

HET ABC-VERMOEDEN OEFENEN IN DE ELO SAMENWERKEND LEREN

juni
2006/nr.8
jaargang 81



vermoeden $a+b+c$ fcc
 $1+8=9$
 $1=1$
 $8=2^3$
 $9=3^2$
 $1+10=11$
 $1=1$
 $10=2 \cdot 5$
 $11=11$
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$
 } ontbinden in priemfactoren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom
Marja Bos, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Jos Tolboom
Joke Verbeek

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Houtsnip 22, 7827 KG Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvww.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars

www.nvww.nl



Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvww.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvww.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bommel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 46,50
Studentleden: € 26,50
Gepensioneerden: € 31,50
Leden van de VWW: € 31,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 31,50
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

8

juni 2006 JAARGANG 81

369	Van de redactietafel [Marja Bos]
370	Reken mee met ABC [Ionica Smeets, Gillien Geuze]
373	40 jaar geleden [Martinus van Hoorn]
374	Een wiskunde-oefenomgeving in de eigen ELO [Christian Bokhove e.a.]
378	Samenwerkend leren in het wiskundeonderwijs [Jan Apotheker]
383	Wiskunde in de theaterklas [Irene Dalm]
386	Vakantiecursus 2005: De schijf van vijf [Gert de Kleuver]
388	Per, schakel voor een nieuwe algebra [Albert Dorresteyn]
392	Van boldriehoeken naar het platte vlak [Jos en Karin Paus]
397	Muurtje bouwen, kansvariabele transformeren [Rob Bosch]
398	Financiële wiskunde [Nico Alink, Michel Vellekoop]
403	Is het gemiddelde wel zo harmonisch? [Simon van der Salm]
406	Schoolexamens 2007: Leve de vrijheid!? [Mieke Aarts]
408	Hoe bekwaam bent u als leraar? [Stichting Beroepskwaliteit Leraren]
410	Een bijzonder geval [Ad Schenk]
412	Jaarvergadering/Studiedag 2006 [Marianne Lambriex]
413	Van de bestuurstafel [Wim Kuipers]
414	Recreatie [Frits Göbel]
416	Servicepagina

Aan dit nummer werkte verder mee: Peter Boelens.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Meetkunde en statistiek in het vmbo

Aan de examenprogramma's vmbo wordt door de CEVO 'klein onderhoud' verricht. Een belangrijke wijziging betreft de examinering van meetkunde en statistiek. Op dit moment is het nog zo dat de onderwerpen 'Meetkunde' en 'Informatieverwerking en statistiek' jaarlijks wisselend in het Centraal Examen getoetst worden. Maar vanaf 2008 wordt meetkunde een vast onderdeel van het Centraal Examen, terwijl statistiek een vaste plek krijgt in het SchoolExamen. De CEVO heeft inmiddels concept-syllabi gemaakt voor de CE-onderdelen van BB, KB en GL/TL. Zie www.cevo.nl, 'Syllabi vmbo'.

Nieuwe onderbouw

Op 23 mei heeft de Eerste Kamer het wetsvoorstel over de vernieuwde onderbouw aangenomen. Dat betekent dat de nieuwe regelgeving per 1 augustus a.s. van kracht wordt.

De insteek is: stel het leren van de leerling centraal! Een open deur, denk je dan, maar in de praktijk blijkt het nadenken over 'leren' in termen van 'het onderwijzen door de docent' vaak méér aandacht te krijgen dan het nadenken over het eigenlijke leren door de leerling. Een winstpunt, lijkt me, die perspectiefverschuiving.

Een heel ander aspect is het feit dat straks een docent die daartoe bekwaam geacht wordt door het bevoegd gezag, meerdere vakken mag verzorgen, 'mits in het team waarvan hij deel uitmaakt voor alle te geven vakken een bevoegd docent aanwezig is die de inhoudelijke verantwoordelijkheid draagt.' Komt dat wel goed? Hoe krijgt die inhoudelijke verantwoordelijkheid handen en voeten? Veel informatie over de veranderingen is te vinden op www.onderbouw-vo.nl/. Zo valt daar onder meer het volgende te lezen: 'Het bevoegd gezag beslist op welke punten een bepaalde leraar eventueel bijgeschoold moet worden. Daarbij moet het gezag ook de opvattingen van de leden van het team in aanmerking nemen.' En waarschijnlijk wel bekend is het volgende: 'Het curriculum bestaat in de eerste twee leerjaren uit twee delen: het kerndeel en het differentieel deel. Het kerndeel is bestemd voor alle leerlingen en bevat 58 globaal geformuleerde kerndoelen. De school bepaalt zelf de concrete uitwerking van de kerndoelen in vakken, projecten, leergebieden, een combinatie van deze of bijvoorbeeld in competentiegericht onderwijs.'

Hoe gaat uw school het aanpakken? En, specifieker, op welke manier wordt het leren van wiskunde op uw school straks vorm gegeven? De redactie ziet uw bijdragen graag tegemoet!

40 jaar geleden

In dit nummer vindt u de laatste aflevering van de rubriek '40 jaar geleden', gestart in 1996 door Martinus van Hoorn na zijn aftreden als hoofdredacteur. In de door hem geselecteerde fragmenten haalde Martinus niet alleen historisch interessante kwesties uit het wiskundeonderwijs naar voren, maar wist hij ons ook regelmatig te verrassen met het feit dat hedendaagse 'hot issues' soms verbazingwekkende overeenkomsten vertonen met discussies van 40 jaar geleden. Nu, nadat hij de rubriek tien jaar lang met veel aandacht voor de aansluiting met de actualiteit verzorgd heeft, vindt hij het wel genoeg. We zullen het voortaan zonder zijn historische bijdragen moeten doen. Martinus, dank je wel!

Vorm en inhoud

'Inhoud gaat boven vorm!', roep ik nogal eens. Tegelijkertijd moet ik toegeven, dat 'vorm' een boel kan doen... Schone schijn? Hoe het ook zij, ondanks de vrolijke, strakke uitstraling van Euclides besloot de redactie dat het tijd werd voor een opfrisbeurt. Vanaf september zal uw lijfblad daarom in een nieuwe vormgeving verschijnen.

Special

Het themanummer van de komende jaargang heeft als werktitel 'Wiskunde(onderwijs) en Beroep'. Bijdragen van lezers zijn natuurlijk zeer welkom; stuur uw tekst in vóór 1 september a.s.

U kunt er nog een zomer lang over nadenken... Prettige vakantie!

REKEN MEE MET ABC

[Ionica Smeets en Gillien Geuze]

Inleiding

Dit najaar gaat het project *Reken mee met ABC* van start. De rode draad is de nieuwe heilige graal van de wiskunde: het onbewezen ABC-vermoeden. Met lesbrieven, een uitgebreide populair-wetenschappelijke website over wiskunde en een wedstrijd hoopt dit project enthousiasme voor wiskunde op te wekken bij scholieren en algemeen publiek. In dit artikel leggen we uit wat de opzet van het project is en hoe wiskundeleraars en hun leerlingen mee kunnen doen.

Onopgelost probleem

Voordat we iets over het project vertellen, is het goed om uit te leggen wat het ABC-vermoeden eigenlijk inhoudt. Dit vermoeden is een van de weinige onopgeloste wiskundige problemen die tamelijk eenvoudig aan niet-wiskundigen zijn uit te leggen. Door veel wiskundigen wordt het ABC-vermoeden gezien als de opvolger van de in de jaren negentig bewezen laatste stelling van Fermat.

ABC-drietallen

Het ABC-vermoeden gaat over positieve gehele getallen a , b en c , waarbij $a + b = c$.

Neem bijvoorbeeld $a = 5$, $b = 27$ en $c = 32$. Nu ontbinden we deze getallen elk in priemfactoren:

$$a = 5$$

$$b = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

We definiëren het *radicaal* r van dit drietal a , b en c als het product van alle verschillende priemfactoren die voorkomen. In ons voorbeeld is het radicaal dus $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Als dit radicaal r kleiner is dan c , dan hebben we een zogenoemd ABC-drietal gevonden. In bovenstaand voorbeeld zien we dat $30 < 32$ en dat we dus een ABC-drietal hebben.

In het voorbeeld hierboven zijn a , b en c bewust zó gekozen dat ze een ABC-drietal vormen, maar de meeste drietallen zijn non-voorbeelden: als je zomaar willekeurige getallen kiest, dan is de

kans heel klein dat het een ABC-drietal is. Neem bijvoorbeeld eens $a = 1979$ (mijn geboortjaar) en $b = 7081661$ (mijn gironummer), dan is $c = a + b = 7083640$. We krijgen nu:

$$a = 1979$$

$$b = 19 \cdot 372719$$

$$c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 177091$$

In dit geval geldt $r = 24818607893108290$ en dat is dus heel veel groter dan c .

Het is eenvoudig te bewijzen dat er oneindig veel ABC-drietallen zijn: voor elk geheel getal n geeft $a = 1$, $b = 9^n - 1$ en $c = 9^n$ een ABC-drietal. Toch zijn de ABC-drietallen betrekkelijk zeldzaam. Er zijn bijvoorbeeld maar vijftien ABC-drietallen met $c < 300$ en $a < b$.

De kwaliteit van een drietal

We willen verschillende ABC-drietallen graag met elkaar vergelijken; daarom wordt aan elk ABC-drietal een *kwaliteit* gegeven. Hoe groter de kwaliteit, des te 'beter' is het ABC-drietal. We vinden een drietal goed als r flink kleiner is dan c . We definiëren de kwaliteit q door:

$$q = \lceil \log c \rceil$$

De kwaliteit q is dus de macht waartoe je r moet verheffen om c te krijgen. Voor het ABC-drietal 5, 27, 32 hierboven is q ongeveer 1,019. Omdat r bij een ABC-drietal altijd kleiner is dan c , is q altijd groter dan 1.

Er bestaan dus oneindig veel drietallen met kwaliteit groter dan 1, maar zijn er ook oneindig veel drietallen met een kwaliteit van minstens 1,1? Of minstens 1,01? Of 1,001? Op dit moment is er geen methode bekend die oneindig veel drietallen met een kwaliteit groter dan zo'n constante geeft. Het lijkt er juist op dat voor elke constante strikt groter dan 1 maar eindig veel ABC-drietallen bestaan.

Dit is precies het ABC-vermoeden. Dat luidt namelijk:

Als q een willekeurig getal groter dan 1 is, dan hebben maar eindig veel drietallen de kwaliteit tenminste q .

reken mee met

B

A

C



Het beste ABC-drietal dat we kennen, heeft kwaliteit 1,62991 ($a = 2$, $b = 3^{10} \cdot 109$, $c = 23^5$). Niemand weet of er een beter drietal bestaat. En zo zijn er nog veel meer open vragen rond het ABC-vermoeden.

Het begin van het project

Hendrik Lenstra Jr. stond aan de wieg van dit project. Hij is hoogleraar in Leiden en kreeg in 1998 de Spinoza-premie voor zijn werk. Ook is hij bekend door het dichtten van het gat in de Escherprent^[1]. Een paar jaar geleden werd Hendrik Lenstra gevraagd een lezing voor een breed publiek te geven op een Amerikaanse universiteit. Hij vroeg zich af hoe hij het ABC-vermoeden uit kon leggen aan niet-wiskundigen. Dit was toch wezenlijk lastiger dan bijvoorbeeld de stelling van Fermat of het vermoeden van Goldbach. Hij kwam op het idee om het vinden van drietallen als een spannende wedstrijd te presenteren: wie vindt het drietal met de hoogste kwaliteit? Het publiek reageerde erg enthousiast op zijn verhaal.

Lenstra gaf daarom dezelfde lezing op de Nederlandse Wiskunde Dagen onder de titel *Reken mee met ABC*. Na afloop kwam Carl Koppeschaar, de hoofdredacteur van Kennislink, naar hem toe en zei: 'Die wedstrijd om goede drietallen te vinden, die gaan we samen organiseren.' Dit idee is uitgroeit tot het project *Reken mee met ABC*. Inmiddels is het project in volle gang, Leidse wiskundigen werken aan slimme methodes om ABC-drietallen te zoeken, wiskundelerares Gillien Geuze ontwikkelt didactisch materiaal en in samenwerking met Carl Koppeschaar wordt op dit moment de website ontwikkeld. Het project wordt ook gesteund door de landelijke wiskundecluster DIAMANT^[2].

Leraar in Onderzoek

Sinds september 2005 is Gillien Geuze (zie [voeropagina](#)) als Leraar in Onderzoek betrokken bij dit project^[3]. Haar inbreng is om lesbrieven samen te stellen voor allerlei niveaus: van bovenbouw basisschool tot misschien wel het hbo. Daarnaast

verzamelt ze andere wiskundige problemen die in nauw verband staan met het ABC-vermoeden. Denk bijvoorbeeld aan de al genoemde stelling van Fermat, maar ook pythagoreïsche drietallen, de vergelijking van Pell en de vergelijking van Catalan. Al deze onderwerpen hebben een kleurrijke geschiedenis die dóór loopt tot op de dag van vandaag, en ze zijn uitstekend geschikt om de cultuur van de wiskunde mee over het voetlicht te brengen. Ze werkt deze problemen uit om ze toegankelijk te maken voor het gewone publiek. Verder onderzoekt zij het ontstaan van het ABC-vermoeden, een stukje geschiedenis, al betreft het maar twintig jaar.

Lesbrieven

De opzet is dat de lesbrieven, die ook op de website komen, gebruikt kunnen gaan worden in een les als extra informatie over een onderwerp, bijvoorbeeld op het moment dat zo'n onderwerp op school aan bod komt. Te denken valt aan de begrippen delers, priemgetallen, modulo-rekenen, pythagoreïsche drietallen en met logaritmen zoeken naar goede kwaliteiten van de drietallen. Met opgaven, oefeningen en puzzeltjes wordt de theorie van een bepaald onderwerp uitgediept. Daarnaast kan het materiaal dienen om leerlingen zelfstandig een werkstukje te laten maken.

De website

Voor dit project wordt in samenwerking met Carl Koppeschaar en de populair-wetenschappelijke website Kennislink een website, www.rekenmeemetabc.nl, gemaakt met uitgebreide informatie. Natuurlijk komt daar alles op te staan over het ABC-vermoeden zelf, maar ook informatie over de eerder genoemde bredere wiskundige problemen, zoals de stelling van Fermat. Het thema van de site is *Wiskunde is nooit af*. Voor elk niveau vanaf bovenbouw basisschool zullen er geschikte achtergrondartikelen op deze pagina komen. Ook de lesbrieven zullen on line beschikbaar zijn. De site wordt de komende maanden ontwikkeld en zal qua opzet lijken op de site van De Grote Griepmeting (www.degrotegriepmeting.nl).

Nr.	a	b	c	n
1	2	$2^{10} \times 10^6$	2^5	1.0^{0000}
2	3	$2^5 \times 5 \times 7^4$	$2^{10} \times 2^5$	1.027379
3	$2^5 \times 307$	$7 \times 27^2 \times 11^8$	$2^5 \times 3^{22} \times 5^5$	1.03349
4	100	$2^{11} \times 13^5$	$2^5 \times 3^8 \times 17^5$	1.51076
5		5×3^7	$2^5 \times 7$	1.50769
6	2^5	5^{10}	$2^5 \times 29$	1.51705
7	$2^5 \times 11^5 \times 31^5$	$11^{10} \times 13^5 \times 7^8$	$2^5 \times 3^5 \times 5^3 \times 13^5$	1.51146
8	2^5	$2^5 \times 17^5 \times 17^2$	$11^5 \times 2 \times 31^5 \times 3^5$	1.52147
9	$2^5 \times 3^5$	$2^{21} \times 5$	$2^5 \times 11^5 \times 5$	1.52700
10	$2^{15} \times 7^2 \times 17^2$	$17^8 \times 95 \times 2^{18}$	$2^5 \times 3^3 \times 7^{13}$	1.5^{0000}

De wedstrijd

Op internet worden lijsten bijgehouden met ABC-drietallen^[4], maar er wordt nergens systematisch naar drietallen gezocht. De meeste bestaande methodes prikken goede drietallen met een of andere truc. Bij dit project willen we alle drietallen tot een bepaalde bovengrens voor c in kaart brengen. Zo kan er meer inzicht komen in de verdeling van de drietallen en de bijbehorende kwaliteiten. In Leiden werken wiskundigen aan een nieuw algoritme om dit snel te doen.

De bedoeling is om dit algoritme te verspreiden onder het grote publiek via een 'distributed computing' systeem. Deelnemers stellen hun computer dan beschikbaar om mee te rekenen. Op deze manier wordt al door duizenden mensen naar bewijs van buitenaards leven (SETI) en Mersenne-priemgetallen (GIMPS) gezocht. In het Mersenne-project zijn de afgelopen tien jaar negen nieuwe Mersenne-priemgetallen gevonden. In de publiciteit wordt altijd de naam van degene genoemd op wiens computer het nieuwe getal is gevonden. Ook zijn er flinke geldprijzen te winnen. De eerste die een priemgetal met tien miljoen decimalen vindt, krijgt bijvoorbeeld 100.000 dollar.

Zulke grote prijzen zullen we in *Reken mee met ABC* niet uitloven, maar we willen de vindsters van de beste ABC-drietallen zeker belonen. Daarnaast willen we ook prijzen uitloven voor inhoudelijke prestaties, bijvoorbeeld voor het beste profielwerkstuk of praktische opdracht over een onderwerp op de website.

Meedoen

Hoe kunt u als wiskundedocent meedoen aan dit project?

U kunt natuurlijk de lesbrieven gebruiken in uw

lesprogramma. Daarnaast kunt u uw leerlingen naar onze website sturen en aanmoedigen om mee te doen aan de wedstrijd. Ook is het mogelijk om met de hele school als team mee te doen aan het zoeken naar de ABC-drietallen.

De website gaat pas in het najaar helemaal draaien, maar een eerste versie is te bekijken op www.rekenmeemetabc.nl.

Noten

[1] Zie <http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/>

[2] Zie www.win.tue.nl/diamant/

[3] Zie het artikel van Hanne Obbink in *Euclides* 81-7, mei 2006.

[4] Zie www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html

Over de auteurs

- Ionica Smeets werkt één dag per week als nationale pr-medewerker wiskunde. Ze is in die functie betrokken bij de website en publiciteit rond dit project. De andere dagen is ze AiO in de getaltheorie bij Rob Tijdeman in Leiden.

E-mailadres: smeets@math.leidenuniv.nl

- Gillien Geuze werkt als docent wiskunde aan de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren (CSW) te Middelburg aan de afdeling havo/vwo. Daarnaast werkt ze één dag in de week aan de Universiteit Leiden als Leraar in Onderzoek. Dit is een project van de NWO dat leraren in contact brengt met de universiteiten. Door het enthousiasme dat ze opdoen, kunnen ze wellicht leerlingen stimuleren om te kiezen voor een wiskundestudie. Als onderwerp voor dit LIO-schap heeft Gillien gekozen voor het project 'Reken mee met ABC'.

E-mailadres: gze@cswalcheren.nl

FUNCTIES EN FUNCTIE-NOTATIES

door

Prof. Dr. H. FREUDENTHAL

Utrecht

Sinds enige tijd is bij ons (en elders) de functie onderwerp van discussie. Nu qua verwarring wel het uiterste bereikt is, waag ik het, mijn vinger op te steken, in de overtuiging dat het geen kwaad meer kan. Ik wil me dan onthouden van het verleidelijke gebruik van termen zoals „ouderwets” en „modern”, die blijkbaar niet alleen als het om dameskleding gaat tot meningsverschillen kunnen leiden.

Wel wil ik consequent van elkaar scheiden de problemen van *functie-definitie* en *functie-notatie*.

Ik preciseer meteen: met *definitie* bedoel ik niet een netjes neergeschreven volzin, maar het proces van het definiëren, de psychologische en didactische voorbereiding van het functiebegrip en de wijze waarop wij het actief hanteren. Veiligheidshalve wil ik daarom van *functie-presentatie* spreken. Het gaat dus nu om *functie-presentatie* en *functie-notatie*.

(...)

En nu de hoofdvraag: Hoe moet men de functie aan de leerling presenteren? Volgens de eerste methode („een wet, . . .”) of volgens de tweede („een deelverzameling van . . .”). Laten we enkele functies de revue passeren, die als voorbeelden dienst kunnen doen. „Het huisnummer van . . .” — moet ik eerst aan elk huis alle denkbare huisnummers plakken en dan de niet gewenste doorschrappen, om in te zien, dat dit een functie is, of moet ik doodsimpel zeggen: bij elk huis staat een nummer, dat nummer is eraan toegevoegd en die toevoeging noem ik een functie (of afbeelding)? „Moeder van . . .”, „het dubbele van . . .”, „bovengrens van . . .” — al deze functies vertonen dezelfde aanschouwelijke structuur van het afbeelden, van het toevoegen van het een aan het ander — door het algemeen relatie-begrip (logisch of verzamelingstheoretisch) erbij te halen, verduistert men ze alleen.

Gedeelten uit een artikel van H. Freudenthal, uit Euclides 41 (1965-1966), bldzn. 299-304.

EEN WISKUNDE-OEFENOMGEVING IN DE EIGEN ELO

[Christian Bokhove, Peter Boon, André Heck, Gerard Koolstra]



FIGUUR 1 Gebruik van het wisweb-applet 'Herleiden' in Moodle



FIGUUR 2 DITwis over kansrekening binnen Moodle

Inleiding

Dit is het derde artikel in een reeks met ervaringen uit het GALOIS-project. De naam van de welbekende wiskundige wordt als acroniem gebruikt voor Geïntegreerde Algebraïsche LeerOmgeving In School. Doelstelling is één digitale werkomgeving te realiseren waarin

1. leerlingen met wiskunde kunnen oefenen en zichzelf te allen tijde kunnen toetsen;
2. wiskundeopdrachten voor een deel 'willekeurig' gegenereerd worden, zodat de hoeveelheid oefenstof schier onuitputtelijk is;
3. activiteiten en antwoorden van leerlingen worden opgeslagen;
4. leerlingenwerk automatisch 'intelligent' van commentaar wordt voorzien.

Daarbij willen we deze doelen bereiken op basis van *open source* en *open standaarden*, zodat ieder die dat wil zowel tijdens als na afloop van het project gebruik kan maken van de resultaten (kennis en producten). Evenals het vorige artikel^[1] gaan we hieronder vooral in op het derde punt. Stond in het vorige artikel een centrale Wiskunde Oefenomgeving centraal, hieronder gaan we in op de mogelijkheden om de eigen ELO^[2] op school te gebruiken.

Applets in eigen ELO

Een groot voordeel van gebruik van de eigen ELO is dat een groot aantal zaken 'vanzelf' gaan. Leerlingen weten hoe ze moeten inloggen, het is mogelijk om individuele of groepen leerlingen via e-mail of anderszins berichten te sturen, en het is mogelijk om (toets)resultaten te bekijken en te exporteren.

Er zijn wel een paar zaken die geregeld moeten worden:

- Het applet en de ELO moeten met elkaar kunnen communiceren.
- Het zou ook moeten werken in een andere ELO - wie weet werken we op school over een paar jaar wel weer met een heel andere digitale leeromgeving.
- Het zou ook moeten werken met andere applets, of oefenprogramma's.

Om bovenstaande problemen op te lossen is het nodig om standaardafspraken te maken over een taakverdeling tussen de ELO en leerinhoud (de applets of andere oefenprogramma's) en over de communicatie tussen die twee. Een geaccepteerd en tamelijk wijdverbreid model waarin dergelijke afspraken vastliggen is SCORM^[3]. Veel systeemleveranciers ondersteunen dit model. Aan de SCORM-norm voldoen bijvoorbeeld: Blackboard^[4], Moodle^[5], en N@tschool!^[6]. Binnen het GALOIS-project hebben we een aantal wiswebapplets en oefentoetsen aangepast aan de SCORM-norm zodat ze gebruikt kunnen worden in Moodle (de ELO die op het St. Michael College wordt gebruikt), maar ook in een willekeurige andere ELO die SCORM ondersteunt. Dit maakt het mogelijk om 'SCORM-pakketjes' (in

vorm van zip-bestanden) te maken^[7] die in diverse leeromgevingen kunnen worden gebruikt.

Een van de applets die aan de SCORM-norm is aangepast heet 'Herleiden'. Dit applet is ingezet bij 4-havo wiskunde B1 om nog eens te oefenen met het herschrijven van formules. U moet dan denken aan het vereenvoudigen van uitdrukkingen als $2 - 3(2a + 2b) - 2c + a - (a + 2)$, $(a + b)(b + c) - 2ac$ en $(2x + y)^2 - (2x - y)^2$; zie figuur 1. Het was namelijk opgevallen dat leerlingen hier moeite mee hebben, ondanks alle aandacht en (ogenschijnlijke) successen in de tweede en derde klas. Een wijze les, die we eigenlijk ook wel kennen: vaardigheden moet je niet alleen aanleren, maar ook onderhouden. Ter voorbereiding op het onderwerp differentiëren, waarin deze algebraïsche vaardigheden onontbeerlijk zijn, moeten ze door sommige leerlingen weer even getraind worden en het liefst zonder dat dit veel extra werk voor de docent met zich meebrengt. Digitaal oefenen is hier heel geschikt voor. Leerlingen kunnen zowel in computerpractica als thuis oefenen met het herschrijven van formules. Ook hier worden scores en resultaten bijgehouden, waardoor het mogelijk wordt om te zien hoe goed leerlingen deze vaardigheid beheersen.

Binnen MichelangElo (onze op Moodle gebaseerde ELO) is het nu mogelijk om de resultaten van de leerlingen te bekijken. Natuurlijk zijn er leerlingen die het werk in eerste instantie niet doen. Dat zie je aan hun scores, maar ook aan de activiteiten of het gebrek daaraan binnen de ELO. Een standaardvoorziening is immers dat de activiteiten van elke gebruiker worden geregistreerd. Deze leerlingen kun je als docent meteen ferm aanschrijven via de in Moodle ingebouwde berichtmogelijkheid, of via e-mail. Ook leerlingen die er wel veel tijd in steken maar problemen hebben met de stof zijn snel te signaleren, zeker omdat ook nog eens in detail kan worden gekeken naar de ingevoerde antwoorden, en in dit geval zelfs naar 'de weg naar het antwoord' toe. Zo waren er nog diverse leerlingen die last bleken te hebben van de hardnekkige misconceptie van lineair redeneren en een uitdrukking als $(2a + b)^2$ uitwerken tot $4a^2 + b^2$. De volgende les zijn deze leerlingen even apart genomen om nog wat extra uitleg te krijgen over het oppervlaktemodel en over de reden waarom hun antwoord fout was. De resultaten kunnen geëxporteerd worden naar tekst- en Excel-formaat. Hierdoor bestaat ook de mogelijkheid om deze met wat kunst- en vliegwerk in cijferprogramma's toe te voegen. Of de 4-havo-leerlingen het herleiden van wiskundige formules nu structureel goed genoeg beheersen om met vertrouwen 5 havo in te gaan en met differentiëren aan de slag te gaan, zal de tijd moeten leren. Wél is duidelijk dat ook leerlingen in deze categorie erg gemotiveerd zijn of kunnen worden om op deze manier aan het werk te gaan. Applets zijn niet alleen speeltjes voor de onderbouw, maar kunnen

op elk niveau ingezet worden. Het is ook evident dat leerlingen met de algebra-applets op de korte termijn formules beter lijken te begrijpen, dat de docent hun vorderingen prima in de gaten kan houden en dat hij of zij kan inspelen op gemaakte fouten. En dat alles in een ELO waarmee docent en leerling vertrouwd zijn. Het wordt natuurlijk nog mooier wanneer de docent binnen de ELO op gemakkelijke wijze het applet kan configureren door opgaven weg te halen of te vervangen door eigen opdrachten.

Intelligente feedback met registratie

In het eerste artikel uit de reeks over het GALOIS-project^[8] is DITwis uitgebreid besproken. Ter herinnering: dit is een reeks computertoetsen waarbij veel aandacht wordt besteed aan inhoudelijke feedback op basis van het ingetypte antwoord. Hoewel het in eerste instantie juist bedoeld was als zelfstandige oefening (en toetsing) zonder meekijkende of interveniërende docent, leek het toch de moeite waard om te kijken wat integratie van dit soort toetsen in een ELO zou opleveren. Daarom is DITwis aangepast aan de SCORM-eisen en in diverse klassen uitgeprobeerd.

De voordelen van de integratie werden al snel zichtbaar, evenals enkele (hopelijk tijdelijke) nadelen. We noemen de belangrijkste punten:

- Je hebt als leraar veel meer zicht op wie met DITwis aan de slag gaat, voor hoe lang, en met welk resultaat. Mede door het intensieve gebruik van de computerlokalen op school (bij diverse vakken) lukt het lang niet altijd een computerpracticum te geven op het geëigende moment. Omdat (praktisch) alle leerlingen thuis internet hebben is huiswerk een alternatief. Maar huiswerk wordt niet altijd even goed gedaan. Via de ELO is heel makkelijk per leerling te zien hoeveel tijd er aan besteed is en met welk resultaat.

- Wel moet aangetekend worden dat er soms technische problemen staan tussen droom en daad. Pop-up-vensterblokkeerders, niet-werkende verbindingen en verkeerde handelingen, waardoor resultaten niet werden opgeslagen, zijn maar enkele van de obstakels die soms in de weg liggen. In hoeverre het gaat om serieuze problemen, of om nieuwe varianten op het aloude 'De brug stond open' valt nog te bezien. Dit alles neemt niet weg dat we de indruk krijgen dat de integratie binnen

FIGUUR 3 Briefwisseling naar aanleiding van DITwis goniö

| Ik heb een vraag over de DIT

1-7 ging soepel en snel,

maar daarna ging ik de mist in,

bij oefening 8 snap ik niet of ik nou de SIN/COS/TAN moet gebruiken

Maak een tekening, en verdeel de driehoek in twee rechthoekige

Ga na hoe groot de hoeken zijn

Omdat je de schuine zijde weet moet je sinus of cosinus gebruiken (

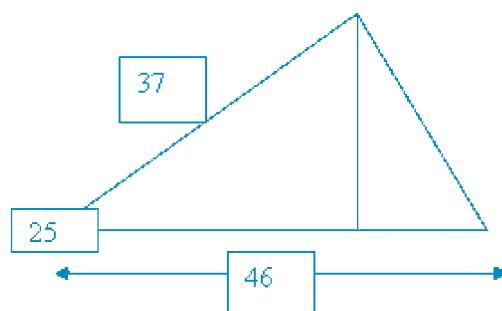
| bij oefening 9 ben ik helemaal de kluts kwijt

Neem de tekening over (met duidelijk de rechte hoek erin) en draai hem zo dat je het goed ziet

Denk ook nog even aan de tekening die van morgen op het scherm stond (met 3-4-5)

| bij oefening 10 weet ik ook niet wat ik met de SIN/COS/TAN moet doen..

Ook hier is een tekening erg belangrijk , bijv zoiets (de getallen zijn natuurlijk anders)



Die 25 is de hoek in graden, de andere getallen zijn lengtes

Begin met de linker rechthoekige driehoek, en bereken eide rechthoekszijden (met sinus en cosinus)

de ELO het makkelijker maakt om alle leerlingen (en niet alleen de meest serieuze) aan het werk te krijgen met dit soort oefeningen.

- Om op het vorige punt aan te sluiten: het is gemakkelijk per leerling precies te kijken naar wat er aan de hand is. Welke opgaven zijn geprobeerd en welke niet? Waar zitten de problemen? Bij de 4-vwo-toets over kansen en tellen bleek dat in eerste instantie bijna niemand verder kwam dan de eerste paar opgaven en bij de vijfde opdracht (met woorden als 'minstens' en 'hoogstens') grote problemen kreeg. Uiteraard aanleiding om daar op in te spelen in de volgende les (zie figuur 2).

- Een groot voordeel is ook dat leerlingen na een bepaalde tijd kunnen stoppen, en later (thuis, op school of waar dan ook) verder kunnen gaan met waar ze waren. Deze mogelijkheid levert wel een kleine complicatie op wanneer eerst een gedeelte van een toets in tweetallen gemaakt is, bijvoorbeeld tijdens een computerpracticum, en daarna alleen verder gegaan wordt. De resultaten staan dan op naam van degene die eerst ingelogd heeft, de ander moet opnieuw beginnen.

- Ook hier gaat wel eens wat mis, zodat leerlingen hun werk ineens kwijt zijn. Maar we vermoeden dat dit kinderziektes zijn. (Een aantal jaren geleden hadden velen dit soort problemen met het gebruik van een tekstverwerker, nu hoor je daar 'nooit' meer wat over.)

- Binnen een ELO lijkt de drempel kleiner om hulp te vragen. Hierbij kan een forum gebruikt worden, een soort berichtenfunctie of gewoon e-mail. Dit is mede afhankelijk van de manier waarop de bestaande ELO is ingericht en de mogelijkheden van de achterliggende software. Het kan zijn dat sommige collega's dit eerder als een nadeel zien dan als een voordeel, maar dat is een kwestie van 'smaak'. Wij zien het als een welkome aanvulling op andere vormen van contact.

Conclusies

Bestaande wiskundeprogramma's worden nóg krachtiger en beter inzetbaar door de mogelijkheid om resultaten en antwoorden van leerlingen online te volgen. Leerlingen weten dat ze door registratie van hun werk in de gaten gehouden (kunnen) worden door hun leraar of lerarees. Samen met andere mogelijkheden van vele ELO's, vooral op communicatiegebied, stimuleert dit leerlingen al genoeg om het werk daadwerkelijk te doen, en soms zelfs meer. Ze vinden het 'big brother is watching you' concept over het algemeen niet vervelend. Integendeel, ze vinden het juist fijn dat de docent snel inzicht in hun fouten kan krijgen en hen daardoor beter kan helpen. Als een leerling vast zit met een opdracht kan hij of zij door de feedback en de mogelijkheid tot simpelweg uitproberen soms verder komen dan gewoonlijk. Kortom, digitale oefeningen en diagnostische toetsen hebben een meerwaarde in het wiskundeonderwijs wat betreft motivatie en prestaties van leerlingen. Bovendien kost het de

docent niet eens zoveel extra werk en kan hij of zij zuinig omspringen met de contacttijd en deze efficiënt gebruiken voor uitleg en hulp. Het is een stimulans en steun in de rug van docenten en leerlingen wanneer zij voor een wiskundige oefenomgeving gebruik kunnen maken van de ELO waarmee ze op school en bij andere vakken al vertrouwd zijn. Voorwaarde is wel dat de wiskundesectie over deze ICT-inzet in het onderwijs op één lijn zit. Ideaal is wanneer docenten met instapvrees in het begin door meer ervaren collega's ondersteund kunnen worden en wanneer er voldoende tijd voor sectieoverleg wordt gemaakt om ervaringen met elkaar uit te wisselen en om het ICT-gebruik te evalueren en te verbeteren.

Noten

[1] C. Bokhove, P. Boon, A. Heck, G. Koolstra: *Digitale Wiskunde Oefenomgeving*. In: *Euclides* 81-6 (2006).

[2] We gebruiken dit woord omdat het ingeburgerd lijkt, hoewel er betere denkbaar zijn.

[3] Het Sharable Content Object Reference Model (SCORM) is geen specificatie voor uitwisseling en hergebruik van onderwijsmateriaal, maar een in het kader van het Advanced Distributed Learning (ADL) Initiative ontwikkeld model waarbij verschillende specificaties zijn samengevoegd tot één samenhangend geheel van technische afspraken over het beschrijven en het opslaan van digitale leermaterialen en over de interactie tussen ELO en leermaterialen. Zo bestaat de SCORM 2004 versie uit een verzameling van zeven verschillende standaarden, o.a. voor metadatering (wat voor materiaal? voor wie geschikt? door wie gemaakt? hoe te gebruiken? etc.), voor assemblage van onderwijsmaterialen in de vorm van materiaalpakketten, voor navigatie door het lesmateriaal en voor het gedrag (het 'afspelen') van een leereenheid in een ELO.

[4] www.blackboard.com

[5] www.moodle.org

[6] www.threeships.nl

[7] Dit kan handmatig bijv. met RELOAD, gratis verkrijgbaar via www.reload.ac.uk, maar sinds kort ook automatisch.

[8] C. Bokhove, A. Heck, G. Koolstra (2005). *Intelligente feedback bij digitale toetsen en oefeningen*. In: *Euclides* 81-2 (2005); pp. 70-74.

Over de auteurs

- Christian Bokhove is docent wiskunde & informatica aan het St. Michael College te Zaandam en projectleider van het GALOIS-project.
E-mailadres: bokhove2@zonnet.nl

- Peter Boon is ontwerper van educatieve software bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: P.Boon@fi.uu.nl

- André Heck is projectmanager aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam op het gebied van ICT toepassingen in onderwijs bij wiskunde en natuurwetenschappen.
E-mailadres: heck@science.uva.nl

- Gerard Koolstra is docent wiskunde aan het St. Michaël College en al vele jaren betrokken bij diverse projecten op het snijvlak van ICT en wiskunde.
E-mailadres: g.koolstra@chello.nl

Meer informatie over het GALOIS-project vindt u op de website:
www.galoisproject.nl

SAMENWERKEND LEREN IN HET WISKUNDEONDERWIJS

[Jan Apotheker]

Inleiding

In het kader van mijn promotieonderzoek heb ik onderzoek gedaan naar problemen bij de implementatie van samenwerkend leren in de tweede fase van het voortgezet onderwijs. In dit artikel wordt na een algemene bespreking van samenwerkend leren een lessenserie voor wiskunde besproken, die als onderdeel van het onderzoek is uitgevoerd.

Drie werkwijzen

In het onderwijs kan de manier waarop gewerkt wordt in lessen, verdeeld worden in drie categorieën. Deze kunnen aangeduid worden met individueel werken, competitief werken en samen werken.

Individueel werken is de werkwijze die in het Nederlands onderwijs het meest wordt gehanteerd. Leerlingen werken in het algemeen individueel aan de hand van een docent en/of een boek de stof door, maken opgaven en individuele proefwerken. Kenmerken van individueel werken zijn dat leerlingen eigenlijk geen relatie met elkaar hebben en niet afhankelijk van elkaar zijn. Deze traditioneel lerende groep is de groep die ontstaat als leerlingen de opdracht krijgen opgaven te maken in de klas. Ze zijn daar al dan niet druk mee bezig, terwijl ze tussendoor wat met elkaar overleggen.

Bij *competitief leren* is die afhankelijkheid er wel. Kenmerk van competitief leren is dat er maar één de beste kan zijn. Zoals Chad Hedrick bij de Olympische spelen in Turijn onlangs aangaf: 'Second place is the first loser.' Het betekent dat leerlingen negatief afhankelijk van elkaar zijn. Als een ander beter is, dan ben jij slechter. In het

Nederlandse onderwijs komt deze vorm niet erg vaak voor. Bij lichamelijke opvoeding komt het wel voor, en bij vormen waarbij die competitie belangrijk wordt gevonden, zoals bijvoorbeeld bij de (wiskunde) olympiades.

Bij de derde categorie, *samenwerkend leren*, is het zo dat leerlingen onderling afhankelijk zijn van elkaar voor het bereiken van het leerresultaat. Als één van de leerlingen niet voldoende presteert, of zich onttrekt aan het proces, heeft dat direct gevolgen voor het leerresultaat van de groep als geheel. Een gevolg daarvan is dat leerlingen zich vaak verantwoordelijk gaan voelen voor het leerresultaat van de andere leden van de groep. Een samenwerkend lerende groep is een groep, waarin de leerlingen elkaar respecteren, elkaars inbreng waarderen en de verantwoordelijkheid voelen voor het werken in de groep. Vooral bij grotere opdrachten als een profielwerkstuk zie je dit type groep optreden. Ook in het nieuwe contextgeoriënteerd onderwijs zie je dat de groepjes die samenwerken aan een zelf gekozen project dit soort groepen vormen.

Gebruik van samenwerkend leren

Een van de problemen bij samenwerkend leren is dat samenwerkend lerende groepjes niet vanzelf ontstaan. Als je tegen een groep leerlingen zegt: 'Ga samen maar werken aan die opgaven', gaan ze in principe werken zoals hierboven aangegeven onder individueel werken. Wil je de positieve effecten van samenwerkend leren bereiken, dan zul je daar wat meer voor moeten doen. Zowel Slavin (1995), Johnson & Johnson (1999), als het grotendeels daarop gebaseerde Ebbens (1997) geven aan dat een tweetal aspecten van groot belang zijn. Leerlingen moeten het idee hebben dat ze van elkaar afhankelijk zijn voor hun leerresultaat.

FIGUUR 1 Voorbeeld uit de studiewijzer
FIGUUR 2 Formulier voor tweede deel les (inzet
centrale tekst)

Les 2. Voorbereiding: A maakt 1, B maakt 2, C maakt 3 en D maakt 4.
In de les. Leg de opgaven aan elkaar uit. Als er dingen niet duidelijk zijn, formuleer je vragen voor de docent. D bespreekt deze met de docent.
Maak op het uitgereikte formulier opgave 5.
Maak daarna op de uitgereikte formulieren 6 tot en met 9.
Bespreek de opgaven met elkaar. Als er dingen niet duidelijk zijn, formuleer dan vragen voor je docent. B bespreekt deze met de docent.

5. Het bestuur van een schoolvereniging bestaat uit twee jongens en twee meisjes. Door loting worden twee leden aangewezen, die na afloop van het schoolfeest moeten opruimen en schoonmaken. Het blijkt dat de beide jongens zijn geloot. Hester beweert dat er eerlijk is geloot, maar Hugo twijfelt daaraan.

e. Ben je het met Hugo eens?

f. Simuleer 50 keer een loting van 2 uit zes (zie je boek) en schat de kans op twee ingelote jongens. (doe ieder 15 simulaties)

2. Het bestuur van een schoolvereniging bestaat uit twee jongens en twee meisjes. Door loting worden twee leden aangewezen, die na afloop van het schoolfeest moeten opruimen en schoonmaken. Het blijkt dat de beide jongens zijn geloot. Hester beweert dat er eerlijk is geloot, maar Hugo twijfelt daaraan.

e. Ben je het met Hugo eens?

f. Simuleer 50 keer een loting van 2 uit zes (zie je boek) en schat de kans op twee ingelote jongens. (doe ieder 15 simulaties)

Bijlage les 2b.
Klas 4. Moderne wiskunde A1 deel2, S1, opgave 6
t/m 9
Naam leerling A:
Maak hieronder opgave 6

Geef dit vel vervolgens door aan leerling B. Je krijgt zelf het formulier van leerling D.

Naam Leerling B:

Lees het antwoord van leerling A. Schrijf op of je het eens of oneens bent met zijn uitleg en schrijf ook op waarom. Geef tips ter verbetering, stel vragen ter toelichting.

Geef dit blad nu door aan leerling C. Je krijgt nu het blad van leerling D.

Naam leerling C:
Lees de antwoorden van leerlingen A en B. Schrijf op of je het eens of oneens bent met de uitleg en schrijf ook op waarom. Geef tips ter verbetering, stel vragen ter toelichting.

Geef dit blad door aan leerling D. Je krijgt nu het blad van leerling D.
Leerling D:

Lees het antwoord van leerling A, B en C. Schrijf op of je het eens of oneens bent met de uitleg en schrijf ook op waarom. Geef tips ter verbetering, stel vragen ter toelichting.

Geef het blad door aan leerling A. Je krijgt nu je eigen blad weer terug.
Leerling A. Lees het commentaar. Schrijf op of je van gedachte bent veranderd. Leg uit waarom wel of niet. Geef met een cijfer aan hoe zeker je bent van je antwoord.

Zeker van je antwoord(1-10):

Minstens zo belangrijk is dat ze een eigen individuele verantwoordelijkheid moeten voelen voor hun eigen leren.

Deze twee voorwaarden kunnen gerealiseerd worden in het ontwerp van de opdrachten die de leerlingen krijgen. Door leerlingen in een groep rollen te geven als die van voorzitter, notulist, vragensteller, schrijver, procesbewaker, en contactpersoon voor de andere groepen en de docent, wordt daar al enigszins aan tegemoet gekomen. Ook op andere manieren kan het gerealiseerd worden. Een voorbeeld is: pas op het laatste moment iemand in de groep aanwijzen die namens de groep een antwoord geeft of de groep moet vertegenwoordigen. Met name bij eindpresentaties zorgt dit ervoor dat alle leden van de groep in staat zijn de eindpresentatie te verzorgen. Door ze in onzekerheid te laten wie de presentatie moet geven, zullen de leden ervoor zorgen dat elk lid van de groep in staat is optimaal te presteren.

De individuele verantwoordelijkheid kan het makkelijkst vorm krijgen door een individuele eindtoets. Daardoor zullen leerlingen ervoor zorgen dat ze ook zelf voldoende leren, en minder snel meeliften met de overige leerlingen in de groep. Als alleen het groepsproduct wordt beoordeeld, dan is *meeliftgedrag*, te weinig inbreng hebben in de groep, één van de meest voorkomende problemen in samenwerkend leren. Een individuele toets kan daarvoor een oplossing bieden.

Een andere optie, waarbij de overige leden van de groep gevraagd wordt dit soort gedrag af te straffen, werkt niet, zelfs niet in het hoger onderwijs. Wél mogelijk is de leerlingen elkaar te laten beoordelen en op basis daarvan individuele beoordelingen in de groep te geven. Overigens geldt ook in dat geval dat er een behoorlijke sociale druk is op de leerlingen om elkaar geen onvoldoendes aan te smeren. Om die druk te omzeilen en toch een redelijke beoordeling te krijgen kan het volgende gedaan worden.

Laat de leerlingen elkaar een cijfer op een schaal van 1 tot 5 geven voor hun inbreng in de groep.

In **tabel 1** is een voorbeeld weergegeven en uitgewerkt. Het blijkt dat de minder functionerende leerling inderdaad een lager cijfer krijgt, terwijl de leerling met meer inbreng een hoger cijfer verdient. Leerlingen blijken redelijk eerlijk te zijn in elkaars beoordeling, al geven ze elkaar geen onvoldoendes. Toch geeft deze methode voldoende ruimte om te differentiëren tussen de leerlingen.

Tabel 1. Voorbeeld scores leerlingen

leerling	Oordeel over			
	A	B	C	D
A	5	3	4	4
B	5	4	4	4
C	4	4	4	4
D	4	3	4	4
gemiddelde	4,5	3,5	4	4
vermenigvuldigingsfactor	1,125	0,875	1	1

FIGUUR 3 Werkblad 2b; peer review

Het groepsgemiddelde is 4,0. Op basis hiervan kun je een vermenigvuldigingsfactor afleiden voor elke leerling. Stel dat er als eindcijfer een 8 gegeven is, dan krijgt A een 9, B een 7, en C en D elk een 8.

Uitwerking in de ontworpen lessenserie

In het kader van mijn onderzoek heb ik verschillende lessenseries ontworpen om samenwerkend leren te introduceren. Zowel docenten als leerlingen konden met die lessenserie ervaring opdoen met samenwerkend leren en de effecten en problemen van samenwerkend leren ervaren. Onderwerp van de lessenserie voor wiskunde was de introductie van *kansrekening/combinatoriek* in klas 4. Er werd gebruik gemaakt van het boek 'Moderne wiskunde' 7e editie, A1B1 deel 2, hoofdstuk S-1 tot en met S-4. Samenwerkend leren kent een aantal werkvormen die tijdens deze lessenserie op verschillende manieren werden ingezet. De werkvormen zijn gebaseerd op werkvormen die uitvoerig beschreven staan in het boekje van Ebbens (1997). In **figuur 1** staat een deel van de studiewijzer die voor deze lessenserie gemaakt werd. Weergegeven is de instructie voor les 2 van de lessenserie.

Werkvorm 1

Deze eerste werkvorm is gebaseerd op 'experts' of 'jigsaw'. Leerlingen kregen in de groep een bepaalde taak voor te bereiden. In deze taak zijn zij expert. Deze taken werden vervolgens met elkaar besproken, waarbij de leerlingen aan elkaar uitlegden wat ze gedaan hadden. Dit zorgde ervoor dat leerlingen hun expertise met elkaar deelden. Het aan elkaar uitleggen van de gemaakte opgaven zorgt ervoor dat leerlingen zorgvuldig moesten nadenken over de stappen in het oplossings-algoritme dat ze hadden toegepast. Bovendien leerden ze daar zelf het meest van. In de discussie werden daardoor allerlei misverstanden en eventuele misconcepties opgehelderd. Leerlingen zijn geneigd zich onvoldoende voor te bereiden op de uitleg. Op het moment dat ze aan de beurt zijn om iets uit te leggen merken ze dat ze zelf onderdelen niet voldoende begrijpen. In de discussie die daarop met de rest van het groepje volgt, worden dit soort problemen eventueel met hulp van de docent opgelost.

Werkvorm 2

Een tweede werkvorm die ik ingezet heb is een wat andere uitwerking van het bekende 'denken, delen en uitwisselen'. Deze werkvorm is ook gebruikt in een andere lessenserie, om leerlingen te dwingen gebruik te maken van een systematische probleemaanpak. In de tekst van de opgave werd die aan de orde gesteld. In de les maakten ze gebruik van een voorgedrukt formulier (zie **figuur 2**). Dit formulier werd gebruikt voor een wat grotere opgave. De bedoeling was dat de leerlingen met elkaar in discussie

kwamen over de te volgen oplossingsstrategie. Dit formulier werd op A3-formaat afgedrukt en tussen de leerlingen in gelegd. Aantekeningen werden op dit formulier gemaakt en niet in het schrift. Doordat de leerlingen van elkaar zagen wat ze opschreven ontstond een levendige discussie over de opgave en de gevolgde heuristiek. Het bleek dat leerlingen pas tevreden waren als ze het eens waren over de oplossing van de vraag.

Werkvorm 3

Deze werkvorm is gebaseerd op 'check in duo's'. Ook hier werd zeker in het begin van de lessenserie een formulier gebruikt. In **figuur 3** is een voorbeeld van de figuur opgenomen. In deze werkvorm worden de leerlingen afhankelijk van elkaar gemaakt. In plaats van een boekje met uitgewerkte opgaven te consulteren, moeten nu medeleerlingen hun werk controleren. Leerlingen bedenken eerst zelf een oplossing. Vervolgens moeten ze zich verdiepen in de manier waarop een andere leerling een vraag heeft opgelost. Hierdoor krijgen ze een beter inzicht in de verschillende oplossingsstrategieën die ze gebruiken. Het werk van elkaar nakijken zorgt voor onzekerheid bij de leerlingen. Ze willen graag zeker weten dat ze de vraag goed hebben beantwoord. Door het gebruik van de formulieren heb je als docent een goed zicht op wat de leerlingen doen, en is er de mogelijkheid ze eventueel te corrigeren. Door op de formulieren feedback te geven zorg je er als docent ook voor, dat leerlingen de formulieren serieus invullen.

Voordelen van samenwerkend leren

Een belangrijk aspect bij samenwerkend leren is de discussie tussen de leerlingen onderling over de leerstof. Deze discussie wordt in de literatuur gezien als één van de belangrijkste aspecten van het leerproces. Doordat een leerling uit moet leggen wat hij zelf denkt, brengt hij vanzelf meer structuur aan. Doordat andere leerlingen op hem reageren ontstaat een gemeenschappelijk beeld van de benodigde kennis. Leerlingen verwerken de stof daardoor in het algemeen beter. Daarnaast zijn leerlingen beter gemotiveerd om te werken aan de opgaven. Ik merk in mijn onderzoek, dat leerlingen in het algemeen geconcentreerd een hele les aan het werk zijn met de opdrachten en met elkaar.

Leerlingen zijn samen tot meer in staat dan individueel; gezamenlijk zijn ze in staat om ingewikkelder problemen op te lossen dan individueel.

In de ontworpen lessenserie van 20 lessen maken de leerlingen een groepstoets in les 10 en in les 20. Na afloop van de toets maakten de leerlingen nog een individuele toets, het proefwerk dat ze anders over deze stof zouden krijgen.

Het doel van de groepstoets was tweeledig. Vaak mondt groepswork uit in een verslag of een presentatie. In dit geval heb ik gekozen voor een

Opgave 3 Korfbal (groepstoets 1)

Een korfbalteam moet in de competitie nog vier wedstrijden spelen. Volgens de coach van het team is de kans dat een wedstrijd wordt gewonnen steeds 60% en de kans op een nederlaag 40%. We gaan er van uit dat gelijkspelen bij korfbal nooit voorkomt.

Teken het volledige kansdiagram bij deze situatie.

Het team heeft nog een hele kleine kans om kampioen te worden. Om dat te bereiken moeten de laatste vier wedstrijden in ieder geval allemaal worden gewonnen.

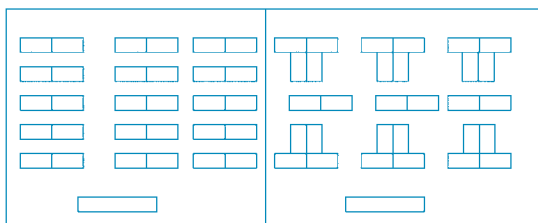
Bereken de kans dat het korfbalteam de laatste vier wedstrijden allemaal wint. Hoe groot is de kans dat de helft van de vier wedstrijden wordt gewonnen? Bereken de kans dat er in de vier wedstrijden minstens één overwinning wordt geboekt.

Groepstoets 2.

5. In een antwoordenboekje staan de volgend antwoorden genoteerd:
 7^3 ; $7!$; $\left(\frac{7}{3}\right)$; 7.6.5

Bedenk bij elk antwoord een vraag die erbij past.

6. Van een ziekte is bekend dat 8 op de 1000 mensen eraan lijden. Een test geeft bij 85% van de zieken een juiste uitslag en bij 95% van de gezonden. De test wordt jaarlijks op 62000 mensen uitgevoerd.
 Hoe groot is de kans op een verkeerde uitslag?



Overleggen	
Klinkt als	Ziet eruit als
Om de de beurt praten	We kijken de leerling die praat
Iedereen geeft zijn mening	Knikken of nee schudden

toets waarbij de leerlingen de werkvormen die ze tijdens de les gebruikt hebben zelf konden toepassen in een toetssituatie. Door de toetsen zo groot te maken, dat de leerlingen de taken moesten verdelen om de opgaven af te krijgen, wordt bovendien de onderlinge afhankelijkheid versterkt. Voorbeelden van een opgave uit de groepstoetsen staan in **figuur 4**.

In het algemeen blijkt het zo te zijn, dat leerlingen op de groepstoets hoger scoren dan op de individuele toets, hoewel de opgaven moeilijker zijn. Kennelijk vullen de leerlingen elkaar zodanig aan, dat ze in staat zijn opgaven op te lossen, waar ze individueel meer moeite mee hebben.

De beide groepstoetsen tellen elk voor 20% mee, de individuele toets voor 60%.

Praktische organisatie van samenwerkend leren

Naast de zorg voor individuele verantwoordelijkheid en onderlinge afhankelijkheid moet er ook aan een aantal praktische voorwaarden voldaan worden. Leerlingen moeten de gelegenheid en ruimte hebben om met elkaar te overleggen.

De ruimte om met elkaar te overleggen kan eenvoudig in de klas gevonden worden. In **figuur 5** is weergegeven hoe de klassenopstelling gewijzigd kan worden. Op deze manier kunnen gemakkelijk zes groepen gevormd worden. Zijn meer groepen nodig, dan kunnen die in het midden plaats krijgen. Het voordeel van deze opstelling is, dat bij centrale instructie de leerlingen makkelijk hun aandacht naar voren kunnen richten. Een ander aspect bij het overleg is het begrip *50 cm stem*. Het zal duidelijk zijn dat hier een stemvolume bedoeld wordt dat over 50 cm wel hoorbaar is, maar veel verder niet meer.

Groepsvaardigheden en sociale vaardigheden zijn aspecten die tijdens de uitvoering aan de orde komen. Als docent is het belangrijk in de gaten te houden hoe de processen verlopen. Aan de hand daarvan kunnen bepaalde aspecten van deze vaardigheden getraind worden. Hiervoor kunnen zogenoemde T-formulieren gebruikt worden (zie **figuur 6**). Laat de leerlingen een drietal aspecten opschrijven die bij - in dit geval - 'overleggen' horen. Laat ze vervolgens aan het werk gaan in de groep. Leg na een kwartier tot twintig minuten de les stil en laat de leerlingen uitleggen in hoeverre ze voldaan hebben aan hun eigen criteria. Er zijn eindeloos veel onderwerpen die via de T-formulieren aan de orde gesteld kunnen worden. Voorbeelden zijn: besluit nemen, luisteren, positief reageren op elkaar.

Groepsindeling

Bij het werken in de klas werden de leerlingen ingedeeld in groepen van vier. Als dat niet uitkwam werden groepen van drie gevormd. De docent stelde de groepen zelf samen. Daarbij werd geprobeerd de groepen samen te stellen op grond van een aantal factoren.

Een belangrijk aspect waar rekening mee gehouden werd is de vraag of, naar de mening van de docent, de leerlingen in de groep met elkaar konden samenwerken. Het niveau van de leerlingen speelde een rol. Om een gelijkmatig niveau te krijgen werd ervoor gekozen de groepjes zo op te delen dat leerling 1, 14, 15 en 30 in één groepje kwamen, evenals leerling 2, 13, 16 en 29; 3, 12, 18 en 28. Het bleek niet verstandig de vier beste leerlingen in één groep te zetten. Ze konden niet voldoende samenwerken. Ook werd rekening gehouden met sekse. Als er meisjes in een groep zaten, waren dat er altijd minimaal twee. Uiteindelijk bleek er één groepje te zijn waar wat problemen bij ontstonden, twee jongens die absoluut niet wilden meewerken werden uit hun groepje gezet en moesten individueel verder werken. Zij kregen daardoor ook geen score op het groepswerk.

Rol van de docent

Als docent in bovenstaande lessenserie is de rol die je hebt in de klas een wat andere. Je hebt het wat drukker. Tijdens de les loop je veel rond, om in de gaten te houden waar leerlingen mee bezig zijn. In een onderzoek dat nog loopt heb ik gemerkt, dat in de interactie met de leerlingen een drietal aspecten naar voren komen. Je moet in de gaten houden dat ze het materiaal op de juiste manier gebruiken, je moet

er voor zorgen, dat ze voordat ze met een vraag bij jou komen eerst zelf voldoende hebben overlegd, en je krijgt te maken met inhoudelijke vragen. In mijn onderzoek zien de docenten de groepen rond de vijf keer per les, door tijdens het rondlopen even bij elke groep stil te staan en te luisteren en te kijken waar ze mee bezig zijn. Leerlingen weer aan het werk zetten is niet of nauwelijks nodig. Een enkele keer moet je ervoor zorgen dat de groepen onderling geen contact met elkaar hebben.

Het grote voordeel is, dat je als docent een uitstekend inzicht krijgt in de vaardigheden en de kennisontwikkeling bij de leerlingen. Niet alleen door observatie tijdens de les, maar ook door de beoordeling van de ingeleverde formulieren. Ook deze beoordeling kost wat extra tijd.

Conclusie

Een lessenserie zoals hierboven beschreven is een goede introductie voor samenwerkend leren, zowel voor leerlingen als voor docenten. De gebruikte werkvormen kunnen los van elkaar gebruikt worden in verdere lessen. Zowel leerlingen als docenten zijn in het algemeen positief over het verloop van de lessenserie. De resultaten op de individuele proefwerken zijn volgens de docenten vergelijkbaar of beter dan leerlingen anders op dit hoofdstuk behalen. De groepstoetsen worden in het algemeen beter gemaakt dan de individuele proefwerken. Een voordeel van de ontworpen lessenserie is, dat deze zonder al te veel voorwerk gebruikt kan worden door docenten om samenwerkend leren in de praktijk uit te proberen. Uit de evaluaties blijkt dat docenten hierdoor een goed beeld krijgen van de problemen die optreden bij de introductie van samenwerkend leren. Daardoor zijn ze in staat die problemen in een vervolgproject op te lossen. Het resultaat is een klas vol met enthousiast samenwerkende leerlingen.

Noot

De tekst van de lessenserie kan aangevraagd worden bij j.h.apotheker@rug.nl en wordt dan als wordfile toegezonden.

Literatuur

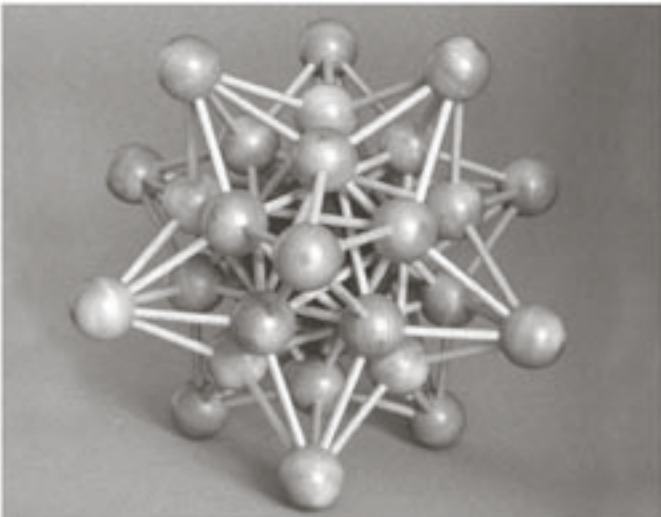
-
- S. Ebbens, S. Ettehoven, J. v. Rooijen: *Samenwerkend leren, praktijkboek*. Groningen: Wolters Noordhoff (1997).
 - D.W. Johnson, R.T. Johnson: *Learning together and alone* (5th edition). Boston: Allyn and Bacon (1999).
 - R.E. Slavin: *Cooperative learning* (2nd edition). Boston: Allyn and Bacon (1995).

Over de auteur

Jan Apotheker is onderzoeker en docent bij het Instituut voor Didactiek en Onderwijsontwikkeling van de Rijksuniversiteit Groningen. De hier besproken lessenserie is uitgevoerd op het Praedinius Gymnasium te Groningen.

E-mailadres: j.h.apotheker@rug.nl

advertentie



**Een intelligent
(relatie)geschenk?**

Deze Kepler-Poinsot ster van Arjeu is één van de vele bijzondere objecten, puzzels en spellen gerelateerd aan natuurkunde, wiskunde en logica uit de Arabesk collectie. U vindt de volledige catalogus op internet:

www.arabesk.nl

AVENUE CONCORDIA 17 B - 3062 LA ROTTERDAM
TELEFOON: (010) 214 03 61 - FAX: (010) 214 03 90 - E-MAIL: ARABESK@ARABESK.NL

WISKUNDE IN DE THEATERKLAS

op het vmbo, theoretische leerweg

[Irene Dalm]



FIGUUR 1

FIGUUR 2



Waarom een Theaterklas

Door een fusie werd onze school, 'Mavo Stek' te Dordrecht, ondergebracht bij het Wellantcollege. Het Wellantcollege is een grote scholengemeenschap gericht op groen onderwijs. In Dordrecht kwam door nieuwbouw onze kleine zelfstandige locatie naast de locaties van het Wellantcollege vmbo-groen en mbo-groen terecht. Het bleek dat de mensen uit Dordrecht nu het idee hadden dat wij, vmbo 'Mavo Stek', ook een groene school geworden waren, terwijl wij alleen de theoretische leerweg met alle sectoren aanbieden. Het aanbieden van een Theaterklas voor vmbo-TL-leerlingen was daarom een goede manier om ons te onderscheiden van het groene onderwijs. In het schooljaar 2005/2006 zijn we met zo'n Theaterklas van start gegaan met een eerste klas van 28 leerlingen. De leerlingen hebben auditie moeten doen. Bovendien moest het advies van de basisschool tegen havo aan liggen. Dit omdat de leerlingen de AVO-vakken zouden moeten doen in vier dagen, en bij sommige vakken ook met minder lessen. De vijfde dag staat in het teken van Theater. De leerlingen krijgen dan les in dans, drama, muziek, decorbouw etc. Ook kan deze dag goed gebruikt worden voor eventuele excursies en workshops.

Theater in de AVO-vakken

Onze school kent nog vrij veel afzonderlijke vaklessen. Met het idee van de nieuwe onderbouw in ons achterhoofd om langzaam op te willen schuiven naar onderdelen uit scenario 2 kunnen we via zo'n Theaterklas wel het een en ander uitproberen en proberen te realiseren. De leerlingen (en hun ouders) willen natuurlijk wél het idee hebben dat zij met Theater bezig zijn, ook op

de vier dagen dat zij de AVO-vakken volgen. Er werd daarom aan de AVO-docenten gevraagd, hun lessen zo aan te passen dat ze beter bij de beleavingswereld van deze leerlingen zouden aansluiten. Zo kunnen voor het vak Nederlands bij het ontleden teksten uit de dramalessen gebruikt worden, bij Engels kunnen teksten vertaald worden, enzovoort.

Mij werd gevraagd na te denken over de vraag hoe bij wiskunde het Theater ingepast zou kunnen worden. Na enig zoek- en denkwerk kwam ik tot de conclusie dat daarvoor nog niet iets kant-en-klaars bestond en dat ik zelf maar moest proberen hieraan een invulling te geven.

Meetkunde in de hal

Ik ben eerst mijn licht maar eens gaan opsteken bij de docenten van het Theater-kernteam, docenten muziek, drama, dans, decorbouw, om te kijken hoe

- is een hele noot
- ♩ is een halve noot
- ♪ is een ¼ noot
- ♫ is een 1/8 noot
- ♬ is een 1/16 noot
- etc.

Vervang in onderstaande tabel het aantal noten dat links staat door andere noten. Het aantal noten dat je mag gebruiken staat aangegeven met het aantal streepjes.

1	♩ ♩ ♩ ♩	-
2	♩ ♩ ♩ ♩ ♩ ♩	- -
3	♩ ♩ ♩ ♩	-
4	♩ ♩ ♩ ♩	- -
5	♩ ♩ ♩ ♩	- -

FIGUUR 3

ik mijn wiskundelessen als ondersteuning voor hun vakken kon gaan gebruiken.

Een suggestie van de docent handvaardigheid, die zich bezighoudt met decorbouw, was het meten van onze hal, de plek waar de voorstellingen gegeven gaan worden.

Daarop heb ik de klas in kleine groepjes verdeeld, van 2 à 3 leerlingen, en ieder groepje kreeg de opdracht om één onderdeel van de hal te meten, zoals de vloer, ingang, plaats van de lampen en de hoogte daarvan, plaats van de kluisjes, conciërgebalie etc. Zij liepen daarom tijdens de wiskundelessen met rolmaten door de hal. Van de onderdelen moesten ze per groep een schaaltekening maken van 1:50 en een zij- of bovenaanzicht. Ik heb ze niet van te voren verteld wat de betekenis is van termen als schaal, zijaanzicht e.d., maar ik liep rond en keek of leerlingen er uitkwamen, of ze hulp van mij of andere leerlingen nodig hadden. Gelukkig ligt mijn lokaal niet zo ver van de hal vandaan, zodat de leerlingen én in de hal én in mijn lokaal konden werken én snel heen en weer konden lopen (zie figuur 1 en 2). Ik merkte wel dat zowel de leerlingen als ikzelf eigenlijk graag langere tijd aaneen wilden dóórwerken en dat het daarom jammer was dat het steeds maar lessen van 50 minuten waren. Dit punt wordt daarom meegenomen in onze werkgroep 'nieuwe onderbouw'.

Elk groepje tekende zijn deel in één grote totaaltekening en zo kwam er aan het eind van het project een grote tekening van de hal op schaal tevoorschijn. Deze tekening wordt nu gebruikt bij het voorbereiden van de voorstellingen.

Breuken met muzieknooten

Bij het woord 'breuken' krijgen de meeste leerlingen een naar gevoel. Mijn idee om breuken uit te leggen en ermee te rekenen aan de hand van muzieknooten viel bij de muziekdocent in goede aarde.

Ik heb me eerst zelf verdiept in muzieknooten en na overleg met de muziekdocent zou ik de leerlingen bezighouden met het aantal tellen dat een bepaalde muzieknoot of een rust duurt. Een hele noot duurt bijvoorbeeld in een vierkwartsmaat 4 tellen, een halve noot 2 tellen, een kwart noot 1 tel, een achtste noot een ½ tel etc. Dit zelfde geldt voor de 'rusten'.

In het begin tekende ik de muzieknooten zelf. Dat was veel werk. Na wat zoeken op internet vond ik een programma dat je 'als font' kunt downloaden, zodat je met je toetsenbord muzieknooten kunt typen^[1].

Ik begon eerst met het uitleggen van de muzieknooten, waarbij ik ook gebruik gemaakt heb van www.digischool.nl (niet naar het vaklokaal wiskunde, maar naar muziek).

In figuur 3 staat het eerste blad, het blad dat ik gemaakt heb als instap. Hierbij moeten de leerlingen de muzieknooten met elkaar vergelijken: een hele noot is gelijk aan vier kwart noten, enzovoorts. Op die manier krijgen ze inzicht in de opbouw van de noten.

Ze moeten ook het totaal aantal tellen van een reeks muzieknooten aangeven. Af en toe heb ik een xylofoon erbij gepakt om de tellen van een noot te laten horen.

Voorbeeld. Hier is uitgegaan van: een hele noot is gelijk aan 4 tellen.

2 4

3 4

4 4

3 8

	$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$
	(lastig, want een punt achter een noot betekent dat de helft van het aantal tellen erbij komt) $\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} + 1 = 3\frac{1}{4}$

Het bleek dat de leerlingen het wel leuk vonden om zo de breuken te leren, ook omdat ze bij muziekles hiermee bezig waren en het ze op deze manier duidelijk wordt dat de geleerde stof niet bij maar één vak hoort, maar dat je die stof ook kunt gebruiken bij andere vakken.

Ook de leerlingen die niet zo goed zijn in wiskunde maar wél op bijvoorbeeld pianoles zitten, hadden het gevoel dat ze nu lekker aan het werk waren. Zij konden hun medeleerlingen nu ook eindelijk eens wat uitleggen.

Zelf vond ik dat het goed aansloot bij de leerlingen; ik heb de breuken in een andere (reguliere) eerste klas ook op deze manier uitgelegd. Zij hebben tenslotte ook muziekles.

Op dit moment ben ik bezig om lesmateriaal te maken over formules. Het zal gaan over het bezoek aan een

Zo kunnen wij op school langzaam naar scenario 2, en op onderdelen misschien al wel naar scenario 3 van de nieuwe onderbouw opschuiven.

Irene Dalm is lerares wiskunde aan het Wellantcollege, locatie vmb
'Mavo Stek' te Dordrecht.
E-mailadres: idalm@ibiza-mail.com

VAKANTIECURSUS 2005: DE SCHIJF VAN VIJF

[Gert de Kleuver]

Gevarieerd menu

De schijf van vijf bestaat niet altijd alleen maar uit gezond voedsel, maar soms ook uit meetkunde, algebra, analyse, discrete wiskunde en stochastiek. Vorig jaar was 'de schijf van vijf' namelijk het thema van de jaarlijks terugkerende *Vakantiecursus*, met een door Jan van de Craats leuk en gevarieerd samengesteld menu. Het was overigens in 2005 de laatste keer dat Jan deze cursus gestalte gaf.

De sprekers waren:

R.H. Vermij - De wiskunde van Christiaan Huijgens;

A. Bolck / M. Sjerps - Statistiek en misdaadbestrijding;

N. Litvak - Wiskundige aspecten van het World Wide Web en zoekmachines;

R.H. Jeurissen - Coderingstheorie;

R.H. Kaenders - Kranen en lemniscaten;

E. Coplakova - Complexe getallen en vergelijkingen;

J. van de Craats - Complexe getallen en Fourieranalyse;

J. Brinkhuis - Optimalisatietheorie.

Amsterdam en Eindhoven

Ik bezocht de vakantiecursus met nog twee collega's. We hebben in dubio gestaan of we naar Eindhoven of Amsterdam zouden gaan. Het werd Amsterdam omdat we daar de boekenstand altijd zo leuk vinden. Dit is natuurlijk heel persoonlijk; gelukkig gaan er ook mensen naar Eindhoven. Even een paar getallen: in 2005 werd de cursus voor de 59e keer op het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) gehouden, terwijl het CWI toen 60 jaar bestond. Deze feiten werden bij het openingswoord vermeld door de directeur van het CWI, prof.dr. J.K. Lenstra.

In mijn boekenkast staan nu al verschillende syllabi van de diverse vakantiecursussen. De een vind ik meer het lezen waard dan de ander, maar het exemplaar van 2005 vond ik weer bijzonder de moeite waard, ook al omdat het zo afwisselend is. De organisatie was er in geslaagd een programma te bieden dat gevarieerd en van een goed niveau was.



Misdaadbestrijding

In voorgaande jaren besprak ik altijd een of twee lezingen voor Euclides. Dit jaar heb ik gekozen voor de bijdrage van A. Bolck en M. Sjerps van het NFI, het Nederlands Forensisch Instituut. Marjan Sjerps heeft de lezing gehouden terwijl Annabel Bolck deze grotendeels geschreven had.

Waarom deze lezing in bespreking?

Misdaadbestrijding, dat onderwerp sprak me erg aan. Ik denk dat het onderwerp ook geschikt is om te gebruiken als praktische opdracht. Natuurlijk moet er dan wel aan gesleuteld worden, maar als eerste aanzet is het materiaal van de lezing heel bruikbaar.

Probleemstelling: monstername

Als de politie een grote partij verdachte poeders of pillen vindt of bijvoorbeeld video's met mogelijk kinderporno erop, dan rijst al gauw de vraag hoeveel pillen of video's onderzocht moeten worden om vast te stellen of het hier inderdaad om illegale producten gaat.

De partijen zijn vaak zo groot dat er een monster genomen moet worden. Een kleine hoeveelheid moet wél een grote betrouwbaarheid garanderen ten aanzien van de conclusie dat het overgrote deel van een partij al dan niet illegaal is.

Zo startte Marjan Sjerps haar lezing, en iedereen voelde zich direct bij het onderwerp betrokken. Het werd heel aannemelijk gemaakt dat de politie bij het bepalen van de hoeveelheid monsters die genomen moet worden, gebruikt maakt van vuistregels. Zo heeft ieder land en ieder vakgebied eigen methoden ontwikkeld voor het bepalen van het aantal te nemen monsters.

In 1920 gebruikten Amerikaanse landbouw-inspecteurs de wortelregel. Van een partij van 150 exemplaren moeten ongeveer 12 monsters worden genomen. Dit gaat goed bij kleine partijen, maar bij heel grote partijen is het geen bruikbare methode. Soortgelijke methoden zijn de 5%-regel



FIGUUR 1 Monsternamen door het NFI

en de 10%-regel. De steekproefgrootte is dan $0,05N$ respectievelijk $0,1N$, waarbij N het totaal is. Om het probleem van de monsteromvang op te lossen zijn er twee typen statistisch onderbouwde methoden gangbaar: de frequentistische en de bayesiaanse methode. Zo wordt er binnen het Forensisch Instituut over gesproken.

Frequentistische methode

Twee voorbeelden van de frequentistische methode zijn de hypergeometrische verdeling en de binomiale verdeling. Beide verdelingen gaan het niveau van de schoolboeken niet te boven. Bij beide verdelingen wordt gewerkt met een betrouwbaarheidsniveau van 95% of 99%. Een en ander werd geïllustreerd met pakkende voorbeelden: een partij xtc-pillen, de bekende bolletjessliker of een partij bankbiljetten met een klein beetje cocaïne daarop. Bij de afdeling verdovende middelen van het NFI heeft men voor grote partijen een vuistregel of richtlijn opgesteld voor de grootte van de steekproef. Deze moet zó groot zijn dat met een betrouwbaarheidsniveau van 99% geconcludeerd kan worden dat 80% van de eenheden illegaal is. Natuurlijk weet men ook wel dat van een gevonden partij drugs het niet zo zal zijn dat er maar enkele eenheden drugs zullen bevatten. Meestal bevatten alle eenheden

drugs, vandaar een norm van 80%. Het moet wel betrouwbaar zijn, vandaar 99%.

Men kiest voor steekproeven met een grootte van 20. Bij een hypergeometrische verdeling valt na te rekenen dat bij $N = 80$ tot en met $N = 100$ 18 monsters nodig zijn. Bij een totaal van 200 tot 500 zijn 20 monsters genoeg en daarboven 21. Men kiest daarom een gemiddelde van 20 monsters. Ook de aanpak met de binomiale verdeling leidt tot het getal 20. Een en ander is ook heel goed verwoord in de syllabus.

Bayesiaanse benadering

De andere methode is gebaseerd op een bayesiaanse benadering.

Ook deze methode heeft een statistische basis. Er zijn wel verschillen met bovenbeschreven methode. Men maakt namelijk gebruik van voorkennis, en de steekproefgrootte wordt dusdanig bepaald dat met een zekere kans gegarandeerd kan worden dat de populatie een minimale hoeveelheid illegaal materiaal bevat indien de steekproef een bepaalde fractie illegaal materiaal bevat. Hierdoor is het mogelijk dat men bijvoorbeeld bij een bolletjessliker genoeg heeft aan het analyseren van één bolletje.

Zoals overal zijn er van beide methoden zowel voor- als tegenstanders. De laatstgenoemde methode behoeft zeker nog verder onderzoek, maar heeft zeker heel aantrekkelijke kanten. Als je het voorkennisaspect meerekent heb je zeker een kleinere steekproefgrootte nodig.

Vakantiecursus 2006

Voor 2006 staat 'Actuele Wiskunde' op het programma. Op 25 en 26 augustus vindt de cursus plaats in Eindhoven, op 1 en 2 september in Amsterdam. Zie voor meer informatie de website van het CWI (www.cwi.nl/events/2006/VC2006/). Ik hoop dat er weer veel mensen komen. Het is inspirerend, en tegelijkertijd een gelegenheid om elkaar te ontmoeten en ervaringen uit te wisselen.

Over de auteur

Gert de Kleuver is afdelingsleider aan het Ichthuscollege te Veenendaal.
E-mailadres: g.de.kleuver@gmail.com

PER, SCHAKEL VOOR EEN NIEUWE ALGEBRA

Een pleidooi voor abstracte rekenkunde en gebruik van het 'per'-teken

[Albert Dorresteyn]

Inleiding

Dat het Nederlands wiskundeonderwijs kampt met een algebraprobleem behoeft weinig betoog meer. Het hoger onderwijs is ontevreden. De examencommissies voor havo en vwo hebben al voorstellen gedaan in de toekomst hogere eisen te gaan stellen aan algebraïsche vaardigheden. Docenten stemden in.

Van verschillende kanten worden suggesties gedaan over de wijze waarop de algebra in het voortgezet onderwijs moet worden aangepakt. In sommige leermethodes is de aandacht voor enige onderdelen van de algebra inmiddels vergroot. Toch geven deze eerste pogingen mij het vermoeden dat we niet verder komen. Een analyse van het algebraprobleem wijst volgens mij een andere weg dan tot nu toe bewandeld is.

Analyse van het probleem

Voor het verkrijgen van inzicht in de aard van het algebraprobleem moeten we op een rijtje zetten wat leerlingen momenteel wél kunnen en wat niet. Leerlingen hebben eigenlijk niet veel moeite met het begrijpen van de betekenis van ingewikkelde formules. Ook het toepassen van dergelijke formules in concrete situaties gaat leerlingen tegenwoordig beter af dan bijvoorbeeld 20 jaar geleden. Zelfs met bijvoorbeeld de differentiaal- en integraalrekening hebben wiskunde-B-leerlingen niet meer moeite dan vroeger. Via de grafische rekenmachine kunnen zij een rijker scala van dit soort problemen aan dan vóór de invoering van de Tweede Fase. Nee, het algebraprobleem ligt op een ander terrein. Leerlingen komen in de

moeilijkheden als ze bezig zijn met algebraïsche oplossingsstrategieën. Ze struikelen voortdurend over elementaire zaken. Voorbeelden hiervan zijn:

$$\frac{5}{x} = 5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^{-1}; \quad \frac{x^2+3}{x} = x + \frac{3}{x}; \quad x(5x^2) = 5x^3; \\ (a-4)^2 \neq a^2 - 16$$

Ook 25 jaar geleden werden op dit gebied fouten gemaakt door leerlingen in de bovenbouw van het vwo, maar dat betrof dan een klein deel, waarvan reeds bekend was dat het moeite had met het vak. Nu echter hebben bijna alle leerlingen moeite met dit soort elementaire zaken, ook degenen die altijd blij gaven van een goede aanleg voor wiskunde.

Een tweede voorbeeld om dit punt nader te verduidelijken. Mijn wiskunde-A-totaal-leerlingen stuitten bij het trainen voor het indexamen in een van hun laatste lessen op een door mij bewerkt vraagstuk van tegoedbonnen tijdens de lente-voordeelweken (zie het vraagstuk en de oplossing in [figuur 1](#) en [figuur 2](#)). Ze moeten aantonen dat bij een percentage k van krasloten met de afbeelding *vogelverschrikker* het verwachte aantal tegoedbonnen gegeven wordt door de formule $E = 2\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$. Met behulp van de afgeleide kan dan de waarde van k worden vastgesteld waarbij het verwachte aantal uit te delen tegoedbonnen minimaal is. Het is zo'n vraag waarbij de examencommissie A-totaal vwo een paar jaar geleden ervoor zou kiezen het aantonen van de juistheid van de formule maar over te slaan. Maar in de toekomst doen ze dat wellicht niet meer. Nou, mijn leerlingen zouden er niet blij mee zijn als die maatregel dit schooljaar al zou ingaan.

Lente-voordeelweken
(naar het examen vwo wiskunde A1/A12, 2002-I)

Een supermarkt houdt elk jaar in de lente een actie onder de naam 'Lente-voordeelweken'. Tijdens die actie ontvangt iedere klant bij ten minste 50 euro aan boodschappen twee krasloten. Op elk kraslot staat één vakje. Als men dat open krast, wordt de afbeelding van een kievitse, een lammetje, een narcis of een vogelverschrikker zichtbaar. De klant moet direct aan de kassa, voordat hij de supermarkt heeft verlaten, de twee open gekraste krasloten inleveren. Wanneer op beide krasloten dezelfde afbeelding staat, wint de klant één tegoedbon bij twee kievitseieren, twee lammetjes of twee narcissen; de klant wint twee tegoedbonnen als op beide krasloten een vogelverschrikker staat.

De kans op tegoedbonnen hangt af van de verdeling van de vier afbeeldingen over de krasloten.

(...)

De eigenaar van de supermarkt wil niet te veel tegoedbonnen weggeven. Daarom onderzoekt hij welke verdeling van de afbeeldingen over de krasloten gunstig voor hem is. Hij gaat er daarbij van uit dat de vogelverschrikker met een kans k op de krasloten voorkomt en de overige drie afbeeldingen elk met een kans $\frac{1}{3}(1-k)$. Daarmee kan hij uitrekenen wat het verwachte aantal tegoedbonnen is voor een klant met twee krasloten.

- Toon aan dat voor deze verwachtingswaarde geldt: $E = 2\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$
- Met behulp van deze formule kan de eigenaar nu onderzoeken voor welke waarde van k de kans op een tegoedbon zo klein mogelijk is. Voer dit onderzoek uit met behulp van de differentiaalrekening.

Uitwerking

Deze start met de kansverdelingstabel voor stochast X , het aantal uit te delen tegoedbonnen:

x	p
2	k^2
1	$3 \cdot (\frac{1}{3}(1-k))^2$
0	

De verwachtingswaarde is dus $E = 2 \cdot k^2 + 1 \cdot 3 \cdot (\frac{1}{3}(1-k))^2$.

$3 \cdot (\frac{1}{3}(1-k))^2 = \frac{1}{3}(1-k)^2$ vraagt om uitleg: $3 \cdot (\frac{1}{3}(1-k))^2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-k) \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-k)$.

$\frac{1}{3}(1-k)^2 = \frac{1}{3}(1-2k+k^2)$ kan niet zo maar. Met een rechthoek (of tabel) of met pijlen moet worden verduidelijkt: $(1-k)^2 = (1-k) \cdot (1-k) = 1-k-k+k^2$.

$\frac{1}{3}(1-2k+k^2) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}k^2$ geeft ook vraagtekens, want $\frac{1}{3} \cdot 2k = \frac{2}{3}k$ is nauwelijks te bevatten.

Dus $E = 2k^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}k^2 = 2\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$.

De afgeleide functie luidt $E' = 4\frac{2}{3}k - \frac{2}{3}$.

$E' = 0 \Leftrightarrow 4\frac{2}{3}k - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4\frac{2}{3}k = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 14k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{7}$.

FIGUUR 1

Het begrijpen van de kanstabel met een variabele was weliswaar moeilijk maar wel mogelijk. Ook het opstellen van de afgeleide. Mijn leerlingen wisten allemaal dat deze vervolgens 0 gesteld moest worden. Ze pakten de rekenmachine en losten via *Zero* de lineaire vergelijking op. Maar alle algebraïsche stappen ervoeren ze, ook na de uitleg zoals ze die reeds vaak gekregen hadden, als extreem moeilijk. De vraag of zoiets op het examen kon komen, was nauwelijks te onderdrukken.

Ik kan me voorstellen dat er veel collega's zullen reageren met: 'Waarom moet die formule zonodig veranderd worden? Met de functie *Minimum* op de grafische rekenmachine los je het probleem toch ook op?' Ik zeg niet dat dat niet zou kunnen. Ik laat aan de hand van het probleem zien hoe het algebraprobleem in elkaar zit, niet alleen bij A-leerlingen maar net zo bij B-leerlingen. Kon je er 25 jaar geleden op rekenen dat leerlingen in vwo-4 bij het lezen van $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$ zelfstandig uit het hoofd aan de hand van enige voorbeelden een controle uitvoerden, nu moet je expliciet vragen of ze 2^5 en 2^3 willen uitrekenen. En zonder rekenmachine kost hun dat zoveel tijd dat ze de vraag ondertussen vergeten. Met de rekenmachine wordt het eigen geheugen niet ingeschakeld (alleen dat van de GR), zodat ze de wijsheid snel vergeten. Uit bovenstaande en vele andere ervaringen van de afgelopen jaren kom ik tot de stelling: het algebraprobleem waarmee we zitten, wordt veroorzaakt door gebrek aan kennis van getallen en van de elementaire bewerkingen van die getallen, met name het vermenigvuldigen maar vooral het delen.

FIGUUR 2

Het ontstaan van het probleem

Problemen in het onderwijs ontstaan vaak als ongunstig neveneffect bij veranderingen ter verbetering. Dit geldt eigenlijk ook voor het algebraprobleem.

Vanaf 1980 is het wiskundeonderwijs en ook het rekenonderwijs op de basisscholen steeds meer gefocust op concrete contexten. Vanuit concrete situaties worden begrippen opgebouwd, die vervolgens ook weer toegepast moeten worden op praktische problemen. Zo werd onder de inspiratie van professor Freudenthal het realistisch rekenen ingevoerd in het basisonderwijs. Tegelijk werd de algebra in de onderbouw van het voortgezet onderwijs zodanig contextgebonden gemaakt, dat de invoer van wiskunde A rond 1987 nauwelijks als revolutie ervaren werd.

Deze ontwikkeling zou onmogelijk geweest zijn zonder de invoering van de rekenmachine. Vóór de invoering van de rekenmachine bestond voor elk wiskundig vraagstuk de vanzelfsprekende eis dat de uitkomsten 'mooie' getallen moesten zijn, zodat deze via de aangeleerde rekenroutines konden worden aangepakt. Deze rekenroutines waren grotendeels aangebracht op de basisschool via vele 'kale' sommetjes. Complexe realistische problemen hebben doorgaans geen 'mooie' uitkomsten. De rekenmachine gaf het realisme ook in het voortgezet onderwijs nieuwe mogelijkheden. De noodzaak van de 'kale' sommetjes werd tegelijk een stuk verminderd.

Aan realistisch rekenen en realistische algebra zijn we zó gewend geraakt dat enige collega's tijdens de bijeenkomst met de examencommissie

de voorbeelden van die commissie allereerst beoordeelden op het realistisch karakter: 'Waar kom je zo'n formule nou tegen?!' Maar het is juist die combinatie van realistisch rekenen en rekenmachinegebruik die de kennis van de getallen en de elementaire bewerkingen van de getallen heeft doen afnemen. Getallen worden snel bewerkt met een rekenmachine. Uitkomsten vinden kost nauwelijks moeite. De eigenschappen van de getallen hoeven niet onthouden te worden. Zelfs een beroep op het geheugen waar de tafels uit groep vijf van de basisschool staan opgeslagen, is niet meer nodig. Berekeningen kunnen worden overgetypt en nadenken of het slimmer kan, kost alleen tijd. De eigenschappen van de bewerkingen worden pas interessant als er een bepaalde vorm van programmering van het rekenwerk noodzakelijk is, zoals dat bij hoofdrekenen onontkoombaar is. Voor algebraïsch begrip dient een leerling echter een minimale verzameling eigenschappen van getallen paraat te hebben los van realistische context, zoals eenvoudige optellingen, veelvouden (tafels), machten, wortels, priemgetallen. Ook moet hij de abstracte eigenschappen kennen die voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen gelden. Ik zou dit geheel willen aanduiden met *abstracte rekenkunde*. En ik zou willen stellen: ook de abstracte rekenkunde dient een duidelijke plaats te hebben in het wiskundeonderwijs. En ik denk daarbij niet aan 'kale' rekensommetjes waarmee leerlingen het zouden moeten opnemen tegen de rekenmachines. Ook wijs ik niet met een beschuldigende vinger naar het basisonderwijs en over hun hoofd naar de pabo's. Nee, de basisscholen doen prima werk; het realistisch rekenen levert intelligente leerlingen af aan havo en vwo, leerlingen die al veel verstand hebben van optellen en vermenigvuldigen. Maar deze kennis dient in de onderbouw van havo en vwo verder ontwikkeld te worden tot het niveau dat voor de algebra in de bovenbouw nodig is.

Abstracte rekenkunde

Abstractie betekent loskomen van de concrete situatie, zodat de kennis overdraagbaar wordt naar andere situaties. Abstractie start dus met generalisatie van realistische problemen. Maar het formuleren, het vastleggen, het testen en het repeteren van abstracte kennis vereisen wellicht minstens zoveel tijd als het aanpakken van realistische problemen. Weten hoe een berekening moet worden ingetypt op een rekenmachine is bijvoorbeeld abstracte kennis: waar moeten haakjes staan en waar niet? Ook het weten dat een berekening soms veel korter kan worden gemaakt, komt niet voort uit het realistische karakter van een berekening. Om te voorkomen dat het rekenen met een rekenmachine verwordt tot magie zou er naar gestreefd moeten worden dat bij elk type berekening een leerling geleerd heeft hoe de berekening zonder de machine kan worden uitgevoerd.

Dat de lichaamsstructuur van de rationale getallen (associatieve, commutatieve, distributieve eigenschappen, inverse elementen) op een of andere manier de basis vormt van de abstracte rekenkunde wil niet zeggen dat leerlingen via hun ervaringen met realistisch rekenen rechtstreeks tot dit soort beschrijvingen zouden komen.

In een programma voor de abstracte rekenkunde zullen de volgende onderwerpen te onderscheiden zijn:

1. tegengestelde en aftrekken,
2. omgekeerde en delen,
3. kettingberekeningen en voorrangsregels,
4. verplaatsbaarheid van termen en factoren,
5. machten en wortels,
6. distributies.

Bij onderwerp 4 valt bijvoorbeeld te denken aan $6\frac{3}{4} + 79 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 111 + 2\frac{1}{4}$ of $18 \times 7 / 5 \times 15 / 14$. Bij onderwerp 6 denk ik aan $5^4 \times 2^4$, $\sqrt{25 \times 64}$, $8 \times 12\frac{5}{16}$, of $(12 - 6\sqrt{3}) / 3$.

Delen met per

Bijzondere aandacht dient er te zijn voor het delen. Niet alleen is het de bewerking waar de problemen zich ophopen, ook is delen het gebied waar de kennis van de leerlingen het gebrekkigst is. Na korte tijd in het voortgezet onderwijs zijn de breukenroutines, voorzover de basisschool deze nog aangebracht heeft, nagenoeg verdwenen. Daar komt bij dat de breukenroutines op zich al weinig kennis opleveren over de bewerking delen. Het zijn kale routines, gebonden aan notatievormen en gericht op rekenwerk in de tijd dat er geen rekenmachine bestond. Twee niet-gehele getallen immers die in decimale vorm genoteerd zijn, laten zich moeilijk delen met behulp van de breukenroutines.

In het schooljaar 2004-2005 zijn we op onze school in vwo-3 gestart met een algebra-experiment. Als een soort inhaalmanoeuvre presenteren we een gecomprimeerde abstracte rekenkunde. (Een deel van de huidige vwo-4-leerlingen heeft inderdaad geen last van de algebraproblemen zoals die in vwo-5 en vwo-6 nog wel aan de orde van de dag zijn.) Voor het beschrijven van de eigenschappen van het delen gebruikten we het /-teken. De keuze van dit teken boven ':' en ' $\div$ ' was niet alleen bedoeld om met de rekenmachines in de pas te blijven lopen. In het realistisch rekenen wordt 'gedeeld door', 'gedeeld op' en 'staat tot' genoteerd met het :-teken. Voor bijvoorbeeld tweederde wordt $\frac{2}{3}$ gebruikt. Het teken voor abstract delen moet voor elk deelproces inzetbaar zijn. Het moet als het ware boven de partijen staan. Het /-teken doet dat volgens mij het best. Het teken wordt in % en in $\frac{m}{s}$ reeds uitgesproken als 'per'. Het woord 'per' is kort en net als 'min' en 'plus' van Latijnse oorsprong. Toegegeven, het is even wennen, maar ' $2 \times \pi + \pi / 3$ ' als 'twee maal pi plus pi per drie' blijkt weldra goed in het gehoor te liggen.

Bijkomend voordeel van het /-teken is dat de belangrijkste abstracte eigenschap gemakkelijk wordt vastgelegd in het geheugen: twee per-tekens

voor één getal kun je kruisen, net zoals dat geldt voor min. Want net zoals $8-(7-3)=8-7+3$ geldt ook $6/(2/5)=6/2 \times 5$.

Als illustratie is een deel van een lesbrief uit vwo-3 toegevoegd waarin de eigenschappen van 'per' staan samengevat (zie figuur 3).

Mijn pleidooi voor het per-teken impliceert niet dat ik de standaardnotatie voor rationale getallen zoals bijvoorbeeld $4\frac{2}{3}$ zou willen wijzigen. Ook de horizontale breukstreep in de breukenalgebra in

bijvoorbeeld $\frac{2p-7}{p^2+1}$ is als haakjesvrije eindvorm te verkiezen boven andere vormen.

Conclusies

Ik herhaal nog eens mijn conclusies:

- Het algebraprobleem waarmee we zitten, wordt veroorzaakt door gebrek aan kennis van getallen en van de elementaire bewerkingen van die getallen, met name het vermenigvuldigen maar vooral het delen.
- De abstracte rekenkunde dient een duidelijke plaats te hebben in het wiskundeonderwijs van de onderbouw van vwo en havo.

- Voor het bestuderen van abstracte berekeningen is de notatievorm van de grafische rekenmachine goed bruikbaar.

- De term 'per' bij gebruik van het /-teken heeft de voorkeur.

Welke vorm de abstracte rekenkunde op den duur zal moeten hebben, is me nog niet helemaal duidelijk. Maar wel ga ik uit van de volgende vertrekpunten:

- De basis voor de abstracte rekenkunde ligt in de ervaringen met realistisch rekenen.
- De rekenmachine moet ook vaak op 'off' staan.
- Goede vwo-leerlingen vinden abstract rekenen vaak minder saai dan realistisch rekenen.
- Het is niet nodig dat er landelijke eindtermen worden geformuleerd.

Over de auteur

Albert Dorresteyn is vanaf 1972 wiskundeleraar aan scholengemeenschap De Breul te Zeist. Hij geeft daar doorgaans les in klas 1 t/m 6 van het vwo.

E-mailadres: a.dorresteyn@wanadoo.nl

FIGUUR 3

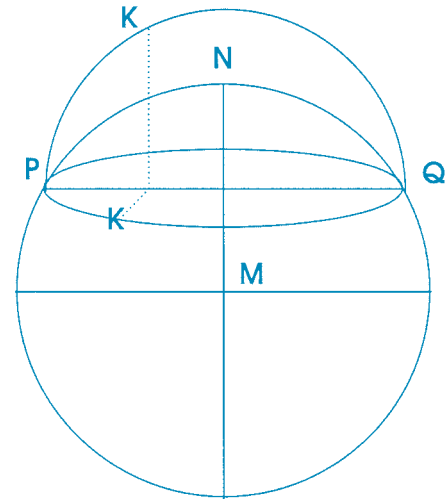
- We zetten de regels voor *per* op een rijtje. Eerst die met vermenigvuldigen en delen te maken hebben. Optellen en delen komt hierna.
 - Delen is de inverse bewerking van vermenigvuldigen.
 $12/4 = 3 \Leftrightarrow 3 \times 4 = 12$
 - Delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde.
 $1/4 = \frac{1}{4}$ is het omgekeerde van 4, want $4 \times \frac{1}{4} = 4 \times 1/4 = 1$.
 - Als in berekeningen met vermenigvuldigingen en delingen geen haakjes staan, wordt als rekenvolgorde bedoeld: van links naar rechts.
 $8/6/2 \times 3 = ((8/6)/2) \times 3$
 (Maar de volgende regel laat zien hoe je het gemakkelijker uitrekent.)
 - In berekeningen met vermenigvuldigingen en delingen zijn de factoren verplaatsbaar zolang deeltallen en delers maar niet verwisseld worden. (Dus het per-teken moet worden meegenomen.)
 $16/5 \times 15/32 = 15/5 \times 16/32 = 3 \times 1/2 = 3/2 = 1\frac{1}{2}$.
 - Een per-teken voor een product kan veranderd worden door voor elke factor een per-teken te plaatsen.
 $40/(5 \times 2) = 40/5/2$
 - Het omgekeerde van het omgekeerde van een getal is het getal zelf.
 $1/(1/3) = 3$. Dus geldt bijvoorbeeld ook: $18/(6/3) = 18/6 \times 3 = 9$.
 Kortweg: 'per per = maal'.
- Enige voorbeeldberekeningen.
 - $24/16 = 3 \times 8/(2 \times 8) = 3/2 \times 8/8 = 3/2 = 1\frac{1}{2}$
 - $30/(7 \times 5) = 30/5/7 = 6/7 = \frac{6}{7}$
 - $48/(20/(25/2)) = 48/20 \times 25/2 = 48/2 \times 25/20 = 24 \times 5/4 = 24/4 \times 5 = 6 \times 5 = 30$
- Maak de volgende berekeningen en zet de antwoorden in standaardvorm.

a	$9/(12/2 \times 3)$	d	$(15/7 \times 3) \times 21/10$	g	$(3/8)/(9/16)$
b	$(50 \times 6)/(35 \times 3)$	e	$-28/4/3 \times 6/49$	h	$100/(5/6/(10/3))$
c	$5 \times 9/15 \times 6$	f	$6/13/(4 \times 3/8)$	i	$25/225/(9/10)$
- Bij berekeningen met optellingen en delingen moet je goed uitkijken.
 - Bij het delen van een som kan de berekening veranderd worden door beide termen van de som te delen. $(15 + 25)/5 = 15/5 + 25/5$.
 Dit is begrijpelijk als je beseft dat $(15 + 25)/5 = (15 + 25) \times 1/5$.
 - Omgekeerd kan een som van twee termen die beide een zelfde deler bevatten veranderd worden in één deling door de deler buiten haakjes te plaatsen.
 $17/6 + 13/6 = (17 + 13)/6 = 30/6 = 5$.
 - Als de deler uit een som bestaat, is de berekening niet te wijzigen!
 $18/(9 + 2)$ kan niet gewijzigd worden in $18/9 + 18/2$.
 $18/(9 + 2) = 18/11 = 1\frac{7}{11}$ en $18/9 + 18/2 = 2 + 9 = 11$.
- Maak de volgende berekeningen en zet de antwoorden in standaardvorm.

a	$8/(6 \times 5/10) + 4 \times 4/3 + 1$	d	$-9 \times 4/15 + (20 + 3)/5$	g	$(9 - 21)/(21 - 3 \times 5)$
b	$(27/(7 \times (7 - 6/3) + 1) \times 8$	e	$78/(18 - 25/(3 + 20/10))$	h	$(-30/7/3 + 20/7)/10$
c	$3/7 - (8/7 - 5/(9 - 4))$	f	$(1 + 1/(1 - 1 \times (1 - 1)/1) + 1$	i	$72/(36 + 18) - 36/(18 + 9)$

VAN BOLDRIEHOEKEN NAAR HET PLATTE VLAK

[Jos en Karin Paus]



FIGUUR 1

Aanleiding

Vorig jaar heb ik (Jos Paus) als medewerker van de SLO op een aantal scholen kunnen meekijken naar de ontwikkeling van samenwerkingsprojecten wis- en natuurkunde. Daarbij is gekeken naar: welke onderwerpen lenen zich voor samenwerken, hoe kun je dat als team aanpakken, hoe organiseer je dat...^[1]

Op het Martinuscollege in Grootebroek zijn de collega's wiskunde, natuurkunde, ANW en LO druk bezig geweest met een project 'Waar ben ik', een praktische opdracht voor havo-leerlingen^[2]. De leerlingen bepaalden hun plaats op aarde en bepaalden afstanden met zelfgemaakte instrumenten: de Jacobsstaf en het sextant. Via JETNET krijgt de school ondersteuning van mensen van de Koninklijke Marine in Den Helder. De leerlingen bezoeken daar ook schepen en krijgen een idee hoe schepen tegenwoordig navigeren. Bij deze praktische opdracht wordt een stevig beroep gedaan op het ruimtelijk inzicht van de leerlingen. De boldriehoeksformules waarmee gerekend moet worden, worden als gegeven beschouwd. Op bezoek in Grootebroek moest ik denken aan een docent sterrenkunde^[3] aan de universiteit van Nijmegen die mij tijdens de studie een mooie grafische methode leerde om met boldriehoeken om te gaan. Geconfronteerd met de boldriehoeksformules beloofde ik de docent van het Martinuscollege een en ander wel even uit te zoeken. Belofte maakt schuld: dat 'even' werd wel een tijdje, zeker als je het een beetje aardig wilt beschrijven. Gelukkig was een co-auteur snel gevonden.

Vooraf

In dit artikel willen we ingaan op twee zaken.
1. Door middel van een constructie willen we:

- de afstand bepalen tussen twee punten op een bol;
 - de richting bepalen waarin een vliegtuig moet vertrekken als het rechtstreeks van het ene punt op de bol naar het andere punt gaat.
2. Het bewijzen van de sinus- en cosinusregel van de boldriehoeksmeetkunde met behulp van bovengenoemde constructie.

De constructiemethode is (nog) niet uitgetest in de klas. Het zal een groot beroep doen op het ruimtelijk inzicht, maar door goede hulpmiddelen (animaties, globes, bollen, touwtjes,...) te gebruiken krijgen leerlingen inzicht in de meetkunde op bollen. Misschien als aanvulling op modules in wiskunde D of NLT?

Omkappen van cirkels

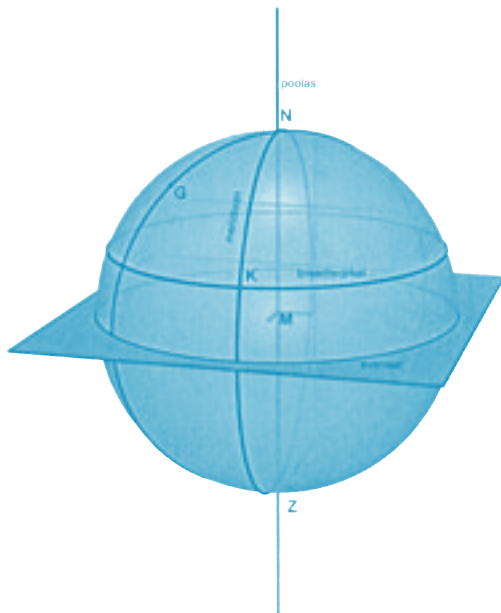
De constructie maakt gebruik van het 'omklappen van cirkels'. Omdat je in cirkels die niet in het vlak van de tekening liggen, weinig of niets kunt construeren, wordt in de constructie gebruik gemaakt van het omklappen van cirkels om hun snijlijn met het vlak van de tekening. Een voorbeeld hiervan staat in **figuur 1**: de cirkel op de bol (cirkel door P, K en Q) wordt omgeklapt om de lijn PQ, en belandt zo in het vlak van de tekening en wordt de cirkel PKQ.^[4]

Een aantal begrippen die te maken hebben met boldriehoeken, hebben we binnen een kader (Boldriehoeken; zie pag. 396) gezet.

Op vakantie naar Koeweit!

Om het probleem concreet te maken nemen we als voorbeeld een reisje naar Koeweit. Dat is een heel eind, dus dat wordt vliegen. We willen twee dingen weten:

1. hoe ver ligt Koeweit van Amsterdam in vogelvlucht, en



FIGUUR 2

	Amsterdam	Koeweit	gemeten	berekend
lengte (°)	4°52'	47°59'		
breedte (°)	52°21'	29°4'		
booglengte AK			38°	39,5°
richting vanuit A			110°	109°

2. in welke richting moet ik vanuit Amsterdam vertrekken?

Als we de plaats op aarde willen vastleggen, doen we dat met de geografische lengte en breedte. In **figuur 2** staat de aarde getekend; hierin zijn Greenwich (G) en Koeweit (K) aangegeven. Door Greenwich en de beide polen (N,Z) loopt een grootcirkel, de nulmeridiaan. Door Koeweit is ook een meridiaan getekend. De hoek die deze beide vlakken maken, is de geografische lengte van Koeweit. Als de plaats ten oosten van Greenwich ligt spreken we over oosterlengte, anders over westerlengte. Koeweit ligt op 47°59'E (East: oosterlengte).

Door Koeweit is ook een breedtecirkel getekend. Dit is de snijcirkel van het boloppervlak met het vlak door K loodrecht op de poolas NZ. De grootste breedtecirkel die getekend kan worden, heet evenaar; deze is eveneens getekend. De hoek die de lijn MK met het evenaarsvlak maakt, noemen we de geografische breedte van Koeweit.

Hoe ver ligt Amsterdam van Koeweit in vogelvlucht?

We nemen aan dat we de geografische lengte en breedte van beide plaatsen kennen (zie tabel). In **figuur 3** is Amsterdam (A) in het vlak van de tekening getekend. Koeweit (K) ligt op de breedtecirkel PKQ. De geografische breedte van Amsterdam is ongeveer 52°, dus teken in **figuur 3** $\angle AMN = 90^\circ - 52^\circ$. Analoog voor Koeweit: $\angle PMN = 90^\circ - 29^\circ$.

Als we willen kijken naar de kortste afstand over de bol van A naar K, dan is dat in **figuur 3** de boog AK op de grootcirkel door A.

De hoek die de meridiaan van Amsterdam maakt met die van Koeweit, is gelijk aan het verschil in geografische lengte; we ronden dat af op 43°. In **figuur 3** is hoek PTK dus 43°. Door de breedtecirkel PKQ om de lijn PQ naar het vlak van tekening te klappen kan hoek PTK ingetekend worden (zie **figuur 4**). We noemen deze omgeklapte cirkel C_1 .

KX is de loodlijn uit K op de lijn PQ. KX staat loodrecht op het vlak van de tekening, dus staat KX loodrecht op AM.

Het vlak door K loodrecht op AM snijdt de bol in cirkel K''KR (zie **figuur 3**). KX is de snijlijn van de cirkels K''KR en de cirkel PKQ, dus X ligt op de lijn RK''.

We kunnen nu de lijn RK'' in het vlak van de tekening weergeven; dit is namelijk de lijn door X loodrecht op AM (zie **figuur 4**).

Omdat boog AK = boog AK'' (zie **figuur 3**) geldt ook dat $\angle AMK = \angle AMK''$. We kunnen $\angle AMK''$ in **figuur 4** met de geodriehoek opmeten.

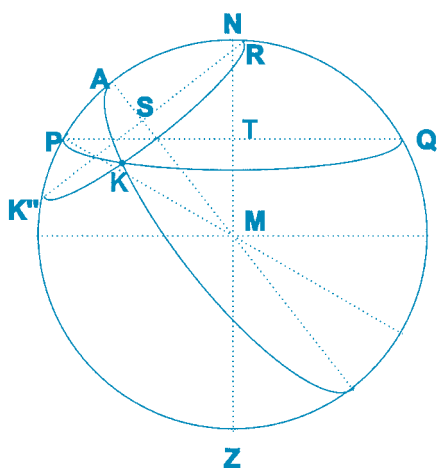
Voor de afstand tussen Amsterdam en Koeweit geldt dan:

$$afstand = \frac{\angle AMK''}{360} \cdot 2\pi R$$

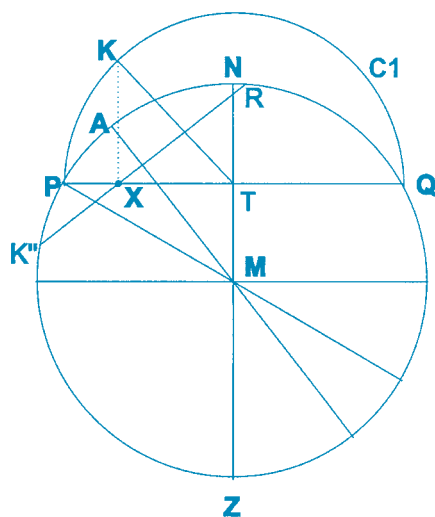
waarbij R de straal van de aarde is ($R \approx 6378$ km). Ingevuld levert dat voor de afstand Amsterdam-Koeweit ruim 4200 km op.

In welke richting moet ik vanuit Amsterdam vertrekken?

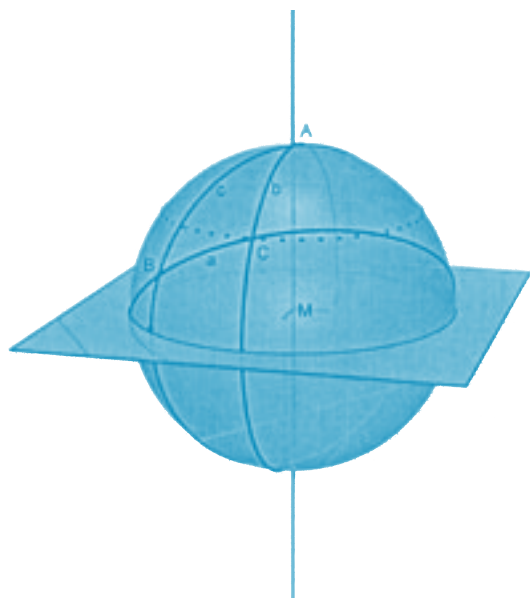
Nu nog even kijken in welke richting we vanuit Amsterdam moeten vertrekken om naar Koeweit te vliegen. In **figuur 3** is hoek A van boldriehoek NAK (zie ook het kader Boldriehoeken) de gevraagde hoek. Deze hoek A is gelijk aan hoek RSK, waarbij S het snijpunt is van K''R en AM.



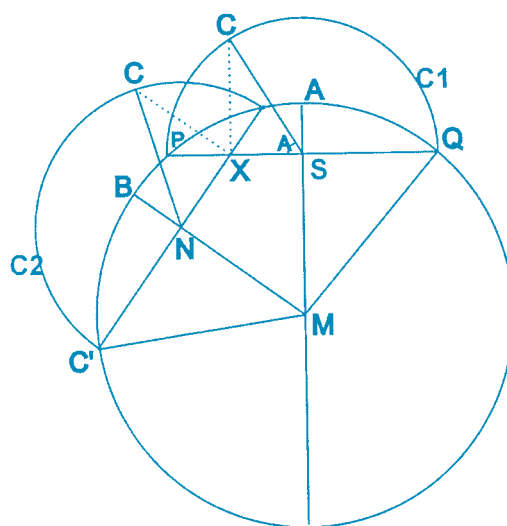
FIGUUR 3



FIGUUR 4



FIGUUR 6



FIGUUR 7

Cirkel $K''KR$ kan om de lijn $K''R$ naar het vlak van de tekening worden geklapt; zie figuur 5. De omgeklapte cirkel noemen we C_2 . We hebben al gezien dat de lijn KX de snijlijn is van de cirkels C_1 en C_2 , dus snijdt de lijn door X loodrecht op $K''R$ cirkel C_2 in K . Nu kan hoek RSK opgemeten worden met de geodriehoek.

Je ziet: de projectie van K op het grondvlak (die we X hebben genoemd) speelt een cruciale rol in deze constructies. In de tabel staan de gegevens die bij deze tekening zijn gebruikt én de resultaten van de hoeken die in deze tekening zijn gemeten en berekend^[5]. En och, we vinden een verschil van een paar graden niet zo'n ramp...

Sinus- en cosinusregel van de boldriehoeksmeetkunde

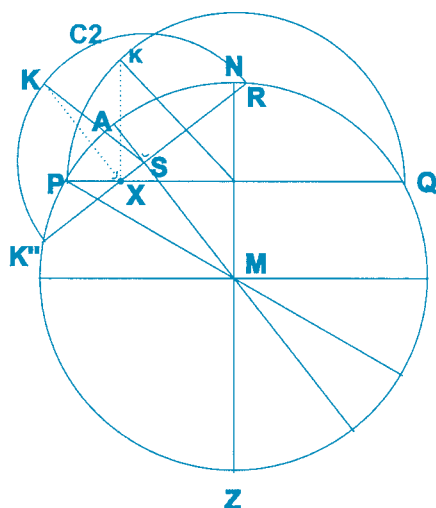
Het moet mogelijk zijn om met de bovenstaande constructies ook de bekende regels (zie weer het kader) af te leiden. Laten we beginnen met de sinusregel van de boldriehoeksmeetkunde.

De sinusregel

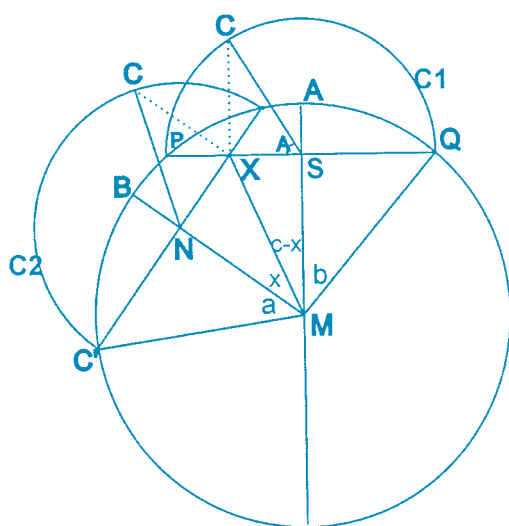
Als we figuur 6 plat slaan, krijgen we figuur 7. We gaan bewijzen dat geldt:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

(De letters a , b , A en B hebben te maken met de



FIGUUR 5



FIGUUR 8

zijden en de hoeken van een boldriehoek. Zie hiervoor de definities in het kader.)

Het bewijs van de andere regel (met $\sin c$ en $\sin C$) verloopt analoog.

We kiezen ook hier weer het assenstelsel zó, dat het vlak door A , B en M in het vlak van de tekening ligt. De straal van de bol is 1.

Allereerst wordt de breedtecirkel waar C op ligt naar het vlak van de tekening geklapt om de lijn PQ . We noemen dit cirkel C_1 . In deze cirkel kan C aangegeven worden als we $\angle A$ ($= \angle PSC$) weten. De projectie van C op PQ noemen we weer X .

C_2 is de snijcirkel van het vlak door C loodrecht op BM . CX is de snijlijn van de cirkels C_1 en C_2 .

Teken nu de lijn door X loodrecht op BM . Deze lijn snijdt BM in punt N . We klappen cirkel C_2 om lijn XN naar het vlak van tekening en tekenen een loodlijn door X loodrecht op XN (dit is weer de snijlijn CX van de cirkels C_1 en C_2). Deze lijn snijdt de cirkel C_2 in C . In deze cirkel geldt dan $\angle B = \angle CNX$.

(Bedenk: hoek B is de hoek tussen de grootcirkels door AB en door BC ; vergelijk dit ook met [figuur 3](#): $\angle A = \angle RSK$.)

Ook: als we de grootcirkel door B om MB naar het vlak van de tekening klappen, komen we op de cirkel door B en A uit. Punt C komt op C' terecht. Immers: C_2 staat loodrecht op BM en ook geldt $\angle BMC = \angle BMC'$.

Hoek BMC is zijde a van de boldriehoek (zie kader):

- $a = \angle BMC = \angle BMC'$ (zie [figuur 8](#))
- de straal van C_2 is $\sin a$, zodat $CN = \sin a$
- $\angle CNX = \angle B$, zodat $CX = \sin a \cdot \sin B$ (1)

Als we de grootcirkel door A en C roteren om AM , dan geldt boog $AC =$ boog AQ . Ofwel:

- $b = \angle AMC = \angle AMQ$
- de straal van C_1 is $\sin b$, zodat $SC = SQ = \sin b$
- $\angle CSP = \angle A$, zodat $CX = \sin b \cdot \sin A$ (2)

En dus is volgens (1) en (2):

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

met a , b , A , B elk tussen 0° en 180° .

En dit is de sinusregel voor deze boldriehoek.

De cosinusregel

Zie hiervoor ook [figuur 8](#). Deze figuur is vrijwel identiek aan [figuur 7](#), alleen hebben we MX getekend. Bedenk dat hoek BMA gelijk is aan boog c . Geven we hoek BMX aan met x , dan is hoek XMA gelijk aan $c - x$.

- In driehoek MQS is: $MS = \cos b$
- en in driehoek MSX : $\cos(c-x) = \frac{\cos b}{MX}$
- dan, met de 'ouderwetse' goniometrische formule $\cos(c-x) = \cos c \cos x + \sin c \sin x$

$$\text{vinden we uit } \cos x = \frac{\cos a}{MX} \text{ en } \sin x = \frac{NX}{MX} = \frac{\sin a \cos B}{MX}$$

$$\text{dat } \frac{\cos b}{MX} = \cos c \cdot \frac{\cos a}{MX} + \sin c \cdot \frac{\sin a \cos B}{MX}$$

$$\text{zodat } \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

En dit is de cosinusregel.

En daarmee kunnen we met passer en geodriehoek tekenen én berekenen hoe ver we moeten vliegen én in welke richting we moeten vertrekken om in Koeweit te komen.

De constructies zijn ook handig bij het afleiden van de sinus- en cosinusregel voor boldriehoeken.

[1] J. Krüger, J. Paus, P. van der Zwaard: *Samenhangend onderwijs voor natuurkunde en wiskunde*. SLO-publicatie (2006); zie www.slo.nl/themas/00051/Map9/00001/

[2] Martinuscollege in Grootebroek: het project 'Waar ben ik', door Cathy Baars (natuurkunde) en Jaap Bosschaart (wiskunde). Jaap Bosschaart heeft tijdens de jaarvergadering 2005 van de NVvW in een workshop het project toegelicht.

[3] Prof. Ivan Atanasijević (1919-1998), hoogleraar aan de universiteit van Belgrado en later aan de afdeling Sterrenkunde van de Katholieke Universiteit Nijmegen (RU Nijmegen). Voor zijn levensloop zie: <http://saj.matf.bg.ac.yu/158/pdf/147-156.pdf>

[4] Een tekening zoals figuur 1 is niet geheel correct: als we de evenaarscirkel (en een breedtecirkel) in perspectief willen tekenen (als ellips), dan moet de poolas iets gekanteld worden getekend.

[5] Zie ook binnen het kader. In deze boldriehoek is A de noordpool, B is Amsterdam en C is Koeweit. De zijde a levert de afstand, de hoek B levert de gevraagde richting.

Gebruik de cosinusregel van de boldriehoeksmeetkunde:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Invullen van de gegevens uit de tabel voor Amsterdam en Koeweit levert:

$$\cos a = \cos(90-29)\cos(90-52) + \sin(90-29)\sin(90-52)\cos(47-4)$$

Hieruit kan a berekend worden.

Zo ook:

$$\begin{aligned}\cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos(90-29) &= \cos a \cos(90-52) + \sin a \sin(90-52) \cos B\end{aligned}$$

En hieruit kan, omdat we a kennen, B berekend worden.

Over de auteurs

- Jos Paus is docent natuurkunde aan het Bonhoeffercollege te Enschede en medewerker van de SLO te Enschede.

E-mailadres: paus@bc-enschede.nl

- Karin Paus is docente wiskunde aan het ROC van Twente, afdeling VAVO.

E-mailadres: kpaus@rocvantwente.nl

Boldriehoeken

- **Grootcirkel**: de snijcirkel van een vlak door het middelpunt van de bol met het boloppervlak. Als A de noordpool is, noemen we de grote cirkel door A een meridiaan.

- **Kortste afstand**: de kortste afstand tussen twee punten B en C op het boloppervlak is de kleinste cirkelboog BC van de grootcirkel door B en C. (De afstand van B naar C vind je op een bol door de kortste afstand te bepalen. Deze kortste afstand is te vinden door langs een grote cirkel van B naar C te bewegen. Jaap Bosschaart^[2] beschreef dit tijdens een workshop bij de NVvW: verbind de plaatsen op een globe met een touwtje. Je kunt dan zien dat het touwtje langs een grote cirkel ligt. Geen bewijs, maar wel illustratief.)

- **Boldriehoek**: een driehoek op het oppervlak van een bol die ingesloten wordt door cirkelbogen van grote cirkels (bijv. driehoek ABC).

- **Zijden van een boldriehoek**: in driehoek ABC worden de zijden BC, AC en AB met kleine letters aangegeven: respectievelijk a, b en c. Onder zijde a (de kleinste boog BC op de grote cirkel door BC) wordt de middelpuntshoek horend bij zijde a bedoeld (dus hoek BMC). De zijde wordt (dus) in graden uitgedrukt.

- **Hoeken van een boldriehoek**: een hoek wordt ingesloten door twee zijden.

Hoek A (de hoek die wordt ingesloten door de zijden c en b) vind je als volgt:

AM is de snijlijn van de grootcirkels door AB en AC.

V is het vlak door M loodrecht op AM.

De grote cirkel door AB snijdt vlak V in B'.

De grote cirkel door AC snijdt vlak V in C'.

Nu geldt: $\angle A = \angle B'MC'$.

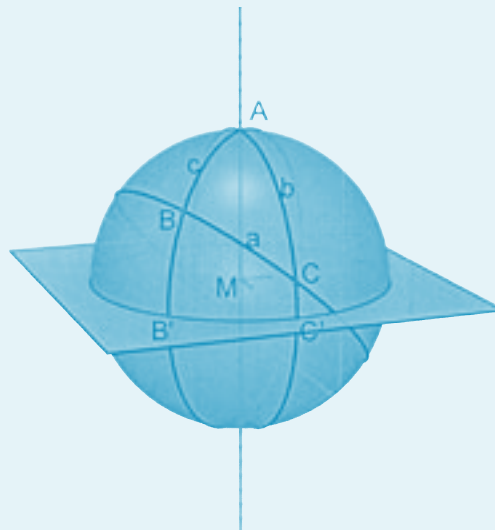
Bedenk dat deze hoek is te vinden in ieder vlak evenwijdig aan vlak V.

Een afspraak: voor alle hoeken A in een boldriehoek geldt: $0 < \angle A < 180^\circ$.

- **Regels in de boldriehoeksmeetkunde**

$$\text{sinusregel: } \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\text{cosinusregel: } \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{cases}$$



MUURTJE BOUWEN, KANSVARIABELE TRANSFORMEREN

[Rob Bosch]

Vorige week heb ik twee keer een muurtje verplaatst. De eerste keer toen een leerling van het vmbo en zijn belangstellende vader mijn hulp vroegen bij het volgende probleem.

Een muur van 6 meter lang en 60 cm hoog wordt voorzichtig afgebroken en daarna op een andere plaats weer opgebouwd. De nieuwe muur is 9 meter lang. Hoe hoog is de nieuwe muur?

De leerling had een praktische oplossing gevonden waarbij hij op papier het muurtje daadwerkelijk verplaatste. Hij tekende een muurtje met zes rijen stenen. Vervolgens verplaatste hij steeds anderhalve rij stenen naar de nieuwe muur. Nadat alle stenen verplaatst waren, bleek de nieuwe muur uit vier rijen stenen te bestaan. Deze muur is dus 40 cm hoog. Prima, maar vader had tegen deze redenering bezwaren (waarschijnlijk de werkelijke reden van hun bezoek). Vader meende dat je niet zomaar kon zeggen dat een rij stenen 10 cm hoog is, en vond dus dat de redenering van zijn zoon niet algemeen toepasbaar is. Hij wilde weten of ik misschien een wiskundeformule voor de oplossing van het probleem kon geven. We probeerden samen zo'n 'bekende wiskundeformule' te vinden. Na een behoorlijk aantal voorbeelden en enige discussie kwamen we tot de volgende oplossing. Laat h_o , h_n en b_o , b_n respectievelijk de hoogten en de breedten van de oude en nieuwe muur voorstellen. De oppervlakten van de twee muren zijn gelijk, dus

$$h_o \cdot b_o = h_n \cdot b_n$$

waaruit volgt

$$h_n = h_o \cdot \frac{b_o}{b_n} \quad (1)$$

Voor de hoogte van de nieuwe muur uit de vraag vinden we inderdaad $h_n = 60 \cdot \frac{6}{9} = 40$.

De geldigheid van formule (1) hangt uiteraard van een aantal randvoorwaarden af. Moeten we de dikte

van de voegen meerekenen en kunnen we de stenen zowel in de lengte als in de breedte doorhakken? Gezien de vraagstelling hoeven we daar echter geen rekening mee te houden.

Twee dagen later heb ik in een college kansrekening w  r een muurtje verplaatst. Nu was de vraag: *De stochast X heeft kansdichtheidsfunctie $f(x)$. De stochast Y wordt gegeven door $Y = u(X)$ waarbij u een monotone functie is.*

Wat is de kansdichtheidsfunctie $g(y)$ van Y ?

Dit ziet er aanzienlijk moeilijker uit dan de eerste vraag. Wel, voor de kansdichtheid van Y geldt:

$$P(y \leq Y \leq y + dy) = P(x \leq X \leq x + dx)$$

waarbij $u(x) = y$ en $u(x + dx) = u(y + dy)$.

De kansmassa tussen x en $x + dx$ is ongeveer gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek onder de grafiek van f . Deze massa moeten we overbrengen naar het interval $(y, y + dy)$ op de Y -as. (We bouwen een nieuw muurtje, maar nu met breedte dy .)

Volgens formule (1) geldt voor de hoogte $g(y)$:

$$g(y) = f(x) \frac{dx}{dy} \quad (2)$$

Als X bijvoorbeeld uniform verdeeld is op $[0, 4]$ (dat wil zeggen $f(x) = \frac{1}{4}$), dan geldt voor de

kansdichtheidsfunctie $g(y)$ van de stochast $Y = \sqrt{X}$:

$$g(y) = f(x) \frac{dx}{dy} = \frac{1}{4} \cdot 2y = \frac{1}{2}y \quad (0 \leq y \leq 2)$$

Uiteraard is het bovenstaande geen volledig en goed bewijs, maar het grondidee is duidelijk.

In een week tijd twee verschillende contexten en zeer uiteenlopende niveaus, maar hetzelfde basisidee. Grappig is dat.

Over de auteur

Rob Bosch is redacteur van Euclides en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

FINANCIËLE WISKUNDE

Een extra optie in de klas?

[Nico Alink en Michel Vellekoop]

Inleiding

Sinds enkele jaren worden er op de Universiteit Twente verschillende masterclasses wiskunde uitgevoerd voor leerlingen van 5-vwo. Deze zijn bedoeld als aansluitingsactiviteit vo-wo en geïnteresseerde leerlingen kunnen die gebruiken als opzet voor een profielwerkstuk wiskunde.

De schrijvers van dit artikel hebben in dit kader een masterclass ontwikkeld over financiële wiskunde. Daarin maken de leerlingen kennis met toepassingen van de wiskunde op financieel gebied. Het betreft hier twee onderwerpen: het prijzen van aandelenopties en het rekenen aan risico's in spellen waarbij geld te verdienen valt. Beide onderwerpen lenen zich heel goed als toepassingen van wiskunde in de vorm van een masterclass of (een deel van) een praktische opdracht.

We gaan eerst nader in op het eerstgenoemde onderwerp en laten zien dat met weinig wiskundige kennis er toch aan te rekenen is. Daarna vertellen we iets meer over de rest van de inhoud van de masterclass en over de tot nu toe behaalde resultaten bij de uitvoering ervan (hoewel in het verleden behaalde rendementen nooit een garantie geven voor de toekomst in de financiële wereld!)

Wat zijn opties?

U kent ongetwijfeld de beurswereld vanwege het beleggen in aandelen. Maar er zijn veel meer financiële producten waarin gehandeld wordt: beleggingsfondsen, opties, obligaties, de handel op de termijnmarkt en exotischer en minder grijpbare producten zoals de 'WinstVerdriedubbelaar'. Vooral de handel in opties is erg belangrijk en wereldwijd enorm groot. Deze handel lijkt voor leken een schimmig spel – er wordt immers gehandeld in iets waarvan de waarde pas in de toekomst bekend wordt – maar met relatief eenvoudige wiskunde

kunnen we toch een goed idee krijgen welk model er aan de prijsvorming van opties ten grondslag ligt.

Wat is een optie op een aandeel? Een optie is het recht om op een van tevoren vastgesteld tijdstip in de toekomst een aandeel te kopen of verkopen tegen een van tevoren vastgestelde prijs. We noemen die prijs de *uitoefenprijs* of *strike*, en het aandeel dat bij de optie hoort de *onderliggende waarde*. Deze onderliggende waarde hoeft overigens niet altijd een aandeel te zijn. Denk bijvoorbeeld maar aan de optie op een huis. Wij beperken ons hier tot aandelen als onderliggende waarden.

Wanneer er sprake is van het recht om een aandeel te *kopen* noemen we dat een *calloptie*, bij het recht om een aandeel te *verkopen* spreken we van een *putoptie*.

Merk op dat een optie een recht inhoudt en geen plicht, dus de houder van de optie kan er van af zien om van dit recht gebruik te maken wanneer het hem slecht uitkomt.

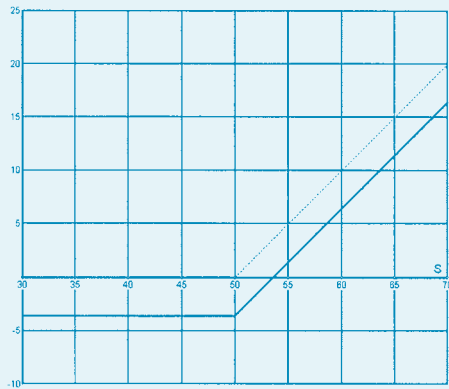
In de praktijk worden opties alleen per honderd stuks verhandeld, in dit artikel laten we deze randvoorwaarde achterwege en kijken we steeds naar een enkele optie.

Een voorbeeld

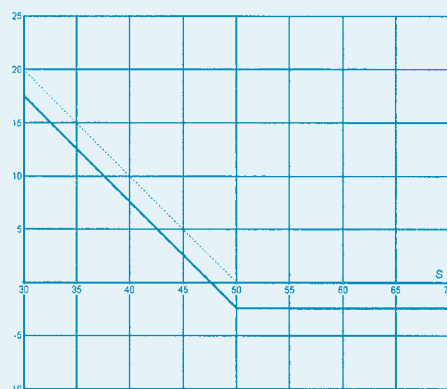
We nemen aan dat het vandaag 1 januari 2007 is en dat we over de volgende calloptie beschikken.

Deze optie geeft de koper het recht om één aandeel Unilever te kopen op 1 januari 2008 voor de prijs van 50 euro.

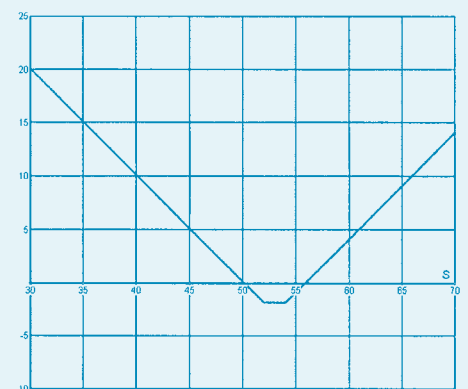
De datum 1 januari 2008 noemen we de *uitoefen-datum* van de optie, de waarde 50 euro is de *strike*. Als we deze optie op 1 januari 2007 kopen voor een bepaald bedrag, weten we natuurlijk nog niet wat de waarde van een Unilever aandeel over een jaar zal zijn. Wanneer op 1 januari 2008 het



FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3

aandeel Unilever een hogere waarde heeft dan 50 euro (bijvoorbeeld € 52,34) zullen we deze optie uitoefenen, dus het aandeel inderdaad voor 50 euro van de optiehandaar kopen en direct op de beurs weer verkopen voor de daar geldende prijs van € 52,34. We gaan er daarbij van uit dat aandelen doorlopend verhandeld kunnen worden tegen de geldende koers. In de praktijk is dit ook het geval. Het verschil van € 2,34 is onze winst of liever gezegd onze uitbetaling omdat we nog geen rekening hebben gehouden met de aanschafprijs van de optie. Wanneer de aandelprijs over een jaar onder de 50 euro ligt, mogen we iets voor 50 euro kopen dat minder dan 50 euro waard is. We zullen de optie dan niet uitoefenen en dus een uitbetaling nul hebben (en een klein verlies incasseren omdat we voor de optie betaald hebben!). De (stochastische) waarde van het aandeel op 1 januari 2008 geven we aan met S . Dan geldt voor de uitbetaling U_{call} van deze calloptie:

$$U_{call} = 0 \text{ als } S < 50$$

$$U_{call} = S - 50 \text{ als } S \geq 50$$

Dit komt op hetzelfde neer als:

$$U_{call} = \max(S - 50, 0)$$

We zijn meer geïnteresseerd in de winst die we met deze calloptie kunnen behalen. Die hangt natuurlijk nog af van de prijs die we voor de optie moeten betalen. Als we aannemen dat de optie € 3,60 heeft gekost, dan geldt voor de winst:

$$W_{call} = \max(S - 50, 0) - 3,60.$$

In **figuur 1** zijn de grafieken van de uitbetaling (stippellijn) en winst (ononderbroken lijn) getekend.

Met deze kennis kunnen we de formules noteren die in het algemeen horen bij een calloptie en een putoptie. We geven de strike van een optie aan met K en de waarde van het onderliggende aandeel op de uitoefendatum met S . Er geldt:

$$U_{call} = \max(S - K, 0)$$

$$U_{put} = \max(K - S, 0)$$

Een calloptie levert dus iets op wanneer de waarde van het onderliggende aandeel groter is dan de strike en anders niets, bij een putoptie is het omgekeerd: er is sprake van een uitbetaling wanneer het aandeel minder waard is dan de strike. In **figuur 2** zijn de grafieken van de uitkering en de winst bij een putoptie getekend, die een strike had van 50 euro en een aanschafprijs van 2,40. Daar horen dus de volgende formules bij:

$$U_{put} = \max(50 - S, 0)$$

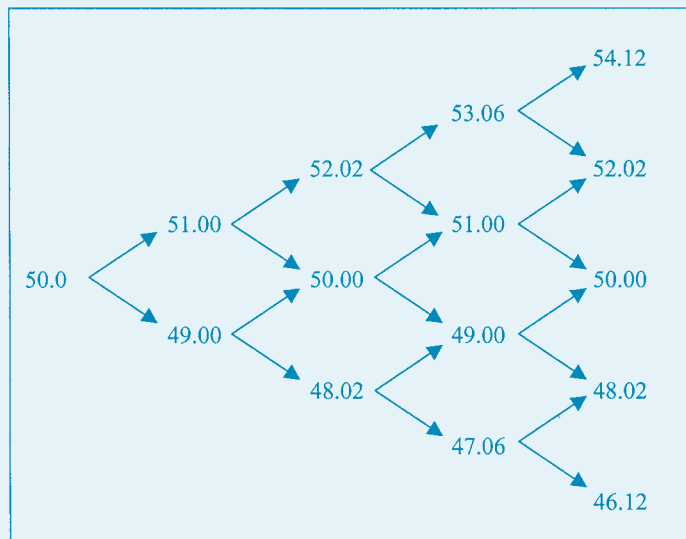
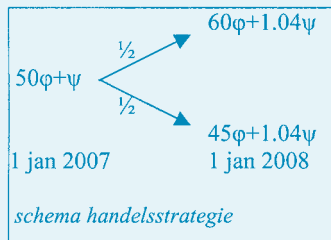
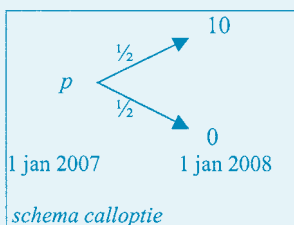
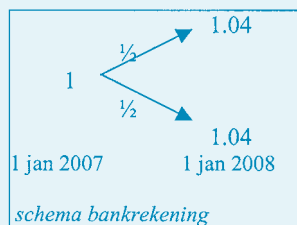
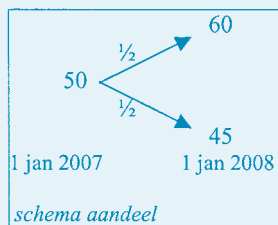
$$W_{put} = \max(50 - S, 0) - 2,40$$

Merk op dat de maximumfunctie ook te schrijven is met behulp van een functie waarin de absolute waarde wordt gebruikt. Er geldt immers:

$$\max(x, 0) = \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}x \text{ voor alle waarden van } x.$$

Handelen in opties is risicovol. De aanschaf van opties kost geld en zodra het onderliggende aandeel minder waard is dan de strike, is men bij een calloptie deze inleg volledig kwijt: er is sprake van 100% verlies! Daar staat tegenover dat er ook grote winsten te behalen zijn als de aandelprijs stijgt (bij een call) of daalt (bij een put).

De handel in opties kent veel mogelijkheden. Een handelaar kan callopties en putopties met verschillende strikes kopen en ook verkopen.



FIGUUR 4
FIGUUR 5

FIGUUR 6
FIGUUR 7

FIGUUR 8

Daarmee beperkt hij de risico's. Met risico wordt hier niet alleen de kans op een (groot) verlies bedoeld, maar ook de kans op (veel) winst. In [figuur 3](#) staat de somgrafiek getekend – uitgezet tegen de aandelprijs – van de winstgrafieken die horen bij een calloptie.

De prijs van een optie: een eenvoudig modelletje

De economen Black, Scholes en Merton hebben zich in de jaren '70 beziggehouden met de vraag hoe de prijs van een optie moet worden vastgesteld. Voor dit werk ontvingen Scholes en Merton in 1997 de Nobelprijs in de economie (Black was inmiddels overleden). Het voert hier te ver in te gaan op het Black-Scholes-model dat de grondslag is van hun werk. Maar het principe er achter is heel goed te begrijpen, ook voor leerlingen van 5- of 6-vwo. Het lijkt voor wiskundigen niet mogelijk om iets te zeggen over gebeurtenissen die nog moeten gaan plaatsvinden. Hoe kun je bepalen wat de prijs van een optie is? Wat moet een optie bij aanschaf kosten wanneer je niet weet wat de waarde van het onderliggende aandeel zal zijn op het moment dat de optie afloopt?

Laten we weer de Unilever calloptie van hierboven nemen met strike 50. We maken nu eerst een eenvoudig model voor het aandeel Unilever. Neem aan dat de aandelprijs van Unilever vandaag (1 januari 2007) gelijk is aan 51 euro en veronderstel dat dit aandeel over één jaar (1 januari 2008) slechts twee waarden kan aannemen, te weten 60 euro of 45 euro, beide met een kans van $\frac{1}{2}$.

In [figuur 4](#) staat een schema voor het aandeel. Dit schema moet als volgt worden gelezen: op 1 januari 2007 is de aandelprijs 51 euro en op 1 januari 2008 is de aandelprijs óf 60 euro óf 45 euro, beide met een kans $\frac{1}{2}$.

Nu gaan we eenzelfde soort schema maken voor de calloptie. Dat levert [figuur 5](#) op.

Immers: als het Unilever aandeel stijgt naar 60 euro en wij mogen het voor 50 euro aanschaffen, dan is de optie 10 euro waard. Als het aandeel daalt naar 45 euro, is de optie waardeloos geworden en dus 0 euro waard (niet -15 euro want we *hoeven* de optie niet uit te oefenen!). We hebben de nog onbekende prijs van de optie aangegeven met een p .

We maken ook nog een schema waarbij we geld op een bankrekening zetten. We nemen aan dat de bank per jaar 4% rente geeft. Dat schema ziet er dan, heel flauw, uit zoals afgebeeld in [figuur 6](#). Merk op dat we ook een negatief bedrag op de bank kunnen zetten; we moeten dan geld lenen.

'Handelsstrategie'

We gaan nu het gedrag van de calloptie nabootsen met aandelen en de bankrekening. In plaats van de calloptie te kopen, kopen we ϕ aandelen (van Unilever natuurlijk) en zetten we ψ euro op de bank. De waarden van ϕ en ψ zijn nu nog onbekend, maar die gaan we zo bepalen, dat onze handelsstrategie het gedrag van de calloptie precies 'nabootst'.

De handelsstrategie levert het schema op van [figuur 7](#).

Door dit schema te vergelijken met dat voor de calloptie ([figuur 5](#)) zien we dat het nabootsen van de calloptie met behulp van aandelen en de bankrekening niets anders betekent dan het oplossen van het stelsel:

$$\begin{cases} 60\phi + 1.04\psi = 10 \\ 45\phi + 1.04\psi = 0 \\ 51\phi + \psi = p \end{cases}$$

met als oplossing $p = 5,15$.

Afsluitende opdracht 3.2

Bij de berekeningen van het prijzen van opties heb je gezien dat de prijs van de optie afhangt van de volgende vijf gegevens.

- De strike K
 - De huidige (aankoop)waarde van het aandeel S
 - De twee mogelijke waarden van het aandeel op de expiratedatum $w1$ en $w2$
 - Het rentepercentage r
- a. Probeer een formule op te stellen waarmee je de prijs p van een optie rechtstreeks kunt uitrekenen, door bovenstaande gegevens in die formule in te vullen. Maak daarbij, indien nodig, onderscheid tussen callopties en putopties.
- b. Schrijf een Excel-programma waarmee je die berekeningen automatiseert. Het resultaat in dat programma kan er als volgt komen uit te zien.

Programma bij AO3-2							
Strike		K	50				
huidige waarde aandeel		S	50				
waarde aandeel op expiratedatum		$w1$	60				
waarde aandeel op expiratedatum		$w2$	45				
Rentepercentage		r	4				
prijs optie			p	4,487179		afgerond	4,49
ϕ	0,666667						
ψ	-28,84615						

- c. Controleer met behulp van dit programma de antwoorden die je hebt gekregen bij de opdrachten 4, 5 en 6.

FIGUUR 9

Merk op dat we bij deze berekening helemaal geen gebruik hebben gemaakt van de aanname dat beide eindwaarden van het aandeel Unilever met een kans van $\frac{1}{2}$ zouden voorkomen. Als in de schema's bijvoorbeeld de kansen $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ gebruikt waren, hadden we dezelfde vergelijkingen en dus dezelfde optieprijs p gekregen. Klaarblijkelijk doen deze kansen er niet toe. Dat ligt ook wel voor de hand: optiehandelaren moeten in *elk* denkbaar scenario 'goed' zitten, dus de kans dat een bepaald scenario zich voordoet mag er niet toe doen!

Echter, p is wel afhankelijk van de volgende parameters:

- de strike K (hier 50);
- de huidige waarde van het aandeel S (hier 51);
- de twee mogelijke waarden van het aandeel op de expiratedatum S^u en S^d (60 en 45; de letters u en d staan hier voor *up* en *down*);
- de rentevoet r (hier 0,04).

We komen uit op de volgende formule:

$$p = S \cdot \frac{u - d}{S^u - S^d} + \frac{u \cdot S^d - d \cdot S^u}{(S^d - S^u) \cdot (1 + r)}$$

met $u = \max(S^u - K, 0)$ en $d = \max(S^d - K, 0)$

Dit biedt de gelegenheid om snel berekeningen te laten uitvoeren in bijvoorbeeld Excel.

Natuurlijk is dit model niet realistisch omdat de kansverdeling van het aandeel Unilever over een jaar in het model slechts twee mogelijkheden kent, maar het levert wel de invalshoek waarmee uiteindelijk de optieprijs bepaald kan worden. Het bouwsteentje dat we net behandeld hebben, kan namelijk steeds herhaald worden in de structuur van een zogenaamde binomiale boom (zie figuur 8), die al wat realistischer oogt en leidt tot modellen die daadwerkelijk op de optiebeurzen gebruikt worden.

Afsluitende opdracht 5.1

De Sint Petersburg Paradox

Stel dat je in een casino bent en dat je daar een bepaald bedrag in moet zetten om mee te mogen doen met een spel, dat de volgende regels heeft:

- Er wordt net zo lang met een zuivere munt gegooid tot er een keer 'kop' valt, zeg na n keer.
- Vervolgens krijg je 2^n euro uitbetaald.

We hebben gezien dat de verwachtingswaarde van de uitbetaling gelijk is aan ∞ . En dat is wat vervelend.

We voeren een extra spelregel in: wanneer het spel na de vijfde worp nog niet voorbij is, stopt het spel en krijg je niets uitbetaald.

We gaan uit van de logaritmische nutsfunctie $U(x) = \ln x$.

1. Gebruik Excel om te berekenen wat de verwachtingswaarde van de uitbetaling is (we kijken dus niet naar de inzet).
2. Gebruik Excel om te berekenen wat de verwachtingswaarde van het *nut* van de uitbetaling is.
3. Welk bedrag zal iemand met een logaritmische nutsfunctie maximaal willen inzetten?
4. Beantwoord dezelfde vragen voor de nutsfunctie $U(x) = \sqrt{x}$.
5. Wie is er banger voor risico: iemand met de nutsfunctie $U(x) = \ln x$ of iemand met de nutsfunctie $U(x) = \sqrt{x}$?

FIGUUR 10

De verdere inhoud van de masterclass

Tot zover reikt (in het kort weergegeven) het eerste deel van de masterclass. Uiteraard krijgen de leerlingen ruimschoots de gelegenheid om aan een groot aantal voorbeelden te rekenen. Daarnaast nemen zij kennis van achtergronden die onlosmakelijk verbonden zijn met de beurswereld, zoals de samenstelling van de AEX-index, het nemen van risico's en de hypes met soms grote gevolgen.

In het tweede deel van de masterclass besteden we aandacht aan kansspelen. Leerlingen rekenen enkele strategieën bij Roulette door met behulp van simulaties en krijgen zo inzicht in kansen en risico's. Het begrip *nutsfunctie* wordt ingevoerd. Daarbij speelt het begrip *afnemend stijgende functie* een rol en er wordt aandacht besteed aan onderwerpen zoals differentiëren en exponentiële en logaritmische functies.

Het laatste hoofdstuk heeft als titel 'Optimaal beslissen onder onzekerheid' en behandelt de vraag wanneer je in een kansspel welke beslissing moet nemen: doorgaan en proberen meer te winnen of stoppen en met een tevreden blik de tot op dat moment behaalde winst in ontvangst nemen. De aanpak van 'Dynamisch programmeren' wordt hier toegepast, bijvoorbeeld op de vraag wanneer je zou moeten stoppen bij het bekende televisiespel Lotto Weekend Miljonairs.

Elk van de zes hoofdstukken is voorzien van enkele 'Afsluitende Opdrachten' waarvan de beantwoording deel uitmaakt van het profielwerkstuk. Twee voorbeelden van zo'n afsluitende opdracht vindt u in de figuren 9 en 10.

Aan het einde van de masterclass is een hoofdstuk toegevoegd waarin wij twee concrete

voorstellen doen voor de verdere invulling van een profielwerkstuk. Het eerste voorstel heeft betrekking op het prijzen van opties en het gebruik van de Black-Scholes formule. Het tweede voorstel heeft betrekking op het simuleren van spelprogramma's om daarmee een optimale strategie te bepalen.

Voorkennis

We veronderstellen niet echt veel specifieke voorkennis. Wat noodzakelijk is, wordt kort behandeld c.q. herhaald. Het gaat ruwweg om de volgende onderwerpen:

- Statistiek: gemiddelde, standaardafwijking, variantie.
- Kansrekening: stochast, kansverdeling, verwachtingswaarde, variantie.
- Analyse: differentiëren, natuurlijke logaritme, exponentiële functie, e -machten; dit alles in eenvoudige situaties.

Doelgroep

De masterclass is bedoeld voor leerlingen met wiskunde B1 of B12. Dat heeft vooral te maken met het feit dat in het tweede deel van de masterclass veel analyse aan de orde komt.

Daarnaast wordt een aantal keren gebruik gemaakt van Excel en enig idee van programmeren in Excel is onontbeerlijk.

Met name de eerste drie hoofdstukken, die handelen over het prijzen van opties, zijn ook voor wiskunde A12-leerlingen een mooie toepassing van wiskunde. Hoewel we er nog geen ervaring mee hebben opgedaan, lijkt ons dat deel wel geschikt om er een praktische opdracht mee te vullen voor deze doelgroep.

Ervaringen

In februari en maart 2005 is deze masterclass, samen met vier andere masterclasses (speltheorie, het handelsreizigersprobleem, ons zonnestelsel en telecommunicatie) voor het eerst uitgevoerd aan de Universiteit Twente. Tijdens zes middagen van 14.00 tot 17.00 uur kregen de deelnemers uit 5 vwo de gelegenheid om onder leiding van een docent van de UT en een student-assistent te werken aan het gekozen onderwerp. Zes groepen van elk twee leerlingen hadden zich ingeschreven voor onze masterclass. Daarvan heeft één groep rond de zomervakantie het bijbehorende profielwerkstuk met succes afgerond en enkele andere groepen gedurende het lopende schooljaar. Dat heeft uiteraard te maken met de wijze waarop elke school het traject van het maken van een profielwerkstuk geregeld heeft. Naast deze zes middagen was er nog een zevende bijeenkomst, waar de deelnemers een presentatie hebben verzorgd.

Wanneer we kijken naar de tijdsinvestering voor de leerlingen, kunnen we een voorzichtige balans opmaken: zeven middagen van elk drie klokuren met (wel of niet) een aantal uren thuis en/of op

school. De masterclass kost de leerling aan tijd 20 à 30 klokuren. Dat is al een aardige start voor een profielwerkstuk. Overigens bieden wij de leerlingen en de betrokken docenten hulp bij het maken en nakijken van de profielwerkstukken.

We hebben onder deze leerlingen naderhand een enquête gehouden. Daaruit bleek dat zij heel enthousiast waren over de masterclass en de vormgeving er van. Tegelijkertijd bleek dat enkele leerlingen erg veel moeite hadden zelfstandig verder te werken en hun profielwerkstuk naar behoren te voltooien. Dat was de reden om de opzet dit jaar wat te wijzigen. We hebben er voor gekozen acht bijeenkomsten te houden, zes om de stof uit de masterclass te behandelen, één om de eerste opzet van het profielwerkstuk te bespreken en één om alle deelnemers een presentatie te laten verzorgen. Er zijn 5 deelnemers. Op het moment van schrijven van dit artikel loopt deze masterclass nog.

Tegelijkertijd is het aanbod uitgebreid met masterclasses van natuurkunde, scheikunde en informatica. Meer informatie daarover kunt u vinden op de website www.schoolsite.utwente.nl/masterclass.

Download

Al het lesmateriaal van de masterclass Financiële wiskunde is vrij te downloaden vanaf de website <http://wwwhome.math.utwente.nl/~vellekoopmh/masterclass/>

Over de auteurs

- Nico Alink is docent wiskunde aan het Bonhoeffer College in Enschede. Gedurende de schooljaren 2004-2005 en 2005-2006 heeft hij als LIO (Leraar In Onderzoek) de gelegenheid gekregen zich aan de Universiteit Twente bezig te houden met onderzoek binnen de Financiële Wiskunde.

E-mailadres: alinknhm@math.utwente.nl

- Michel Vellekoop is universitair hoofddocent aan de Universiteit Twente. Hij is begeleider van Nico Alink in diens LIO-traject.

E-mailadres: M.H.Vellekoop@ewi.utwente.nl

IS HET GEMIDDELDE WEL ZO HARMONISCH?

Hoe een onschuldig lijkende wiskundeopgave leidt tot reflectie op het begrip 'gemiddelde'.

[Simon van der Salm]



Otto Ludwig Holder
(1859-1937)

Opgave: Harmonisch autorijden

Johan heeft een nieuwe auto gekocht en gaat op zondag een stukje rijden. Het eerste uur spaart hij zijn auto en rijdt hij slechts 80 km/uur, maar het tweede uur rijdt hij met een snelheid van 120 km/uur.

(a) Bereken de gemiddelde snelheid waarmee Johan die twee uur rijdt.

Marieke rijdt op vrijdagochtend met haar auto van Hilversum naar Leiden met een snelheid van 80 km/uur. 's Avonds rijdt ze de terugweg met een snelheid van 120 km/uur. Tot haar niet geringe verbazing blijkt ze helemaal *niet* gemiddeld 100 km/uur te hebben gereden.

(b) Bereken de gemiddelde snelheid waarmee Marieke de heen- en terugreis aflegt.

Aan het begin van elke week tankt Sjors voor een vast bedrag benzine bij de lokale benzinepomp. In een bepaalde week betaalde hij € 1,30 per liter. Door internationale omstandigheden steeg de literprijs, gedurende de volgende vijf weken, met maar liefst 3 eurocent per week.

(c) Bereken de gemiddelde literprijs die Sjors gedurende de zes opeenvolgende weken moest betalen.

Claudia rijdt op maandagmorgen met de auto naar haar werk. Zij rijdt 5 km over de snelweg, 4 km over de provinciale weg en 3 km door de stad. In de stad kan zij per liter benzine 10 km afleggen; op provinciale wegen 11 km per liter. Het rijden op snelwegen is het zuinigst, daar kan Claudia 13 km per liter benzine rijden.

(d) Bereken het gemiddelde aantal kilometers per liter voor het traject dat Claudia aflegt.

Auto's worden steeds geavanceerder. De elektronische display laat tegenwoordig allerlei nuttige en onnuttige informatie zien. Bijvoorbeeld het aantal liters benzine per 100 km dat de auto op een bepaald moment verbruikt of het aantal km per liter dat op een bepaald moment wordt gereden.

Claudia rijdt op maandagmorgen met de auto naar haar werk. Zij rijdt 5 km over de snelweg, 4 km over de provinciale weg en 3 km door de stad. In de stad kan zij per liter benzine 10 km afleggen; op provinciale wegen 11 km per liter. Het rijden op snelwegen is het zuinigst, daar kan Claudia 13 km per liter benzine rijden.

(e) Bereken het gemiddelde aantal kilometers per liter voor het traject dat Claudia aflegt.

Wat is eigenlijk een gemiddelde?

De opgave binnen het kader bedacht ik om leerlingen van 5-vwo wiskunde A12 een beetje te laten stoeien met het begrip 'gemiddelde'. De bedoeling was, hen bewust te maken van de betekenis van het begrip gemiddelde in verschillende contexten en hen kennis te laten maken met het feit dat er ook andere gemiddelden bestaan dan het overbekende rekenkundig gemiddelde.

Vooraf deed ik de opgave (b) van de opgave leidde tot veel discussie bij leerlingen, en in de docentenkamer van mijn school zelfs bij een groepje docenten, waarbij de economie-leraren streden met een lid van het management om zo snel mogelijk het goede antwoord te vinden. De aanwezige natuurkundedocent vond het eigenlijk maar een eenvoudig sommetje.

Bij deelopgave (b) geldt heel verrassend: de gemiddelde snelheid van 80 km/uur en 120 km/uur is *niet* 100 km/uur.

Bekende gemiddelden: rekenkundig en meetkundig

Als je een leerling in de bovenbouw van havo/vwo vraagt wat hij/zij verstaat onder het gemiddelde van een aantal getallen, dan krijg je meestal iets te horen als: de som van de getallen, gedeeld door het aantal. De leerling geeft dus de *operationele* definitie van het (standaard) *rekenkundig gemiddelde*, een definitie, een formule, waarmee je inderdaad uitstekend het rekenkundig gemiddelde kunt uitrekenen.

Merkwaardig is dat leerlingen zelden denken aan een ander gemiddelde, dat wel degelijk in de bovenbouw aan de orde komt, zij het in enigszins

verborgen gedaante: het *meetkundig gemiddelde*. Het meetkundig gemiddelde komt als zelfstandig begrip niet voor in de nomenclatuurlijsten voor de eindexamens, toch komt het in de lessen tamelijk uitvoerig aan de orde, met name in verband met exponentiële groei. Zijn er bijvoorbeeld n successieve groeifactoren gegeven, dan is de *gemiddelde groeifactor* gelijk aan de n -de machtswortel uit het product van de groeifactoren, dus aan het meetkundig gemiddelde van de groeifactoren.

Bij de behandeling van het begrip ‘standaard-afwijking’ komt het *kwadratisch gemiddelde* (de wortel uit het rekenkundige gemiddelde van de kwadraten) om de hoek kijken, maar niet veel leerlingen in het voortgezet onderwijs zullen dit begrip als een apart gemiddelde zien. In het elektrotechnisch onderwijs daarentegen zullen veel leerlingen in de formule van het kwadratisch gemiddelde de RMS-waarde (root mean square) van bijvoorbeeld signalen herkennen.

Kennelijk bestaan er meerdere gemiddelden, ieder met een eigen operationele formule. Die gemiddelden lijken helemaal niet op elkaar, en toch spreken we in alle gevallen van een gemiddelde. Als er meer dan één gemiddelde bestaat, is het ook zinvol te vragen wat nu eigenlijk een gemiddelde is of te onderzoeken welke gemeenschappelijke eigenschappen de diverse gemiddelden hebben.

In de oplossingen van de opgave komen het meetkundig en het kwadratisch gemiddelde niet voor, maar wel een ander gemiddelde, dat bijna nooit in het voortgezet onderwijs aan de orde komt: het *harmonisch gemiddelde*.

De oplossingen van de opgave ‘Harmonisch autorijden’

In alle deelopgaven van de opgave over harmonisch autorijden is sprake van twee *eenheden* en getallen die worden uitgedrukt in *eenheid per eenheid*. Bijvoorbeeld [km/uur], [€/liter] en [km/liter].

- In **deelopgave (a)** zijn daarnaast twee tijden gegeven, die bovendien identiek zijn. Hier is sprake van het (standaard) rekenkundig gemiddelde van de twee snelheden. Het antwoord van (a) is dus 100 [km/uur]. Zonder dat iemand stil hoeft te staan bij het begrip *gemiddelde snelheid*, kan deze hier berekend worden. Bijna blindelings, dus de som van de twee snelheden gedeeld door 2. Dat inderdaad de gemiddelde snelheid het (standaard) rekenkundig gemiddelde van de twee snelheden is, kunnen we inzien als we bedenken dat gemiddelde snelheid gelijk is aan de totaal afgelegde afstand gedeeld door de totale tijd die nodig was om die afstand af te leggen. Omdat er gedurende 1 uur met 80 km/uur wordt gereden en 1 uur met 120 km/uur, is de afgelegde afstand 200 km en was de benodigde tijd 2 uur. De gemiddelde snelheid is dus $200/2 = 100$ [km/uur].

Zouden er twee ongelijke tijdsintervallen Δt_1 en Δt_2 zijn gegeven, dan zien we dat er sprake is van een *gewogen rekenkundig gemiddelde*:

$$v_{\text{gem}} = \frac{v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

Deze formule is gemakkelijk uit te breiden tot n snelheden en n tijdsintervallen.

Als we opschrijven wat we onder ‘gemiddelde snelheid’ verstaan, zien we de kernnotie van gemiddelden terugkomen: vervangen we elk van de twee gegeven snelheden door de gemiddelde snelheid, dan hebben we voor het afleggen van dezelfde afstand, dezelfde tijd nodig.

- Waren bij deelopgave (a) twee tijden gegeven, bij **deelopgave (b)** gaat het om twee *afstanden*, waarbij opmerkelijk is dat hier de werkelijke waarden van die afstanden niet ter zake doen. Dit is natuurlijk ook een aardige moeilijkheid van het vraagstuk. Als leerlingen door hebben dat er bij deelopgave (b) iets merkwaardigs aan de hand is, komen ze met een beetje hulp wel op de volgende berekening. Duiden we de afstand van Hilversum naar Leiden aan met s (menig leerling en collega nam een fictieve schatting van de werkelijke afstand), dan duurt de heenweg $\Delta t_1 = \frac{s}{80}$ [uur]. Voor de terugweg is dat: $\Delta t_2 = \frac{s}{120}$ [uur]. De voor de heen- en terugweg benodigde tijd is: $\Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{s}{80} + \frac{s}{120}$ [uur]. De gemiddelde snelheid voor de heen- en terugreis is daarom:

$$v_{\text{gem}} = \frac{2s}{\frac{s}{80} + \frac{s}{120}} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = 96 \text{ [km/uur]}$$

Dat de gemiddelde snelheid *niet* het rekenkundig gemiddelde van de twee snelheden kan zijn, kunnen we intuïtief inzien als we bedenken dat je veel langer doet over een bepaalde afstand wanneer je 80 [km/uur] rijdt dan wanneer je die afstand aflegt met 120 [km/uur].

We zien dat in opgave (b) sprake is van een ander soort gemiddelde dan het overbekende rekenkundig gemiddelde: het ‘harmonisch gemiddelde’.

- In **deelopgave (c)** is sprake van [€/liter]. De oplossing is analoog aan die van deelopgave (b). Alhoewel het vaste bedrag per week dat de in de opgave genoemde Sjors wekelijks aan benzine besteedt niet is gegeven, kunnen we uit het feit dat het bedrag gedurende zes opeenvolgende weken constant is, afleiden dat het gevraagde gemiddelde bedrag per liter gelijk is aan:

$$P_{\text{gem}} = \frac{6}{\frac{1}{1,30} + \frac{1}{1,33} + \frac{1}{1,36} + \frac{1}{1,39} + \frac{1}{1,42} + \frac{1}{1,45}} = 1,37 \text{ [€/liter]}$$

Merk de overeenkomst op met de formule voor v_{gem} bij deelopgave (b).

- In **deelopgave (d)** zijn de drie afstanden niet identiek, waardoor de berekening iets moeilijker

verloopt. Het gemiddelde aantal kilometers per liter bedraagt hier:

$$K_{gem} = \frac{5+4+3}{\frac{5}{13} + \frac{4}{11} + \frac{3}{10}} = 11,45 \text{ [km/liter]}$$

De drie pythagoreïsche gemiddelden

Het rekenkundig, het meetkundig en het harmonisch gemiddelde noemt men de drie *pythagoreïsche gemiddelden*. Voor deze gemiddelden gelden de volgende definities.

Zijn $x_1, x_2, \dots, x_n$ n positieve getallen en $w_1, w_2, \dots, w_n$

n positieve gewichten, met $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, dan verstaan

we onder het *gewogen rekenkundig gemiddelde*, het *gewogen meetkundig gemiddelde* en het *gewogen harmonisch gemiddelde* respectievelijk:

$$- A_w(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$$

$$- G_w(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{w_1} \cdot x_2^{w_2} \cdot \dots \cdot x_n^{w_n}$$

$$- H_w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \dots + \frac{w_n}{x_n}}$$

Is er sprake van n identieke gewichten $w_i = \frac{1}{n}$, dan spreken we over *standaardgemiddelden*, die we met A (van aritmetisch), G (geometrisch) en H (harmonisch) aanduiden.

De overeenkomsten in de oplossingen van deelopgaven (b), (c) en (d) zijn opvallend. In deelopgave (a) is echter sprake van het rekenkundig gemiddelde, in (b) en (c) is sprake van het *standaard harmonisch gemiddelde*; in (d) is sprake van een *gewogen harmonisch gemiddelde* met gewichten $w_1 = \frac{5}{5+4+3}$, $w_2 = \frac{4}{5+4+3}$, $w_3 = \frac{3}{5+4+3}$.

Betekenis

Nu hoop je als docent van je leerlingen te horen: 'Het *uitrekenen* van gemiddelden is een koud kunstje, maar wat is een gemiddelde eigenlijk?' Een kernnotie is –lijkt mij– dat elk gemiddelde op een bepaalde wijze als een *vervanger* werkt voor alle individuele getallen waarvan dat gemiddelde genomen wordt. Vervangen we ieder getal door het gemiddelde en voeren we de oorspronkelijke bewerking uit waarmee het gemiddelde werd verkregen, dan vinden we nogmaals als resultaat het betreffende gemiddelde. Zo geldt bijvoorbeeld voor de drie standaardgemiddelden:

$$- A(A, A, \dots, A) = \frac{A + A + \dots + A}{n} = A$$

$$- G(G, G, \dots, G) = \sqrt[n]{G \cdot G \cdot \dots \cdot G} = G$$

$$- H(H, H, \dots, H) = \frac{n}{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \dots + \frac{1}{H}} = H$$

Generalisaties

In het bovenstaande hebben we verschillende gemiddelden ontmoet. We hebben gezien dat de

formules waarmee die gemiddelden worden berekend, heel verschillend kunnen zijn. Zo is bijvoorbeeld niet zonder meer duidelijk uit de formules, waarom het meetkundig gemiddelde en het rekenkundig gemiddelde tot dezelfde familie behoren. Een open vraag is dus nog wat al die gemiddelden verenigt.

Een antwoord vinden we als we vanaf een abstracter standpunt naar gemiddelden kijken. De drie pythagoreïsche gemiddelden kunnen we namelijk opvatten als bijzondere gevallen van het *gegeneraliseerde gemiddelde*, ook wel *machtsgemiddelde* of *Hölder-gemiddelde* genoemd. Het terloops genoemde kwadratische gemiddelde (= RMS), dat een belangrijke rol speelt in de statistiek en elektrotechniek, is ook een bijzonder geval van dit Hölder-gemiddelde.

Tot slot. Opmerkelijk is dat er een *lineaire ordening* van gemiddelden bestaat. Zo geldt voor de drie pythagoreïsche (gewogen) gemiddelden:

$$m \leq H_w \leq G_w \leq A_w \leq M$$

waarbij m het minimum van de rij getallen is en M het maximum. Deze ongelijkheid blijkt een bijzonder geval te zijn van een ongelijkheid met Hölder-gemiddelden.

Toepassing op examencijfers

Wie op internet op zoek gaat naar het harmonisch gemiddelde, vindt een groot aantal toepassingen. Een onverwachte toepassing geeft website [1]. Een opleiding voor computerprogrammeurs en –technici, the School of Computer Science and Engineering, van de University of New South Wales (UNSW), in Australië, hanteert een gewogen harmonisch gemiddelde bij het bepalen van het resultaat van twee deexamens, een theorie-examen en een praktijkexamen. Door het gebruik van een harmonisch gemiddelde in plaats van het (eventueel gewogen) rekenkundig gemiddelde wil de school te grote verschillen tussen beide toetsresultaten afstraffen. Het harmonisch gemiddelde van twee toetsresultaten is namelijk veel 'gevoeliger' voor het verschil tussen de afzonderlijke cijfers dan het rekenkundige gemiddelde.

Bronnen

[1] www.cse.unsw.edu.au/~teachadmin/info/harmonic3.html

[2] De foto van Otto Hölder is afkomstig van de website <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Holder.html>. Deze website bevat ook een uitgebreide biografie van Hölder.

Over de auteur

Simon van der Salm is docent wiskunde bij het Adriaan Roland Holst College (ARHC), Hilversum.

E-mailadres: SvdSalm@arhc.gsf.nl.

Website: www.rekenkring.nl

SCHOOLEXAMENS 2007: LEVE DE VRIJHEID!?

[Mieke Aarts]

Schoolvoorbeeld

Wat willen jullie wat betreft het schoolexamen aanpakken op jullie school? Wat gaan jullie doen om die verbetering voor elkaar te krijgen?

Het team van een middelgrote streekschool, bestaande uit vier docenten en de afdelingsleider bovenbouw havo/vwo, zoekt naar antwoord op deze vragen. De sfeer is vrolijk en constructief, maar en zijn ook verzuchtingen. Samen komen ze tot de volgende verbeterpunten:

- *Meer zicht op de kwaliteit van schoolexamens;* de eenmanssecties moeten de toets aan een collega van een verwant vak of aan een vakgenoot van een andere school voorleggen; bij grotere secties mag degene die de vragen maakt en degene die het correctiemodel maakt niet dezelfde persoon zijn.
- *Verschillende visies op cijfering dicht bij elkaar brengen;* de discussie aangaan over de functie van cijfers: stimuleren wat een leerling kan of weet of afstraffen wat hij niet weet of kan?

- *Toetsopgaven transparanter maken voor leerlingen;* bijvoorbeeld door de normering van tevoren bekend te maken en de maximale score per opgave en de totaalscore te vermelden. De zwaarte van praktische opdrachten moet in verhouding staan tot aantal slu's en de schoolleider moet dat kunnen verantwoorden naar ouders en leerlingen.

- *Uitslagen schoolexamens beter verantwoorden;* secties verantwoorden de gemiddelden van het schoolexamen en het centraal examen.

- *Meer samenwerking tussen vakken;* vervang bijvoorbeeld een van de toetsweken door een profielweek met praktische opdrachten voor het schoolexamen.

- *Voorschriften voor weging ontbreken nu;* de schoolleiding moet hiervoor richtlijnen geven en bijvoorbeeld zorgen dat bij alle vreemde talen de verschillende onderdelen even zwaar meewegen, nu de vaste verdeling spreken-luisteren-schrijven wordt losgelaten in 2007.

Aanleiding

Een fors deel van het schoolexamen havo/vwo mag vanaf augustus 2007 door de school zelf ingevuld worden. Een gouden kans voor bovenbouwdocenten om hun professionaliteit te tonen en voor schoolleiders om hun school smoel te geven. Wie gaat wat doen?

Vrijheid

‘Voor mijn vak vind ik het echt hartstikke leuk, die nieuwe vrijheid bij de schoolexamens. Lastig is alleen dat we als school weer van alles moeten bedenken om die ruimte te vullen. En we moeten al zo veel.’ Met deze opmerking vertolkt een docente geschiedenis, aan het einde van een dag lang confereren over de nieuwe schoolexamenregeling, het algemene gevoel onder de aanwezige

leraren. Tien schoolteams, elk bestaande uit een schoolleider, vier docenten – wiskunde, beeldende vakken, Nederlands en geschiedenis – en soms de examensecretaris, inventariseren wensen en knelpunten. De dag is begin april georganiseerd door *Platform VVVO* en *Schoolmanagers VO*.

Regeling

De nieuwe schoolexamens zijn onderdeel van een hele set vernieuwingen, voortgekomen uit de wens van de politiek (en de scholen zelf) om scholen meer vrijheid te geven voor de invulling van hun onderwijs in de tweede fase. Daartoe worden de examenprogramma's voor alle vakken geglobaliseerd: ze bevatten minder eindtermen en minder gedetailleerde eindtermen. Ook worden alle vormvoorschriften voor het schoolexamen

geschrapt. Docenten zijn vanaf 2007, binnen de wettelijke kaders, vrij hun schoolexamens naar eigen inzicht in te richten. Onder de lunch realiseert een wiskundeleraar zich pas goed wat dat betekent: 'Mijn leerlingen zullen examenonderdelen krijgen die collega's op andere scholen helemaal niet behandelen. En mijn sectie mag zelf bedenken hoe we gaan toetsen. Wat een verschillen gaat dat geven.'

Het betekent ook dat de school meer dan vroeger verantwoordelijk wordt voor de kwaliteit van haar schoolexamens. Directies en secties moeten aan ouders, leerlingen en de inspectie kunnen uitleggen hoe het zit met de gemiddelde schoolexamencijfers ten opzichte van de gemiddelden voor het landelijk examen en ten opzichte van cijfers op andere scholen.

Goede schoolexamens voldoen aan drie criteria. Ze zijn transparant, zodat de leerling weet wat wanneer getoetst wordt en wat de beoordelingscriteria zijn. Ze zijn uitdagend; niets let de docent biologie om veldwerk als toetsvorm in te zetten. Ze zijn betrouwbaar, in de zin dat een leerling niet verrast wordt op het examen maar heeft kunnen oefenen met het niveau en de toetsvorm. De aanwezige docenten claimen ontwikkeltijd en hebben behoefte aan bijscholing. Goede schoolexamens maken behoort immers niet tot ieders expertise.

In je eentje

De congresgangers inventariseren hoe het nu gaat en wat ze zouden willen veranderen in 2007. Docenten nemen voorbeelden van originele opdrachten en oplossingen gretig in zich op: mondelinge schoolexamens wiskunde A, compleet met taart, voor C&M-leerlingen die dan beduidend beter presteren; of meedoen aan de Wiskunde Olympiade als onderdeel van het pta. Een docente Nederlands: 'Ik ben goed in debat, mijn collega niet, dus ik geef debatles in alle parallelklassen.' Knelpunten zijn er ook. Docenten die in hun eentje alle eindexamenklassen draaien maken zich zorgen over de kwaliteit van hun nieuwe schoolexamens. Ze staan er alleen voor, terwijl een kwalitatief goed examen vraagt om minimaal twee vakdeskundigen. 'Nu ben ik slechts mijn eigen referentiekader bij toetsen', beaamt iemand van een kleine school. Ze vragen de schoolleiders het vanaf 2007 mogelijk te maken dat de eenling een collega van andere school kan consulteren. Andere docenten voelen zich nog lang niet klaar voor 2007: 'Meer aandacht voor de nieuwe schoolexamens in de vakbladen en voorbeeldmateriaal zijn hard nodig', aldus een docent geschiedenis. En een collega beeldende vakken: 'Wij praten helemaal niet schoolbreed over cijfering en beoordelingscriteria; verder dan een discussie in de lerarenkamer komt het niet. Dat moet anders vanaf 2007. Laat een examencoördinator dat aanzwengelen.'

Taakverdeling

Twee items blijken cruciaal: wie gaat wat doen en hoe gaan we het allemaal organiseren? De hele dag door zijn het juist de organisatorische randvoorwaarden als roostering, aantal contacturen, ict-voorzieningen, helder examenreglement en tijdsinvestering die de heftigste reacties oproepen. De term 'randvoorwaarden' kan beter vervangen worden door 'onmisbare voorwaarden'. In de discussie hierover contrasteert de abstracte taal van de schoolleiders – 'centrale kaders stellen en ruimte geven' – nogal met de concrete zorgen en wensen van docenten: 'Hoe voorkom ik piekbelasting rondom de toetsweken?'

De didactische creativiteit van docenten aanboren blijkt deze dag nog een stap te ver. Eerst moet de impact van 2007 nog beter doordringen, ook bij de directies. Zoals een schoolteam concludeert: er moet hoognodig een studiedag komen in het najaar, voordat de nieuwe pta's worden vastgesteld. De afdelingsleider: 'En we moeten oppassen dat we niet blijven hangen in de minimale schoolexameneisen. We willen toch een school zijn waar kinderen leren voor het leven.' De wiskundeleraar: 'Inderdaad, ik houd mijn havo-meiden die mijn vak verafschuwen niet voor niets voor: zonder wiskunde kun je niet trouwen.'

Noten

1. Onderwijsjournalist Mieke Aarts schreef dit artikel in opdracht van het Platform VVVO (Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs). Platform VVVO is een overkoepelende vereniging van de vakinhoudelijke verenigingen in het voortgezet onderwijs en fungeert als gezamenlijke spreekbuis en aanspreekpunt.

Voor nadere informatie kunt u contact opnemen met VVVO-voorzitter Dirk Speelman (e-mailadres: voorzitter@platformvvvo.nl) of met de secretaris, Walfred Haans (e-mailadres: postmaster@platformvvvo.nl).

2. Meer informatie over de wettelijke regelingen vindt u op www.tweedefase-loket.nl (zie ook www.platformvvvo.nl). Op www.slo.nl staan handreikingen per vak met suggesties en adviezen voor de inrichting van het schoolexamen. De handreiking wiskunde is nog in wording. Iedere handreiking opent met een beschrijving van de positie van het vak in de vernieuwde tweede fase en een weergave van de veranderingen ten opzichte van het huidige examenprogramma.

HOE BEKWAAM BENT U ALS LERAAR?

[Stichting Beroepskwaliteit Leraren]

Een lerares Engels: 'Het praten met collega's over het beroep leraar heeft me meer inzicht en vertrouwen gegeven in mijn eigen kwaliteiten, maar ook in de aspecten waarin ik mezelf kan en moet verbeteren. Ik miste in de personeelskamer het echte gesprek over het beroep en het levert enorm veel op om dit te doen.'

U kunt aan uw leerlingen de lesstof uit het leerboek goed uitleggen en bovendien heeft u een behoorlijke dosis vakkennis en een goed overzicht over de lesstof. Maar mag u zichzelf dan ook een goede leraar noemen? Of moet je een dergelijk oordeel alleen aan de leerlingen overlaten? Behalve met leerlingen heeft een leraar in zijn werk ook met collega's, de directie, met ouders en eventueel met instanties buiten school te maken. Ook die contacten bepalen mede of een docent goed functioneert en op een positieve manier aan de kwaliteit van het onderwijs op de school bijdraagt. Het gaat dus zeker niet alleen om de lesactiviteiten binnen de veilige muren van een klaslokaal.

Professioneel

Gezien de enorm belangrijke taak die leraren uitvoeren, mag je van hen een professionele opstelling verwachten. Dat houdt in dat zij regelmatig reflecteren op hun eigen bekwaamheden en onderwijskwaliteit en daarop zonnig actie ondernemen.

Maar wat is een goede leraar? Over welke taken binnen de onderwijspraktijk gaat het dan eigenlijk? Welke competenties moet een goede leraar hebben om die taken goed te kunnen uitvoeren? Welke bekwaamheidseisen moeten er dus gesteld worden aan leraren? Een zij-instromer uit het bedrijfsleven, met voldoende vakkennis, is toch niet automatisch een goede leraar.

Goed onderwijs

Wat goed onderwijs is, wordt bepaald door de samenleving. Die stelt zich de vraag: Wat hebben leerlingen nodig om in de maatschappij van deze tijd te kunnen functioneren?

Het antwoord op die vraag is niet altijd hetzelfde:

allerlei invalshoeken, inzichten, ontwikkelingen en wisselende prioriteiten spelen een rol. Toch bestaat er op hoofdlijnen wel eensgezindheid over wat goed onderwijs inhoudt:

1. Goed onderwijs komt tegemoet aan de basisbehoeften van leerlingen (veiligheid, waardering, uitdagingen om te leren).
2. Goed onderwijs helpt leerlingen om die dingen te leren die maatschappelijk noodzakelijk zijn, maar ook die ze zelf willen en kunnen leren.
3. Goed onderwijs is bij de tijd (inhoud, leermiddelen, werkwijzen, aansluiting bij vervolgonderwijs en maatschappij).
4. Goed onderwijs past bij de eigen identiteit van de school en bij de actuele stand van zaken in de onderwijskundige theorie en praktijk.

Goede leraren

Hoe goed onderwijs ook gedefinieerd wordt, het staat of valt met goede leraren. Dan is vervolgens de vraag wat een goede leraar is. Zo iemand moet in ieder geval heel wat in zijn mars hebben. Dat zie je als je kijkt naar een leraar in actie met zijn klas. Behalve dat een leraar behoorlijk wat vakkennis in huis moet hebben, moet hij die kennis ook op een goede, effectieve manier kunnen inzetten als hij met zijn leerlingen werkt. Daarbij spelen pedagogisch inzicht, didactische vaardigheid en organisatorisch talent een belangrijke rol. De omgang met de leerlingen is voor zijn werk van cruciaal belang. De professionele activiteiten van een leraar bestrijken een groot gebied, want ook is de samenwerking met collega's en de gesprekken met ouders onlosmakelijk aan zijn taak gekoppeld. Wat een goede leraar is, valt dus niet in één zin te zeggen.

Een goede leraar typeren door een opsomming te geven van zijn gedragsrepertoire voldoet evenmin. Een leraar handelt altijd op basis van een ingewikkeld geheel van kennis, inzicht en vaardigheden. Daarbij spelen trouwens ook beroepsopvattingen, beroepshouding en persoonlijke eigenschappen een belangrijke rol. Dit alles is niet tastbaar, niet altijd direct waarneembaar, het speelt zich als het ware onder

OVERZICHT COMPETENTIES	MET LEERLINGEN	MET COLLEGA'S	MET OMGEVING	MET ZICHZELF
INTERPERSOONLIJK	1			
PEDAGOGISCH	2	5	6	7
VAKINHOUDELIJK & DIDACTISCH	3			
ORGANISATORISCH	4			

FIGUUR 1

de oppervlakte af. Het concrete, wél waarneembare handelen van een leraar steunt erop, is ervan afhankelijk. Kortom, wat een goede leraar is, is een complexe zaak.

Maar hoe complex de zaak ook is, hoe breed ook het werkterrein, voor het beïnvloeden van de onderwijskwaliteit, ook door de leraar zelf, die daar ook zelf belang bij heeft, is het nodig lerarenbekwaamheid zo helder mogelijk te beschrijven. Het lijkt immers geen twijfel dat een leraar bekwaam moet zijn. Zonder professionele bekwaamheid kan een leraar zijn verantwoordelijkheden onmogelijk waar maken.

Zeven competenties

De verantwoordelijkheden van de leraar zijn samen te vatten door vier beroepsrollen te onderscheiden: de interpersoonlijke rol, de pedagogische, de vakinhoudelijke & didactische en de organisatorische.

Deze beroepsrollen worden, zoals hierboven al geschetst, door de leraar vervuld in vier verschillende typen situaties die kenmerkend zijn voor het beroep van leraar: het werken met leerlingen, met collega's, met de omgeving van de school en met zichzelf. Bij dat laatste gaat het om het werken aan de eigen professionele ontwikkeling, dat wil zeggen het reflecterend en innovatief vermogen.

Door de vier beroepsrollen en de vier typen situaties met elkaar in verband te brengen (zie figuur 1), ontstaat er een raamwerk met zestien 'cellen' voor de beschrijving van lerarenbekwaamheid. Door vervolgens onder woorden te brengen wat de professionele manier van werken is van de goede, bekwame leraar in elke combinatie van beroepsrol en situatie, ontstaat er een beschrijving van lerarenbekwaamheid in competenties.

In de praktijk is gebleken dat het niet nodig is zestien competenties te onderscheiden: zeven competenties volstaan om alle wezenlijke aspecten van lerarenbekwaamheid goed in kaart te brengen.

Bekwaamheidseisen

Goed onderwijs staat of valt met goede leraren. En dus vraagt kwaliteitsonderwijs om duidelijke bekwaamheidseisen waaraan leraren moeten voldoen. In het belang van een eigen professionele kwaliteitsstandaard is het van belang dat de beroepsgroep zelf de bekwaamheidseisen voor het leraarsvak formuleren. Dát is dan ook een van de doelstellingen van de Stichting Beroepskwaliteit Leraren en ander onderwijspersoneel (SBL).

Vanaf 2000 hebben werkgroepen van leraren onder leiding van SBL gewerkt aan een voorstel voor bekwaamheidseisen. De nieuwe wet BIO (Beroepen in het onderwijs), die er destijds aan zat te komen en onlangs in werking is getreden, bepaalt namelijk dat alle scholen van het onderwijspersoneel een bekwaamheidsdossier gaan bijhouden. De set bekwaamheidseisen die door de beroepsgroep zelf is opgesteld, kunnen daarin een belangrijke rol vervullen. Leraren kunnen daaraan rechten ontleen, maar conformeren zich ook aan de verplichting hun bekwaamheden up-to-date te houden. Verschillende SBL-werkgroepen inventariseerden kenmerkende beroepssituaties, -handelingen en -verantwoordelijkheden en bediscussieerden uitgebreid de voorgestelde bekwaamheidseisen. Hieruit ontstond het hier bovengenoemde beschrijvingsmodel met de zeven lerarencompetenties. Over het voorstel zijn bovendien gesprekken gevoerd met het ministerie. Op verschillende manieren, o.a. via de SBL-website^[1], is de beroepsgroep van leraren uitgenodigd over het voorstel mee te denken en commentaar te leveren.

Alle reacties hebben vervolgens geleid tot een aantal bijstellingen van het voorstel. De beschrijving van de competenties is praktischer geworden en de bekwaamheidseisen minder gedetailleerd. De professionele bekwaamheid van de leraar en zijn vakinhoudelijke kennis is explicieter onder woorden gebracht.

De beroepsgroep van leraren is op deze manier dus gekomen tot een definitief voorstel voor bekwaamheidseisen. De minister van OCW heeft in oktober 2005 die set eisen verwerkt in een Algemene Maatregel van Bestuur bij de wet BIO, het Besluit Bekwaamheidseisen Onderwijspersoneel. Dit besluit treedt op 1 augustus 2006 in werking.

SBL heeft tijdens intussen een hoop know-how verzameld en ook vertaald naar instructief materiaal dat heel goed gebruikt kan worden bij het gaan werken met de bekwaamheidseisen en het bekwaamheidsdossier. Het feitelijk gebruik van de bekwaamheidseisen in de praktijk wordt gestimuleerd door de regiocoördinatoren en de ambassadeurs van SBL. Vrijwel alle lerarenopleidingen zijn ermee vertrouwd geraakt en ook tal van scholen hebben inmiddels de weg naar het SBL-materiaal gevonden.

Aan de slag

Het tot stand brengen van bekwaamheidseisen voor leraren was al met al een ingewikkeld proces, maar het heeft geresulteerd in drie sets bekwaamheidseisen die goed te vertalen zijn naar specifieke situaties. Met deze bekwaamheidseisen kunnen leraren laten zien dat die kwaliteit bij hen in goede handen is. Nu gaat het er om met de bekwaamheidseisen te werken en ze in te zetten. Samen werken aan: goede leraren voor goed onderwijs!

Ook kennismaken of werken met de bekwaamheidseisen? SBL komt graag langs voor:

- een voorlichting aan een lerarenteam van een school in de vorm van een *presentatie* of *lezing* of *workshop*;
- een instructie: een groepje leraren doorloopt onder begeleiding van SBL een kort leertraject om

vertrouwd te raken met het werkmateriaal van SBL;

- een korte begeleiding bij het vertalen van het SBL-competentiemodel naar de eigen school.

Noot

[1] Zie: www.lerarenweb.nl, waarop ook meer informatie te vinden is.

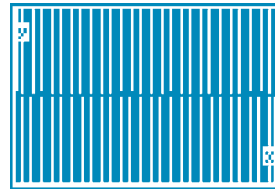
Over SBL

SBL staat voor: Stichting Beroepskwaliteit Leraren en ander onderwijspersoneel. SBL bevordert de kwaliteit van het onderwijs door bekwaamheidseisen op te stellen voor leraren en door professionaliteit centraal te stellen. De wet Beroepen in het Onderwijs (wet BIO) vormt hiervoor het kader.

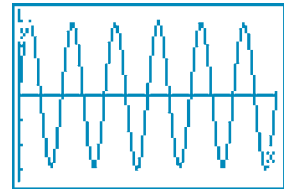
Het bestuur van SBL bestaat uit vertegenwoordigers van vakorganisaties, onderwijsvakverenigingen en uit onafhankelijke deskundigen.

EEN BIJZONDER GEVAL

[Ad Schenk]



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Met nog zes weken te gaan voor de meivakantie ben ik in 5 havo gestart met de directe voorbereidingen voor het landelijk examen. De leerlingen krijgen elke les één of twee examenopgaven op als huiswerk. Dat gebeurt met een strakke planning, niet erg studiehuisachtig, maar het werkt prima. Mijn leerlingen hebben er baat bij. De les erna bespreken we de opgaven klassikaal. Dit kan kort, omdat ik de les ervoor de uitwerkingen al grotendeels op het bord zet. Daardoor krijg je de kans om de aandacht in de les te richten op de moeilijker onderdelen. Af en toe ontstaat er een leuke discussie.

Dat was onlangs ook het geval, toen we de som *Netspanning* (CSE 2e tijdvak 2004, wiskunde B12) bespraken. Daarin kwam de formule $V = 300 \cdot \sin(100\pi t)$ ter sprake. De meeste leerlingen hadden de formule ingevoerd op hun grafische rekenmachine (TI83).

U begrijpt wat er gebeurt. Veel leerlingen hadden in eerste instantie het 'window' veel te ruim ingesteld, waardoor een zwarte balk van sinusoiden ontstaat (zie figuur 1). Dat was snel uit de wereld omdat Michiel vertelde dat het zo'n vaart toch echt niet liep. Hij had als window $[0, 2] \times [-350, 350]$ gekozen (zie figuur 2). 'Dat gaf geen enkele probleem', zei hij. Er ontstonden gewoon keurig 6 golfjes; geen probleem, toch?

De stapgrootte en instellingen zorgen ervoor dat de punten op de 100 golfjes precies 6 nieuwe golven vormen. Een schitterende samenloop van omstandigheden. Misschien een mooi onderwerp voor een profielwerkstuk?

Over de auteur

Ad Schenk is als wiskundedocent werkzaam aan het St. Willibrord-college te Goes.

E-mailadres: scn@stwillibrord.nl

Wat adviseer je aan *wiskundig talent* in je klas?

Word Bedrijfswiskundige!!



Er zijn nog teveel leerlingen die zich niet realiseren dat hun aanleg voor puzzelen en wiskunde vele beroepsmogelijkheden geeft. De misvatting is dat je met wiskundetalent alleen docent kunt worden. Niets is minder waar. Ga bedrijfswiskunde studeren!



Na de opleiding bedrijfswiskunde heb je de unieke combinatie van bedrijfskundige kennis, ICT-vaardigheden en wiskundige diepgang om problemen en vragen uit de afwisselende praktijk van het bedrijfsleven te herkennen en met krachtige wiskundige methoden en de computer aan te pakken. De resultaten ondersteunen de klant of het management in het nemen van gefundeerde beslissingen.



Waar wordt wiskunde eigenlijk toegepast? In allerlei disciplines zoals het bankwezen, verzekeringsmaatschappijen, industrie, handel, transport, communicatie en automatisering. Het is duidelijk dat je niet geïsoleerd werkt maar je bezighoudt met uitdagingen uit andere vakgebieden, vaak in alledaagse taal en onvolledig geformuleerd. Dit verlangt een groot inlevingsvermogen van de bedrijfswiskundige en interviewtechnieken waarmee hij of zij snel hoofdzaken van bijzaken kan onderscheiden en de probleemstelling helder en kort kan verwoorden, het liefst in de taal van de wiskunde.



Vind je wiskunde het leukste vak en zit je nu op het havo of op het vwo? Ben je kritisch en kom je snel tot de kern van de zaak? Dan staat niets je in de weg om via de opleiding bedrijfswiskunde in een veelzijdige baan terecht te komen.

Je kunt bedrijfswiskunde aan de onderstaande hogescholen studeren.



Noordelijke Hogeschool Leeuwarden
www.nhl.nl

Fontys Hogescholen
www.fontys.nl

Hogeschool van Amsterdam
www.hva.nl

Hogeschool INHOLLAND
www.inholland.nl

Technische Hogeschool Rijswijk
www.thrijswijk.nl

Verenigingsnieuws

Jaarvergadering/Studiedag 2006

[Marianne Lambriex]

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2006 van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren*, op zaterdag 4 november 2006.

Aanvang: 10.00 uur

Sluiting: 16.00 uur

Plaats: Cals College, Nieuwegein

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- Opening door de voorzitter, Marian Kollenveld
- Jaarrede door de voorzitter
- Notulen van de jaarvergadering 2005
- Jaarverslagen (zie een volgend nummer van Euclides)
- Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie
- Bestuursverkiezing
- Bestuursoverdracht
- Rondvraag
- Sluiting jaarvergadering

Themagedeelte van de studiedag

Doorlopende leerlijnen of breukvlakken?

Toen Freudenthal met het IOWO startte, was het de bedoeling om doorlopende leerlijnen te ontwerpen en uit te werken voor de leeftijdsgroep 4-18.

Door allerlei omstandigheden (meestal politiek getint) is het er nooit echt van gekomen. De recente publieke onrust rond reken- en algebravaardigheden geven aan dat er kennelijk nogal wat breukvlakken worden gezien in plaats van doorlopende leerlijnen. Om er een paar te noemen: wat leren ze eigenlijk nog in het basisonderwijs (bijvoorbeeld over breuken)? Hoe doorlopend zijn binnen het voortgezet onderwijs de leerlijnen van onderbouw naar bovenbouw? Wat

moet je doen in de eerste drie leerjaren van het voortgezet onderwijs als er alleen maar een paar globale eindtermen zijn? Wat gaat er (kenmerkend) mis bij de overgang VO-HO? Geeft het vmbo wel voldoende voorbereiding op succes in het mbo, en van daar uit in het hbo? Waarom is het rekenniveau van Pabo-studenten zo laag?

Vragen genoeg! Maar zijn er ook oplossingen? Voor doorlopende leerlijnen heb je in ieder geval eerst informatie nodig van beide zijden van een vermeend breukvlak omtrent verwachtingen, maar ook inzicht in wat er in de praktijk gebeurt. Daarom is 'Doorlopende leerlijnen' het hoofdthema van de studiedag, met subthema's als rekenen in het basisonderwijs, (voortgezet) rekenen en gecijferdheid in het voortgezet onderwijs,

welke algebra voor wie, samenhang met andere vakken, de rol van ICT. Daarnaast zal er ook aandacht zijn voor actuele zaken zoals de examenprogramma's vanaf 2007 en de verdere toekomst vanaf 2010.

U ziet, er is voor een ieder wel iets interessants te vinden. Hoe het een en ander vorm gegeven wordt laten we u in het volgende nummer van Euclides weten.

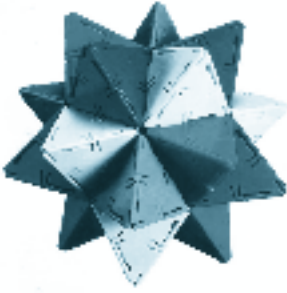
**Dus reserveer in uw agenda:
zaterdag 4 november NVvW-dag.**

Voor meer informatie kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex (e-mailadres: m.lambriex@nvvw.nl).

advertentie

LEKOPRO

POLYDRON is een eenvoudig bouwsysteem voor alle niveaus van onderwijs



website: www.lekopro-polydron.nl

POLYDRON

Informatie

t: 020-4160320

f: 020-4160590

e: lekopro@planet.nl

Verenigingsnieuws Van de bestuurstafel

[Wim Kuipers]



De jaarvergadering op 4 november a.s. zal weer worden gehouden in het bekende Cals College te Nieuwegein. De voorbereidingen zijn in volle gang. Het themage-deelte zal zich dit jaar richten op doorlopende leerlijnen en breukvlakken.

Het bestuur denkt dat de breukvlakken: aansluiting basisonderwijs en voortgezet onderwijs, aansluiting havo/vwo-3 naar de bovenbouw, aansluiting havo/vwo naar het hoger onderwijs, aansluiting vmbo onderbouw en bovenbouw alsmede bovenbouw naar het mbo een aantal knelpunten opleveren. Het bestuur steunt daarom een initiatief van het Freudenthal Instituut om de cTWO te vragen oplossingen aan te dragen en een subwerkgroep te vormen die de belangen van het vmbo zal moeten dienen. Het bestuur is in de cTWO vertegenwoordigd door twee leden. Het bestuur is voorzitter Marian Kollenveld dankbaar dat ze zich in de achterliggende maanden sterk heeft gemaakt om er aan te werken dat wiskunde op de kaart blijft. Tevens wordt gewerkt aan de voortzetting van de didactiekcommissie. Graag ziet het bestuur dat het ministerie voor deze klus gelden beschikbaar stelt om een paar mensen te kunnen faciliteren om inhoudelijk invulling te geven aan de uitwerking van een didactiek passend in deze tijd.

Naar aanleiding van de actie 'Ja, ik doe mee' heeft een aantal mensen zich aangemeld. Ze zijn bereid om in een resonansgroep mee te denken over hoe de leerstof voor verschillende onderdelen (o.a. wiskunde D en de toekomst van het wiskundeonderwijs in het vmbo) adequaat valt in te vullen. De werkgroep havo/vwo zal gevraagd worden om te kijken naar

de instaptoetsen naar het hoger onderwijs. Een inventarisatie van deze toetsen zou inhoudelijk zichtbaar kunnen maken waar de problemen bij de aansluiting nu precies liggen.

De vmbo-werkgroep zal de nieuw uit te komen syllabus bekijken.

Deze syllabus voorziet in een verduidelijking en toelichting op het vmbo-examenprogramma. Een aantal onduidelijkheden in het programma zijn weggenomen en de programma's voor de leerwegen worden afzonderlijk beschreven.

Helaas moet het bestuur melden

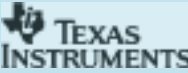
dat onze vmbo-vertegenwoordiger Jacob Hop, vanwege nieuwe uitdagingen in zijn werk, zich moet terugtrekken als lid van het bestuur. Voor de komende jaarvergadering worden de leden in de gelegenheid gesteld namen in te dienen voor een mogelijke opvolger. We hopen een andere gelegenheid te krijgen om Jacob te bedanken voor zijn aandeel in de bestuurswerkzaamheden. Lopende werkzaamheden met betrekking tot de website zal Jacob afmaken. De finishing touch van de website zal de komende weken plaatsvinden.

advertentie

RHOMBUS
*De beste educatieve soft-, hard- en
paperware voor wiskunde.*


Derive 6


Cabri II Plus


TI-Interactive!


Cabri 3D


**Boeken en
Posters**


M.C. Escher

www.rhombus.be
math@rhombus.be

Puzzel 818 Torens en Lopers

In een eerdere opgave hebben we gepuzzeld met dames op het schaakbord (Euclides 79-1, september 2003). De opdracht was toen om alle velden te bestrijken.

Deze keer gaat het niet over dames, maar over torens en lopers, en ook de probleemstelling is anders. De bedoeling nu is namelijk om torens en lopers zó op het schaakbord te plaatsen dat die stukken geen enkel veld bestrijken waar een ander stuk op staat. Zo'n stelling noemen we voor het gemak een *vreedzame stelling*. In [figuur 1](#) ziet u een voorbeeld met 5 torens en 7 lopers.

Bovengenoemde convexiteit is nu niet langer triviaal, maar blijft wél gelden, naar ik vermoed.

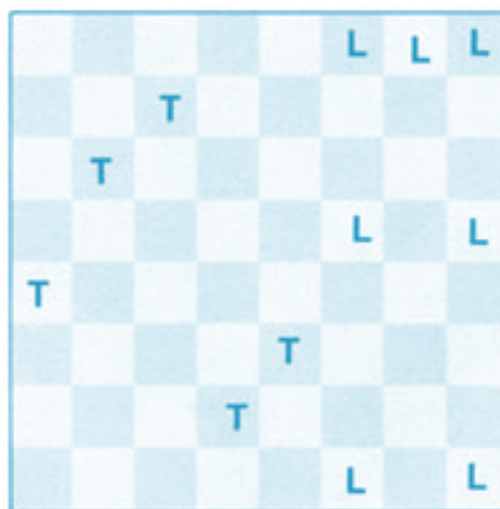
Verrassend is ook dat in een maximale vreedzame stelling onbestreken velden kunnen optreden! Ongetwijfeld komt u dit tegen als u de volgende opgave oplost.

Opgave

Laat T het aantal torens aanduiden en L het aantal lopers.

Bepaal maximale vreedzame stellingen voor $(T, L) = (5, 1), (4, 4), (4, 9)$ en $(0, 11)$.

Een tekening is niet nodig: u mag uw oplossing in een of andere schaaknotatie geven. Voor het voorbeeld van figuur 1 kan het aldus:



FIGUUR 1

Jaren geleden hoorde ik van Chris Wildhagen het probleem om voor alle paren (T, L) te bepalen of er een vreedzame stelling mogelijk is met T torens en L lopers. Indertijd hebben we dit probleem niet volledig opgelost. We weten bijvoorbeeld niet of er een vreedzame stelling bestaat met meer dan 5 torens en 7 lopers. Minder kan natuurlijk wel: een vreedzame stelling blijft vreedzaam als we een stuk wegnemen. We zien hier een soort convexiteit van de oplossingsverzameling.

Het probleem wordt interessanter als we een extra eis stellen: we zoeken vreedzame stellingen die maximaal zijn in die zin dat er geen stuk bijgeplaatst kan worden zonder de gegeven stelling te veranderen.

Ta4, b6, c7, d2, e3; Lf1,5,8, g8, h1,5,8

Of op deze manier:

5LLL/2T5/1T6/5L1L/T7/4T3/3T4/5L1L

Oplossingen kunt u mailen naar

a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen

naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS

Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.

De deadline is 1 september 2006.

Wie na de uitslag van deze opgave bovenaan de ladder staat, krijgt de ladderprijs, een boekenbon van 30 euro. De bekendmaking hiervan zal zijn in Euclides 82-2, het oktobernummer.

Veel plezier!

Oplossing 'In het voetspoor van Ramanujan'

Er waren dertien inzenders waarvan tien met 20 punten: Kasper Meerhof, Leo Bes (een nieuwe oplosser), Ton Kool, Wim van den Camp, Frans Lipperts, Lieke de Rooij, Hans Klein, Herm Jan Brascamp, Wobien Doyer en Niels Wensink.

Het oplossen van de opgaven 1 en 2 was een kwestie van weten. Maar wie een exemplaar van Wells' boek *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* heeft, kon de bedoelde antwoorden daar eenvoudig opzoeken.

2047 is het kleinste getal van de vorm $2^n - 1$ dat niet priem is terwijl n dat wel is.

641 is een deler van $2^{32} + 1$. Een van Fermats minder geslaagde vermoedens was: ieder getal van de vorm $2^n + 1$ waarin ook n een macht van 2 is, is priem. Euler ontdekte dat het bij $n = 32$ al mis gaat. Tegenwoordig neigt men naar het vermoeden dat alle volgende gevallen ook deelbaar zijn!

Lieke de Rooij en Hans Klein vermeldten vele andere bijzonderheden van 641. Drie van de oplossters 'kenden' 641 niet en schreven het als som van drie kwadraten. Hierbij werden diverse fouten gemaakt. 641 is een som van drie kwadraten op 7 (niet op 6) manieren en het kleinste getal met die eigenschap is niet 641, maar 341. Overigens zou dit laatste getal door sommigen, ik denk aan Ramanujan, vermoedelijk anders gekarakteriseerd zijn; het is het kleinste pseudo-priemgetal. De som van drie kwadraten heeft wel een eigenschap die misschien enigszins verrassend is: laat $a(n)$ het kleinste getal zijn dat op n manieren te schrijven is als som van drie kwadraten, dan is $a(n)$ niet monotoon: $a(9) = 614$, $a(10) = 594$.

Bij de opgaven 3 en 4 was het ook wel handig om allerlei getallen te herkennen, maar enig rekenwerk was toch wel onvermijdelijk.

Opgave 3 was redelijk eenvoudig. Een van de oplossters gaf 6 van de 7 paren in rationale getallen, maar dat was niet de bedoeling. De meeste oplossters gaven 9 paren: (25, 125), (125, 225), (243, 343), (576, 676), (900, 1000), (3025, 3125), (8000, 8100), (13824, 13924) en (39204, 39304).

Bij opgave 4 zijn er zeven paren waarvan alle getallen kleiner dan 2000 zijn. De

kleinste getallen van deze paren zijn: 20, 35, 55, 252, 495, 560 en 1770.

Ook hier gaven de meeste inzenders meer dan zeven paren. De ingezonden aantallen zijn 6, 7 (vijf maal), 8, 10, 11 (drie maal), 16 door Leo Bes en 18 door Wobien Doyer.

De twee laatstgenoemde inzenders vonden de 'recordparen' $\binom{n}{5}$ en $\binom{k}{2}$ met respectievelijk $n = 135$, $k = 26333$ en $n = 139$, $k = 28358$.

Na de deadline ontving ik van Leo Bes nóg twee paren waarmee hij de oude records vermorzelde: $\binom{n}{2}$, $\binom{k}{3}$ met $n = 1587767$,

$k = 19630$ en $\binom{n}{3}$, $\binom{k}{2}$ met $n = 25779$,

$k = 160403633$.

Ladderstand

De ladderstand is nu als volgt:

W. Doyer 382

J. Meerhof 292

T. Kool 288

W. van den Camp 283

H.J. Brascamp 259

A. Verheul 178

L. de Rooij 115

N. Wensink 114

F. Lipperts 60

G. Riphagen 59

H. Klein 52

L.H. van den Raadt 39

H. Neggers 32

L. Bes 20

K. Meerhof 20

B. Klijnstra 17

Ik herinner u er aan dat uw behaalde ladderpunten vervallen als u vijf keer achtereenvolgens niets hebt ingestuurd.

De zomerprijzen voor trouwe inzenders worden deze keer na loting toegekend aan Lieke de Rooij (een boekenbon van € 20,00) en Wim van den Camp (€ 15,00).

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundeleraars toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvvw.nl).

Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html).

nr.	verschijningsdatum	deadline
1	28 september 2006	18 juli 2006
2	26 oktober 2006	12 september 2006
3	7 december 2006	24 oktober 2006
4	1 februari 2007	5 december 2006
5	1 maart 2007	16 januari 2007
6	12 april 2007	27 februari 2007
7	24 mei 2007	3 april 2007
8	21 juni 2007	8 mei 2007

za. 1 en zo. 2 juli, Oostende (België)
13e VVWL-congres
Organisatie Vlaamse Vereniging
Wiskundeleraars

31 juli tm. 11 augustus, Lunteren
Vierkant Zomerkampen
Organisatie Stichting Vierkant voor Wiskunde

do. 17 en vr. 18 augustus, Oostende (België)
T3 Europe Symposium
Organisatie KHBO en K.U.Leuven

vr. 25 en za. 26 augustus, Eindhoven
vr. 1 en za. 2 september, Amsterdam
Vakantiecursus 2006
Organisatie CWI
Zie ook pag. 386 in dit nummer.

vrijdag 15 september, Eindhoven
2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie Stichting NWO

zaterdag 4 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag
Organisatie NVvW
Zie ook pag. 412 in dit nummer.

vrijdag 24 november, op de scholen
Wiskunde A-lympiade / Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde
22. Spelen en Delen

Zie ook www.nvvw.nl/zebrareeks.html en/of
www.epsilon-uitgaven.nl

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides
(voor zover voorradig) kunnen besteld worden
bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten
havo en vwo, de tabellen van de binomiale en
de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek
van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen
op de website van de NVvW
(www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

MATRIX

Innovatieve en bruikbare ict

De Digitale Instapmodule van *Matrix*, de nieuwe wiskundemethode van Malmberg, heeft verrassende voordelen:

- test volledig automatisch kennis van individuele leerling of klas;
- biedt remediërende stof toegespitst op leerling;
- garandeert aansluiting tussen VO en basisonderwijs;
- te gebruiken naast elke wiskundemethode;
- vergt slechts 1 lesuur in het computerlokaal.

De Digitale Instapmodule maakt deel uit van *Matrix*, een complete nieuwe wiskundemethode van Malmberg. Vanaf schooljaar 2006-2007 kunt u met de hand- en (leer)werkboeken van *Matrix* aan de slag. Daarnaast biedt *Matrix* de ict aan in de vorm van een ePack. Onderdeel van ePack is *Studiehulp* waarmee scholieren in het voortgezet onderwijs vanaf het cursusjaar 2006-2007 beschikken over betrouwbare en verhelderende informatie voor schoolopdrachten, in een veilige internetomgeving.



De *Digitale Instapmodule* van *Matrix* (DIM) bestaat uit drie onderdelen:

1. Het leerlingprogramma

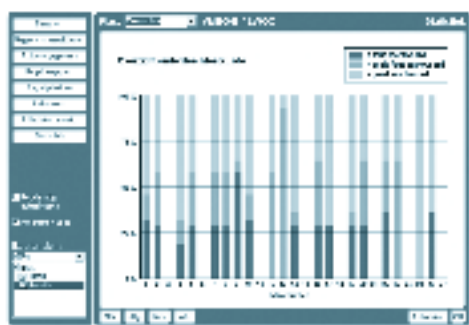
De Instaptoets test de kennis en vaardigheden van de individuele leerling op de 100 meetpunten die essentieel zijn in de overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs bij rekenen/wiskunde.

2. Het docentenprogramma

Het Leerling-Volg-Systeem genereert voor de docent een helder overzicht van individuele en klassikale verschillen in wiskundige kennis en vaardigheden. De eigen les kan daarop worden aangepast.

3. Het setup-programma

Met de Setup kan de docent de hele module op maat instellen door per klas, per niveau (vmbo-b (k) lwoo, vmbo-gt (vmbo-k), havo (vmbo-t), vwo (havo) en per onderdeel de gewenste meetpunten te selecteren.



Bel voor meer informatie de afdeling Voorlichting (073) 628 7554 of kijk op www.matrix-malmberg.nl. Bel voor uw bestelling naar onze afdeling Klantenservice (073) 628 8766.



Uitgeverij Malmberg • Postbus 308 • 5201 AH 's-Hertogenbosch



Malmberg

