

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

december

06

nr 3

jaargang 82

**Centraal examen
vmbo-BB met de
computer**

**Modelleren op
verschillende
niveaus**

**Instrumenteel
uitleggen en
begrijpen**

**Parate kennis
en algebra,
aflevering 1**

**A.D. de Groot
(1914-2006)**



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

d e c e m b e r

0 6
n r 3

j a a r g a n g 8 2

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch

Klaske Blom

Marja Bos, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Gert de Kleuver, voorzitter

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Jos Tolboom

Joke Verbeek

Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de

hoofdredacteur: Marja Bos,

Koematen 8, 7754 NV Wachtum

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in driefvoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en productie:

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv, Veenendaal

Druk: Giethoorn Ten Brink, Meppel

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 63 78

E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,

Waalstraat 8, 8052 AE Hattem

Tel. (038) 444 70 17

E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 50,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Niet-leden: € 55,00

Instituten en scholen: € 140,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50

Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:

Gert de Kleuver,

De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal

Tel. (0318) 54 22 43

E-mail: g.de.kleuver@nvvw.nl

KORT VOORAF [Marja Bos]

Reactie Resonansgroep

Eind augustus stelde de Minister van OCW de zogeheten ‘Resonansgroep wiskunde’ in, onder voorzitterschap van Jan van de Craats. Dit gebeurde naar aanleiding van klachten uit het hoger onderwijs over de wiskunde-aansluiting vanuit havo en vwo. Half november heeft de Resonansgroep twee publicaties naar buiten gebracht.

De eerste is een standpuntbepaling ten aanzien van de herverkavelde havo/vwo-examenprogramma's vanaf 2007. De Resonansgroep meldt een gebrek aan reken- en formulevaardigheid in vrijwel alle sectoren van het hoger onderwijs, en doet de volgende aanbevelingen om deze problemen op te lossen:

1. *Zorg ervoor dat het ontwikkelen van reken- en formulevaardigheid weer als een rode draad door het gehele wiskundeonderwijs heenloopt.*
2. *Splits voor alle wiskundevakken het centrale schriftelijke eindexamen in twee delen: een deel dat zonder hulpmiddelen (grafische rekenmachine en formulekaart) wordt afgenomen, en een deel waarin wel van deze hulpmiddelen gebruik mag worden gemaakt.*
3. *Heroverweeg de rol van contexten in het wiskundeonderwijs.*

Verder dringt de Resonansgroep er op aan om in 2007 de differentiaalrekening niet te verwijderen uit het centraal schriftelijk examen wiskunde A vwo en de onderdelen kansrekening en statistiek terug te brengen in het examenprogramma voor wiskunde B vwo. Gezien de aard van de opdracht aan de Resonansgroep (aansluiting verbeteren) is het natuurlijk niet zo merkwaardig dat de domeinen van de nieuwe programma's in deze publicatie voortdurend getoetst worden aan doorstroomrelevantie. Zo wordt voorgesteld het domein ‘Voort-gezette meetkunde’ (bewijzen en redeneren) voor wiskunde B vwo te schrappen met als argument dat deze leerstof irrelevant zou zijn voor vervolgstudies. Maar waar de Resonansgroep mijns inziens wat minder oog voor heeft gehad, is de opvatting dat niet elk onderdeel van de examenprogramma's per se gericht hoeft te zijn op directe toepasbaarheid in het hoger onderwijs. Ik zou zelf het doel van het wiskundeonderwijs in de bovenbouw van havo en vwo graag wat breder zien. De tweede publicatie van de Resonansgroep betreft een schriftelijke reactie op het concept-Visiedocument van de Vernieuwingscommissie cTWO. Tegen de tijd dat dit nummer van Euclides bij u op de deurmat valt, zal er volgens de planning waarschijnlijk een eindversie van het Visiedocument liggen (zie www.ctwo.nl). U kunt de publicaties van de Resonansgroep inzien op www.resonansgroepwiskunde.nl. Een reactie van het NVvW-bestuur op de publicatie ten aanzien van ‘2007’ vindt u op de NVvW-website

Vooropleidingseisen universiteiten

Een tijdje geleden heeft de VSNU de nieuwe vooropleidingseisen bekend gemaakt die zij vanaf 2010 (vanuit de nieuwe profielen) wenselijk acht voor het wetenschappelijk onderwijs. Geheel definitief zijn deze doorstroomseisen nog niet: het VSNU-advies is al wél overgenomen door de Minister, maar moet nog worden goedgekeurd door de Tweede Kamer.

Een tweetal opvallende zaken:

- Natuurkunde wordt wel degelijk verplicht gesteld voor veel medische opleidingen. Toen destijds natuurkunde als verplicht NG-profielvak door het ministerie werd geschrapt, werd aangevoerd dat opleidingen als geneeskunde prima uit de voeten zouden kunnen met natuurkunde op vwo-3-niveau. Dat ligt kennelijk toch wat anders...
- In een voetnoot wordt gemeld dat voor technische studies en de studies wiskunde, informatica en natuur- en sterrenkunde (niet: natuurkunde) de desbetreffende universitaire instelling eventueel leerlingen mag toelaten met het profiel NG en wiskunde A, mits de student bij afronding van de propedeuse alsnog wiskunde B heeft ingehaald. Kortom, een jaar lang uitstel van de toelatingsvoorwaarde ‘wiskunde B’. Daarmee wordt op zijn minst de schijn gewekt dat wiskunde A voldoende zou zijn om het eerste jaar van sommige harde exacte studies succesvol te doorlopen. Dat klinkt toch wel wat bijzonder in het licht van de veelbesproken aansluitingsproblematiek...

Vmbo

Is er dan alleen nieuws aan het havo/vwo/hbo/wo-front? Ik dacht het niet! In dit nummer van Euclides doet Truus Dekker verslag van de stand van zaken rond de digitale examens in de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo. De moeite waard om kennis van te nemen, ook als u niet in vmbo-BB werkzaam bent!

INHOUD

85	Kort vooraf [Marja Bos]
86	Centraal examen wiskunde vmbo-BB helemaal met de computer [Truus Dekker]
89	Modelleren op verschillende niveaus [Bert Zwaneveld]
92	In memoriam de onderwijsman A.D. de Groot [Anne van Streun]
94	Aankondiging / Wintersymposium KWG
95	‘Bijles’ wiskunde havo 4B [Fred Goffree]
100	Rijk aan betekenis [Klaske Blom]
103	(W)iskundig kiezen / De Condorcet Paradox [Rob Bosch]
104	Aankondiging / Expositie Mathematische Keramiek
105	MATHADORE: het concept van de toekomst? [Frits Spijkers]
111	Parate kennis en algebra / Afl levering 1: Weten dat [Anne van Streun]
112	Geef uw leerlingen een kans [Quintijn Puite]
115	Verschenen
116	Verschenen
117	Jaarrede 2006 [Marian Kollenveld]
121	Van de bestuursafel [Wim Kuipers]
121	Platform VVVO [Henk Rozenhart]
122	Recreatie [Frits Göbel]
124	Servicepagina

Aan dit nummer werkte mee: Jan Meerhof.

Centraal examen wiskunde vmbo-BB helemaal met de computer...

...HET DUURT NOG EVEN

[Truus Dekker]

Inleiding

Een centraal examen wiskunde waar (bijna) geen papier aan te pas komt, het is een mogelijkheid waarmee binnen BB, de beroepsgerichte leerweg van het vmbo, de afgelopen jaren geëxperimenteerd is. In 2006 namen 100 scholen aan een pilot voor het digitale BB-examen wiskunde deel. Het was de bedoeling om deze digitale examenvorm in 2007 voor alle scholen in te voeren maar er waren nog teveel - met name organisatorische - problemen. In de zogenoemde 'Septembermededeling' van CEVO (www.eindexamen.nl) staat:

De digitale examens algemene vakken basisberoepsgerichte leerweg worden in 2007 in een (tot ca. 200 scholen uitgebreide) pilot afgenomen. Voor scholen die geen deel uitmaken van de pilot, is in 2007 nog geen mogelijkheid voor computerafname in de algemene vakken BB.

Goede resultaten bij de tot 200 scholen uitgebreide pilot van 2007 zijn voorwaarde voor een landelijke invoering in 2008. De 200 pilotscholen van 2007 voeren een 'proef op de som' uit voordat het examen wordt afgenomen. Intussen is het natuurlijk goed voor scholen en docenten om alvast rekening te houden met een mogelijke invoering in 2008 van een volledig digitaal BB-examen wiskunde voor alle scholen. Alle examensecretarissen hebben intussen al uitgebreid informatie ontvangen over het afnemen van de digitale examens.

In dit artikel wordt een overzicht van de stand van zaken op dit moment gegeven en worden enkele van de ervaringen van scholen die aan de pilot deelnamen besproken. Het geheel roept op dit moment waarschijnlijk meer vragen op dan er

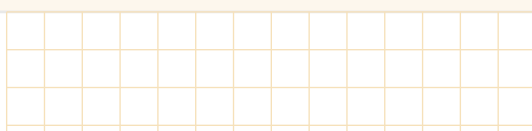
beantwoord kunnen worden. Misschien zou de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) daarom tegen het eind van dit schooljaar een aantal regionale bijeenkomsten kunnen organiseren om de ervaringen van docenten en leerlingen van de pilotscholen bredere bekendheid te geven? Andere mogelijkheden zijn om een discussie met docenten te voeren tijdens de jaarvergadering van de NVvW, of een workshop te organiseren tijdens de vooral voor vmbo-docenten bestemde Reehorstconferentie. Dit artikel kan mogelijk een aanzet zijn tot die verdere discussie.

Een digitaal examen wiskunde

De centrale examens waar het in de vmbo-BB-leerweg over gaat, zijn volledig digitaal. Dat wil zeggen dat alle informatie en alle vragen via het beeldscherm worden gegeven. Er zijn verschillende vraagvormen:

- meerkeuzevragen, waarbij een letter als antwoord gekozen moet worden;
- kort-antwoord-vragen, waarbij het antwoord meestal bestaat uit een enkel getal of woord;
- waar/niet waar vragen;
- lang-antwoord-vragen, bijvoorbeeld een complete uitwerking of een redenering;
- opdracht tot het maken van tekeningen en grafieken.

De antwoorden worden ook weer via dat beeldscherm ingevoerd. Op dit ogenblik geldt dat voor 'de meeste' antwoorden, want bijvoorbeeld een tekening of grafiek maken, de lengte van een lijnstuk of de grootte van een hoek meten of een antwoord als $50 m^3$ noteren was het afgelopen jaar nog niet mogelijk. Deze problemen zullen bij de pilot van 2007 waarschijnlijk zijn opgelost.





Vanaf 2007 zullen er geen papieren bijlagen meer nodig zijn.

Op de site van CEVO, de centrale examencommissie vaststelling examenopgaven vwo, havo, vmbo (www.cevo.nl), is over het digitale examen wiskunde voor vmbo-BB de volgende informatie te vinden:

De examens in de algemene vakken in het vmbo bb kunnen ook afgenomen worden in wat we het 'CSPE-model' kunnen noemen. Het CSPE-model waarbij de school zelf het afnamemoment bepaalt en de herkansingen of het inhalen regelt binnen een ruime periode, maakt beter maatwerk mogelijk.

In 2005 hebben elf scholen met een dergelijk model geëxperimenteerd. Binnen de periode die ook vastgesteld is voor de CSPE's namen de scholen de examens voor de algemene vakken af. Ze konden de examenafname voor verschillende leerlingen naar gelang hun mogelijkheden op verschillende momenten vaststellen aangezien de examens in drie of

vier varianten aangeboden werden.

In 2006 werd de pilot op ruim 100 scholen herhaald. De examens worden digitaal afgenomen en hebben een afnametijd van één uur. De digitale afname heeft als voordeel dat er één vraag tegelijk gepresenteerd wordt (leerlingen vinden dit prettig), dat er gebruik gemaakt kan worden van kleur, video en geluid. De gesloten vragen worden direct gescord. De open vragen moet de docent uiteraard beoordelen. Bij een enkele vraag waarbij het programma nog niet voldoende mogelijkheden heeft (bijv. een tekening maken) moet nog een papieren bijlage gebruikt worden.

Het programma dat hiervoor gebruikt wordt, is een programma dat op het netwerk van de school geïnstalleerd kan worden.

Opmerking. CSPE is een samentrekking van Centraal Schriftelijk en Praktijk Examen. In het CSPE worden theorie

en praktijk van het beroepsgerichte vak geïntegreerd getoetst.

Een voordeel van een digitaal examen is dat het afgenomen kan worden op een tijdstip dat de school organisatorisch goed uitkomt. Het is ook eenvoudiger om een leerling een herkansing te laten maken.

De vaardigheden waarover de vmbo-leerling aan het eind van deze opleiding moet beschikken, worden in het schoolexamen, het centraal examen, of in allebei getoetst. Hoe en wanneer het schoolexamen wordt afgenomen is uiteraard een zaak van de school zelf.

Voor- en nadelen

Wat zijn nu, behalve organisatorisch, de voordelen van een digitaal examen? Ik noem er hier een aantal, in willekeurige volgorde:

- Op elke beeldscherm-pagina is steeds maar één vraag zichtbaar. De relevante informatie uit de context wordt op elk nieuw scherm herhaald. Voor leerlingen die moeite hebben om het overzicht te bewaren, is dat prettig.
- Geen gedoe met allerlei papieren op je tafel. Ook dit is een voordeel voor leerlingen die moeite hebben om het overzicht te bewaren.
- Inleidende tekst kan worden voorgelezen, prettig voor leerlingen die kampen met dyslexie, minder tekst op het scherm. Voor het beluisteren van de informatie is dan wel het gebruik van een koptelefoon aan te bevelen.
- Afbeeldingen zijn in kleur mogelijk.
- De context kan worden ingeleid door middel van een stukje video en/of audio.
- Leerlingen met een slecht leesbaar handschrift hoeven zich daar geen zorgen over te maken (ook prettig voor de docent trouwens).

En een voordeel dat voor de docent geldt:

- Een deel van de antwoorden wordt al via de computer beoordeeld, de docent beoordeelt alleen de lang-antwoordvragen en het werk dat eventueel op een bijlage moest worden gemaakt; nakijken van een examen gaat dus sneller.

Nadelen zijn er ook. Sommige mogelijkheden, zoals kunnen meten en tekenen via het beeldscherm, zijn vanaf het examen van 2007 geen probleem meer. Bij wiskunde

vmbo-BB komen niet veel wiskundetekens voor, maar bijvoorbeeld eenheden voor oppervlakte en formules moeten natuurlijk wel op de juiste manier kunnen worden opgeschreven en ook een euroteken voor een geldbedrag moet kunnen worden ingevuld. Dit type problemen wordt bij de wiskunde-examens voor KB (kader beroepsgericht) en GL/TL (de theoretische richting van het vmbo) alleen maar groter, denk bijvoorbeeld aan gebroken vormen en exponenten. Over de invoering van digitale examens voor die leerwegen is overigens nog geen beslissing genomen.

Verder zou het wel handig zijn wanneer er een 'ingebouwde' rekenmachine beschikbaar is, zodat leerlingen geen fouten maken met het overnemen van getallen van hun eigen rekenmachine. Bijvoorbeeld 79 uitrekenen en 97 opschrijven is een veel voorkomende vergissing. De computer houdt al wel rekening met de decimale punt die de rekenmachine laat zien en de decimale komma die in Europa gebruikt wordt.

Leerlingen moeten vertrouwd zijn met het werken op de computer; is dat voor alle leerlingen het geval? Het zijn niet uitsluitend leerlingen uit de sectoren Techniek en Landbouw die het wiskunde-examen doen. Computervaardigheden van leerlingen worden nogal eens overschat! En het gaat tenslotte om het toetsen van wiskundekennis en -vaardigheden, niet om het testen van vaardigheid in het werken met de computer.

Een ander belangrijk punt is een andere vraagvorm waar vmbo-leerlingen niet aan gewend zijn. Het beantwoorden van meerkeuzevragen bijvoorbeeld vraagt de nodige oefening. Ook waar/niet waar combinaties leveren soms problemen op. Voor de antwoorden op kort-antwoordvragen kunnen een aantal varianten worden opgenomen die goedgekeurd worden door het computerprogramma. Maar of dat alle varianten zijn die docenten zouden accepteren? De docent kan geen rekening meer houden met simpele notatiefouten of verschrijvingen. Maar vooral bestaat het gevaar dat er meer naar 'weetjes' dan naar inzicht gevraagd zal worden door de grotere nadruk op gesloten vragen. De open vragen, waarvan de leerling de antwoorden intoetst en die de docent zelf nakijkt, kunnen dus zeker niet gemist worden. De

computer kan immers geen redeneringen 'scoren'. Focussen op het geven van exacte antwoorden en het beantwoorden van gesloten vragen is geen goede voorbereiding op vervolgonderwijs of beroepspraktijk. Bij de voorbereiding op het examen zullen de docenten erop moeten toezien dat ook vaardigheden zoals het beantwoorden van inzichtvragen worden geoefend. Toetsen of leerlingen zelf een onderzoek(je) kunnen uitvoeren, kunnen samenwerken of vragen beantwoorden die passen binnen de beroepspraktijk, moeten aandacht krijgen binnen het schoolexamen.

En...

Geheimhouding van de opgaven is een ander onderwerp waarvan op dit ogenblik nog niet duidelijk is of en hoe dat problemen op zou kunnen leveren. De diverse varianten van eenzelfde examen moeten 'gelijkwaardig' zijn in lengte en moeilijkheidsgraad. Elke docent die zelf zijn of haar toetsen maakt, weet hoe moeilijk dat is.

Oefenen met digitale examens

Voordat leerlingen een verplicht centraal digitaal examen kunnen doen, moeten ze met deze manier van examineren ervaring opgedaan hebben. Op de website van Cito (www.cito.nl) wordt gemeld dat digitale oefenexamens wiskunde voor vmbo te koop zijn 'zolang de voorraad strekt'. Scholen die meedoen aan de pilot, krijgen alle voorgaande digitale examens als oefenmateriaal voor docenten, leerlingen en

organisatie. Wanneer er nieuwe mogelijkheden beschikbaar komen, zoals het tekenen van rechte lijnen op het scherm, wordt hiervoor oefenmateriaal gemaakt voor de leerlingen, zodat ze tijdens hun centraal examen niet voor verrassingen komen te staan.

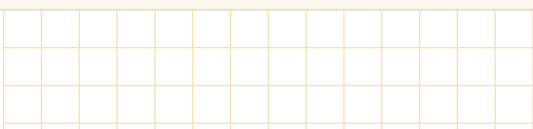
Welke oefenmogelijkheden er straks zullen zijn voordat alle vmbo-scholen verplicht aan het digitale examen wiskunde vmbo BB deelnemen, is op dit moment nog niet bekend. Examenmakers gaan er ongetwijfeld vanuit dat de leerlingen voor ze aan het 'echte' examen deelnemen op z'n minst een oefenexamen gemaakt hebben.

Tot slot nog dit. Oefenen met het maken van digitale examens geldt niet alleen voor leerlingen. Ook de scholen moeten oefenen, met installatie en organisatie. Je kunt je immers tijdens het examen geen technische problemen veroorloven. Het kan geen kwaad om daar nu alvast eens over na te denken.

Over de auteur

Truus Dekker is medewerker van het Freudenthal Instituut en maakte deel uit van de door CEVO ingestelde stuurgroep die de pilot 2005 voor de centrale examinering vmbo BB-avo begeleidde.

E-mailadres: T.Dekker@fi.uu.nl



Modelleren op verschillende niveaus

[Bert Zwaneveld]

Inleiding

Wiskunde op school moet allerlei doelen realiseren. De leerlingen moeten leren hoe de wiskunde werkt in de algebra met variabelen, formules en functies, in de meetkunde met vormen en figuren en met de eigenschappen van die figuren zowel in het platte vlak als de ruimte, in de statistiek met het overzichtelijk weergeven van grote verzamelingen waarnemingsgetallen en met het interpreteren daarvan. Dat moeten ze niet alleen allemaal begrijpen, ze moeten er bovendien vlot mee kunnen werken, denk in dit verband aan de recente discussie over de algebraïsche vaardigheden. Bij dat begrijpen hoort ook dat ze ervaren waar die wiskunde vandaan komt en hoe die wordt toegepast, al was het maar om ze voor wiskunde te motiveren. En tenslotte, maar zeker niet onbelangrijk, moeten de leerlingen voorbereid worden op het eindexamen. Ik heb dat eerder hier in Euclides de 'spagaat' van de schoolwiskunde genoemd: te veel meesters moeten dienen^[1]. Ideaal gesproken kunnen leerlingen aan het eind van hun schoolloopbaan niet alleen redelijk een eindexamen maken, maar kunnen ze ook een enigszins complexe situatie wiskundig modelleren en een probleem uit die context met al hun opgedane wiskundige kennis en kunde oplossen. Ze kunnen dit bijvoorbeeld laten zien in een praktische opdracht of een profielwerkstuk. Op deze manier ervaren de leerlingen wat de betekenis is van die wiskunde en dat wiskunde niet iets is dat beperkt blijft tot het werken met (abstracte) formules en het manipuleren daarvan. Vrijwel alle leerlingen die een havo of vwo voltooid hebben zullen in hun vervolgopleiding met wiskundige activiteiten te maken krijgen, maar niet iedereen zal over de algebraïsche vaardigheden van de studenten in bètavakken of in techniekvakken hoeven te beschikken. Die niet-bètatechniekstudenten zullen in hun vervolgopleiding meestal met kant en klare wiskundige modellen te maken krijgen, maar om daar goed mee om te kunnen gaan is ervaring met het zelf modelleren heel nuttig. In wat volgt ga ik aan de hand van een

voorbeeld nader in op een aantal aspecten van het wiskundig modelleren. Het voorbeeld is ontleend aan een artikel^[2] waarin de auteur ingaat op een manier om met behulp van ict problemen aan te pakken en op te lossen. Vaak is het dat de problemen echt lijken maar voor het wiskundeonderwijs een beetje gladgestreken worden zodat ze voor leerlingen behapbaar worden. Hier denk ik dat de context en de probleemstelling er achteraf bij bedacht zijn. Dat doet overigens niets af aan waar ik in dit stukje aandacht voor vraag. Ik presenteer nog een ander voorbeeld uit hetzelfde artikel, maar ik bespreek alleen het eerste voorbeeld. Het bekijken van dat andere voorbeeld en het trekken van conclusies laat ik aan de lezer over.

Voorbeeld 1

Veronderstel dat de leerlingen tijdens een gymnastiekles op een sportveld van de ene kant van het veld naar de andere kant moeten rennen en onderweg langs de zijkant van het veld hun deelnemerskaart moeten laten afstempelen. Begin- en eindpunt liggen niet precies tegenover elkaar. En in deze situatie wordt gevraagd naar de plaats waar het afstempelpunt zich zou moeten bevinden zodat de af te leggen weg zo kort mogelijk is.

Voorbeeld 2 (hier niet nader uitgewerkt)

In deze situatie gaat het om een voetballer die met de bal aan de voet op weg is naar de achterlijn van de andere partij. De verdedigers heeft zij achter zich gelaten. In deze situatie wordt gevraagd naar de plaats waar zij op doel zou moeten schieten.

Voorbeeld 1 nader bekeken

Zoals altijd met dit soort problemen is de eerste stap dat een eerste heel ruw model wordt gemaakt in de vorm van een schets die de situatie weergeeft; zie *figuur 1*. Afhankelijk van niveau en/of voorkennis van de leerlingen kan het verhaal nu op allerlei manieren didactisch vorm worden gegeven.

Mogelijkheid 1: tekenend en metend proberen. Hiervoor is een goede schaaltekening nodig;

de afstanden van begin- en eindpunt ten opzichte van de zijlijn en de lengte van de zijlijn moeten dus bekend zijn.

Mogelijkheid 2: rekenend proberen. Ook hiervoor geldt dat de afstanden van begin- en eindpunt ten opzichte van de zijlijn en de lengte van de zijlijn bekend zijn. Vervolgens wordt voor een aantal keuzen van het afstempelpunt via al dan niet gericht proberen met behulp van de stelling van Pythagoras de plaats voor het afstempelpunt zo goed mogelijk bepaald. Een rekenmachine is hierbij een voor de hand liggend hulpmiddel.

*Mogelijkheid 3: de vorige mogelijkheid is met Excel heel goed systematisch aan te pakken; zie *figuur 3a* en *figuur 3b*.* Hier zijn voor de afstanden van het beginpunt tot de zijlijn, de afstand van het eindpunt tot de zijlijn en de lengte van de zijlijn respectievelijk 18 m (*a*), 8 m (*b*) en 25 m (*c*) genomen. De afstand langs de zijlijn vanaf de linkerkant start bij 0 en eindigt bij 25 (*x*). Met *AX* is de afstand van het beginpunt tot de zijlijn aangegeven, met *BX* de afstand van het afstempelpunt tot het eindpunt. Het totaal is de som van *AX* en *BX*. In *figuur 2* is *figuur 1* uitgebreid met deze gegevens. Wat in *figuur 3a* staat is eigenlijk nog maar het begin.

figuur 1



figuur 1

Een situatieschets bij het voorbeeld. Beginpunt links en eindpunt rechts liggen vast, het afstempelpunt onder moet zo gekozen worden dat de totale afstand zo kort mogelijk is.

Het is duidelijk dat het beste afstempelpunt ergens tussen 17 m en 18 m ligt. Voor een nauwkeuriger bepaling zou je nog moeten inzoomen. In **figuur 3b** is de totale afstand als functie van de variabele plaats van het afstempelpunt in de vorm van een grafiek weergegeven. Wat hier met Excel is gedaan kan natuurlijk ook met een grafische rekenmachine.

In het artikel waaraan ik deze voorbeelden ontleen^[2], stopte het op deze plaats. Kennelijk was er voldoende gemodelleerd, voldoende gerekend. Misschien was dat zo omdat het in praktijk was gebracht met leerlingen die de stelling van Pythagoras kennen en met Excel kunnen omgaan. Maar er zijn nog veel meer mogelijke aanpakken.

Mogelijkheid 4: een algebraïsch/analytische aanpak. Hier wordt de aanpak van

mogelijkheid 3, met behulp van de nu continue variabele x , tot een analytische aanpak uitgewerkt. Dat kan in eerste instantie met de gegeven afstanden van 18, 8 en 25, maar het zou ook heel goed meteen met a , b en c als parameters kunnen. De totale afstand als functie f van x wordt gegeven door

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$$

Nu is het een kwestie van differentiëren, nul stellen en naar x oplossen om de beste plaats voor het afstempelpunt x te vinden: $\frac{ac}{a+b}$. En via invullen en vereenvoudigen vind je de kortste afstand: $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. Door de gegeven waarden van a , b en c in te vullen kun je nagaan dat alles klopt. Verrassend eenvoudige resultaten. Dat brengt je ertoe na te denken of er misschien niet een eenvoudige, bijvoorbeeld meetkundige aanpak is: de volgende mogelijkheid.

Mogelijkheid 5: meetkundig. Deze mogelijke aanpak besefte ik toen ik het eenvoudige antwoord voor het afstempelpunt zag: ik kan de ruwe schets zo aanpassen dat er in rechte lijn van het begin- naar het eindpunt gerend wordt. Dat kan natuurlijk niet in de echte wereld, maar wel in de wiskundige wereld, waar je alles naar je hand kunt zetten.

Door het eindpunt in de zijlijn te spiegelen en dan in rechte lijn van het beginpunt naar het gespiegelde eindpunt te rennen kun je met verhoudingen van gelijkvormige driehoeken de beste plaats van afstempelpunt berekenen en met de stelling van Pythagoras in één keer de kortste afstand. Het spiegelpunt van B noem ik B' . En dan, met de gelijkvormigheid van de driehoeken

APX en $B'QX$, volgt $x : a = (c-x) : b$, waaruit x opgelost wordt: $x = \frac{ac}{a+b}$. En voor de totale afstand geldt dat die gelijk is aan $AB' = AB' = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. Merk overigens op dat de rechtstreekse afstand van beginpunt naar eindpunt, dus niet via de zijlijn, hier sterk op lijkt: $\sqrt{(a-b)^2 + c^2}$; zie **figuur 4**.

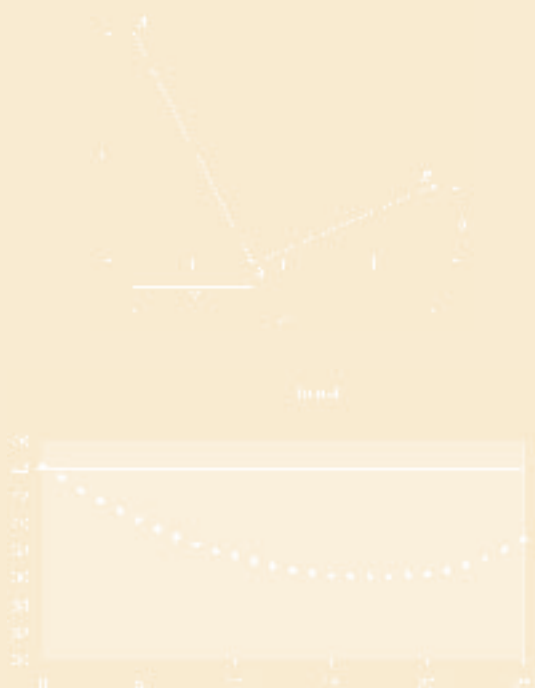
Toen ik met deze meetkundige aanpak een beetje zat te stoeien, door namelijk in **figuur 4** het afstempelpunt een beetje naar links of naar rechts te verplaatsen waardoor je ziet dat het snijpunt van AB' en PQ inderdaad het beste punt is, bij alle andere keuzen van X bestaat AB' uit twee niet in elkaars verlengde gelegen lijnstukken AX en XB , bedacht ik hoe een natuurkundige een dergelijk probleem zou aanpakken. Omdat we het hier over modelleren op verschillende niveaus hebben, wil ik die niet weglaten.

Mogelijkheid 6: 'op zijn natuurkundigs'.

Natuurkundigen modelleren graag met differentiaalvergelijkingen. Zij doen dat door de x een kleine beetje te veranderen; hier door X naar X' te verschuiven. Wiskundigen, als de puristen die zij nu eenmaal zijn, nemen dan x en Δx .

figuur 2

Dit is **figuur 1** voorzien van namen voor begin- en eindpunt en afstempelpunt en aanduidingen voor de vaste en variabele afstanden



figuur 3b

De grafiek van de totale afstand als functie van de plaats van het afstempelpunt

a	b	c	x	AX	BX	totaal
18	8	25	0	18	26,24880	44,24880
			1	18,02775	25,29822	43,32597
			2	18,11077	24,35159	42,46236
			3	18,24828	23,40939	41,65768
			4	18,43908	22,47220	40,91129
			5	18,68154	21,54065	40,22220
			6	18,97366	20,61552	39,58919
			7	19,31320	19,69771	39,01092
			8	19,69771	18,78829	38,48600
			9	20,12461	17,88854	38,01315
			10	20,59126	17	37,59126
			11	21,09502	16,12451	37,21953
			12	21,63330	15,26433	36,89764
			13	22,20360	14,42220	36,62580
			14	22,80350	13,60147	36,40497
			15	23,43074	12,80624	36,23699
			16	24,08318	12,04159	36,12478
			17	24,75883	11,31370	36,07254
			18	25,45584	10,63014	36,08598
			19	26,17250	10	36,17250
			20	26,90724	9,433981	36,34122
			21	27,65863	8,944271	36,60290
			22	28,42534	8,544003	36,96934
			23	29,20616	8,246211	37,45237
			24	30	8,062257	38,06225
			25	30,80584	8	38,80584

figuur 3a

Een systematische zoektocht naar de beste plaats van het afstempelpunt met behulp van Excel

$x_{\min}$	$\text{totaal}_{\min}$
17,30769	36,06937

Natuurkundigen, die een keer gezien hebben dat die Δx vervolgens via een soort limietovergang in dx wordt veranderd, schrijven vanaf het begin x en dx . Hun werkwijze is als volgt samen te vatten; zie **figuur 5**. We laten alleen de aanpak voor het linkerdeel van het plaatje zien; de rechterkant gaat precies zo.

Nu geldt dat $XX' = dx$. We trekken XX'' loodrecht op AX . Dan zijn AX en AX'' bij benadering even lang, dus $AX = AX'' \approx y$, en is $X''X'$ bij benadering dy . Omdat de driehoeken APX en $XX''X'$ gelijkvormig zijn geldt dat $X''X' : XX' = PX : AX$,

waaruit volgt dat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Op dezelfde wijze is voor de rechterkant af te leiden dat

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}.$$

We vinden zo voor de totale afstand y van A via X naar B :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

waarmee we terug zijn bij wat we bij de algebraïsch-analytische methode 4 gevonden hebben.

Het rechterlid van de laatste uitdrukking nulstellen en naar x oplossen geeft het beste afstempelpunt: $x = \frac{ac}{a+b}$ (wat we natuurlijk al wisten).

Een aantal conclusies en opmerkingen

De mogelijke uitwerkingen laten zien dat er op allerlei verschillende niveaus gemodelleerd kan worden. De belangrijkste stap bij elk modelleerprobleem is de aanpak en daarbij moet je durven iets te proberen. In de hier gepresenteerde mogelijke aanpakken speelt het eerste ruwe plaatje een belangrijke rol. In feite is dit de eerste modelmatige benadering van de gegeven werkelijkheid. Afhankelijk van het doel moet dat eerste model verfijnd worden tot een schaaltekening bij mogelijkheid 1.

Een uitbreiding van dit eerste model is dat er namen in de vorm van hoofdletters aan punten en getallen (bij mogelijkheid 2) of variabelen (bij de volgende mogelijkheden) aan afstanden aan toegevoegd worden. Dit is overigens voor alle volgende mogelijkheden cruciaal.

Bij de mogelijkheden 2 en volgende moeten natuurlijk de rechthoekige driehoeken herkend worden zodat er met de stelling van Pythagoras een numeriek (bij mogelijkheden 2 en 3) of een algebraïsch, dan wel een analytisch model (bij de mogelijkheden 4, 5 en 6) opgesteld kan worden.

Zodra het numerieke model in Excel of het algebraïsch/analytische model is opgesteld, kan er al naar specifieke gevallen van het model gekeken worden om na te gaan of het model kan kloppen. Neem je bijvoorbeeld $a = b$, dan moet dat voor het afstempelpunt $x = \frac{1}{2}c$ opleveren. Neem je $a = 0$, dan moet ook $x = 0$ gelden. En net zo: bij $b = 0$ hoort $x = c$.

Maar het meest verrassend is hoeveel verschillende aanpakken er mogelijk zijn.

Dit is weer eens een voorbeeld van de rijkdom van de wiskunde. Dat moet toch aan de leerlingen over te brengen zijn.

De meetkundige mogelijkheid is natuurlijk de simpelste en daarmee voor mij de mooiste. Didactisch verbind ik hieraan de conclusie: ook al is een oplossing op de een of andere manier gevonden, laat het denken van de leerlingen niet stoppen en blijf ze uitdagen om, onder leiding van de leraar, nog een andere aanpak te bedenken en uit te voeren.

Ook voor het andere voorbeeld geldt dat er een numerieke aanpak bestaat, een algebraïsche/analytische aanpak en een meetkunde-aanpak. Ik roep de lezers op die te bedenken en met hun leerlingen in verschillende klassen en dus op verschillende niveaus uit te proberen. De meetkundige aanpak is overigens niet zo eenvoudig als in het hier uitgewerkte voorbeeld. Er komen cirkels in voor. En het is dan handig als je de volgende stelling kent. Vanuit een punt P buiten een cirkel worden twee lijnen getrokken. De ene lijn snijdt de cirkel in A en B , de andere lijn snijdt de cirkel in C en D . Dan geldt: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Ik heb ooit een wiskundeleraar gehad die dit de 'trombonestelling' noemde. De stelling geldt overigens ook als een van die lijnen de cirkel raakt en de twee snijpunten dus samenvallen.



figuur 4 De meetkundige oplossing



figuur 5 De natuurkundige aanpak

Noten

- [1] Zie *Over wiskundeonderwijs* 6, *De spagaat van wiskunde op school*. In: *Euclides* 81(2), oktober 2005, p. 76-77.
- [2] P. Galbraith, J. Brown, G. Stillman, I. Edwards: *Facilitating Mathematical Modelling Competencies in the Middle Secondary School*. Zie: http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/RITEMATHS/general_access/publications/Public_papers/2005GalStilBroEdwConfPaper.pdf

Over de auteur

Bert Zwaneveld is hoogleraar 'professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit Nederland. E-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl

[Anne van Streun]

In mijn archief vond ik een tweetal oude artikelen die De Groot in Euclides heeft geschreven. Tot aan zijn kandidaatsexamen studeerde hij wiskunde, hij was korte tijd wiskundeleraar en behield altijd zijn belangstelling voor wiskundeonderwijs. Het eerste artikel (1957) gaat over het ontwerpen van een inzichttest voor meetkunde. Een zwaar

bezette werkgroep met onder andere de bekende schoolboekenauteur C.J. Alders, de wiskundendidactici L.N.H. Bunt en H. Turkstra en de psychologen J. Th. Snijders en G. Wielenga had zich gebogen over de oorspronkelijke onderzoeksopdracht, namelijk het bepalen van de 'wiskunderijpheid' als leerlingen het voortgezet onderwijs binnen komen. In dit artikel beschrijft De Groot het verloop van de discussies die uiteindelijk hebben geleid tot het nieuwe doel, namelijk een meetkundetest te ontwerpen die aan het einde van het eerste leerjaar inzicht meet. Enkele voor De Groot typerende formuleringen uit dat artikel ter illustratie:

- *'Het probleem is juist gelegen in de verscheidenheid van oplossingen, die door individuele docenten worden beproefd, niet alleen wat betreft de didactiek, maar ook wat betreft de beoordeling van het al-dan-niet verworven inzicht.'*
- *'Wat willen wij eigenlijk met het wiskundeonderwijs bereiken? Dit is een zo fundamentele vraag, dat het belang van een poging om het daar over eens te worden moeilijk kan worden overschat.'*
- *'Het is echter volstrekt niet nodig het eens te zijn over wat onder inzicht-in-het algemeen wordt verstaan in de vorm van een formulering, waarop wij allen ons kunnen verenigen. Het gaat er alleen om een redelijk bruikbare "operationele definitie" van inzicht-in-de-stof-in-kwestie op te stellen, in de vorm van een gedifferentieerde reeks van objectief te beoordelen testopgaven.'*

De ontworpen meetkundetest heeft vervolgens een rol gespeeld in het onderzoek naar het onderwijsexperiment 'Bewegingsmeetkunde' (1968), waarin een geheel nieuwe aanpak van het meetkundeonderwijs met translaties, spiegelingen en rotaties werd ontworpen en uitgeprobeerd. Uit dat project zijn de schoolboeken van R. Troelstra c.s. onder de titel 'Transformatiemeetkunde' voortgekomen. De Groot en zijn medewerkers voerden het evaluatieonderzoek van dit ontwikkelingsproject uit onder het motto *'Wat bereiken we eigenlijk?'* Enkele citaten over de opbrengst:

- *De totaalresultaten van onze effectmetingen zijn in ieder geval niet slechter.*
- *In tegenstelling tot de verwachting is er van een verbetering van de relatieve voorkeur voor het vak meetkunde geen sprake.*
- *Het voordeel dat in het eerste bewegingsmeetkundejaar de minder begaafden beter*

werden 'meegenomen' en (dus?) het vak leuker vonden, werd gekocht tegen de prijs van minder interessant - althans minder "intellectueel stimulerend" - onderwijs voor de goeden.

- *Het is verre van vanzelfsprekend dat betere resultaten - op proefwerk, rapport of in de meetkundetestserie - beter onderwijs weerspiegelen.*

De politieke waan van de dag

In de jaren zeventig was zijn rol als lid van allerlei ministeriële adviescommissies uitgespeeld omdat hij onverbloemde en harde kritiek uitte op de plannen voor een middenschool van de toenmalige minister Van Kemenade. De wetenschappelijke basis ontbrak en het onderwijs was er niet mee gediend, zo argumenteerde hij. Ook over de latere plannen voor de basisvorming was hij bijzonder kritisch (De Groot, 1993):

- *'Je moet verduveld goed in de gaten houden wie je wat wilt en kunt leren. Een programma opstellen voor het Nederlandse kind van 12 tot 16 jaar, dat kan niet - dat kan niet zonder een weloverwogen en grote differentiatie in te bouwen.'*
- *'De intelligentieverschillen zijn zo groot, zoveel groter dan men denkt of droomt. Deze basisvorming zal de hoogbegaafden en de laagbegaafden, en vooral die betrekkelijk weerloze laatste groep, afschuwelijk tekort doen.'*
- *'Het voorgestelde systeem van toetsing is niet goed. De minimum eindtermen zullen voor veel leerlingen veel te hoog gegrepen zijn. En op het tweede niveau zullen zij te laag liggen om ook maar iets van een uitdaging te vormen voor de meer begaafden.'*

Tien jaar later erkennen de inspectie, de minister en tenslotte ook de Onderwijsraad in 2001 dat de basisvorming niet goed werkt en er iets beters moet worden bedacht. Wat mij persoonlijk aanspreekt in de publicaties van De Groot is dat hij naast zijn scherpe analyses en pleidooien voor objectieve toetsing ook een brede benadering van het onderwijs voorstaat. Het gaat in het onderwijs om het durven vertrouwen op je eigen denken, om het stimuleren van denken en leren, om het denken zelf. Zoals De Groot (1978) het formuleerde staat het verwerven van een positieve attitude ten opzichte van het leren centraal: *'Een school waarin de leraren zelf niet beseffen, of zelf wel beseffen maar leerlingen niet kunnen doen beseffen dat leren leuk en bevre-*

digend kan zijn, een school waarin de leraren er niet in slagen deze lering aan hun leerlingen over te dragen, zo'n school deugt niet. Een belangrijker onderwijsdoelstelling dan "leren leuk gaan vinden" zou ik niet weten. Lukt dat niet dan is eigenlijk alles verloren.'

De supervisor van promovendi

Als hoogleraar in Amsterdam en later in Groningen is De Groot promotor geweest van een veertigtal promovendi, die later zelf voor een groot deel weer hoogleraar in de psychologische of sociale wetenschappen zijn geworden. Zelf zocht ik voor het eerst in 1981 contact met hem over een plan om te gaan promoveren op het integreren van het leren probleemoplossen in het gewone wiskundeonderwijs. Na wat gesprekken en het door mij laten produceren van onderzoeksplannen en literatuuroverzichten accepteerde hij mij als promovendus en sindsdien had ik een scherpe maar ook constructieve analyticus als supervisor. Ik zeg 'supervisor' want de term begeleider was hem te slap. Zijn commentaar was niet vrijblijvend, je moest er wel wat mee doen! Elke stap van het onderzoeksproject voorzag hij van commentaar en suggesties. De supervisor die zowel het *proces* als de totstandkoming van het *product* begeleidt, dat is volgens mij de aangewezen manier om onze leerlingen en studenten bij profielwerkstukken, scripties en praktische opdrachten te begeleiden. Daar leren ze wat van! Mijn veldonderzoek (1989) richtte zich op de vraag wat de optimale plaats van contexten, heuristieken en spa's (spa = systematische probleemaanpak) in de opbouw van de wiskundige begrippen en methoden is. Een actueel thema! De verrassende uitkomst was dat de integratie van enkele voorbeeldcontexten met spa's en wiskundige begrippen *in combinatie* met een *tijdige* explicitering van waar het wiskundig om gaat (de abstractie) niet alleen de beste resultaten opleverde bij toegepaste problemen (zoals verwacht), maar ook bij wiskundige problemen (niet verwacht). Zelfs beter dan bij de 'Wiskunde Eerst Dan Toepassingen' strategie, waar nu weer enkelen onder ons voor pleiten.

De onderwijsman De Groot

In dit artikel heb ik mij beperkt tot de interesse voor en publicaties van De Groot in alles wat met onderwijs heeft te maken. Een overzicht van zijn andere werk, zoals

zijn bijdrage aan de methodologie van het psychologisch en sociaal-wetenschappelijk onderzoek, zijn standaardwerk op het gebied van het denken en probleemoplossen en zijn pogingen om in de sociale wetenschappen beter vast te leggen wat wetenschappelijk waar is (De Groot en Visser, 2003), is bijvoorbeeld te vinden op http://nl.wikipedia.org/wiki/Adriaan_de_Groot. Als onderwijsdeskundige heeft hij veel invloed gehad op het denken over (objectief) toetsen, cijfers geven en selecteren, terwijl zijn messcherpe kritiek op de politieke waan van de dag en op ministers die zo nodig weer het onderwijssysteem wilden veranderen tot zijn ergernis zelden tot een wijziging van beleid heeft geleid. Als supervisor van tientallen projecten op het gebied van onderwijsonderzoek heeft hij generaties onderwijsonderzoekers sterk beïnvloed. Eerst als leermeester en later als persoonlijke vriend heeft hij mijn denken over onderwijs en over de wetenschappelijke (!) waan van de dag in hoge mate bevorderd.

Literatuurverwijzingen

- A.D. de Groot: *Een inzichttest voor meetkunde*. In: Euclides 32 (6), pp. 218-224 (1957).
- A.D. de Groot: *Vijven en zessen*. Groningen: P. Noordhoff N.V. (1965).
- A.D. de Groot: *Bewegingsmeetkunde*. Groningen: Wolters-Noordhoff N.V. (1968).
- A.D. de Groot: *Wat neemt de leerling mee van onderwijs?* In: Handboek voor de onderwijspraktijk. Deventer: Van Loghum-Slaterus (1978).
- A. van Streun: *Heuristisch wiskunde-onderwijs*. Rijksuniversiteit Groningen (1989).
- A.D. de Groot: *Denken over onderwijs*. Den Haag: SVO (1993).
- A.D. de Groot, H. Visser: *Het forumwaarmerk van wetenschap*. Amsterdam: KNAW (2003).

Over de auteur

Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, en hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000.
E-mailadres: avstreun@euronet.nl

AANKONDIGING / WINTERSYMPOSIUM KWG

WISKUNDE IN 'NATUUR, LEVEN EN TECHNOLOGIE', 6 JANUARI 2007, UTRECHT

Thema

Tijdens het Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap zullen dit keer drie sprekers aandacht besteden aan de rol van wiskunde in 'Natuur, Leven en Technologie', het nieuwe bètavak dat vanaf augustus 2007 op middelbare scholen kan worden aangeboden (zie ook www.betavak-nlt.nl). Het vak heeft als doel om leerlingen op een uitdagende manier kennis te laten maken met nieuwe ontwikkelingen in, maar vooral ook op de grensvlakken van de natuurwetenschappelijke vakken, wiskunde en fysische geografie teneinde de belangstelling voor studie en beroep in dit gebied te vergroten.

Plaats en tijd

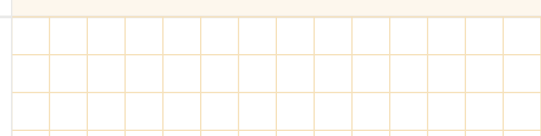
Het symposium wordt gehouden in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht, bij de Dom van Utrecht. Op zaterdag 6 januari 2007 is de zaal open vanaf 9.30 uur. Het programma start om 10.00 uur en eindigt ca. 14.45 uur.

Aanmelding

Men wordt verzocht zich van te voren online aan te melden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, www.wiskgenoot.nl ('wat doet het KWG' 'congressen en symposia'). Daar is ook het volledige programma te vinden. Van de deelnemers wordt een bijdrage gevraagd, o.a. voor lunch en consumpties gedurende de dag. Leden van het KWG betalen € 12,50; niet-leden € 17,50. Uw bijdrage moet vóór 16 december worden overgemaakt op bankrekeningnummer 456588167 van het KWG, onder vermelding van 'Wintersymposium'. Nadere inlichtingen: Iris van Gulik – gulikgulikers@home.nl – (038)4536366.

figuur 1 Geeltje: memo

figuur 2 Kantlijnfiguur: serieus



'Bijles' wiskunde havo 4B

OVER INSTRUMENTEEL UITLEGGEN EN BEGRIJPEN

[Fred Goffree]

Joën, haar opa en de wiskunde

Ruim een jaar geleden mocht deze opa zijn kleindochter Joën helpen met wiskunde. Telkens als er een toets voor wiskunde was aangekondigd, kreeg ik een allerliefst verzoek om weer eens op te draven. Joën toonde tijdens zo'n bijles een zeer doelgerichte opstelling, hetgeen onder meer betekende dat we geen aandacht konden besteden aan achtergronden en onderbouwende redeneringen. Ze wilde gewoon weten 'hoe het moest' en niet 'waarom het zo (ook) kon'. Blijkbaar kun je op die manier met de havo-wiskunde van klas 3 goed uit de voeten. Joën haalde voldoende en was zeer content met de hulp van haar opa. Die opa was helemaal niet zo content, hij zag zijn idealen met betrekking tot wiskundeonderwijs in rook opgaan en beschouwde de behaalde voldoende als schijnresultaat^[1].

Hoewel Joën niet zo goed begreep wat haar opa bedoelde, het zonder te zeggen wellicht maar gezeur vond, werd gezamenlijk besloten om na de zomervakantie de wiskundebijles anders aan te pakken. Toets of niet, elke week zouden we samen de tijd nemen om aan de wiskunde te werken. Het nieuwe lesrooster voor havo-4 (NG-profiel) liet enige ruimte op woensdagmiddag. En ondanks het fors gevulde lesrooster op woensdag was Joën altijd goed gemutst en gemotiveerd om nog eens ruim twee uur 'aan wiskunde te doen'.

De bijles was dus overgegaan in een gewone wiskundeles, maar dan wel als privéles. We maakten gebruik van het boek (*Getal en Ruimte*, HAVO 4/5 B) en de aantekeningen die Joën tijdens de les op school had gemaakt. Zo werkend kon ik me een voorstelling maken van hetgeen in de wiskundelessen gebeurde. Nu en dan gaf Joën ook tussen de regels door enige informatie over het doen en laten van haar wiskundeleraar. En ongemerkt kon ik me zo ook een indruk vormen van haar bezigheden in die lessen. Het beeld dat langzamerhand ontstond, stemde me niet

erg vrolijk. De leraar had moeite om de leerlingen bij de les te houden, Joën kon zich moeilijk concentreren en het was voor haar ook niet echt nodig om goed op te letten, ze had immers altijd haar opa nog die 'het' kon uitleggen. Mijn wiskundeles had blijkbaar twee kanten, een constructieve en een anti-productieve kant. Dit eenmaal wetende, besloot ik wel gewoon door te gaan maar tevens een poging te doen het sociaal-pedagogisch gehalte van mijn wiskundeles op te voeren.

Opbouw van de stof

Dit artikel gaat evenwel niet over mijn pedagogisch-sociale werk, maar over de mogelijkheden en onmogelijkheden van wiskundeonderwijs in een havo-4b klas. Ik probeer na te gaan hoe Joën de wiskunde van 'periode 5' (in het bijzonder de kansrekening) zich eigen maakt. We zullen zien dat de grafische rekenmachine daarin een rol vervult en dat het genoemde leerboek voornamelijk als boek met huiswerk-opgaven wordt gebruikt. De verhalen van Joën roepen anno 2006 een klassiek (zeg maar uit 1956) beeld van de wiskundeles op: huiswerkopgaven behandelen, nieuw huiswerk opgeven en een enkele opgave vast voormaken, en dan zelfstandig aan het werk.

In het boek *Getal en Ruimte* wordt ook theorie behandeld. Kort en goed en didactisch doordacht. De theorie komt in nauwe samenhang met opgaven naar voren. Eerst worden zo de essentiële theoretische begrippen en inzichten ontwikkeld via het oplossen van een doorzichtig probleem en de reflectie daarop. Dan komen in het verlengde daarvan een paar oriënterende opgaven. Vervolgens komen toepassingen van de theorie bij het oplossen van problemen (*gewone opgaven*), die veel lijken op de opgaven die de leerlingen daarna zelf moeten maken. Enkele opgaven krijgen de letter A mee. Zo is ^A24 een *afsluitende opgave*, die volgens de auteurs precies het beheersingsniveau van de stof weergeeft.

Er komen ook 'reflectie-opgaven' voor, maar daarmee is Joën in mijn periode nooit bezig geweest.

Twee extraatjes

Nu we toch door het boek bladeren, wil ik nog twee interessante onderdelen noemen. Het zijn kleine educatieve ontwerpjes, die mij zeer aanspreken. In de eerste plaats zijn er 'geeltjes' ingevoegd, met het karakter van een memo, een herinnering. Bijvoorbeeld op bladzijde 40 van deel 2, bij het berekenen van de kans op '3 × kop' bij het vier keer gooien van een geldstuk; zie *figuur 1*.

En het andere onderdeel betreft de figuren in de kantlijn, die opmerkingen maken bij de tekst^[2]. Soms zijn ze geestig, maar vaker heel serieus, zoals bijvoorbeeld op bladzijde 36; zie *figuur 2*.

Tot zover het boek, dat dus blijkbaar meer beoogt te zijn dan het opgavenboek, dat bij Joën is overgekomen.

Studiewijzer

Op Joëns school is ook een studiewijzer voor periode vijf gemaakt. In de rubrieken Datum, Lesstof, Zelfstandig en Opmerkingen zijn de taken voor wiskunde vanaf 15 mei t/m 15 juni geprogrammeerd; zie *figuur 3*.

Kansrekening

Het is begin mei en we hebben ons de afgelopen weken intensief beziggehouden met functies en afgeleide functies, raaklijnen en hellingen, uiterste waarden, toppen en eenvoudige optimalisering. Joën vertelt dat ze op school begonnen zijn aan hoofdstuk 7. Dat gaat over kansrekening en de eerste opgave die op de rol staat voor zelfstandig werken op 15 mei is opgave 43; zie *figuur 4*. Op school heeft de leraar die opgave behandeld. Joën heeft ijverig genoteerd wat hij op het bord heeft geschreven. De toets over deze stof is aangekondigd voor de toetsweek in juni, over een maand dus. Maar die zal alleen gaan over de (stof van de?) opgaven van de studiewijzer, is gezegd.

figuur 3
Studiewijzer 2006, met
aantekeningen van Joën

figuur 4
Opgave 43

In de kolom Lesstof van de studiewijzer staat: H7, opg. 14, 31 en 42. Volgens Joën is daar niets mee gebeurd. Dat verbaast mij nogal, want bij opgave 43 heeft de leraar 'binomiaal kansexperiment' op het bord geschreven. Volgens mij vereist dat begrip basale inzichten over toeval en kans die een grondige voorbereiding nodig hebben.

Basaal

Wat kunnen de leerlingen zich bij een kansverdeling voorstellen? En wat vervolgens bij een binomiale kansverdeling? Gaat het idee van een samengesteld experiment er probleemloos in door bijvoorbeeld gewoon een paar keer achter elkaar met een dobbelsteen (of munt) te gooien? Je gooit tien keer met een dobbelsteen. Hoe groot is de kans op 'nul keer een 6', op '1 keer een 6', op '2 keer een 6' enzovoort tot '10 keer een 6'? Je kunt die verzameling uitkomsten (op x maal een 6 in tien worpen) met X aangeven.

Dus met $P(X = 4)$ wordt dan de kans bedoeld dat er 4 keer een 6 wordt gegooid. Als ik op de studiewijzer afa, wordt veel belangrijk voorwerk overgeslagen. Ik neem het boek erbij. Het begint met een oriëntatie op kansrekening. Zover ik meen

te weten is dat een van de mooiste, en op basis van mijn ervaring ook een van de lastigste mathematiseringen.

Ik herinner me van Freudenthal^[3] het verhaal over de gokker Chevalier de Méré die zich in 1654 bij de wiskundige Pascal ging beklagen over de wiskunde^[4].

Empirische en theoretische kans

Overigens begint in *Getal en Ruimte* het hoofdstuk over kansrekening met het probleem van geringde vogels die al dan niet teruggevonden worden. Het percentage 'terugmeldingen' vat men op als kans. Een empirische kans dus, naar mijn opvatting (didactisch) niet zo sterk als de theoretische kans die Pascal berekende. De opgaven in de studiewijzer die vóór opgave 43 worden genoemd, betreffen allemaal theoretische kansen, en dan slechts in kansexperimenten met 'kanstollen'^[5].

Misschien, zo bedenk ik nu, is daarom het probleem van de geringde vogels niet aan de orde gesteld. Daarmee zou ik als leraar wel kunnen leven, maar niet met het ontbreken van een oriëntatie à la Pascal. Wiskunde is zoveel meer dan het louter maken van opgaven, juist voor havisten met een NG-profiel die nog alle kanten

op moeten kunnen met hun wiskunde. En voor een leerling als Joën, die zich voorgenomen heeft om in een toekomstig beroep als professioneel onderzoeker in spannende situaties aan de slag te gaan.

Product- en somregel

Overgeslagen zijn ook de product- en somregel. 'Kan dat wel', vraag ik me af. De intuïtieve misinterpretatie van de somregel staat me nog helder voor ogen. Je gooit 6 keer met een dobbelsteen. De kans op een 6 in de eerste worp is $1/6$. Bij de tweede worp weer $1/6$, enzovoort. Na zes keer werpen is de kans op een zes 'dus' $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$??

Instrumenteel begrepen

Opgave 43 (zie *figuur 4*), waarbij de leraar 'Binomiaal Kansexperiment' op het bord heeft gezet, gaat over 'samengestelde kansexperimenten'. Laten we eens kijken wat er op het bord stond. Joën heeft me verzekerd dat ze alles precies heeft overgeschreven (zie *figuur 5a* en *figuur 5b*). 'Zonder er iets van te begrijpen', voegt ze er enigszins verontwaardigd aan toe^[6].

Als Joën me dit voorlegt, heb ik het boek nog niet goed bekeken. Om tijd te winnen vraag ik eerst of ze mij de uitdrukking '*binompdf*(10, 0.4, 3)', die voor mijn gevoel ineens uit de lucht komt vallen, kan uitleggen. Geen probleem, ze pakt de GR, doet er wat (?) mee, vult dan een paar getallen (10, 0.4, 3) in, en drukt triomfantelijk op ENTER. Ze wil het me ook nog wel even laten zien op haar TI-83 Plus Silver Edition: On – 2nd – [Distr] – [0] – *binompdf* (10, 0.4, 3) – ENTER – 0,214990848.

Kun je ook *binompdf*(4, 0.8, 4) laten uitrekenen? Geen probleem: 0,4096. Wat heeft jouw GR nu eigenlijk uitgerekend? Joën kan dat ook vertellen: 'Met vier keer draaien van de schijf, hoe groot de kans is dat er geen enkele keer een peer komt. En de kans dat er geen peer komt is steeds $4/5$, dat kun je op de schijf zien.'

Kunnen we de machine ook nog controleren? Wisten we van te voren hoe groot de kans op nul peren is? Okay, dat was $(4/5)^4 = \dots$ Joën pakt de GR en vindt in een oogwenk het goede antwoord: 0,4096. Het klopt dus! En met een knipoog: Wat klopt?

Ik heb nu even de tijd gehad om in deel 2 van het boek te bladeren. Het woord

binomiaal kan ik niet vinden, en ook de GR-functie *binompdf* niet. Ik vraag of zij weet wat een binomiale kansverdeling is. Het komt haar niet bekend voor, ook nog niet als we haar aantekeningen over hoofdstuk 7 nog eens bekijken. Het Binomium van Newton? Ze kijkt wat wazig.

Dilemma

Ik sta nu voor een dilemma. Ga ik achtergronden van het 'binomium' met haar bestuderen om te begrijpen wat de machine voor ons aan het doen is, of vertrouwen we ons aan de GR toe en maken we gewoon de opgaven? Kan dat laatste trouwens zonder het eerste?^[7]

De vraag dringt zich op wat het verschil is tussen het toepassen van de formule:

$$\binom{10}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7$$

of zelfs

$$\binom{10}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7 = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7$$

en het gebruiken van de GR met *binompdf*(10, 0,4, 3). In de GR-functie is in feite het samengestelde kansexperiment op alle essentiële eigenschappen direct beschreven: $n = 10$, $p = 0,4$ en je zoekt de kans op een rijtje waarin er 3 voorkomen. En de GR berekent die kans voor je. Wat zou je nog meer willen weten? Hoe zouden de leerlingen van nu en hun docenten daar tegenaan kijken? Het leren in een omgeving waar computer en GR beschikbaar zijn met hun gebruikersvriendelijke software, heeft een ander karakter dan het leren zoals dat in het voor-ict-tijdperk was. Wat is precies het verschil? Verdringt handigheid inzicht en kennis? Vervangt fragmentarische kennis de samenhangende kennisstructuren? Is instrumenteel begrijpen nodig en voldoende om voldoende te scoren op wiskundetoetsen? Hoe denken de leerlingen daarover? Kunnen zij er mee omgaan? Is wiskunde-onderwijs eigenlijk nog wel zo nuttig? Zo te zien kan opa ook veel van Joën leren.

Een gedachtenexperiment

Toevallig valt er een papiertje uit het aantekeningenboek van Joën. Het lijkt op wat wij vroeger een 'stencil' noemden. 'Algebra oefenen' luidt de kopregel en er staan opgaven op, genummerd van 6 t/m 10; zie *figuur 6*.

Ik zie in een flits dat het over machten van tweetermen gaat. Als ik wat preciezer kijk zie ik dat de systematiek van het Binomium van Newton wordt verkend via de uitwerkingen van de tweede, derde en vierde macht van $(a + b)$, gevolgd door de vraag of ze daar iets uit kunnen afleiden voor $(a + b)^n$. Tot slot moeten ze het Binomium in drie gevallen toepassen.

Hoewel het 'stencil' bedoeld lijkt te zijn voor individueel gebruik, zie ik een interactieve klassikale les voor me. Ik stel me voor hoe Joën in de klas zit. En dan bedenk ik hoe die les er idealiter uit zou kunnen zien.

figuur 5a Aantekeningen, overgenomen van het bord

figuur 5b Aantekeningen, overgenomen van het bord (vervolg)

In mijn elitaire positie als opa van Joën hoef ik me geen zorgen te maken over onoplettende leerlingen.

Op het bord heb ik van te voren het Binomium van Newton uit opgave 8 genoteerd (zie *figuur 6*).

We kijken even naar die formule. Wie ziet er iets bijzonders? Klopt de formule voor $n = 2$? En voor $n = 1$? Nog gekker: voor $n = 0$? In deel 1 staat het hoofdstuk *Handig Tellen*. Dat kunnen we straks gebruiken. Houd het bij de hand. We gaan vandaag proberen dit Binomium van Newton zelf opnieuw 'uit te vinden'. Waar dat nuttig voor is? Misschien ervaren we vandaag een beetje dat je in de wiskunde niet altijd anderen hoeft na te praten, je mag ook wel eens zelf iets bedenken.^[8]

We gaan op onderzoek en het stencil vormt de leidraad. We beginnen met opgave 6. Eerst zelf wat proberen, vervolgens wordt $(a + b)^4$ geschreven als $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$.

Stap voor stap wordt dat product door de klas in samenspraak met de leerling voor het bord uitgewerkt.

Dan nemen we even de tijd voor een reflectief moment. De kernvraag is of iemand nog kan nagaan hoe de coëfficiënten tot stand zijn gekomen. In principe moet nu de Driehoek van Pascal in zicht komen. Hoe zouden leerlingen reageren op de vraag waar je meer mee gebaat bent in de wiskunde, het Binomium van Newton of de Driehoek van Pascal? Of moet je dat anders vragen? Bijvoorbeeld welke van de twee een echte wiskundige het mooiste vindt? Of: welke van de twee de GR-programmeur gebruikt zou hebben?

Hier zou je als leraar kunnen denken aan de 'geeltjes' en 'kantlijnfiguurtjes'. Bijvoorbeeld door de leerlingen zelf geschikte geeltjes te laten bedenken, als een soort 'eigen producties'^[9]. En wellicht kun je een stel leerlingen in de rol van kantlijnkiertjes plaatsen en hen op bepaalde uitgekende momenten opmerkingen laten maken over de stof, de opgaven en de aanpak daarvan. Misschien kijken ze wel naar het tv-programma 'Dit was het nieuws'. Dit zou inspiratie en richting kunnen geven.

Terug bij de routes. Zou het mogelijk zijn om met de klas het gesprek zo te voeren dat bijvoorbeeld de route op het rooster (zie *figuur 7*) LLRL (Links, Links, Rechts, Links) vergeleken kan worden met de

term a^3b in $(a + b)^4$? Als ingezien wordt waarom ze dezelfde coëfficiënt hebben, is veel gewonnen. Nu kan ook 'kans' worden toegevoegd, bijvoorbeeld $P(L) = \frac{2}{5}$ en $P(R) = \frac{3}{5}$.^[10]

In opgave 7 gaan we op zoek naar regelaar. Het maken van de 'hele' driehoek van Pascal (instrumenteel uitgelegd!) vinden leerlingen in het algemeen wel leuk.

Eigenlijk zouden we op dit moment de tweeterm $(0,4 + 0,6)^{10}$ aan het stencil toe moeten voegen. Kunnen we dan in het gesprek komen tot een vergelijking met $\text{binompdf}(10, 0,4, k)$? En is hiermee ook $P(X \leq k)$ te begrijpen? Weet je nu ook wat de GR-functie $\text{binomcdf}(10, 0,4, k)$ doet?

Overweging

Zo beschouwd bieden boek en stencil samen mooi materiaal om in de klas onderzoekend aan de slag te gaan met combinatoriek en kansrekening. Maar het lijkt erop dat de studiewijzer in de weg staat. Zowel de krappe tijdplanning (dit prachtige stukje wiskunde moet in minder dan twee lesuren worden afgewerkt), als de nadruk op zelfstandig werken laten een onderzoekende aanpak van de wiskunde niet toe.

Met enige steun kon Joën de oplossingen van de opgaven wel volgen. Anders gezegd: ze kon die wiskunde instrumenteel begrijpen. Dit is niet vreemd, want de uitleg op school was immers ook instrumenteel. Het gebruik van de GR speelde daarin ook een rol, al kan ik nog niet goed inschatten welke rol.

Maar tijdens de gesprekken over de opgaven, mogelijke oplossingen en achtergronden op de woensdagmiddagen, liet Joën zien dat ze dieper kon gaan dan het instrumentele begrijpen en bovendien dat ze daar ook best plezier in had.

In juni deed Joën de toets. Op mijn vraag hoe het gegaan was, kreeg ik het gebruikelijke antwoord: 'Moeilijk!' Over de opgaven kon ze weinig vertellen. En het was haar niet toegestaan om de opgaven ter inzage voor haar opa mee naar huis te nemen. Het schoolbeleid schijnt dat niet toe te staan. Hoewel ik wel meen te begrijpen wat daar achter zit, stoort ik me er wezenloos aan. Het belemmert mij Joën optimaal te helpen.

Tot slot

Als Joën akkoord gaat, gaan we volgend schooljaar weer samen plezier beleven aan de wiskunde. Voor deze opa is het extra interessant om door de ogen van zijn kleindochter naar het wiskundeonderwijs van nu te kijken.

Noten

- [1] Ik herinner me een interview met P.M. van Hiele in het begin van de jaren '80. We spraken over didactiek van de wiskunde en Van Hiele opende mijn ogen met de opmerking dat didactiek er niet voor bedoeld was om het de leerlingen gemakkelijker te maken. 'Leerlingen zijn niet stom', 'je moet ze uitdagen' en 'bied ze uitnodigend materiaal aan' waren zijn woorden. ('Ik was wiskundeleraar', Enschede, 1985.)
- [2] Dit idee kwam ik al tegen in de jaren '70: Rechenzentrum Ueberzahl und der Fall Lotusblume. Ik sprak toen heel enthousiast over 'Kantlijnkiertjes'. Deze kantlijn-figuurtjes anno '70 uitten zelfs kritiek op wat de auteurs in hun tekst te zeggen hadden.
- [3] Prof. dr. Hans Freudenthal: *Waarschijnlijkheid en Statistiek*. Haarlem (1957).
- [4] De Méré wist uit ervaring dat hij op den duur de gok 'ik gooi vier keer een dobbelsteen en krijg dan minstens één zes' winnend kon aangaan. Daaruit besloot hij dat ook de gok 'ik gooi 24 keer met 2 dobbelstenen en krijg dan minstens één keer dubbelzes' hem op den duur winst zou opleveren. Pascal ging ermee aan de slag en, zo gaat het verhaal, vond op dat moment de waarschijnlijkheidsrekening uit. De kans op minstens één zes in vier keer gooien met een dobbelsteen, is $1 - (5/6)^4 \approx 0,517$ (en dus $> 0,5$).

figuur 6 Algebra oefenen



figuur 7 Route op rooster

figuur 8 Bord van Galton

De kans op geen enkele maal dubbelzes in 24 keer werpen met 2 dobbelstenen, is $(35/36)^{24} \approx 0,509$. De kans op minstens één keer een dubbelzes in 24 keer gooien, is dus $1 - 0,509 = 0,491$, en kleiner dan 0,5!

- [5] In de beginjaren '70 van de twintigste eeuw werd een programma kansrekening en statistiek voor de basisschool ontwikkeld. Het was een gezamenlijk project van Wiskobas en de NOTV (onderwijsstelevisie): 'Kijk op kans', bedoeld voor leerlingen van de klassen 5 en 6. In dat programma werd veelvuldig gebruik gemaakt van kanstollen omdat daarop de kansen goed te zien waren. De leerlingen maakten zelf tollens om bepaalde kansexperimenten te kunnen uitvoeren.

Zie: Bert van de Vegt, Benno Goossen: *Kijk op Kans. Ervaringen met de 'try-out'*. In: Wiskobas Bulletin, jaargang 2, nummer 4 (1972), p. 893.

- [6] Bij deze welgemeende verontwaardiging dacht ik meteen aan het begrip 'didactisch contract' dat mij ooit werd aangereikt door een bekende didacticus uit Bordeaux, Guy Brousseau. Paul Drijvers vraagt er, in het geval van de computeralgebra-omgeving, ook aandacht voor. Zie noot 7.
- [7] Op 25 september 2003 promoveerde Paul Drijvers in Utrecht op zijn studie Algebra leren in een computeralgebra omgeving. De kern van zijn computeralgebra omgeving

werd gevormd door de grafische rekenmachine TI-89. Interessant zijn de inspanningen van Drijvers om het technisch begrijpen van de GR te integreren met het conceptueel begrijpen ervan, dus met het leren van de bijbehorende wiskunde. Zijn eerste stelling bij de dissertatie slaat precies op ons onderwerp: Het werken in een computeralgebra omgeving vereist inzicht in de structuur en de betekenis van algebraïsche formules.

- [8] Later zie ik dat in deel 1 van Getal en Ruimte het Binomium van Newton en de Driehoek van Pascal geheel behandeld worden. Zijn die stukjes indertijd ook overgeslagen? Waarom dan eigenlijk dit 'stencil'?
- [9] 'Eigen producties' zijn een didactische vondst uit het realistisch reken-wiskundeonderwijs voor de basisschool. De leerlingen krijgen bijvoorbeeld de opdracht om opgaven voor medeleerlingen (of jongere leerlingen) te bedenken. De bedoeling hiervan is om ze te laten nadenken over het eigen leren. Hoe heb je dat zelf geleerd? Kun je het een ander uitleggen? Wat vond je zelf moeilijk? Weet je nog wanneer je het echt doorkreeg? Eigenlijk zijn dat ook de vragen die beginnende leraren zich stellen. Leraren hebben ook de ervaring dat ze zelf de stof pas goed gingen begrijpen toen ze die zelf moesten gaan onderwijzen. De gedachte achter 'eigen producties' is dat je de leerlingen ook die kans geeft.

Zie bijvoorbeeld:

- L. Streefland: *Realistisch breukenonderwijs*. Utrecht: Vakgroep OW&OC (1988), p. 77 en vele andere;
- Ch. Selter: *Eigenproducties in Arithmetikunterricht*. Diss. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag (1994);
- J.J.M. Menne: *Met sprongen vooruit*. Utrecht: Freudenthal Instituut (2001).

- [10] Ik denk hier ineens aan het Bord van Galton (zie figuur 8). Prachtig visueel hulpmiddel om kansen aan de routes toe te voegen en om de binomiale kansverdeling zichtbaar tot stand te laten komen. Voor onze situatie met $p \neq 0,5$ moet je het een beetje schuin houden. Op internet kun je het bord van Galton in werking zien, ook voor het geval $P(L) = 0,4$. Zie bijvoorbeeld op de site van de Universiteit van Keulen: www.uni-koeln.de/ew-fak/Math/Projekt/VisuPro/galton/galton.html

Over de auteur

Fred Goffree was onderwijzer, mavo-leraar (o.a. wiskunde), leraar kweekschool (Pedagogische Academie), medewerker IOWO, vervolgens SLO en FI, en bijzonder hoogleraar (educatief ontwerpen voor wiskunde in de volwassenen-educatie) aan de Universiteit van Amsterdam. En onder meer ook redacteur van Euclides. E-mailadres: fgoffree@gmail.com

competentie zwaarder zou kunnen zijn dan die van de andere, doet dit de ontevredenheid hierover niet afnemen. Sommige aanwezigen hebben zelfs het idee dat op hun school vakmanschap helemaal niet meer gewaardeerd wordt. Zij moeten vooral coach en begeleider van leerprocessen zijn. In het visiedocument wordt hier niet over gesproken. Dit bevreedt sommigen, want ook de wiskundeleraar staat midden in de school en heeft te maken met deze koers waarin de accenten verschuiven van vakmanschap naar procesbegeleider zijn. Hoe moeten we laveren tussen de eisen van goed meesterschap en competentie-eisen? En hoe realiseren we contact met hoger onderwijs, industrie en bedrijfsleven als het steeds moeilijker wordt om de school uit te gaan? Het terugdringen van lesuitval staat immers met stip bovenaan de prioriteitenlijst van de meeste scholen. Hoe verkrijgen we de financiële middelen om nascholing te realiseren? En hoe voorkomen we dat we overbelast raken als we naast ons meesterschap nog zoveel meer taken op ons bordje hebben liggen? Uit de vele reacties op dit gedeelte van het document blijkt grote zorg over de concretisering van de plannen voor de toekomst. Enerzijds vanwege het structurele gebrek aan tijd, anderzijds vanwege een vakmanschap-ambitie die tegen de tijdgeest lijkt in te gaan.

II. Wiskundige concepten en denkactiviteiten

Uit 'Rijk aan betekenis', pagina 12:

Het onderwijs in de wiskunde laat zich net zoals de wiskunde zelf organiseren rondom concepten en denkactiviteiten. De kernconcepten lopen als een rode draad door de wiskunde, terwijl de denkactiviteiten deze concepten met elkaar en met de contexten verbinden. Het is van belang om deze concepten en activiteiten regelmatig en op een coherente manier door het programma heen vorm te geven in lange leerlijnen.

Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.

En hierna volgt een (4 pagina's lange) uitwerking van de genoemde concepten en denk-activiteiten. Van elk concept wordt een korte karakteristiek beschreven met de gewenste accentverschuiving ten opzicht van het bestaande programma.

Om een voorbeeld te noemen (pagina 12):

Formule

Onder dit kernconcept valt het inzicht in algebraïsche formules en expressies als beschrijvingen van rekenprocessen maar ook als zelfstandige algebraïsche objecten waarmee men kan redeneren en manipuleren. Ook inzicht in de structuur van formules, in de volgorde en de reikwijdte van operaties, in het relatieve belang van verschillende termen en factoren vallen hieronder. In dit verband wordt van 'symbol sense' gesproken. Tevens omvat het formulebegrip parate kennis van bijvoorbeeld merkwaardige producten. Dit kernconcept hangt sterk samen met het getalbegrip en het functiebegrip en is met name van belang voor wiskunde A, B en D.

Accentwijzigingen in klas 1, 2 en 3 zijn dat er meer nadruk wordt gelegd op het rekenen met wortels en gebroken machten, op merkwaardige producten, op betekenis en afleiding van de abc-formule en dat aandacht wordt besteed aan het nauwkeurig algebraïsch formuleren. In de Tweede Fase is belangrijk dat de verworvenheden van de onderbouw worden onderhouden en waar nuttig met beweringslogica worden ondersteund en verdiept.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren en algebraïseren, formules manipuleren, logisch redeneren en abstraheren.

De deelnemers aan de discussie waren zeer verdeeld over dit hoofdstuk. Er was bewondering voor het lef waarmee concreet gemaakt wordt wat de rode draad in ons vak moet zijn. Hiermee beken je kleur, het is een zeer duidelijke opsomming. Het dwingt ons ook om de lange lijnen in ons onderwijs te bewaken. In bovenstaand kernconcept 'formule' staan zowel aandachtspunten voor de onderbouw als voor de bovenbouw vermeld.

De tegenstanders van dit overzicht van concepten en denkactiviteiten benadrukken de willekeur van een dergelijk lijstje. Waarom dit lijstje? Waarom überhaupt een lijstje? Het creëert een schijnzekerheid en draagt een beperking in zich die je zou moeten vermijden, aldus sommige aanwezigen. Een punt van zorg dat hier weer expliciet genoemd werd betreft het gevaar van overladenheid in de onderbouw. Bij vele kernconcepten staat iets dergelijks als in het bovenstaande citaat vermeld,

namelijk dat een accentwijziging nodig is in klas 1, 2 en 3. Vaak betreft dit een accent op meer abstracte wiskunde. Staat dit niet haaks op een ontwikkeling in de vernieuwde onderbouw waarin juist meer en meer vakoverstijgende projecten gedaan worden, waarin ook wiskunde een plaats krijgt? Hoeveel abstractie kun je daarbinnen kwijt?

III. De rol van ICT

Uit 'Rijk aan betekenis', pagina 22:

In de visie van de commissie dienen ICT-gereedschappen in handen van de leerling als verrijking en verdieping. Geavanceerde ICT-tools kunnen werk uit handen nemen en concentratie op hoofdzaken bevorderen. Het is echter van groot belang dat hiervan geen negatieve invloed uitgaat op de beheersing van basisvaardigheden. Een zekere mate van basisvaardigheid en parate kennis is onontbeerlijk voor het wiskundig inzicht en voor een efficiënte probleemaanpak. Het instrumenteel ICT-gebruik mag de ontwikkeling en onderhoud van deze basisvaardigheden niet naar de achtergrond dringen. De organisatie van toetsing is hierbij van groot belang. Het ICT-gebruik dient gericht te zijn op 'use to learn' en heeft een zelfstandige leerling voor ogen die op de geleerde wiskundige methoden vertrouwt.

Standpunt 10

De rol van educatieve software moet zijn 'use to learn' en niet 'learn to use'. Anders gezegd: het gebruik van ICT staat ten dienste van het onderwijsproces, van het leren van wiskunde. Bij het gebruik van ICT als rekengereedschap is het zaak ervoor te zorgen dat dit de ontwikkeling en het onderhoud van de basisvaardigheden met pen en papier niet hindert maar juist ondersteunt. In dit licht is een heroverweging van het huidige gebruik van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs gewenst.

De 'use to learn' gedachte werd van harte onderschreven door de aanwezigen. Dit uitgesproken hebbende, belandden we vrijwel onmiddellijk in een discussie over het gebruik van de GR: een meerderheid van de aanwezigen was er tegen om de GR helemaal uit het CE te halen. Maar de gedachte dat je de GR slechts bij een gedeelte van het CE zou mogen gebruiken, kon wel op veel bijval rekenen. Door leerlingen te dwingen ook opgaven zonder machine te maken, worden ze namelijk op een natuurlijker wijze op het spoor gezet van gezond verstand en

wiskundige vaardigheden, iets wat kennelijk geen vanzelfsprekende zaak (meer) is. Een van de aanwezigen beargumenteerde dat je de GR heel goed als zinvol aanvullend gereedschap kunt gebruiken. Het problematische gebruik van de GR laat niets anders zien dan wat we ook al constateerden bij het gebruik van de gewone rekenmachine: leerlingen stellen alle hoop en vertrouwen in de machine. Als je als docent hoofd-rekent, lijkt dit van een bovennatuurlijk gave te getuigen. Hoe zou je rekenmachines wel zinvol kunnen inzetten in het onderwijs? Hoe kunnen we de nadelige effecten tegengaan? We blijken nog altijd geen adequate antwoorden gevonden te hebben op de vele vragen die de inzet van dergelijke machines oproepen, laat staan dat we weten wat te doen met rekenmachines met faciliteiten voor symbolische manipulatie, computer-algebra. Om over de ICT-didactic die focust op 'use to learn' voorlopig maar te zwijgen.

In dit ICT-hoofdstuk geen visionaire toekomstschets. Jammer? Wijsheid? De commissie doet aanbevelingen voor grondig

onderzoek op dit terrein maar laat in het midden wie dit onderzoek moet uitvoeren. De deelnemers aan de raadpleging waren het er over eens dat er niet zoveel concreets in dit hoofdstuk te vinden is; we bevinden ons in een tussenstadium waarin nog veel fundamentele discussies nodig zijn om de lijnen voor de toekomst uit te zetten. Het getuigt van helderheid dat de commissie dit onomwonden zegt.

Tot slot

Tijdens de veldraadpleging laaiden naar aanleiding van dit document zowel 'oude' als 'nieuwe' vragen en discussies op, zoals:

- wat te doen aan de huidige algebraïsche onkunde?
- hoe komt het toch dat ons vak zo impopulair is?
- hoe overtuigen we schoolleiders van de noodzaak van voldoende contacturen?

Uiteraard raakten we niet uitgediscussieerd, en natuurlijk zijn de antwoorden niet gevonden. Dat was de bedoeling van deze bijeenkomst ook niet. Maar, deze vragen zullen de komende jaren onderwerp

van gesprek en beleid blijven. Het kan dus spannend worden. Beangstigend of uitdagend spannend? De tijd zal het leren. Het doel van de bijeenkomst was een raadpleging van docenten over de uitgangspunten van cTWO zoals verwoord in het visiedocument. In het algemeen is het document goed en positief ontvangen. De kritiek die geuit is, wordt nu door veldadviseur Wim Laaper omgesmeed tot een advies aan cTWO. Vervolgens zal deze commissie op grond van deze en andere aanbevelingen komen met een definitief stuk^[1]. Ik beveel het lezen van dit document van harte bij u aan.

Noot

[1] Nog niet verschenen bij het ter perse gaan van dit blad

Over de auteur

Klaske Blom is redacteur van Euclides en wiskundedocent in Amersfoort aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt.

E-mailadres: kablom@tiscali.nl



Een intelligent (relatie)geschenk?

Deze Kepler-Poinsot ster van Arjen is één van de vele bijzondere objecten, puzzels en spellen gerelateerd aan natuurkunde, wiskunde en logica uit de Arabesk collectie. U vindt de volledige catalogus op internet:

www.arabesk.nl

AVENUE CONCORDIA 17 B - 3042 LA ROTTERDAM
TELEFOON: (010) 214 03 01 - FAX: (010) 214 03 90 - E-MAIL: ARABESK@ARABESK.NL



Professionalisering met het Freudenthal Instituut

Het Freudenthal Instituut (FI) verzorgt naast onderzoek en ontwikkeling ook cursussen voor leerkrachten en docenten in PO en VO.

Een folder met het cursusaanbod en mogelijkheden voor maatwerk is inmiddels aan alle scholen verstuurd. Voorbeelden van cursussen die het FI aanbiedt zijn:

- rekenen en rekenproblemen
- meetkunde met Cabri
- zelf java applets maken

Naast het aanbod kunt u het FI ook inschakelen om professionalisering op maat voor uw school (of groep scholen) te verzorgen. Voorbeelden van onderwerpen waar het FI maatwerk voor kan leveren zijn:

- taalgericht reken-wiskundeonderwijs
- toetsen
- gebruik van applets in de wiskundeles
- algebra

Wilt u meer weten over professionalisering door het FI, bezoek dan de website www.fi.uu.nl/nl/professionalisering/seizoen20062007/ voor een compleet overzicht.

De Condorcet Paradox

Aan een verkiezing doen vijf kandidaten mee. De kiezers mogen één stem uitbrengen op de kandidaat van hun voorkeur. De kandidaat die de meeste stemmen krijgt, wordt gekozen. Dit is het systeem dat o.a. in de Britse districten wordt toegepast. Stel dat de uitslag in één van die districten als volgt is:

kandidaat	%
A	30%
B	20%
C	20%
D	20%
E	10%
	100%

Bij deze uitslag is kandidaat A de duidelijke winnaar. De kandidaten B, C en D blijven ver achter terwijl kandidaat E voor spek en bonen meedoet. Immers, 90% van de kiezers verkiest een andere kandidaat boven E. Geen nek aan nek race dus in dit district maar een duidelijke uitslag. Maar is de situatie wel zo duidelijk als ze op het eerste gezicht lijkt? We zullen zien.

Hoewel de kiezers slechts op één kandidaat mogen stemmen, hebben ze ongetwijfeld wel een mening over de andere kandidaten. Een kiezer heeft bijvoorbeeld op kandidaat B gestemd maar vindt kandidaat D een goede tweede. Een andere kiezer ziet misschien weinig verschil tussen de kandidaten A, C en E maar vindt de kandidaten B en D totaal ongeschikt. Laten we de kiezers eens naar hun mening vragen over de kandidaten A en B. Het blijkt dat 60% van de kiezers kandidaat B verkiest boven kandidaat A. Een meerderheid heeft dus liever B dan A, maar toch wordt A verkozen. Dat is op zijn minst merkwaardig. Vragen we de kiezers naar hun mening over de kandidaten A en C dan heeft zelfs 70% een voorkeur voor C. De kiezers vinden dus zowel B als C een betere kandidaat dan A die de verkiezing

wint. Hoe dat kan, zien we in de volgende tabel. Daarin hebben we niet alleen de eerste voorkeur van de kiezers weergegeven, maar ook hun tweede, derde, vierde en vijfde voorkeur.

30%	20%	20%	20%	10%
A A A	B B	C C	D D	E
E E E	C E	B D	C E	D
B C D	E C	E E	B B	B
C D C	A D	D A	E C	C
D B B	D A	A B	A A	A

In de tabel stelt iedere kolom de voorkeuren van 10% van de kiezers voor. Er zijn uiteraard nog wel andere voorkeuren mogelijk en ook andere verdelingen over de kiezers, maar we houden het simpel. De lezer kan gemakkelijk nagaan dat 60% van de kiezers B boven A plaats en dat 70% van hen C verkiest boven A. De voorkeurentabel laat ons bovendien zien dat 60% van de kiezers D prefereert boven A en dat 70% van hen liever E heeft dan A. We zetten dit nog maar even op een rijtje:

A-B	=	40-60
A-C	=	30-70
A-D	=	40-60
A-E	=	30-70

Een verbluffende uitslag; kandidaat A verliest het in een onderlinge competitie van elke andere kandidaat maar wordt toch de winnaar. Stelt u zich eens een voetbalcompetitie voor waarin team A alle wedstrijden verliest maar aan het eind van het seizoen toch als kampioen gehuldigd wordt! Wel, in ons district kan dat blijkbaar. Een kandidaat die in een onderlinge vergelijking van alle andere kandidaten verliest, noemen we een *Condorcet-verliezer*. Een dergelijke verliezer is genoemd naar Marquis de Condorcet (1743-1794), een Frans wiskundige en staatsman die belangrijk werk heeft gedaan in wat we nu de sociale keuzetheorie noemen. Bij het verkiezingssysteem van ‘meeste stemmen gelden’ is het mogelijk, zoals het

bovenstaande voorbeeld laat zien, dat een Condorcet-verliezer als beste uit de bus komt. Dit merkwaardige verschijnsel heet de *Condorcet Paradox*.

In ons district wordt de in onderlinge vergelijking slechtste kandidaat de winnaar. Hoe zit het met kandidaat E, die in onze verkiezing nauwelijks stemmen kreeg? We hebben al gezien dat deze zwakke kandidaat aanzienlijk populairder is dan de winnaar. Een meerderheid van 70% verkiest E boven de winnaar A. Een onderzoek van de voorkeurentabel laat zien dat E bij een meerderheid van de kiezers ook de voorkeur heeft boven de andere kandidaten. De lezer kan weer gemakkelijk nagaan dat bij een onderlinge vergelijking van E met de andere kandidaten iedere vergelijking in het voordeel van E uitvalt. Samengevat:

E-A	=	70-30
E-B	=	60-40
E-C	=	60-40
E-D	=	60-40

Kandidaat E die in een onderlinge vergelijking iedere andere kandidaat verslaat noemen we een *Condorcet-winnaar*. Kandidaat E is de enige meerderheidskandidaat in de zin dat geen enkele andere kandidaat op meer steun kan rekenen dan E. Een Condorcet-winnaar is de meest voor de hand liggende winnaar van een verkiezing. In ons district echter komt deze Condorcet-winnaar (kandidaat E) op de laatste plaats terwijl de Condorcet-verliezer (kandidaat A) de verkiezing wint. Inderdaad, letterlijk en figuurlijk, de wereld op zijn kop.

Men kan zich afvragen waarom we niet bij iedere verkiezing de Condorcet-winnaar als winnaar aanwijzen. Dat zou inderdaad een goede keus zijn. Het probleem is echter dat er niet bij iedere voorkeurentabel een Condorcet-winnaar bestaat. De volgende voorkeurentabel met drie kandidaten laat dat zien.



Jean-Antoine-Nicolas de Caritat,
marquis de Condorcet (1743-1794)

A	A	A	B	B	C	C
C	C	B	A	A	B	B
B	B	C	C	C	A	A

De lezer kan nagaan dat een meerderheid B verkiest boven A. Kandidaat C wordt door een meerderheid verkozen boven B. Maar A op zijn beurt geniet de voorkeur boven C. Samengevat:

B wint van A
C wint van B
A wint van C

In deze voorkeur is er een cykel van meerderheidsvoorkeuren:

$A > C > B > A$

Met andere woorden, in dit geval is iedere winnaar een minderheidskandidaat. De onmogelijkheid om in dit geval een zinnige winnaar aan te wijzen, heet de *Stem Paradox*, soms ook wel aangeduid als de Condorcet Paradox.

De Condorcet Paradox kan zich ook voordoen bij allerlei tabellen waarin slechts eerste voorkeuren zijn opgenomen. Een voorbeeld.

In een onderzoek naar wat men belangrijk vindt in het werk, kan men kiezen uit vijf items. De onderstaande tabel geeft het resultaat van het onderzoek.

‘Wat vindt u het belangrijkste in uw werk?’

	%
A = Voldoening	30%
B = Collega's	20%
C = Carrière	20%
D = Werkomgeving	20%
E = Geld	10%
	100%

Eén conclusie dringt zich direct op: geld maakt niet gelukkig! Immers, 90% van de ondervraagden vindt geld niet het belangrijkste in hun werk. Maar wat als onze voorkeurentabel ten grondslag ligt aan dit onderzoek? In dat geval vindt een meerderheid geld belangrijker dan voldoening, een meerderheid vindt geld belangrijker dan de collega's en hetzelfde geldt voor de carrière en de werkomgeving. Dit laat slechts één conclusie toe: alles draait om geld! U ziet, ook bij zo'n onderzoek kun je gemakkelijk op het verkeerde been worden gezet.

Noot

Eerdere afleveringen van de rubriek ‘(Wis)Kundig Kiezen’ verschenen in de eerste twee nummers van de vorige jaargang, Euclides 81-1 (september 2005) en 81-2 (oktober 2005).

Over de auteur

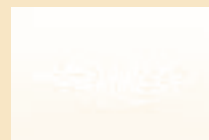
Rob Bosch is redacteur van Euclides en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.
E-mailadres: r.bosch2@nllda.nl

AANKONDIGING / EXPOSITIE MATHEMATISCHE KERAMIEK

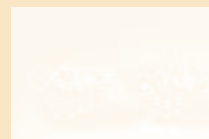
Nog tot en met 23 december vindt in de St. Joseph Galerie te Leeuwarden de internationale keramiek-expositie *Mathematical Ceramics 2006* plaats.

De galerie is geopend van woensdag t/m zaterdag, 13u30 – 17u00.

Nadere informatie: 058-2666356 of www.sjgalerie.nl.



Angela Burkhardt-Guallini (Zwitserland)



Ane-Katrine von Bulow (Denemarken)



Leslie Thompson (Verenigde Staten)

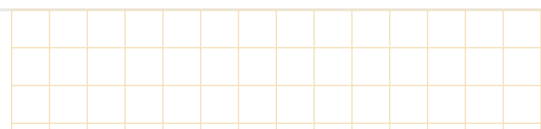


23 t/m 27 januari 2007

Jaarbeurs Utrecht

www.not-online.nl

vnu exhibitions
europa joint venture jaarbeurs / nva



MATHADORE: het concept van de toekomst?

[Frits Spijkers]

Inleiding

In het schooljaar 2005/2006 heb ik twee dagen per week mogen besteden aan een onderzoek bij de Technische Universiteit Eindhoven naar de opzet van interactief lesmateriaal voor het wiskundeonderwijs in de tweede fase van het voortgezet onderwijs. Dit onderzoek is mogelijk geworden door een subsidie in het kader van het NWO-programma 'Leraar in onderzoek'. Het staat onder leiding van prof. dr. Arjeh Cohen. Mijn directe begeleiders zijn Hans Cuypers en Hans Sterk.

Het onderzoek kent twee componenten:

- het ontwerpen van geschikt lesmateriaal waarbij de computer wordt gebruikt ten behoeve van interactiviteit en antwoordencontrole als geïntegreerd deel van het lesmateriaal;
- testen in de klas om na te gaan hoe leerlingen met het gepresenteerde materiaal omgaan, welke meerwaarde de ict-component heeft en hoe die meerwaarde kan worden afgestemd op de behoeften van de leerlingen.

Het is de bedoeling om op grond van de (beperkte) testgegevens en op grond van kennis van andere projecten op dit terrein (zoals het Galois-project, waarover in het schooljaar 2005/2006 meerdere artikelen in Euclides zijn verschenen) conclusies te trekken over de opzet van een totaalaanpak voor het wiskundeonderwijs in de tweede fase

waarin ict en papieren materiaal volledig op elkaar zijn afgestemd. Mijn rol in dit onderzoek is (mede)-bedenker van het concept, auteur (in de voor het project gebruikte xml-omgeving) van het te testen materiaal en het testen van het materiaal in de klas, een vijfde klas wiskunde A1,2 van de Koninklijke Scholengemeenschap te Apeldoorn.

Dit onderzoek is uitgegroeid tot het MATHADORE-project: het opzetten van een complete verzameling interactieve wiskundematerialen voor de Tweede Fase havo/vwo. In dit project participeren:

- de TU Eindhoven, die zijn kennis op het gebied van interactieve wiskundematerialen via het web inbrengt;
- Pragma-ADE (een bedrijf dat is gespecialiseerd in het automatisch opmaken van bronbestanden in xml) te Hasselt die de in xml gecodeerde wiskunde omzet in mooi opgemaakte documenten;
- de stichting Math4all (een stichting zonder winstoogmerk die zich toelegt op het ontwikkelen van wiskundematerialen voor het voortgezet onderwijs) die zorgt voor de wiskundige inhoud.

In november 2005 werd de eerste ruwe versie van de opzet gepresenteerd tijdens de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, niet omdat we alles al klaar hebben, maar om zoveel mogelijk mensen in staat te stellen mee te kijken...

Achterliggende observaties

Het wiskundeonderwijs in Nederland wordt al geruime tijd beheerst door een drietal grotere lesmethodes. Deze methodes zijn altijd gebaseerd op een vast en goed doordacht didactisch concept. De didactische inbreng van de docent beperkt zich in de bovenbouw havo/vwo veelal tot het in een studiewijzer aangeven van de volgorde waarin het boek moet worden doorgewerkt en wat er daarbij overgeslagen kan worden. Wiskunde is in het beeld van leerlingen 'sommen maken', maar welke rol opgaven spelen in het leerproces is ze vaak onduidelijk.

In de bovenbouw havo/vwo is het wiskundeonderwijs de laatste jaren nauwelijks interactiever geworden, ondanks de aanwezigheid van internet, grafische rekenmachine en diverse softwarepakketten. Centraal staat nog de traditionele lesmethode van waaruit de leerling naar een site, een grafische rekenmachine of een softwarepakket wordt gestuurd.

En dat terwijl gebruikers van elektronische leeromgevingen zitten te springen om geschikte digitale content.

Het aantal contacturen wiskunde is sterk afgenomen sinds de introductie van de Tweede Fase in 1998. In het 'studiehuis' mogen jongeren veelal zelfstandig aan wiskunde werken. Het tempo wordt bepaald door de studiewijzers en de stapeling van hoofdstukken in de lesmethoden.

Per profiel krijgen leerlingen een zelfde aanbod. Jongeren hebben nauwelijks overzicht van en invloed op wat ze moeten leren. Leerlingen kunnen de gevolgen ook niet overzien als ze zelf 'iets' overslaan. Alleen als ze kunnen zien waar een bepaalde opgave voor dient in het leerproces, wanneer ze snel even kunnen testen of ze bepaalde kennis en vaardigheden al hebben, wanneer ze kunnen zien welke positie een bepaald onderwerp inneemt in het geheel, zijn keuzes mogelijk. Hbo's en universiteiten zijn ontevreden over de wiskundige vaardigheden van nieuwe studenten. Er worden veel opfriscursussen en bijspijkercolleges georganiseerd.

Dit zijn enkele observaties uit de praktijk van ons huidige wiskundeonderwijs. Het

figuur 1
Website
MATHADORE,
nieuwe
versie



(natuurlijk gekleurde) beeld wat ontstaat, is dat van een nogal statische situatie waarin weinig ruimte is voor eigen keuzes, niet van docenten en evenmin van leerlingen, en waarin voor een goed leerproces in samenspraak tussen leerling en docent door weinig contactmomenten niet veel tijd is. Hiermee wil ik natuurlijk niemand te kort doen, zeker niet die docenten die hun uiterste best doen om met allerlei hulpmiddelen wel een eigen didactische visie in hun lessen in te passen. Maar toch rijst de vraag hoe je docenten en leerlingen beter kunt bedienen én meer ruimte kunt bieden voor eigen inbreng en didactische keuzes...

Interactieve wiskunde: MATHADORE

Wat je als leerling wilt is interactief leren: zelf of samen met anderen naar een bepaald doel toewerken en dan datgene bestuderen en interactief oefenen wat daarvoor nodig is. Feedback op wat je bij het construeren van beoogde kennis en vaardigheden doet is daarbij onontbeerlijk. Maar of je alle stappen (verkennen, stapsgewijs opbouwen, op een rijtje zetten, oefenen, verwerken en verdiepen) van het leerproces doorloopt, kies je zelf afhankelijk van je voorkennis en de snelheid waarmee je de begrippen opneemt.

Wat je als docent wilt is interactief leren mogelijk maken en aansturen door de uitgangspunten van de theorie, het doel ervan en de positie die een bepaald onderwerp inneemt ten opzichte van het geheel van de wiskunde in samenspraak aan te stippen. Daarna wordt je rol coachend: feedback geven in de fase waarin de begrippen en vaardigheden moeten worden opgebouwd, aangeven hoeveel individuele oefening nodig is, waar extra tijd moet worden ingezet en waar stappen kunnen worden overgeslagen.

MATHADORE wil een verzameling *interactieve wiskundematerialen* voor de Tweede Fase zijn waarin ruimte is voor het kiezen van eigen leerroutes, extra oefening waar nodig, korte routes waar mogelijk, heldere feedback op de juiste momenten. En daarbij gaat het om meer dan 'zomaar sommen zitten maken': in de eerste plaats is er uitleg, zijn er (interactieve) voorbeelden en is er een helder theorieoverzicht waarmee leerlingen zich de theorie eigen kunnen maken, en in de tweede plaats zijn de

opgaven in soorten verdeeld die passen bij de fase van het leerproces en die leerlingen bewust laten zijn van wat ze op zeker moment aan het doen zijn, welke stappen ze (afhankelijk van hun leerproces) kunnen overslaan, dan wel extra aandacht geven. Een deel van de interactiviteit tussen docent en leerling zal worden ingevuld door de computer: uitleg en voorbeelden kunnen worden aangepast, antwoorden worden nagerekend door een computeralgebra-pakket en voorzien van passende feedback, extra oefening kan worden opgeroepen en tussentijdse toetsopgaven stellen de leerling in staat om onderdelen versneld door te werken.

Uiteraard zal niet alles met de computer gaan: vaak is op papier werken gewoon handiger, feedback van een docent beter, of een computer niet voorhanden. Daarom kan alle gewenste materiaal ook in een papieren versie worden opgenomen. Het is uiteindelijk de bedoeling dat een docent zijn 'eigen' wiskundeboek kan samenstellen met alleen het materiaal erin dat hij zelf kiest, passend bij zijn eigen didactiek en de mate waarin hij zijn leerlingen zelf keuzes wil laten maken. En zelfs moet het in de toekomst mogelijk zijn dat je als docent eigen uitleg, eigen opgaven en dergelijke toevoegt zodat er een community van wiskundedocenten ontstaat die gezamenlijk zorgt voor up-to-date wiskundemateriaal voor de Tweede Fase.

MATHADORE wil voldoen aan de volgende criteria:

1. *Degelijke wiskunde.* De wiskunde wordt op heldere wijze en op het niveau van de leerling aangeboden, kent een goede structuur vanuit de basisdefinities en is passend bij de doelgroep.
2. *Examenprogramma.* Het materiaal omvat minstens het actuele eindexamenprogramma havo-vwo.
3. *Aantrekkelijke en interactieve wiskunde.* De wiskunde is zo aantrekkelijk en interactief mogelijk gebracht. De leerling kan zelf op onderzoek uit.
4. *Maatwerk.* Het leerstofaanbod is zo gestructureerd dat een leerling er een bij hem passende route in kan volgen: hij kan keuzes maken met betrekking tot de manier waarop hij de leerstof leert zonder daarbij het zicht te verliezen op het beoogde einddoel. En een docent die met het materiaal wil werken kan gemakkelijk

leerroutes vaststellen die naar het beoogde doel leiden.

5. *Mediumneutrale opslag.* Het materiaal is beschikbaar op papier, binnen elektronische leeromgevingen en via internet.
6. *Gratis leerstof, vergoeding voor diensten.* De totale leerstof is gratis beschikbaar. Voor diensten zal een vergoeding worden gevraagd (antwoorden en feedback, resultaten bijhouden, 'eigen wiskundeboek' samenstellen, diagnose van leerresultaten, etc.). Deze vergoeding zal worden gebruikt om de kosten te dekken en het onderhoud van content en techniek mogelijk te maken. Docenten, leerlingen kunnen en mogen zelf printen zonder daarvoor iets te betalen.
7. *Open source.* Docenten wiskunde zullen in de gelegenheid gesteld worden om eigen uitleg, eigen opgaven, eigen voorbeelden en eigen toepassingen toe te voegen.

Voor het werken met MATHADORE is een computer met een webbrowser als Internet Explorer of Mozilla Firefox voldoende; meer is niet nodig. Maar er kan een leerboek op maat worden gemaakt. Het heen en weer slepen van zo'n leerboek is echter niet nodig: thuis kan een leerling gewoon vanaf de computer werken en naar wens uitdraaien wat hij nodig heeft. In *figuur 1* is te zien hoe de website www.mathadore.nl er vanaf november 2006 uitziet.

Het grootste verschil tussen MATHADORE en de bestaande lesmethoden wordt driedig:

- Docenten kunnen zelf uitzoeken welk materiaal ze welk leerjaar willen gebruiken en daarbij kiezen voor het samenstellen van een 'eigen' leerboek op maat, uitgaande van hun eigen didactische aanpak.
- Leerlingen kunnen altijd en op elk moment (binnen de grenzen die de docent stelt) eigen routes bepalen, meer oefening kiezen, op papier doen wat ze liever op papier willen doen, extra feedback krijgen bij leerstofopbouw.
- Papieren versie en webversie zijn volledig op elkaar afgestemd, zodat er op natuurlijke wijze kan worden gewisseld van het één naar het ander.

De opzet van MATHADORE

Bij de opzet van het materiaal is vanaf het begin gekozen voor het maken van zowel

een papieren versie als een webversie die naadloos op elkaar aansluiten. Voor wat betreft de webversie is de inzet van een computeralgebra-pakket (CA-pakket) voor interactiviteit en antwoordencontrole een uitgangspunt geweest.

Het materiaal zal via www.mathadore.nl gratis online beschikbaar zijn voor iedereen die ermee wil werken. Alleen voor diensten zal een gebruiker moeten betalen.

Het *concept* voor het materiaal is gebaseerd op twee uitgangspunten:

- Docenten moeten er volgens eigen didactische inzichten les mee kunnen geven.
- Leerlingen moeten (voor zover de docent daartoe ruimte biedt) eigen keuzes kunnen maken gebaseerd op al aanwezige kennis en op voorkeuren op het gebied van de manier van werken en feedback krijgen op hun werk.

Dit heeft tot gevolg dat er zowel voor de docent als voor de leerling herkenbare eenheden moesten worden bedacht om dergelijke keuzes mogelijk te maken.

Daarbij was het uitgangspunt de lijst met

eindtermen voor de tweede fase zoals die vanaf 1 augustus 2007 geldt. We hebben voor het onderzoek en de tests gekozen voor onderwerpen die ook binnen de huidige lijst met eindtermen vallen, zodat het testen heeft plaatsgevonden door bestaande delen van de leerstof te vervangen door het MATHADORE-materiaal.

Die lijst met eindtermen bestaat uit domeinen waarbinnen we onderwerpen (vaak subdomeinen, maar niet altijd) hebben onderscheiden. Elk onderwerp is verdeeld in onderdelen, afgeronde eenheden leerstof.

De tabel laat zien hoe de opbouw in elementen van een onderdeel binnen een onderwerp er uit ziet (in de pdf-versie; in de webversie is van een volgorde eigenlijk veel minder sprake, alle elementen zijn direct benaderbaar via de navigatiebalk).

Het laatste onderdeel van elk onderwerp heet 'Totaalbeeld' en beoogt een overzicht te geven van alles wat aan de orde is geweest met opgaven op onderwerpsniveau.

Het is nadrukkelijk de bedoeling dat de docent tot op het niveau van de afzonder-

lijke elementen kan kiezen wat hij zijn leerlingen aan materiaal voorschotelt. Daarbij zal zijn didactische zienswijze bepalend zijn: wil hij zijn leerlingen de leerstof zelf laten ontdekken, dan maakt hij wellicht een andere keuze dan wanneer hij meer zelf de theorie wil presenteren. Binnen de grenzen die de docent stelt kan een leerling dan nog eigen keuzes maken. Voor de webversie van MATHADORE is interactiviteit en een goede antwoordenstructuur van groot belang. Zoals verderop in dit artikel duidelijk zal worden, is voor de leerlingen de meerwaarde van internet niet voor de hand liggend bij het bestuderen van wiskunde. Veel leerlingen lezen liever in een boek en maken liever de opgaven op papier.

Alleen goede interactiviteit en het krijgen van bruikbare feedback op gegeven antwoorden is voor hen een reden om wiskunde via het beeldscherm te doen.

De eerste stappen op dit gebied zijn gezet:

- Herhaling van een opgave of een voorbeeld met een nieuwe door het CA-pakket gegenereerde functie is mogelijk.
- Aanpassen van waarden in opgaven en voorbeelden teneinde nieuwe situaties te creëren is mogelijk.
- De feedback bestaat op dit moment nog alleen uit vergelijken met het juiste antwoord. Dat vinden leerlingen op zich al belangrijk, maar het afvangen van en inspelen op fouten wordt door hen (zo blijkt uit de test) als meerwaarde gezien. Dergelijke intelligente feedback is in ontwikkeling (in het kader van het Galois-project is al het nodige materiaal in die richting bedacht en gemaakt). De complete antwoordenstructuur wordt daarop afgestemd:
 - verkenopgaven zijn bedoeld als opwarmer voor het onderwerp, bijvoorbeeld in een klassengesprek, er zijn geen antwoorden bij;
 - opbouwopgaven zijn bedoeld om de theorie en de vaardigheden aan te leren en vereisen dus de mogelijkheid tot antwoorden invullen, controleren door een CA-pakket en feedback krijgen;
 - toetsopgaven zijn bedoeld om snel na te gaan of een leerling het onderwerp beheerst en vereisen dus de mogelijk-



figuur 2a
Opgave
in oude
website

en vwo komen ook 'Afgeleide functies' en 'Differentieerregels' nog voor. Kortom, het beoogde lesmateriaal kan nog jaren worden doorontwikkeld en in de klas gebruikt. Inmiddels is van zowel 'Veranderingen' als 'Afgeleide functies' de eerste versie gereed en wordt 'Differentieerregels' ontwikkeld. De interactiviteit moet straks geheel in het materiaal zijn geïntegreerd. In tests met leerlingen is en wordt onderzocht welke interactiviteit op welke plek meerwaarde oplevert.

Voor wat betreft de intelligente feedback is contact gelegd met de groep achter het Galois-project. Er is een bijeenkomst geweest met vertegenwoordigers van deze groep en er zijn ervaringen uitgewisseld. Op het gebied van de intelligente feedback hebben zij voorbeeldmateriaal gemaakt en zijn zij bereid hun expertise ter beschikking te stellen. Die intelligente feedback wordt in de komende periode toegevoegd. Daarbij ligt de prioriteit bij het maken van een volledige set materiaal en een geschikt invulmechanisme voor de antwoorden. Dan is het online controleren ervan (als is het maar door vergelijken met het juiste antwoord) gewaarborgd. De feedback zullen we daarna gaan toevoegen.

Er is gezocht naar een auteursgroep om de doorstap naar een volledig aanbod aan wiskunde voor de Tweede Fase te kunnen maken. Zo'n auteursgroep is inmiddels samengesteld en bestaat uit mensen die op dit terrein ervaring hebben. Het coderen van hun materiaal is in volle gang...

Testen in de klas

In november 2005 heeft een pretest van de eerste versie van 'Veranderingen' plaats gevonden. Die pretest heb ik gedaan met een groep van 15 leerlingen in 5 vwo wiskunde A12 (de leerlingen van het EM-profiel) van de Koninklijke Scholengemeenschap te Apeldoorn. Deze groep had in 4-vwo wegens tijdgebrek het onderwerp 'Veranderingen' niet gedaan. Zij werden geconfronteerd met de ruwe versie van dit onderwerp in MATHADORE; veel van het hiervoor beschrevene (geschikt invulmechanisme voor antwoorden, intelligente feedback, e.d.) was toen nog niet gerealiseerd. Mede omdat het maken van een mooi opgemaakte pdf-versie op dat moment nog



figuur 2b
Wiris-
editor met
leerlingen-
invoer

heid tot antwoorden invullen en een snelle goed of fout controle, of een score bijhouden;

- oefenopgaven zijn bedoeld om de opgedane theorie en vaardigheid te oefenen en te verwerken, ze zullen vaak liever op papier worden gedaan;
- toepassingsopgaven zijn om de theorie en de vaardigheden toe te passen en vaak behoorlijk complex en in ieder geval onderdeel-overstijgend, ook deze zullen vaak liever op papier gaan.

Een en ander betekent dat de webversie in verregaande mate gaat verschillen van de boekversie omdat in de eerste de intelligente feedback zal worden ingebouwd. Daarom zullen er waarschijnlijk twee op elkaar afgestemde brondocumenten per element, per onderdeel, per onderwerp bestaan.

De ontwikkeling van het lesmateriaal

Op deze manier lesmateriaal ontwikkelen kost vrij veel tijd omdat elk wiskundig object (ook losse getallen en variabelen in lopende tekst) in OpenMath moet worden gecodeerd. Bovendien merk je hoezeer de 'middellbare school notaties' het netjes coderen van wiskundige objecten in de weg staan: gebruikte notaties zijn bijna altijd gericht op een handige presentatie (die vaak door traditie wordt bepaald) en niet op wiskundige inhoud. Bedenk bijvoorbeeld maar eens hoe lastig de notatie $2\frac{3}{4}$ eigenlijk

is. Het ziet er best handig uit, maar het weglaten van het plusteken is voor een CA-pakket een groot probleem. Ten slotte vereist de leesbaarheid via de computer een compact taalgebruik (wat zeker nog niet overall optimaal is gerealiseerd). Ook het zogenaamde 'scrollen' moet zoveel mogelijk worden vermeden, want dat vermindert het overzicht over de te maken opgave dan wel de te lezen tekst. Daarnaast is het prettig om zoveel mogelijk van het gehele beeldscherm gebruik te kunnen maken, maar daarbij moet dan wel rekening worden gehouden met de diverse beeldschermformaten.

Er is vooralsnog gekozen voor een eenvoudige nette vormgeving (ontworpen door Dukko Hamminga, een professionele vormgever) met de figuren steeds op eenzelfde plek op het beeldscherm. Zowel de web-vormgeving als de pdf-vormgeving is op dit moment nog in ontwikkeling.

Bij aanvang van het project was nog niet bekend hoe de eindtermen van het wiskundeonderwijs zich zouden gaan ontwikkelen. Immers met ingang van 1-8-2007 wordt de opzet en het programma van het onderwijs in de Tweede Fase vernieuwd. Daarom is voor het testmateriaal gekozen voor een leerlijn die vrijwel zeker niet verdwijnt en ook in veel verschillende profielen zal blijven voorkomen: de onderwerpen 'Veranderingen', 'Afgeleide functies' en 'Differentieerregels'. Daarmee wordt de leerlijn 'differentiëren' opgebouwd. Halverwege het project is meer duidelijkheid over de eindtermen vanaf 1-8-2007 ontstaan en de positie van de gekozen leerlijn in de constellatie wiskunde A, B, C en D. Het blijkt dat de keuze een juiste is: zowel in havo als vwo in zowel wiskunde A als in wiskunde B komt 'Veranderingen' voor en in wiskunde A vwo en wiskunde B havo

niet mogelijk was, is er voor gekozen om deze leerlingen alles via de computer te laten doorwerken. Ze kregen daartoe een korte instructie en een lijst waarop alle elementen voorkwamen die beschikbaar waren en waarop werd aangegeven waar interactiviteit zat. Op deze lijst konden ze opmerkingen plaatsen, fouten melden, etc.

Er werd gewerkt in een kleine computer-ruimte met één of twee leerlingen per computer. Ze beschikten wel over kladpapier, maar alle antwoorden werden (vaak in gebrekkige opmaak, rekenmachinetaal) via het toetsenbord ingevoerd en door het systeem bewaard. Vervolgens konden de leerlingen online hun antwoord vergelijken met het goede antwoord. Van andere feedback dan vergelijken met het juiste antwoord was nog geen sprake. Hier en daar kon online een antwoord worden ingevuld met behulp van de editor Wiris-online. Na afloop is onder deze leerlingen een kleine enquête afgenomen. De (voorzichtige) conclusie uit de pretest was:

- alleen van het beeldscherm werken wordt niet als prettig ervaren door de leerlingen;
- het vinden van een geschikte route door een onderdeel wordt als gemakkelijk ervaren;
- de (voorlopige) antwoordsstructuur en het gebrek aan feedback wordt als hinderlijk ervaren en daardoor vinden leerlingen weinig meerwaarde in het werken met de computer;
- de interactiviteit wordt wel als meerwaarde gezien (er is bijvoorbeeld prettige opwindning over het feit dat hetzelfde voorbeeld kan worden bekeken waarin telkens een andere functie is opgenomen en alle uitkomsten automatisch in de tekst aangepast zijn).

Dit betekent dat de volgende verbeteringen moesten worden aangebracht:

- een goede bijbehorende pdf-versie die als startpunt voor de leerlingen kan dienen;
- een goede invulmethode voor de antwoorden op de opgaven die ze via internet maken;
- het 'Verkennen' moet een meer voorbereidende en probleemgestuurde opzet krijgen, dergelijke opgaven lijken de leerlingen het beste voor te bereiden op het onderwerp als ze worden gebruikt in klassengesprekken, zonder zo'n 'interactief moment met de docent' zien de meeste leerlingen het nut er niet van en stoppen ze er weinig tot geen energie in;

figuur 3
Eindresultaat



- het 'Testen' moet worden voorzien van een scoremechanisme;
- bij het 'Opbouwen' is intelligente feedback nodig, nu zagen de leerlingen te weinig verschil met de oefenopgaven;
- het 'Oefenen' (vooral in de echte vaardighedenoefening) moet veel interactiviteit kennen en vooral telkens kunnen worden herhaald.

Een iets uitgebreider verslag van deze pretest is te vinden via www.math4all.nl. In november/december 2006 zal ik op de KSG-Apeldoorn een tweede testronde houden, opnieuw in een vijfde klas wiskunde A12. Het betreft dan het onderwerp 'Afgeleide functies'. Belangrijk is dat voor die tweede testronde een duidelijke update van het ruwe materiaal heeft plaatsgevonden waarin eerder genoemde verbeteringen zijn gerealiseerd. Op dit moment wordt vooral daaraan gewerkt. Daarna zullen we proberen om ook op meer scholen het materiaal te testen. Dat staat voornamelijk gepland voor de eerste helft van 2007. We hopen dan de leerstoflijn Veranderingen – Differentiëren – Differentieerregels geheel af te hebben. Belangstellenden roepen we alvast op om zich te melden via de website.

... het concept van de toekomst?

Er is in de loop van de komende jaren nog een grote stap te zetten: we kiezen voor het zo snel mogelijk online hebben (ook voor wiskunde D) van een groot deel van het programma, waaruit de docent en (binnen door de docent gestelde grenzen) ook de leerling keuzes kan maken. Die keuzes betreffen dan: zelf gekozen onderwerpen, zelf gekozen volgorde, wel of niet op papier, zelf gekozen didactiek. Maar het online materiaal op zichzelf zal de komende jaren nog steeds verder kunnen (en moeten) worden verrijkt. We maken daarbij o.a.

gebruik van de kennis die is opgedaan bij het Galois-project en de Open Universiteit op het gebied van intelligente feedback.

En daarom denken we inderdaad dat MATHADORE het concept van de toekomst is:

- alle lesmateriaal moet van hoogwaardige kwaliteit zijn en is digitaal vrijelijk beschikbaar;
- maatwerk is mogelijk: je kiest als docent (of sectie) wat je wilt gebruiken binnen je eigen didactische visie en je eigen programma;
- de meerwaarde van internet (intelligente feedback, animaties, applets en interactiviteit) kan steeds beter worden ingevlochten, je hoeft er het basismateriaal niet voor te verlaten;
- leerlingen krijgen in één klap overzicht over de totale leerstof over meerdere leerjaren en kunnen gemakkelijk delen tot in detail opnieuw bekijken ook als die in voorgaande jaren in het programma hebben gezeten;
- leerlingen kunnen (binnen de door de docent gestelde grenzen) bewuste keuzes maken passend bij hun leerproces.

Wie meer wil weten over dit project, de achterliggende techniek, wie er aan meewerken en de voortgang ervan, of daar zelf een rol bij wil spelen, kan terecht op de website van de stichting Math4all (www.math4all.nl) en ook op de site www.mathadore.nl.

Over de auteur

Frits Spijkers is leraar wiskunde aan de Koninklijke Scholengemeenschap Apeldoorn en secretaris van de stichting Math4all.
E-mailadres: f.spijkers@math4all.nl

VOOR NU EN STRAKS

Het wiskundeonderwijs is voortdurend in beweging. Hoe ga je als docent hier mee om? Moet 'het roer om'? Of kun je op basis van jaren kennis en ervaring bruikbare veranderingen doorvoeren? Dat is mogelijk. **Getal en Ruimte** is al bijna 40 jaar een begrip in het wiskundeonderwijs, spreekt elk jaar ruim 400.000 leerlingen aan en telt een uitgebreide staf van auteurs - wiskundeleraars - die de bestaande methode met nieuwe ontwikkelingen en situaties toepassen in de dagelijkse praktijk. Waarbij plezier in het leren centraal staat en waarin bestaande en nieuwe media steeds relevante toepassingen krijgen. Met **Getal en Ruimte** heeft u vaste grond onder de voeten waarop u gemakkelijk verder kunt bouwen, **voor nu en straks**.



ACTUEEL TWEEDE FASE:

- Getal en Ruimte is verschenen met herziene delen voor de tweede fase
- compleet voor wiskunde A, B, C én D
- sluit aan bij nieuwe eindtermen
- meer aandacht voor algebraïsche vaardigheden in boek en computeropdrachten
- gemakkelijke overstap naar vervolgoopleidingen

informatie: salessupport.vo@epn.nl
www.getalenruimte.epn.nl
telefoon (030) 6383001

op **Getal en Ruimte** kun je rekenen

Parate kennis en algebra

[Anne van Streun]

WISKUNDEDIDACTIEK ANNO 2010

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = 2$$

Aflevering 1: Weten dat

Het lijkt erop dat het nieuwe programma voor 12-16 jarigen en de tweede fase havo-
vwo samen als effect hebben gehad dat het inzicht en de vaardigheid in het handmatig
manipuleren met formules, vergelijkingen en wiskundige operaties drastisch is
verminderd. Het meest verontrustende uit de talloze gepubliceerde voorbeelden is dat
het kennelijk niet alleen gaat om het vergeten van een geïsoleerde techniek, maar dat
het inzicht in en gevoel voor het werken met symbolen, in de literatuur *symbol sense*
genoemd, nagenoeg lijkt te ontbreken. In de volgende afleveringen van deze rubriek
komen daar voorbeelden van.

1600: Slag bij Nieuwpoort?

Sommige klachten over tekortschietende kennis en vaardigheden van leerlingen zijn van alle tijden. Neem bijvoorbeeld de historische kennis, waar het volgens veel experts en politici ernstig aan schort. De vraag is nu over welke historische kennis we het hebben. Wat moet de Nederlandse burger weten over de geschiedenis van Nederland, Europa en de wereld? Het laten memoriseren van een groot aantal jaartallen ligt al geruime tijd achter ons. De jongere generatie reageert niet meer automatisch op het jaartal 1600. Weinigen van de oudere generatie kunnen de context van de beroemde slag bij Nieuwpoort (beroemd door het mooie jaartal) toelichten.

Zonder die context met prins Maurits, de tachtigjarige oorlog, de poging om de Duinkerker kapers te straffen, de regenten die ook kooplieden waren, enzovoort, is die *parate* kennis (1600: Slag bij Nieuwpoort) eenvoudig *zinloze* kennis. Dergelijke kennis draagt niet bij aan het historisch inzicht. Op dezelfde manier hebben we in het verleden geïsoleerde technieken onderwezen, niet zinvol ingebed in een groter verband.

Het *gemis aan parate kennis* van jaartallen gekoppeld aan historische gebeurtenissen leidt evenwel tot anekdotische kennis van historische gebeurtenissen die niet in de tijd kunnen worden gesitueerd. Vandaar dat nu in het geschiedenisonderwijs de jaartallen (periodes die eeuwen kunnen omvatten) weer van belang zijn, *gekoppeld* aan belangrijke gebeurtenissen en kenmerken van die

periodes. *Parate kennis* als denkkader voor het *zinvol* situeren van gebeurtenissen in de tijd, in het nieuwe examenprogramma geschiedenis *tijdvakken* genoemd. Op dezelfde manier wordt tegenwoordig het hoofdrekenen (een vorm van parate kennis) ingebed in het gehele rekenproces. Leerlingen die niet kunnen hoofdrekenen, kunnen ook de antwoorden die ze met hun rekenmachine produceren, niet op orde van grootte schatten. Het lijkt erop dat wij in het voortgezette wiskundeonderwijs nog niet veel zicht hebben op de inhoud van *zinvolle parate kennis*.

De inhoud van parate wiskundige kennis

Uit een recent onderzoek blijkt dat meer dan de helft van de instromende studenten van de pabo's slechter handmatig of uit het hoofd kan rekenen dan de beste 20% van de leerlingen in groep 8 van de basisschool. Trouw kopt boven een ingezonden reactie van onze collega Cor Hofstra: 'Leerling van nu kan weinig onthouden.' Over welke vorm van gememoriseerde kennis hebben we het? En onderwijzen we dat wel? De opgave $0,2 \times 1,5$ wordt door 80% wel goed beantwoord, maar bij de volgende opgave faalt 80%:

Een auto van 22.000 euro wordt 20% goedkoper. De nieuwe prijs wordt daarna nog eens met 10% verlaagd. Wat is het percentage van de totale prijsverlaging?

Op welke (parate) kennis doet deze opgave een beroep? Het belangrijkste is wel dat de oplosser zich *direct herinnert* (parate kennis)

dat je met procenten moet uitkijken en niet klakkeloos de percentages kunt optellen of aftrekken. Wat moet er vervolgens gebeuren?

1. Uit het hoofd 20% uitrekenen, aftrekken, daar weer 10% van aftrekken en tenslotte de uiteindelijke korting weer omrekenen in een percentage van 22.000 euro? Dat vereist een behoorlijke vaardigheid in het hoofdrekenen! Wat dan?
2. Je kunt je ook *herinneren* (parate kennis) dat het vaak een goede *heuristiek* (een vaak succesvolle zoekmethode om je denken op gang te helpen) is om de gegeven probleemsituatie gewoon te vereenvoudigen door een simpel getal-
voorbeeld te nemen. In dit voorbeeld leidt dat zelfs meteen tot de oplossing. Neem 100 euro, 20% eraf geeft 80 euro, daar weer 10% af geeft 72 euro, dat is 72% van het beginbedrag, dus 28% korting.
3. Wat je na minstens drie jaar wiskundeonderwijs mag verwachten is dat die studenten hebben *gememoriseerd* dat het bij procentuele toename of afname (dus exponentiële groei) altijd gaat om het rekenen met een *vermenigvuldigingsfactor*. Het beginbedrag wordt met $0,8 \times 0,9 = 0,72$ vermenigvuldigd, dus het kortingspercentage is 28%.

De laatste aanpak, namelijk het zoeken van de vermenigvuldigingsfactor, is natuurlijk breed toepasbaar op allerlei situaties waarin exponentiële toename of afname een rol speelt en natuurlijk ook bij verhoudingen en vergroten en verkleinen. Die wetenschap moet toch zeker tot de kern van de *zinvolle parate kennis* over groeiprocessen behoren. De vraag blijft of wij die kennis wel als de kern onderwijzen en aan onze leerlingen duidelijk maken dat het hier om gaat en dat ze die kern paraat moeten hebben.

90%-criteriumtoetsen

Wetenschappelijk onderzoek heeft overtuigend aangetoond dat het *paraat* hebben van een basis aanwendbare kennis van groot

Geef uw leerlingen een kans...

EN ORGANISEER DE WISKUNDE OLYMPIADE OOK BIJ U OP SCHOOL!

[Quintijn Puite]

belang is voor het kunnen oplossen van complexe problemen. Tijdens het oplossen moet de probleemoplosser snel toegang hebben tot die basiskennis, zodat de beperkte ruimte van het werkgeheugen kan worden benut om de mentale voorstelling van de probleemsituatie te ontwikkelen en te monitoren. Leerlingen of studenten die tijdens het oplossingsproces nog eenvoudige kennis of technieken moeten reconstrueren, leiden vaak aan een overbelast werkgeheugen en raken het spoor naar de oplossing kwijt. We herkennen dat al snel, als we leerlingen 1 op 1 helpen met het oplossen van problemen.

De noodzaak om bepaalde basiskennis paraat te hebben en bepaalde basistechnieken vlot te kunnen toepassen lijkt voor de leerlingen te ontbreken. En wij maken hen dat niet duidelijk. De remedie lijkt om die *kern van parate kennis* expliciet in de leerdoelen op te nemen en die afzonderlijk te toetsen in *criteriumtoetsen* en bijvoorbeeld wiskundedictees, zoals in het Engelse onderwijs gebruikelijk is. Korte enkelvoudige vragen met korte antwoorden, snel te toetsen, snel te normeren, snel te herhalen totdat een 90% score is bereikt. Ook gemakkelijk te digitaliseren. We moeten het natuurlijk eerst wel eens worden over de inhoud van die noodzakelijke kern aan parate kennis. Daar gaan de volgende afleveringen over!

De Wiskunde Olympiade is een jaarlijks terugkerende wiskundewedstrijd onder middelbare scholieren en wordt al sinds 1962 in Nederland georganiseerd. Scholieren tot in 5 havo/vwo kunnen hieraan deelnemen, door in januari met de Eerste Ronde mee te doen. Althans, als die op hun school wordt georganiseerd...

Inleiding

In de meeste klassen tref je er wel een paar aan: leerlingen die bovenmatig geïnteresseerd zijn in wiskunde, die geen genoegen nemen met te snelle aannames, die soms zulke ingenieuze denkstappen zetten dat je pas achteraf beseft wat ze nou eigenlijk bedoelen. Het zijn de leerlingen waar u en ik misschien ook onszelf wel in herkennen van toen we ooit zelf leerling waren: enthousiast, leergierig, speels maar ook kritisch. Kortom: leerlingen voor wie wiskunde één grote speeltuin is, waarin van alles te ontdekken is.

De reden van dit artikel is eigenlijk heel simpel: wij zijn op zoek naar precies die leerlingen. En daarvoor hebben we u nodig. Geeft u ze een kans? Wij regelen de rest! Afgelopen jaar deden om precies te zijn 2192 leerlingen van 171 verschillende scholen mee aan de Eerste Ronde. Dat is een mooi aantal, maar dat kan nog beter! Onze doelstelling is dat elke school in Nederland met de Eerste Ronde meedoet, al realiseren we ons dat iedereen al een drukke agenda heeft en dat scholen keuzes moeten maken in hun speerpunten en buitenschoolse activiteiten. Om ons doel te bereiken beschrijven we hieronder wat meer achtergronden bij de Olympiade, waarmee we hopelijk in ieder geval u over de streep trekken!



figuur 1 'Prijsuitreiking' op de school van de auteur

Terug uit Slovenië 2006: een impressie van de Internationale Wiskunde Olympiade

Afgelopen zomer werd de 47e Internationale Wiskunde Olympiade gehouden in Ljubljana, Slovenië. De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen: Wouter Berkelmans uit Amstelveen, Hildo Bijl uit Heerhugowaard, Bauke Conijn uit Ursem, Erik van Holland uit Veenendaal, Jinbi Jin uit Lichtenvoorde en Julian Lyczak uit Alphen a/d Rijn. Voor het eerst mocht ik het team begeleiden, waarbij ik werd bijgestaan door Fokko van de Bult van de UvA als vice-teamleider en mijn voorganger Jan Donkers als waarnemer. Met alle teamleiders vormden wij de honderdkoppige jury, die uiteindelijk de zes problemen selecteerde waar de bijna 500 leerlingen zich vervolgens twee dagen lang over gingen buigen.

Over de auteur

Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, en hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000.
E-mailadres: avstreun@euronet.nl

De organisatie van de Wiskunde Olympiade

Een cyclus van de Wiskunde Olympiade beslaat twee schooljaren. In januari van het eerste schooljaar vindt de Eerste Ronde plaats op alle scholen in Nederland die zich daarvoor hebben opgegeven. Ook al is de Wiskunde Olympiade een individuele wedstrijd, ook de deelnemende scholen strijden elk jaar weer voor het in de wacht slepen van de Scholenprijs: een wisselbeker voor de school met de vijf beste deelnemers. In september van het volgende schooljaar wordt op de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) de Tweede Ronde georganiseerd. De ruim 100 beste deelnemers van de Eerste Ronde krijgen hiervoor een uitnodiging. Daarnaast worden mogelijk ook nog enkele winnaars van de Kangoeroe-wedstrijd en de Pythagoras-ladderwedstrijd hiervoor uitgenodigd. Al deze leerlingen krijgen die dag in ieder geval een prijsje uitgereikt voor hun goede prestaties tot nog toe. De Tweede Ronde zelf bestaat uit vijf pittige wiskundevraagstukken, waaraan drie uur mag worden gewerkt.

De tien beste deelnemers aan deze Tweede Ronde worden samen met nog een aantal andere opvallende deelnemers uitgenodigd om in de periode november tot en met juni aan een trainingsprogramma deel te nemen. Dit programma bestaat uit het werken aan lesbrieven en deelnemen aan trainingsdagen

Het Nederlandse team heeft zich krانig gewerd; weliswaar zijn er geen medailles behaald, maar er zijn wel maar liefst vijf eervolle vermeldingen in de wacht gesleept. (Je krijgt een eervolle vermelding als je geen medaille hebt behaald maar desondanks minstens één opgave volledig hebt opgelost.) Het was een geweldige week, vol met moeilijke maar ook heel mooie wiskunde, met hard werken en ontspannende excursies, met internationale ontmoetingen en een onvermijdelijk afscheid. Voor iedereen een gebeurtenis om nooit te vergeten. Inmiddels zijn vijf van de zes teamleden gaan studeren, terwijl Wouter van de derde naar de vierde klas is overgegaan, en dus weer vrolijk met de Tweede Ronde heeft meegedaan.

Op weg naar Vietnam 2007: trainen van november tot juni

Op vrijdag 15 september 2006 waren de ruim 100 beste leerlingen van de Eerste Ronde bijeen op de TU/e om zich drie uur lang te buigen over de vijf opgaven van de Tweede Ronde. Traditiegetrouw hielp het team van afgelopen zomer de hele dag met de surveillance en andere hand- en spandiensten. Inmiddels hebben we met de trainingscommissie het werk nagekeken. Ik ben trots u de tien prijswinnaars te mogen presenteren:

Prijswinnaars	2e ronde	1e ronde	klas
1 Wouter Berkelmans, Amstelveen *)	44	36	4v
2 Milan Lopuhaä, Driehuis *)	35	31	5v
3 Raymond van Bommel, Hoofddorp	34	36	4v
4 Kyndylan Nienhuis, Diemen *)	33	36	6v
5 Milo van Holsteijn, Wageningen *)	32	34	6v
6 Remy van Dobben de Bruyn, Leiden	30	K **)	5v
7 Hilje Doekes, Bennekom	28	36	6v
8 Rogier Huurman, Nijmegen	28	29	6v
9 Yvette Welling, Almelo	27	36	6v
10 Wouter Zomervrucht, Dordrecht *)	27	26	6v

*) Heeft vorig jaar reeds aan de training deelgenomen.

**) Is als Kangoeroe-winnaar in de Tweede Ronde ingestroomd.

De leerlingen zijn op 10 november 2006 gehuldigd tijdens de officiële prijsuitreiking op de TU/e. Met nog zeven andere leerlingen (Oscar Brandt uit Rijnsburg, Floris van Doorn uit 's Graveland, Johan Commelin uit Wezep, Tim Reijnders uit Nijmegen, Vaya Vos uit Vlissingen, Eilien Knook uit Driebergen en Thijs de Meester uit Barendrecht) worden zij uitgenodigd om deel te nemen aan een trainingsprogramma voor de 48^e Internationale Wiskunde Olympiade die komende zomer (23 tot 31 juli 2007) in Vietnam wordt gehouden.

De training gaat van start met een trainingsweekend in Valkenswaard, dat direct aansluitend aan de prijsuitreiking begint. Verder bestaat de training uit het werken aan lesbrieven en het bijwonen van drie trainingsdagen en een trainingsweek direct aansluitend aan het Centraal Examen. De eindtoets op zaterdagochtend 9 juni bepaalt samen met de inleversommen en de algehele inzet de samenstelling van het team. Het team zal worden begeleid door ondergetekende als teamleider en Birgit van Dalen van de Universiteit Leiden als vice-teamleider.

en het wordt afgesloten met een trainingsweek direct na het Centraal Examen. De training wordt verzorgd door een viertal oud-olympiadedeelnemers waaronder ikzelf.

Op grond van de resultaten bij de training wordt begin juni het zeskoppige team geselecteerd dat Nederland vertegenwoordigt bij de Internationale Wiskunde Olympiade. Deze jaarlijkse internationale wiskundewedstrijd wordt elke zomer in een ander land georganiseerd. Het team wordt voor vertrek officieel door de Minister van OC&W gehuldigd.

De Eerste Ronde: 26 januari 2007

Op vrijdagmiddag 26 januari 2007 zitten door heel Nederland verspreid honderden leerlingen twee uur lang gebogen over de opgaven van de Eerste Ronde. Met ingang van afgelopen jaar is de opzet veranderd: de opgaven zijn nu verdeeld in acht A-vragen en vier B-vragen. Een A-vraag is een vijfkeuze-vraag (van twee punten) en een B-vraag is een open vraag met een exact getal als antwoord (van vijf punten). In totaal zijn er dus 36 punten te behalen. Aan elke school wordt tegelijk met de

opgaven een correctiemodel meegestuurd en ook een stencil met de uitwerkingen, zodat u direct na de daadwerkelijke wedstrijd met de leerlingen hierover kunt napraten. Voor sommige leerlingen kunnen de opgaven behoorlijk pittig zijn. Toch komt er geen hogere wiskunde in voor; met 4-havo/vwo wiskunde en een gezonde dosis probleemoplossend vermogen (dat wel!) komen leerlingen al een heel eind. De twaalf opgaven van de Eerste Ronde vormen voor de deelnemende leerlingen een speelse en uitdagende kennismaking met niet-alledaagse wiskunde.

Wat komt er kijken bij het organiseren van de Eerste Ronde?

Elke school in Nederland heeft van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade via de SLO een brief ontvangen met de uitnodiging tot deelname aan de Eerste Ronde op vrijdagmiddag 26 januari 2007. (Zo niet, dan is een mailtje aan melanie.steentjes@cito.nl voldoende om de brief alsnog te krijgen.) Cito faciliteert vervolgens de registratie van de inschrijvingen. Tegelijk met de uitnodigingsbrief heeft u promotiemateriaal gekregen voor in

Vier opgaven uit de Eerste Ronde 2006

A1. Aan het begin van een gokspelletje hadden Ali, Bente en Chris geld in de verhouding 11 : 8 : 5. Aan het einde van het spel was dezelfde hoeveelheid geld verdeeld in de verhouding 4 : 3 : 2. Welke uitspraak is waar?

- (A) Ali verloor, Bente verloor en Chris won.
- (B) Ali won, Bente verloor en Chris won.
- (C) Ali won, Bente verloor en Chris speelde quitte.
- (D) Ali verloor, Bente speelde quitte en Chris won.
- (E) alle antwoorden (A) t/m (D) zijn niet juist.

A2. In figuur 2 is een aantal hoeken in termen van x gegeven. De waarde van x in graden is:

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15

figuur 2

A3. Als je de getallen 1 t/m 12 achter elkaar opschrijft krijg je het getal 123456789101112 dat uit 15 cijfers bestaat. Als je de getallen 1 t/m n achter elkaar opschrijft dan krijg je een getal dat uit 1788 cijfers bestaat. Wat is de waarde van n ?

- (A) 533 (B) 632 (C) 645 (D) 1599 (E) 1689

B3. Binnen een vierkant $ABCD$ ligt een punt P . E is het midden van de zijde CD . Gegeven is: $AP = BP = EP = 10$. Wat is de oppervlakte van vierkant $ABCD$?

Antwoorden.

A1 - D; A2 - D; A3 - B; B3 - 256

het klaslokaal: een paar posters en een aantal folders om onder geïnteresseerde potentiële deelnemers te verspreiden. Een collega uit de sectie treedt op als wedstrijdleider. Voor deze persoon komt het organiseren van de eerste ronde neer op drie acties, die natuurlijk naar believen onder collega's te verdelen zijn:

- het scheppen van de gelegenheid,
- het afnemen van de toets, en
- het nakijken en opsturen van de resultaten.

Bij het nakijken gaat het alleen om de uiteindelijke antwoorden, bijv. (E) voor een A-vraag en $\sqrt{\pi}$ voor een B-vraag. Met twaalf antwoorden per persoon blijft het nakijkwerk dus zeer binnen de perken.

Vorig jaar was ik zelf wedstrijdleider op Laar & Berg, en ter illustratie ga ik even een jaar terug in de tijd.

- Op de sectievergadering bespreken we de uitnodiging van Cito om mee te doen met de Eerste Ronde. Iedereen die les geeft in 4 en 5 havo/vwo, zal de wedstrijd noemen en geïnteresseerden erop attenderen middels de folders. We reserveren vanaf het zesde uur een lokaal en nemen de wedstrijd ook op in de schoolagenda.
- Begin januari krijg ik de opgaven van het Cito en na inventarisatie van het aantal belangstellenden kopieer ik voor de wedstrijddag zelf voldoende opgavenbladen, leerlingbladen (voor de antwoorden) en ook alvast de uitwerkingen om na afloop aan de deelnemers mee te geven. Een collega wil wel surveilleren.
- Er komen uiteindelijk vijf leerlingen uit de vierde en de vijfde klas meedoen. Als extra aanmoediging heb ik mini-marsjes voor ze gekocht, een traditie die ik heb overgenomen van mijn eigen wiskunde-docent Leon van den Broek, bij wie ik in 1989 zelf aan de Eerste Ronde meedeed.
- Na afloop kijken we het werk van de vijf leerlingen na aan de hand van het correctiemodel; het gaat niet om berekeningen of bewijzen, alleen maar om acht keer een letter en vier keer een exact antwoord per leerling. Na het invullen van het lerarenblad met de schoolinformatie gaat het werk nog diezelfde middag retour naar Cito. Een paar weken later krijg ik de uitslag van het Cito en blijkt dat helaas niemand van de vijf de Tweede Ronde heeft gehaald, al scheelde het bij één leerling maar weinig.

- Ook de Natuurkunde Olympiade heeft dan bij ons op school inmiddels plaatsgevonden, en mijn collega natuurkunde en ik vatten het plan op om aan beide Olympiades nog wat aandacht te besteden. We regelen een prijsuitreiking voor beide schoolwinnaars, waarbij de conrector Onderwijs twee filmbonnen van 10 euro uitreikt. Ook het stukje in de schoolkrant met een foto van deze geïmproviseerde prijsuitreiking kan dan natuurlijk niet ontbreken (zie *figuur 1*).

P(España) > 0 ?

Voor de leerlingen die op vrijdagmiddag 26 januari 2007 aan de Eerste Ronde meedoen, komt de Tweede Ronde pas volgend schooljaar, in september 2007. Dit is ook de reden dat zesdeklassers niet meer mee kunnen doen. Leerlingen uit 5 havo kunnen meedoen als ze volgend jaar vwo gaan doen.

Alle deelnemers aan de Eerste Ronde maken kans om een plek te bemachtigen in het team dat de Nederlandse eer gaat verdedigen op de 49^e Internationale Wiskunde Olympiade in Spanje in juli 2008. Maar dat kan alleen als ze in januari de gelegenheid hebben gehad om met de Eerste Ronde mee te doen.

¡Vamos a España! Geef u uw leerlingen die kans?

Noot

Meer informatie en oude olympiade-opgaven op www.wiskundeolympiade.nl.

Over de auteur

Quintijn Puite is sinds november 2005 teamleider bij de Internationale Wiskunde Olympiade als opvolger van Jan Donkers en is daartoe voor een dag per week verbonden aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de TU/e. Daarnaast is hij docent bij de vakgroep wiskunde van Instituut Archimedes, de lerarenopleiding van Hogeschool Utrecht. Tot vorig jaar gaf hij wiskunde op Laar & Berg te Laren (NH), onderdeel van het Katholiek Lyceum in het Gooi.

E-mailadres: g.w.q.puite@tue.nl



VERSCHENEN / IJHME

IJHME staat voor *International Journal for the History of Mathematics Education*. Het eerste nummer van het tijdschrift is in elektronische vorm beschikbaar. Een papieren versie is inmiddels ook verschenen (ISSN 1932-8818).

Het doel (we citeren): The major aim of the IJHME is to provide mathematics teaching and mathematics education with its memory, in order to reveal the insights achieved in earlier periods (ranging from Ancient time to the late 20th century) and to unravel the fallacies of past events.

Het eerste nummer bevat de volgende onderzoeksartikelen:

- Gloriana González, Patricio G. Herbst: *Competing Arguments for the Geometry Course: Why Were American High School Students Supposed to Study Geometry in the Twentieth Century?*

- Marta Menghini: *The Role of Projective Geometry in Italian Education and Institutions at the End of the 19th Century*.
- Dimitris Patsopoulos, Tasos Patronis: *The Theorem of Thales: A Study of the Naming of Theorems in School*.
- João Pitombeira de Carvalho: *A Turning Point in Secondary School Mathematics in Brazil: Euclides Roxo and the Mathematics Curricular Reforms of 1931 and 1942*.

Hoofdredacteur van het tijdschrift is Gert Schubring (Universiteit van Bielefeld).

En onder de redacteurs treffen we Harm Jan Smid (TU Delft).

Uitgever is COMAP, Consortium for Mathematics and Its Applications, in Bedford MA (USA).

Meer informatie is te vinden op:
http://journals.tc-library.org/index.php/hist_math_ed/issue/current/



VERSCHENEN / ZEBRA 23

(Van de achterpagina:) Het leven is vol toeval. Bij het trekken van lootjes voor Sinterklaas, de uitwisseling van genen, filevorming, overall speelt kansberekening een rol. Soms zijn de uitkomsten daarvan verrassend en zelfs strijdig met je intuïtie. Om iets over een kans te weten te komen kun je een experiment heel vaak uitvoeren. Dat is niet nodig als je gebruik maakt van een randomgenerator om het kansexperiment na te bootsen. In deze Zebra wordt dat gedaan met behulp van een grafische rekenmachine.

Dit boekje staat vol simulaties om zelf uit te voeren. De programma's zijn geschreven voor de TI-83(84). Iemand die wat ervaring heeft met programmeren, kan de programma's echter gemakkelijk vertalen naar (Visual) BASIC.

Uitgegeven in samenwerking met de NVvW.

Titel: Experimenteren met kansen, simulatie met de grafische rekenmachine

Auteur: Henk Pfaltzgraff

Uitgever: Epsilon Uitgaven (Utrecht, 2006)

ISBN 90-5041-097-9

Prijs: € 9,00 (voor leden van de NVvW: € 7,00)

64 pagina's

VERSCHENEN / DYS CALCULIE IN DISCUSSIE

‘De discussie over dyscalculie staat aan het begin. (...) In een daarvoor door de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs (NVORWO) gevormde expertgroep is uitgewisseld wat dyscalculie is, waar het voorkomt, wat er aan te doen is en hoe we in de (nabije) toekomst tot een goede aanpak kunnen komen. De vraag die nu nog voor ligt, is die naar richtlijnen, mogelijk een protocol, om vast te stellen wanneer een leerling nu wel of niet gehandicapt wordt door dyscalculie. Op de website www.nvorwo.nl treft u binnenkort meer informatie aan over dyscalculie en kunt u meediscussieren.’

Titel: Dyscalculie in discussie

Uitgebracht door de NVORWO, onder redactie van
Maarten Dolk en Mieke van Groenestijn

Uitgever: Van Gorcum (Assen, 2006)

ISBN 90-232-4248-3

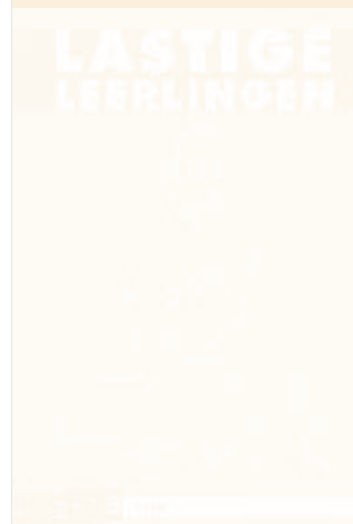
ISBN13 978-90-232-4248-2

Winkelprijs: € 14,50

81 pagina's

VERSCHENEN / LASTIGE LEERLINGEN

‘De brochure *Lastige leerlingen* biedt docenten in het voortgezet onderwijs, studenten en docentenopleiders artikelen over agressie, stoorzenders, autisten, dyslectici en daders. Maar ook over leerlingen die lastig zijn omdat je ze gewoon vergeet. (...) In deze brochure heeft de redactie van onderwijspraktijkblad *Van twaalf tot achttien* veertien artikelen over omgaan met lastig gedrag verzameld. Checklists voor observaties, tips en handreikingen maken het boekje geschikt om te gebruiken bij teamvergaderingen, voor coaches, docentenopleiders en in opleidingsscholen.’



Titel: Lastige leerlingen

(Brochure uit een reeks van het tijdschrift Van twaalf tot achttien)

Redactie: Anneke Hesp

Uitgeverij School BV te Meppel (2006)

ISBN: 90-77866-06-X

ISBN13: 978-90-77866-06-1

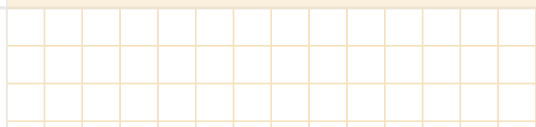
Prijs 1-4 exemplaren: € 6,50 (excl. verzendkosten);

korting bij meer exemplaren

48 pagina's

Te bestellen bij de abonnementenadministratie van

Van twaalf tot achttien (m.worst@gmgroep.nl; tel. 0522 855175)





Jaarrede 2006 uitgesproken door NVvW-voorzitter Marian Kollenveld op de jaarvergadering van 4 november 2006

Dames en Heren,

Ik wil graag beginnen met een persoonlijk woord.

Fijn u allemaal weer te zien. Hoe gaat het ermee?

Dat heb ik vaak te horen gekregen de afgelopen tijd, ik heb het daarom maar tot thema van de jaarrede gemaakt.

Het kon ook nauwelijks spectaculairder: vorig jaar werd ik de dag voor de jaarvergadering per brancard de school uitgedragen en naar het ziekenhuis vervoerd. Op de jaarvergadering zelf was ik heel zichtbaar afwezig; in plaats van zo'n klein vrouwtje stond daar plots een atletisch gebouwde Swier op het podium.

De dagen daarna stroomden de reacties binnen; bloemen, kaarten, ik ben bij 200 gestopt met tellen. Ik ben nog ouderwets opgeleid, dus ik wist wel hoe het verder moest, maar in mijn beleving was het inmiddels 'veel'.

En u begrijpt: ik voelde me heel zielig en akelig, maar dit was hartverwarmend, ik heb daar wel een traantje bij weggepinkt. Ik was er heel blij mee. Het was voor mij een bevestiging van het feit dat we weliswaar het met elkaar steeds over wiskunde en onderwijs hebben, maar dat we tevens een vereniging van mensen zijn, die bij en op elkaar betrokken zijn. En dat wiskundigen

toch ook heel aardige mensen zijn. Ik dank u daar hartelijk voor. Het heeft me energie gegeven om weer vrolijk door te gaan toen dat weer mogelijk was. Wat overigens langer duurde dan ik had gehoopt en verwacht. Mijn medebestuurders hebben in de tussentijd hun best gedaan een en ander zo goed mogelijk op te vangen, hoewel ze natuurlijk zeiden dat dat heel moeilijk was, de schatten.

Leden

Dus met mij gaat het goed, dank u, maar hoe gaat het met de vereniging en het wiskundeonderwijs?

Een beetje als het weerbericht: wisselend bewolkt, opklaringen met kans op een bui.

Het ledenaantal van de vereniging is stabiel, zo rond de 3000, en het weerspiegelt de voortschrijdende tijd: ons oudste lid werd geboren in 1916, ons jongste lid in 1986. Leden zijn in het algemeen heel trouw, dat blijkt, maar we hebben inmiddels ongeveer evenveel gepensioneerde leden als student-leden. Vandaar dat we het voornemen hebben tot het oprichten van twee nieuwe werkgroepen, die wellicht zelfs iets aan elkaar zouden kunnen hebben: één voor jonge docenten, die niet noodzakelijkerwijs ook jong in jaren zijn, en één voor gepen-

sioneerden, die niet noodzakelijkerwijs ook oud van geest zijn. Mocht u geïnteresseerd zijn dan kunt u zich bij de verenigingsstand aanmelden.

Om te voorkomen dat de gemiddelde leeftijd van de leden elk jaar 1 opschuift is permanente ledenwerving nodig. Vandaar de actie met de bonnen voor de 500 leden die al meer dan 25 jaar lid zijn. En zeg eens eerlijk: wie van u heeft zo'n bon gekregen? En wie heeft hem gebruikt en zit nu voor het eerst hier? Kijk, dat is toch mooi.

Federatie Onderwijsbonden

Een andere poging om de vereniging wat meer toekomstbestendig te maken zit in het voornemen aansluiting te zoeken bij de Federatie Onderwijsbonden, waarover we straks uw oordeel vragen.

Een volstrekt pragmatisch voornemen, niet gebaseerd op enige ideologie, integendeel eigenlijk, louter ingegeven door geldelijk gewin, omdat de regelingen in Nederland nu eenmaal zo in elkaar zitten. In sommige buitenlandse krijgt een vakinhoudelijke vereniging één hele fte ter vrije besteding voor het alom erkende nuttige werk, in Nederland niet. Hier maakt men andere keuzes. Hier is bijvoorbeeld de vereniging van schoolleiders wel via de aangesloten scholen voor 100% gefinancierd uit



overheidsgeld, maar vingen wij steeds bot bij onze rondgang langs ministerie, schoolleiders en vakbonden. En dan verzin je een list. Maar daarover straks.

Financieel mag het dan allemaal wat zorgelijk zijn, op andere punten merken we dat we wel vooruitgang boeken, en we houden onze ambities om bij de tijd te blijven.

Website

En daarbij hoort een eigentijdse website. Het heeft twee jaar langer geduurd dan we hadden gedacht, in die zin is het net een overheidsproject, maar het resultaat mag er zijn. U kon zich dit jaar voor het eerst digitaal aanmelden en u heeft dat ook bijna allemaal gedaan. De ledenadministratie wordt erin gezet en achter de schermen is veel geautomatiseerd.

Er is ook interessante statistiek: afgelopen jaar waren er 40.000 bezoeken, met pieken van 3000 in mei en juni, tijdens de examens, en zelfs 5000 in september en oktober, vanwege de jaarvergadering en programmaherzieningen. De website zelf is dus ook een hit: hij voorziet kennelijk in een behoefte, en daar zijn we ook erg blij mee.

En dankzij de nieuwe snufjes gaat een lang gekoesterde wens in vervulling: we kunnen de werkgroepen een eigen, besloten, ruimte geven op de site. Voor discussie en het uitwisselen van relevante stukken. We denken hiermee de onderlinge communicatie te vergemakkelijken en verbeteren.

Afscheid Gerard Koolstra

Met het wisselen van de site wisselen we ook van webmaster, 1 van de 2: Gerard Koolstra heeft aangegeven dat hij dit een goed moment vond om ermee te stoppen. Uiteraard vonden we het jammer; Gerard is vanaf het begin bij de site betrokken geweest en heeft erg veel werk verricht om u allen op de hoogte te houden van de laatste ontwikkelingen. Mede daarom was onze site het meest accuraat, en dat was in de tijd van de voortdurende programmawijzigingen heel belangrijk. We zijn hem daarvoor zeer erkentelijk, maar alles is eindig, ook

het webmasterschap. Gerard is ook samen met Jos Andriessen initiatiefnemer van de jubilerende en succesvolle WiskundeE-brief en daarmee willen we hen beiden van harte feliciteren.

We zijn nog niet van Gerard af, denken we zo. Gelukkig maar; we kunnen zijn accuratesse en kennis van zaken nog goed gebruiken.

We hebben een vervanger gevonden in de persoon van Lennart de Jonge, die inmiddels met jeugdige enthousiasme aan de gang is gegaan.

Euclides

De site vernieuwd, dan ook Euclides in een nieuw jasje, u hebt het allemaal gemerkt. De redactie is er blij mee, en wij ook. We hechten aan een frisse eigentijdse uitstraling - ons vak heeft dan wel eeuwigheidswaarde, maar dat hoeft u niet aan het blad af te kunnen zien. We hopen dat door de nieuwe heldere opmaak ook voor de wat oudere oogjes de leesbaarheid vergroot wordt: de interessante kleurcombinaties van de vorige opmaak gaven soms aanleiding tot klachten. Jos Tolboom, onze ict-redacteur, heeft aangekondigd te vertrekken vanwege dreigend vaderschap. We laten hem node gaan, maar als hij op dezelfde manier dat vaderschap invult... oeps, een wat dubieus compliment, laat ik liever zeggen: met dezelfde inzet, dan zal de kleine Tolboom daar vast wel bij varen.

Activiteiten

En verder... Dit bestuur heeft vanaf het aantreden ingezet op professionalisering en versterking van de positie van de wiskundeleraar; u heeft dat in de jaarredes de afgelopen jaren veelvuldig kunnen lezen. Ooit was de jaarvergadering het hoogtepunt van het jaar, iets waar je als wiskundeleraar naar uit keek, want verder gebeurde er betrekkelijk weinig. Daarvoor liet je zelfs de intocht van Sinterklaas schieten. Die tijd is voorbij. Inmiddels zijn er vele hoogtenpunten, bruist en borrelt het volop, en we hebben de jaarvergadering verplaatst zodat u de sint niet hoeft te missen. De vereniging, als vertegenwoordiging

van de leraren, is als volstrekt vanzelfsprekende partner betrokken bij die activiteiten en vernieuwingen, binnen en buiten het wiskundeonderwijs. Ik doe een greep: de vernieuwingscommissie cTWO (commissie Toekomst WiskundeOnderwijs), en de daaraan verbonden programmacommissies die voor de inmiddels zeven wiskundevakken voorstellen gaan doen, de vakantiecursus van het CWI (Centrum voor Wiskunde en Informatica), het Wintersymposium van het KWG (Koninklijk Wiskundig Genootschap), de programmacommissie van NWD (Nationale Wiskunde Dagen) en Reehorstconferentie van het APS (Algemeen Pedagogisch Studiecentrum), de taakgroep PR voor de wiskunde, resonansgroep rekenen en taal over doorlopende leerlijnen in taal- en rekenonderwijs voor het ministerie van OC&W, resonansgroep bekwaamheidsdossier van het SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren), het Platform VVVO (de vakinhoudelijke verenigingen), het voorzittersoverleg wiskunde met universitair Nederland, de WiskundeScholenPrij, met het FI (het Freudenthal Instituut), de Wiskunde Olympiade, de Zebra met Epsilon, ... Ik denk dat ik maar stop.

Kweekvijver bestuursvernieuwing

Ik noem dit rijtje om u een inzicht te geven in de veelzijdige activiteiten van het bestuur. Je komt nog eens ergens zo u ziet, en je spreekt nog eens iemand. Het huidige bestuur doet het werk met veel inzet en enthousiasme, u ziet dat we bijna allemaal herkiesbaar zijn, maar we vinden het wel tijd worden dat de opvolging in zicht komt. Veel van ons zijn aan een laatste termijn bezig, we hebben nog geen opvolger van Jacob Hop voor de portefeuille mbo/mto en we hebben behoefte aan versterking vanuit het vmbo. Daarnaast vraagt het werk als penningmeester, secretaris of voorzitter wel wat inwerktijd. We zouden dus graag een kweekvijvertje vormen van mensen die belangstelling hebben voor een toekomstig bestuurslidmaatschap. Dan kun je alvast een beetje meedraaien om te zien of het

bevalt en of je geschikt bent. De enquête bij de acceptgiro heeft een aantal namen opgeleverd, mensen met wie we zeker gaan praten, maar mocht u in dit verhaal aanleiding zien om u alsnog aan te melden, aarzel niet, de secretaris zal uw naam met vreugde noteren.

Zebra's

De uitgeverij Epsilon is dit jaar opgegaan in de stichting Epsilon waarin we bestuurlijk samenwerken met het Koninklijk Wiskundig Genootschap en de Zebrareeks wordt voortgezet. Gewoontegetrouw hebben de zebra's weer gejongd; u kunt op de bekende plaatsen voor een luttel bedrag twee nieuwe exemplaren aanschaffen: de nummers 22 ('Spelen en Delen') en 23 ('Experimenteren met kansen'). Zeer binnenkort verschijnen ook nog mooie deeltjes over Gravitatie en Oneindig. Voor de boekhouders: de verkoop loopt goed, ook in de algemene boekhandel, en we zijn bezig met het veroveren van de Vlaamse markt.

Aandacht van buitenaf

Ik weet het zeker: die zebra's, de aanhoudende stroom brieven, artikelen in kranten en tijdschriften en bezoeken aan Kamerleden vanuit de wiskundewereld, en vergeet daarbij niet de studentenactie 'Lieve Maria', ze hebben het beeld van wiskunde bij de het algemene publiek en de beleidsmakers positiever gemaakt. Zelden is er zo lang en met zoveel betrokkenheid in de Tweede Kamer gesproken over wiskunde. Weliswaar vooral over wiskunde B op het vwo, maar toch, laten we onze zegeningen tellen waar we die zien.

En ook in het algemeen is er meer aandacht en waardering voor de rol en positie van de professional in zorg en onderwijs. De notie 'geef de leraar zijn vak terug' dreigt zelfs gemeengoed te worden, evenals de voordelen van kleinschaligheid en de nadelen van teveel management en overhead.

Het is verkiezingstijd en vrijwel alle partijen willen iets doen aan het onderwijs, met

vaak substantieel veel geld. Miljarden zelfs. Niet onverstandig. Het is bekend, onlangs nog berekend, dat geld dat je besteedt aan onderwijs rendabeler is dan veel andere bestedingen. Investeren in de toekomst van mensen is dus niet alleen ideologisch maar ook economisch te prefereren boven meer cellen of meer asfalt.

Hoe redden we het onderwijs

Geld is mooi, maar zonder plannen kom je nog nergens, je moet het goed besteden. De Volkskrant heeft vandaag een special over de vraag hoe het onderwijs nog te redden is. Wij moesten allemaal op tijd hier zijn, en hebben die special dus niet kunnen lezen, maar dat verzinnen we natuurlijk zo: - Salaris. Uit enquêtes blijkt steeds dat wij in het onderwijs salaris niet zo belangrijk vinden, maar toch: Een collega van mij was ambtenaar, maar vond het onderwijs toch veel leuker (terecht, zult u zeggen). Hij vertelde mij: 'Ik kan me dat permitteren omdat mijn vrouw genoeg verdient, want ik ga er wel een paar honderd euro per maand op achteruit.' Dat is dus helder: om er voor te zorgen dat meer mensen het zich kunnen permitteren om in het onderwijs te werken, moeten de salarissen van de meewerkende partners omhoog.

Misschien vindt u dit een omweg? Dan heb ik er nog een:

- Voldoende lestijd van gekwalificeerde docenten.

Vinden wij al jaren, maar als je dat zegt riekt dat toch naar eigenbelang. Maar zie: afgelopen week bezetten leerlingen van een ROC in het noorden des lands hun school om te eisen dat ze weer les kregen van echte leraren. En de studenten van 'Lieve Maria' hadden heel graag meer wiskunde geleerd. Misschien moeten we dit onderwerp dus maar aan de leerlingen en studenten overlaten?

Bekwaamheid, scholing, register

Maar de tijd lijkt wel rijp voor ons professionaliseringsplan. U heeft het in Euclides kunnen lezen, maar toen misschien niet uit het hoofd geleerd, dus in het kort nog even wat het inhoudt.

We willen allereerst de vakinhoudelijke bekwaamheidseisen voor docenten expliciteren voor de verschillende onderwijsniveaus.

Als je dan weet wat de eisen zijn, is een logisch gevolg het opzetten van een landelijk en permanent scholingsaanbod, zowel vakinhoudelijk als vakdidactisch, om als instromer, opstroomer of zijstroomer aan die eisen te *gaan* voldoen en als zittend docent de kennis bij de tijd te houden en er dus aan *te blijven* voldoen.

Omdat inzet beloond mag worden, willen we ook een register opzetten van bekwame wiskundeleraars die bewezen bij de tijd zijn. Dat staat ook mooi op het visitekaartje van de school, een school met bekwame leraren. Over dit plan voeren we momenteel overleg met SBL (van de competenties), andere vakverenigingen met soortgelijke plannen (voor het register) en onze eigen verzorgingsstructuur, voor de scholing, want we moeten het met elkaar doen.

Goede leraren behouden

Wij geloven erin dat het leraarsbestaan interessanter wordt naarmate je de ruimte krijgt je eigen professionaliteit te ontwikkelen en te onderhouden. Je lessen worden er ook beter van.

De huidige 'Leraren In Onderzoek' aan de universiteiten zijn allemaal enthousiast over de kans die geboden wordt.

Onderwijskundig onderzoek dat gedaan wordt door leraren heeft al bijna per definitie een grotere relevantie voor het onderwijs dan veel van wat er nu – onzichtbaar voor ons – gebeurt door onderwijskundigen die verder geen vak hebben geleerd.

Goede leraren moet je behouden voor het onderwijs en ze de mogelijkheid geven daarin te groeien en carrière te maken, ook financieel. Dus: houd de goede leraar weg uit het management, maar zorg wel voor een vergelijkbare beloning.

Misschien wordt het dan wel zo dat je partner het zich kan permitteren om bijvoorbeeld in de zorg te werken, omdat jij in het onderwijs werkt. En het daar nog leuk hebt ook.





En natuurlijk helpt het dan als het niet stinkt in school, je niet smelt in de zomer en bevriest in de winter, als de toiletten schoon zijn en het kopieerapparaat niet kapot, maar ach, dat zijn peanuts natuurlijk.

Of misschien komt dat allemaal vanzelf in orde zodra je onderwijs op een andere manier gaat bekijken.

Maar laat dit wenkend perspectief ons niet te zeer afhouden van het heden dan wel de nabije toekomst: Ik doe een rondje langs de velden.

Mbo en hbo

Het mbo heeft zich bekeerd tot het CLOP, het competentiegericht leren en opleiden. Daarin worden exacte competenties wel genoemd, maar dit leidt tot een miniem aantal contacturen die direct op wiskunde zijn gericht. Leren moet vooral praktisch zijn, wiskundige vaardigheden worden alleen nog impliciet in de beroepscompetenties getraind. Wij vinden deze ontwikkelingen desastreus, we zijn ervan overtuigd dat we onze leerlingen in het mbo daarmee een slechte dienst bewijzen, eerder kansen onthouden dan kansen geven. Succesvolle doorstroom naar exacte hbo-opleidingen wordt een illusie, maar vooralsnog is de tijdgeest te sterk om dit tegen te houden.

Misschien dat op grotere schaal dan dat ROC in het noorden des lands een opstand uitbreekt en men tot bezinning komt. We hopen het maar.

In het hbo is het nog niet zover dat de wiskunde de facto is afgeschaft, maar het vak staat ook daar al jarenlang onder druk. De werkgroep hbo is druk bezig met de aansluitingsproblematiek havo/hbo. Er is overleg met de HBO-raad, en samen met de werkgroep havo/vwo buigt men zich momenteel over de diverse instaptoetsen die in hbo en wo gebruikt worden.

Vmbo

Het vmbo is regelmatig in het nieuws, maar zelden positief. Toch zijn er veel goede ontwikkelingen vanuit het vmbo te vermelden. We merken een versterking

van de leerlingenzorg op, de inrichting van de werkplekken en leerwerktrajecten en de verbetering van de contacten met het bedrijfsleven en het mbo.

De eindexamenprogramma's voor wiskunde voor de leerwegen zijn dit jaar beter gespecificeerd. Veel onduidelijkheden in de verwoording van de eindtermen zijn verdwenen. Docenten kunnen beter dan voorheen uit de eindtermen afleiden wat de bedoeling is.

Het bestuur blijft echter proberen om de eindexamenprogramma's te laten afstemmen op de sectoren. Steeds meer vraagt men zich in het veld af welke wiskunde, speciaal voor BB- en KB-leerlingen, zinvol geacht mag worden. De wens is groot om wiskunde sterker te relateren aan de gekozen beroepsrichting, waarbij bijvoorbeeld de gecijferdheid een goed aandachtsveld is.

Onze aanwezigheid in cTWO is van belang om in de gaten te houden hoe de programma's in de bovenbouw zich ontwikkelen in verband met het feit dat er toch nog redelijk veel leerlingen van vmbo-TL doorstromen naar het havo. Die weg is in eerder beleid afgeschaft, maar velen zijn daar niet tevreden mee.

Voor wat betreft de aansluiting van het basisonderwijs met de onderbouw van het vmbo heeft het bestuur haar inbreng gehad in het meedenken over een doorlopende leerlijn. Een hot item. De commissie C2 heeft de opdracht gekregen na te denken over doorlopende leerlijnen voor het hele onderwijs, en wij hebben het als onderwerp voor de studiedag.

Havo/vwo

De noodprogramma's voor havo en vwo voor de periode 2007/2010 komen eraan, zijn wel zo ongeveer vastgesteld. Gewoontegetrouw roept de vereniging weer een nomenclatuurcommissie in het leven om goede afspraken te maken over de te gebruiken terminologie in examens en methodes, zodat u en uw leerlingen niet voor onaangename verrassingen komen te staan.

Voor de verdere ontwikkelingen hebben we een plenaire lezing en een veelheid van workshops, dus daarover zwijg ik.

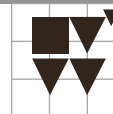
Vrijwilligers

Tot slot. U merkt dat de vereniging midden in het wiskundeleven staat. Het bestuur zal zich blijvend inzetten voor de waarborging van de positie van het vak wiskunde binnen het voortgezet onderwijs.

Een bestuur kan al die ontwikkelingen en activiteiten nooit alleen aan. We zijn daarom trots op al die mensen in de vereniging die zich voor de goede zaak willen inzetten. Als we iemand vragen voor een commissie of zo, wordt de medewerking royaal geboden. De komende jaren zullen we regelmatig op velen van u een beroep willen doen, vanwege alle wijzigingen die op stapel staan. Ik denk dan vooral aan de nieuwe programma's. Om dat in goede banen te leiden en verraderlijke fouten als bijvoorbeeld overlappendheid in programma's te voorkomen is medewerking van het veld, ons allemaal dus, hard nodig. Maar ook de voortschrijdende professionalisering kan niet zonder u.

We hebben elkaar nodig. Samen staan we sterker.

Ik wil dus graag besluiten met alle vrijwilligers hartelijk te danken voor hun inzet. En ik wens u en ons een goede toekomst met veel mooi wiskundeonderwijs. Dank u wel.



Van de Bestuurstafel [Wim Kuipers]

Op de website van de CEVO, www.cevo.nl, kunt u de concept-syllabi wiskunde vmbo aantreffen.

Het betreft nog steeds een concept; de definitieve versie wacht nog op het moment dat het globale examenprogramma is vastgesteld.

Het huidige examenprogramma is aangepast en wat duidelijk zichtbaar is veranderd, zijn de afzonderlijke programma's voor BB, KB en GL/TL. We weten nu nauwkeurig

wat de verschillende leerwegen van elkaar onderscheidt. Bepaalde eindtermen zijn duidelijker geformuleerd en de docent kan zich een duidelijk beeld vormen van wat wel of niet gevraagd kan worden.

Het is niet een gesloten beschrijving zodat ook op het examen vraagstukken kunnen voorkomen die naar hun aard in het verlengde liggen van de syllabi.

Een syllabus is niet van belang voor het schoolexamen, het is een hulpmiddel voor

docenten die leerlingen voorbereiden voor het centraal examen en voor nascholers en uitgevers.

Voor het schoolexamen bereidt het SLO een handreiking voor. Examineenheden van het centraal examen mogen ook in het school-examen worden getoetst, al zal dit vaak op een andere manier gebeuren.

Deze syllabus geldt voor het eerst bij het centraal examen van 2008.

Platform VVVO [Henk Rozenhart]

Taken van bestuursleden

Onder het motto: 'Wat doet een bestuurslid zoal', aandacht voor één van de taken van de auteur. Als bestuurslid van de NVvW bezoek ik regelmatig de vergaderingen van het Platform VVVO. Wat is het Platform VVVO? Wat doet het Platform VVVO? Hoog tijd om dit eens uit de doeken te doen.

De volledige naam is *Platform Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs*.

Het Platform VVVO kwam voor het eerst bijeen op 28 februari 1991. Deze eerste bijeenkomst werd georganiseerd om te bekijken of er behoefte was aan 'een ontmoetingspunt voor besturen van vakinhoudelijke verenigingen'. De leiding van deze eerste bijeenkomst was in handen van Herman Hamers, de toenmalige voorzitter van de VECON (Vereniging van Leraren in de Economisch-maatschappelijke vakken). In 1994 erkende het Ministerie het belang door de toekenning van een subsidie.

Ambassadeur voor gezamenlijke belangen

Het Platform is een overkoepelende vereniging van de vakinhoudelijke

verenigingen in het voortgezet onderwijs en fungeert als gezamenlijke spreekbuis en aanspreekpunt. De invloed van de vakverenigingen versterken, daar gaat het om. Dit geldt alleen voor vakoverstijgende zaken. Vakspecifieke belangen worden door de vakinhoudelijke verenigingen zelf behartigd.

Regelmatig zit het Platform VVVO aan tafel bij het Ministerie van OCW om overleg te voeren over bijvoorbeeld de herziening van de basisvorming en examenprogramma's. Het dagelijks bestuur voert gesprekken met het Tweede Fase Adviespunt, projectbegeleiding vmbo, de onderwijsbonden en de schoolleiders. Leden van het dagelijks bestuur zijn vertegenwoordigd in de begeleidingscommissie Tweede fase, het bestuur van de SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren en ander onderwijspersoneel), een adviescommissie van de SLO, enzovoorts.

Bron van informatie en inspiratie

Elk jaar komt het Platform zes keer bijeen voor regulier overleg. Iedere aangesloten vakinhoudelijke vereniging wordt daarin vertegenwoordigd door een lid van het eigen bestuur. Bijna elk overleg is een gast aanwezig om een actueel onderwerp

toe te lichten of mogelijke vormen van samenwerking te bespreken. Verder wordt in zo'n overleg uitgewisseld wat men weet van actuele ontwikkelingen, krijgen de leden te horen wat het dagelijks bestuur aan besprekingen heeft gevoerd en wordt als het enigszins kan tijd ingeruimd voor uitwisselen van plannen en problemen.

Dicht bij de bron

Doordat, via het Platform VVVO, bestuursleden van de verenigingen vertegenwoordigers van het ministerie, de CEVO enz. leren kennen, is het eenvoudiger om contacten te leggen als dat nodig is voor het behartigen van de belangen van de eigen vereniging. Bovendien komt, via het Platform, nieuwe informatie over plannen en ontwikkelingen snel beschikbaar, zodat de verenigingen daarmee aan de slag kunnen.

Kijk eens op de website www.platformvvvo.nl

Over de auteur

Henk Rozenhart is bestuurslid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

E-mailadres: h.rozenhart@nvvw.nl

Dirichlet-cellen

[Frits Göbel]

Bij iedere verzameling 'losse' punten behoort een celstructuur die genoemd is naar de Duitse wiskundige Dirichlet (1805-1859). De definitie is als volgt. Ieder punt P van de gegeven verzameling behoort tot één cel; deze cel bevat alle punten X waarvoor de afstand tot P kleiner is dan de afstand van X tot enig ander punt van de verzameling.

Soms worden deze celstructuren genoemd naar de Russische wiskundige Voronoy (1868- 1908).

Een voorbeeldje ziet u in **figuur 1**. De 21 punten binnen het vierkant kunt u zien als celkernen die tegelijk en even snel gaan groeien. Merk op dat de cellen convex zijn voor iedere puntverzameling. De puntverzameling is hier eindig en ligt in een plat vlak, maar noch het een, noch het ander is een vereiste.

Opgave 1

Bepaal de Dirichlet-cellen voor de puntverzameling van **figuur 2**.

Deze 44 punten vormen een deelverzameling van het vierkante puntrooster, zoals overigens ook de punten in **figuur 1**.

De Dirichlet-cellen van het (oneindige) driehoekige puntrooster vormen de bekende betegeling van het vlak met regelmatige zeshoeken. We gaan nu een dimensie hoger. Eerst maken we een analogon van het driehoekige rooster. Dit rooster in $\mathbb{R}^2$ is het eenvoudigst te maken door de $\mathbb{R}^3$ in te gaan. Daarom beginnen we nu in de $\mathbb{R}^4$. Hierin beschouwen we de driedimensionale deelruimte van alle punten waarvan de som van de coördinaten 0 is. In deze deelruimte nemen we alle punten met gehele coördinaten. En van deze punten vormen we de Dirichlet-cellen.

Opgave 2

Hoe zien de stukken eruit waarin de ruimte nu wordt verdeeld?

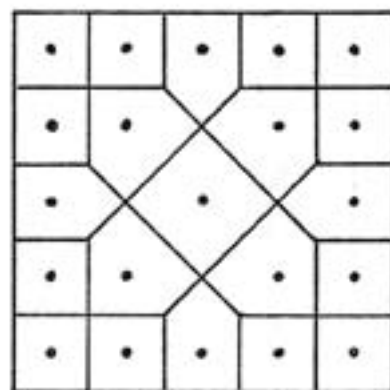
Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.

Er zijn voor de oplossing van deze kerstpuzzel maximaal 20 punten én een boekenbon van 30 euro te verdienen.

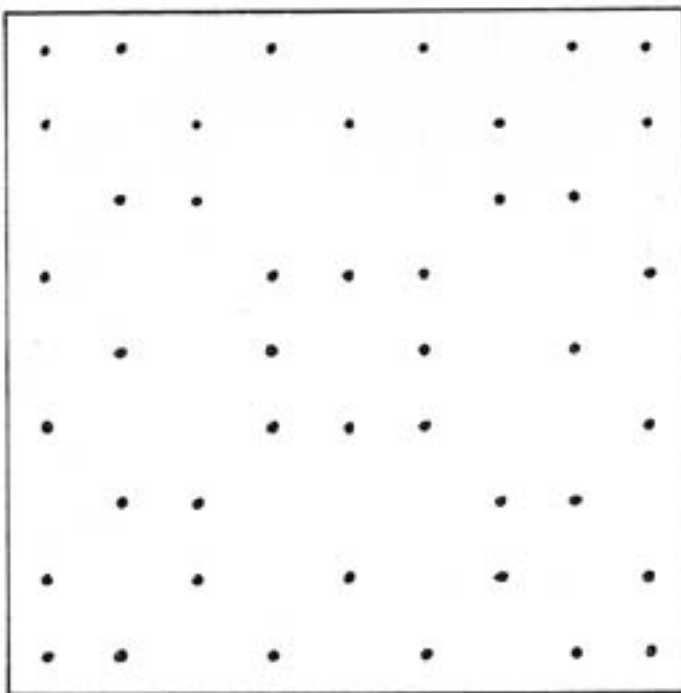
Bovendien ligt er een bon van 30 euro klaar voor degene die de tussentijdse ladderstand aanvoert.

De deadline is 6 januari 2007.

Veel plezier!



figuur 1



figuur 2

Tatami

Er kwamen 11 oplossingen binnen, die alle correct zijn met dien verstande dat één van de inzenders zich beperkte tot opgave 1. Een oplossing van opgave 2 ziet u in

figuur 3. Het antwoord op opgave 3 is: een doos van $2 \times 3 \times 3$.

De opgaven werden in het algemeen gemakkelijk gevonden. Menige inzender compenseerde dit door zich extra vragen te stellen en deze ook te beantwoorden.

Zo bewees Wim van den Camp dat in de vierde dimensie het hyperblok van $2 \times 2 \times 2 \times 2$ het kleinste is met een Tatami-vulling. Hiermee is dat probleem meteen voor alle hogere dimensies opgelost. Gerhard Riphagen bepaalde minimale Tatami-oplossingen voor tegels van 1×3 en blokjes van $1 \times 1 \times 3$ en van $1 \times 2 \times 3$.

Wobien Doyer bewees het volgende resultaat: als een rechthoek van $a \times b$ een Tatami-betegeling heeft met tegels van $p \times q$, dan zijn zowel a als b op (minstens) twee manieren te schrijven als lineaire combinatie van p en q met positieve coëfficiënten. Deze voorwaarde is trouwens ook voldoende.

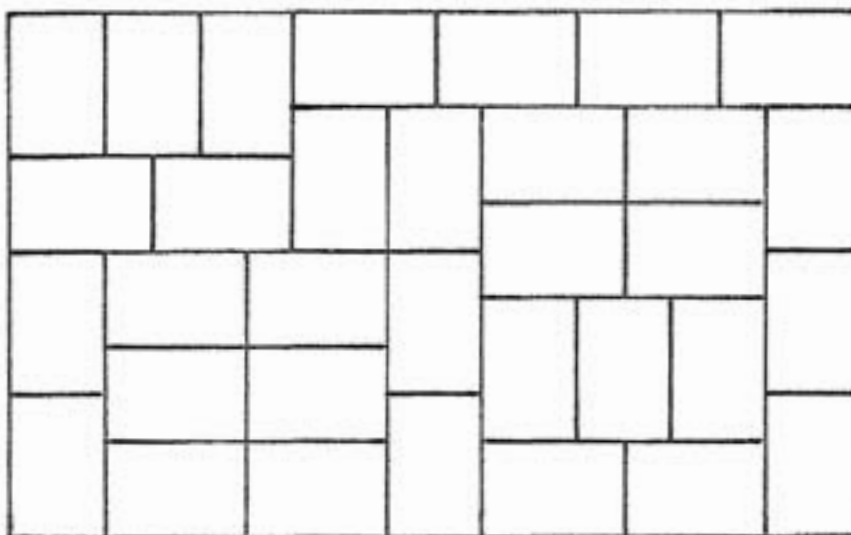
Zij vond ook nog een nieuwe oplossing voor het probleem uit Recreatie 817: een rechthoek met oppervlakte 160 opgebouwd uit de volgende driehoeken: 2, 8, 9, 16, 18, 25, 32 en 50.

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

T. Kool 345
W. v.d. Camp 336
J. Meerhof 312
H.J. Brascamp 312
L. de Rooij 174
G. Riphagen 137
N. Wensink 120

De volledige ladderstand is te vinden onder www.nvvw.nl/euclladder.html.



figuur 3

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde

21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

22. Spelen en Delen

23. Experimenteren met kansen

Zie verder ook www.nvww.nl/zebrareeks.html en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvww.nl/lustrumboek2.html
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvww.nl/Publicaties2.html

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepeersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvww.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html.

nr.	verschijnt	deadline
4	1 februari 2007	5 december 2006
5	1 maart 2007	16 januari 2007
6	12 april 2007	27 februari 2007
7	24 mei 2007	3 april 2007
8	21 juni 2007	8 mei 2007

woensdag 13 december, Den Haag

Didaktief-jubileumcongres
Organisatie Tijdschrift Didaktief

dinsdag 19 december, Groningen

Studiedag Wiskunde & computers
Organisatie RU Groningen

zaterdag 6 januari 2007, Utrecht

Wintersymposium
Organisatie KWG

woensdag 17 januari 2007, Ede

Vijfde Reehorstconferentie wiskunde
Organisatie APS

vrijdag 19 januari 2007, Amsterdam

Lerarencursus Kansrekenen
Organisatie Afdeling Econometrie van de VU Amsterdam

di. 23 t/m za. 27 januari 2007, Utrecht

Nationale OnderwijsTentoonstelling
Organisatie VNU Exhibitions

vrijdag 26 januari 2007, op de scholen

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie Stichting NWO

vr. 2 en za. 3 februari 2007,

Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut

donderdag 8 februari 2007, Amsterdam

Docentencursus Golven als dynamische systemen
Organisatie UvA

vrijdag 16 maart 2007, op de scholen

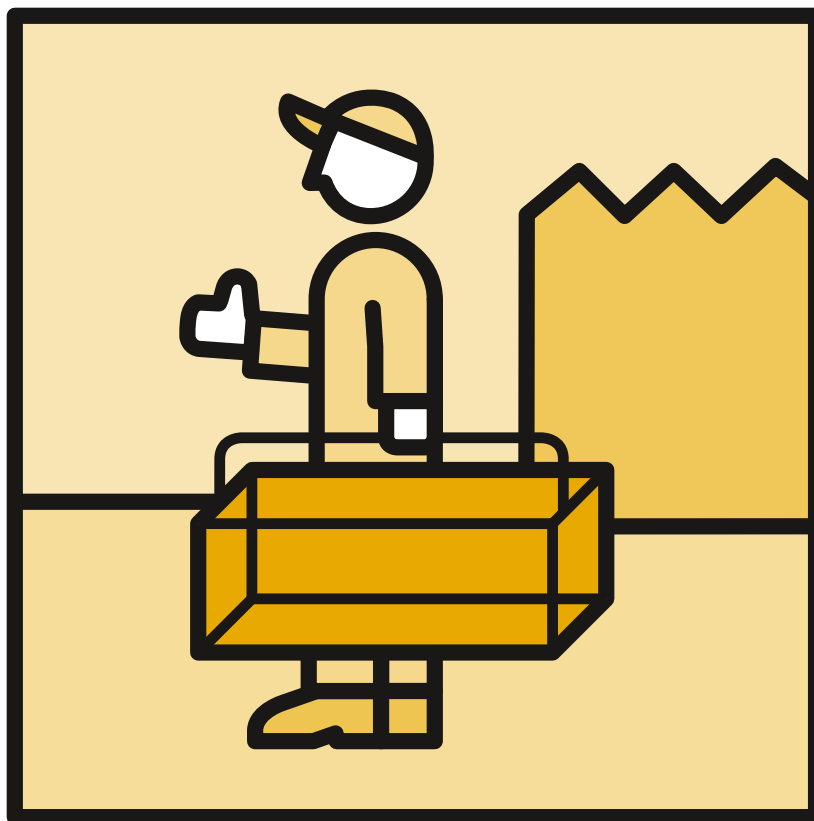
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe i.s.m. RU Nijmegen

donderdag 29 maart 2007, Amsterdam

Docentencursus De werkelijkheid in een digitale doos
Organisatie UvA

do. 12 en vr. 13 april 2007, Leiden

43e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie Universiteit Leiden en TU Delft



**MATRIX. PRAKTISCHE WISKUNDE
VANUIT DE VMBO-LEERLING BEKEKEN. DAT WERKT!**

MATRIX: GEEF VORM AAN VISIE

WWW.BETERINBETA.NL



Malmberg



Nieuw in 2007 :: Moderne wiskunde 9

**Volledig herziene edities voor
havo/vwo onderbouw en Tweede Fase**



MODERNE WISKUNDE

constante :: ontwikkeling

Kijk voor meer informatie op www.modernewiskunde.wolters.nl



Wolters-Noordhoff