

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

oktober

06

nr 2

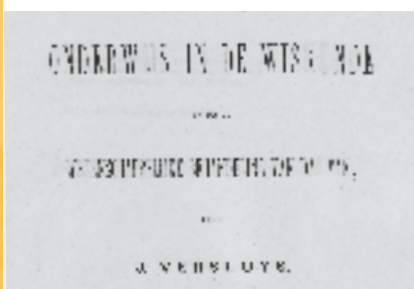
jaargang 82

Het dubbele
programma van
Jan Versluys

Bedrijfswiskunde

Meetkunde en
vwo-wiskunde D

Twee nieuwe
rubrieken



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

o k t o b e r

0 6
n r 2

j a a r g a n g 8 2

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch

Klaske Blom

Marja Bos, hoofdredacteur

Rob Bosch

Hans Daale

Gert de Kleuver, voorzitter

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Jos Tolboom

Joke Verbeek

Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de

hoofdredacteur: Marja Bos,

Koematen 8, 7754 NV Wachtum

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drieboud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en productie:

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv, Veenendaal

Druk: Giethoorn Ten Brink, Meppel

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 63 78

E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,

Waalstraat 8, 8052 AE Hattem

Tel. (038) 444 70 17

E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmelen-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 50,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Niet-leden: € 55,00

Instituten en scholen: € 140,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50

Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:

Gert de Kleuver,

De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal

Tel. (0318) 54 22 43

E-mail: g.de.kleuver@nvvw.nl

KORT VOORAF [Marja Bos]

Jaarvergadering/studiedag 4 november

In dit nummer vindt u vanaf bladzijde 71 een aantal stukken ten behoeve van de jaarvergadering van de NVvW van zaterdag 4 november a.s. in het Cals College te Nieuwegein. Het gaat om twee jaarverslagen, de één van het Verenigingsbestuur, de ander van de redactie van Euclides, en om de notulen van de jaarvergadering van vorig jaar.

Het programma van 4 november (met als studiedag-thema: *Doorlopende leerlijnen of breukvlakken?*) vindt u in het vorige nummer van Euclides. Er worden in Nieuwegein weer tal van interessante workshops verzorgd!

Nieuwe rubrieken

In dit nummer vindt u de eerste aflevering van twee nieuwe rubrieken.

In de eerste plaats start Anne van Streun zijn serie *Parate kennis en algebra*, een rubriek die voortvloeit uit het 'Manifest Wiskundendidactiek' dat bijgevoegd was bij Euclides 80-3 (december 2004); zie ook www.nvww.nl/old/manifest2005.html.

Daarnaast verzorgt redacteur Klaske Blom in deze nieuwe jaargang een column naar aanleiding van 'oude actuele artikelen': *Ik las en dacht...* In deze eerste aflevering denkt Klaske hardop na over kwaliteitseisen, aan de hand van een verslag uit 1975. Denkt u mee?

WiskundeE-brief gefeliciteerd!

Namens de redactie van Euclides breng ik hierbij graag onze felicitaties over aan de redacteurs van de WiskundeE-brief, Gerard Koolstra en Jos Andriessen. Begin november bestaat de WiskundeE-brief namelijk 10 jaar, en dat waren bepaald niet de minst woelige jaren voor wiskundeonderwijzend Nederland! Gerard en Jos hebben inmiddels zo'n 400 keer een (gratis) nieuwsbrief naar de diverse mailboxen gestuurd, in een oplage die inmiddels de 2000 gepasseerd is. De WiskundeE-brief speelt door haar wekelijkse verschijning mijns inziens een uitstekende rol in de informatievoorziening en meningsvorming onder wiskundeleraars. Voor mensen die 'de E-brief' nog niet kennen: nadere informatie is te vinden op www.digischool.nl/wi/WiskundeE-brief/.

Visiedocument

Half september verscheen de conceptversie van het 'Visiedocument' van de vernieuwingscommissie cTWO, een uitgebreid stuk met 22 standpunten dat als uitgangspunt gebruikt zal worden bij de ontwikkeling van de havo/vwo-examenprogramma's wiskunde A, B, C en D vanaf 2010. Ten tijde van het verschijnen van dit nummer van Euclides heeft inmiddels de bijbehorende veldraadpleging plaatsgevonden, en mede op basis daarvan zal in november de eindversie van het visiedocument geschreven worden. Zie voor nadere informatie én de tekst van het document: www.ctwo.nl.

Wiskunde in mbo en hbo

Vanuit mbo en hbo lijkt het nogal stil geworden als het over wiskunde gaat, al dan niet geïntegreerd in andere vakken. Plaats en functie van het 'oude' schoolvak wiskunde is in die opleidingen de afgelopen jaren sterk veranderd. Positieve én negatieve reacties op die gewijzigde rol buitelden tot voor kort over elkaar heen.

Wat zijn uw ervaringen? Als u ze wilt delen met andere wiskundeleraars, dan zien we uw bijdrage graag tegemoet!

Daarnaast willen we in deze jaargang van Euclides aandacht schenken aan reken- en wiskunde-onderwijs op de pabo's. Zo vormen de landelijke rekentoetsen voor pabo-studenten de laatste tijd een veelbesproken onderwerp. De eerste entreetoets rekenen zou volgens afspraak afgenomen worden vóór 1 oktober jl., maar dat is op lang niet elke pabo gelukt. We hopen u hierover in volgende nummers van Euclides nader te kunnen informeren.

INHOUD

41	Kort vooraf [Marja Bos]
42	Het dubbele programma van Jan Versluys [Harm Jan Smid]
64	De wiskunde bedrijven ... [Hans Daale]
49	'Oude' meetkunde en vwo-wiskunde D [Dick Klingens]
53	Parate kennis en algebra / Aflevering 0: Aankondiging [Anne van Streun]
55	De Cirkel van Benford [Jeroen Spandaw]
59	Ik las en dacht ... [Klaske Blom]
62	Boekbespreking / Wat algebra is, dat kun je niet weten [Rainer Kaenders]
68	Boekbespreking / Math through the Ages [Ger Limpens]
70	Teleblik, prachtige bronnen voor ons vak! [Paul Vermeulen]
71	Jaarverslag Euclides [Marja Bos]
73	Mededeling / Samenwerken aan samenhangend bèta-onderwijs
74	Inhoud van de 81e jaargang (2005/2006)
77	Mededeling / BWNW online
78	Notulen van de Jaarvergadering van de NVvW op 5 november 2005 [Wim Kuipers]
80	Verslag van het verenigingsjaar 2005/2006 [Wim Kuipers]
82	Recreatie [Frits Göbel]
84	Servicepagina

Aan dit nummer werkte mee: Jan Smit.

Het dubbele programma van Jan Versluys

[Harm Jan Smid]

Zelfwerkzaamheid en zelfontdekkend leren zijn voor de wiskundeleraar van vandaag vanzelfsprekende zaken. Dat was niet altijd zo en oudere collega's herinneren zich nog de tijd dat de leraar een veel meer centrale rol in de klas speelde dan nu. Het opvallende is dat er ook in de negentiende eeuw toonaangevende didactici waren die zelfwerkzaamheid en zelfontdekkend leren krachtig propageerden. Toch kwam daar niet veel van terecht, en het hele idee van zulk onderwijs verdween ruim een halve eeuw vrijwel uit de belangstelling. Waarom lukte toen niet, wat nu wel lijkt te slagen? En kunnen we daar ook voor de huidige tijd nog iets van opsteken?

Jan Versluys

Jan Versluys (1845-1920) was de man die in Nederland het krachtigst pleitte voor zulk onderwijs. Versluys kwam uit Zeeuws Vlaanderen, maar volgde de onderwijzersopleiding in Haarlem en behaalde op jonge leeftijd de wiskundeaktes KI en KV. Hij was meer dan 10 jaar leraar wiskunde aan de HBS in Groningen. Daarna was hij vele jaren docent perspectief en beschrijvende meetkunde aan de Rijksnormaalschool in Amsterdam. Versluys was dus beslist geen wereldvreemde theoreticus die geen idee had wat er in een klas omging.

Jan Versluys was verder voorzitter en secretaris van talloze commissies en verenigingen, maar zijn invloed dankte hij vooral aan de tientallen schoolboeken die hij schreef en die op veel scholen jarenlang gebruikt werden. Het gaat beslist niet te ver om Jan Versluys te beschouwen als de man die het wiskundeonderwijs eind negentiende eeuw begin twintigste eeuw grotendeels bepaalde.

Het interessante is dat hij niet alleen schoolboekenauteur was, maar ook uitvoerig schreef over didactische problemen. Daarbij nam hij ook duidelijk een eigen standpunt in. Nu was Versluys niet in de eerste plaats een origineel denker, maar vooral iemand die goed op de hoogte was van de heersende denkbeelden en daar uitstekend, en soms ook best wel kritisch, over kon schrijven. Door je met Versluys bezig te houden leer je dus heel veel van de didactische opvattingen uit die tijd.

Een leerboek vakdidactiek wiskunde

In 1874 publiceerde Versluys een boek onder de titel *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak*. Het was een boek over wat we nu vakdidactiek wiskunde zouden noemen, het eerste in zijn soort in Nederland (zie *figuur 1*).

Zoals al uit de titel blijkt, ging het hem om twee dingen. In de eerste plaats om de onderwijsmethode: wat is de beste manier om les te geven, en dan in het bijzonder in de wiskunde? In de tweede plaats vond hij het belangrijk dat de wiskunde correct werd onderwezen, in overeenstemming met de wetenschappelijke opvattingen over het vak. Versluys' boek was bestemd voor diegenen die 'examen in de wiskunde willen doen, of die met onderwijs in dat vak zijn belast.' Het was dus bedoeld voor leraren en diegenen die dat wilden worden. Hij dacht vermoedelijk aan die onderwijzers die door het behalen van een wiskundeakte leraar aan het voortgezet onderwijs wilden worden, en daarbij dan ook een pedagogische aantekening ('de akte Q') moesten halen. Van die akte Q kwam echter niet veel terecht. Klaske Blom vermeldt in haar scriptie over de wiskundeaktes dat 'de wiskunde-examinatoren akte Q uitreikten aan een kandidaat, als deze op het mondeling examen goed uit zijn woorden kwam. Begrip van klassikaal onderwijs en leerwijzen kwam niet aan bod.' Misschien was dat een van de redenen waarom het boek geen groot verkoopsucces was. Er kwam nog een tweede druk, en niet meer.



figuur 1



figuur 2

Hoe geef je het beste les?

De belangrijkste boodschap over de manier van lesgeven die Versluys zijn lezers wilde bijbrengen was dat dát onderwijs het beste is dat, zoals Versluys het noemde, *zelf vindend* van aard is. Hij vond het belangrijk dat de leerlingen zelf actief bezig zijn, hetzij voor zichzelf, hetzij aan de hand van een onderwijsleergesprek, en op die manier zelf zoveel mogelijk van de wiskunde ontdekken. Het voornaamste argument dat Versluys voor de superioriteit van zulk onderwijs aanvoerde, was de motivatie van de leerling. Kenmerkend is het volgende citaat: 'Een der hoofddoelstellingen van de onderwijskunde is: *zorg dat uwe leerlingen belang stellen in het onderwijs*, en dat kan men doen door heuristisch onderwijs te geven.'

Versluys gebruikte hier de term *heuristisch*. Nu denken we bij heuristiek vooral aan systematische probleemaanpak. Die betekenis heeft het bij Versluys nog niet. Heuristisch onderwijs is bij hem onderwijs waarbij de leerling zelfontdekkend bezig is, zonder dat expliciete richtlijnen voor probleemaanpak daar een rol bij spelen. Nu waren dat opvattingen die in de negentiende eeuw door onderwijsvernieuwers wel meer gepropageerd werden, maar Versluys nam bij zijn pleidooi een radicaal standpunt in. Zo vond hij bijvoorbeeld dat bij echt heuristisch meetkundeonderwijs de leerling niet alleen zelf het bewijs bij de door de leraar gegeven stelling moet zoeken, maar dat die leerling ook zelf die stelling eerst moet vinden en formuleren.

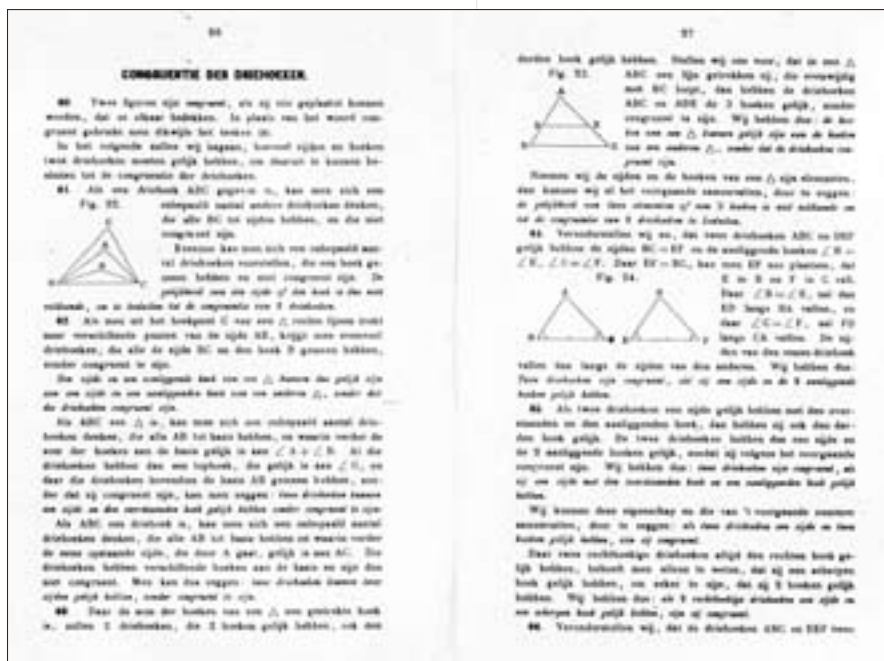
Nu wist Versluys natuurlijk ook wel dat dit allemaal gemakkelijker gezegd dan gedaan was, en dat de meeste leraren zo niet lesgeven. Hoewel hij volhield dat je ook met een zoals hij dat noemde 'dogmatisch' leerboek, dat wil zeggen een traditioneel leerboek waarin de stof systematisch behandeld en uitgelegd wordt, best zelf-vindend onderwijs kunt geven en dat hierin nu juist een prachtige uitdaging voor de leraar is gelegen, moet hij ook zelf wel geweten hebben dat nog niet zo eenvoudig was. Een leraar die zelf-vindend onderwijs zou willen geven, zou natuurlijk erg geholpen zijn met een boek dat daarop ingericht is.

De broer van Jan Versluys

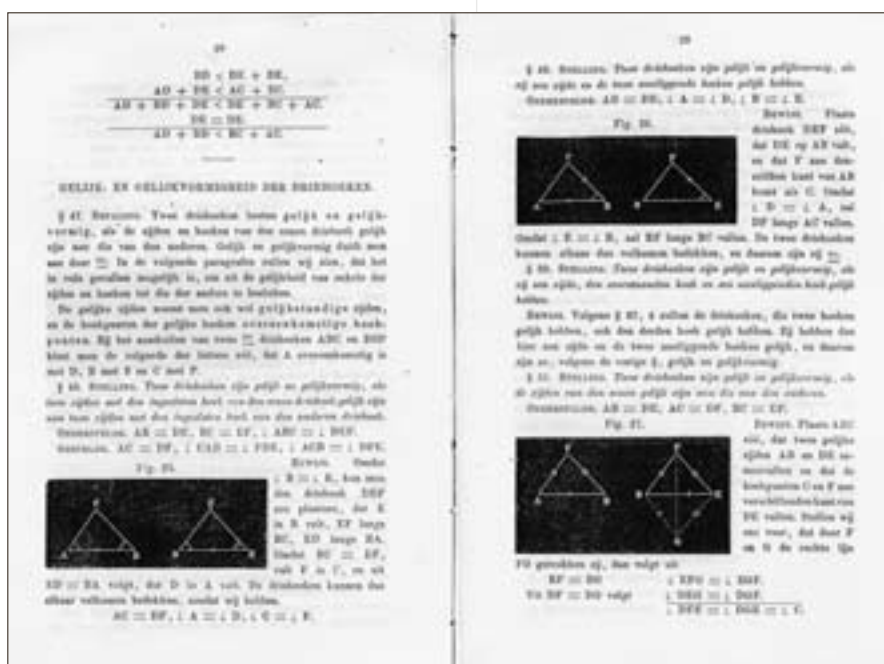
Het interessante is nu, dat hij ook naar zo'n leerboek verwijst. Hij ontleende een aantal voorbeelden aan een boek van W. Versluys,

Beknopt leerboek der vlakke meetkunde in heuristische vorm, uit 1872 (zie **figuur 2**). Willem Versluys, de schrijver van dat boek, was een jongere broer van Jan, ook opgeleid als onderwijzer, maar vooral bekend geworden als uitgever. En dat niet alleen van de schoolboeken van zijn broer Jan, maar vooral als uitgever van de tachtigers:

Gorter, Kloos, Van Eeden, Verweij en nog vele anderen. Maar kennelijk heeft hij in zijn jonge jaren ook nog wel iets aan het onderwijsvak gedaan. Van zijn boek is welgeteld één exemplaar bewaard gebleven! Wat is nu die 'heuristische vorm', waarin Willems boekje geschreven is, en waarin we als het ware Jans opvattingen gedemon-



figuur 3 Congruentie volgens W. Versluys



figuur 4 Congruentie volgens J. Versluys

streerd kunnen zien? Welnu, daarbij moeten we beslist *niet* denken aan een moderne werkboek-achtige opzet, waarbij de leerlingen aan de hand van het boek 'zelf-ontdekkend' aan het werk worden gezet. Integendeel, het is een echt *leerboek*, waarin de leerstof systematisch wordt uiteengezet. Net als alle andere meetkundeboeken uit die tijd begint het met het opzetten van een axiomastelsel, waarna de bekende eigenschappen van hoeken en lijnen, driehoeken en vierhoeken, congruentie en gelijkvormigheid, bogen en cirkels worden afgeleid. De opgaven zijn pas helemaal aan het einde van het boekje in een apart hoofdstuk opgenomen. En dat zijn grotendeels ook de gebruikelijke opgaven; van bijvoorbeeld zelf ontdekken of formuleren van eigenschappen of stellingen is maar een enkele keer sprake.

Evenmin worden er richtlijnen gegeven voor het oplossen van de vraagstukken. Van zoiets als heuristieken of een Systematische Probleem Aanpak is geen sprake. Nee, Willem Versluys was geen Bos, Lepoeter of Van Streun van 100 jaar geleden. Het boek is ook kennelijk niet bedoeld om er de leerlingen zelf, zonder dat de leraar de stof eerst behandeld heeft, mee aan het werk te zetten. Uit alles blijkt dat voor Jan en Willem Versluys de leraar de centrale rol in het leerproces had, en had het boek niet meer dan een rol achteraf.

Toch verschilt het boekje wel degelijk van de meer gebruikelijke leerboeken uit die tijd. Dat verschil zit hem in een meer natuurlijke volgorde en beperking van de leerstof, een tamelijk consequent beroep op de aanschouwing, het achterwege laten van bewijzen van zaken die voor iedere leerling onmiddellijk duidelijk zijn, en vooral in de makkelijk leesbare *stijl* waarin het boekje is geschreven. Definities, stellingen en bewijzen worden eigenlijk nauwelijks van elkaar onderscheiden, het geheel is in een soort lopend verhaal gegoten. Stellingen worden niet afzonderlijk geformuleerd maar komen als het ware op een natuurlijke manier uit het verhaal te voorschijn. Zoals Willem het in zijn voorwoord zegt: '... *eigenschappen springen alleen daardoor in het oog, doordat ze cursief gedrukt zijn.*'

Een aardig voorbeeld van die natuurlijke opbouw is de behandeling van congruente driehoeken. Eerst wordt uitgelegd waarom één of twee gelijke elementen nooit voldoende kunnen zijn, waarom drie

gelijke hoeken niet voldoen, en ook wordt getoond dat je bij twee gelijke zijden en de overstaande hoek nog twee verschillende driehoeken kunt maken (zie *figuur 3*). Pas dan verschijnen de bekende congruentiegevallen. Een vergelijking met de behandeling in het planimetrieboek uit 1869 van Jan Versluys zelf (!) is opvallend: dat heeft veel meer het karakter van een compacte samenvatting van de stof (zie *figuur 4*).

Wat ging er mis?

Hoe aardig het boekje van Willem Versluys ook was, het was geen succes. Het bleef bij de eerste druk, en alleen al het feit dat er maar één exemplaar bewaard is gebleven, laat zien dat het weinig gebruikt werd. En ondanks de pleidooien van Jan Versluys, die toch de toonaangevende didacticus van zijn tijd was, kwam van die zelfwerkzaamheid weinig terecht en verdween het hele thema tientallen jaren uit de belangstelling. Wat ging er dan mis?

Ik denk dat dat kwam omdat de eisen die aan de leraar gesteld werden, te hoog waren. Wat Jan Versluys wilde is dat de leraar op een of andere manier het onderwijs zó organiseerde dat de leerling 'zelf-vindend' bezig was. Dat kon dat in zijn visie echter alleen maar door het voeren van wat we nu een onderwijsleergesprek zouden noemen, niet aan de hand van een boek. Wel pleitte hij ervoor leerlingen soms ook de opgaven op het bord en individueel in het schrift te laten maken. Het boek biedt bij dit onderwijs geen directe ondersteuning en heeft uitsluitend een functie achteraf. Vandaar dat Jan Versluys dan ook eigenlijk geen bezwaar heeft tegen een 'dogmatisch' leerboek – in feite waren zijn eigen leerboeken ook zo opgezet.

Het heuristische leerboek van broer Willem heeft dus eigenlijk iets tegenstrijdigs: hoewel het voor leerlingen veel beter leesbaar lijkt dan de traditionele boeken, was het toch ook bedoeld voor gebruik ná het onderwijsleerproces, als het zelf-vindproces idealiter al tijdens de les onder regie van de leraar heeft plaatsgevonden. Op z'n best sluit de vorm van zijn leerboek dan aan bij wat de leerlingen gewend waren, maar even goed kun je zeggen dat in zo'n situatie het leerboek beter een systematische samenvatting van het behandelde kan bieden – een dogmatische vorm dus. En Jan Versluys zegt ook zelf met zoveel

woorden dat ook zo'n boek uitstekend is. Maar het hele onderwijs opzetten in de vorm van onderwijsleergesprekken, zonder ondersteuning van een boek, is wel erg hoog gegrepen. Zelfwerkzaamheid in de klas was dan ook pas te realiseren toen daarvoor ook geschikte boeken en andere hulpmiddelen werden ontwikkeld. Daarin slaagde men in de negentiende eeuw niet, men zag het belang daarvan ook onvoldoende in, en daardoor kwam er van de didactische ideeën uit die tijd uiteindelijk toch weinig terecht. Het didactisch programma van Versluys – zijn streven naar zelfwerkzaamheid en zelf-vindend onderwijs – is dan ook uiteindelijk niet gelukt.

Een wetenschappelijk verantwoorde aanpak

Maar Versluys had nog een programma-punt: de 'wetenschappelijke behandeling' van het vak. Dat treft ons misschien nu wat vreemd, maar dit moet gezien worden tegen de achtergrond van de geschiedenis van de wiskunde in de negentiende eeuw. Ons vak maakte in die tijd een stormachtige ontwikkeling door, niet in de laatste plaats wat betreft de strengheid van behandeling en de nauwkeurigheid van de gehanteerde begrippen. In de leerboeken uit de tijd vóór Versluys werd daar nogal slordig mee omgesprongen; iets waar hij felle kritiek op had.

Versluys maakte in zijn didactiekboek een belangrijk punt van de correctheid van formuleringen en bewijzen in zijn schoolboeken. Het interessante is dat hij die nadruk op logische strengheid verbond met een ander toen gangbaar didactisch idee: de vormende waarde van het wiskundeonderwijs. Versluys formuleerde het zo: '*Het nut van het onderwijs ligt bij de wiskunde niet hoofdzakelijk in de kennis zelf, maar in de wijze waarop zij wordt onderwezen.*' Versluys legde daarbij expliciet verband tussen vormende waarde en logische strengheid. Aan zomaar wiskunde leren heb je niet veel. Volgens Versluys: '*Zodra de logische gestrengheid te wensen overlaat, verkeert veel van het nut, dat onderwijs in de wiskunde oplevert, in nadeel.*' Hij doelt daarbij op twee zaken. Van mechanisch wiskunde leren, de methode Willem Bartjens om het kort samen te vatten, waaraan in de negentiende eeuw ook nog wel vormende waarde werd toegekend, daarvan moest Versluys niets hebben. Maar

hij verzet zich ook tegen onnauwkeurigheid in formuleringen of het wegmoffelen van allerlei stappen in een bewijs. Een voorbeeld dat hij daarvan geeft is de gewoonte van zijn voorgangers om allerlei eigenschappen van bewerkingen met natuurlijke getallen wel te bewijzen, maar dan vervolgens niet te doen of die eigenschappen dan ook zonder meer voor breuken en/of negatieve getallen gelden, terwijl het toch, aldus Versluys, duidelijk is dat bijvoorbeeld de definitie van vermenigvuldiging die voor natuurlijke getallen gegeven wordt, voor negatieve getallen onzin is. Alle al bekende eigenschappen moeten dus voor negatieve getallen weer opnieuw bewezen worden. Het is niet moeilijk in te zien dat dit deel van zijn programma veel makkelijker realiseerbaar was. Het stelde vooral eisen aan de vakkennis van de docent, en daarmee was het aan het einde van de negentiende eeuw heel behoorlijk gesteld. Wiskundedocenten waren inmiddels grondig in hun vak geschoold. En voor welke vakgerichte docent is het nu niet aantrekkelijk je eigen vak zo verantwoord mogelijk te brengen, zoveel mogelijk aansluitend bij de manier waarop je het zelf geleerd hebt, zeker als je daarbij de overtuiging mag koesteren dat nu juist die aanpak ook didactisch en opvoedkundig het beste voor de leerling is? Die benadering stelde bovendien geen moeilijke didactische eisen – en op dat terrein waren de docenten toen immers nauwelijks geschoold. Dat programma kon bovendien wel heel goed door middel van de leerboeken bevorderd worden, en in dat opzicht heeft Jan Versluys ongetwijfeld het wiskundeonderwijs wél vele decennia grondig beïnvloed. Het idee dat een wetenschappelijke behandeling van de wiskunde een grote vormende waarde heeft, is bijvoorbeeld bij E.J. Dijksterhuis prominent aanwezig.

Van de praktische kant

Nu denk ik dat Versluys een veel te goed docent was om die strengheid te veel op de spits te drijven. Ook zijn didactiekboek geeft daarvoor de nodige aanwijzingen. Zo vindt hij het onzin om leerlingen meetkundige eigenschappen te laten bewijzen die voor ieder kind duidelijk uit de figuur blijken. En je mocht volgens hem ook best een bewijs van een rekenkundige eigenschap met getallen geven, als maar duidelijk was dat je die redenering

met alle willekeurige getallen kon doen. Dat Versluys vermoedelijk een goed docent was is ook verder wel uit zijn boek te merken. Het bevat talrijke goede observaties en opmerkingen, waar ook nu een beginnend docent haar voordeel mee zou kunnen doen. Zo bijvoorbeeld de volgende fraaie tirade: *‘Na een eigenschap te hebben bewezen, gaat een jeugdige docent, als hij met minachting voor onderwijskunde is bezield door anderen, die zelf niet weten wat goed onderwijs is, onmiddellijk tot een volgende eigenschap over. Daar zit nu juist de groote fout. (...) Hij praat natuurlijk bijvoorkeur zelf en komt er zo toe de eene stelling na de andere te behandelen, zodat alles bij den leerling het eene oor in- en het andere oor uit gaat.’* Overigens, Versluys was 29 toen hij deze waarschuwing voor de ‘jeugdige docent’ schreef... Misschien lijkt die waarschuwing in deze tijd van volledige zelfwerkzaamheid niet meer zo relevant. Maar Versluys heeft ook daarover wel wat op te merken: *‘Veel leerlingen zijn geneigd anderen voor zich te laten rekenen of werken.’* Of ook dit: *‘De leerlingen schrijven gaarne het antwoord op de eerste de beste plaats, dikwijls midden in een berekening.’* En hij stelt zich de volgende vraag: *‘Als men den leerlingen de antwoorden in handen geeft van de vraagstukken, die zij moeten oplossen, kan dan ook misbruik gemaakt worden van die antwoorden?’* Kennelijk speelde dat probleem van de antwoordenboekjes toen ook al!

Een leerzame mislukking?

Je kunt zo’n didactiekboek van Jan Versluys natuurlijk gewoon uit historische interesse lezen, daar is niets op tegen. Toch valt er nog wel wat van te leren. Een van de opvallende dingen uit de historische (vak)didactiek is dat er in het verleden vaak hele zinnige en modern aandoende opvattingen werden gepropageerd, maar dat je het gevoel hebt dat daar in de praktijk zo weinig van terecht kwam. Hoe kwam dat? In dit specifieke geval heb ik het idee dat de oorzaak het ontbreken van geschikt materiaal was. Ook met het boekje van Willem Versluys kon je de leerlingen niet zomaar ‘zelf-vindend’ bezig laten zijn. Pas de boeken van Bos en Lepoeter uit de jaren vijftig van de vorige eeuw boden die mogelijkheid. De grote doorbraak kwam in 1968 met de eerste versie van *Moderne wiskunde*. Zelfstandig werken is

nu volkomen geaccepteerd, en zoals Anne van Streun in zijn oratie opmerkte, bestaat er zoiets als een ‘zelfstandig werken trend’ in veel scholen. Hij was daar trouwens niet onverdeeld positief over!

Maar als uit de geschiedenis blijkt, dat vernieuwingspogingen kunnen mislukken door het ontbreken van geschikt materiaal, moeten we ons ook realiseren dat omgekeerd dat materiaal kennelijk veel dominanter is dan we wel eens beseffen. Buitenlandse docenten die het Nederlandse wiskundeonderwijs in de praktijk meemaken, verbazen zich nogal eens over de overheersende rol van het schoolboek, waar docenten nauwelijks van durven af te wijken. De huidige leer- en werkboeken maken werkvormen mogelijk die vroeger praktisch niet goed realiseerbaar waren, maar hebben jammer genoeg ook de rol van de leraar uitgehold.

En die ‘wetenschappelijke behandeling’? In die ‘vormende waarde’ geloven we niet meer zo, maar persoonlijk denk ik wel dat ons wiskundeonderwijs te lijden heeft onder slordig formuleren en onheldere begripvorming, en dat daar te weinig aandacht voor is. Precisie en nauwkeurig formuleren zijn wel degelijk cruciale aspecten van wiskunde en daar komt vaak niet veel van terecht. Als het didactiekboek van Jan Versluys ons er toe brengt daarover, en over al die andere zaken die het aanroert, nog eens na te denken, heeft het 132 jaar na dato toch nog zijn waarde!

Over de auteur

Harm Jan Smid is werkzaam aan de TU Delft. Zijn speciale interesse gaat uit naar de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: h.j.smid@ipact.nl

De wiskunde bedrijven ...

[Hans Daale]

STUDENTEN BEDRIJFSWISKUNDE AAN HET WOORD

In de vorige jaargang is aandacht besteed aan de hbo-opleiding Bedrijfswiskunde, maar dan vanuit het specifieke perspectief van de hogeschool.^[1] Er werd ingezoomd op de wijze waarop bij de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden onder leiding van Klaas-Jan Wieringa wordt geprobeerd wiskunde in een bedrijfsmatige verpakking aan de student te brengen. Zeker gelet op de potentiële markt voor zo'n type student lukt ze dat best aardig als we de aanmeldingscijfers voor wiskunde en aanverwante studies voor het lopende studiejaar onder de loep nemen.

Om toch ook eens zicht te krijgen op de andere kant van de waarderingsmedaille voor de studie mocht ik een tijdje geleden spreken met studenten van de studie Bedrijfswiskunde. Daarvoor werd een speciaal groepsgesprek gearrangeerd in Leeuwarden en kon ik een paar studenten op hun stageadres bezoeken – waarbij, ook niet onbelangrijk, kon worden gezien wat dergelijke bedrijven van dit soort studenten vinden. En tevens is een tweetal afgestudeerden gevraagd om terug te kijken op hun studie.

In dit artikel een impressie van die verkenningactiviteiten, aan de hand van de meest opvallende uitspraken, zonder

volledig verslag te kunnen doen van alles dat naar voren werd gebracht. Overigens, de studenten mochten vrijuit praten, dus we mogen aannemen dat via deze steekproef toch een realistisch beeld naar voren kan worden gebracht.

Rondetafelgesprek

Om het gebeuren zo efficiënt mogelijk te laten plaatsvinden, wordt mijn gesprek met een aantal studenten meteen maar in het kader van een les 'communicatie' geplaatst. Onder het toezicht van een videocamera mag ik met de groep aan de slag, kritisch gadeslagen door de rest van de klas om te zien hoe een dergelijke activiteit in z'n werk gaat. Aangezien ik geen geschoolde journalist ben, hoop ik wel dat door mij geen ontlukende talenten op het verkeerde been zijn gezet qua ondervragingstechnieken...

Degenen die bij mij op gesprek mochten komen, zijn met het eerste leerjaar bezig. Ze geven allemaal aan dat er sprake was van een bewuste keuze. 'Hoewel', zegt Rory, 'ik had eerst wat twijfels, maar toen ze bij de voorlichting aangaven dat je een goede baan kunt krijgen, wist ik het wel.' Marco is eigenlijk toch ook wel op het spoor gezet door zijn vader die leraar wiskunde is, maar

'je moet toch wel aardig goed in wiskunde zijn. En je moet dan wel heel hard werken om goed bij te blijven in de klas.' Hij geeft aan dat de docenten hier een goede basis-kennis van je verwachten, maar 'gelukkig mag je van alles vragen en ze nemen best veel tijd voor je, als je maar belangstelling toont.' Overigens lijkt een bepaalde aanleg voor het lesgeven deze studie vooral aantrekkelijk te maken: Marloes geeft aan dat ze eerst voor de PABO had gekozen, maar deze studie toch leuker vindt. Op de vraag of de decan van hun middelbare school wist dat deze studie bestond, wordt aangegeven dat dit wisselend is. Het is toch vaak een kwestie van horen zeggen, en dan pas zelf ontdekken wat de studie inhoudt en wat je ervan vindt. Maar kennelijk kan een enthousiast verhaal veel teweeg brengen, want Tine meldt dat er van haar school 'vier leerlingen iets met wiskunde en ook bij deze studie zijn gaan doen. Dus mijn oude wiskundeleraar is daar zeker trots op.'

Grappig is dat veel BW-studenten zich op een bijzonder soort arbeidsmarkt bewegen. Ze moeten – uiteraard – bijklussen en daarbij kunnen ze al gauw, omdat ze wiskunde studeren, simpelweg aan de slag

als 'bijspijkeraar'. Maar dan vooral ook in de hoofdfase bij collega-studenten van de PABO. Het verhaal is zo onderhand wel bekend: veel studenten willen wel voor de klas, maar ontberen de noodzakelijke basisvaardigheden van het rekenen. En dit gat in de kennismarkt vullen deze oudere BW-studenten moeiteloos op. 'Bovendien', zo geeft Tine aan, 'leer je er straks in de hoofdfase zelf ook van omdat je iets moet uitleggen. Dat is toch wel handig, als controlemiddel.'

In dit groepsgesprek en rondkijkend in de klas – men is behoorlijk gedisciplineerd, maar dat kan ook zijn vanwege het Euclidische bezoek – zie ik duidelijk gemotiveerde studenten. Voelen ze zich nou erg bijzonder, vormen ze een opvallende groep? 'Nou, niet echt', verweert Marloes zich, 'maar mensen hebben wel een speciaal beeld van ons en van de studie, als je vertelt wat je studeert.' Maar dan ben je toch heel erg geschikt om de rol van een soort wiskundeambassadeur op je te nemen, om een volgende groep studenten te werven? 'Dat heeft toch weinig zin,' vindt Tine. En Rory valt haar bij: 'Je ziet dat je op de havo gewoon druk genoeg bent met je normale zaken en dan kijk je echt niet precies wat je later wilt gaan doen, en zeker nog niet als het gaat om zoiets speciaals als wiskunde.' Mijn professionele verbazing als voormalig decaan op een havo-school over zo'n late studiekeuze ontlokt Marco de ontboezeming dat 'je toch gewoon vaak pas weet wat je wilt gaan doen als je je examen hebt gehaald, tenminste, zo ging het bij mij.' Kennelijk is het toch afhankelijk van de wiskundedocent, als het gaat om het enthousiasme voor het vak en of iemand al in een vroeg stadium voor zo'n opleiding als bedrijfswiskunde kiest. 'Je moet ook wel durven om zo'n studie te doen', geeft Marloes aan, 'want wiskunde heeft natuurlijk een bepaalde naam bij leerlingen, ook als het saai wordt gegeven, maar juist de combinatie met andere zaken zoals informatica en statistiek spreekt juist wel een bepaalde groep studenten aan.'

Op stage

Na dit gesprek (met dank voor het beschikbaar stellen van de les) is het tijd om eens te gaan kijken hoe studenten die al een tijdje aan de studie zijn, het maken op hun stage. Twee daarvan, Antje en Renke,

hebben onderdak gevonden bij het Medisch Centrum Leeuwarden, het MCL.

Na enig zoeken in de wirwar van gangen en zalen arriveer ik in een kamertje waar ze hun werk doen en mij kunnen vertellen waarmee ze bezig zijn. 'Werken zonder wachtlijst, dat is de naam van ons project', meldt Antje. 'Iedereen kent wel het probleem van de keten van bezoeken, onderzoeken en gesprekken als je eenmaal in het zorgcircuit zit. En zeker als je op een dag een traject binnen het ziekenhuis moet doorlopen, merk je dat men voor elke patiënt voldoende tijd wil uittrekken – logisch als je kwaliteit nastreeft – maar dan kunnen allerlei planningen wel eens in de knel komen. Hoeveel ruimte moet er tussen bepaalde activiteiten zijn, niet teveel maar ook niet te weinig, dat is de kern van ons denkwerk.' Hun onderzoek blijkt zich toe te spitsen op de processen binnen de afdeling geriatrie, dus kan ik melden nog niet te mogen spreken uit eigen ervaringen. Maar Renke geeft aan dat hun onderzoek er is om te bezien hoe zo'n keten met bezoeken aan verschillende afdelingen kan worden vormgegeven, ook in combinatie met hetgeen al bij de huisarts gebeurt. 'Onze voorstellen op grond van wat wij allemaal tegenkomen, kunnen best straks overal van belang zijn. Bij het project dat we nu begeleiden, is sprake van een landelijke coördinatie, dus je weet het maar nooit.' Ze maken me in ieder geval duidelijk dat ikzelf kan gaan profiteren van hetgeen zij nu met hun eigen aanpak van 'wachtrijen' aan het bedenken zijn...

Naast het technische werk van de stage (Renke: 'We zouden hierop best willen voortbouwen in onze afstudeeropdracht') blijkt dat ook de communicatieve vaardigheden van erg groot belang zijn. 'Je moet goed weten hoe je jouw uitkomsten van een onderzoek en de ideeën die je hebt om iets te veranderen, in een vergadering met alle andere mensen moet verkopen', meldt Antje. 'Je hebt met allerlei belangen te maken en dan kun je wel goed uitzijnde modellen op de computer hebben ontwikkeld, met alle theorie en creativiteit die wij toch zeker hebben, maar dan moeten anderen er ook van overtuigd worden en blijven.' 'Maar daar leren wij weer ontzettend veel van,' vult Renke aan, 'want hbo'ers moeten ook dit soort zaken goed kunnen.'

Ze hebben het in ieder geval getroffen met de stagebegeleidster in het MCL die ook bij dit soort lastige vergaderingen meedenkt. Het vormt een goede aanvulling op hetgeen ze bij de vorige stage hebben meegekregen, waar het om een publieke organisatie ging. Ze krijgen op deze wijze veel ruimte om iets uit te denken. Dat is ook te merken aan het enthousiasme van beide bedrijfswiskundigen-in-de-dop.

Eenzelfde tevredenheid is terug te vinden bij Kristian. Hij loopt stage bij SuperConnie, in Heerenveen. Een intrigerende naam voor deze onderneming, zeker als je op de website een (supersonisch?) vliegtuig ziet staan. Kristian leidt me rond, samen met zijn baas: 'Er wordt hier gewerkt





aan allerlei software, niet voor games of zo, maar aan pakketten die behoren bij onderwijsmethoden en scholingssystemen.' Er volgt natuurlijk meteen een imposante demonstratie van een ontwerp waarbij heel knap en stap voor stap een technisch proces wordt uitgelegd. Kristian: 'Je kunt zonder meer zien dat er veel wiskunde aan te pas komt, maar toch wel in een bepaalde situatie. En dan moet je goed weten of zoiets in de les of bij een praktijkopdracht door een leerling of student op de juiste wijze kan worden gebruikt en vervolgens ook begrepen.' Het is duidelijk dat naast de kennis van de informatica en de wiskundetechnieken, ook inzicht nodig is ten aanzien van het pedagogisch verantwoord kunnen inzetten van bepaalde software. 'Daarom is het van groot belang om als team te werken en elkaars sterke kanten te gebruiken, en daar leer je ontzettend veel van, en ik zeker', beaamt Kristian. Duidelijk een superstage voor hem.

Afgestudeerd

Om het plaatje van de studenten compleet te krijgen, schuif ik vervolgens - weer terug in het eigen Amsterdam - aan tafel met Daniël en Alicia, beiden bezig in het Amsterdamse met een universitaire studie: Bedrijfskunde respectievelijk Actuariële wetenschappen. Dat laat al meteen zien dat BW-afgestudeerden van alles kunnen en dus ook gaan studeren. 'Klopt, de opleiding bedrijfswiskunde is een behoorlijk brede opleiding geweest,' geeft Daniël aan. 'En ik vond het ook veel leuker om zo'n praktische studie te gaan doen, dan na de havo via het vwo met een universitaire opleiding aan de slag te gaan.'

Toch was het bij beiden eigenlijk al vrij snel de bedoeling om na de hbo-studie door te studeren. Alicia: 'In de propedeuse was het nog niet echt duidelijk wat de studie zou gaan opleveren en wat we er allemaal mee zouden kunnen gaan doen, ook al omdat we van een heleboel zaken en van alles wat iets kregen.' Zou dan een verregaande specialisatie beter zijn? 'Nou, als je nu kijkt naar een systeem van minoren, dus keuzeprogramma's van een half jaar, dan kan zoiets best werken, en misschien is er in de tussentijd ook wel meer gedaan aan de mogelijkheden om je sterker op een bepaald gebied te richten.' Daniël meldt in het verlengde daarvan dat 'mede daarom in onze tijd bepaalde stagebedrijven niet echt precies wisten wat ze aan ons hadden, maar kennelijk is dat snel beter aan het worden.' 'Maar het niveau van de wiskunde en dat soort zaken', stelt Alicia, 'was zonder meer goed en dus wisten we onszelf ook wel te redden in allerlei situaties.'

Hoe zijn jullie zelf eigenlijk bij de opleiding bedrijfswiskunde terecht gekomen? 'Toen ik moest kiezen en naar een open dag van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden ging, kwam ik eigenlijk voor een andere studie', zegt Daniël, 'want ik had een technisch profiel en dan kijk je toch eerst in die richting. En toen liep ik pas tegen deze studie aan, dus om nu te zeggen dat er veel aan promotie werd gedaan - ik heb er destijds niet veel van gemerkt.' Kennelijk was dat toen toch wel een probleem, want ook Alicia is niet meteen op het vwo op die studie geweest. 'Ik vond wiskunde gewoon een leuk vak. Nu had ik ook niet zulke hoge cijfers, en als je dan merkt dat ze op je eigen school niet echt aan promotie doen

van opleidingen waarin wiskunde een rol speelt... Jammer, maar het zij zo; misschien dat het nu anders is.'

En de aansluiting van bedrijfswiskunde op de wetenschappelijk masters, hoe verliep die procedure? 'Je moet gewoon een schakeljaar doen', meldt Daniël, 'maar we hadden het net over de wijze waarop bedrijfswiskunde werd aanbevolen op de havo - liever gezegd, dus nog niet echt - maar ook bij mijn gesprek met de studieadviseur bleek dat hij die hbo-studie ook niet kende.' Een bekend probleem dat de laatste tijd steeds sterker naar voren komt, nu het bachelor-mastersysteem duidelijker contouren krijgt: het opvangen van hbo'ers in de wo-masters, naast de instroom uit de eigen bachelors. 'Je moest gewoon instromen in het derde jaar van de bachelor', zegt Alicia, 'en dan kun je vervolgens bepaalde vakken uit het tweede leerjaar inhalen, zoals statistiek. Nu loopt dat natuurlijk wel en ik red het ook best, maar ik kan me voorstellen dat er meer wordt gedaan aan afstemming, of dat men over en weer meer van elkaar weet.'

Eigen plek

Een dergelijke quick-scan van de belevenissen van studenten die in een bepaalde fase van hun studie zitten, laat zien dat er zonder meer ruimte is voor bedrijfswiskundigen. De arbeidsmarkt, voor wat deze 'steekproef' waard is, kan zeker met dit type student uit de voeten. Nu nog bepaalde zaken wellicht wat scherper en gedurfter neerzetten, en dan blijft bedrijfswiskunde zeker z'n plek in het hbo waard.

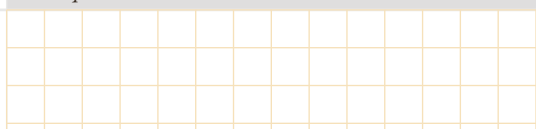
Noot

[1] Hans Daale: *Hbo-wiskunde in bedrijf*. In: Euclides 81-3, december 2005, pp. 114-116.

Over de auteur

Hans Daale is redacteur van Euclides. Hij is daarnaast betrokken bij ontwikkelingen in het (hoger) beroepsonderwijs zoals de aansluiting op het hbo, via het Lica, en de Associate degree.

E-mailadres voor die activiteiten: leido@planet.nl



'Oude' meetkunde en vwo-wiskunde D

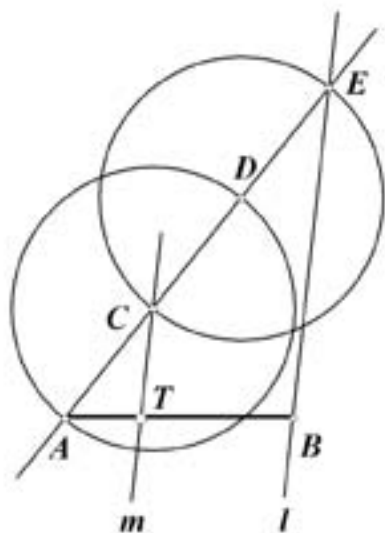
[Dick Klingens]

Passer en liniaal: p&l

De meetkundige constructies die de oude Grieken toelieten, moesten gebaseerd zijn op het gebruik van alleen een passer en een 'latje', een 'blanco' liniaal (dus eentje zonder verdere maataanduidingen of onderverdeling). De reden daarvoor is voornamelijk gelegen in het feit, dat de cirkel en de rechte lijn volgens Plato (427-347 v. Chr., Griekenland) de basisobjecten zijn van de meetkunde (conform diens *Ideeënleer*). De eerste stellingen in het eerste boek van de *Elementen* van Euclides (325-265 v. Chr., Egypte) gaan over dit type constructies, vandaar dat ze wel *Euclidische* constructies worden genoemd. We zullen ze in hetgeen volgt (korter) *p&l-constructies* noemen. We zijn met deze hulpmiddelen beperkt in onze constructiemogelijkheden tot:

- het tekenen van een lijn of lijnstuk door twee gegeven punten;
- het tekenen van een cirkel met een gegeven middelpunt met een gegeven straal, waarbij de straal dan bepaald wordt door een omtrekspunt van de cirkel of door een gegeven lijnstuk;
- het tekenen van snijpunten van lijnen en/of cirkels onderling.

De oude Grieken gebruikten bij hun constructies evenwel een passer waarvan



figuur 1

de benen na het tekenen van een (deel van een) cirkel direct inklapten; je zou kunnen zeggen dat de passer na het tekenen 'in het niets verdwijnt'. Daardoor is het met een dergelijke passer (soms wel *Euclidische passer* genoemd) niet mogelijk een cirkel te tekenen met een door een gegeven lijnstuk bepaalde straal. Maar, het is mogelijk te bewijzen dat de Euclidische passer en onze moderne passer equivalent zijn: we kunnen er dezelfde constructies mee uitvoeren (zie [1]).

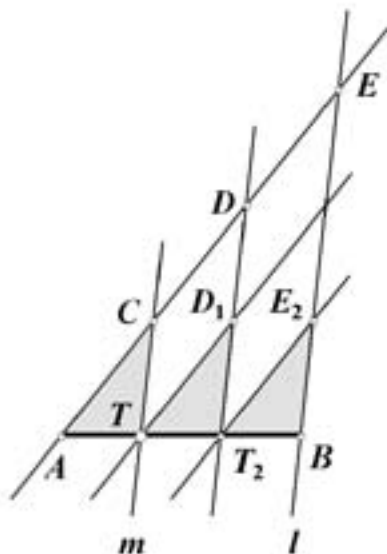
Een toepassing

We zullen ons in hetgeen volgt *alleen* bezighouden met verschillende oplossingen van het volgende probleem:

Gegeven is een lijnstuk AB (en daarmee ook de lijn AB).

Geef een p&l-constructie van het punt T op AB zodat: $|AT| = \frac{1}{3} \cdot |AB|$.

Bij de oplossing van dit probleem (de *trisectie* van het lijnstuk) zullen we niet alleen kijken naar enkele Euclidische constructies, maar ook zullen we een link leggen naar het nieuwe vwo-vak wiskunde D, waarvan de *analytische meetkunde* een onderdeel is.



figuur 2

In de analytische meetkunde worden meetkundige objecten als lijnen en cirkels geplaatst gedacht in een rechthoekig assenstelsel, waardoor het mogelijk is via vergelijkingen een verband leggen tussen de x - en y -coördinaten van de punten op die objecten. Het bepalen van snijpunten van verschillende objecten vindt dan plaats door het algebraïsch (d.w.z. via algebraïsche technieken) oplossen van het bij die objecten behorende stelsel vergelijkingen.

Gebruiken we in hetgeen volgt termen als 'constructie', 'construeren', dan bedoelen we steeds een p&l-constructie. Ook schrijven we voor de lengte van een lijnstuk XY steeds $|XY|$ in plaats van $|XY|$.

De 'klassieke' constructie

In de meeste leerboeken die op de middelbare scholen in gebruik waren toen meetkunde nog als apart vak (meetkunde is een vak apart) in de onderbouw voorkwam, vinden we de volgende constructie (zie *figuur 1*).

- Kies een punt C buiten AB en construeer op de lijn AC de punten D en E met $AC = CD = DE$.
- Teken dan de lijn m door C evenwijdig met $BE \equiv l$.
- Het snijpunt van m en AB is dan het gezochte punt T .

Bewijs. We kunnen het bewijs van de juistheid van deze constructie baseren op:

- gelijkvormigheid (zie *figuur 1*):
 $ACT \sim AEB$ (hb) waaruit blijkt dat
 $AC : AE = 1 : 3 = AT : AB$
- congruentie (in samenhang met parallelogrammen; zie *figuur 2*):
 $ACT \cong TD_1T_2 \cong T_2E_2B$ (HZH)

In *figuur 1* maken we gebruik van twee cirkels en drie rechte lijnen, waarbij we – voor het gemak – voorbij gaan aan het feit dat we voor de p&l-constructie van de lijn m door C evenwijdig met l vier cirkelbogen nodig hebben (zie *figuur 3*).

Overigens, de p&l-constructie in *figuur 3* kan ook worden uitgevoerd met drie cirkels.

Willen we wiskunde D laten aansluiten bij wiskunde B, dan moeten (kunnen) we gebruik maken van de (vernieuwde) eindtermen die vanaf 2010 voor vwo-wiskunde B gaan gelden. We noemen in dit verband: *‘de kandidaat kan bewijzen geven waarbij gebruik gemaakt wordt van eigenschappen van rechte lijnen, cirkels, driehoeken en vierhoeken...’* (Gb2, voortgezette meetkunde, 134). Expliciet is dus kennis van de eigenschappen van congruentie en gelijkvormigheid gewenst! En als we gebruik willen maken van analytische methoden, dan is ook het hebben van vaardigheid in het algebraïsch oplossen van stelsels vergelijkingen een voorwaarde...

Zonder evenwijdige lijnen, met een analytisch bewijs

Natuurlijk zijn er ook andere constructies dan de genoemde klassieke constructie mogelijk. In *figuur 4* hebben we achtereenvolgens:

- $K_1 = \text{cirkel}(A, AB)$, $K_2 = \text{cirkel}(B, BA)$,
waarvan het punt C één van de
snijpunten is;
- de lijn CA snijdt K_1 ook in het punt D ;
- het punt E is het midden van het
lijnstuk BD ;
- T is het snijpunt van AB en CE .

En dan is: $AT = \frac{1}{3}AB$.

Bewijs. In driehoek BCD zijn de lijnen BA en CE zwaartelijnen. Het punt T is het zwaartepunt van die driehoek, zodat $AT : TB = 1 : 2$. ■

Ook bij deze constructie maken we gebruik van twee cirkels en drie lijnen (hoewel, voor de p&l-constructie van het punt E hebben we twee cirkels en een extra lijn nodig).

Nu gaat het er bij deze constructie *niet* om de 'kortste' constructie te vinden, maar het zoeken daarnaar kan (ook hier) een uitdaging voor de lezer (of voor diens leerlingen) zijn!

Waar het *wel* om gaat is, dat we gemakkelijk een verband kunnen leggen tussen de p&l- constructie en een analytische methode om de juistheid van de constructie aan te tonen. Zoals reeds is opgemerkt, wordt bij analytische methoden gebruik gemaakt van een rechthoekig assenstelsel en van vergelijkingen van de daarin geplaatste meetskundige objecten. En dat doen we ook hier.

Analytisch bewijs. We kiezen een loodrecht assenstelsel met A als oorsprong, waarvan de x -as door het punt B gaat (zie *figuur 5*). We kiezen verder $B = (1, 0)$, en dit soort keuzes is eigenlijk wel standaard binnen de analytische meetkunde (noem het ‘handig kiezen’). We volgen dan de Euclidische constructie op de voet, waarbij we bij (bijna) elk object dat we tekenen, het ‘analytisch equivalent’ – dus een vergelijking van een lijn of cirkel, of de coördinaten van een punt – bepalen. Omdat ABC een gelijkzijdige driehoek is (en alweer, *meetkundige* eigenschappen moeten ook in de analytische meetkunde worden gekend *en* gebruikt!), hebben we $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. En dan is $D = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

Voor het midden E van het lijnstuk BD

vinden we nu:

$$E = \left(\frac{1 + (-\frac{1}{2})}{2}, \frac{0 + (-\frac{1}{2}\sqrt{3})}{2} \right) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\sqrt{3})$$

De richtingscoëfficiënt m van de lijn CE is dan:

$$m = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - (-\frac{1}{4}\sqrt{3})}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 3\sqrt{3}$$

Zodat een vergelijking van de lijn CE luidt:

$y = 3\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3}$. En daaruit vinden we voor $y = 0$ de x -coördinaat van het punt T :
 $x = \frac{1}{3}$. ■

Opnieuw twee cirkels en drie lijnen

In **figuur 6** gaan we aanvankelijk te werk als in de vorige paragraaf: we tekenen de cirkels K_1 en K_2 en het punt D . Het punt E is nu het tweede snijpunt van K_2 met de lijn AB ; het punt F is het tweede snijpunt van DE met K_2 . De lijn CF snijdt AB dan in het punt T . En ook bij deze constructie is $AT = \frac{1}{2}AB$.

We tonen de juistheid van de constructie nu maar direct analytisch aan; we laten het aan de lezer een puur meetkundig bewijs (= synthetisch bewijs) te vinden. Om het opstellen van vergelijkingen van cirkels in eerste instantie te ontlopen kiezen we voor een min of meer omgekeerd bewijs.

Analytisch bewijs. We gaan uit van

$A = (0,0)$, $B = (1,0)$ en $T = (\frac{1}{3},0)$. We zullen op basis daarvan laten zien, dat het punt van F op K , ligt.

Een vergelijking van CT is (zie de vorige paragraaf): $y = 3\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3}$ (1)

De richtingscoëfficiënt van DE is gelijk aan

$$\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}-0}{-\frac{1}{2}-2} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$$

zodat we als vergelijking van DE vinden:

$$y = \frac{1}{5}\sqrt{3}(x-2) \quad (2)$$

figur 3

figuur 4

figur 5

De coördinaten van het punt F voldoen nu aan (1) en (2). Eliminatie van y daaruit geeft: $3\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3} = \frac{1}{5}\sqrt{3} \cdot x - \frac{2}{5}\sqrt{3}$

$$\frac{14}{5}\sqrt{3} \cdot x = \frac{3}{5}\sqrt{3}$$

Voor de x -coördinaat van F hebben we dan: $x = \frac{3}{14}$; en voor de y -coördinaat:

$$y = -\frac{5}{14}\sqrt{3}.$$

Nu is $(BF)^2 = (1 - \frac{3}{14})^2 + (0 - (-\frac{5}{14}\sqrt{3}))^2 = \frac{121}{196} + \frac{75}{196} = 1$. Het punt F ligt dus op K_2 (de straal daarvan is immers gelijk aan 1). ■

Alleen vier cirkels

Zie **figuur 7**. Daarin is:

- K_1 = cirkel(A, AB). Deze cirkel heeft met AB ook het snijpunt C .

- K_2 = cirkel(B, BC). Deze cirkel heeft met AB ook het snijpunt D .

- K_3 = cirkel(D, DA). Deze cirkel snijdt K_1 in de punten E en F , en de lijn AB in het punt G .

- K_4 = cirkel(E, EA). Deze cirkel snijdt AB in het punt T .

Dan geldt: $AT = \frac{1}{3}AB$.

Synthetisch bewijs. Het punt E ligt op K_3 ; een middellijn van K_3 is AG , zodat driehoek AGE rechthoekig is in hoekpunt E (cirkelstelling van Thales). Verder staat EF in het punt H loodrecht op AG . Nu geldt in driehoek AGE :

$$(AE)^2 = AH \cdot AG \quad (3)$$

(Dit volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken AEH en AGE .)

Met $AB = AE = 1$ hebben we dan $AG = 6$, zodat (3) geeft: $AH = \frac{1}{6}$.

Maar het punt H is ook het midden van de koorde AT van K_4 , zodat $AT = \frac{1}{3}$. ■

Analytisch bewijs. Met $A = (0,0)$ en $B = (1,0)$ leggen we een loodrecht assenstelsel vast. Daarin hebben de cirkels K_1 en K_3 opvolgend de vergelijkingen:

$$- x^2 + y^2 = 1 \quad (4)$$

$$- (x-3)^2 + y^2 = 9 \quad (5)$$

Voor hun snijpunten E en F geldt dan, door aftrekking van (5) en (4):

$$-6x + 9 = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Dus ook voor het punt H op de x -as geldt $x = \frac{1}{6}$. ■

In de laatste constructie is het punt T gevonden als snijpunt van de lijn AB en een cirkel. In de volgende paragraaf laten we zien dat we de lijn AB niet nodig hebben: we doen het alleen met cirkels.

Een passerconstructie

Lorenzo Mascheroni (1750-1800, Italië) publiceerde in 1797 in Pavia het werk *Geometria del compasso*. Hij toonde daarin aan dat iedere p&l-constructie met passer alleen kan worden uitgevoerd. Hij stelde zich niet alleen tevreden met het bewijs van de mogelijkheid, maar ook gaf hij een groot aantal interessante toepassingen op allerlei meetkundige problemen (waaronder een aantal benaderde oplossingen van constructies die met p&l niet exact uit te voeren zijn). Het werk van Mascheroni werd vooral in Frankrijk bekend door toedoen van Napoleon Bonaparte. Tijdens zijn Italiaanse veldtocht had hij Mascheroni ontmoet en raakte in diens werk geïnteresseerd (*Geometria* is door Mascheroni zelfs opgedragen aan Napoleon). In 1798 verscheen een Franse vertaling onder de naam *Géométrie du compas* van de hand van A.M. Cayette, een officier in het leger van diezelfde Napoleon.

Georg (Jørgen) Mohr (1640-1697, Denemarken) bracht een groot deel van zijn leven in Nederland door. In 1672 (dus zo'n 125 jaar vóór Mascheroni) publiceerde hij *Euclides Danicus* (uitgegeven te Amsterdam in het Nederlands en in het Deens), dat geheel aan de *passermeetkunde* was gewijd. Hij toonde daarin ook aan – zij het meer theoretisch en minder eenvoudig dan Mascheroni – dat p&l-constructies met passer alleen mogelijk zijn. Het boek werd bij toeval ontdekt door een student van de Deense meetkundige Johannes Hjelmslev (1873-1950) en door de laatste als facsimile heruitgegeven in 1928 (zie verder ook [1]).

Het is dus volgens Mohr en Mascheroni mogelijk ook de trisectie van een lijnstuk alleen met passer uit te voeren. Bij deze constructie mogen we dus *geen* gebruik maken van de lijn AB . Het punt T op AB moeten we vastleggen als snijpunt van twee cirkels. In **figuur 8** zien we, $AB = 1$ stellend: - opnieuw de cirkels K_1 en K_2 die elkaar snijden in C en D . - K_3 = cirkel(C, CD), die K_2 ook snijdt in het punt E (op het verlengde van AB). Daarbij is dan $AE = 2$. K_3 snijdt K_1 in het punt F (op het verlengde van BA), met $AF = 1$. - K_4 = cirkel(E, EF), die het verlengde van AB snijdt in het punt L (met $AL = 5$), dat alleen een rol zal spelen bij het bewijs van de juistheid van de constructie. - K_5 = cirkel(F, FB), die K_4 snijdt in de punten G en H .

- K_6 = cirkel(G, GF) en K_7 = cirkel(H, HF).

Deze cirkels snijden elkaar behalve in F ook in het punt T .

En ook nu is $AT = \frac{1}{3}AB$.

Synthetisch bewijs. Driehoek FLG is een in G rechthoekige driehoek (cirkelstelling van Thales). In deze driehoek is GM de hoogtelijn uit G op FL . Nu geldt in die driehoek: $(GF)^2 = FM \cdot ML$ of $4 = FM \cdot 6$.

Met andere woorden: $FM = \frac{2}{3}$.

Omdat F het midden is van koorde FT van K_6 is ook $MT = \frac{2}{3}$, zodat:

$$AT = FT - AF = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

Analytisch bewijs. Ook nu maken we gebruik van de vergelijkingen van twee cirkels in een loodrecht assenstelsel. We kiezen daartoe weer $A = (0,0)$ en $B = (1,0)$. Dan is:

$$- K_4 : (x-2)^2 + y^2 = 9 \quad (6)$$

$$- K_5 : (x+1)^2 + y^2 = 4 \quad (7)$$

Uit (6) en (7) volgt voor de x -coördinaat van de punten G en H , en dus ook die van M , via aftrekking:

$$-6x + 3 = 5 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

waaruit volgt dat $T = (\frac{1}{3}, 0)$. ■

Een liniaalconstructie

Jakob Steiner (1798-1863, Zwitserland) toonde in 1833 aan dat elke p&l-constructie met liniaal alleen kan worden uitgevoerd, indien in het vlak van tekening een vaste cirkel met middelpunt gegeven is. George Martin laat in [2] zien dat die cirkel niet nodig is bij liniaalconstructies van punten met rationale coördinaten. Daarbij is het dan noodzakelijk de ligging van de punten $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ en $(0,2)$, opvolgend de punten A, G, B en H in **figuur 9**, vooraf vast te leggen.

Analytisch bewijs. Hiervan uitgaande hebben we een liniaalconstructie met behulp van slechts acht lijnen. Opvolgend zijn getekend^[3] de punten:

$$- O = AB \times GH; C = BG \times AH; D =$$

$$AG \times OC; E = AH \times BD; T = AB \times EG.$$

Dan is ook nu: $AT = \frac{1}{3}AB$.

Direct is duidelijk dat $D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

En verder hebben we de vergelijkingen:

$$- BD : y = -\frac{1}{3}(x-2)$$

$$- AH : y = -2x + 2$$

Voor de coördinaten van het snijpunt E van deze lijnen vinden we hieruit: $E = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$, waarmee we als vergelijking voor EG vinden:

$$- EG : y = -\frac{3}{4}x + 1$$

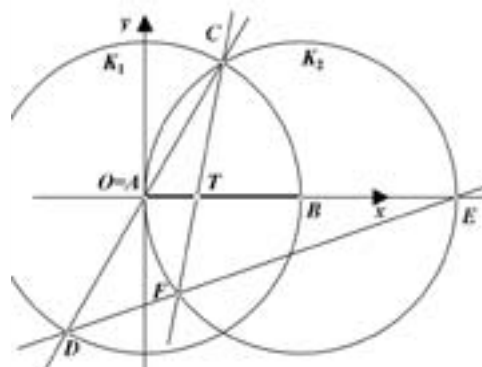
En met $y = 0$ volgt: $x = 1\frac{1}{3}$, waaruit blijkt dat $AT = \frac{1}{3}AB$.

We laten ook nu het vinden van een synthetisch bewijs aan de lezer. ■

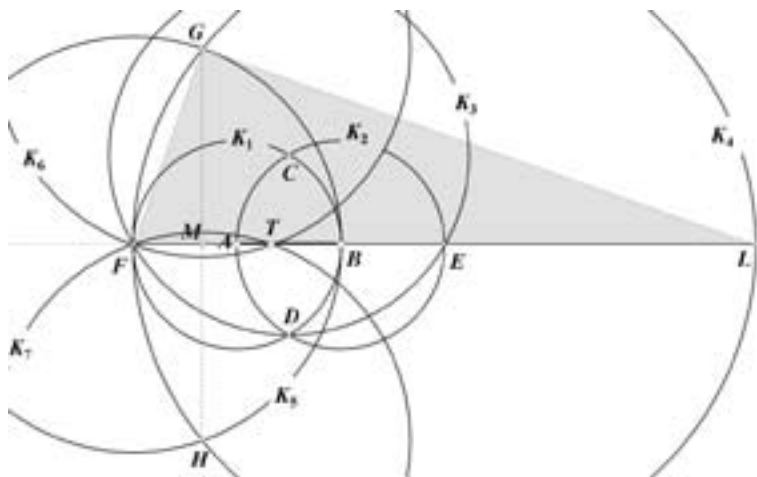
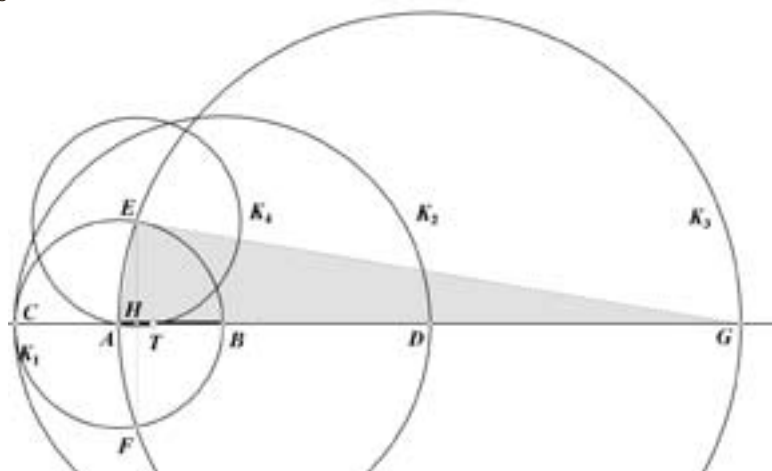
Tot slot

We hebben hierboven laten zien, dat ook constructieproblemen aanleiding kunnen zijn voor het gebruik van analytische methoden. Het is een illustratie van de analytische benadering van meetkundige problemen, zoals die door Descartes geïntroduceerd is in de zeventiende eeuw en die een doorbraak betekende voor de wiskunde. Zowel inzicht in als ervaring met analytische methoden is essentieel in het gebruik van wiskunde in een meetkundige context (en niet alleen daar!). Het is tevens een belangrijk toepassings- en trainingsgebied voor algebra en algebraïsch modelleren, zoals – hierboven geïllustreerd – het aanbrengen van een coördinatenstelsel, het kiezen van onbekenden, het opstellen van vergelijkingen en het werken daarmee. Ook in de ‘oude meetkunde’ vinden we dus aanknopingspunten (en daarmee ook uitdagingen) voor behandeling in ons toekomstige meetkundeonderwijs, en, zoals we gezien hebben, *zeker* binnen het nieuwe vwo-vak wiskunde D. We hopen dan ook dat dit artikel kan bijdragen aan de verdere ontwikkeling van dit nieuwe vak.

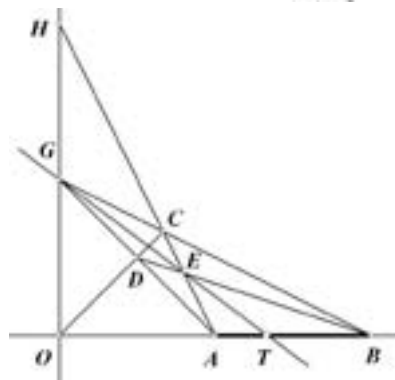
figuur 6



figuur 7



figuur 8



figuur 9

Referenties en noten

- [1] Dick Klingens: *Passermeetkunde*. Homepage: www.pandd.demon.nl/inversiel/passermeeetk.htm.
- [2] George E. Martin: *Geometric Constructions*. New York: Springer-Verlag (1998); pp. 69-82. Zie <http://math.albany.edu/math/pers/martinpg.html> voor het voorwoord bij dit boek.
- [3] Met $AB \times CD$ bedoelen we het snijpunt van de lijnen AB en CD .

Over de auteur

Dick Klingens is verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van Euclides. Daarnaast houdt hij zich als lid van één van de cTWO-werkgroepen bezig met de ontwikkeling van de analytische meetkunde binnen het vak wiskunde D. E-mailadres: dklingens@pandd.nl URL: www.pandd.nl

Parate kennis en algebra

[Anne van Streun]

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = 2$$

WISKUNDEDIDACTIEK ANNO 2010

Aflevering 0: Aankondiging

Oriëntatie

In 1975 geeft de didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een publicatie uit onder de titel *Vaardigheden*. In het Voorwoord lezen we zinnen zoals: 'De tamelijk radicale veranderingen in 1968 van de wiskunde-leerplannen in het voortgezet onderwijs hebben ook hun bijdrage geleverd tot de onzekerheden van docenten ten aanzien van doelstellingen van het wiskundeonderwijs. Een heet hangijzer bij het nastreven van die doelstellingen is de vraag naar de betekenis van de wiskundige vaardigheden... De oorzaken van het *verontrustend tekort aan wiskundige routines* moet in de eerste plaats gezocht worden in de onderwijsprocessen en pas in de tweede plaats in de leerstof of de schoolstructuur...' Het lijkt erop dat wij in Nederland na de nieuwe programma's voor 12-16 en de bovenbouw havo-vwo in dezelfde situatie zijn verzeild geraakt als na 1968. En weer gaat het over onzekerheid in doelen en de plaats van routines en algebraïsche vaardigheden. In een serie korte artikelen proberen we de problematiek in kaart te brengen.

Vergelijkingen, functies, relaties, formules en toepasbaarheid

Tot aan de eerste eindexamens havo-vwo in 1973 en 1974 domineerden de vergelijkingen in y en x de opgaven in de schoolboeken en examens. Voor 1960 slaagden leerlingen erin om de grafiek van

$$y = \frac{6x^2 + 6x + 12}{x^2 - 4x - 5}$$

op maxima, minima en nulpunten te onderzoeken zonder dat zij beschikten over het gereedschap van de differentiaalrekening. (Dat ging door te snijden met $y = y_1$ en de discriminantmethode toe te passen. Veel algebraïsch rekenwerk!) Ook in de wiskundeprogramma's van havo-vwo na 1968 speelde het onderzoek van de grafiek van de functie een hoofdrol. Vanaf de

brugklas werd de functie onderwezen als een speciale relatie en werd er veel energie gestoken in het aanleren van notaties, zoals $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid 2x + 3y = 7\}$. Vooral in de brede leeftijdsgroep van 12-16 jaar verduisterde het coderen en decoderen van notaties veelal het inzicht in de betekenis van de onderliggende relaties, terwijl de weg naar het gebruik van formules in toegepaste situaties bij belendende schoolvakken welhaast geblokkeerd leek.

Een voor Nederland nieuwe benadering van functies wordt geïntroduceerd in een meer toegepast wiskundevak als wiskunde A. Enige jaren later wordt tegelijk met de basisvorming het nieuwe, meer op toepasbaarheid gerichte, wiskundeprogramma voor 12-16 jarigen ingevoerd. Aanvankelijk gaat het nu in de eerste leerjaren bijna uitsluitend over verbanden tussen grootheden die in diverse situaties worden beschreven en door verschillende representaties (woorden, tabellen, formules en grafieken) worden vastgelegd. De symbolen zijn nu niet meer beperkt tot de x en de y , maar het gehele alfabet wordt ingezet, veelal aansluitend bij wat in toegepaste situaties gebruikelijk is. In de hogere leerjaren van havo-vwo worden de verschillende typen functies zelf onderwerp van studie en waar zinvol komt ook het bredere begrip van relaties aan de orde.

Algebra in de functielijn

Een belangrijk aspect van de functielijn is altijd het gebruik van algebraïsche methoden geweest, aanvankelijk uitsluitend voor het oplossen van vergelijkingen en het herleiden van functievoorschriften in x en y , de *algebraïsche vaardigheden*. In meer recente jaren zijn de algebraïsche symbolen ook ingezet voor het beschrijven van verbanden en relaties in contexten. Dat laatste en bredere gebruik van algebra en algebraïsche methoden en technieken noemen wij kortweg *algebraïseren*. Vergeleken met alle leerplannen die er aan vooraf zijn gegaan kenmerken het huidige leerplan voor 12-16 jaar en de leerboeken

die daarop zijn gebaseerd zich door een brede benadering van het gebruik van formules om verbanden tussen grootheden te beschrijven, een flexibel gebruik van allerlei symbolen (niet meer uitsluitend x en y), ruime aandacht voor de betekenis van formules in contexten, tabellen of grafieken, een heel beperkte oefening in algebraïsche vaardigheden en weinig aandacht voor het memoriseren, automatiseren en de routinevorming.

Aansluitingsproblemen

Door de forse accentverschuiving in de onderbouw havo-vwo is het startniveau in leerjaar 4 wat betreft algebraïsche vaardigheden lager dan voorheen, terwijl daar in de bovenbouw havo-vwo een zodanige inzet van de grafische rekenmachine bij komt dat wiskundige methoden en begrippen verdrongen lijken. Door deze veranderingen in de onderbouw en bovenbouw van havo-vwo lijkt er een discontinuïteit in de tijd te zijn opgetreden in het handmatig en begripsmatig kunnen gebruiken van

de taal, de symbolen en de technieken van de algebra. Niet alleen beheersen veel leerlingen handmatig de algebraïsche basistechnieken niet meer (het wordt ze immers ook niet meer geleerd en afgevraagd), maar ook het verstandig kunnen omgaan met variabelen, formules en vergelijkingen, in de literatuur *symbol sense* genoemd, lijkt niet meer te worden beheerst. Ernstige aansluitingsproblemen tussen onderbouw en bovenbouw havo-vwo en tussen havo-vwo en hbo-wo zijn daarvan het gevolg.

Parate kennis en algebra

In de komende nummers van Euclides zal in een zevental artikelen onder de noemer *Parate kennis en algebra* worden beargumenteerd dat het er vooral om gaat een basis aan benodigde parate kennis te *selecteren* en *90%-criteriumtoetsen* te ontwikkelen, waaruit de leerlingen kunnen opmaken welke kennis zij paraat moeten hebben en houden. En het leggen van die basis moet beginnen in de groep 12-16-jarigen.

Over de auteur

Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundendidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, en hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000.
E-mailadres: avstreun@euronet.nl

APS-Wiskunde

De 5e Reehorstconferentie Wiskunde
Conferentie Wiskunde Tweede Fase: Op weg naar 2010

Cursus Concrete Materialen in de wiskundeles
Cursus Didactiek voor onbevoegde wiskundeleraars
Cursus Rekenproblemen

Studiedag Wiskunde in de vernieuwde onderbouw
Studiedag Wiskunde in een ELO
Studiemiddag Dyscalculie

17 januari 2007
21 november 2006

start 6 december 2006
start 30 oktober 2006
start 2 november 2006

15 november 2006
29 november 2006
25 januari 2007

Ons volledige aanbod is te vinden op onze website:
www.aps.nl/wiskunde

Daar kunt u zich ook online inschrijven.
Geïnteresseerd en heeft u onze brochure nog niet ontvangen?

Bel of stuur een e-mail:
Secretariaat APS-wiskunde
Telefoon: 030-28 56 722
E-mail: wiskunde@aps.nl



De Cirkel van Benford

WAAROM DE MEESTE GETALLEN MET EEN 1 BEGINNEN

[Jeroen Spandaw]

1. Inleiding

Wiskundigen zijn onder andere in te delen in structuurdenkers en probleemoplossers. De eersten hebben een voorkeur voor het abstracte, de laatsten voor het concrete. Ik behoor tot de eerste categorie met mijn voorkeur voor de generalisatie, elegante constructies en onverwachte samenhangen. Het esthetische aspect van wiskunde – voor mij de enige reden om me met dit vak bezig te houden – is in de schoolwiskunde echter nauwelijks terug te vinden. Leerlingen met een vergelijkbare smaak voor het abstracte komen in tegenstelling tot de probleemoplossers op school dan ook maar matig aan hun trekken en gaan daardoor misschien voor ons vak verloren. Daarom alleen al moet er op de middelbare school voldoende aandacht blijven voor dit essentiële aspect van de wiskunde: de abstractie.

Helaas valt ‘abstract’ vaak samen met ‘ontoegankelijk’, ‘wiskunde van de lange adem’, en daarom is het geen eenvoudige opgave om abstracte wiskunde op leerling-niveau aan te bieden. Ook in dit artikel is het abstracte deel helaas te hoog gegrepen voor leerlingen. Toch gaat het over een concreet en toegankelijk verschijnsel, de empirische Wet van Benford.

Over dit onderwerp verscheen in het april-nummer van *Euclides* een artikel van Henk Pfaltzgraff, waarin de Wet van Benford ‘een uiterst merkwaardig en buitengewoon moeilijk verklaarbaar verschijnsel’ werd genoemd^[1]. Ik ben het hier niet geheel mee eens: gezien op het ‘juiste’ abstractieniveau (Haar-maten op topologische groepen) kun je zelfs beweren dat de Wet van Benford op de trivialiteit $d(cx) = dx/x$ neerkomt. (Zo heb je nog eens wat aan die colleges groepentheorie, topologie en maattheorie!) Voor structuurminnaars als ik is zo’n inzicht een bescheiden voorbeeld van *the real thing*. Door een geïsoleerd feit als de Wet van Benford in te passen in een algemenere theorie vind je niet alleen een bewijs, maar krijg je ook inzicht in het ‘waarom’ van de Wet. Voor probleemoplossers daarentegen is de abstractie een nodeloze omweg, want als je alle abstractie weggooit, houd je een

korter, toegankelijker bewijs over. Om beide smaken te bedienen heb ik beide bewijzen opgenomen.

Dit artikel is gericht aan u, de professionele wiskundige. Maar wat kunnen onze leerlingen met de Wet van Benford beginnen? Om te beginnen kunnen ze natuurlijk in concrete situaties de Wet van Benford verifiëren. Dit is goed mogelijk in de vorm van vakoverstijgende projecten wiskunde/informatica. Op meer theoretisch vlak kunnen leerlingen delen van het bewijs uitwerken en de Wet generaliseren naar andere talstelsels. Tenslotte biedt de Wet van Benford u een goede gelegenheid de logaritmische liniaal of rekenschijf weer eens uit de kast te halen. Het is te betreuren – maar wel begrijpelijk – dat deze prachtige incarnaties van de altijd weer lastige rekenregel $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ uit het klaslokaal zijn verdwenen.

Dit artikel is als volgt opgebouwd. Na een korte beschrijving van de empirische Wet van Benford volgt een bewijsschets, die vervolgens nader wordt uitgewerkt in paragraaf 4. In deze paragraaf vindt u, zoals beloofd, zowel een ‘no-nonsense-bewijs’ als een korte schets van het abstractere ‘Haar-maat-bewijs’. Na enige bespiegelingen over het verband tussen de empirische Wet van Benford en de corresponderende wiskundige stelling van paragraaf 4 beschrijven we in paragraaf 6 hoe de Wet van Benford schitterend geïllustreerd wordt door de ouderwetse rekenschijf. We besluiten met suggesties voor leerlingenopdrachten.

2. De Wet van Benford

De Wet van Benford is het empirische gegeven, ontdekt door Simon Newcomb in 1881 en nader onderzocht door Frank Benford in 1938, dat allerlei ‘grote lijsten’ met getallen dezelfde verdeling van de begincijfers vertonen: zo’n 30% van de getallen zal met het cijfer 1 beginnen, 18% met een 2, 12% met een 3, enzovoorts. De formule van Benford voor

de kans op begincijfer $d \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ is

$$p(d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

(Deze logaritme in dit artikel heeft steeds grondtal 10.)

Als voorbeeld van zo’n ‘grote lijst’ kiezen we de afstanden van de zon tot de overige sterren van ons Melkwegstelsel in kilometers. Als we overgaan op een andere eenheid (lichtjaar, parsec, duim, Planck-afstand, nautische mijl, ...) veranderen de getalswaarden in de lijst en dus ook de individuele begincijfers, maar de *verdeling* van de begincijfers verandert niet.

3. Bewijsschets

De crux van het hier volgende bewijs is de observatie dat de Benford-verdeling behouden blijft onder verandering van eenheid. Overgang naar een andere eenheid correspondeert met de transformatie

$T_c : x \mapsto cx$, waarbij c de omrekeningsfactor

is. We gaan er gemakshalve vanuit dat de

getalswaarden x positief zijn. Verder is er

geen beperking: ieder positief reëel getal x

kan in zo’n lijst voorkomen. De verzame-

ling positieve reële getallen schrijven we

als $\mathbb{R}^+$. Op het *continuüm* $\mathbb{R}^+$ kunnen we

kansen natuurlijk niet definiëren als het

aantal gunstige mogelijkheden gedeeld door

het totaal aantal mogelijkheden. In plaats

daarvan hebben we een *kansmaat* op $\mathbb{R}^+$

nodig. Zo’n kansmaat p kent aan (vrijwel)

iedere deelverzameling U van $\mathbb{R}^+$ een getal

(kans) $p(U)$ toe. Natuurlijk moet gelden dat

$p(U) \geq 0$ en $p(U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \dots) =$

$p(U_1) + p(U_2) + p(U_3) + \dots$

als $U_1, U_2, U_3, \dots$ paarsgewijs disjunct zijn.

Deze eigenschappen gelden voor wille-

keurige maten. Voor kansmaten eist men

bovendien $p(\mathbb{R}^+) = 1$.

Een maat μ op $\mathbb{R}^+$ laat zich door

$p(U) := \mu(U)/\mu(\mathbb{R}^+)$ normeren op een

kansmaat p mits $\mu(\mathbb{R}^+) < \infty$. (Bij algemene

maten μ is in het algemeen de waarde

$\mu(U) = \infty$ toegestaan.)

Een schoolvoorbeeld van een kansmaat op

$\mathbb{R}$ is de standaard-normaalverdeling

$p([a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

Als we met het begrip ‘kansmaat’ in ons achterhoofd terugkeren naar het begin van deze paragraaf, zien we dat we op zoek moeten gaan naar een kansmaat op $\mathbb{R}^+$ die invariant is onder de transformaties $T_c : x \mapsto cx$. Er moet dus gelden:
 $\mu([a, b]) = \mu([ca, cb])$
 voor alle $c > 0$ en $a > b > 0$.

De simpelste maat die aan het interval $[a, b]$ de grootte $b - a$ toekent, is helaas *niet* invariant onder vermenigvuldiging met $c \neq 1$: de intervallen $[a, b]$ en $[ca, cb]$ zijn met deze maat niet even groot. In plaats daarvan introduceren we de volgende maat:

$$\mu([a, b]) := \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$$

Hiervoor geldt wél $\mu([a, b]) = \mu([ca, cb])$, want $\ln(cb/ca) = \ln(b/a)$. Deze invariantie volgt natuurlijk ook (en eleganter) uit de invariantie van de corresponderende *dichtheid*: $d(cx)/(cx) = dx/x$. In de volgende paragraaf komen we uitvoerig terug op de invariante maat $\mu([a, b]) = \ln(b/a)$, die we hier zo maar uit de lucht lieten vallen. Voor het zover is, maken we eerst het bewijs af. À la Laplace zouden we

$$p(d) = \frac{\mu(\mathbb{R}_d)}{\mu(\mathbb{R}^+)}$$

willen definiëren, waarbij $\mathbb{R}_d$ de deelverzameling van $\mathbb{R}^+$ is van getallen met begincijfer d . (Overigens is voor sommige getallen het begincijfer niet eenduidig gedefinieerd. Bijvoorbeeld heeft 0,7 zowel begincijfer 6 als 7, want $0,7 = 0,6\overline{9}$. Dit is geen echt probleem, want de deelverzameling van dergelijke punten heeft als aftelbare verzameling maat 0 en beïnvloedt de waarde van $p(d)$ dus niet.) Bovenstaande definitie werkt echter niet, want

$$\mu(\mathbb{R}^+) = \int_0^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$$

We kunnen dit enigszins ad hoc als volgt oplossen: we beperken ons tot de getallen x in het interval $[1, 10]$. In dit interval is de relatieve frequentie van de getallen met begincijfer d , gemeten met de invariante dichtheid $(1/x)dx$, gelijk aan

$$p(d) = \frac{\int_d^{d+1} \frac{1}{x} dx}{\int_1^{10} \frac{1}{x} dx} = \frac{\ln(d+1) - \ln(d)}{\ln(10)} = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

Merk op dat we hetzelfde resultaat zouden krijgen als we de getallen x hadden beperkt tot een ander interval $[10^k, 10^{k+1}]$

van opeenvolgende machten van 10. We hadden zelfs een interval $[a, 10a]$ met een willekeurige $a > 0$ kunnen nemen.

4. De invariante maat

Zoals beloofd komen we nu terug op de invariante maat $\mu([a, b]) = \int_a^b dx/x = \ln \frac{b}{a}$. Natuurlijk was het *verifiëren* van de invariantie een triviale opgave, maar hoe leid je deze oplossing af? En is deze oplossing de enige?

De probleemoplosser kan deze vragen als volgt te lijf gaan.

Definieer $F(x) := \mu([1, x])$.

Dan geldt

$$\mu([1, ab]) = \mu([1, a]) + \mu([a, ab]) = \mu([1, a]) + \mu([1, b]),$$

$$\text{dus } F(ab) = F(a) + F(b)$$

Hieruit volgt $F(10^r) = r \cdot F(10)$ voor gehele r en vervolgens ook voor rationale r .

We veronderstellen bovendien dat F continu is, dus we vinden tenslotte dat $F(10^r) = r \cdot F(10)$ voor alle reële exponenten r . Anders gezegd,

$$F(x) = F(10) \cdot \log(x) = \text{constante} \cdot \ln(x)$$

$$\text{en dus } \mu([a, b]) = F(b) - F(a) = \text{constante} \cdot \ln(b/a).$$

Op een constante factor na, die de Benford-kansen $p(d) = \log(1 + 1/d)$ natuurlijk niet beïnvloedt, was $\mu([a, b]) = \ln(b/a)$ dus de enige invariante maat.

Structofielen herkennen in dx/x graag de zogenoemde *Haar-maat* op de multiplicatieve groep $\mathbb{R}^+$ der positieve reële getallen, genoemd naar de Hongaarse wiskundige Alfred Haar (1885–1933). Deze is uniek op een multiplicatieve constante na. Op groepsniveau kunnen we de restrictie tot een interval $[a, 10a]$, die we nodig hadden om de totale maat eindig te krijgen, mooi formaliseren als de overgang naar de quotiëntgroep $Q := \mathbb{R}^+ / \langle 10 \rangle$.

De elementen van deze quotiëntgroep zijn de equivalentieklassen $\bar{x} = \{10^k \cdot x \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ook op Q bestaan de begrippen ‘begincijfer’ en ‘invariante maat’. Volgens een stelling van de genoemde Haar is de laatste weer uniek op een constante factor na. Een wiskundig exacte formulering van de Wet van Benford luidt dus:

Stelling van Benford: *Zij p de unieke kansmaat op de quotiëntgroep $Q = \mathbb{R}^+ / \langle 10 \rangle$ die invariant is onder de groepsbewerking.*

Zij verder

$$Q_d = \{\bar{x} \in Q \mid \bar{x} \text{ heeft begincijfer } d\}.$$

$$\text{Dan geldt: } p(Q_d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right).$$

Niet iedereen zal mijn wiskundige smaak delen. Misschien heeft u intussen hoofdpijn gekregen van de ijle lucht op deze abstracte hoogten en verlangt u hevig naar vaste grond onder de voeten. Neemt u dan een oud tabellenboekje ter hand en bestudeer de efelsoren bij de verschillende begincijfers of, nog aardser, verifieer of uw belastingaangifte voldoet aan de Wet van Benford, want dat schijnt de belastingdienst ook te doen...

5. De Wet van Benford verklaard?

Misschien bekruipt u het gevoel dat ons bewijs de empirische Wet van Benford nog niet geheel verklaart. We *veronderstellen*

immers dat de verdeling van begincijfers invariant is onder de transformaties

$$x \mapsto cx \text{ en bewijzen daaruit dat een zekere maat } p(d) \text{ gelijk is aan } \log(1 + 1/d).$$

Laten we onze situatie vergelijken met een eenvoudiger voorbeeld: het gooien met een dobbelsteen. Met de standaardtheorie kunt u allerlei kansen uitrekenen, zoals de kans dat u bij 10 worpen hoogstens 2 maal een 6 gooit. Dit kunt u empirisch testen door vele series van 10 worpen te maken en de geschikte relatieve frequentie te berekenen. Normaal gesproken zal het experiment de theorie bevestigen en we kunnen dus omgekeerd zeggen dat de theorie het experiment ‘verklaart’. In het dobbelstenenvoorbeeld hebben we echter *ook* allerlei hypothesen gebruikt om een wiskundig model te maken en doen we vervolgens uitspraken *over dit wiskundige model*, niet over de fysische realiteit. Het succes van een vertaling naar de praktijk hangt af van de redelijkheid van de hypothesen, zoals de hypothese dat alle zijvlakken een even grote kans hebben.

Men kan zich situaties voorstellen waarin deze hypothese niet klopt, bijvoorbeeld als de dobbelsteen door een robot wordt geworpen. In het begincijferprobleem is de analoge hypothese de invariantie onder $x \mapsto cx$. Dit is een volstrekt redelijke hypothese, want *als* er een ‘universele’ verdeling van begincijfers bestaat, dan geldt deze verdeling ook na verandering van eenheid en is *dus* invariant onder vermenigvuldiging met een willekeurige constante c .

In praktijkvoorbeelden komen niet alleen de onvermijdelijke toevallige afwijkingen van de Wet van Benford voor, maar vaak ook systematische. In de lijst van afstanden naar de sterren in ons Melkwegstelsel uitgedrukt in kiloparsec (kpc) is wellicht het begincijfer 8 oververtegenwoordigd, omdat

het centrum van ons Melkwegstelsel zich op 8,5 kpc van de zon bevindt. Dergelijke systematische fouten kunnen worden weggewerkt door de lijst met verschillende constanten c te vermenigvuldigen (waardoor een ander begincijfer ‘bevoordeeld’ wordt) en de resultaten te middelen.

6. De Cirkel van Benford

De Wet van Benford wordt prachtig gevisualiseerd door de logaritmische rekenschijf (zie **figuur 1**). Zo’n schijf is in feite een opgerolde rekenliniaal. Een halve eeuw geleden, vertelde mijn vader me, werden dergelijke rekenschijven uit metaal gebruikt om het maken van allerlei berekeningen te vereenvoudigen. (Ze vertalen vermenigvuldiging in optelling, dat wil zeggen translatie van de liniaal of rotatie van de cirkel.) Met behulp van twee kopieën van **figuur 2** kunt u zelf eenvoudig een dubbele schijf van karton maken, waarbij de kleine cirkel kan draaien ten opzichte van de grote.

De samenhang tussen Benford en de rekenschijf wordt gegeven door de afbeelding $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \log(x)$

Wegens $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ correspondeert vermenigvuldigen in $\mathbb{R}^+$ onder deze bijectieve afbeelding met optellen in $\mathbb{R}$.

De Benford-maat

$$\mu([a, b]) = \ln(b/a) = \ln(b) - \ln(a)$$

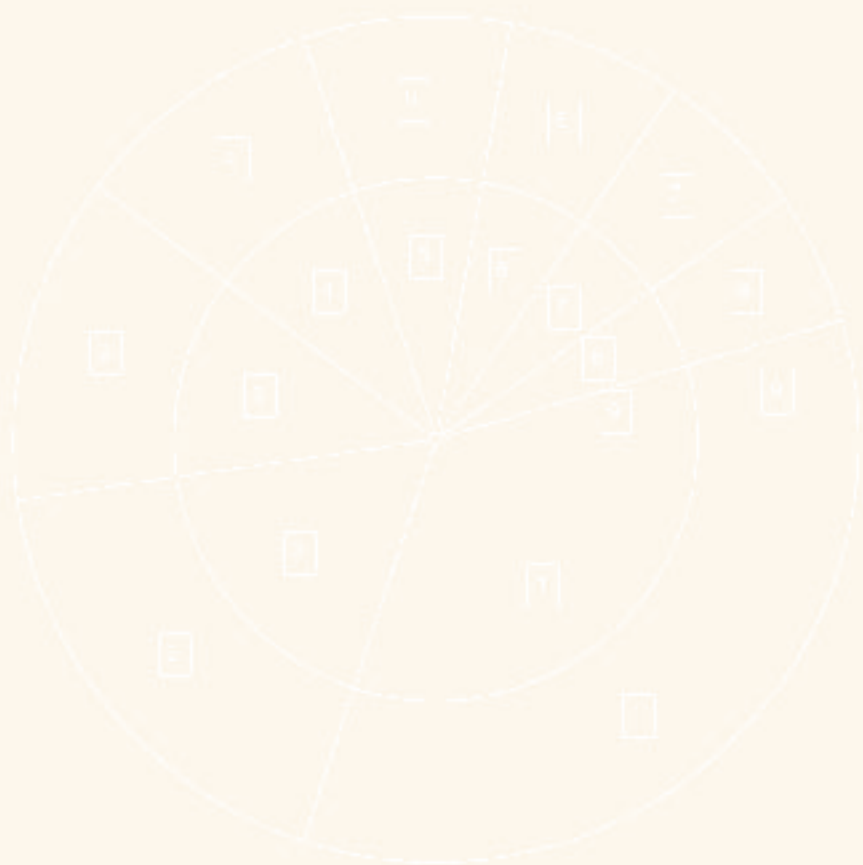
correspondeert (op een onbelangrijke factor $\ln(10)$ na) met de standaardmaat $\mu([a, b]) = b - a$ op $\mathbb{R}$. De multiplicatieve invariantie van de Benford-maat correspondeert met de invariantie van deze standaardmaat onder translaties. Tenslotte rollen we onze rekenliniaal $\mathbb{R}$ op: we identificeren $\log(x)$ met $\log(10x) = \log(x) + 1$.

Kortom, de quotiëntgroep $Q = \mathbb{R}^+ / \langle 10 \rangle$ wordt door ‘log’ isomorf afgebeeld op de ‘cirkelgroep’ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Willen we de laatste groep echt als cirkel zien, dan moeten we nog vermenigvuldigen met 360° . De ‘begincijferverzameling’ $Q_d \subset Q$ correspondeert dan met een cirkelsegment over een hoek van $\alpha_d := p(d) \cdot 360^\circ$.

Een cirkelschijf als in **figuur 2**, die in dergelijke segmenten is ingedeeld, noem ik *Cirkel van Benford*. De binnenste cirkel heeft te maken met de transformaties $T_c : x \mapsto cx$. De transformatie T_c correspondeert met de rotatie over de hoek $\varphi(c) := \log(c) \cdot 360^\circ$. Als voorbeeld ziet u in **figuur 3** de vermenigvuldiging met de factor $c = 2$. Alle ingrediënten uit de Stelling van Benford



figuur 1



figuur 2

hebben dus een eenvoudige representatie in de Cirkel van Benford: de kansmaat is (evenredig met) de intuïtieve standaardmaat en de groepsbewerking correspondeert met rotaties.

7. Opdrachten voor leerlingen

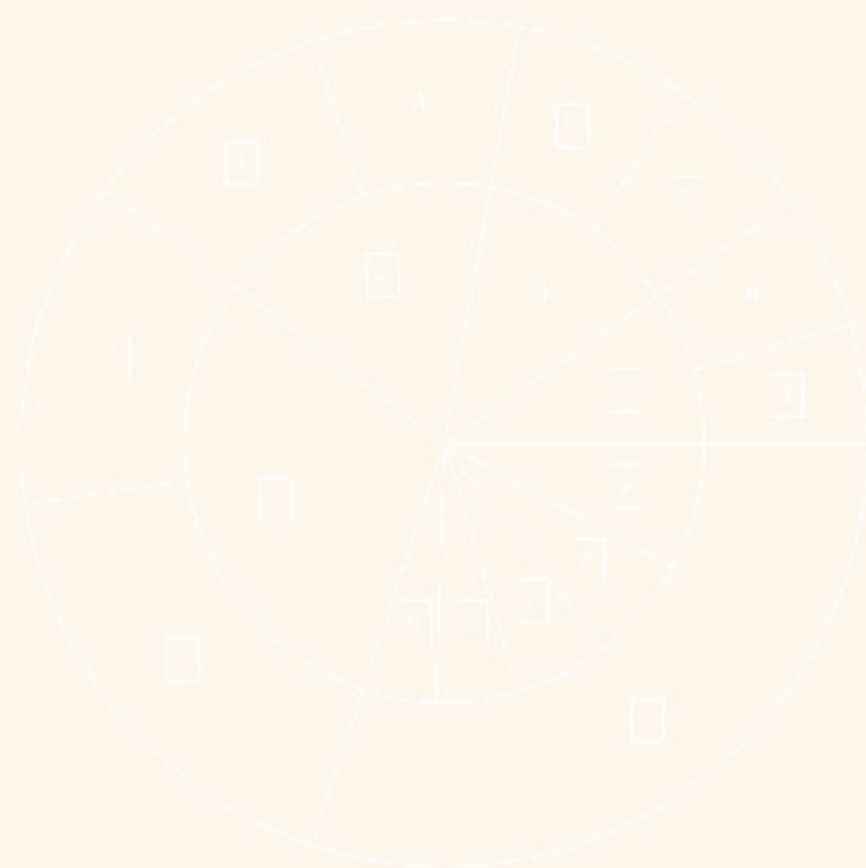
Uit het bovenstaande vallen vele opdrachten voor leerlingen te destilleren, zoals:

1. de Wet van Benford verifiëren of ontdekken aan de hand van concrete lijsten;
2. computerprogramma's schrijven die dit vergemakkelijken;
3. beschrijven onder welke voorwaarden in de praktijk de Wet van Benford van toepassing is;
4. $p(d) = \log(1 + 1/d)$ berekenen startend met de invariante dichtheid dx/x ;
5. uitleggen waarom de Benford-maat invariant moet zijn onder $x \rightarrow cx$;
6. verifiëren dat $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ invariant is onder $x \rightarrow cx$ of zelf de invariante dichtheid dx/x ontdekken;
7. bewijzen dat $p(1) + p(2) + \dots + p(9) = 1$;
8. met behulp van de rekenschijf onderzoeken welke relaties bestaan tussen de sectorgrootten van de Cirkel van Benford en de bijbehorende relaties voor de Benford-kansen bewijzen;
9. de sectorhoeken van de Cirkel van Benford bepalen;
10. onderzoeken in hoeverre je 'systematische fouten' kunt wegwerken door de lijst met verschillende constanten c te vermenigvuldigen en te middelen;
11. de Wet van Benford generaliseren naar de eerste 2 decimalen;
12. de Wet van Benford generaliseren naar andere talstelsels.

Op de site <http://wwwhome.ewi.utwente.nl/diepennm/begincijfer/> van Nico van Diepen vindt u Matlab-scripts die het bepalen van relatieve frequenties van begincijfers vergemakkelijken en een applet dat de Cirkel van Benford simuleert.

Dankwoord

De auteur bedankt J.C. Smit voor het eerste bewijs van paragraaf 4, zijn vader voor de rekenschijf van figuur 1, dr. Rogier Brussee voor het noemen van de Haar-maat, dr. Nellie Verhoef en Ernst Grootveld voor hun commentaar op vroegere versies van dit artikel en Nico van Diepen voor zijn computerbijdragen.



figuur 3

Noot (red.)

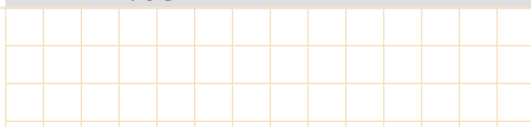
[1] Henk Pfaltzgraff: *De wet van Benford*. In: Euclides 81-6 (april 2006), pp. 301-303.

Over de auteur

Jeroen Spandaw is in 1992 gepromoveerd in de zuivere wiskunde en heeft tot 2002 onderzoek verricht in de algebraïsche meetkunde. Sindsdien is hij wis- en natuurkundedocent aan het Twents Carmelcollege te Oldenzaal.

Het onderzoek dat tot dit artikel heeft geleid, is verricht naar aanleiding van zijn werkzaamheden voor het 3xO-project van de Universiteit Twente, dat beoogt onderzoeksvaardigheden van leerlingen te verbeteren.

E-mailadres: j.g.spandaw@xs4all.nl



Ik las en dacht...

[Klaske Blom]

In oude jaargangen van vaktijdschriften over ons wiskundeonderwijs vinden we regelmatig artikelen die in het licht van huidige onderwijsontwikkelingen opeens opmerkelijk worden. Soms omdat ze, geschreven in een totaal andere tijd, een verfrissend perspectief op onze huidige situatie bieden, soms omdat ze, ondanks hun gedateerdheid, verrassend actueel blijken te zijn, omdat ze tot nadenken stemmen, omdat...

In de rubriek 'Ik las en dacht...' neemt Klaske Blom u mee naar zo'n 'oud actueel artikel'.



Kwaliteitseisen, ontmoedigend of uitdagend?

In een aflevering van het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* (NTvW) uit 1975 vond ik een evaluatieverslag van een examencommissie belast met het afnemen van de LO- en MO-examens. Het ruim 30 jaar oude verslag (uit 1975) vindt u in het kader hiernaast. Voor een goed begrip: het NTvW is een tijdschrift dat in 1913 is opgericht met als belangrijkste doel de begeleiding van studenten die in hun avonduren studeerden voor de LO- en MO-akten. Met een LO-akte verkreeg je een lesbevoegdheid voor het lager onderwijs, waaronder o.a. de mulo en de Franse scholen vielen. Met een MO-akte mocht je wiskundelessen geven op o.a. de hbs en de handelsscholen. De examencommissie publiceerde elk jaar een verslag waarin teruggeblikt werd op de examens en de behaalde resultaten. Een verslag als dit was geen zeldzaamheid. Vele examencommissies voor en na deze maakten opmerkingen in dezelfde trant. Elke keer ben ik bij het lezen van dergelijke rapporten weer enigszins ontzet, zowel

Uit: NTvW, jaargang 63, aflevering 1 (september 1975), p. 29

IV. Opmerkingen van de examencommissie

Men dient tot 1965 terug te gaan om een enigszins vergelijkbaar teleurstellend examenresultaat aan te treffen: aan slechts 23% van het aantal deelnemers aan het examen van dit jaar kon de akte worden uitgereikt tegen 26,5% in 1965.

Ondanks een zeer milde beoordeling en veel begrip voor de niet altijd optimale studiemogelijkheden zagen de beoordelaars van het schriftelijk werk zich herhaaldelijk gedwongen een werkstuk met een 1, een 2 of een 3 te waarderen.

Het is de commissie niet ontgaan dat zeer veel kandidaten in meer dan één opzicht onvoldoende voorbereid aan het examen deelnemen en deze allerm minst verblijdende waarnemingen geven de commissie voldoende aanleiding tot de volgende uiteenzetting, die, naar zij hoopt, opleiders en toekomstige kandidaten tot voordeel zal strekken.

Wie iets opschrijft en dan niet de moeite neemt het geschrevene kritisch te herlezen en waarnodig te herschrijven mag niet verwachten een wiskunde-examen met goed gevolg af te zullen leggen. Veel kandidaten geven blijk het kritisch begeleiden van hun werk niet als een wezenlijk aspect van het studeren te kennen of te erkennen. Zelfcritiek bij het oplossen van wiskundige problemen is onontbeerlijk en dient in het studieplan te worden ingebouwd.

Veel kandidaten zijn ook onvoldoende voorbereid in die zin dat zij slechts een deel van de examenstof beheersen. De commissie constateert, evenals haar voorgangster, dat met name met de studie van de wiskundige grondbegrippen vaak te laat wordt begonnen. Zij adviseert haar opvolgster bij de samenstelling van het schriftelijk werk opnieuw aandacht te schenken aan dit onderdeel van het examenprogramma.

Bij een zo grote verscheidenheid van ontsporingen en tekortkomingen is het moeilijk een beknopte samenvatting te geven van de meest voorkomende fouten. De commissie volstaat daarom met een weergave van enkele fragmenten uit de verslagen van de beoordelaars van het schriftelijk werk.

- 'Vrij veel kandidaten schieten te kort waar het gaat om kennis van en inzicht in eenvoudige stereometrische problemen; dat de raaklijnstukken uit één punt aan een bol getrokken even lang zijn weten maar weinigen.'
- 'Bij de 139 door ons beoordeelde oplossingen van het eerste vraagstuk van Meetkunde I hebben 118 kandidaten de moeite genomen een kubus te tekenen, slechts 31 deden dat correct...'
- 'Bij opgave 3a van Meetkunde I gaat men vaak van een verkeerde matrix uit en vele kandidaten geven blijk niet met matrices te kunnen werken.'
- 'Veel kandidaten hebben geen notie van begrippen als continuïteit en differentieerbaarheid; met linker- en rechterafgeleide zijn velen geheel onbekend.'
- 'Een vraagstuk over volledige inductie brengt vele kandidaten in grote verwarring; berekeningen die kant noch wal raken zijn daarvan het gevolg.'
- 'Veel kandidaten vervormen vectormeetkunde tot een onsamenhangende brij van ortho-normale onzin en inwendige wanprodukten...'

Bij de mondelinge examens voor het onderdeel Didactiek en Methodiek valt het op, dat veel kandidaten zich uitsluitend richten naar ontwikkelingen van het rekenonderwijs op de basisschool. Zij zien over het hoofd dat deze ontwikkelingen slechts zijdelings verband houden met de didactische problemen rond het aanvankelijk wiskundeonderricht op scholen voor voortgezet onderwijs. De commissie heeft met vreugde het goede resultaat van de herexamens vastgesteld.

Welvaart vergroten kan door kwaliteit leraren te verhogen

Van onze verslaggever
Gerard Reijn
AMSTERDAM

Een van de beste manieren om via het onderwijs de welvaart te vergroten, is het verhogen van de kwaliteit van leraren. Dat schrijft het Centraal Planbureau in een studie *Kansrijk kennisbeleid. Verkleinen van klassen kost juist meer dan het opbrengt, en heeft dus geen gunstig effect op de welvaart.*

Ook werkt uitbreiden van het aantal computers en iet niet, net zo min als het bevorderen van de instroom van bètastudenten, of het toelaten van commerciële bedrijven op de markt voor hoger onderwijs.

Volgens het CPB is afdoende bewezen dat de kwaliteit van leraren grote invloed heeft op de prestaties van leerlingen. Leraren worden beter door betere scholing en als ze financiële prikkels krijgen, bijvoorbeeld door invoering van een vorm van prestatiebeloning. Uit ervaringen in onder meer de Amerikaanse staat Texas, blijkt dat dit werkt en dat de kosten makkelijk worden terugverdiend.

Meer aandacht geven aan risicoleerlingen, en wel op een zo vroeg mogelijk tijdstip, liefst nog vóór ze naar school gaan, is een andere maatregel die een positief effect zou hebben op de welvaart. Deze aanpak vermindert de kans op latere criminele activiteiten, en vergroot hun kansen op de arbeids-

markt. Ook is veel winst te behalen met het verlagen van vroegtijdige schooluitval. In landen als Engeland en Israël zijn goede ervaringen opgedaan met financiële prikkels aan leerlingen, leraren en scholen, maar het helpt ook om betreffende leerlingen langdurig en intensief coachen.

Invoering van een sociaal leenstelsel voor het hoger onderwijs, (studiefinanciering met inkomensafhankelijke terugbetaling) is een andere mogelijkheid. Hierdoor worden studenten niet afgeschrikt, maar gaan particulieren wel meer meebetalen aan onderwijs.

Het CPB onderzocht welke maatregelen in binnen- en buitenland positief effect hebben op de welvaart. Daarbij is alleen gekeken naar maatregelen die in de discussie in Nederland een rol spelen. Sommige van die ideeën blijken ronduit contraproductief te zijn. Zo zou het afschaffen van centrale toetsen alleen maar schade aanrichten, en datzelfde geldt voor het afschaffen van de vrije schoolkeuze.

Ook heeft het CPB in het kennisbeleid onderzocht wat de 'kansrijke beleidsopties' zijn. Vooral fiscale maatregelen voor onderzoek en ontwikkeling in bedrijven zou welvaart vergroten. Verder betitelt het CPB als 'kansrijk': het bevorderen van een fonds voor risicokapitaal; het toelaten van hoog opgeleide buitenlanders; en het prestatieafhankelijker maken van de financiering van onderzoek aan universiteiten.

door de inhoud als door de toon waarop ze geschreven zijn: een meedogenloze opsomming van het grote scala aan gemaakte fouten, de veronderstelling dat het de meeste kandidaten aan zelfkritiek ontbreekt en de teleurstelling over de didactische vaardigheden van de kandidaten. De commissie wijst met een 'beschuldigende' vinger naar de examenkandidaten; op enig reflecterend vermogen met betrekking tot haar eigen aandeel kun je haar echter niet betrappen, althans niet in dit stuk. Je zou bijvoorbeeld enige reflectie verwachten op de helderheid van de examencriteria, op de aanpak van de examens of op de aansluiting van de wijze van examineren bij de praktijk van studie en oefening.

Opmerkelijk is dat aan het eind van het verslag staat dat er bij de herexamens wel goede resultaten zijn vastgesteld. Dit zou kunnen betekenen dat veel kandidaten hun eerste keer 'gewoon een keertje proberen, om te ervaren hoe een examen in zijn werk gaat'. Veel van de kandidaten studeerden onder niet eenvoudige omstandigheden; ze ploeterden in de avonduren om hun begeerde onderwijsbevoegdheid te krijgen, terwijl ze overdag werkten om de kost te verdienen. Je mag dus veronderstellen dat de kandidaten intrinsiek zeer gemotiveerd waren; waarom presteerden ze dan zo slecht?

De examencommissie wijst op het gebrek aan kennis en aan zelfkritiek. Motivatie is immers wel een noodzakelijke, maar geen voldoende voorwaarde om aan exameneisen te voldoen. Dat is nogal wat: gebrek aan vakkennis en gebrek aan zelfkritiek, en dat voor examenkandidaten die binnen niet al te lange tijd collega's zijn, als ze slagen tenminste. Wat voor collega's zijn zij geworden? Zijn het uiteindelijk goede leraren geworden? Wat hebben ze betekend voor hun leerlingen?

Dit zet me toch wel aan het denken. Hoe is de situatie nu eigenlijk? Hoe zit het met onze kwaliteit? Hoe is het gesteld met de huidige beroepsgroep van wiskundecenten? Is onze vakkennis op niveau, hoe zit het met onze didactische vaardigheden en ons vermogen tot zelfkritiek? Durven we elkaar hierop te bevragen? Ik ben er soms bezorgd over, en vind dat het beter kan. Niet dat we het niet proberen: in de laatste nummers van *Euclides* lezen we

bijdragen over het *abc*-vermoeden in de klas, over de 'leraar in onderzoek', over de ervaringen die met samenwerkend leren opgedaan worden. Voorbeelden die aantonen dat er gewerkt wordt aan het verhogen van onze kwaliteit, zowel op vakinhoudelijk als op didactisch gebied. In nummer 81-8 van *Euclides* (juni 2006) heeft u kunnen lezen dat door de SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren) zeven competenties beschreven zijn waarmee de professionele bekwaamheid van de leraar en zijn vakinhoudelijke kennis expliciet onder woorden is gebracht. Deze beschrijving heeft geleid tot het Besluit Bekwaamheidseisen Onderwijspersoneel dat op 1 augustus 2006 in werking is gegaan. Een poging bij uitstek om de kwaliteitscriteria helder te formuleren.

Maar leiden al deze inspanningen werkelijk tot het verhogen van onze kwaliteit? Doen we de goede dingen en bereiken we wat we willen? Ik ben er toch eigenlijk niet tevreden mee dat niet al mijn leerlingen een bepaald basisoniveau binnen hun eigen vak bereiken, of dat nou wiskunde A1 of wiskunde B12 is. Wat te denken van die leerlingen die hun toetsen wel halen, en ook hun examen, maar in essentie eigenlijk niet lijken te snappen wat ze doen?

Neem ik daar genoeg mee? Heb ik iets nagelaten in mijn lessen? Welke kwaliteit hebben we zelf als beroepsgroep in huis? Is het voldoende? Is het goed genoeg? Bieden we leerlingen voldoende kwaliteit als ze les krijgen van docenten die zelf moeite hebben met de stof? Durven we elkaar deze vragen te stellen? Ik durf ze al nauwelijks op te schrijven, laat staan de discussie live aan te zwengelen. En zouden we dat juist niet wél moeten doen?

Want... heeft u ook gelezen in *de Volkskrant* van 12 juli 2006 dat het Centraal Planbureau een rapport heeft geschreven, *Kansrijk kennisbeleid*, waarin het beargumenteert dat het verhogen van de kwaliteit van leraren één van de beste manieren is om de welvaart te vergroten? Kwaliteit van leraren heeft grote invloed op de prestaties van leerlingen, zo wordt geschreven, en het CPB acht bewezen dat leraren beter worden door betere scholing en door financiële prikkels. De kop in de krant luidde: 'Welvaart vergroten kan door kwaliteit leraren te vergroten.'

Mijn eerste reactie op dit krantenartikel was verdedigend en in verzet: De welvaart van Nederland ook nog op ons bordje, alsof het met de overblijfklokken, detectiepoortjes en het ontbijten op school al niet genoeg is! En daarnaast, is mijn kwaliteit soms niet hoog genoeg? Doe ik soms niet mijn uiterste best? Ik heb de neiging om allerlei verzachtende omstandigheden aan te voeren als verdediging voor een eventueel tegenvallende kwaliteit: onze werkdruk is groot, de eeuwig durende veranderingen slorpen de aandacht weg van onze core-business, door het toenevend aantal 'zorgleerlingen' kan ik me steeds minder concentreren op de inhoud van mijn vak. En zo kan ik nog wel wat verzinnen.

Maar, hier liggen ook kansen. Ik wil best mijn kwaliteit vergroten. Graag zelfs. En als we dat als docenten allemaal doen, verhogen we daarmee ook nog eens de welvaart in Nederland. Als we dat op ons conto mogen schrijven zal het eindelijk gedaan zijn met het gevaar van een lerarentekort. Wie wil nou niet meewerken aan deze prachtige nationale taak? En waarschijnlijk zullen onze salarissen een groeispurt maken, want daar is dan eindelijk geld voor met die verhoogde welvaart!

Kortom, laten we de onomwondenheid van de examencommissie tot inspiratiebron nemen: elkaar klip en klaar de waarheid vertellen omdat het helpt de problemen in kaart te brengen, waarmee vervolgens het traject open ligt om tot verbeteringen te komen. En ik neem me voor om me niet meer van de wijs te laten brengen door de toon waarop iets gezegd wordt - het gaat per slot van rekening om de boodschap. In het geval van het examenverslag van de commissie uit 1975: neem niet met minder genoeg dan met hoge kwaliteit. En wat het Centraal Planbureau betreft: hartelijk dank voor deze ondersteuning in het elkaar stimuleren tot kwalitatief hoogstaande prestaties. Wat wij vervolgens moeten doen is het elkaar durven bevragen en durven 'meten'. Durven we dat?

Over de auteur

Klaske Blom is redacteur van *Euclides* en wiskundedocent in Amersfoort aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt. Haar wiskundestudie rondde ze in 1998 af met een doctoraalscriptie over de middelbaaronderwijsakten K1 en K5. E-mailadres: kablom@tiscali.nl

$$x \rightarrow 5x^2$$

figuur 1 Pijlnotatie (blz. 13)

Wat algebra is, dat kun je niet weten

Inleiding

Zeer verschillende aspecten van algebraonderwijs in Nederland vormen de inhoud van het boek 'Wat a is, dat kun je niet weten'. Het spectrum reikt van vmbo tot vwo, van maatschappij- tot natuurprofielen en van basisschool tot de bovenbouw van het voortgezet onderwijs, met of zonder de inzet van ICT. Het boek bestaat uit negen hoofdstukken met een nawoord, elk geschreven door één, twee of drie van de acht auteurs: Dekker, Dolk, Drijvers, Goddijn, Kindt, Van der Kooij, Van Reeuwijk, Wijers, allemaal al vele jaren werkzaam op het Freudenthal Instituut (FI). Het boek is een samenstelling van de vruchten die op het FI in de loop van de laatste decennia zijn ontkiemd en gegroeid. Het betreft voornamelijk een aantal aansprekende concrete voorbeelden – van stippenpatronen tot algebra-pijlen – waarmee wiskundige vaardigheden en inzichten uitgelegd en begrepen kunnen worden door de creatie van patronen, representaties en contexten. Wiskundige begrippen en vaardigheden worden zo voor leerlingen van verschillende pluimage van betekenis voorzien en worden in relatie met andere al dan niet wiskundige contexten gezet (in de zin van Freudenthals didactische fenomenologie; zie [2]). Wiskundig-didactische, toepassingsgerichte en historische aspecten spelen hierbij een rol en worden ook in het boek besproken.

Schoolwiskunde

Het is erg jammer dat bij dit overzicht van mogelijkheden om algebra uit te leggen, te begrijpen en in de vingers te krijgen, het uiteindelijk kunstmatige en provisorische perspectief van een 'schoolwiskunde' de boventoon voert. Deze 'schoolwiskunde' onderscheidt zich bewust van de cultuurhistorisch gegroeide wiskunde en bezit hierdoor weinig relevantie voor het leven buiten school. De auteurs van de inleiding, Drijvers, Goddijn en Kindt, citeren bijvoorbeeld in hun zoektocht naar wat algebra is of zou kunnen zijn, de natuur- en sterrenkundige Eric Weisstein van het softwarebedrijf Wolfram Research: 'One use of the word "algebra" is the abstract study of number systems and operations within them, including such advanced topics as groups, rings, invariant theory, and cohomology. This is the meaning mathematicians associate with the word "algebra". (...)'. En nadat er zulke moeilijke woorden zijn gebruikt, stellen de auteurs de lezer onmiddellijk weer gerust: 'Algebra is dus tot wel wat meer uitgegroeid: het onderzoeken van getalsystemen en hun operaties, waar heel geavanceerde vormen van bestaan. Ergens tussen het jaar 850 en 2000 is de schoolalgebra echter een eigen weg gegaan, want van de algebra volgens de moderne definitie vinden we in het voortgezet onderwijs niet veel meer terug.' Zij vergeten er echter bij te zeggen dat deze bewuste scheiding tussen twee soorten algebra wel heel erg dicht bij het jaar 2000 en onder sterke invloed van een bepaald instituut in Utrecht tot stand is gekomen. Het is juist een kenmerk van moderne onderwijssystemen dat veranderingen in de (wetenschappelijke) cultuur hun neerslag in het onderwijs horen te vinden. Uiteraard gebeurde dat in het verleden niet altijd snel, maar wel was het uiteindelijk de bedoeling. Het Freudenthal Instituut dat sinds enkele decennia voor ministerie, hogescholen en universiteiten dé centrale plaats in de Nederlandse wiskundendidactiek inneemt, geeft dit streven blijkbaar op. 'Kunnen wij voor de afbakening van de schoolalgebra iets leren van de professionals met hun structuren? Op dit moment niet echt veel', gaan de drie auteurs verder en constateren dat na de ervaringen met New Math de tijd van een inbreng vanuit de academische wiskundige gemeenschap, zonder dat er vanuit het onderwijs echt behoefte aan is, nu definitief voorbij zou zijn.



Paul Drijvers (red.)

Wat a is, dat kun je niet weten / een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2006

ISBN 90-70786-00-1

200 pagina's, prijs € 15,00

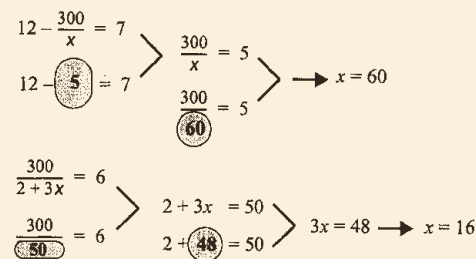
Daarbij blijkt bijvoorbeeld uit het feit dat op blz. 13 de pijlnotatie (zie **figuur 1**) voor afbeeldingen aan de New Math beweging wordt toegeschreven terwijl deze notatie door wiskundigen al veel vroeger werd gebruikt, dat er niet wordt beseft dat ook 'New Math' een stroming van het onderwijs was die een kunstmatige schoolwiskunde creëerde met weinig werkelijke relevantie zoals juist vele vertegenwoordigers van de moderne structuurwiskunde toen al met grote zorg constateerden; zie bijvoorbeeld in [1, pp. 189-193] het door 65 vooraanstaande Noordamerikaanse wiskundigen ondertekende memorandum. En het was juist Freudenthal die New Math als stroming van het onderwijs met weinig relevantie voor de echte wiskunde ontmaskerde (zie [4]): 'Es ist das alte Lied der zwei Mathematiken; neben der seriösen eine Schulmathematik, ein Storchennmärchen. Nur kann dieses Storchennmärchen die richtige Mathematik unmöglich machen.' Enfin, de door Freudenthal hevig bekritiseerde historisch onjuiste identificatie van de moderne structuurwiskunde met de onderwijsbeweging 'New Math' wordt door zijn volgelingen kritiekloos voortgezet, met de eveneens door Freudenthal geschetste twijfelachtige gevolgen voor het leren van een werkelijke wiskunde die haar relevantie aan meer dan alleen de praktijk in het voortgezet onderwijs ontleent.

Tien geboden

Wat 'schoolalgebra' tegenwoordig is, maken de auteurs van de inleiding dan dus ook zelf uit via zoiets als tien geboden voor de algebra op school: 1. *Er wordt impliciet of expliciet gegeneraliseerd.* 2. *Patronen van getalsverbanden en/of formules worden onderzocht.* enzovoorts. Zoals het een goede catechismus betaamt wordt nu gekeken naar wat aan deze tien geboden wel of niet voldoet:

- Het uitrekenen van $123 + 567$: geen algebra.
- Het uitrekenen van 101×99 , uitgaande van 100×100 : algebra.
- Weten dat $-1 \times -1 = +1$: geen algebra. Min keer min is plus: wel algebra.

En zo volgen er nog acht andere gevallen van wel of niet algebra die het verlenen van bestaansrecht aan de 'schoolalgebra' ondersteunen. De praktijk van deze schoolalgebra die we op scholen zien, werkt met begrippen als 'productfunctie' (zie **figuur 2** en bijvoorbeeld 'Moderne wiskunde') waarbij van een functie niet kan worden uitgemaakt of het om een 'productfunctie' gaat of niet. Door het gebrek aan goede definities zijn de argumenten van deze schoolalgebra niet noodzakelijk dezelfde als in de wiskunde zelf. Didactisch behulpzame en zinvolle voorstellingen als de zogenaamde 'bordjesmethode' (zie **figuur 3**), 'pijlenkettingen' (zie **figuur 4**) of 'getallenstroken' (zie **figuur 5**) worden niet meer teruggevoerd op wiskundige concepten, maar worden – net als de Venn-diagrammen in de jaren 70 – leerdoelen op zich. Waarom, vraagt de recensent zich af, wijken deze verdienstelijke auteurs zo sterk af van de standpunten van Hans Freudenthal naar wie hun instituut is genoemd? In zijn artikel 'What is algebra and what has it been in history', zie [3, pp. 189–200], dat trouwens nergens in het boek wordt geciteerd, behandelt Freudenthal dezelfde problematiek – maar juist zonder de algebra op school van de rest van de wiskundige cultuur te isoleren: 'What is algebra? There is no Supreme Court to decide such questions. Nevertheless, "algebra" has a meaning in everyday language just as "chair" and "table" have. For instance, at school algebra is solving linear and quadratic equations. It is the kind of algebra the Babylonians started with. Was their algebra not algebra, because their symbolism was not smooth enough? Are "length" and "width" much worse than "x" and "y" if you can give clear recipes for solving quadratic equations in such terms? Is it not algebra if the sum of the first 10 squares is laid down in a numerical formula that allows one to extend the result to any n ? This ability to describe relations and solving procedures, and the techniques involved in a general way, is in my view of algebra such an important feature



figuur 3 Bordjesmethode (blz. 116)

Gegeven de functies A en B met $A(x) = x - 1$ en $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

- a Bereken de afgeleide van de productfunctie $A \cdot B$ met behulp van de productregel.
- b Je kunt de afgeleide van $A \cdot B$ ook op een handiger manier berekenen. Hoe?
- c Ga na of de antwoorden bij de onderdelen a en b op hetzelfde neerkomen.

figuur 2 Twee manieren van differentiëren (blz. 73, figuur 4)

a. Controleer onderstaande ketting:



b. Voer net zo'n berekening uit met achtereenvolgens: $x + 4$, $y + 10$, $z + 11$, $p + 1$

c. Bedenk zelf nog een paar andere voorbeelden.

d. Kun je een algemene regel geven?

figuur 4 Pijlenkettingen (blz. 131)

of algebraic thinking that I am willing to extend the name "algebra" to it, as long as no other name is proposed, and as far as I know no other name has been put forward. But what is in a name?

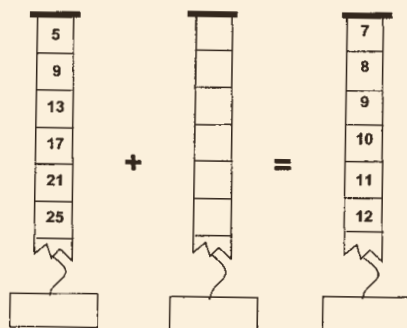
Algebra op basisschool en vmbo

En toch is het na deze inleiding nog de moeite om verder te lezen. Het volgende hoofdstuk, van Truus Dekker en Maarten Dolk, schetst bijvoorbeeld op een bescheiden en heldere manier hoe leerlingen op de basisschool wel degelijk met algebraïsch denken en handelen in contact kunnen worden gebracht. Vele van de FI-klassiekers als V-patronen (zie *figuur 6*), rekenen met stroken (ook in hoofdstukken 4 en 7) passeren hier de revue.

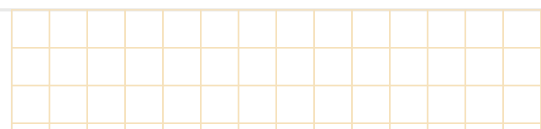
Vervolgens worden in hoofdstuk 3 door Drijvers, Dekker en Wijers de mogelijkheden besproken om algebra in het vmbo te onderwijzen, waarbij een leerling constateert: 'Wat a is, dat kun je niet weten.' Er zijn aardige en leerzame situaties beschreven waarin leerlingen contact met algebra maken. Helaas wordt er weinig vanuit een theoretisch perspectief naar gekeken. Hier zou men kunnen denken aan de door Freudenthal al beschreven aspecten wiskundige taalniveaus, perspectiefwisseling of het verschil tussen *comprehension* (samenvoegen) en *apprehension* (oppakken) dat juist bij het begrijpen van 'wat a is' een grote rol kan spelen: 'I used the words *comprehension* and *apprehension* to distinguish two ways of acquiring generalities. I took the liberty of moulding these terms *comprehension* and *apprehension* more sharply than I found them, and I did so not without a bit of etymology in the background. *Comprehension*, the "taking together", *apprehension*, "the taking on". Generalities by *gathering* many details, versus *seizing* a structure, albeit by an example, by one example.'; (zie [5, p. 197]). En dit is juist voor het leren van algebra van cruciaal (zie [5, p. 221]): 'The usual method of traditional arithmetic and algebra instruction is to introduce the operations and corroborate the laws governing them by examples; as opposed to this the geometric and the algebraic method, if truly understood, aim straightforwardly at generality. As I have stressed, examples are not a bad thing, if only they are really exemplary, that is paradigmatic.' In plaats van te laten zien hoe een vmbo-leerling wellicht toch een algemenere notie kan krijgen van 'wat a is' of hoe tot een ander wiskundig inzicht te komen, geven de auteurs de voorkeur aan 'wiskundige geletterdheid' of 'mathematical literacy', een naar aanleiding van de PISA-toets door de OECD opgeklopt begrip (niet zonder invloed van het FI) dat een beetje alles en niets betekent: '...het vermogen om wiskunde te herkennen, te begrijpen en te gebruiken.' Het komt er zowel voor de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg, vmbo-bb en -kb, als ook voor de gemengde en theoretische leerweg, vmbo-gl en vmbo-tl, op neer dat het wiskundeonderwijs zich op drie doelen richt: het leven van alledag, ondersteuning van praktijkvakken en voorbereiding op vervolgopleiding. Wiskunde als zelfstandig vak en zijn cultuurhistorische rol in dienst van het in de verlichting gegroeide ideaal om alle jonge mensen een mondige kijk op onze cultuur te geven, worden hier niet meer mee bedoeld.

Algebra voor bèta's

Het hoofdstuk over algebra in natuur en techniek van Henk van der Kooij en Aad Goddijn schetst problemen en oplossingen bij het gebruik van wiskunde in andere exacte vakken. Vooral de suggestie om de relatie tussen getallen en meetgegevens te verhelderen en door een foutenanalyse productief te maken geeft een vruchtbaar aanknopingspunt tussen deze vakken dat in het huidige onderwijs ontbreekt.



figuur 5 Rekenen met stroken (blz. 33)



Terug naar het oefenen

In een tijd waar menigeeen terugverlangt naar ‘reproductief oefenen’ nemen Paul Drijvers en Martin Kindt in de hoofdstukken 4, 5 en 7 het nadrukkelijk op voor het ‘productief oefenen’ van algebraïsche vaardigheden waar betekenis, perspectiefwisseling, variatie, zinvolheid en eigen productie een centrale plaats innemen en waar de kansen worden benut die zich in het gewone programma voordoen (zie **figuur 7**). Kindt geeft in hoofdstuk 7 blijk van zijn rijkdom aan intelligente en aansprekende (maar ook veelal bekende) voorbeelden en hij pleit voor de herbezinning op inzichtelijke technieken zoals kwadraatafsplitsen. Helaas wordt er bij beiden te weinig toegewerkt naar meer abstracte wiskundige inzichten, methodes en technieken zoals volledige inductie bij stippenpatronen of een abstract functiebegrip dat pijlenkettingen, substituties c.q. de bordjesmethode wezenlijk overstijgt. Evenzo wordt er uiterst spaarzaam omgegaan met de hedendaagse wiskundige taal en logica zoals eenvoudige verzamelingen- en functienotatie of elementaire propositielogica zoals die bij het doordachte gebruik van tekens als $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ tot uiting zou komen.

Algebra en ICT

In hoofdstuk 8 over algebra en ICT wordt er door de auteurs Drijvers en Van Reeuwijk een overzicht gegeven van de verschillende rollen die ICT bij het wiskundeonderwijs kan spelen. Zij maken hier verschil tussen ‘algebraïsche vaardigheden met ICT-gebruik’ en ‘algebraïsche vaardigheden met pen en papier’. Dit onderscheid heeft geen wiskundige betekenis. ICT-algebra bestaat net zo min als schoolalgebra. Door zich te concentreren op deze uiterlijke gezichtspunten missen de auteurs de kans om uit te gaan van wiskundige begrippen, inzichten en technieken die begrepen en geleerd moeten worden en die vooral los staan van hun weergave door ICT of pen en papier. Beide benaderingen kunnen op hun manier bijdragen aan het begrijpen van wiskunde, maar brengen ieder een eigen vorm van *wiskundig besef* van deze wiskundige inhoud voort. De opgave uit ‘Moderne wiskunde’ (zie **figuur 8**) maakt dit duidelijk, waarin de leerlingen bij ‘een grafiek van het type $y = \sin(x - c)$ ’ moeten onderzoeken ‘welke invloed de parameter c heeft op een sinusoïde’. Afgezien van het slordige wiskundig taalgebruik in de opgave zullen de leerlingen opmerken dat bij positieve c de grafiek op hun rekenmachine naar rechts gaat en bij negatieve naar links. Voor bepaalde waarden van c zien zij op het scherm geen verschil meer met de grafieken van $y = \cos(x)$ en $y = -\sin(x)$ van waaruit zij gevraagd worden het samenvallen van de betreffende grafieken te constateren. De ICT-omgeving, of ‘handheld’ of op PC, levert hier geen enkele bijdrage om te begrijpen *waarom* dat zo is. Trouwens, pen en papier doen dat evenmin. Om het te begrijpen zit er niets anders op dan erover na te denken. Helaas wordt een dergelijke voorbeeldopgave onkritisch geciteerd.

In dezelfde valkuilen trappen de auteurs ook bij het ‘vermenigvuldigen van lijnen’ en de schuifbalk-applets. Andere voorbeelden in dit hoofdstuk van didactische hulpmiddelen, zoals de ‘algebrapijlen’, ‘stroken met etiketten’ of de ‘verwarrende grafieken’ op het scherm van de GR, roepen echter veel interessanter vragen op die tot meer inzicht leidende denkprocessen kunnen stimuleren.

Geschiedenis

Aan de hand van een aantal bekende voorbeelden uit het papyrus Rhind, de Babylonische kleitabletten, de teksten van Diophantus via bijvoorbeeld beschouwingen over Newtons Euclidisch meetkundig bewijs dat de ellipsbaan van planeten een gevolg is van de universele zwaartekrachtswet en andere bronnen, laat Goddijn in zijn historische kijk op algebra zien, dat algebra al vanaf zijn ontstaan tot in de moderne tijd iets anders is dan letterrekenen. Hier blijkt hoe de algebraïsche taal beetje bij beetje op een genetische manier is geëvolueerd. En het blijkt eveneens (net als in [3]) dat deze historische kijk het wezen van de algebra veel bescheidener en



figuur 7 Het applet ‘Vergelijkingen oplossen met bordjes’ (blz. 61)



figuur 6 Stippen in een V-patroon (blz. 35)



In zee met wiskunde D

Wil uw school vanaf 2007 wiskunde D aanbieden? Dan is het nu tijd om met de voorbereidingen te beginnen. Dit geldt in het bijzonder als uw school kiest voor het samenwerkingsmodel met een universiteit en/of een hogeschool (zie www.ctwo.nl).

Om scholen in de gelegenheid te stellen deze samenwerking tot stand te brengen zijn er op verschillende plaatsen regionale steunpunten wiskunde D op universiteiten en hogescholen in het leven geroepen.

De regionale steunpunten wiskunde D van de Technische Universiteiten (Delft, Eindhoven, Twente) en de Radboud Universiteit (Nijmegen), de T(R)U's, verzorgen in het schooljaar 2006-2007 vijf scholingsbijeenkomsten voor wwo-docenten wiskunde die duren van 16.00 tot 19.00 uur. Zo worden deze docenten vakinhoudelijk en vakdidactisch toegerust om wiskunde D wwo vanaf september 2007 adequaat te kunnen verzorgen.

De scholing gaat in op elk van de domeinen Meetkunde, Dynamische modellen, Statistiek en kansrekening, alsook op Wiskunde in wetenschap van wiskunde D wwo. De ontwikkeling van Wiskunde in wetenschap vindt op alle vier genoemde universiteiten plaats door een regionale kerngroep van wiskundedocenten die nauw samenwerkt met een of meer wetenschappers van die universiteit aan een eigen onderwerp. Dit onderwerp zal in een van de scholingsbijeenkomsten door de desbetreffende wetenschapper(s) ingeleid worden. In de laatste bijeenkomst presenteert de kerngroep de resultaten, gebaseerd op implementatie in de lespraktijk.

In Delft spreken prof.dr. G.J. Olsder en/of prof.dr.ir. C. Roos over Optimalisatie, in Eindhoven gaat prof.dr.ir. H.C.A. van Tilborg in op Coding en crypto, in Twente staat met prof.dr.ir. E. van Groesen de Mathematische fysica centraal, en in Nijmegen ligt met prof.dr. J. Kuijpers het accent op Astrofysica.

De scholing voor de andere drie domeinen wordt op alle genoemde universiteiten verzorgd door wiskundededidactici van de TR(U)'s: Agnes Verweij, Hans Sterk, Nellie Verhoef, Rainer Kaenders en de volgende deskundigen: prof.dr. J.M. Aarts (TU Delft) voor Meetkunde, prof.dr. S.A. van Gils (Universiteit Twente) voor Dynamische modellen, prof.dr. N.P. Landsman (Radboud Universiteit) voor Statistiek en kansrekening.

De scholing in Delft begint op dinsdag 31-10-2006, in Eindhoven op woensdag 25-10-2006, in Twente op maandag 30-10-2006, en in Nijmegen op woensdag 1-11-2006.

Aanmelding geschiedt bij een van de steunpunten Wiskunde D van de TR(U)'s, of digitaal via de gemeenschappelijke website www.wiskundeDsteun.nl.

De kosten voor vijf bijeenkomsten van drie uur, inclusief een eenvoudige maaltijd, bedragen € 500,00.

- a. Je ziet een grafiek van het type $y = \sin(x - c)$.
Onderzoek welke invloed de parameter c heeft op een sinusoidale.
- b. Plot voor verschillende waarden van c de grafiek van $y = \sin(x - c)$.
Welk verschil zie je als $c < 0$ of als $c > 0$?
- c. In welk punt zit het beginpunt van een golf?
- d. Voor welke waarden van c vallen de grafieken van $y = \sin(x - c)$ en $y = \cos x$ samen?
Geef zo mogelijk een exact antwoord.
- e. Voor welke waarden van c vallen de grafieken van $y = \sin(x - c)$ en $y = -\sin x$ samen?

figuur 8 Deel van een pagina uit 'Moderne wiskunde' A1(B1) deel 1 (blz. 140)

eerlijker afbeeldt dan bijvoorbeeld de 'tien geboden' in het begin. In de geest van Freudenthals geleide heruitvinding probeert hij conclusies voor de schoolalgebra te trekken. Helaas wordt hierbij (in paragraaf 9.8) een oppervlakkige GR-berekening van de oplossingen 11 en -7 van een bepaalde kwadratische vergelijking als serieus alternatief voor een wiskundige berekening gepresenteerd, terwijl zij alleen een niet-vergelijkbare kwaliteit van wiskundig besef bij de leerling teweeg kan brengen. Dit wordt gerechtvaardigd via een algemene beschouwing over grafieken die wel of niet op grafische rekenmachines kunnen worden afgebeeld.

Algebra als folklore

In het nawoord ten slotte voorspelt Drijvers dat de algebra in de toekomst zal zijn 'ingeblikt' in apparaten, machines en software. 'Betekenisvolle algebra' op school acht hij dan nog wel nodig vanwege haar cultuurhistorische en vormende waarde, vanwege haar bijdrage aan 'mathematical literacy' en om de algebra achter de schermen te begrijpen. De nadruk moet volgens hem bij deze vaardigheden niet zozeer op het procedurele liggen; eerder zijn ze als een elementaire vorm van symbol sense te beschouwen. Hierbij probeert hij nogmaals de mythe in stand te houden dat het mogelijk zou zijn over een serieuze vorm van symbol sense te beschikken zonder elementaire algebraïsche vaardigheden te beheersen (zoals het oplossen van kwadratische vergelijkingen). Het geschetste toekomstbeeld laat weinig ruimte voor de wiskunde. Na bijvoorbeeld een aansprekende meetkundige constructie van het *folium van Descartes* geschetst te hebben, die ook nog mooi met Cabri kan worden gevisualiseerd, constateert Drijvers: 'Op een geschikte website (zoals <http://mathworld.wolfram.com/>) is wel een parametervoorstelling van de kromme te vinden, die de leerling in een computerpakket in de door Cabri gevonden vergelijking kan substitueren. Het pakket antwoordt met *true*.' Dat de leerling hierbij ook zo goed als geen wiskunde leert, had er volgens de recensent wel nadrukkelijker bij gezegd kunnen worden. Drijvers heeft het over 'vitale variabelen' en vervolgt: 'Misschien werkt de interface anno 2020 met plaatjes en een uitrolbaar touchscreen veel makkelijker dan de huidige generaties van mobiele telefoon, digitale camera, gameboy, tv en PC. Je kunt allerlei vragen inspreken over je figuur, je model, zonder dat jij zelf de "ouderwetse" algebra hoeft te kennen.' In de aanbevelingen volgen dan weer beschouwingen over 'vaardigheden met pen en papier' en 'handmatige vaardigheden' in plaats van op een wiskundige manier te beschrijven welk conceptueel begrip een leerling van een stuk wiskunde zal en kan verwerven.

Voor ieder wat

Het door acht auteurs geschreven boek is een mengelmoes van verschillende insteken en praktijken. Hierdoor is niet altijd duidelijk voor wie dit boek geschreven is. De titel is meer voor leerlingen, de toelichting over wat algebra is heeft als doelgroep mensen die er blijkbaar geen eigen beeld van hebben en de beschouwingen over de leerprocessen bij het leren van algebra zijn voor docenten en didactici van de wiskunde.

Samenvattend luidt de aanbeveling voor een mogelijke lezer om de inleiding over te slaan, en bij de andere artikelen in het bijzonder te letten op de rijke schat aan aansprekende voorbeelden waardoor wiskunde met inzicht en begrip geleerd kan worden.

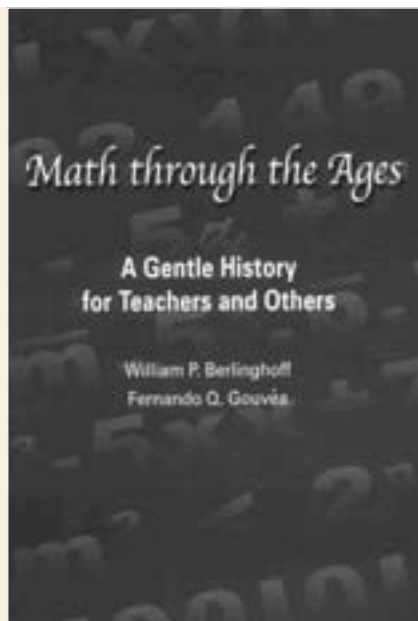
Verwijzingen

- [1] L.V. Ahlfors et al.: *On the mathematics curriculum of the high school*. In: The American Mathematical Monthly, Volume 69 (1962).
- [2] H. Freudenthal: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1983).
- [3] H. Freudenthal: *What is algebra and what has it been in history?* In: Archive for History of Exact Sciences, Volume 16, Number 3. Berlin/Heidelberg: Springer (1977).
- [4] H. Freudenthal: *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1, 2*. Stuttgart: Klett (1973).
- [5] H. Freudenthal: *Weeding and sowing / Preface to a Science of Mathematical Education*. Dordrecht: Reidel (1978).

Over de recensent

Rainer Kaenders is vakdidacticus wiskunde en hoofd onderwijs op het Instituut voor Leraar en School aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Na aanvankelijk als onderzoeker in de singulariteitentheorie in Bonn, Nijmegen, Utrecht en Düsseldorf te hebben gewerkt was hij gedurende vijf jaar leraar wiskunde aan een middelbare school in Nijmegen en één jaar lang vakdidacticus aan de TU Delft. E-mailadres: r.kaenders@ils.ru.nl

Math through the Ages



Titel: Math through the Ages, A Gentle History for Teachers and Others

Auteurs: William P. Berlinghoff, Fernando Q. Gouvêa

Uitgever: Oxton House Publishers, Farmington, Maine,

2002

ISBN 1-881929-21-3

Prijs: \$ 19,95

216 pagina's

Lezen op de camping?

Toen Euclides-redactielid Bram van Asch mij voor de zomervakantie benaderde om dit boek voor Euclides te recenseren, liet ik hem weten dat met veel plezier te willen doen en me er al op te verheugen dit werkje tijdens mijn vakantie te lezen. Maar dat pakte anders uit.

Eenmaal op de camping installeerde ik me in mijn luie stoel in de zon en begon aan het voorwoord, waarin de auteurs vertellen dat ze beiden sinds jaar en dag geïnteresseerd zijn in de geschiedenis van de wiskunde, onder andere vanwege de waardevolle aspecten ervan voor het wiskundeonderwijs aan diverse doelgroepen. In dat kader constateren ze dat het merendeel van de boeken die iets zinvol over de wiskundehistorie te melden hebben lijvig is. Ook internet levert vaak eerder een puzzeltocht op dan een compact en snel te hanteren overzicht van voor het onderwijs relevante zaken. Daarom dit boek dus, zo melden Berlinghoff en Gouvêa, geschreven voor mensen met een dergelijke behoefte.

Opzet

Dat klinkt allemaal heel interessant. En dat is het natuurlijk ook. Ook de opzet van het boekje spreekt tot de verbeelding. Althans tot de mijne, daar op die camping in de Alpen.

Het boek begint met een kort overzicht van de geschiedenis van de wiskunde, beginnend in prehistorische tijden tot het heden. Dat overzicht telt circa 60 pagina's en wordt gevolgd door het deel dat in de ogen van de auteurs de kern van het boek vormt: 25 korte schetsen over verschillende relatief elementaire wiskundige thema's.

Overzicht

Het historisch overzicht bleek echter wel erg summier. Voor een lezer die enigszins is ingevoerd in de geschiedenis van de wiskunde wordt hier weinig nieuws gemeld. Carl Boyer's *A History of Mathematics* en Dirk Struiks *Geschiedenis van de wiskunde* vertellen, natuurlijk, hetzelfde verhaal. Berlinghoff en Gouvêa voegen daar niet echt iets aan toe. Dat kan uiteraard ook niet. Men beroept zich op dezelfde bronnen en in 60 pagina's valt er niet veel aan eigen inzichten te ontwikkelen. Dus voor dat historische panorama had ik niet op vakantie hoeven te gaan, zo constateerde ik al snel.

Schetsen en plaatjes

Daarna kwamen de schetsen. Aan de orde komen in afzonderlijke delen onderwerpen als tellen, de notatie van berekeningen, de geschiedenis van nul, het oplossen van derdegraads vergelijkingen, coördinatenmeetkunde, het begin van de waarschijnlijkheidsleer, computers (in het boek 'elektronische computers' genoemd...), oneindigheid en verzamelingentheorie aan de orde. Op dit punt gekomen permitteer ik me, als terzijde, een kritische noot. Het boekje is verluchtigd met diverse afbeeldingen. Vaak zijn deze van strikt wiskundige aard. Andere keren zijn ze alleen maar bedoeld als aardigheidje, als luchtig tussendoortje. Dat leverde bij mij echter eerder irritatie op dan verstrooiing. Deze categorie plaatjes gaf mij het gevoel dat de samenstellers ervan beschikten over een grote verzameling liefdeloos vervaardigde standaardplaatjes

waaruit geput mocht worden. In het begintijdperk van de p.c. waren werkstukken ook vaak voorzien van dergelijke afbeeldingen. Niet aangenaam dus. Op eentje na. Die wil ik u toch niet onthouden. In de schets over de geschiedenis van nul kwam plots *figuur 1* aan de orde en die vond ik, in al zijn eenvoud, toch wel heel treffend.

Vragen

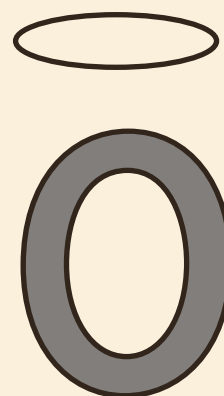
Heel veel van de schetsen waren erg intrigerend. Vaak riepen ze meer vragen op dan ze daadwerkelijk beantwoordden. Waarmee ik zeker niet wil zeggen dat ze slecht geschreven zouden zijn dan wel fouten zouden bevatten. Het was eerder omgekeerd: de stukjes waren vaak enthousiasmerend op een zodanige wijze dat ze de lezer, in ieder geval mij, ertoe aanzetten meer van het betreffende onderwerp te willen weten. Wat betekent precies, bijvoorbeeld, de passage die we in het hoofdstuk 'Half is better – Sine and Cosine' op pagina 152 aantreffen en die als volgt luidt: 'What about the sine curve, the graph of the sine, (...)? Well, in the 17th century, Gilles de Roberval (1602-1675) sketched a sine curve when he was computing the area under a cycloid but it is not clear that he understood what he had done'? Dat wordt niet verteld in dit boek. En dat is in zekere zin frustrerend.

Of hoe komt het nu dat, ondanks een wet uit 1866 die het gebruik van het metrische systeem in de VS 'legaliseert', dat metrische systeem tot op heden aldaar nog steeds niet de officiële meetstandaard is? Ook daar geeft *Math through the Ages* geen antwoord op.

Bibliografie

En daar zit je dan op die camping. Geen bibliotheek. Geen internet. Geen eigen boekenkast. Mooie vakantie, zul je zeggen. Nou, dat viel wel mee. Maar toch: dit boek dwingt tot verdieping. Of roept in ieder geval op tot meer studie. Als je daar niets op tegen hebt en in de gelegenheid bent die verdieping ook werkelijk te creëren, dan is dit, indachtig de ondertitel en het voorwoord, een boek dat inderdaad zeer geschikt is voor docenten die hun lessen van meer diepgang en historische onderbouwing willen voorzien. Want behalve het historische overzicht en de schetsen geeft het boek ook een behoorlijk uitgebreide bibliografie. Dat gebeurt op een tweetal manieren: de 'standaard' bibliografie waarbij ruim 140 titels vermeld worden met auteur, titel, uitgever en jaar van uitgave, wordt voorafgegaan door een hoofdstukje 'What to Read Next'. Hierin wordt over een beperkt aantal boeken die door de auteurs als 'especially noteworthy' worden gezien iets meer verteld. Overigens is het wel bijzonder dat de eerder vermelde Carl Boyer hierin alleen met zijn *History of Analytic Geometry* vermeld wordt en dan ook alleen maar in de korte opsomming. Behalve de verwijzingen naar andere literatuur worden trouwens ook nog verschillende internetadressen genoemd, wijselijk voorzien van kanttekeningen rond het soms discutabele kwaliteitsniveau van deze of gene site respectievelijk de vaak beperkte houdbaarheid van dergelijke adressen.

Al met al dus zeker een aanrader. Maar niet voor op vakantie. Die les heb ik wel geleerd.



figuur 1

Over de recensent

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito en p.r.-medewerker van het Wereldwiskunde Fonds.

E-mailadres: gerlimpens@wanadoo.nl

Teleblik, prachtige bronnen voor ons vak!

[Paul Vermeulen]

Veel collega's maken gebruik van bestaande radio- en tv-uitzendingen en -fragmenten. De voordelen spreken voor zich: de werkelijkheid in bewegend beeld en geluid, sneller inzicht in complexe materie en processen, positief effect op leerlingmotivatie. Het gebruik ligt voor de hand, zowel bij specifieke vakken als bij vakoverstijgende activiteiten. Bronnenonderzoek, presentaties, voorbereiding van discussies, verdiepen van actualiteit. Er zijn legio didactische mogelijkheden, al dan niet gekoppeld aan de methode. Maar er zijn ook kritische vragen: hoe vind je dat ene programma, hoe zet ik alleen dat ene fragment klaar, waar laat ik de video-band en hoe kan ik leerlingen zélf laten werken met die fragmenten...?

Met de vernieuwingen in zowel de onderbouw als de tweede fase groeit de vraag om dit type bronnen en dit type gebruik. Dat is één van de redenen voor het ministerie om Teleblik mogelijk te maken: een gratis website die toegang verleent tot duizenden radio- en tv-fragmenten van de publieke omroepen en van o.a. het Polygoonjournaal. Kijk eens rond op www.teleblik.nl (zie **figuur 1**) en krijg een indruk van de inhoud: *SchoolTV*-uitzendingen maar ook bijvoorbeeld *Noorderlicht*, *Andere tijden*, *Zembla* en recente journaals en actualiteitenprogramma's.

Een opvallende functie is dat u in Teleblik zelf fragmenten kunt knippen en ze lokaal bewaren of meteen e-mailen naar leerlingen.

Bovendien kunt u zich aanmelden als redactielid en uw eigen fragmenten delen met anderen en toevoegen aan de algemene Teleblik-collectie.

De onderwijskundige inbedding en de didactiek is uw vak. De Teleblik-redactie geeft voorbeelden en tips. De inhoud van Teleblik (de collectie) wordt in overleg met de gebruikers opgebouwd. Zomer 2006 omvat de collectie zo'n 3000 uur en in de komende tijd komen daar duizenden uren bij. Bij de keuze van nieuwe bronnen kunt u zelf een rol spelen. Dat gaat heel eenvoudig: stuur uw 'verlanglijst' naar de redactie (via info@teleblik.nl). Ter oriëntatie kunt u alvast eens rondkijken in de online catalogus van Beeld en Geluid (via www.beeldengeluid.nl; zie **figuur 2**).



figuur 1 Openingspagina Teleblik

Teleblik is een initiatief van Beeld en Geluid, Teleac/NOT en Stichting Kennisnet ICT op School. In Teleblik vindt u auteursrechtelijk beschermd materiaal dat uitsluitend voor het onderwijs online beschikbaar wordt gemaakt. De fragmenten zijn afgeschermd met een wachtwoord. Scholen kunnen zich gratis registreren als gebruiker en ontvangen vervolgens wachtwoorden waarmee leerlingen en docenten op school en thuis fragmenten kunnen zoeken, bekijken en bewerken.

Accounts kunnen worden aangevraagd via info@teleblik.nl.

Voor meer informatie kijkt u op www.teleblik.nl of stuurt u een e-mail naar info@teleblik.nl.

figuur 2 Openingspagina Beeld en Geluid



Over de auteur

Paul Vermeulen is projectleider marketing en implementatie van Teleblik.

Jaarverslag Euclides

[Marja Bos]

JAARGANG 81 (2005/2006)



In dit jaarverslag wordt een beknopt overzicht gegeven van de werkzaamheden van de redactie in de periode van 1 augustus 2005 tot en met 31 juli 2006.

Redactie

De redactie van Euclides bestond het afgelopen cursusjaar uit tien personen: zeven redactieleden met zowel algemene redactietaken (becomentariëren en genereren van artikelen) als een eigen aandachtsgebied: Bram van Asch (recensies), Klaske Blom (didactiek), Rob Bosch (wiskundige artikelen, eigen rubriek), Hans Daale (hbo), Wim Laaper (havo/vwo en mto), Jos Tolboom (ict) en Joke Verbeek (vmbo), met daarnaast een kernredactie bestaande uit redactievoorzitter Gert de Kleuver, eindredacteur Dick Klingens en hoofdredacteur Marja Bos.

De redactie kwam driemaal plenair ter vergadering bijeen. De kernredactie kwam buiten die plenaire redactievergaderingen ook nog enkele malen bij elkaar. Verder vond incidenteel overleg plaats met het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Inhoud

De inhoud van Euclides wordt grotendeels gevormd door artikelen op het gebied van het wiskundeonderwijs, spontaan ingezonden dan wel op uitnodiging geschreven, zowel informerend, actueel/journalistiek, als opiniërend.

De kopijlijst telde gedurende de verslagperiode 134 inzendingen: concept-artikelen (waaronder boekbesprekingen en interviews), redactionele kopij, aankondigingen en mededelingen, en NVvW-bestuursbijdragen voor de Verenigingspagina's. Daarnaast ontving de redactie een groot aantal persberichten.

Euclides kende het afgelopen jaar een aantal vaste rubrieken:

- Martinus van Hoorn leverde opnieuw de bijdragen voor zijn rubriek *40 jaar*

geleden. Hij gaf te kennen de reeks met deze acht afleveringen voor de 81e jaargang na 10 jaar te willen afsluiten.

- Bert Zwaneveld leverde de laatste vier afleveringen voor zijn rubriek *Over wiskundeonderwijs; innovatie en consolidatie*.
- Onder de titel *De wiskundedocent als goochelaar* beschreef Job van de Groep enkele rekentruc.
- De *Recreatie*-rubriek werd voortgezet door Frits Göbel. Nog steeds was het aantal puzzelaars dat daadwerkelijk oplossingen inzond slechts klein, maar deze inzenders besteedden hieraan in het algemeen veel werk, zoals toevoeging van figuren, broncodes, bewijzen en extra resultaten.
- Wegens ziekte van auteur/redacteur Rob Bosch verschenen van de rubriek *(Wis)Kundig Kiezen* slechts twee afleveringen.
- Elk nummer werd ingeleid met een 'hoofdreactioneel' door Marja Bos, *Van de redactietafel*, waarin ook actuele kwesties kort de aandacht kregen.

Het *Wereldwiskunde Fonds* deed verslag van projecten die financiële steun ontvingen. Verder werd aandacht besteed aan diverse 'wiskunde-evenementen', symposia en prijsuitreikingen, al dan niet bijgewoond door verslagleggende redactieleden.

De jaarlijkse examenspecial (het septembernummer) was gewijd aan de in 2005 afgenomen wiskunde-eindexamens in het voortgezet onderwijs, van vmbo-BB tot en met vwo-B12. Begin februari 2006 verscheen een 92 pagina's tellend themanummer gewijd aan *Bewijzen en redeneren*.

Publicatieprocedure

Ingezonden bijdragen worden in eerste instantie beoordeeld door de hoofdredacteur. Geaccepteerde bijdragen worden vervolgens door de hoofdredacteur en door enkele andere redactieleden van commentaar voorzien, op grond waarvan de auteur in voorkomend geval om bijstelling verzocht wordt.

Daarnaast wordt voor becommentariëring ook wel beroep gedaan op referenten buiten de redactie. De namen van deze incidentele medewerkers worden vermeld op de eerste pagina van het nummer waarvan zij een bijdrage becommentarieerden.

Nadere informatie over de publicatieprocedure en een aantal richtlijnen voor de aanlevering van bijdragen voor Euclides staan vermeld op www.nvvw.nl/euclricht.html.

Euclides als Verenigingsorgaan

Euclides is 'vakblad voor de wiskundeleraar', maar tegelijkertijd 'orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars'. Als Verenigingsorgaan kent het tijdschrift daarom een aantal geormerkte pagina's ten behoeve van het *Verenigingsnieuws*. Het bestuur van de NVvW kan deze Verenigingspagina's, zonder inhoudelijke bemoeienis en buiten verantwoordelijkheid van de redactie, vrijelijk gebruiken om zich tot de leden te richten. Het afgelopen jaar werd hiervan in zes nummers gebruik gemaakt. Incidenteel gebeurde dit in de vorm van *Bestuurstafels*, waarin het bestuur van de NVvW de leden informeert over lopende kwesties en besluiten.

De redactie heeft het bestuur van de Vereniging verzocht de verslaglegging in Euclides van de besprekingen tijdens bestuursvergaderingen een meer structureel karakter te geven. Hierop werd positief gereageerd.

Omvang en vorm

De omvang van het blad bedraagt in principe 40 pagina's per nummer. Dit aantal werd echter zesmaal overschreden; de acht nummers van jaargang 81 telden in totaal 416 pagina's. De steunkleur was zeeblauw. Jaargang 81 werd nog opgemaakt bij TiekstraMedia te Groningen.



Andere zaken

- De redactie oriënteerde zich op een nieuwe vormgeving. Hiertoe werden diverse bedrijven benaderd om een ontwerpvoorstel met offerte te doen. Het bestuur van de NVvW was nauw betrokken bij de zakelijke aspecten. Uiteindelijk is de keus gevallen op De Kleuver BV uit Veenendaal. Aan de hand van een nulnummer (een schaduwversie van het reguliere maantnummer) werd ervaring opgedaan met de nieuwe vormgeving en een aantal knelpunten aangepakt. Inmiddels wordt vanaf september 2006 de nieuwe opmaak gehanteerd.
- De advertentie-zaken werden ook het afgelopen jaar tijdelijk waargenomen door redactievoorzitter Gert de Kleuver. Het bestuur heeft nog geen structurele oplossing kunnen vinden.
- Voor een artikel over onderwijsvakbladen in het januarinummer van het tijdschrift 'Van twaalf tot achttien' werd vanuit de redactie een korte informatieve bijdrage over Euclides geschreven.
- Tweemaal werd op initiatief van de redactie van 'Van twaalf tot achttien' informeel/verkenkend overleg gevoerd met hoofdredacties van enkele andere vakbladen (NVOX, Niche, Kleio, Lichamelijke Opvoeding, Lampas, Kunstzone). Daarbij ging het vooral om een onderlinge kennismaking, maar ook om kennisneming van elkaars ideeën omtrent de huidige en toekomstige rol van de vakbladen en omtrent diverse ontwikkelingen ten aanzien van de 'schoolvakken' binnen het voortgezet onderwijs.
- Voorjaar 2002 werd vanuit de hoofdredactie het initiatief genomen de oude jaargangen van Euclides (compleet; vanaf 1927), alle nog aanwezig bij voormalig Euclides-uitgever Wolters-Noordhoff, te archiveren. Daartoe werd contact opgenomen met Wolters-Noordhoff, die de volledige set welwillend heeft afgestaan aan de Vereniging. Het NVvW-bestuur nam vervolgens de taak op zich de verdere afwikkeling rond de archivering te regelen. Nadat vier jaar geleden de eerste contacten met het 'Rijksarchief in Noord-Holland' gelegd zijn, moet met zorg geconstateerd worden dat het bestuur in deze kwestie nog geen nadere voortgang geboekt heeft, en het materiaal min of meer onbeschermd bij een van de bestuursleden thuis ligt.

Voor en door wiskundedocenten

De lezers van Euclides vormen een brede doelgroep, ondanks hun gemeenschappelijke affiniteit met wiskundeonderwijs. De redactie streeft ernaar iedere lezer uit deze breed samengestelde groep een ruime sortering relevante en toegankelijke artikelen te bieden. Feedback van lezers is daartoe van wezenlijk belang. Daarnaast worden inhoudelijke bijdragen uiteraard met veel belangstelling door de redactie tegemoet gezien.



Over de auteur

Marja Bos is hoofdredacteur van Euclides.
E-mailadres: m.bos@nvvw.nl

MEDEDELING / SAMENWERKEN AAN SAMENHANGEND BÈTA-ONDERWIJS

Het Centrum voor Didactiek van Natuurwetenschappen en het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht gaan fuseren. Het nieuwe instituut krijgt de naam

Fisme

Freudenthal Institute for science and mathematics education

Op vrijdag 1 december a.s. wordt deze fusie beklonken tijdens een feestelijke opening die in het teken zal staan van het gezamenlijke streven naar meer samenhang tussen de bèta-vakken in het primair en secundair onderwijs.

De bijeenkomst is toegankelijk voor iedereen die belangstelling heeft voor de didactiek van wiskunde en natuurwetenschappen.

Plaats: Educatorium van de Universiteit Utrecht (Leuvenlaan 19, De Uithof, Utrecht)

Tijd: van 14:30 tot 17:30 uur

Het programma volgt op www.fisme.uu.nl.

U kunt zich aanmelden door een e-mail te sturen aan fisme@fi.uu.nl.

Inhoud van de 81e jaargang (2005/2006)

Bijdragen

Mieke Aarts

Schoolexamens 2007: Leve de vrijheid!?, 406

Esther van den Akker, Jos Verhagen

Engelstalig wiskundeonderwijs, 130

Nico Alink, Michel Vellekoop

Financiële wiskunde, 398

Jan Apotheker

Samenwerkend leren in het wiskundeonderwijs, 378

Bram van Asch

Bewijzen: voor alle zekerheid!, 151

Henk Barendregt, Freek Wiedijk

Bewijzen: romantisch of cool?, 174

Sacha la Bastide-van Gemert

Van 'terloopse rekenlessen' tot dagtaak, over Freudenthal, 094

Frits Beukers

Min maal min is plus, 180

Corine van den Boer, Dolly van Eerde

De (verborgen) wiskundeproblematiek van taalzwakke leerlingen, 292

Harm Boertien

Over algebra en modelleren in de havo-B-examens, 018

Harm Boertien e.a.

Wiskunde-examens 2005, 1e tijdvak, 002

Christian Bokhove e.a.

- Intelligente feedback bij digitale toetsen en oefeningen, 070

- Digitale wiskunde-oefenomgeving, 304

- Een wiskunde-oefenomgeving in de eigen ELO, 374

Rob Bosch

- Muurtje bouwen, kansvariabele transformeren, 397

Rubriek '(Wis)kundig kiezen':

- De referendum-paradox, 038

- De diskwalificatie-paradox, 074

Harrie Broekman

'Vertalen' in de wiskundeles, 263

Henk Broer

Wiskunde als kritische succesfactor?, 282

Jan van de Craats

- Bewijzen met coördinaten, 212

- De meetkunde van de meetkundige reeks, 266

- Eenvoud bij tekenen en rekenen, 358

Hans Daale

Hbo-wiskunde in bedrijf, 114

Dirk van Dalen

Q.E.D., 217

Irene Dalm

Wiskunde in de theaterklas, 383

Albert Dorresteyn

Per, schakel voor een nieuwe algebra, 388

Paul Drijvers

Wiskunde D, uitdagend en relevant, 327

Paul Drijvers e.a.

- Rechthoekige krommen, 120

- Krampachtigheid bij tekenen en rekenen, 363

Jack van der Elsen

Onderzoek naar een eigenschap van twee natuurlijke getallen, 256

Johan Gademan

Levende tijdlijn van 5000 jaar wiskunde, 078

Job van de Groep

De wiskundedocent als goochelaar, 113, 268, 364

Iris van Gulik-Gulikers

Euclides terug in de meetkundeles, 201

Bart Heukelom

Profielwerkstuk of praktische opdracht in Arthesis, 037

Jan Hogendijk

Lees Euclides!, 171

Martinus van Hoorn

In Memoriam Albert Koldijk, 099

Kees Jonkers

Een zoektocht in meetkundeland, 260

Metha Kamminga

Digitaal toetsen met Maple TA, 286

Sieb Kemme

Laat zien dat..., 193

Yvonne Killian

- Formules onthouden voor cirkel en bol, 247

- De stelling van Pythagoras voor de brugklas of groep 8, 338

Wim Kleijne

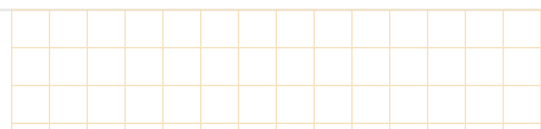
Bewijzen in de leerplannen van de 20e eeuw, 159

Gert de Kleuver

- Een digitaal wiskunde-examen in het vmbo, 032

- Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade 2005, 228

- Vakantiecursus 2005: De schijf van vijf, 386



Dick Klingens

- Een meetkundige constructie van de som van een meetkundige rij, 138
- 140 jaar geleden, 231
- Enkele mooie bewijzen in de meetkunde, 196
- De 300e verjaardag van π , 253
- Draaistrekking en negenpuntscirkel, 350

Ton Konings

Internetmethode Ratio, 100

Henk van der Kooij

De wiskunde-examenprogramma's havo en vwo vanaf 2007, 322

Dirk Koolmees

Feitenvel Zambia VI, 252

Hans Krabbendam, Henk Staal

Digitale toetsen voor de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde, 134

Rob Kronenberg

Ervaringen met een examenklas vmbo-GL/TL 2005, 022

Jenneke Krüger

NLT ook in úw school?, 331

Bert Kruijer

Bèta-projectweek op het Calandlyceum, 298

Hans van de Lagemaat

Boeken voor Ethiopië, 126

Marianne Lambriex

Verslag NVvW-examenbesprekingen 2005, 026

Annemarie van Langen

De achterblijvende belangstelling voor exacte vakken in havo en vwo, 248

Ton Lecluse e.a.

Een puzzel, 104

Ronald Meester

Redeneren met de regel van Bayes, 189

Freek van Megen

Scholenprijs Nederlandse Wiskunde Olympiade, 340

Hanne Obbink

Wiskunde als levend vak fascineert leerlingen, 354

Lauran van Oers

Proefwerk nabespreken, 254

Dion Oolthuis

Let's play darts, 334

Jos en Karin Paus

Van boldriehoeken naar het platte vlak, 392

Henk Pfaltzgraff

De wet van Benford, 301

Hessel Pot

Breuken, wat zijn dat eigenlijk voor dingen?, 050

Gerrit Roorda

Samenhang: waar te beginnen?, 346

Simon van der Salm

Is het gemiddelde wel zo harmonisch?, 403

Ad Schenk

Een bijzonder geval, 410

Ionica Smeets, Gillien Geuze

Reken mee met ABC, 370

Menno van Steenis

Begrijpen, redeneren, bewijzen, 219

Hans Sterk, Jacob Perrenet

Kunnen (wij op) onze kinderen rekenen?, 063

Stichting Beroepskwaliteit Leraren

Hoe bekwaam bent u als leraar?, 408

Anne van Streun

Denkmethode en werkschema's in het vmbo, 155

Harrie de Swart

Wiskunde, logica, bewijzen en argumenteren, 206

Jos Tolboom

Draadloos netwerk in de klas, 108

Nellie Verhoef

De integraal, dat is de oppervlakte toch?, 342

Michael de Villiers

Rol en functie van het bewijs in de dynamische meetkunde, 184

Luc Weide

Teaching by Exception 3, 058

Werkgroep 3TU

Aansluiting vwo en technische universiteiten, 242

Chris Zaal

Wiskunde Scholen Prijzen 2005, 034

Bert Zwaneveld

- Over getallen, rekenen en structuren, 308
- Rubriek 'Over wiskundeonderwijs: innovatie en consolidatie':
 - afl. 5; Wiskunde als gereedschap, 036
 - afl. 6; De spagaat van wiskunde op school, 076
 - afl. 7; Kerndoelen en schoolautonomie, 142
 - afl. 8; Wiskunde die..., 226

Boekbesprekingen

Danny Beckers

Meetkunde opnieuw uitgevonden (Iris van Gulik-Gulikers), 270

Jan van de Craats

Zebra 20: Babylonische wiskunde (Ab van der Roest, Martin Kindt), 313

Jacolien van Dijk

Inzien en bewijzen (Jan van Eijck, Albert Visser), 168

Jan de Graaf

De natuurwetten, iconen van onze kennis (Sander Bais), 272

Chris van der Heijden

Eindig, oneindig, meer dan oneindig (Leon Horsten), 165

Leren doe je
samen



TI-Navigator™ is het nieuwste product dat de missie van Texas Instruments aantoont. TI-Navigator™, een nieuwe dimensie in lesgeven.

Voor een beter begrip van Wiskunde

Onze missie is u te voorzien van de beste instrumenten die u nodig heeft in uw dagelijkse lespraktijk*. Gebaseerd op een nauwe samenwerking met docenten en onderwijspecialisten, ontwikkelen we producten die motivatie, participatie en begrip van de leerling bevorderen. Wiskunde en natuurwetenschap worden zo toegankelijk, concreet en interessant. Ons gamma bestaat uit geavanceerde rekenmachines, dataloggers, software en vele andere leermiddelen voor in de klas, en Texas Instruments biedt u een kwalitatief hoge servicegraad. Voor meer informatie kunt u terecht op education.ti.com/nederland.



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

TI Technology - Beyond Numbers

Ernst Lambeck

Zebra 19: Nullen en enen (Ruud Jeurissen, Leon van den Broek), 276

Ger Limpens

De wiskundige kat, de biologische muis en de jacht op inzicht

(J.A.P. Heesterbeek e.a.), 274

Frans Martens

Basisboek wiskunde (Jan van de Craats, Rob Bosch), 312

Simon van der Salm

P.J. Palmer: de goeroe van het Nieuwe Leren?, over 'The Courage to Teach' (P.J. Palmer), 117

Jos Tolboom

Algebra en applets, leren en onderwijzen (Peter Boon, Paul Drijvers), 66

Verschenen

- Jan van de Craats, Rob Bosch: Basisboek wiskunde, 016

- Ko van Harn: Romeinse cijfers, 099

- B.A. Fusaro, P.C. Kenschaft (eds.): Environmental Mathematics in the Classroom, 143

- Docentennetwerk TI: Wiskundelessen met TI Interactive, 173

Recreatie

Frits Göbel

- Betegelingen en partities, 046

- Kwadraten komen terug!, 090

- Het kralenspel, 146

- Een inpakprobleem met vierkanten, 238

- Twee zesvlakken, 278

- In het voetspoor van Ramanujan, 318

- Betegelen met halve vierkanten, 366

- Torens en lopers, 414

40 jaar geleden

Martinus van Hoorn

025, 056, 107, 210, 251, 291, 339, 373

Aankondigingen / Mededelingen

- Dag van de Leraar 2005, 033

- BWI-middag 2005, 040

- Wiskunde Scholen Prijs 2006, 055

- Carl Koppeschaar: Grote griepmeting weer van start, 145

- Wiskunde Scholen Prijs 2006, 145

- 42e Nederlands Mathematisch Congres, 216

- Jenneke Krüger: Het nieuwe geïntegreerde bètavak in havo en vwo, 227

Van de redactie

Marja Bos

- Van de redactietafel, 001, 049, 093, 241, 281, 321, 369

- Jaarverslag Euclides jaargang 80, 080

- Inhoud van de 80e jaargang (2004/2005), 082

- Voorwoord bij de special 'Bewijzen en redeneren', 149

Servicepagina

048, 092, 148, 240, 280, 320, 368, 416

Verenigingsnieuws

Swier Garst

De tweede fase van 2007-2010, een tussenstand, 232

Conny Gaykema

Examenbesprekingen, 316

Metha Kamminga

Fotoverslag studiedag/jaarvergadering 2005, 236

Marian Kollenveld

- Meedoen met project samenhangend leren?, 088

- Jaarrede 2005, 233

Marianne Lambriex

- Jaarvergadering/studiedag 2005, tweede aankondiging, 041

- Jaarvergadering/studiedag 2006, eerste aankondiging, 412

Wim Kuipers

- Aanvulling agenda jaarvergadering 5 november 2005, 086

- Verslag van het verenigingsjaar 2004-2005, 086

- Notulen van de studiedag en jaarvergadering 2004, 089

- Nieuws van het Wereldwiskunde Fonds, 144

- Ja, ik doe mee!, 235

- Van de bestuurstaafel, 317, 413

MEDEDELING / BWNW ONLINE

Op donderdag 21 september 2006 is het *Biografisch Woordenboek van Nederlandse Wiskundigen* (BWNW) online gegaan. Het BWNW bestaat uit korte levensschetsen van Nederlandse wiskundigen ten dienste van docenten die hun college willen verluchten of verrijken, studenten en scholieren die op zoek zijn naar materiaal voor een werkstuk,

en wetenschapsjournalisten. In het kader van het NWO-project 'Leraar in Onderzoek', bedoeld voor wiskundeleraars in het voortgezet onderwijs, voerde Alex van den Brandhof, leraar wiskunde aan het Vossius Gymnasium te Amsterdam, de eerste fase van de totstandkoming van het woordenboek uit. In Euclides 81-7 (mei 2006) schreef Hanne Obbink o.a. over dit project.

Het woordenboek is vanaf 21 september te vinden via www.bwnw.nl.

De website werd op die dag geopend door Jan Karel Lenstra (directeur van het Centrum voor Wiskunde en Informatica) in aanwezigheid van Hendrik Lenstra Jr., die bij het BWNW-project een belangrijke stimulerende rol heeft gespeeld.

(Bron: Wiskunde PersDienst)



[Wim Kuipers]

Notulen van de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op 5 november 2005

1. Opening

Door ziekte kon onze voorzitter Marian Kollenveld helaas niet aanwezig zijn. Swier Garst neemt haar taak over en heet ieder van harte welkom.

Voor het eerst vergaderen we in het Anna van Rijn College te Nieuwegein. Evaluatie zal moeten uitwijzen of we hier in de toekomst de jaarvergadering zullen houden.

2. Jaarrede

Swier leest de jaarrede van de hand van Marian voor. De jaarrede zal in Euclides worden gepubliceerd^[1].

In de jaarrede beluisteren we de roep om de wiskundeleraar zijn vak terug te geven. Ontwikkelingen in de laatste jaren maken deze thematiek actueel. Het blijkt dat schoolbeleid van belang is om mogelijkheden te garanderen om te groeien in je vak. Het afgelopen jaar heeft het bestuur zich ingezet om het vak op de kaart te houden in het bijzonder voor wat betreft de tweede fase. Veel overleg is nodig geweest om inhoudelijk een bijdrage te leveren. Maar niet alleen de Tweede fase vraagt aandacht. Ook het vmbo kent zijn speerpunten als het gaat om sectorale inkleuring, samenhang tussen de vakken en de toekomst van de examens.

3. Notulen

De notulen van de jaarvergadering 2004 worden onveranderd vastgesteld. Er zijn geen vragen en de secretaris wordt bedankt voor zijn werk.

4. Jaarverslag

Het verslag geeft een beeld van wat zich in het achterliggende jaar in grote lijnen heeft voorgedaan. Geen opmerkingen vanuit de vergadering, waardoor ook dit verslag onveranderd kon worden vastgesteld.

5. Financiën

Penningmeester Swier Garst doet op zijn geheel eigen wijze verslag van het verloop van de financiën. Er is een terugloop van de financiën. De penningmeester noemt als oorzaak: vergrijzing, uitgave van een special en de kosten van ledenwerving onder studenten.

De contributie wordt vastgesteld op € 50,00.

6. Bestuur

De bestuursleden Henk Rozenhart en Henk Bijleveld zijn aftredend maar stellen zich herkiesbaar. De vergadering gaat akkoord met de herverkiezing.

7. Mededelingen

De voorzitter van cTWO (commissie Toekomst WiskundeOnderwijs), de heer D. Sierksma, krijgt gelegenheid om het een en ander te vertellen van de opdracht en werkwijze van deze commissie. De noodzaak van deze commissie wordt aangegeven door de ontwikkelingen. In de nieuwe plannen van het ministerie merken we een urenreductie op en de vraag om een wijziging in het programma. Naast het kortwieken van de programma's is er de vraag om nieuwe inzichten gestalte te geven, de ICT-inzichten te verwerken en samenhang met andere vakken te zoeken.

Vervolgens legt de heer H. Corstjens, directeur Platform Bèta Techniek, uit aan welke zaken het platform aandacht schenkt. Een groot aantal scholen schenkt aandacht aan de verbreding van techniek. Er wordt een netwerk opgezet waardoor er de mogelijkheid is voor het kweken van een andere attitude ten opzichte van de aanpak van de samenhang tussen wiskunde en bèta-techniek. Steun wordt geboden aan ontwikkelingen binnen de scholen die vorm willen geven aan deze samenhang waarbij de elektronische leeromgeving een rol speelt. Als belangrijk doel wordt aangegeven jonge mensen te behouden voor de bèta-ontwikkeling. Dit vraagt om inpassing van aandacht voor bèta in het schoolbeleid.

De heer G. Wiersma uit Leeuwarden presenteert de nieuwe website. Voorlopig zal nog de oude naast de nieuwe gehandhaafd moeten worden, maar de heer Wiersma zegt toe dat in het komende jaar de nieuwe de oude geheel zal vervangen en meer mogelijkheden zal bieden.

8. Studiedag

Volgend op de huishoudelijke vergadering geeft de heer K. Hooyma een inleiding op de studiedag 'Wiskunde, een vak apart?' met een plenaire lezing: 'Hoe leren onze leerlingen?' Vanuit de praktijk binnen het vak natuurkunde geeft de inleider voorbeelden waarbij de aandacht voor uitdagende problemen centraal staat. Leuke uitdagende en inspirerende lesactiviteiten dragen bij aan een wat informele begripsvorming. De vraag is of een dergelijke aanpak ook betekenis zou kunnen hebben voor het wiskundeonderwijs.

9. Rondvraag

Van deze gelegenheid maakt niemand gebruik. De voorzitter sluit vervolgens de vergadering om 16.00 uur.

Noot

[1] Inmiddels verschenen in Euclides 81(4), februari 2006.





Verslag van het verenigingsjaar

[Wim Kuipers]

1 augustus 2005 - 31 juli 2006

Bestuur

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: mw. drs. M.P. Kollenveld, voorzitter; W. Kuipers, secretaris; drs. S. Garst, penningmeester; overige leden H. Bijleveld, J. Hop, mw. drs. M. Kamminga, drs. H. van der Kooij, mw. drs. M.A. Lambriex, drs. H. Rozenhart.

Geruime tijd kon de voorzitter haar werk maar ten dele vervullen door ziekte. Gelukkig was ze tijdens de laatste bestuursvergadering weer present en we hopen dat herstel mag doorzetten en dat ze spoedig weer volledig beschikbaar is. Dat wil niet zeggen dat ze heeft stil gezeten. Aan noodzakelijke werkzaamheden in verband met verwikkelingen rond de Tweede fase heeft ze al die tijd aandacht kunnen besteden. Tijdens het lopende verenigingsjaar heeft Jacob Hop het bestuur verlaten om redenen van persoonlijke aard. We zullen zijn inbreng missen, waarbij aangetekend kan worden dat hij zijn adviezen bij de ontwikkelingen van de website blijft geven. Door het vertrek van Jacob vraagt het bestuur om aanvulling. Met een paar mensen zijn we nog in gesprek.

Algemeen

Het afgelopen jaar hebben de ontwikkelingen rond de Tweede fase veel aandacht gevraagd. Veel overleg met allerlei instanties was nodig om voor wiskunde die aandacht te vragen welke ze verdient. In Euclides is bij enige regelmaat verslag gedaan van wat er op het ministerie is besloten. Ook onze hoofdredacteur heeft u van de nodige informatie mogen voorzien. De aangenomen ministe-

riële besluiten zullen nu hun weg moeten vinden in het onderwijs. Scholen zullen aan het een en ander vorm moet geven. Het bestuur hoopt dat er nu een periode van rust zal aanbreken zodat ieder gelegenheid krijgt om de dagelijkse lessen te geven voortvloeiend uit de veranderingen.

Jaarvergadering

Vanwege het feit dat bijna elke school in Utrecht in de steigers staat, wordt de vergadering gehouden in het Anna van Rijn College. Na evaluatie zal worden bekeken of we het jaar daarop weer terug keren naar het Cals College of dat we hier opnieuw zullen vergaderen.

De jaarvergadering op 5 november staat geheel in het teken van de effecten van de ontwikkelingen die ophanden zijn. De vraag bij velen wat er van ons vak terecht zal komen heeft geleid tot het thema: *Wiskunde, een vak apart?*

Het vak staat onder druk en er zijn vele vragen te stellen met het oog op de toekomst. Onder andere hoe het zal gaan met het vak in het vmbo en binnen de scenario's van de onderbouw. Welke plaats heeft wiskunde in de leergebieden? Hoe kunnen we op verantwoorde wijze inhoud geven aan meer samenhang met andere vakken en welke didactiek moet hierbij worden ontwikkeld?

De plenaire lezing wordt gehouden door de heer K. Hooyman onder de titel: *Hoe leren onze leerlingen?*

Zijn vraag is hoe we leerlingen de liefde voor het vak kunnen bijbrengen en welke vaardigheden en begrippen achter deze

vaardigheden ons ten dienste staan. De spreker laat een en ander zien aan de hand van het werken binnen het vak natuurkunde op een school in Utrecht. Hier is gekozen voor een aanpak waarbij uitdagende problemen centraal staan in het leerproces. Tijdens de studiedag kon een ieder inspiratie opdoen in een veelheid van workshops. Gedurende het huishoudelijke gedeelte hebben de heren D. Sierksma en H. Corstjens enige informatie gegeven over respectievelijk cTWO en het Platform Bèta Techniek.

Vmbo

Het examenprogramma van het vmbo was nodig toe aan een restyling. Het bestuur is betrokken geweest bij de globalisering van de examenprogramma's vmbo. Het doel van deze operatie was om enerzijds geglobaliseerde eindtermen voor het vmbo te krijgen en anderzijds een syllabus waarin deze eindtermen voor het centraal examen gespecificeerd en uitgewerkt worden. Het beleid van het ministerie is 'ruimte te bieden aan scholen' en daarbij hoort 'sturen op hoofdlijnen'. Globale eindtermen geven scholen meer ruimte het onderwijs zelf in te richten. In de tweede plaats vragen de in 1999 vastgestelde examenprogramma's om actualisering.

De uitwerkingen zijn te vinden op de site van de SLO.

Het bestuur heeft bij de SLO een veldaanvraag ingediend om te onderzoeken hoe het wiskundeonderwijs zich op dit moment heeft ontwikkeld in het vmbo met name als het gaat om de plaats van het wiskundeonderwijs

in de onderbouw en op welke wijze scholen materiaal hebben ontwikkeld. Tevens zou op een aantal scholen die zich daartoe bereid verklaren onderzocht kunnen worden hoe het ontwikkelde materiaal valt in te passen. De werkgroep vmbo heeft er bij het bestuur op aangedrongen om nogmaals met het ministerie in gesprek te gaan over de mogelijkheid om de examens zodanig aan te passen dat een sectorale inkleuring meer zichtbaar gaat worden.

Onderbouw

Het bestuur heeft geparticipeerd in een adviesgroep van de SLO. Voor het vakgebied rekenen-wiskunde wordt een aangepast leertraject ontwikkeld voor zwakke leerlingen in groep 7 en 8 in het kader van de doorgaande lijn rekenen/wiskunde po-vmbo. Zo worden leerkrachten in staat gesteld om leerlingen beter voor te bereiden op het vmbo.

In een Expertmeeting wiskunde in de onderbouw VO heeft het bestuur meege-dacht met een aantal deskundigen over de actuele ontwikkelingen van het VO op politiek en beleidsmatig gebied. De inhoud van het wiskundeonderwijs moet beter toegesneden worden op het ontwikkelen van conceptuele vaardigheden nodig voor de maatschappij van de toekomst. Belangrijk werd geacht het inzicht en het doorzien van inzicht in formele structuren, van verbanden, van de wereld van getallen, van het variabelenbegrip.

Op voorstel van het bestuur werd een brief gezonden aan de cTWO waarin aandacht wordt gevraagd voor de doorstroming onderbouw vo naar vmbo. Binnen het vmbo loopt een aantal vernieuwingen die dezelfde aandacht moeten krijgen als die van wat nu door de cTWO wordt uitgewerkt.

Havo/vwo

Enkele bestuursleden denken binnen cTWO mee over de inhoud ten aanzien van beleidslijnen vanuit het ministerie als het gaat om wiskunde A, B, C en D. Daarnaast heeft het bestuur voor wat betreft beleidsonwikkelingen een stem binnen het platform VVVO (de overkoepelende

vereniging van vakverenigingen in het VO). Dit laatste is van belang omdat steeds meer samenhang en integratie aandacht vraagt. In Euclides is regelmatig verslag gedaan van wat er inhoudelijk is bereikt.

Ledenwerving

Met succes heeft het bestuur een actie gevoerd om jonge leden onder studenten te werven. Meer dan honderd studenten hebben zich aangemeld met voor het eerste jaar een gratis abonnement. Het blijft een zorg dat het vmbo te weinig vertegenwoordigd is.

Tijdens de jaarvergadering 2005 heeft de penningmeester reeds gewezen op voortgaande vergrijzing.

Federatie Onderwijsbonden

Na ampele bespreking in het bestuur is er besloten om de leden op de jaarvergadering te vragen akkoord te gaan met de procedure die moet leiden tot de aanmelding als lid bij de Federatie Onderwijsbonden.

In een brief zijn de leden op de hoogte gebracht van het waarom van eventuele toetreding. Swier Garst legt in die brief uit wat de voordelen zijn.

Euclides

Met dankbaarheid mag ook in dit verslag melding gemaakt worden van de goede uitgave van ons verenigingsblad. Het vraagt veel inspanning om er voor te zorgen dat er elke maand weer een uitgave op de mat valt. De special *Bewijzen en Redeneren* viel in goede aarde.

Juist in tijden van ingrijpende veranderingen en we denken in het bijzonder aan de ontwikkelingen ten aanzien van de Tweede fase is het van belang dat de leden op de hoogte worden gehouden. Niet in het minst de wijze waarop de redactietafels zijn aangeboden; ze voorzien op dit punt in een behoefte.

WWF

Het bestuur van het WereldwiskundeFonds heeft dit jaar een paar projecten mogen afronden. Helaas heeft een oproep voor geschikte projecten vallend binnen onze doelstelling slechts tot één nieuwe aanvraag

geleid. Het gaat om een aanvraag voor steun bij de aanschaf voor schoolboeken voor studenten in Malawi.

Het WereldWiskundeWeb is een internetboekenvleugel. De daarbij verkregen gelden komen geheel ten goede aan het WereldwiskundeFonds. Oude/gebruikte boeken zijn steeds welkom. Zeker eens per jaar worden de boeken geveild.

Examenbesprekingen

Ook dit verslagjaar mogen we melden van goede bijeenkomsten waaraan behoefte blijkt te bestaan. Door geringe belangstelling voor de bijeenkomst van vmbo-BB- examens in het vorig jaar zijn er dit jaar voor deze leerweg geen bijeenkomsten georganiseerd.

Een groot aantal scholen heeft voor deze leerweg gebruik gemaakt van het digitale cse. Voor een uitstekend verslag van de bespreking verwijzen we naar Euclides, nr. 81-1, september 2005.

Hbo

Uitvoerig heeft de werkgroep hbo gesprekken gevoerd met de HBO-raad over de aansluitingsproblematiek. Leerlingen van het mbo en het havo die zich aanmelden voor een hbo-studie in de sector techniek, beschikken vaak over onvoldoende wiskundevoorkennis.

Tot slot

Een verslag van werkzaamheden kan niet bogen op volledigheid. Er zijn een aantal activiteiten die onbesproken blijven, vaak omdat ze aan de rand plaatsvinden, zoals advisering aan leden, het geven van acte de présence bij officiële bijeenkomsten (Wiskunde Olympiade, uitreiking Wiskunde Scholen Prijs, ...), deelname aan werkgroepvergaderingen e.d.

Met genoegen mogen we zeggen dat ook in dit verslagjaar velen zich hebben ingezet om, binnen en buiten school, het belang van het wiskundeonderwijs te dienen. Laten we elkaar tot een hand en een voet zijn daar waar dat nodig is. Het gaat ons toch om goed en adequaat onderwijs voor de leerlingen?



Randomia

[Frits Göbel]

In het land Randomia speelt het toeval een grote rol. Bij het wiskundeonderwijs ligt de nadruk dus begrijpelijkerwijs op vakken als kansrekening en statistiek. Maar de meetkunde wordt niet verwaarloosd!

Bij de vlakke meetkunde zijn de in- en omgeschreven cirkels weer in het lesprogramma opgenomen. De definities zijn echter heel anders. Gegeven een vlakke figuur. Neem in het inwendige een punt P at random. De ingeschreven cirkel of incirkel is de grootste cirkel om P die in de gegeven figuur past.

De omgeschreven cirkel of omcirkel is de kleinste cirkel om zo'n random punt die de gegeven figuur overdekt.

In **figuur 1** ziet u een voorbeeld met een vijfhoek. Merk op dat iedere eindige figuur met een positieve oppervlakte een incirkel en een omcirkel heeft.

In de volgende opgaven nemen we voor het gemak aan dat de gegeven figuur oppervlakte 1 heeft.

Opgave 1

Bepaal de verwachte oppervlakten van incirkel en omcirkel van het eenheidsvierkant.

Opgave 2

Bepaal deze grootheden ook voor de gelijkzijdige driehoek.

U kunt deze twee opgaven natuurlijk in één keer oplossen door meteen de regelmatige n -hoek aan te pakken, maar dat leek me minder leuk. Mocht u dat toch doen, dan hebt u ook de derde opgave opgelost, als limietgeval.

Opgave 3

Bepaal de verwachte oppervlakten van incirkel en omcirkel van de cirkel.

(Als ik me niet heb verrekend, is de verhouding van de verwachtingen in ieder van de drie opgaven een geheel getal.)

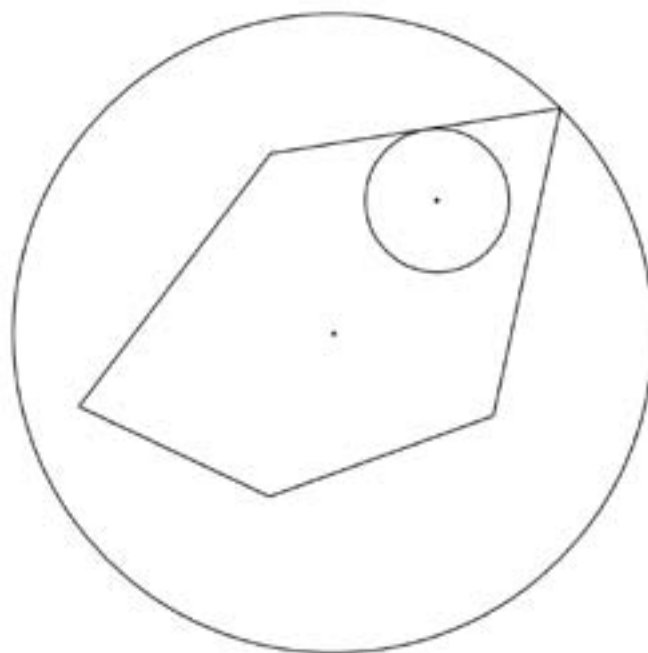
In de pauzes worden wel eens gokspelletjes gespeeld. Op een dag spelen Anna en Bert een aantal spelletjes, steeds om een inzet van 7 kronen. Even later spelen Anna en Caty om een inzet van 10 kronen, en tussen Bert en Caty gaat het steeds om 12 kronen. Na 210 spelletjes gaat de bel en dan is het heel toevallig zo dat iedere speler even vaak gewonnen als verloren heeft.

Opgave 4

Eén van de spelers heeft 28 kronen verloren. Wie is dat?

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wx.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.

Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 1 december 2006. Veel plezier!



figuur 1

Torens en Lopers

Er waren acht inzendingen. Aan vier hiervan kon de maximale score van 20 punten worden toegekend. Het geval (4, 9) gaf de meeste problemen, althans voor degenen die de opgave zonder computer aanpakten. In *figuur 2* ziet u één van de zeven mogelijke oplossingen. Het voordeel van een werkend programma is dat je ook op allerlei andere vragen het antwoord kunt krijgen, soms door heel eenvoudige aanpassingen. Zo bepaalde Lieke de Rooij met een C++ programma voor alle paren (T, L) het aantal essentieel verschillende oplossingen. Deze aantallen variëren van drie voor (3, 3) en (1, 13) tot 103776 voor (0, 11). Ook Ton Kool bepaalde de aantallen oplossingen, maar ongecorrigeerd voor spiegelingen en rotaties. Gerhard Riphagen gebruikte een Pascal-programma en bepaalde bovendien het aantal onbestreken velden. Wobien Doyer loste de opgave op zonder computer en bewees met de hand dat (5, L) niet mogelijk is voor $L > 7$.

Enkele oplossers vroegen naar alle mogelijke paren (T, L) die behoren bij maximale vreedzame stellingen. Hier komen ze:

- (8, 0); (7, 1);
- (6, L) voor $L = 1, 2, 3, 4$;
- (5, L) voor $L = 1, \dots, 7$;
- (4, L) voor $L = 2, \dots, 9$;
- (3, L) voor $L = 3, \dots, 10$;
- (2, L) voor $L = 5, \dots, 11$;
- (1, L) voor $L = 7, \dots, 13$ en
- (0, L) voor $L = 8, \dots, 14$.

Ladderstand

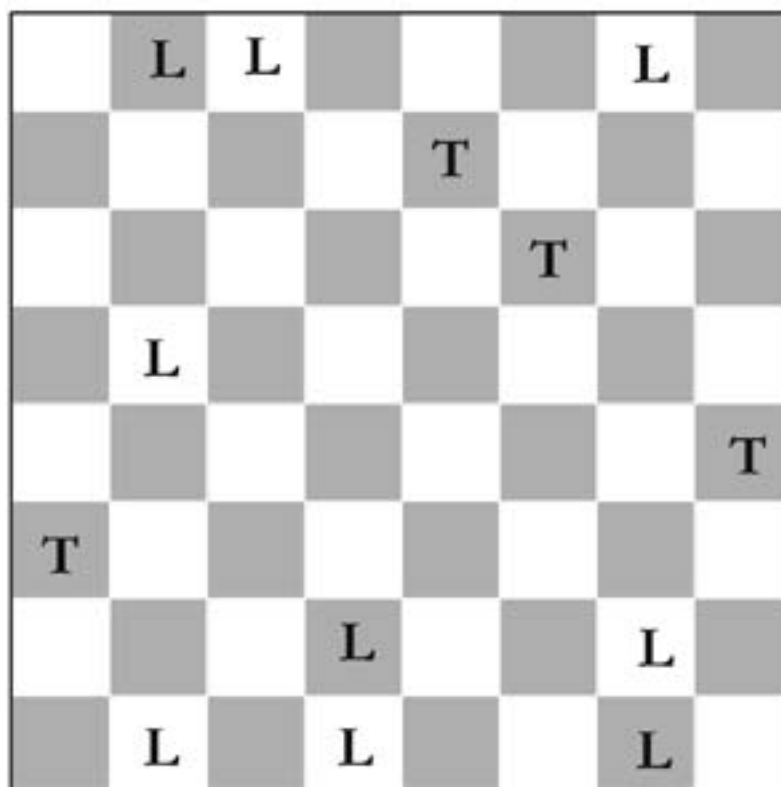
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

- W. Doyer 422
- T. Kool 325
- W. van den Camp 316
- H.J. Brascamp 292
- J. Meerhof 292
- A. Verheul 178
- L. de Rooij 154
- G. Riphagen 117
- N. Wensink 114

Het was al enige tijd duidelijk: de ladderprijs, een boekenbon van 30 euro, gaat naar Wobien Doyer. Van harte gefeliciteerd!

De complete ladderstand is te vinden op de website van Euclides:

www.nvww.nl/euclladder.html.



$(T, L) = (4, 9)$

figuur 2

PUBLICATIES VAN DE NEDERLANDE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



zebraboekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde

21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

22. Spelen en Delen

Zie verder ook www.nvuw.nl/zebrareeks.html en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: www.nvuw.nl/lustrumboek2.html
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: www.nvuw.nl/Publicaties2.html

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepeersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvuw.nl). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eindversies* van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvuw.nl/euclricht.html.

nr.	verschijnt	deadline
3	7 december 2006	24 oktober 2006
4	1 februari 2007	5 december 2006
5	1 maart 2007	16 januari 2007
6	12 april 2007	27 februari 2007
7	24 mei 2007	3 april 2007
8	21 juni 2007	8 mei 2007

zaterdag 4 november, Nieuwegein

Jaarvergadering/Studiedag

Organisatie NVvW

Zie ook pag. 71-73 en 78-81 in dit nummer.

vanaf 10 november, Amsterdam (4 vrijdagmiddagen)

Masterclass Wiskunde: Kraak de code
Organisatie VU Amsterdam

vrijdag 10 november, Utrecht

Netwerkbijeenkomst A-lympiade en Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

woensdag 15 november, Utrecht

Studiedag Wiskunde in de vernieuwde onderbouw
Organisatie APS

dinsdag 21 november, Utrecht

Studiedag Wiskunde op weg naar 2010
Organisatie APS en cTWO

vrijdag 24 november, op de scholen

Wiskunde A-lympiade / Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

zaterdag 25 november, Amersfoort

Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis

woensdag 29 november, Utrecht

Studiedag Wiskunde leren in een ELO
Organisatie APS

woensdag 13 december, Den Haag

Didaktief-jubileumcongres
Organisatie Tijdschrift Didaktief

dinsdag 19 december, Groningen

Studiedag Wiskunde & computers
Organisatie RU Groningen

zaterdag 6 januari 2007, Utrecht

Wintersymposium
Organisatie KWG

woensdag 17 januari 2007, Ede

Vijfde Reehorstconferentie wiskunde
Organisatie APS

di. 23 t/m za. 27 januari 2007, Utrecht

Nationale OnderwijsTentoonstelling
Organisatie VNU Exhibitions



VOORAANKONDIGING

**Reserveer in uw agenda!
Meer informatie en aanmelden op
www.netwerk.wolters.nl**

Netwerk
docentendag

20 november 2006
De Reehorst te Ede

Netwerk



Wolters-Noordhoff
a Wolters Kluwer business