is  $\left(\frac{1066}{3264}\right)^{\frac{1}{30}}$
- De groeifactor is (ongeveer) 0,963
- Dat is een jaarlijkse afname met 3,7% (of 4%)

of

- het opstellen van de vergelijking  $3264 \cdot g^{30} = 1066$
- beschrijven hoe met de GR deze vergelijking kan worden opgelost
- De groeifactor  $g$  is (ongeveer) 0,963
- Dat is een jaarlijkse afname met 3,7% (of 4%)

#### Maximumscore 3

- 19 □ • het gebruik van een geschikte optie van de GR om de waarde van  $t$  van de piek te berekenen
- De piek treedt op bij  $t = 27$
  - Dat is in het jaar 1977

figuur 4 Uit het correctievoorschrift bij de vragen 18 en 19 van figuur 3

Een roofdier van soort C is in totaal 1 uur onderweg. Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule:

$$r = 4\sqrt{t-1} \text{ als } t > 1 \text{ (voor het eerste uur geldt: } r = 0)$$

Hierin is  $t$  de tijd in uren en  $r$  de hoeveelheid gevonden voedsel in ee.

Deze opbrengstfunctie  $r$  heeft voor  $t > 1$  de volgende twee eigenschappen:

- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate  $t$  groter wordt.

Deze twee eigenschappen zijn zichtbaar in de grafiek van  $r$ , maar ze kunnen ook worden verklaard aan de hand van de grafiek van de afgeleide van  $r$ .

- 5p 11 □ Schets de grafiek van de afgeleide van  $r$  en verklaar de beide eigenschappen aan de hand van deze grafiek.

figuur 5 Een andere vraag uit het examen vwo wiskunde A12, 2006

11 □ •  $r = 4(t-1)^{\frac{1}{2}}$

•  $r' = \frac{2}{\sqrt{t-1}}$  (of  $r' = 2 \cdot (t-1)^{-\frac{1}{2}}$ )

- een schets van de grafiek van  $r'$
- 1e eigenschap:  $r'$  is overal positief, dus moet  $r$  overal stijgen
- 2e eigenschap: de grafiek van  $r'$  is overal dalend, dus de toename van de opbrengst is steeds geringer

of

- de GR instellen op het tekenen van de grafiek van  $r'$
- een schets van de grafiek van  $r'$
- 1e eigenschap:  $r'$  is overal positief, dus moet  $r$  overal stijgen
- 2e eigenschap: de grafiek van  $r'$  is overal dalend, dus de toename van de opbrengst is steeds geringer

figuur 6 Uit het correctievoorschrift bij vraag 11 in figuur 5

volgen bijspijkeronderwijs wiskunde (zie [6]). Het vwo-vak wiskunde A heeft, ook in de plannen van cTWO, de opdracht leerlingen voor deze studies een goede basis te verschaffen. Op papier is dit in orde gezien de exameneisen, maar in de praktijk worden die niet gerealiseerd.

### De splitsing van de eindexamens

Uit het bovenstaande zal duidelijk zijn geworden dat de huidige examenpraktijk, met daarbij het onbeperkt gebruik van grafische rekenmachine en formulekaart, het aanleren en onderhouden van rekenvaardigheden, formulevaardigheden, kennis van functies en calculus belemmert, en in de praktijk zelfs vrijwel helemaal verhindert, zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B, en zowel voor havo als voor vwo. Want ook al heb ik korthedshalve mijn voorbeelden uit vwo-examens gehaald, voor de havo geldt precies hetzelfde.

De resonansgroep heeft zich hierover gebogen, en zich afgevraagd of het introduceren van parameters in de examenopgaven soelaas zou kunnen bieden. De huidige grafische rekenmachines kunnen daarmee niet overweg, en zo zouden formulevaardigheden toch getoetst kunnen worden. Maar in de eerste plaats staat de techniek niet stil: binnen korte tijd zullen grafische rekenmachines met computeralgebra gemeengoed zijn, en het is erg kunstmatig om die dan te blijven verbieden. Veel beter is het, en dat is ook de keuze van de resonansgroep, om een deel van de examens zonder GR en formulekaart af te nemen. Dat geeft een duidelijk signaal aan het onderwijs, en het zal naar verwachting ook de instaptoetsen en bijspijker cursussen overbodig maken. Natuurlijk moet over de precieze realisatie hiervan uitgebreid overleg gepleegd worden zodat leerlingen en leraren niet voor verrassingen worden geplaatst. Overleg hierover zal op korte termijn plaatsvinden. In haar besluiten van 14 december 2006 naar aanleiding van het standpunt van de resonansgroep schrijft minister Maria van der Hoeven: *Over die suggestie [nl. om de examens te splitsen – JvdC] zal de CEVO een nader oordeel geven, na overleg met betrokken vakdeskundigen, toetsdeskundigen en leraren/schoolleiders. Ook de resonansgroep realiseert zich, dat het hier alleen al om redenen van organisatie en belasting niet gaat om een eenvoudige zaak.*

**Dankbetuiging:** Graag dank ik Nan van Geloven en Wim Caspers voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

### Noten

- [1] Standpunt van de Resonansgroep wiskunde ten aanzien van de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later. Zie [www.resonansgroepwiskunde.nl](http://www.resonansgroepwiskunde.nl)
- [2] Rijk aan betekenis - Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs, Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO). Zie [www.fi.uu.nl/ctwo/](http://www.fi.uu.nl/ctwo/)
- [3] Instaptoetsen van de drie Technische Universiteiten en van de Universiteit van Amsterdam zijn beschikbaar op de website van het MathMatch-project van de Digitale Universiteit: [www.mathmatch.nl/onderwerpen.diag.php](http://www.mathmatch.nl/onderwerpen.diag.php)
- [4] De havo- en vwo-examens zijn o.a. te vinden op de volgende website: [www.eindexamens.leidenuniv.nl/](http://www.eindexamens.leidenuniv.nl/)
- [5] Dirk Tempelaar: *Onderwijzen of bijspijkeren?* In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vijfde serie, deel 8, nummer 1, maart 2007, pp. 55–59.
- [6] André Heck, Nellie Verhoef: *MathMatch, aansluitingsmodule voor wiskunde*. In: *Euclides* 82(5), maart 2007, pp. 187–190.

### Bijlage

#### Kort chronologisch overzicht van gebeurtenissen

- Begin 2006: Actie LieveMaria, debat Tweede Kamer.
- 31 januari 2006: Brief minister OCW aan de Tweede Kamer over wiskunde in de Tweede fase.
- 14 februari 2006: Tweede Kamer aanvaardt unaniem de voorstellen van de minister.
- 14 februari 2006: Tweede Kamer aanvaardt unaniem een motie die vraagt om instelling van een resonansgroep wiskunde met als taak de voorstellen van de Vernieuwingscommissie wiskunde (cTWO, zie Siersma) te beoordelen op hun doorstroomrelevantie.

- 23 augustus 2006: Installatie resonansgroep wiskunde.
- Augustus 2006: Tweede Kamer vraagt de resonansgroep ook commentaar te geven op de voorgestelde profielaanpassingen wiskunde voor de Tweede fase op de korte termijn.
- September 2006: cTWO publiceert het concept-visiedocument 'Rijk aan betekenis'.
- Begin november 2006: Resonansgroep publiceert haar *Standpunt* ten aanzien van de korte-termijnproblematiek.
- Begin november 2006: Resonansgroep publiceert een reactie op het concept-visiedocument cTWO.
- 14 december 2006: Minister publiceert haar besluiten met betrekking tot de profielaanpassingen.
- 7 februari 2007: cTWO publiceert definitieve versie visiedocument.

### Over de auteur

Jan van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en aan de Open Universiteit Nederland. Daarnaast is hij voorzitter van de Resonansgroep wiskunde.

Dit artikel is op persoonlijke titel geschreven. Het is de uitwerking van zijn voordracht tijdens de Eindconferentie op 15 februari 2007 aan de Universiteit Twente van het MathMatch-project (zie ook [6]). E-mailadres: [craats@science.uva.nl](mailto:craats@science.uva.nl)



# De lerarenopleiding bevroegd

[ Vincent Jonker, Ronald Keijzer, Monica Wijers ]

In dit artikel geven we een korte reflectie op een landelijke enquête, gehouden onder lerarenopleiders wiskunde (pabo, tweedegraads en eerstegraads). Deze enquête is uitgevoerd vanuit ELWleR, Expertisecentrum Lerarenopleiding Wiskunde en Rekenen.

## Expertisecentrum

In 2005 hebben VSNU, HBO-raad en OCW samen een beleidsagenda opgesteld, specifiek voor de lerarenopleidingen; dat is de beleidsagenda lerarenopleidingen 2005-2008, 'Meer kwaliteit en differentiatie: de lerarenopleidingen aan zet'. In deze beleidsagenda is aangegeven dat afspraken zullen worden gemaakt over landelijke centra voor inhoudelijke en vakdidactische expertise op een bepaald vakgebied, die deze expertise beschikbaar stellen aan de lerarenopleidingen en de scholen. Per december 2006 zijn acht vakdidactische expertisecentra actief. Voor rekenen/wiskunde is dit het Expertisecentrum Lerarenopleiding Wiskunde en Rekenen (ELWleR, [www.elwier.nl](http://www.elwier.nl)).

ELWleR is een samenwerkingsverband van enkele hogescholen, universiteiten en instellingen (penvoerder Freudenthal Instituut) die gezamenlijk een leergemeenschap willen vormen voor opleiders wiskunde en rekenen. Primaire doelgroepen zijn de opleiders van de pabo, de tweedegraads en de eerstegraads lerarenopleiding zowel aan HBO als aan universiteiten. De looptijd van ELWleR is twee jaar.

Vanuit verschillende hoeken werd al langer gevraagd om meer aandacht voor de lerarenopleiding (o.a. NVvW, 2005; cTWO, 2007). Het gaat er dan om de kwaliteit van de opleiding te kunnen waarborgen, in een tijd waarin het (wiskunde)onderwijs in rap tempo verandert. Zowel de instroom in de opleidingen als het afnemend beroepenveld zijn heterogener geworden. Niet in de laatste plaats hebben de veranderingen ook betrekking op het onderwijs op de lerarenopleidingen zelf. Het competentiegericht opleiden is gemeengoed geworden bij zowel de pabo als de tweedegraads-lerarenopleiding. Voor alle

opleidingen is het momenteel zoeken naar een goede balans tussen competentiegericht opleiden en voldoende aandacht voor vakdidactiek. Overigens, ELWleR wil niet alleen de aandacht richten op de opleiding (hoewel dat de primaire taak is), maar wil ook ondersteuning geven aan (landelijke) professionalisering van zittende docenten. Op basis van dit alles heeft ELWleR een aantal doelstellingen centraal gesteld:

- opleidingen en opleiders ondersteunen door middel van bundeling en kanalisering van specialistische kennis;
- de kwaliteit van de opleiding en professionalisering van leraren verhogen en waarborgen;
- stimuleren dat het aantal studenten in de lerarenopleiding toeneemt;
- afstemming lerarenopleidingen PO en VO.

Aan deze doelstellingen wordt gewerkt binnen de vier werkpakketten van ELWleR: materialen, forum, onderzoek en informatiepunt. Op de website van ELWleR kunt u hier meer over lezen.

Eén van de eerste activiteiten van het onderdeel informatiepunt van ELWleR is geweest na te gaan hoe de situatie op de lerarenopleidingen op dit moment is en hoe daarbij aansluitend de accenten in ELWleR precies gelegd moeten worden. Er is daarom gekozen een enquête te houden onder de lerarenopleiders rekenen/wiskunde, om te weten te komen waaraan op de opleidingen primair behoefte is. ELWleR zal overigens ook andere (secundaire) doelgroepen bevragen in een later stadium, waaronder studenten van de lerarenopleiding en zittende docenten.

## Enquête

Deze online enquête is afgenomen onder lerarenopleiders rekenen/wiskunde. Via bestaande netwerken (Panama, SLW,

Vadiwulo; zie Verwijzingen op pagina 270) zijn de opleiders zoveel mogelijk direct benaderd. De respons is met gemiddeld 38% redelijk te noemen. De respondenten hebben de volgende achtergrond.

|              | aantal respondenten | geschat aantal in NL | Respons |
|--------------|---------------------|----------------------|---------|
| Pabo         | 63                  | 180                  | 35 %    |
| Tweedegraads | 30                  | 66                   | 45 %    |
| Eerstegraads | 4                   | 9                    | 44 %    |

tabel 1 Aantal respondenten van de ELWleR enquête; N = 97.

Hoewel mogelijk vooral de actieve opleiders reageren, hopen we met deze opkomst toch een redelijk representatief beeld te kunnen schetsen van de lerarenopleidingen rekenen/wiskunde in Nederland. ELWleR wil overigens ook de band met lerarenopleidingen in Vlaanderen verstevigen, maar deze groep is in deze eerste enquête nog niet meegenomen.

We kijken nu naar de resultaten wat betreft leeftijd en geslacht.

|                  | leeftijd  |     |     | geslacht |     |
|------------------|-----------|-----|-----|----------|-----|
|                  | gemiddeld | min | max | vrouw    | man |
| Pabo             | 45        | 25  | 62  | 22       | 41  |
| Tweedegraads     | 49        | 32  | 61  | 6        | 24  |
| Eerstegraads ulo | 42        | 38  | 47  | 2        | 2   |

tabel 2 Leeftijd en geslacht; N = 97.

De spreiding in leeftijd (*zie figuur 1; op pagina 270*) is bij de universitaire lerarenopleiding het kleinst, maar daarbij moet wel opgemerkt worden dat het slechts om vier respondenten gaat.

Er is ook gevraagd naar het aantal jaren ervaring bij de opleiding. De verdeling in klassen is weergegeven in het cirkeldiagram *in figuur 2*. Ruim de helft van de respondenten heeft minder dan 10 jaar ervaring als lerarenopleider. Bij nadere analyse van de leeftijd zien we dat er relatief veel oudere lerarenopleiders zijn (met veel dienstjaren), en tevens een redelijke groep jongere lerarenopleiders

(met weinig dienstjaren). De midden-groep is minder vertegenwoordigd. We vermoeden dat deze leeftijdsopbouw (in combinatie met ervaringsjaren) representatief is voor de lerarenopleiding en beïnvloed is door schommelingen op de arbeidsmarkt en de daarmee samenhangende reorganisaties op de opleidingen.

De tweede set vragen gaat over het gebruik van (schriftelijk) materiaal. De meest gebruikte boeken zijn:

- voor de pabo: de TAL-boeken (Tussendoelen Annex Leerlijnen);
- voor de tweede- (en eerste)graads opleiding: de APS-reeks (thans in beheer bij SLW).

Wat betreft het eerstegraads gebied is er behoefte aan een nieuw 'handboek'. Het didactiekboek van Van Dormolen uit 1977 is nog steeds in gebruik, maar er is behoefte aan actualisering en aan reflectie op de recentere ontwikkelingen in het (wiskunde)onderwijs. Binnen ELWleR heeft de groep van eerstegraads lerarenopleiders afspraken gemaakt hoe gezamenlijk aan een nieuw handboek '*Katernen wiskunde/didactiek*' voor met name de eerstegraads opleiding gewerkt zal worden.

Bij de vragen over het gebruikte materiaal is ook gepeild waar nieuwe behoeften liggen. Vanuit de pabo is behoefte aan 'overzicht van leerlijnen' en 'praktische zelfverklarende didactiekboeken' en vanuit de tweedegraads lerarenopleiders is met name behoefte aan materiaal op het gebied van 'nieuwe didactiek in de onderbouw'. SLW/APS zijn er overigens ook al mee bezig om in deze behoefte te voorzien.

De derde set vragen in de enquête gaat over ict. Het blijkt dat de overgrote groep van lerarenopleiders actief gebruik maakt van de ELO (elektronische leeromgeving) die op de hogeschool of universiteit aanwezig is. Daarbij blijkt het vaak lastig om een 'eigen gezicht' voor de vakdidactiek rekenen/wiskunde aan te brengen. Omdat dergelijke leeromgevingen instituutsbreed worden ingezet bieden ze weinig ruimte voor vakspecifieke invullingen.

Vervolgens hebben we gevraagd welke 'informatiebronnen' op internet de opleiders regelmatig gebruiken. De volgende bronnen werden door de eerste en tweede graads opleiders het meest genoemd.

|                                            | aantal keer<br>genoemd |
|--------------------------------------------|------------------------|
| NVvW                                       | 17                     |
| WisWeb                                     | 16                     |
| WisFaq                                     | 16                     |
| Nieuwe Wiskrant                            | 13                     |
| Pythagoras                                 | 13                     |
| Kennisbank wiskunde (Ruud de Moor Centrum) | 12                     |

tabel 3 Online bronnen die (1e en 2e graads) docenten gebruiken; N = 34

De website van de NVvW blijkt dus de belangrijkste (digitale) informatiebron voor wiskundeopleiders te zijn. Alle opleiders geven aan het gebruik van deze bronnen ook aan te raden aan hun studenten.

De vierde set vragen betreft de perceptie van de lerarenopleiders ten aanzien van de lerarenopleiding. De gestelde vragen zijn:

1. De vakdidactiek (rekenen-)wiskunde van uw opleiding komt beter tot z'n recht dan vijf jaar geleden.
2. Ik kan op mijn opleiding op een adequate wijze invulling geven aan competentiegericht opleiden voor het vak wiskunde.
3. Ik heb een duidelijk beeld van de kennis en vaardigheden die studenten en (beginnende) leraren nodig hebben om in de praktijk adequaat (reken-)wiskundeonderwijs te verzorgen.
4. Ik krijg voldoende mogelijkheden om studenten adequaat voor te bereiden op het geven van (reken-)wiskundeonderwijs in de huidige onderwijspraktijk.
5. Ik beschik over voldoende materiaal (handboeken voor de docent, boeken voor de student, readers, digitale content, etc.) om studenten te begeleiden.

6. Ik ben – in het licht van het toekomstige beroep – in het algemeen tevreden over het niveau van studenten die aan de opleiding beginnen.
7. Ik kan voldoende kwaliteit leveren als lerarenopleider.

Deze vragen zullen via het 'forum' van ELWleR op diverse plaatsen nader bediscussieerd worden. De enquête (*zie figuur 3*) geeft alvast een eerste beeld.

Uit een nadere analyse van de resultaten blijkt het volgende:

- VO-opleiders denken significant (0,05) positiever over de ontwikkeling van de opleiding in de afgelopen 5 jaar dan pabo-opleiders.
- VO-opleiders denken significant (0,05) positiever over hun mogelijkheden om studenten voor te bereiden op de praktijk dan pabo-opleiders.
- Vrouwen staan significant (0,05) positiever ten opzichte van competentiegericht opleiden dan de mannelijke collega's, maar dat kan volledig verklaard worden vanuit het volgende punt, namelijk:

- Opleiders met meer ervaringsjaren en die met een hogere leeftijd hebben significant (0,05) meer moeite met competentiegericht opleiding dan hun jongere collega's. Vrouwen behoren in het algemeen tot de jongere collega's.

Een vijfde set vragen gaat over de behoefte aan onderzoek binnen de lerarenopleiding. Belangrijke onderzoeksthema's die hieruit naar voren komen zijn:

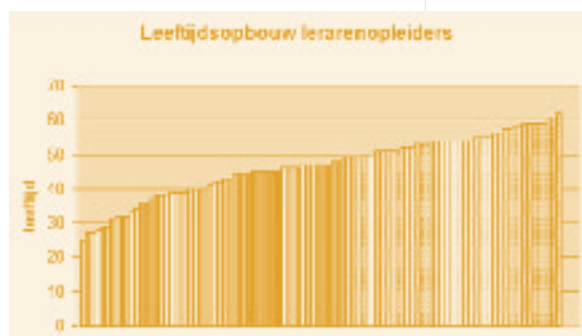
- Hoe kan men in het kader van competentiegericht onderwijs toch voldoende vakdidactische kwaliteit leveren binnen de opleiding.
- Onderzoek naar (nieuwe) didactische inzichten met betrekking tot de vernieuwde onderbouw (en wellicht daarbinnen met name onderzoek naar scenario 3 en 4).

Er gaat nu in het kader van ELWleR een groep onderzoekers, verbonden aan de verschillende instellingen die betrokken zijn bij ELWleR, aan het werk met deze onderzoeksvragen.

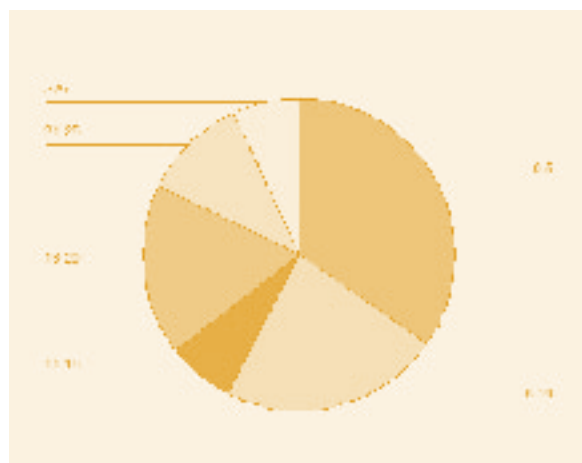
## En hoe nu verder?

Deze enquête is een eerste stap in het proces om zicht te krijgen op de huidige situatie op de lerarenopleidingen. De verkregen informatie staat volledig ten dienste van de opleidingen zelf en van de netwerken van opleiders (Panama, SLW, Vadiwulo). Het vormt voor ELWleR een basis voor verdere activiteiten. Via het uit te voeren onderzoek,

de informatievoorziening via de website (met onder andere een te ontwikkelen vraagbaak en afstemming met de kennisbank wiskunde van het Ruud de Moor centrum) en bijeenkomsten van opleiders zal de samenwerking bevorderd worden en de kennis en expertise over 'opleiden voor wiskundeonderwijs' vergroot en verspreid worden.



figuur 1 Leeftijdsofbouw docenten wiskunde van de lerarenopleiding; N = 97



figuur 2 Aantal jaren ervaring in de lerarenopleiding; N = 97.



figuur 3 Vragen betreffende de opleiding (gemiddelden op een vijfpuntsschaal: 1. helemaal mee oneens; 2. mee oneens; 3. neutraal; 4. mee eens; 5. helemaal mee eens); N = 97

## Verwijzingen

- cTWO (2007): *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO (website: [www.ctwo.nl](http://www.ctwo.nl)).
- J. van Dormolen (1977): *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht: Oosthoek's Uitgeversmaatschappij BV.
- ELWleR (2007): *Website* ([www.elwier.nl](http://www.elwier.nl)); projectplan, verwijzingen, wiki, e.d.
- NVvW (2005): *Manifest. Wiskundendidactiek anno 2005. Hoe staan we er voor? Wat streven we met wiskundeonderwijs na? Hoe bereiken we dat?* (website: [www.nvvw.nl](http://www.nvvw.nl)).
- Panama: *Pabo nascholing mathematische activiteiten* (website: [www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Panama](http://www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Panama)).
- SLW: *Samenwerkingsgroep Lerarenopleiding Wiskunde 2e graads* (website: [www.fi.uu.nl/wiki/index.php/SLW](http://www.fi.uu.nl/wiki/index.php/SLW)).
- H. Staal (2006): *De kennisbank wiskunde en competentiegericht opleiden van wiskundeleraren. Verslag van een samenwerking tussen de Educatieve Hogeschool van Amsterdam en het Ruud de Moor Centrum*. Heerlen: Open Universiteit. Zie [www.ou.nl/Docs/Expertise/RdMC/Working%20Papers%202006/Paper\\_Kennisbank\\_Wiskunde.pdf](http://www.ou.nl/Docs/Expertise/RdMC/Working%20Papers%202006/Paper_Kennisbank_Wiskunde.pdf).
- TAL: *Tussendoelen annex leerlijnen* (website: [www.fi.uu.nl/wiki/index.php/TAL](http://www.fi.uu.nl/wiki/index.php/TAL)).
- Vadiwulo: *Vakdidactici Wiskunde Universitaire Lerarenopleidingen* (website: [www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Vadiwulo](http://www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Vadiwulo)).

## Over de auteurs

Monica Wijers, Ronald Keijzer en Vincent Jonker zijn betrokken bij het expertisecentrum voor de lerarenopleiding wiskunde (ELWleR), en hebben daarnaast andere taken binnen het Freudenthal Instituut. E-mailadressen: [m.wijers@fi.uu.nl](mailto:m.wijers@fi.uu.nl), [r.keijzer@fi.uu.nl](mailto:r.keijzer@fi.uu.nl) en [v.jonker@fi.uu.nl](mailto:v.jonker@fi.uu.nl).



# De Minder is Meer Paradox

## Quotum

Het democratisch ideaal van *one man, one vote* is eenvoudig gesteld, maar de verwezenlijking ervan in de praktijk is dat zeker niet. Een uitvloeisel van dit ideaal is dat zetels in een parlement worden verdeeld in verhouding met het door de partijen behaalde aantal stemmen en dat het aantal vertegenwoordigers dat aan een staat wordt toegekend in The House of Representatives in de Verenigde Staten wordt bepaald in verhouding met de inwoneraantallen van de staten. Het probleem dat hierbij ontstaat, is: wat te doen met de fracties, dat wil zeggen hoe bepalen we het aantal zetels of vertegenwoordigers als een partij of staat recht heeft op bijvoorbeeld 3,34 of 6,67 zetels of vertegenwoordigers? In een vorige aflevering<sup>[1]</sup> hebben we de regel van Hamilton besproken die de onverdeelde zetels toekent aan de partijen met de grootste resten. Aan de hand van het volgende voorbeeld gaan we deze regel nog even na.

|   | %   | fractie | quotum                 | zetels |
|---|-----|---------|------------------------|--------|
| A | 29  | 0,29    | $0,29 \times 5 = 1,45$ |        |
| B | 27  | 0,27    | $0,27 \times 5 = 1,35$ |        |
| C | 44  | 0,44    | $0,44 \times 5 = 2,20$ |        |
|   | 100 | 1       | 5                      | 5      |

In het bovenstaande voorbeeld hebben de partijen A, B en C respectievelijk 29, 27 en 44 van de 100 stemmen (omdat we de getallen mooi gekozen hebben kunnen we ook denken aan 29, 27 en 44 procent van het totaal uitgebrachte stemmen). Onder de partijen verdelen we vijf zetels. Het aantal zetels waarop een partij recht heeft, berekenen we door de fractie te vermenigvuldigen met het aantal te verdelen zetels. Dit aantal wordt het *quotum* van de partij genoemd.

Als we vijf euro verdelen over A, B en C, dan zijn we nu klaar: A krijgt € 1,45, B krijgt € 1,35 en C krijgt € 2,20.

Echter, bij de verdeling van zetels geven de fracties een probleem; halve of driekwart zetels bestaan nu eenmaal niet. Volgens de

Uit: Kieswet

(Wet van 28 september 1989, houdende nieuwe bepalingen inzake het kiesrecht en de verkiezingen)

## Artikel P 7

1. De overblijvende zetels, die restzetels worden genoemd, worden, indien het aantal te verdelen zetels negentien of meer bedraagt, achtereenvolgens toegewezen aan de lijsten die na toewijzing van de zetel het grootste gemiddelde aantal stemmen per toegewezen zetel hebben. Indien gemiddelden gelijk zijn, beslist zo nodig het lot.
2. Indien het betreft de verkiezing van de leden van de Tweede Kamer, komen bij deze toewijzing niet in aanmerking lijsten waarvan het stemcijfer lager is dan de kiesdeler.

## Artikel P 8

1. De restzetels worden, indien het aantal te verdelen zetels minder dan negentien bedraagt, achtereenvolgens toegewezen aan de lijsten waarvan de stemcijfers bij deling door de kiesdeler de grootste overschotten hebben. Hierbij worden lijsten die geen overschot hebben, geacht lijsten te zijn met het kleinste overschot. Indien overschotten gelijk zijn, beslist zo nodig het lot.
2. Bij deze toewijzing komen niet in aanmerking lijsten met een stemcijfer dat lager is dan 75% van de kiesdeler.
3. Wanneer alle lijsten die daarvoor in aanmerking komen een restzetel hebben ontvangen en er nog zetels te verdelen blijven, worden deze zetels toegewezen volgens het stelsel van de grootste gemiddelden als bedoeld in artikel P7, eerste lid, met dien verstande, dat bij deze toewijzing aan geen van de lijsten meer dan één zetel wordt toegewezen.

regel van Hamilton geven we de partijen eerst het gehele aantal zetels in de quota. Als er daarna nog zetels overblijven, hetgeen in de praktijk altijd het geval is, dan kennen we de onverdeelde zetels toe aan de partij(en) met de grootste rest(en). In het voorbeeld krijgen A, B en C dus eerst respectievelijk 1, 1 en 2 zetels. Er blijft dan 1 zetel over die naar partij A met de grootste rest gaat. De uiteindelijke verdeling wordt dus als volgt.

|   | %   | fractie | quotum                 | zetels |   |
|---|-----|---------|------------------------|--------|---|
| A | 29  | 0,29    | $0,29 \times 5 = 1,45$ | 1      | 2 |
| B | 27  | 0,27    | $0,27 \times 5 = 1,35$ | 1      | 1 |
| C | 44  | 0,44    | $0,44 \times 5 = 2,20$ | 2      | 2 |
|   | 100 | 1       | 5                      | 4      | 5 |

De toegepaste regel lijkt alleszins aanvaardbaar maar zoals we in de vorige aflevering van de rubriek<sup>[1]</sup> hebben gezien, kan de regel aanleiding geven tot de zogenaamde Alabama paradox. Een uitbreiding van het parlement met één of meerdere zetels kan er dan toe leiden dat ondanks gelijk blijvende verhoudingen, een partij erop achteruit gaat. Om de Alabama paradox te vermijden moeten we dus op zoek naar een andere en betere(?) regel.

## Kiesdeler

In plaats van uit te gaan van het quorum van een partij kunnen we ook kijken naar het aantal kiezers dat door een afgevaardigde wordt vertegenwoordigd. Het ideaal is weer dat iedere afgevaardigde een gelijk aantal kiezers vertegenwoordigt. Maar dat is, zoals het volgende voorbeeld laat zien, vaak niet mogelijk.

|   |     |  |  |  |        |
|---|-----|--|--|--|--------|
|   | %   |  |  |  | zetels |
| A | 18  |  |  |  |        |
| B | 33  |  |  |  |        |
| C | 49  |  |  |  |        |
|   | 100 |  |  |  | 5      |

De partijen A, B en C hebben bij een verkiezing respectievelijk 18, 33 en 49 procent van de stemmen behaald. (We kunnen ook zeggen dat van 100 uitgebrachte stemmen er 33 naar A gegaan zijn etc.) Op basis van deze stemmenverdeling moeten 5 zetels worden verdeeld. Voor één vertegenwoordiger of zetel hebben we  $d = 100/5 = 20$  stemmen nodig. Het getal  $d$  noemen we de *kiesdeler*. Het aantal

stemmen gedeeld door de kiesdeler geeft nu het aantal vertegenwoordigers of zetels waarop een partij recht heeft. De partijen A, B en C hebben dus recht op het volgende aantal vertegenwoordigers:

|   |                |
|---|----------------|
| A | $18/20 = 0,90$ |
| B | $33/20 = 1,65$ |
| C | $49/20 = 2,45$ |
|   | 5              |

Helaas komt het weer niet mooi uit. We kunnen immers alleen gehele aantallen zetels toekennen. Nadat we aan B en C respectievelijk 1 en 2 zetels hebben toegekend, blijven er nog 2 onverdeelde zetels over. Merk op dat B en C recht hebben op die zetels, omdat ieder twintigtal stemmen recht geeft op een zetel. De in het eerste deel besproken regel van Hamilton geeft de twee onverdeelde zetels aan de partijen met de grootste rest, dus bij toepassing van die regel krijgen A en B ieder 1 restzetel (onverdeelde zetel).

### Verdelen van restzetels

We gebruiken nu een andere regel in een poging de Alabama paradox te vermijden. We verdelen eerst de zetels waarop een partij op grond van de kiesdeler recht heeft, dat wil zeggen voor iedere twintig stemmen 1 zetel. Dit geeft de volgende verdeling:

|   | %   |   |  | zetels |
|---|-----|---|--|--------|
| A | 18  | 0 |  |        |
| B | 33  | 1 |  |        |
| C | 49  | 2 |  |        |
|   | 100 | 4 |  | 5      |

We zien dat de afgevaardigde van partij B 33 stemmen vertegenwoordigt terwijl de twee afgevaardigden van partij C elk 24,5 stemmen vertegenwoordigen. Bij de toekenning van de eerste restzetel letten we nu op het aantal stemmen dat een afgevaardigde vertegenwoordigt. Voor de eerste restzetel geeft dit het volgende beeld:

|   |   |                |
|---|---|----------------|
| A | 1 | $18/1 = 18,00$ |
| B | 2 | $33/2 = 16,50$ |
| C | 3 | $49/3 = 16,33$ |

Als we de restzetel zouden toekennen aan partij B, dan krijgt deze twee zetels op basis van 33 stemmen. De beide afgevaardigden vertegenwoordigen dan 16,5 stemmen. Geven we de restzetel aan partij A dan vertegenwoordigt de afgevaardigde van partij A 18 stemmen. We kennen de restzetel nu toe aan de partij waarvan de afgevaardigden het grootste aantal stemmen vertegenwoordigen. In dit geval is dat dus partij A. Na toekenning van deze restzetel hebben we de volgende situatie:

|   | %   |   | $R_1$ |  | zetels |
|---|-----|---|-------|--|--------|
| A | 18  | 0 | 1     |  |        |
| B | 33  | 1 | 1     |  |        |
| C | 49  | 2 | 2     |  |        |
|   | 100 | 3 | 4     |  | 5      |

Uit een brief van de Minister van Binnenlandse Zaken en Koninkrijksrelaties (J.W. Remkes) aan de Voorzitter van de Eerste Kamer (19 april 2006)

(...) Ik heb laten onderzoeken welke alternatieve methoden voor restzetelverdeling bekend zijn en wat de consequenties van toepassing van deze methoden zijn voor de zetelverdeling in de provinciale staten en de Eerste Kamer. Ter illustratie van deze consequenties is berekend hoe de zetelverdeling zou zijn bij toepassing van andere methoden op de uitslagen van de verkiezingen, gehouden op 11 maart 2003. Hierbij is afgezien van eventuele lijstverbindingen. Deze berekening geeft slechts een indicatie van mogelijke effecten.

Een volledig proportionele verdeling van zetels is niet haalbaar. Een verkleining van de omvang van een volksvertegenwoordiging betekent in het algemeen een vermindering van de proportionaliteit van de zetelverdeling.

Voor de verdeling van restzetels wordt nu in Nederland de d'Hondt-methode gebruikt. Bij deze methode worden restzetels toegekend op basis van grootste gemiddelden. Deze methode is gunstiger voor grote partijen dan voor kleine partijen. Als kleine partijen minder zetels verwerven in Provinciale Staten, zullen zij ook in de Eerste Kamer minder zetels, en in een enkel geval helemaal geen zetel, kunnen verwerven.

Een andere methode is de Hare-methode; deze werkt meer in het voordeel van kleine partijen. In deze methode staat niet het grootste gemiddelde, maar het grootste overschot centraal. De Hare-methode wordt toegepast in Nederlandse gemeenten waarvan het aantal te verdelen zetels kleiner is dan 19, juist ter compensatie van de geringe mogelijkheid tot representatie van kleine partijen.

(...)

Er blijft nog één onverdeelde zetel over. Voor de verdeling van deze zetel volgen we dezelfde procedure. We kijken weer naar het aantal stemmen dat door een afgevaardigde wordt vertegenwoordigd.

|   |   |                |
|---|---|----------------|
| A | 2 | $18/2 = 9,00$  |
| B | 2 | $33/2 = 16,50$ |
| C | 3 | $49/3 = 16,33$ |

We kennen de tweede restzetel aan partij B toe omdat de afgevaardigden van partij B dan het grootste aantal stemmen vertegenwoordigen. Dit geeft de uiteindelijke verdeling van de zetels.

|   | %   |   | $R_1$ | zetels |
|---|-----|---|-------|--------|
| A | 18  | 0 | 1     | 1      |
| B | 33  | 1 | 1     | 2      |
| C | 49  | 2 | 2     | 2      |
|   | 100 | 3 | 4     | 5      |

Deze verdeling pakt wat sneu uit voor C. Deze partij heeft bijna de helft van de stemmen gekregen, maar behaalt toch niet meer zetels dan partij B.

### Winst en verlies

Bij de volgende verkiezing boekt partij A een winst van 11%. Deze winst gaat zowel ten koste van B als van C die beide respectievelijk 6% en 5% verliezen. Hoe komt de zetelverdeling er nu uit te zien? De situatie is nu als volgt (tussen haakjes de verdeling bij de vorige verkiezing):

|   | %       |  | zetels |
|---|---------|--|--------|
| A | 29 (18) |  |        |
| B | 27 (33) |  |        |
| C | 44 (49) |  |        |
|   | 100     |  | 5      |

De kiesdeler is weer 20 ( $100/5$ ), waardoor we nu in de eerste ronde 4 zetels kunnen verdelen. A, B en C hebben recht op respectievelijk 1, 1 en 2 zetels.

|   | %       |   | zetels |
|---|---------|---|--------|
| A | 29 (18) | 1 |        |
| B | 27 (33) | 1 |        |
| C | 44 (49) | 2 |        |
|   | 100     | 4 | 5      |

Waar gaat de ene nog onverdeelde zetel naar toe? Naar de grote winnaar A van de verkiezing wellicht? We berekenen weer het aantal stemmen per vertegenwoordiger na toekenning van de restzetel.

|   |   |                |
|---|---|----------------|
| A | 2 | $29/2 = 14,50$ |
| B | 2 | $27/2 = 13,50$ |
| C | 3 | $44/3 = 14,67$ |

We zien dat de afgevaardigden van partij C, na toekenning van de restzetel, het grootste aantal stemmen vertegenwoordigen. De restzetel gaat dus naar... C!  
De zetelverdeling wordt dus:

|   | %       |   | zetels |
|---|---------|---|--------|
| A | 29 (18) | 1 | 1 (1)  |
| B | 27 (33) | 1 | 1 (2)  |
| C | 44 (49) | 2 | 3 (3)  |
|   | 100     | 4 | 5      |

### Populatie Paradox

Wat C met 49% van de stemmen niet lukte, lukt wel na een verlies van 5% – de absolute meerderheid. Blijkbaar kun je bij toepassing van deze regel met *minder* stemmen *meer* zetels in de wacht slepen. Deze paradox noemen we ook wel de *Populatie Paradox*. De 435 zetels in het Amerikaanse Huis van Afgevaardigden worden verdeeld naar verhouding van de inwonertallen van de verschillende staten. Bij toepassing van de besproken regel, maar niet alleen bij deze regel, is het mogelijk dat een staat die er in inwonertal op achteruit is gegaan, een zetel wint ten koste van een staat waarvan het inwonertal juist gestegen is – vandaar de naam Populatie Paradox.

Nog een aardige vraag naar aanleiding van de tweede verkiezing in ons voorbeeld. Wie heeft deze verkiezing gewonnen? Afgaande op de berichten in de kranten naar aanleiding van de laatste gemeenteraadsverkiezingen, denk ik dat de meeste kranten C als verliezer zullen presenteren. Het zal de partijleider van C een zorg zijn.

### Literatuur

- [1] Rob Bosch: *De Alabama Paradox*. In: *Euclides* 82(6); pp. 222-224.
- [2] M.L. Balinski, H.P. Young: *Fair Representation*. Washington: Bookings Institution Press (2001).

### Over de auteur

Rob Bosch is redacteur van *Euclides* en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.  
E-mailadres: [r.bosch2@nllda.nl](mailto:r.bosch2@nllda.nl)

# Parate kennis en algebra

[ Anne van Streun ]

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = 2$$

WISKUNDEDIDACTIEK ANNO 2010

## Aflevering 5: Algebraïsche vaardigheden

### Oriëntatie

Ongetwijfeld zal de belangstellende lezer van deze serie met spanning hebben uitgezien naar deze aflevering! Immers zowel nationaal (tot in de Tweede Kamer) als internationaal (Math War in de Verenigde Staten, door de politiek verplichte lesuren algebraïsche vaardigheden in Israël) wordt stevig gediscussieerd over een mogelijke teloorgang van rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden. Onlangs heeft Pauline Vos in Euclides<sup>[1]</sup> geanalyseerd of uit internationaal vergelijkend onderzoek (TIMSS) blijkt dat de Nederlandse kinderen van 14 jaar gemiddeld de laatste twintig jaar slechter zijn gaan presteren op 'kale' algebrasommen – dus op dat type opgaven waar politici en (wiskundige) opiniemakers zich druk over maken. Voor die leeftijdsgroep geldt dat voor de volle breedte van vmbo-havo-vwo 'de gemiddelde 14-jarige leerling hier niet veel van bakt, onafhankelijk of deze leerling les heeft gehad in Nederland of in het veel abstractere onderwijs in een ander land.' De prestaties van de gemiddelde 14-jarige Nederlandse leerling op het gebied van algebra zijn niet verbeterd, maar ook niet verslechterd. Aan de andere kant zijn er uit het (vervolg)onderwijs wel duidelijke signalen dat met name de leerlingen van havo-vwo vanaf de leeftijd van 14 jaar minder inzicht en vaardigheid in het werken met algebraïsche expressies hebben verworven dan voorheen.

### Oefening baart kunst?

Het is boeiend om te lezen welke rol verschillende scribenten toekennen aan het oefenen met kale algebraïsche opgaven. In het voorwoord van het 'Basisboek Wiskunde' (Jan van de Craats en Rob Bosch)<sup>[2]</sup> lezen we: [er is] '... maar één manier om wiskunde onder de knie te krijgen: veel oefenen.' En: 'De opgaven zijn zorgvuldig uitgekozen: eenvoudig beginnen met veel soortgelijke sommen om

de vaardigheden goed te oefenen. Met heel kleine stapjes wordt de moeilijkheid geleidelijk opgevoerd. Wie alle opgaven van een hoofdstuk gemaakt heeft, kan er zeker van zijn dat hij of zij de stof begrijpt en beheerst.' **Zie figuur 1** (uit [2], pag. 69; Eerstegraadsvergelijkingen). Het doet mij denken aan mijn jonge jaren als wiskundeleraar van een hbs. Geleidelijk ontdekte ik dat dit type instructie alleen maar werkte als je heel kort daarna een proefwerk gaf met dezelfde typen opgaven. Inzicht in wat een vergelijking is, wat het symbool  $x$  hier voorstelt, wat een oplossing betekent, wat de relatie is met een grafiek, waarom dit voorschrift niet werkt bij een ander type vergelijking, enzovoort, enzovoort; die kennis verwierven mijn leerlingen niet. Gelukkig voor hen toetste het hbs-examen ook alleen maar deze ingeoefende typen sommen. Met het wiskundeprogramma havo-vwo (vanaf 1968 ingevoerd) hebben we in Nederland afscheid genomen van dit klakkeloos instampen, hoewel veel individuele leraren daar aanvankelijk nog wel vaak naar teruggrepen. In mijn eerste collegedictaat 'Inleiding in de didactiek van de wiskunde, deel I' uit 1977<sup>[3]</sup> schreef ik het volgende, en daar sta ik nog steeds achter: 'Het is heel moeilijk om onderscheid te maken tussen een leerling die heeft geleerd met symbolen te gooichelen op een zodanige manier dat het goede antwoord eruit rolt en een leerling die werkelijk begrepen heeft gevormd. De leerling ziet zelf het verschil niet als hij geen ervaring heeft met het leren van wiskunde. En de leraar kan alleen maar de symbolen zien of horen. [...] Op het punt gekomen dat alleen leren met begrip helpt, probeert de eerste leerling de nieuwe opgaven onder de knie te krijgen op de enige manier die hij kent, het uit het hoofd leren van de regel voor iedere soort opgave. Omdat dit voortaan onmogelijk is, komt nu zelfs aan de uiterlijke schijn van vooruitgang een einde. En weer valt een leerling overboord.'

### Oefening baart onbegrip?

Op mijn eerste grote internationale congres over wiskundeonderwijs (ICME, Berkeley,

1980) was Freudenthal een hoofdspreker. Het voornaamste probleem bij het oefenen was volgens hem dat van een met *inzicht* verworven vaardigheid het *inzicht* verloren gaat door het oefenen, oefenen dat toch wel nodig is om de nodige routine te verwerven. *Inzicht* gaat *verloren* bij vroegtijdig oefenen, bij te veel oefenen of gewoon door te oefenen. De hamvraag is dus, volgens Freudenthal in 1980, hoe wij tijdens het oefenen de wegen naar het inzicht open kunnen houden. Oefenen baart onbegrip, maar wellicht kunnen we tijdens het oefenen wegen vinden om het inzicht levend te houden. Freudenthal kende indertijd en ook later veel waarde toe aan het blijven reflecteren op wat je tijdens het oefenen doet, dus steeds weer teruggaan naar het 'Weten waarom'.

De publicatie 'Vaardigheden'<sup>[4]</sup> wijdt heel wat woorden aan de manier waarop goede routine niet en wel kan worden verworven. Enkele uitspraken:

- Oefenen op een lange rij gelijksoortige sommetjes leert een leerling om geroutineerd een regel uit te voeren in standaardsituaties, maar de leerling is machteloos bij een voor hem nieuw probleem.
- Het leren met inzicht en dus ook het verwerven van vaardigheden kost meer tijd dan het klakkeloos leren en inoefenen van trucs.
- Het inoefenen van een vaardigheid kan pas met vrucht gebeuren nadat inzicht in die vaardigheid is verkregen.
- Aanwezig inzicht gaat verloren door het drillen met gelijksoortige sommetjes.
- Routine doe je op door oefenen met gevarieerde situaties en wisselend niveau.
- Vaardigheden moeten regelmatig en tijdig worden geactualiseerd.

De aanbevelingen van de auteurs van 'Vaardigheden' (onder leiding van Joop van Dormolen) zijn stevig gefundeerd op het werk van bekende onderwijspsychologen en didactici zoals Pierre van Hiele, Richard Skemp, Ausubel, Kohnstamm en anderen.

Nu, dertig jaar later, blijft de waarde van die aanbevelingen nog onverminderd overeind.

### Inzicht en vaardigheid moeten hand in hand gaan

In het standaardwerk 'Adding it up' van de National Research Council in de USA<sup>[5]</sup> wordt beargumenteerd dat het *begrijpen* van wiskundige begrippen, operaties en relaties en de *vaardigheid* in het flexibel, accuraat, efficiënt en adequaat uitvoeren van procedures niet los van elkaar kunnen worden gezien. De auteurs, topmensen uit de wereld van leerpsychologen, wiskundigen en wiskundendidactici, betogen:

- Ten onrechte wordt vaardigheid soms *tegenover* inzicht geplaatst. Begrijpen maakt het leren van vaardigheden gemakkelijker, minder gevoelig voor fouten en het beklijft beter. Aan de andere kant is een zeker niveau van vaardigheden noodzakelijk om nieuwe wiskundige begrippen en methoden met begrip te leren en ontwikkelen.
- Zonder een goede routine stranden leerlingen bij het verdiepen van wiskundige ideeën of het oplossen van wiskundige problemen. De aandacht die zij dan nodig hebben om hun resultaten uit te werken in plaats van die paraat op te roepen (*Weten dat*) gaat ten koste van de aandacht voor de aanpak van het probleem (*Weten hoe*) of het zoeken naar onderliggende relaties (*Weten waarom*).
- Leerlingen die een vaardigheid zonder begrip leren (*zie figuur 1*), hebben heel veel oefening nodig om de stappen niet te vergeten. Als leerlingen de operaties begrijpen (*zie figuur 2*; zie [6]), dan zijn ze beter in staat om ze te reconstrueren en in samenhang met andere operaties te zien.
- Als vaardigheden zonder begrip worden geleerd, dan blijven het geïsoleerde brokjes kennis. Nieuwe begrippen of vaardigheden kunnen dan niet voortbouwen op een bestaand netwerk aan kennis. Dat leidt ertoe dat leerlingen voor elke kleine variatie in opgaven weer nieuwe oplossingsprocedures moeten leren.

### Routine onderhouden en toetsen

Competente wiskundeleraren ontwerpen voor hun sectie ook voor dit aspect van het werken met algebra een lijn van algebraïsche vaardigheden, die leerlingen in een bepaald leerjaar op elk moment paraat moeten hebben. Voor het open houden van het inzicht bij het oefenen van een bepaalde algebraïsche vaardigheid en bij de 90%-criteriumtoetsen gaat het steeds weer om een brede variatie aan heel eenvoudige opgaven. Bij de hier gekozen eerstegraads vergelijkingen gaat het bijvoorbeeld in leerjaar 2 om opgaven zoals de hiernaast, rechts, staande voorbeeldopgave.

figuur 1 Instructie bij het oplossen van een eerstegraads vergelijking (Basisboek Wiskunde)

### Algemene oplossingsregels

Stel dat van een getal  $x$  gegeven is dat het voldoet aan de volgende vergelijking:

$$3x + 7 = -2x + 1$$

en dat gevraagd wordt  $x$  te bepalen.

Oplossing:

1. tel bij linker- en rechterlid  $2x$  op:  $5x + 7 = 1$ ,
2. tel bij linker- en rechterlid  $-7$  op:  $5x = -6$ ,
3. deel linker- en rechterlid door 5:  $x = -\frac{6}{5}$ .

Hiermee is in drie stappen het onbekende getal  $x$  gevonden. Ter controle kun je de gevonden waarde  $x = -\frac{6}{5}$  in de oorspronkelijke vergelijking substitueren en constateren dat het klopt.

We hebben gebruik gemaakt van de volgende algemene regels:

V1. De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je bij linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.

V2. De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je linker- en rechterlid met hetzelfde getal vermenigvuldigt of door hetzelfde getal deelt, mits dat getal niet 0 is.

De beide eerste stappen van de oplossing in het gegeven voorbeeld kun je ook zien als

het verplaatsen van een term van de ene kant van het gelijkteken naar de andere kant waarbij die term van teken wisselt (van plus naar min of omgekeerd).

Dat is de manier waarop regel V1 meestal wordt gebruikt. In stap 1 hebben we de term  $-2x$  van het rechterlid naar het linkerlid overgebracht, en in stap 2 de term  $+7$  van het linkerlid naar het rechterlid.





# Een vakgroep-uitje naar het Mathematikum

[ Ingeborg Huisman ]

## Op pad met de vakgroep

364 kilometer, 8 wiskundecollega's, 2 auto's, een heleboel regenwater, 1 tussenstop met 5 worsten, 2 schnitzels en een heleboel friet, 4 hotelkamers, heel wat pullen bier, glazen wijn en fris en salsachips, een uitgebreid ontbijtje en op de valreep op weg naar huis toch nog de zon. Het was vier uur rijden van Amersfoort naar Giessen bij Frankfurt (Duitsland) voor 'die lange Nacht der Mathematik' van 19:00 tot 1:00 uur in de nacht van 9 op 10 maart 2007. Voor onze vakgroep de eerste keer dat we samen zoiets deden. Tweederde van de vakgroep wiskunde ging mee. De rest had verplichtingen elders, maar had er ook graag bij willen zijn. En ze hebben wat gemist, dat is zeker!

## Gebouw

Het Mathematikum is een wiskundemuseum. Het is het eerste wiskunde-doe-museum in de wereld! Sinds de opening in 2002 zijn er al 150.000 bezoekers geweest. Het Mathematikum zit in een prachtig gebouw midden in het centrum van het universiteitsstadje Giessen. Alleen het gebouw zelf straalt al wiskunde uit. Ruimtes worden met elkaar verbonden door openingen in de muren. Deze openingen hebben de vorm van een samengestelde wiskundige figuur, bestaande uit een rechthoek met daarop een halve cirkel. Het geeft je meteen een geometrisch gevoel (er zitten bijvoorbeeld geen deuren tussen de ruimtes, maar openingen die de vorm hebben van een rechthoek met een halve cirkel erboven).

De sinusgrafiek als leuning! Kunst in de vorm van een onmogelijke figuur van Escher, vormgegeven in prachtig hout. Een spiraal van het getal  $\pi$  in zwarte letters op een spierwitte muur. En elke geboortedatum van 6 getallen komt ergens in het getal  $\pi$  voor (mijn geboortedatum bijvoor-

beeld, 23-12-61, staat in deze volgorde na 3.263.902 cijfers achter de komma). Er hangt een computertje dat je deze informatie in drie seconden kan leveren.



In het Mathematikum worden meer dan 100 wiskundige experimenten tentoongesteld. Je *ervaart* wat wiskunde is. Je zult er geen formules, symbolen of vergelijkingen tegen komen.

Allerlei opstellingen geven de bezoeker de kans, eigen ervaringen op te doen. Dat geldt voor iedereen tussen de 8 en 80 jaar. En het aanbod is wisselend. Bovendien is er elke maand een 'Exponatpremière'. Dan wordt er, onder het genot van een glaasje sekt, een nieuw experiment onthuld.

## Aan het werk

Met een deel van de materialen zijn we natuurlijk heel vertrouwd. Zo ligt er een kamergrote tafel vol bouw materiaal voor ruimtelijke figuren als de kubus, de piramide en de octaëder. Ook zijn er veel opstellingen met spiegels. Het vallen van een bal wordt in verschillende opstellingen, met telkens een andere baan, gedemonstreerd. Er wordt vervolgens uitleg gegeven aan de hand van deze experimenten. Je kunt dit alles ook zelf uitvoeren.

Er zijn nog meer raakvlakken met de natuurkunde; zo kun je bijvoorbeeld de Leonardo-brug bouwen. Dat is een brug die

blijft staan zonder lijm of andere verbindingsmaterialen – je hebt alleen houten stokjes nodig. Het systeem werd ooit uitgevonden door Leonardo da Vinci!

Je kunt een ander soort brug bouwen op een horizontale plaat en die vervolgens heel voorzichtig rechtop proberen te zetten. Wie lukt dit?

Er staan een paar opstellingen waarmee je meetkundige figuren kunt laten ontstaan. Als je een ronde doorzichtige bak met vloeistof vult en die vervolgens heel hard in het rond draait, zal de vloeistof naar de buitenkant slingeren, waardoor het vloeistofniveau stijgt. Aan de binnenkant ontstaat dan een kegel. Wanneer je ditzelfde doet met een smalle balk van doorzichtig materiaal, ontstaat er een parabool. Hoe harder je de bak rond draait, hoe smaller deze wordt.

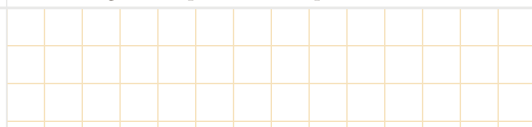
Hier nog een experiment. Aan de muur hangt een opstelling waarin een kegel met vloeistof hangt. Door aan deze kegel te draaien kun je heel goed de verschillende doorsneden van de kegel zien: het vloeistofvlak laat zien wanneer het een ellips is of een parabool.

## Puzzels en spelen

Pentomino's zijn puzzelstukjes die bestaan uit vijf blokjes. Er zijn twaalf verschillende pentomino's.

In het Mathematikum hadden ze een kalenderbord met 31 vakjes. Zes pentomino's vullen dus 30 vakjes. Blijft er op een bord van 31 vakjes nog net één plekje voor het getal van de datum over. Puzzelen maar! Elke dag een nieuwe pentomino-puzzel. Verder zijn er allerlei mathematische puzzels; erg leuk om samen op te lossen. Ook kun je ter plekke allerlei Escherfiguren in elkaar puzzelen.

En een draaisysteem om Pythagoras te bewijzen zou fantastisch zijn voor in de klas. Dobbelspelletjes spelen verveelt nooit en in een mens-grote zeepbel staan is spectaculair.





mathematikum

Je blijft je verbazen.

Ook fantastisch is het computerspel waarbij je een grafiek moet belopen. Alleen de afstand tot de computer wisselt. Lukt het jou om jouw looplijn precies over de grafiek te laten lopen?

Kortom, er was zoveel te zien... Superleuk om met interessegenoten, collega's in ons geval, van experiment naar experiment te dwalen. Even te spelen, te voelen hoe de beweging van de vorm gaat. Weer te ervaren waarom we dit vak ook alweer zo boeiend vonden.

En als je in het winkeltje snuffelt, kom je natuurlijk met een paar wiskundige spelletjes naar buiten. Ik kon het weer niet laten!

### Volgend jaar weer!

Eenmaal buiten ziet de wereld er heel anders uit. Er zijn zoveel wiskundige vormen om ons heen. Die vallen ineens weer veel meer op! En dan te bedenken dat het Mathematikum wiskundige stadswandelingen door Giessen organiseert. Getallen, vormen, symmetrie... zoveel wiskunde in een stad! Maar voor ons komt die stadswandeling de volgende keer. We gaan nog even de kroeg in en dan naar bed. Volgend jaar is er weer 'eine lange Nacht der Mathematik'. Kan haast niet wachten...







### Informatie over het Mathematikum

Adres: Liebigstraße 8, 35390 Gießen  
(Duitsland)

Het museum ligt op een minuut lopen van  
het station.

Toegangsprijs: € 6,00

Website: [www.mathematikum.de](http://www.mathematikum.de)

Openingstijden:

ma t/m vr: 9:00 – 18:00 uur

do: 9:00 – 20:00 uur

za + zo: 10:00 tot 19:00 uur

### Copyright foto's

Alle foto's zijn met toestemming van het  
Mathematikum opgenomen.

Copyright Mathematikum Gießen/

Fotograaf: Rolf K. Wegst

### Over de auteur

Ingeborg Huisman is wiskundedocente aan  
het Meridiaan College (vestiging 't Hooghe  
Landt) in Amersfoort.

E-mailadres :

[Hmw.Huisman@meridiaan-bl.nl](mailto:Hmw.Huisman@meridiaan-bl.nl)

# 'Elke positieve actie begint met critiek'

## HANS FREUDENTHAL EN DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

Zo'n 40 jaar geleden bezocht ik enige keren van die toen jaarlijks terugkerende weekendconferenties van de Wiskunde Werkgroep. Freudenthal was voorzitter. Op één van die weekends 's avonds in kleine kring bij de koffie (het was dus geen borrelpraat) liet Freudenthal in zelfreflectie zich ontvallen: 'Als je slecht les of college geeft dan ga je naar de didactiek, en als dat ook niet gaat dan naar de paedagogie.' Hij vervolgde het rijtje niet, hetgeen ook had gekund, met de psychologie. Nu is in mei 2006 de dissertatie uitgekomen van Sacha la Bastide met als ondertitel 'Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde'. Uit dat boek valt op te maken dat de aangehaalde uitspraak niet louter een grapje was. Dat in de problemen die Freudenthal ondervond bij het geven van onderwijs, wel degelijk een motief lag om zich met de didactiek te gaan bezighouden. Ik vermoed dat die problemen voortkwamen uit de omstandigheid dat hij zijn colleges niet voorbereidde. Ik heb naast voordrachten die volkomen onbegrijpelijk waren, ook meegemaakt dat hij glashelder kon zijn.

Een andere aanleiding, die ook in het boek genoemd wordt, die wellicht belangrijker is geweest voor Freudenthal om zich met onderwijszaken te gaan bezighouden, is de waarneming van het leerproces bij zijn kinderen. Vooral in de oorlogsjaren had hij daartoe gelegenheid omdat hij veel aan huis gebonden was.

De hoofdtitel van het boek is een aforisme dat Freudenthal zich als lijfspreuk eigen gemaakt had: 'Elke positieve actie begint met critiek.' Men ziet het tegenwoordig wel vaker dat men bij een wetenschappelijk werk een pakkende titel kiest. Het geeft wél de indruk dat men met een roman te maken heeft. Maar dat is een keuze van de auteur.

Sacha la Bastide heeft gedurende 10 jaar aan deze deelbiografie gewerkt en 1174 voetnoten geproduceerd. Deze kwamen voornamelijk voort uit 16 meter archief dat in Haarlem te raadplegen is. Twee promotores en drie hoogleraren in de begeleidingscommissie.

Het is plezierig dat de citaten duidelijk van de hoofdtekst onderscheiden zijn en dat de voetnoten per bladzijde gegeven worden, zodat men niet telkens achterin het boek hoeft te zoeken. Ik vraag mij wel eens af, en niet alleen bij dit werk, of er lezers zijn die bronnen waar voetnoten naar verwijzen, gaan napluizen. Eigenlijk zou ik als recensent toch wel naar Haarlem moeten gaan om een en ander te controleren.

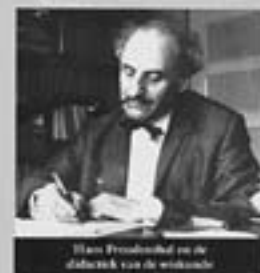
Maar welke recensent doet zo iets?

Het boek is goed leesbaar. Als men niet over een vlotte pen beschikt, begint men niet aan zo'n onderneming. Ik heb grote bewondering voor mevrouw La Bastide dat zij in staat was uit het vele materiaal ieder hoofdstuk tot een lopend verhaal te maken.

### De flutmechanica

Zo wordt in het boek ingegaan op de kritiek van Freudenthal op de mechanica zoals deze tot 1962 op de hbs gedoceerd werd. Lezers die nog niet met de VUT zijn, zullen dat vak in die stijl

*'Elke positieve actie begint met critiek'*



Auteur: Sacha la Bastide-van Gemert

Uitgever: Uitgeverij Verloren, Hilversum

ISBN 90-6550-912-7

Prijs: € 34,00 (381 pag.)



op de hbs nooit gezien hebben, en gymnasiasten al helemaal niet. Waar gaat het voor hen over? Verhelderend zou geweest zijn indien, eventueel als aanhangsel, een paar schriftelijke eindexamens mechanica waren opgenomen.

Er zullen bij die mechanica voor Freudenthal wel emoties een rol gespeeld hebben. Hij zag dat zijn oudste zoon geconfronteerd werd met dat lijk onder de vloer.

Voor een andere emotie ten aanzien van die mechanica eerst een verhaal. In 1937 gingen de hoogleraren Mannoury en De Vries, beiden geboren in 1867, met emeritaat in Amsterdam. Mannoury had als opdracht: meetkunde, werktuigkunde en wijsbegeerte der wiskunde, De Vries: wiskunde en mechanica.

Mannoury werd opgevolgd door Heyting als lector. Heyting was leraar te Enschede en een jaar eerder toegelaten als privaatdocent. (Een privaatdocent kreeg geen salaris, hooguit een onkostenvergoeding.) Heyting kreeg als opdracht meetkunde en wijsbegeerte der wiskunde. Freudenthal, die vanaf november 1930 een substantiële bijdrage aan onderwijs en vooral onderzoek had geleverd als assistent en privaatdocent, werd aangesteld als conservator, waarbij tevens verwacht werd dat hij de analyse van De Vries zou overnemen. Ik vermoed dat er niet eens een salarisverbetering aan vastzat.

Freudenthal kon toen zeker verwachten dat ook hij tot lector benoemd zou worden. Wel werd toen in de gemeenteraad van de zijde van de SDAP opgemerkt dat men de opvolging wel mager geregeld vond. Met een kluitje in het riet werd toen opgemerkt dat de conservator te zijner tijd tot lector in de analyse benoemd zou worden. Daarbij werd niet gezegd wie die conservator dan zou zijn.

De mechanica zou dan in 1937 wegvallen. Die opdracht was nodig omdat mechanica als zelfstandig vak op de hbs gedoceerd werd en er een mogelijkheid moest zijn om daarin een bevoegdheid te behalen. Nu zag Brouwer, die als opdracht wiskunde had, kans om naast zijn volledig hoogleraarschap een leeropdracht mechanica te verwerven. Die leeropdracht werd tot na de Tweede Wereldoorlog jaarlijks gecontinueerd. Het stak Freudenthal zeer dat hij om financiële redenen geen lector kon worden, terwijl de extra inkomsten van Brouwer met die mechanica ruim voldoende waren om zijn salaris van conservator aan te vullen tot dat van lector. Dat zal Freudenthal allergisch gemaakt hebben voor de mechanica.

De kritiek van Freudenthal op die hbs-mechanica wordt door mevrouw La Bastide weergegeven in verwijzingen naar en citaten uit 'Het mechanica vraagstuk', in 'Nieuwe wegen bij het onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen' (1952).

In het 'Feestboek, 17 september 1975' dat in de lijst van 'secundaire literatuur' voorkomt, komen ook enige citaten voor uit dat stuk 'Nieuwe wegen...'; daaruit het volgende:

'In geen natuurkunde-boek heb ik de zotte wrijvingstheorie der H.B.S.-mechanica kunnen terugvinden; ik veronderstel dus, dat er niets van waar is. De wrijving is er alleen maar, om examenvraagstukken uit te melken.'

Ik heb het enige natuurkundeboek in mijn bezit geraadpleegd. Het is de Engelse vertaling uit 1947 van Grimsehl's Lehrbuch der Physik. Dat boek verscheen voor het eerst in 1909 en had in 1929 een 7e

druk, bewerkt door Tomaschek. Een exemplaar van dat boek heeft Freudenthal, zij het misschien slechts uitwendig, moeten zien in de bibliotheek van de afdeling natuurkunde van de Berlijnse universiteit. De wrijvingscoëfficiënt als tangens van de wrijvingshoek en de theorie daaromheen correspondeert met die in de HBS-mechanica boeken. Met dit verschil dat Grimsehl het behandelt meer vanuit de fysica.

Ik vind de kritiek van Freudenthal, weergegeven in het hiervoor opgevoerde citaat, gechargeerd en onzakelijk. Ik vraag mij af of mevrouw La Bastide dat citaat niet opgemerkt heeft.

Freudenthal vergeleek en beoordeelde drie leerboeken voor die hbs-mechanica; daartoe moet men zich toch niet beperken. Er was ook een boek van de natuurkundeleraars Doornenbal en Nijhoff. Dat boek was bedoeld als aansluiting op een serie natuurkundeboeken. Dat daarin ook rare vraagstukken voorkwamen, zal wel beïnvloed zijn door de examenpraktijk. Het vak werd ook wel gegeven door de natuurkundeleraar.

Dan moet men toch ook de praktijk in de klas in beschouwing nemen. In de natuurkunde en aanverwante vakken heerste (en heerst?) een vraagstukcultuur. Het boek werd vaak slechts als vraagstukken-collectie gehanteerd.

De leraar vertelde een verhaal met een vraagstuk als voorbeeld en zette de leerlingen aan het werk met vraagstukken, die ze thuis konden afmaken. Dus geen 'studiehuis' maar 'studie thuis'. En ook moet men niet denken, zoals beweerd werd, dat zulks logisch-deductief plaats vond. In de laatste klas werd een belangrijk deel van de tijd besteed aan het maken van slechts eindexamenvraagstukken uit voorgaande jaren. Met die mechanica werden op het eindexamen in het algemeen hoge cijfers bereikt. Er waren nauwelijks leerlingen die een mondeling examen kregen opgelegd. Bij 7 of meer voor het schriftelijk was men daarvan vrijgesteld. Maar goede cijfers wil nog niet zeggen een goed vak.

Maar als een docent met een vak goede resultaten bereikt, dan wil hij dat niet graag afstaan. En door Freudenthal werd aan de middelste poot van WiMcCos gezaagd. Dat zal hem toen niet populair gemaakt hebben.

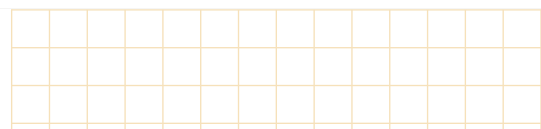
Nu ik deze hbs-mechanica nog eens bekijk, kom ik tot de conclusie dat Freudenthal met zijn kritiek gelijk had. Alleen werd het op een ontactische manier gebracht. Hierbij leidde zijn 'critiek' niet tot 'positieve actie'. Het was toen zinnig geweest het hele vak te herzien en een degelijk studieboek mechanica te schrijven, waarin dan de wiskunde op een realistische wijze werd toegepast. Het vak had nu nog als zelfstandig vak kunnen bestaan, mits men niet weer zou vervallen in rare eindexamenvraagstukken.

Bij dit verhaal van mij zal de lezer ook niet begrijpen waarover het handelt. Om de sluier iets op te lichten voeg ik toe een deel van het laatste hbs-eindexamen Mechanica uit 1962; 45 jaar geleden (*zie figuur 1*).

### Hoofdstuk 7, de niveautheorie

Die mechanica is eigenlijk een ondergeschikt onderwerp in het kader van het gehele boek. Ik schroom nu om nog enig commentaar te leveren op detailkwesties. 'Freudenthal en de niveautheorie', een belangrijk onderwerp.

Het is aanbevelenswaardig dit hoofdstuk nog eens apart uit te werken, en dan de belangrijkste artikelen, waaruit de citaten gekozen zijn, volledig weer te geven. Goed begrijpen doe ik het zo niet.



Het is jammer dat Van Hiele zelf niet meer aan het woord gelaten is door de weergave van artikelen die van hem afkomstig zijn. En heeft mevrouw La Bastide, in die 10 jaar dat zij met het boek bezig was, niet de behoefte gehad Pierre van Hiele zelf te spreken? Die niveautheorie is ongevaarlijk en kan geen schade aanrichten. Als ik het begrijp, is het een hulpmiddel om het leerproces te bestuderen en het leren te sturen. Verder kan het toegepast worden bij ieder vak en in welke stijl dat vak ook gegeven wordt, zij het dat men voor verschillende vakken de omschrijving van de niveaus dient aan te passen. Freudenthal blijkt gecharmeerd te zijn van Van Hiele, vooral van zijn niveautheorie. In een interview met Piere van Hiele afgenomen door Alberts en Kaenders (Nieuw Archief voor Wiskunde, september

2005) laat hij zich minder positief uit over Freudenthal. Hij vond hem bezig en dominant. En hij zegt: 'Ja, ik geloof eigenlijk dat hij van die denkniveaus niet veel begrepen heeft.' (Nieuw Archief voor Wiskunde, 3 september 2005, pag. 251, middelste kolom.) Het lijkt mij interessant als men eens het studiehuis ging benaderen met die niveaus.

### Realistisch wiskundeonderwijs

In het boek komt ook aan de orde het door Freudenthal gepropageerde 'realistisch wiskundeonderwijs'. Nu ben ik in 1962 gelijk met de mechanica uit het onderwijs verdwenen. Ik heb daarom geen inzicht in de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, vooral van de laatste jaren. Wel heb ik enige keren examens bijgewoond, de staatsexamens. Daar krijgt men geen beeld omtrent wat zich werkelijk in het onderwijs afspeelt. Wel heb ik zo een vaag beeld van die realistische wiskunde. Het was zeker illustratief geweest, en niet alleen voor mij, indien lesvoorbeelden en fragmenten uit leerboeken waren weergegeven om die 'realistische methode' toe te lichten. Het was weer: 'Waar gaat het over?'

### Tot slot

Voor echte insiders is het F-boek van Sacha la Bastide door het vele materiaal waar naar verwezen wordt, een belangrijk boek.

### Naschrift

Het F-boek van Sacha la Bastide werd aangeduid als een 'deel'-biografie. Dat 'deel' wil hier zeggen dat slechts een bepaald vakgebied waar Freudenthal zich mee heeft beziggehouden, behandeld werd. Zo komt niet aan de orde: 'Freudenthal als wiskundige'. Ik vraag mij af of in de toekomst nog iemand te vinden zal zijn die voldoende wiskundige armslag bezit om het topologische werk van Freudenthal te bespreken. En dan moet die persoon ook nog zin hebben om zo'n omvangrijk karwei aan te vatten.

Ik ben mij ervan bewust dat ik mij beperkt heb in de behandeling van het boek. Het komt meer voor bij recensies dat men naast algemene opmerkingen enkele onderwerpen uitlicht en die nader bespreekt. Ik ben ook terughoudend geweest om de onderwijskundige consequenties van het werk van Freudenthal aan de orde te stellen. Ik heb twijfels. Regelmatig verneemt men thans in de media klachten uit het vervolgonderwijs, universiteit, hbo, etc., omtrent de resultaten van het wiskundeonderwijs in een voorgaande fase, het voortgezet onderwijs. Nu kan men veronderstellen dat die gebreken veroorzaakt worden door ministeriële en bestuurlijke maatregelen, zoals studiehuis, Tweede fase, bezuinigingen en beperking van het aantal contacturen. Maar reeds zo'n 25 jaar geleden, toen zulke maatregelen nog niet domineerden, werden universitaire wiskundedocenten al geconfronteerd met een teruggang. 'U bewijst alles. Op school hoefden we niets te bewijzen, en de leraar deed het ook niet.' Dan sommige eindexamenstukken waarbij die opgaven met een heel verhaal in een *would-be*-realistische context werden gepresenteerd. Die vraagstukken wekten bij mij de gedachte: 'De "flut" is weergekeerd.'

No. B 1

## EINDEXAMEN DER HOGEREBURGERSCHOLEN B IN 1962

Maandag 14 mei, 9.00—12.00 uur

### MECHANICA

Voor de grootte van de versnelling van de zwaartekracht neme men, waar nodig,  $10 \text{ m/sec}^2$ .

1. Een ideaal koord, dat over een gladde horizontale pen geslagen is, draagt aan het ene eind een stoffelijk punt  $A$  met een massa van  $9,5 \text{ kg}$  en aan het andere eind een stoffelijk punt  $B$  met een massa van  $10,5 \text{ kg}$ . Op het ogenblik dat de stoffelijke punten hun beweging beginnen is de afstand van  $A$  tot de grond  $5 \text{ meter}$  en die van  $B$  tot de grond  $7 \text{ meter}$ . Twee seconden nadat de beweging begonnen is breekt het koord.
  - a. Bereken de spanning in het koord gedurende de beweging vóór het breken van het koord.
  - b. Hoeveel seconden na het breken van het koord bereiken  $A$  en  $B$  de grond?
  - c. Bereken de grootte van de relatieve snelheid van  $A$  ten opzichte van  $B$  gedurende de beweging van  $A$  en van  $B$ , na het breken van het koord.
2. Een homogene kegel met top  $T$  staat met zijn grondvlak op een ruw hellend vlak (hellingshoek  $30^\circ$ ). Het vertikale vlak  $V$  door de as van de kegel snijdt de kegel volgens een gelijkzijdige driehoek  $TAB$  met zijde  $2p \text{ meter}$ .  $A$  en  $B$  liggen beide op het hellend vlak;  $B$  ligt hoger dan  $A$ . Het gewicht van de kegel is  $G \text{ newton}$ . Aan het hellend vlak is in een punt  $C$ , gelegen op het verlengde van  $AB$ , een homogene staaf scharnierend bevestigd zo, dat de staaf slechts in het vlak  $V$  kan draaien. Het gewicht van de staaf is eveneens  $G \text{ newton}$ . De staaf steunt, in horizontale stand, zonder wrijving tegen het midden  $D$  van de beschrijvende  $TB$  van de kegel. Het geheel is in evenwicht.
  - a. Construeer, uitgaande van het gewicht van de staaf, alle krachten die op de staaf en op de kegel werken. Neem voor de beschrijvende  $TB$  van de kegel een lijnstuk van  $9 \text{ centimeter}$  en stel een kracht van  $G \text{ newton}$  voor door een vector van  $5 \text{ centimeter}$ .
  - b. Hoe groot moet de wrijvingscoëfficiënt tussen kegel en hellend vlak minstens zijn?
  - c. Druk de afstand van het aangrijpingspunt van de totale reactie van het hellend vlak op de kegel tot het middelpunt van het grondvlak van de kegel in  $p$  uit.
  - d. Men vervangt nu, bij overigens dezelfde gegevens, de kegel door een andere met een gewicht van  $P \text{ newton}$ . Bewijs dat de kegel voor geen enkele waarde van  $P$  kantelt.

figuur 1

### Noot

Het adres van de recensent, Lourens van den Brom, is Ruimtevaartlaan 45, 1562 BB Krommenie.

# Somgetallen, priemgetallen en machten van 2

## DEEL 2

[ Rob van der Waall en Roger Hendrickx ]

### Wat zijn somgetallen?

Dit artikel is het tweede gedeelte van een bijdrage over somgetallen. Deel 1 verscheen in het vorige nummer van Euclides<sup>[6]</sup>. In deel 2 van dit dubbelartikel houden we ons opnieuw bezig met *somgetallen*<sup>[3]</sup>, getallen die als uitkomst zijn verkregen door  $k$  opeenvolgende getallen<sup>[1]</sup> bij elkaar op te tellen, waarbij  $k \geq 3$ . Enkele voorbeelden:

$$21 = 6 + 7 + 8 \quad (k = 3)$$

$$94 = 22 + 23 + 24 + 25 \quad (k = 4)$$

$$5394 = 12 + 13 + \dots + 103 + 104 \quad (k = 93)$$

Het kleinste somgetal is  $1 + 2 + 3 = 6$ . Het daarop volgende somgetal is  $2 + 3 + 4 = 9$ . De rij van alle somgetallen begint als volgt: 6, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, ...

We zagen in deel 1 dat niet alle getallen somgetallen zijn. Het getal 7 bijvoorbeeld is niet te schrijven als som met drie of meer termen. De vraag die in deel 1 rees, en ook beantwoord werd, was: welke getallen zijn somgetallen en welke niet? Het antwoord bleek te zijn: *Elk natuurlijk getal ongelijk 2 is óf een somgetal, óf een priemgetal, óf een macht van 2.*

Dit werd geformuleerd in de volgende stelling:

**Stelling 7.** *Geef de verzameling somgetallen aan met  $S$ , de verzameling van oneven priemgetallen met  $P$  en de verzameling der 2-machten  $\{2^i \mid i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  met  $M$ . Zij  $n$  een natuurlijk getal ongelijk aan 2. Dan geldt:  $n$  behoort tot precies één der verzamelingen  $S$ ,  $P$ ,  $M$ .*

### Meer over somgetallen

In dit tweede deel kijken we op hoeveel manieren we een gegeven somgetal kunnen schrijven als som.

We beginnen met een voorbeeld. Neem het getal 45. Het getal 45 is te schrijven

$$\text{als } 14 + 15 + 16 \quad (k = 3)$$

$$\text{als } 7 + 8 + 9 + 10 + 11 \quad (k = 5)$$

$$\text{als } 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad (k = 6)$$

$$\text{en als } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \quad (k = 9).$$

Men overtuige zich ervan dat deze vier manieren de enige zijn om 45 als som te schrijven.

Voor het getal 62 is er maar één schrijfwijze als som mogelijk (ga dit na). En wel als volgt:

$$62 = 14 + 15 + 16 + 17 \quad (k = 4)$$

Blijkbaar heeft het aantal schrijfwijzen als som voor een gegeven somgetal  $S$  niet veel te maken met de grootte van het getal. Maar wat bepaalt dan dat aantal?

We nodigen de lezer uit om aan de hand van een aantal voorbeelden de algemene regel voor het aantal schrijfwijzen van een somgetal te ontdekken. Daarbij blijkt het nuttig te zijn onderscheid te maken tussen even en oneven somgetallen. Om een tipje van de sluier op te lichten: zoals we uit deel 1 weten, is ieder somgetal  $S$  te schrijven als  $S = 2^n \cdot m$  waarbij  $m$  een oneven getal is met  $n \geq 1$ ,  $m \geq 3$  of met  $n = 0$ ,  $m \geq 3$ ,  $m$  niet priem.

We onderwerpen het getal 45 aan een nader onderzoek. Als we 45 ontbinden in factoren, vinden we  $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$ .

Merk op dat 45 de som is van een oneven aantal termen. **Zie** [st2], aan het einde van het artikel. Er moet dus gelden dat  $45 = k \cdot g$ , waarbij  $k$  het aantal termen is en  $g$  het gemiddelde is van die termen. Dit getal  $k$  is een deler<sup>[2]</sup> van 45 juist omdat 45 oneven is met  $g$  een geheel getal. De delers van 45 zijn 1, 3, 5, 9, 15, 45, zodat er dus hooguit zes oneven schrijfwijzen als som zouden kunnen zijn. Echter 1 en 45 vallen af.

De vier overblijvende mogelijkheden, corresponderend respectievelijk met  $k = 3, 5, 6, 9$  om 45 als som te verkrijgen, hadden we al beschreven.

### Aantal manieren

We gaan nu het *aantal manieren* bekijken waarop een somgetal  $S$  als een som kan worden geschreven; noem dat aantal  $M(S)$ . Het aantal delers van een getal  $n$  geven we aan met  $D(n)$ . Zoals we hierboven hebben gezien, geldt:

$$M(45) = 4 = 6 - 2 = D(45) - 2 \quad (\text{Ga zelf het laatste gelijkteken na.})$$

Ook vonden we:

$$M(62) = 1 = 2 - 1 = D(62) - 1$$

Door vervolgens een groot aantal voorbeelden van *oneven* somgetallen  $t$  af te checken wat hun waarden voor  $D(t)$  en  $M(t)$  betreft, wordt het aannemelijk dat de volgende stelling wel eens waar zou kunnen zijn.

**Stelling 8.** *Als  $S$  een oneven somgetal is, dan geldt  $M(S) = D(S) - 2$ .*

Het bewijs van stelling 8 combineren we met dat van stelling 9; zie hieronder.

Om tot stelling 9 te geraken bekijken we eerst een even somgetal, namelijk 60. Er geldt  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ . We hebben:

$$60 = 19 + 20 + 21 \quad (k = 3) \text{ en}$$

$$60 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 \quad (k = 5)$$

Het getal 60 is *niet* een som met 15 termen ( $3 \times 5$ ). Wel geldt:

$$60 = \underset{4}{4} + \underset{4}{5} + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

Proefondervindelijk is na te gaan dat de bovengenoemde drie mogelijkheden om 60 als somgetal te verkrijgen, de enige zijn. Er geldt:  $M(60) = 3 = 4 - 1 = D(15) - 1$ . Eerder was gevonden:  $M(62) = 1 = 2 - 1 = D(31) - 1$ .

Het ziet er naar uit dat het 'oneven stuk' van 60, en dito van 62, tot een algemeen verschijnsel aanleiding lijkt te geven. Welnu, de volgende stelling is waar.

283

Euclides

**Stelling 9.** Zij  $S$  een even somgetal,  $S = 2^n \cdot m$ , met  $n \geq 1$  en oneven  $m \geq 3$ . Dan geldt:  $M(S) = D(m) - 1$ .

**Bewijs** van stelling 8 en stelling 9 gecombineerd.

We werken steeds met een somgetal  $S$ , met  $S = 2^n \cdot m$ , oneven  $m \geq 3$ , gehele  $n \geq 0$ . Te bewijzen is dan:  $M(S) = D(S) - 2$  als  $n = 0$ , en  $M(S) = D(m) - 1$  als  $n \geq 1$ . Merk trouwens op dat  $m$  niet priem is als  $n = 0$ .

Kijk naar  $S = u + (u + 1) + \dots + (u + (k - 1))$  geschreven als som met  $k$  termen en met  $u \geq 1$ . Er geldt (*zie* [st1] aan het einde van het artikel):  $2S = k(2u + k - 1) = 2^{n+1} \cdot m$ . Als  $k$  oneven is, dan is  $2u + k - 1$  even, terwijl als  $k$  even is, het getal  $2u + k - 1$  oneven is. Merk op dat  $k$  deler is van  $2S$ . De waarde voor zo'n  $k$  die in aanmerking komt, bedraagt tenminste 3 en voor  $2u + k - 1$  is die waarde tenminste  $k + 1$ . Omgekeerd, als  $r \cdot r' = 2S$  met  $r$  een deler van  $2S$  die zowel aan  $r \geq 3$  voldoet als aan  $r' \geq r + 1$  met  $r + r'$  oneven, dan is  $S$  som van  $r$  termen (beginnend met  $u = \frac{1}{2}(r' - r + 1)$ ; merk op:  $u \geq 1$ ) maar niet als som van  $r'$  termen.

Beschouw nu in de rest van het betoog de lijst van alle delers  $d$  van  $m$ . Bij zo'n  $d$  hoort het getal  $d'$  zodat  $m = d \cdot d'$  geldt. Die  $d'$  is eveneens deler van  $m$ . Omdat elke deler van  $m$  oneven is, geldt ófwel  $2^{n+1} \cdot d < d'$  ófwel  $2^{n+1} \cdot d' < d$ .

We gaan nu na welke delers  $v$  van  $2S$  in aanmerking kunnen komen om als  $k$  te fungeren (dus  $S$  geschreven als som met  $v$  termen).

- Indien  $d \neq 1$  en  $d' \neq 1$ , dan is precies één der twee ongelijkheden  $3 \leq 2^{n+1} \cdot d < d'$  en  $3 \leq d' < 2^{n+1} \cdot d$  waar.

Als  $3 \leq 2^{n+1} \cdot d < d'$ , dan is  $S$  een som met  $2^{n+1} \cdot d$  termen, maar niet een som met  $d'$  termen.

Als  $3 \leq d' < 2^{n+1} \cdot d$ , dan is  $S$  een som met  $d'$  termen, maar niet met  $2^{n+1} \cdot d$  termen.

- Beschouw nu  $d = 1$  en  $n \geq 1$ . Dan is precies één der twee ongelijkheden  $3 \leq 2^{n+1} < m$  en  $3 \leq m < 2^{n+1}$  waar.

Als nu  $3 \leq 2^{n+1} < m$  geldt, dan is  $S$  een som met  $2^{n+1} \geq 3$  termen, maar niet een som met  $m$  termen.

Als  $3 \leq m < 2^{n+1}$ , dan is  $S$  een som met  $m \geq 3$  termen, maar niet een som met  $2^{n+1}$  termen.

- Bekijk vervolgens  $d = 1$  en  $n = 0$ . Dan is  $S$  noch een som met 2 termen (let op de afspraak over het begrip *som*), noch een som van  $m$  termen.

- Kijk nu naar  $d = m$  en  $n \geq 1$ . Dan is  $S$  noch een som met  $2^{n+1} \cdot m$  termen noch een som met één term.

- Als laatste, beschouw  $d = m$  en  $n = 0$ . Dan is  $S$  noch een som met  $2m$  termen noch een som met één term.

Samenvattend, alle mogelijkheden om bijdragen te leveren aan de bepaling van de waarde van  $M(S)$  zijn hiermee beschreven. Dus inderdaad:

-  $M(S) = D(S) - 2$  als  $S$  oneven is;

-  $M(S) = D(m) - 1$  als  $S = 2^n \cdot m$  geldt, met  $m$  oneven,  $m \geq 3$ ,  $n \geq 1$ .  $\square$

### Priemontbinding en aantal delers

Het aantal delers van een getal volgt gemakkelijk uit de priemontbinding van dat getal. Immers, laten  $p_1, \dots, p_k$  precies alle verschillende priemgetallen zijn die een gegeven getal  $n$  delen, zeg, iedere  $p_i$  gaat precies  $k_i \geq 1$  keer op in  $n$ . Dan is het aantal delers  $D(n)$  van  $n$  gelijk aan  $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_k + 1)$ .

Zo is  $D(2025) = 5 \cdot 3 = 15$ , want  $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ . Het oneven somgetal 2025 kan op 13 (= 15 - 2) manieren geschreven worden als som; dit volgt uit stelling 8, of ga dit expliciet na.

Het even somgetal 368 daarentegen kan slechts op één manier geschreven worden als som. Immers,  $368 = 2^4 \cdot 23$  en  $D(23) = 2$ , zodat uit stelling 9 volgt  $M(368) = 1$ .

Welke somgetallen een unieke representatie als som hebben? Daar mag u zelf achter zien te komen.

### Slot en opgave

In dit dubbelartikel hebben we eerst vastgelegd welke natuurlijke getallen somgetallen zijn en welke niet. Daarna zijn stellingen bewezen over het aantal manieren waarop een gegeven somgetal als som kan worden uitgedrukt.

Als een ingewikkelder iets om te bewijzen, wordt het volgende aangereikt.

Zij  $S$  een somgetal. Laat  $t(S)$  staan voor de kleinste mogelijke hoeveelheid termen in een schrijfwijze als som voor  $S$ . Het blijkt zó te zijn, dat voor oneven  $S$  het getal  $t(S)$  de kleinste priemdelers van  $S$  is. Als  $S$  even is, zeg  $S = 2^n \cdot m$ , met oneven  $m \geq 3$  en  $n \geq 1$ , dan is  $t(S)$  gelijk aan de kleinste priemdelers van  $m$ , tenzij die kleinste priemdelers groter is dan  $2^{n+1}$ ; in dat laatste geval geldt  $t(S) = 2^{n+1}$ .

Welke theorie over somgetallen valt er op te stellen als een somgetal nu eens gedefinieerd wordt als uitkomst van een optelling van opeenvolgende oneven getallen? Of als uitkomst van een optelling van tenminste drie 'willekeurige' getallen? 'Getal' betekent dan: positief, of 0, of negatief.

Voorbeeld van dit laatste:

$$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 11$$

Met de in dit artikel geschetste methoden moet men ook met deze vragen een heel eind kunnen komen.

### Naschrift

- Uit onderzoek van de bestaande literatuur zijn de auteurs tot de slotsom gekomen dat de stellingen 8 en 9 originele vondsten zijn.
- Voor zover aan de auteurs bekend is de waarde van het getal  $t(S)$  uit de opgave hierboven niet eerder beschreven, en ook niet aangetoond door anderen.
- De auteurs spreken hun erkentelijkheid uit jegens Jan Bauwens (Serskamp, België), prof.dr. Harrie C.M. de Swart (Universiteit Tilburg) en dr. Rob Bosch (Koninklijke Militaire Academie te Breda) bij het tot stand komen van dit artikel.



### Gebruikte stellingen uit deel 1

[st1] **Stelling 1.** Voor het somgetal  $S = u + (u+1) + \dots + (u+k-2) + (u+k-1)$

geldt:  $S = \frac{1}{2}k(2u+k-1)$ ; hierbij is  $u \geq 1$ .

[st2] **Stelling 2.** Zij  $S$  een somgetal. Dan is  $S = k \cdot g$ , waarbij  $k$  het aantal termen in de som is en  $g$  het gemiddelde van de termen. Bovendien geldt:

$$g = \begin{cases} \text{voor } k \text{ oneven : de middelste term} \\ \text{voor } k \text{ even : het gemiddelde van de twee middelste termen} \end{cases}$$

en telkens is  $2g \geq k + 1$ .

### Correcties in deel 1 in Euclides 82(6)

- In het bewijs van stelling 3 (pag. 235, rechts), regel 15 en 16 van boven: “waarbij  $k$  en  $g$  gehele getallen” vervangen door “waarbij  $k$  en  $2g$  gehele getallen”
- In stelling 5 (pag. 236, links), regel 7 van boven: “oneven getallen die” vervangen door “oneven getallen ongelijk 1 die”

(advertentie)

## Nationale Wiskunde Dagen

Op vrijdag 1 en zaterdag 2 februari 2008 worden de

### 14e Nationale Wiskunde Dagen

gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

#### Kosten per persoon

€ 360,00 bij overnachting op een tweepersoons kamer en

€ 395,00 bij overnachting op een eenpersoons kamer.

Begin september wordt de programmaproject met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Meer informatie over de **NWD** is nu al te vinden op [www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd).

#### Inlichtingen

Ank van der Heiden, telefoon: 030-263 55 55 of e-mail: [nwd@fi.uu.nl](mailto:nwd@fi.uu.nl)

### Noten

- [1] Het woord ‘getal’ betekent hier: natuurlijk getal. Dus: ( $t$  is een getal)  $\Rightarrow$  ( $t$  is geheel en  $t \geq 1$ ).
- [2] Met ‘ $b$  is een deler van  $a$ ’ wordt bedoeld dat  $b$ ,  $a$  en  $a/b$  alle geheel en positief zijn. Voorbeelden: 7 is deler van 119; 8 is geen deler van 124.
- [3] Elk getal dat als uitkomst is verkregen door een  $k$ -tal opeenvolgende getallen bij elkaar op te tellen, waarbij  $k \geq 3$ , noemen we een *somgetal*. Voor dat somgetal zeggen we wel: het is een *som* met  $k$  termen. De woorden *somgetal* en *som* worden door ons steeds in bovenstaande connotaties gebruikt.

### Literatuur

- [4] Edouard Barbette: *Les sommes de p-ièmes puissances distincts égales à une p-ième puissance*. Parijs: Gauthiers-Villars (proefschrift, Luik, 1910). Zie daarin Problème III (pp. 18-25) met betrekking tot stelling 7.
- [5] Edouard Barbette: *Sur la décomposition des nombres en facteurs*. In: *L'Enseignement Mathématique (Revue Internationale)*, Vol. 13, 1911, pp. 261-277. Stelling 7 is daarin te vinden op pag. 268.
- [6] R.W. van der Waall, R.L.L. Hendrickx: *Somgetallen, priemgetallen en machten van 2; deel 1*. In: *Euclides* 82(6), april 2007; pp. 234-236.

### Over de auteurs

Dr. Robert W. van der Waall was (tot zijn pensionering in 2006) verbonden als universitair hoofddocent algebra aan de Universiteit van Amsterdam, na werkzaam geweest te zijn aan de Gelderse Leergangen en de Katholieke Universiteit Nijmegen. Zijn wiskundige interesse gaat vooral uit naar getallentheorie, groepentheorie, meetkunde en geschiedenis van de wiskunde. E-mailadres: [waallr@science.uva.nl](mailto:waallr@science.uva.nl)  
Dr. Ing. Roger L.L. Hendrickx is technisch ingenieur (elektronica) en wiskundige. Sinds 1978 is hij zaakvoerder van het Expertise- en Schaderegelingskantoor Trans Technics Survey te Antwerpen; sinds 1976 staat hij ingeschreven op de lijsten der deskundigen van de Rechtbanken van Antwerpen, Brussel en Gent. E-mailadres: [tts@skynet.be](mailto:tts@skynet.be)



## VERSCHENEN /

### RIJK AAN BETEKENIS

*Rijk aan betekenis* is de titel van het zogeheten visiedocument van de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, cTWO, die als vernieuwingscommissie fungeert voor de curriculumherziening havo/vwo van 2011. Het boekje vormt het uitgangspunt voor de inhoudelijke ontwikkeling van concept-examenprogramma's wiskunde A, B, C en D. Belangrijke punten die in het visiedocument aan de orde komen, zijn onder meer:

- doorlopende leerlijnen,
- aansluiting hoger onderwijs,
- gebruik van ICT,
- concepten en contexten,
- centrale rol van de leraar.

Het boekje is aan te vragen via [info@ctwo.nl](mailto:info@ctwo.nl) en te downloaden via [www.ctwo.nl](http://www.ctwo.nl) (onder publicaties).



Ondertitel: Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs

Uitgever: cTWO, Postbus 9432,  
3506 GK Utrecht (2007)

64 pag.

## Aansluiting NVvW bij de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP

[ Swier Garst ]

### Aansluiting per 1 augustus a.s.

De jaarvergadering van november ligt alweer een tijdje achter ons. Belangrijk punt op de ledenvergadering was de aansluiting van de NVvW bij de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP<sup>[1]</sup>. Dat we al in november een beslissing moesten nemen was belangrijk om de NVvW per 1 januari 2007 bij de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP aan te melden.

Een aantal organisatorische, voorbereidende stappen voor deze aansluiting zijn genomen.

Door een registeraccountant is het aantal leden per 1 januari 2007 vastgesteld aan de hand van een door onze ledenadministratie verstrekte opgave. Mede naar aanleiding van de accountantsverklaring is de NVvW geaccepteerd als lid van de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP. Het lidmaatschap gaat op 1 augustus 2007 in. De NVvW is uitgenodigd voor de vergaderingen van de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP. Namens de NVvW zal onze secretaris Wim Kuipers de vergaderingen van de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP bezoeken.

### Statuten

Omdat de NVvW de verplichting op zich heeft genomen om zijn leden te ondersteunen in geval van problemen van rechtspositionele aard, moeten de statuten met een artikel worden uitgebreid. Voorts zal de NVvW bevoegdheid krijgen om collectieve arbeidsovereenkomsten aan te gaan. Deze bevoegdheid zal worden overgedragen aan de Federatie Onderwijsbonden

CMHF/MHP. Ook hiervoor dienen de statuten gewijzigd te worden.

Het bestuur is bezig deze aanpassing van de statuten voor te bereiden. Daarbij wordt het bestuur bijgestaan door een notaris die de statuten tevens zal beoordelen op aansluiting bij de huidige wetgeving en actualiteit. Als het bestuur de wijzigingsvoorstellen beoordeeld heeft, krijgen de leden deze eveneens voorgelegd met de vraag om instemming. We houden iedereen op de hoogte!

### Noot

- [1] Centrale van Middelbare en Hogere Functionarissen bij Overheid, Onderwijs, Bedrijven en Instellingen / Unie MHP; Vakcentrale Middengroepen en Hoger Personeel (websites: [www.cmhf.nl/](http://www.cmhf.nl/) en [www.vc-mhp.nl/](http://www.vc-mhp.nl/)).

# De paradoxale dobbelstenen

[ Frits Göbel ]

Het volgende spel voor twee personen A en B wordt gespeeld met drie dobbelstenen. De dobbelstenen zijn nogal ongewoon; *zie figuur 1*. De achterkant is steeds gelijk aan de voorkant, zodat het in feite driezijdige dobbelstenen zijn.

Het spel verloopt nu als volgt. A kiest een dobbelsteen, B kiest één van de twee overige. A en B gooien tegelijk. Wie het hoogst gooit, heeft gewonnen.

Het paradoxale bestaat hierin dat de tweede speler in het voordeel is!

## Opgave 1

Bepaal de optimale strategie voor B en de bijbehorende winstkans.

Mijn echtgenote heeft dit spel gespeeld op een fancy fair van de school waar zij toen werkte. Boven de kraam stonden op een stuk karton de spelregels, figuur 1 en de tekst: 'Rood, wit, groen; dit moet u toch eens doen.' Dat waren de kleuren van de drie dobbelstenen, en wel in de volgorde die de tweede speler nodig heeft om in het voordeel te zijn.

De getallen op de dobbelstenen kunnen als volgt in een rij worden weergegeven: 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2; dat wil zeggen: het eerste, zesde en achtste getal staan op dobbelsteen nummer 1, enz.

Algemeen kunnen drie  $n$ -zijdige dobbelstenen worden gerepresenteerd door een rij van de lengte  $3n$  waarin alle termen 1, 2 of 3 zijn. Dat is een handige representatie bij het bepalen van winstkansen.

## Opgave 2

Bepaal een optimale strategie en de bijbehorende winstkans voor drie 6-zijdige dobbelstenen, waarop de getallen zo gekozen zijn dat die maximale kans zo groot mogelijk is.

Volgens het voorgaande zouden de getallen op die dobbelstenen 1, 2, ..., 18 moeten zijn, maar het aantal verschillende getallen kan vaak worden verminderd zonder de maximale kans te verkleinen.

## Opgave 3

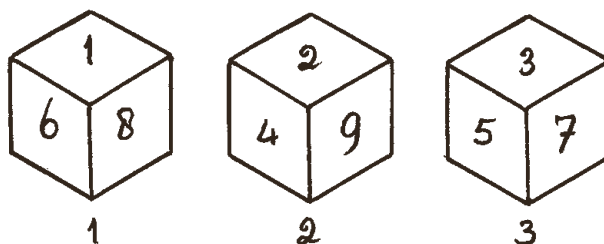
Behandel ook nog de 8- en de 12-zijdige dobbelsteen.

Oplossingen kunt u mailen naar [a.gobel@uws.nl](mailto:a.gobel@uws.nl) of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.

Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.

De deadline is 21 juni 2007.

Veel plezier!



figuur 1

# Polyomino's

Er waren elf inzenders; vijf daarvan hebben alleen opgave 1 aangepakt. Polyomino's zijn toch niet bij iedereen even populair!

De eerste opgave gaf geen problemen. Een mogelijke formulering van het antwoord is als volgt.

Laat  $g(n)$  het maximale gat bij  $n$  tegels zijn. Dan is voor  $k > 1$ :

$$g(4k) = (k-1)^2 \text{ en } g(4k+2) = k(k-1).$$

Voor oneven  $n$  is  $g(n) = (n^2 - 12n + c)/24$ , waarin  $c = 35, 27, 11, 11, 27, 35$  al naar gelang  $n$  gelijk is aan 1, 3, 5, 7, 9 of 11 modulo 12.

Veel inzenders volstonden niet met het antwoord, maar gaven ook een degelijke afleiding van het resultaat.

Het maximale gat bij de tweede opgave meet 11 bij 11. Eén van de mogelijke oplossingen, die ik aan de inzending van Herm Jan Brascamp heb ontleend, ziet u in **figuur 2**. Alle ingezonden oplossingen zijn verschillend. Het is frappant dat de grotere waarden van de oppervlakte van het gat zo dun gezaaid zijn. De enige mogelijkheden na 55 zijn 80, 91, 98 en 121. Wobien Doyer bewees dat 121 inderdaad het maximum is.

Het maximale aantal vierkanten in de derde opgave is 6. Er zijn twee partities van 89 die bruikbaar blijken:  $3 \times 25 + 9 + 4 + 1$  en  $36 + 25 + 3 \times 9 + 4 + 1$ .

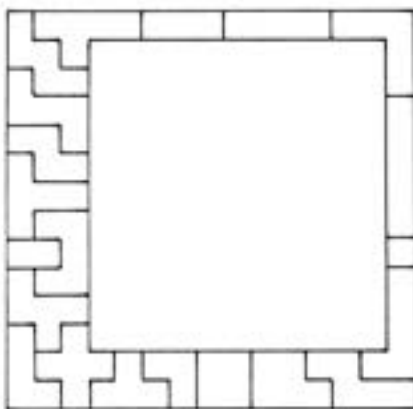
Gerhard Riphagen gaf voor beide partities een oplossing. Lieke de Rooij nam de eerste; Herm Jan Brascamp, Wobien Doyer en Jan Meerhof namen de tweede. Als je eenmaal weet dat een partitie een oplossing toelaat, is het niet moeilijk om er een te vinden.

Enkele inzenders bewezen dat zes vierkanten maximaal is.

## Ladderstand

In verband met een fout die ik onlangs maakte bij de prijzentoekenning geef ik deze keer de hele ladder zoals die er vandaag (op 31 maart 2007) uitziet. Hij staat overigens ook op de website van Euclides ([www.nvvw.nl/eucladder.html](http://www.nvvw.nl/eucladder.html)).

W. van den Camp 400  
H.J. Brascamp 392  
J. Meerhof 379  
L. de Rooij 254  
G. Riphagen 212  
L.H. van den Raadt 151  
H. Klein 133  
N. Wensink 120  
W. Doyer 100  
K. Verhoeven 59  
T. Kool 30  
H.J. van Weers 30  
K. Meerhof 29  
A. Geijer 20  
J. Smit 16



figuur 2



# PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



## zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehele
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde

21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

22. Spelen en Delen

23. Experimenteren met kansen

Zie verder ook [www.nvww.nl/zebrareeks.html](http://www.nvww.nl/zebrareeks.html) en/of [www.epsilon-uitgaven.nl](http://www.epsilon-uitgaven.nl)

## Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

## Wisforta – wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formule-kaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

## Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: [www.nvww.nl/lustrumboek2.html](http://www.nvww.nl/lustrumboek2.html)  
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: [www.nvww.nl/Publicaties2.html](http://www.nvww.nl/Publicaties2.html)

## Examens 1e tijdvak

wo 30-05: vmbo KB/GT  
wo 30-05: havo B1/B12  
do 31-05: havo A12  
vr 01-06: vwo A1/A12

## Regionale examenbesprekingen

Zie pag. 241 in Euclides 82(6).

Voor overige internet-adressen zie

[www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php](http://www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php)

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie

[www.wiskundeonderwijs.nl](http://www.wiskundeonderwijs.nl)

## KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail ([redactie-euclides@nvww.nl](mailto:redactie-euclides@nvww.nl)). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook [www.nvww.nl/euclricht.html](http://www.nvww.nl/euclricht.html).

| nr. | verschijnt   | deadline   |
|-----|--------------|------------|
| 8   | 21 juni 2007 | 8 mei 2007 |

## Voorlopige data 83e jaargang

| nr. | verschijnt   | deadline     |
|-----|--------------|--------------|
| 1   | 27 september | 24 juli      |
| 2   | 1 november   | 18 september |
| 3   | 20 december  | 6 november   |
| 4   | 7 februari   | 11 december  |
| 5   | 6 maart      | 22 januari   |
| 6   | 17 april     | 4 maart      |
| 7   | 29 mei       | 8 april      |
| 8   | 30 juni      | 15 mei       |

## do. 31 mei t/m za. 2 juni, Nijmegen

Geometry days  
Organisatie Radboud Universiteit  
Nijmegen

## dinsdag 5 juni, Utrecht

Werkconferentie Rekenproblemen en Dyscalculie  
Organisatie NVORWO

## wo. 6 juni t/m vr. 8 juni, Groningen

Onderwijs Research Dagen 2007  
Organisatie GION

## vrijdag 8 juni, Utrecht

Bèta onder de Dom / workshops voor vwo bèta-docenten  
Organisatie Faculteit Bètawetenschappen  
Universiteit Utrecht

## woensdag 13 juni, Utrecht

Dé Start, studiedag invoering Wiskunde D  
Organisatie FIsme

## vr. 24 en za. 25 augustus, Eindhoven (TU/e)

## vr. 31 augustus en za. 1 september, Amsterdam (CWI)

Vakantie cursus 2007: Wiskunde in beweging  
Organisatie CWI

## vrijdag 14 september, Eindhoven (TU/e)

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade  
Organisatie Stichting NWO

## vr. 1 en za. 2 februari 2008, Noordwijkerhout

14e Nationale Wiskunde Dagen  
Organisatie FIsme  
Zie de advertentie elders in dit nummer.



**Hogeschool van Amsterdam**  
Educatieve Hogeschool van Amsterdam



**Je wilt méér ... als leraar Wiskunde en als  
onderwijsexpert? Volg een eerstegraadsopleiding en  
wordt Master of Education!**

Ben je tweedegraads wiskundedocent in het voortgezet onderwijs en toe aan een volgende stap in je carrière? Kies dan voor de eerstegraads lerarenopleiding Wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam en krijg de titel Master of Education. Een praktijkgericht, driejarig deeltijdprogramma dat tot stand komt in nauwe samenwerking met de Universiteit van Amsterdam.

Als Master Leraar Wiskunde heb je een eerstegraads bevoegdheid, zodat je ook les kunt geven in de bovenbouw. En zul je binnen je school meer betrokken worden bij kwaliteitszorg en onderwijsvernieuwingen.

Meer weten? Kijk op [www.ehva.nl](http://www.ehva.nl)  
of bel het Onderwijsbureau: 020 – 599 55 92.

# Nieuw :: Moderne wiskunde 9

Volledig herziene edities voor  
havo/vwo onderbouw en Tweede Fase



Kijk voor meer informatie op [www.modernewiskunde.wolters.nl](http://www.modernewiskunde.wolters.nl)