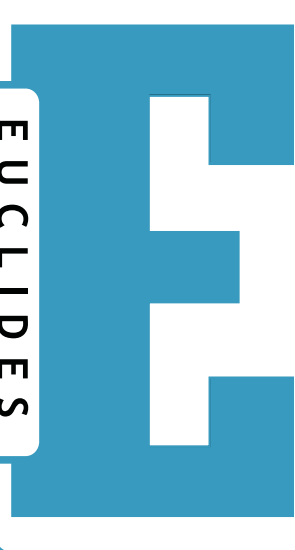


EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar



PROGRAMMA'S 2007+ WISKUNDE D NLT LET'S PLAY DARTS

mei
2006/nr.7
jaargang 81





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
 Klaske Blom
 Marja Bos, hoofdredacteur
 Rob Bosch
 Hans Daale
 Gert de Kleuver, voorzitter
 Dick Klingens, eindredacteur
 Wim Laaper, secretaris
 Jos Tolboom
 Joke Verbeek

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
 Marja Bos
 Houtsnip 22, 7827 KG Emmen
 e-mail: redactie-euclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
 Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
 Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvww.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van
 Wiskundeleraars

www.nvww.nl



Voorzitter:
 Marian Kollenveld,
 Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
 tel. 070-3906378
 e-mail: m.kollenveld@nvww.nl

Secretaris:
 Wim Kuipers,
 Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
 tel. 038-4447017
 e-mail: w.kuipers@nvww.nl

Ledenadministratie:
 Elly van Bommel-Hendriks,
 De Schalm 19, 8251 LB Dronten
 tel. 0321-312543
 e-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
 productie TiekstraMedia, Groningen
 druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
 Leden: € 46,50
 Studentleden: € 26,50
 Gepensioneerden: € 31,50
 Leden van de VWW: € 31,50
 Lidmaatschap zonder Euclides: € 31,50
 Bijdrage WwF: € 2,50
 Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
 Niet-leden: € 50,00
 Instutien en scholen: € 130,00
 Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
 Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
 Gert de Kleuver
 De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
 e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
 tel. 0318-542243

Indien afwezig:
 Frek Mahieu
 Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
 e-mail: frek.mahieu@hetnet.nl
 tel. 0411-673468

7

mei 2006 JAARGANG 81

321	Van de redactietafel [Marja Bos]
322	De wiskunde-examenprogramma's havo en vwo vanaf 2007 [Henk van der Kooij]
327	Wiskunde D, uitdagend en relevant [Paul Drijvers]
331	NLT ook in úw school? [Jenneke Krüger]
334	Let's play darts [Dion Oolthuis]
338	De stelling van Pythagoras voor de brugklas of groep 8 [Yvonne Killian]
339	40 jaar geleden [Martinus van Hoorn]
340	Scholenprijs Nederlandse Wiskunde Olympiade [Freek van Megen]
342	De integraal, dat is de oppervlakte toch? [Nellie Verhoef]
346	Samenhang: waar te beginnen? [Gerrit Roorda]
350	Draaistrekking en negenpuntscirkel [Dick Klingens]
354	Wiskunde als levend vak fascineert leerlingen [Hanne Obbink]
358	Eenvoud bij tekenen en rekenen [Jan van de Craats]
363	Krampachtigheid bij tekenen en rekenen [Paul Drijvers e.a.]
364	De wiskundedocent als goochelaar [Job van de Groep]
366	Recreatie [Frits Göbel]
368	Servicepagina
Voorpagina: TrudiSigned, Krimpen aan den IJssel	
Aan dit nummer werkte verder mee: Marjan Doijer.	

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Rekentoets Pabo; tijdelijke maatregel 2007/2008

Zoals bekend wordt er landelijk hard nagedacht over oplossingen om de rekenvaardigheden van Pabo-studenten te vergroten. Op 23 januari jl. heeft minister Van der Hoeven aangekondigd dat 'instromende studenten over een substantieel hoger niveau aan rekenvaardigheden moeten beschikken'. In afwachting van meer structurele oplossingen is er voor de Pabo-instroom 2007 een tijdelijke maatregel genomen. Leerlingen die zich volgend jaar willen inschrijven bij een Pabo, leggen eerst een gestandaardiseerde diagnostische rekentoets af. Als er sprake is van rekenlacunes, zou de leerling een remediërend programma moeten (kunnen?) volgen vóórdat hij of zij start met het eerste jaar van de opleiding; er liggen dan nog géén toegangsblokkades. De minister verwijst voor die remediëring overigens naar onder meer de vrije ruimte van VO en BVE, verder zullen hogescholen wellicht zomercursussen opzetten. Aan het eind van het eerste Pabo-jaar wordt vervolgens een rekentoets met bindend studieadvies afgenomen. Het is de bedoeling dat de Tweede Kamer al vóór 1 juni a.s. ook geïnformeerd zal worden over mogelijke *structurele* maatregelen.

ABC, D en NLT

In dit nummer van Euclides wordt u in een drietal artikelen uitgebreid bijgepraat over de per 2007 veranderende wiskundevakken in het havo en het vwo. Namens de CEVO informeert Henk van der Kooij u over de profielvakken wiskunde A, B en C, vakken die met een Centraal Examen afgesloten zullen worden. Paul Drijvers, secretaris van de Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs (cTWO), schreef een bijdrage over de stand van zaken rond het nieuwe N&T-profielkeuzevak wiskunde D. En tot slot zet Jenneke Krüger, secretaris van de stuurgroep NLT, het een en ander op een rij met betrekking tot het nieuwe bètavak 'Natuur, Leven en Technologie', met speciale aandacht voor de plaats die wiskunde daarin speelt. NLT wordt een profielkeuzevak voor de profielen N&G en N&T, maar kan net als wiskunde D ook in het vrije deel gekozen worden. Volgens een onderzoek van het Tweede Fase Adviespunt van afgelopen maart overweegt ongeveer 60% van de scholen het vak wiskunde D aan te bieden als (profiel)keuzevak voor de havo-afdeling en 70% voor het vwo. Voor NLT heeft de helft van de scholen serieuze belangstelling. Overigens: in maart waren de definitieve beslissingen op veel scholen nog niet genomen; het gaat bij deze percentages vooralsnog om voornemens.

En verder

De redactie ontving van Jan van de Craats een kritische bijdrage naar aanleiding van het artikel 'Rechtlijnige krommen' uit het decembernummer van Euclides, over een experiment waarbij computeralgebra als gereedschap ingezet werd bij een praktische opdracht. We hebben vervolgens de auteurs van het bewuste artikel (Paul Drijvers e.a.) uitgenodigd een reactie te geven op het stuk van Van de Craats. De beide inzendingen vindt u vanaf pagina 358. Dat er op scholen veel geïnspireerde en inspirerende wiskundeleraren rondlopen, blijkt onder meer uit een bijdrage van Dion Oolthuis over de Wiskunde Scholen Prijs en een verslag van Freek van Megen van de uitreiking van de Scholenprijs van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Waarschijnlijk iets minder bekend dan deze initiatieven is de mogelijkheid om als wiskundeleraar op 'gesubsidieerde' wijze onderzoek te verrichten. Universiteiten verlenen daartoe hun medewerking aan het NWO-programma 'Leraar in Onderzoek', waarover gerapporteerd wordt in het interview met de onderzoekende leraren Alex van den Brandhof en Gillien Geuze (pag. 354). Misschien ook iets voor u?

DE WISKUNDE- EXAMENPROGRAMMA'S HAVO EN VWO VANAF 2007

[Henk van der Kooij]

TABEL 1 Overzicht per profiel in havo

Profiel	huidig programma met aantal slu	vanaf 2007 profielvak met aantal slu	PEP (2007)	percentage CE	vernieuwing (≥ 2010)
C&M	A 1 (160)	-	-	geen CE	???
E&M	A 1,2 (280)	wi A (320)	ja	60%	ja
N&G	B 1 (320)	wi A (320)	ja	60%	ja
N&T	B 1,2 (440)	wi B (360)	ja	100%	ja

TABEL 2 Overzicht per profiel in havo

Profiel	huidig programma met aantal slu	vanaf 2007 profielvak met aantal slu	PEP (2007)	percentage CE	vernieuwing (≥ 2010)
C&M	A 1 (360)	wi C (480)	ja/nee	60%	ja
E&M	A 1,2 (600)	wi A (520)	ja	60%	ja
N&G	B 1 (600)	wi A (520)	ja	60%	ja
N&T	B 1,2 (760)	wi B (600)	ja	100%	ja

Vooraf

Er blijkt nog steeds veel onduidelijkheid te bestaan over wat er vanaf 2007 zal veranderen aan de examenprogramma's wiskunde voor havo en vwo. Dat is niet echt vreemd, omdat je zonder directe betrokkenheid al snel de draad kwijt raakt door de over elkaar heen buitende aanpassingen. Daarom volgt nu eerst een overzicht van alle veranderingen die over ons gaan komen.

Daarbij is het goed om duidelijk voor ogen te houden dat door de politiek besloten is om de Tweede Fase in 2007 aan te passen vanuit de bestaande examenprogramma's en om vanaf 2010 werkelijke inhoudelijke herzieningen toe te staan.

Examenprogramma's vanaf 2007

Bij het jaartal 2007 hoort de PEP (voluit: project examenprogramma's havo/vwo 2007). De PEP heeft drie uitgangspunten:

1. het inpassen van de bestaande examenprogramma's binnen de gewijzigde aantallen slu's (alle vakken ongeveer van gelijke omvang) en het afschaffen van de deelvakken;
2. het formuleren van globale examenprogramma's die worden vastgesteld door de minister;
3. het aanwijzen van 60% van het totale examenprogramma dat centraal wordt geëxamineerd (het CE-deel) en het in detail beschrijven daarvan in een CEVO-syllabus. Het niet-centraal te toetsen deel

wordt via een handreiking van SLO voorzien van voorbeelden van mogelijk onderwijs en toetsing. De CEVO-syllabus kan, indien gewenst en zonder tussenkomst van minister en Tweede Kamer, worden aangepast aan nieuwe inzichten en wensen. Voor wiskunde is het werk aan de programma-beschrijvingen en de syllabus gestart in mei 2005 en inmiddels zijn de definitieve voorstellen voor de syllabi gepubliceerd. Daarover later in dit artikel meer details.

Vernieuwingen vanaf 2010

Bij de ontwikkeling van inhoudelijke vernieuwingen binnen de verschillende profielen voor 2010 en daarna horen de Profielcommissies en de vernieuwingscommissies. Binnen de verschillende profielen moet dan onder andere meer worden gelet op samenhang tussen de profielvakken. Zoals wellicht bekend is, zijn er vernieuwingen van alle exacte vakken voorzien; ook de ontwikkeling van het nieuwe bètavak Natuur, Leven en Technologie (NLT) in de N-profielen past bij deze vernieuwing. Voor wiskunde is cTWO (commissie toekomst wiskundeonderwijs) verantwoordelijk voor het aansturen van de ontwikkeling van alle wiskundevakken voor de bovenbouw van havo en vwo. Daarbij hoort onder andere ook overleg met de vernieuwingscommissies van de andere exacte vakken.

Actuele algemene informatie over deze langere termijn ontwikkelingen kan worden gevonden op websites als www.ctwo.nl/ (voor de vernieuwingen van wiskunde), www.tweedefase-loket.nl/ (informatie over schoolorganisatorische zaken, schema's met de slu-verdeling per profiel en de nieuwe globale examenprogramma's), www.minocw.nl/ (voor actuele beleidsbeslissingen) en (specifiek voor NLT) www.betavak-nlt.nl. Uiteraard worden de ontwikkelingen ook bijgehouden op de site van de vereniging (www.nvww.nl).

Hoe zit het nu precies met wiskunde?

Bij de andere exacte vakken is volstrekt helder wat er wanneer gebeurt, omdat PEP en vernieuwing strikt gescheiden zijn. Bij wiskunde hangt de onduidelijkheid samen met het feit dat PEP (2007) en vernieuwing (2010 en later, maar in een paar gevallen ook vanaf 2007) in sommige gevallen zijn vermengd en ook met het feit dat er zoveel verschillende vakken wiskunde zijn.

Wiskunde D

Wiskunde D wordt in 2007 ingevoerd in het profiel N&T als één van de vier profielkeuzevakken, terwijl dat een nog niet bestaand programma is. Daarom valt wiskunde D niet onder de PEP-procedure, maar onder cTWO die vanaf 2007 (via experimenten met een beperkt aantal scholen) invullingen van dit vak (ter grootte van 440 slu voor vwo en 320 slu voor havo) zal verzorgen. Mede omdat het voorlopig geen centrale examinering zal krijgen,

valt dit vak niet onder de zorgen van CEVO. Er worden mogelijke koppelingen tussen wiskunde D en NLT onderzocht: er worden mogelijk modules ontwikkeld waarbij een school zelf kan beslissen of ze die binnen NLT of binnen wiskunde D gaan aanbieden. Maar dat zijn dus zaken die cTWO aangaan en niet CEVO.

Dat is de minst onduidelijke afwijking van het principe om 2007 en 2010 gescheiden te houden.

Wiskunde C

Voor wiskunde C is er wat anders aan de hand. Het is binnen de PEP geformuleerd als het profielvak van vwo C&M. Dus valt het onder de PEP-uitgangspunten en moest het worden gedefinieerd vanuit het bestaande profielvak wiskunde A1. Het grotere aantal slu (480 in plaats van de huidige 360) zorgt ervoor dat er meer ruimte komt om andere dingen te doen dan nu in A1 zijn gedefinieerd. Maar OCW wil dit vak een echt eigen gezicht geven. Daarom is een nieuwe invulling van het vak door OCW toegewezen aan cTWO. En daarmee is wiskunde C eigenlijk tussen wal en schip geraakt. De PEP-commissie mocht in het bestaande wiskunde A1-programma (vanaf 2007) op het domein 'functies en grafieken' een volledig C&M-eigen kleuring aangeven en de vernieuwingscommissie cTWO kreeg de opdracht om het hele vak een eigen inkleuring te geven die past bij het profiel C&M (richting 2010). Dit probleem heeft de CEVO-commissie voor de PEP zodanig parten gespeeld, dat er is besloten om wiskunde C vanaf 2007 voor het CE-deel te laten voor wat het nu al is (de inhoud van wiskunde A1) en de veranderingen in het totale programma over te laten aan de vernieuwingscommissie. Daarbij wordt het werk van de PEP-commissie voor wiskunde C dat al is gedaan in het kader van de PEP meegenomen. Zo snel mogelijk na 2007 zal dus een nieuw programma wiskunde C landelijk worden ingevoerd, met centrale examinering. In feite is daarmee wiskunde C uit de PEP-procedure gehaald en blijft het (voor wat betreft het CE-deel) dus voorlopig bij het oude: het CE zal gaan over de domeinen die nu ook al worden getoetst bij wiskunde A1.

De stand van zaken ten aanzien van de PEP is in de [tabellen op pagina 322](#) weergegeven. Wiskunde D is niet opgenomen omdat het buiten de PEP valt en wiskunde C heeft dus dat dubbele: het valt officieel onder de PEP, maar de ontwikkeling van het 'echte' vak wordt in gang gezet door cTWO.

In het overzicht is ook het recente politieke besluit verwerkt: extra slu's en 100% CE voor wiskunde B in havo en vwo.

Een leerling mag wiskunde B in de profielen E&M en N&G kiezen in plaats van wiskunde A, met de extra uren die daar bij horen en de verplichting van 100% CE. Dit geldt voor zowel havo als vwo. In vwo mag wiskunde A of B worden gekozen in plaats van C; in havo staat er geen keuzevak wiskunde

Voorbeeld 7

Zwaardere dieren hebben een zwaarder skelet, ook in verhouding. Zo weegt het skelet van een veldmuis (20 gram) nog geen gram (= 5%), en dat van een 4000 kg zware olifant ca. 1000 kg (= 25%).

Het verband tussen lichaamsgewicht en skeletgewicht van (land)zoogdieren kan benaderd worden met de formule $S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$ met S het skeletgewicht in gram en M het lichaamsgewicht in gram.

- Laat zien hoeveel keer zo groot het skeletgewicht wordt wanneer het lichaamsgewicht 10 maal zo groot wordt (volgens deze formule).

Het lichtste zoogdier ter wereld is de winterspitsmuis, met een lichaamsgewicht van zo'n 2 gram.

- Maak een formule waarmee je op grond van het lichaamsgewicht meteen kunt berekenen hoeveel procent het skeletgewicht bedraagt (bij deze dieren). Maak de formule zo eenvoudig mogelijk.

Bovenstaande formule blijkt voor zware landzoogdieren -zoals olifanten- minder goed te voldoen.

Een betere formule voor die groep is: $S = 0,058 \cdot M^{1,1}$ met S het skeletgewicht in gram en M het lichaamsgewicht in gram.

Het is eigenlijk vreemd om bij dergelijke zware dieren te werken met grammen.

- Pas de formule zo aan dat zowel het skeletgewicht als het lichaamsgewicht in kg uitgedrukt worden. Maak je formule zo eenvoudig mogelijk en controleer deze met een voorbeeld.
- Maak een formule waarmee je op grond van het skeletgewicht van een zwaar landzoogdier het lichaamsgewicht kunt berekenen.

FIGUUR 1

genoemd bij C&M, dus daar zal wiskunde alleen kunnen worden gekozen in het (vrije) keuzedeel. De vraagtekens bij havo A duiden op het feit dat de profielcommissies alsnog kunnen voorstellen om per 2010 wiskunde wél verplicht te stellen voor het profiel C&M havo.

Algebraïsche vaardigheden vanaf 2007

Door de vijf PEP-commissies is meteen bij de start van de werkzaamheden (mei 2005) de wens geuit om in de syllabi voor ieder wiskundevak afzonderlijk duidelijkheid te verschaffen over de mate waarin de algebra een rol mag/moet spelen bij het centraal examen.

Bij de invoering van de profielen is voor het vwo immers een flink deel van de algebra (de domeinen Bg: Functies en grafieken en Cg: Discrete analyse) terechtgekomen in het gemeenschappelijke programma. Hierdoor - maar ook mede door de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine - zijn de grenzen tussen wiskunde A1(,2) en B1(,2) vervaagd ten aanzien van de gewenste algebrakennis en -vaardigheid.

Opname van een afbakening ten aanzien van algebra in de syllabi dient daarom twee doelen: - docenten (en leerlingen) wordt een helder beeld gegeven van de verschillende eisen die per vak worden gesteld aan algebraïsche kennis en vaardigheden;

- het vervolgonderwijs wordt duidelijk gemaakt op welke kennis en vaardigheden mag worden gerekend, gegeven de beperkte tijd die de politiek aan het wiskundeonderwijs gunt.

Het is goed om op deze plaats nog eens te benadrukken dat deze actie rond algebra vanuit

de PEP-commissies is gekomen en dat het puur toeval is dat de commotie rond algebra, GR en formulekaart, zoals die begin 2006 is ontstaan vanuit het hoger onderwijs en die door de politiek is opgepakt, in diezelfde tijd speelde.

Het formuleren van voorstellen vond binnen de commissies plaats in december en januari en deze voorstellen zijn voorgelegd aan het veld. De twee bijeenkomsten zijn begin februari gehouden; voor havo bezocht door 60 en voor vwo door 70 docenten. Daarnaast hebben ongeveer 20 docenten gebruik gemaakt van de gelegenheid om via e-mail te reageren op de drie hoofdonderwerpen van de raadpleging:

1. Bent u het eens met de detaileindtermen bij het CE-deel van het programma?
2. Stemt u in met de opsomming van de algebraïsche vaardigheden die leerlingen zonder gebruik van de GR moeten kunnen tonen op het examen?
3. Wat is uw mening over het gebruik van de formulekaart bij het examen?

Zonder in te gaan op alle details van de discussies kan worden gesteld dat er redelijke instemming was met de CEVO-voorstellen, maar er werd ook gewaarschuwd voor teveel ambities op het gebied van de algebra. De beperkte aantallen slu voor de examenprogramma's en het feit dat er in de onderbouw (met name in het derde leerjaar) veel te weinig aandacht is voor algebraïsche kennis en vaardigheden werden genoemd als redenen om voorzichtig te zijn met al te rigoureuze aanpassingen.

Het programma voor havo B werd te ambitieus gevonden, zeker als het is gekoppeld aan de

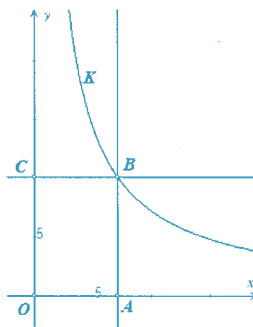
Opgave 1

In een rechthoekig assenstelsel Oxy is $OABC$ een variabele rechthoek. Punt B ligt op de kromme K en kan daarover bewegen. Onafhankelijk van de positie van punt B geldt dat $OABC$ een rechthoek vormt met een constante oppervlakte 72. A ligt steeds op de positieve x -as en C op de positieve y -as.

- a. Toon aan dat K de grafiek van $y = \frac{72}{x}$ is.

De raaklijn in het punt B aan de kromme snijdt de x -as in punt D en de y -as in punt E .

- b. Toon aan dat de oppervlakte van driehoek ODE niet afhangt van de positie van punt B op de kromme K .



Zelfstandig aanpakken en oplossen van een probleem bij wiskunde B vwo (enkelvoudige opgave)

Opgave 5

De functie f is voor iedere reële $x \neq 0$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{e^x - 1}$.

Als je de grafiek maakt met de GRM, dan lijkt het erop dat zij symmetrisch is ten opzichte van de y -as.

> Bewijs dat dit inderdaad het geval is.

FIGUUR 2**FIGUUR 3**

aanscherping van de algebraïsche kennis en vaardigheden. Op het moment van de raadpleging was nog niet bekend dat de politiek 40 slu 'extra' zou gunnen. Daarom is, op basis van de discussies tijdens de bijeenkomst, besloten het grondtal e uit het programma te halen (en dus daarmee ook de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies) en de extra 40 slu volledig te reserveren voor aandacht aan algebra. Bij de vwo-raadpleging was wel bekend dat er 80 slu minder wordt gekort op wiskunde B. De aanwezige docenten waren er in grote meerderheid voor om die extra tijd te bestemmen voor de algebra.

De verschillen tussen wiskunde A en B met betrekking tot de algebra zijn in detail terug te vinden in de syllabi. Daarin wordt voor elk vak een apart hoofdstuk gewijd aan algebra. Ook is voor elk vak een nieuw subdomein opgenomen in het examenprogramma:

Subdomein A5: Algebraïsche vaardigheden

Globale eindterm:

De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Specificatie:

De kaders voor dit subdomein worden geschetst in hoofdstuk 3.

Ieder subdomein dat bij het CE hoort moet worden gespecificeerd met detaileindtermen. Voor dit

toegevoegde subdomein is gekozen om dat niet te doen, maar slechts te verwijzen naar het hoofdstuk van de syllabus waar die kennis en vaardigheden worden beschreven.

In globale zin komen de verschillen tussen wiskunde A en B (C is even buiten beschouwing gehouden vanwege de specifieke status) ten aanzien van algebra-manipulaties neer op:

- Algebraïsche vaardigheden binnen wiskunde B kunnen en zullen ook 'sec' worden bevraagd, dus zonder dat er sprake is van een contextprobleem buiten de wiskunde; bij wiskunde A worden algebraïsche kennis en vaardigheden in principe binnen een niet-wiskundige probleemsituatie getoetst. Als voorbeelden hierbij geven de **figuren 1 en 2** een goede indicatie.
- Bij wiskunde B wordt van leerlingen verwacht dat ze een algebra-vraagstuk van begin tot eind kunnen aanpakken en tot een oplossing te kunnen brengen (een zogenaamde enkelvoudige opgave); bij wiskunde A zal in principe alleen worden geëist dat ze in staat zijn om een paar stappen uit te voeren die tot een gegeven eindresultaat leiden. De voorbeelden van de **figuren 3 en 4** geven daarvan een indicatie.

- De GR is bij wiskunde B vooral een instrument voor het verkennen van een probleemsituatie en bij het vinden van een exacte oplossing van een vraag wordt in principe een algebraïsche aanpak verondersteld, terwijl bij wiskunde A vaak (omdat het probleem gesteld is in een niet-wiskundige context) mag worden volstaan met een benaderende oplossing die ook met de GR kan worden gevonden. De GR blijft dus gehandhaafd als beschikbaar

Voorbeeld 3

(examen A1,2 2002; 1^e tijdvak, Lentevoordeelweken, vraag 14)

Een kansrekeningsopgave.

De bedoeling is om de uitdrukking $P = k^2 + 3 \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k)^2$, die de leerlingen eerst zelf moeten destilleren uit de context, te herleiden tot de in de opgave gegeven

formule: $P = 1\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$.

Enkelvoudige opgave die een wiskunde B leerling (vwo) zelfstandig tot een goed einde moet kunnen brengen

Opgave 6

De functie f is voor iedere reële x gegeven door $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

Maak op de GRM de grafiek van de functie $y = f(x) - f(\frac{1}{x}) + 1$.

> Wat voor bijzonders constateer je? Verklaar dit met behulp van algebra.

FIGUUR 4 FIGUUR 5

instrument bij het CE. Ook bij wiskunde B zijn er natuurlijk vragen die niet met algebraïsche methoden oplosbaar zijn.

Enkelvoudige opgaven

Bijzondere aandacht verdienen de zogenaamde enkelvoudige opgaven voor wiskunde B van vwo (beslist niet te verwarren met een eenvoudige opgave!). Het gaat daarbij om opgaven waarbij een leerling zowel de aanpak als de uitvoering zelf moet bepalen. In **figuur 5** is een voorbeeld van een dergelijk vraagstuk gegeven. De meeste docenten waren het eens met het idee dat dergelijke opgaven passen binnen een examen wiskunde B, maar er werd ook aangegeven dat er enige voorzichtigheid moet worden betracht, omdat dergelijke opgaven erg discriminerend werken.

Formulekaart

Ten aanzien van de formulekaart bij het CE waren de bij de raadpleging aanwezige docenten genuanceerd. Ze waren over het algemeen van mening dat afschaffing niet echt nodig is. Voor sommige leerlingen geeft het de zekerheid dat het niet herinneren van een regel niet betekent dat ze een opgave niet kunnen maken. Wel werd breed bepleit om de kaart sterk in te korten: bijvoorbeeld geen onderbouwkennis en niet de afgeleiden (en primitieven) van standaardfuncties. CEVO heeft de PEP-commissies voorgesteld om de kaart af te schaffen bij alle wiskundevakken behalve wiskunde B vwo. Bij vwo B zouden de stellingen en definities rond de meetkunde en een selectie van gonio-formules kunnen worden gehandhaafd. Op het moment van schrijven is nog

niet bekend hoe de commissies zullen reageren op dit voorstel.

Tenslotte

Met dit schrijven is getracht om vanuit CEVO aan te geven hoe veranderingen per 2007 en daarna het wiskundeonderwijs van de bovenbouw havo/vwo zullen beïnvloeden. Voor zover het de verantwoordelijkheden van CEVO betreft geeft het bovenstaande weer wat de stand van zaken is in april 2006. Wij hopen dat er, binnen de kaders die vanuit de politiek zijn gegund, per 2007 onderwijsbare en examineerbare programma's zijn geformuleerd waarmee u als docent uit de voeten kunt.

Websites

- www.ctwo.nl : Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs (vernieuwingcommissie)
- www.tweedefase-loket.nl : informatie over schoolorganisatorische zaken, schema's met de slu-verdeling per profiel en de nieuwe globale examenprogramma's
- www.minocw.nl : voor actuele beleidsbeslissingen
- www.betavak-nlt.nl : over NLT
- www.nvww.nl : site van de NVvW

Over de auteur

Henk van der Kooij is onder andere clustercoördinator exacte vakken bij de CEVO en in die hoedanigheid betrokken bij de PEP.
E-mailadres: H.vanderKooij@cevo.nl

WISKUNDE D, UITDAGEND EN RELEVANT

[Paul Drijvers]



FIGUUR 1 Overzichtstabel

Wiskunde D havo (320 slu)		Wiskunde D vwo (440 slu)	
Statistiek en kansrekenen	120	Statistiek en kansrekenen	160
Toegepaste analyse 2	80	Meetkunde	80
Overige onderwerpen	120	Dynamische modellen	80
		Overige onderwerpen	120

Inleiding

Met ingang van 2007 wordt de structuur van de profielen van de tweede fase van havo en vwo aangepast. Voor wiskunde staat een aantal ingrijpende wijzigingen op stapel. De vakinhouden worden aan de verschillende profielen aangepast. Nieuw naast wiskunde A en B zijn wiskunde C en wiskunde D.

Per 2010 zullen bij de verschillende bètavakken meer inhoudelijke herzieningen plaatsvinden. Om hieraan sturing te geven heeft het ministerie van OC&W voor biologie, scheikunde, natuurkunde, wiskunde en het nieuwe geïntegreerde bètavak natuur, leven en technologie (NL&T) stuurgroepen of vernieuwingscommissies in het leven geroepen. De vernieuwingscommissie wiskunde heeft zichzelf *commissie Toekomst WiskundeOnderwijs* gedoopt (cTWO) en staat onder voorzitterschap van Dirk Siersma, hoogleraar wiskunde aan de Universiteit Utrecht.

De opdracht van cTWO omvat het vaststellen van examenprogramma's voor wiskunde A, B, C en D voor havo en vwo per 2010 en het adviseren over doorlopende leerlijnen en didactische ontwikkelingen. Wiskunde C en D zullen echter al in 2007 van start gaan.

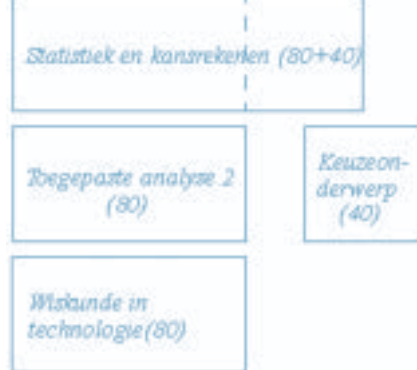
Dit artikel betreft wiskunde D en beschrijft hoe dit vak er per 2007 uit gaat zien. De commissie staat ervoor in dat het lesmateriaal daarvoor ruim op tijd beschikbaar zal zijn, zodat scholen het eenvoudig kunnen invoeren. Meer informatie over wiskunde D en over samenstelling en werkwijze van cTWO vindt u op de website www.ctwo.nl.

Uitgangspunten van wiskunde D

Wiskunde D is een van de profielkeuzevakken binnen het profiel NT van havo (320 slu) en vwo (440 slu). Het is een uitdagend en relevant vak dat zowel verdieping als verbreding biedt en waarin de samenhang binnen de wiskunde en tussen wiskunde en andere exacte vakken duidelijk naar voren komt.

De *verbreding* houdt bijvoorbeeld in dat NT-leerlingen ook de statistiek en kansrekening leren, die per 2007 uit het wiskunde B programma verdwijnt. De *verdieping* wordt gerealiseerd in abstractere onderwerpen, zoals meetkunde en voortgezette analyse. De *samenhang* binnen de wiskunde krijgt gestalte in onderwerpen als analytische meetkunde, terwijl verbanden met andere exacte vakken worden gelegd in domeinen zoals dynamische modellen en toegepaste analyse. Daarnaast vindt samenwerking met het hoger onderwijs plaats, zodat de leerling zicht krijgt op de manier waarop wiskunde in vervolgopleiding, wetenschap en techniek functioneert. Daarmee, en ook doordat de leerling een groter repertoire aan wiskundige vaardigheden ontwikkelt, vormt wiskunde D een goede voorbereiding op een exacte of technische vervolgopleiding. Specifiek voor havo-leerlingen vergemakkelijkt wiskunde D ook de overgang naar vwo met wiskunde B.

Wiskunde D biedt scholen en leerlingen ruimte tot het maken van keuzes. **Figuur 1** geeft een overzicht van de opbouw van wiskunde D voor havo en vwo, en bepaalt het globale kader waarbinnen die keuzes zich afspelen. Voor we dit overzicht verder



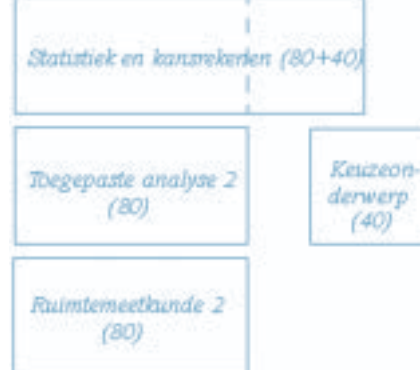
FIGUUR 2 Samenwerkingsmodel havo

uitwerken twee opmerkingen. Ten eerste moet in figuur 1 'overige onderwerpen' niet gelezen worden als 'keuzeonderwerpen'; voor de invulling hiervan worden concrete voorstellen gedaan. Ten tweede zij vermeld dat de globale programma's tot stand zijn gekomen na raadpleging van het voortgezet en hoger onderwijs middels veldraadplegingen. Vanuit het voortgezet onderwijs hebben ongeveer 200 docenten hieraan deelgenomen; daarnaast heeft een aantal via e-mail of het forum gereageerd. De reacties zijn aanleiding geweest de eerdere voorstellen aan te passen. Met name is het programma voor het havo nader ingevuld en zijn twee nieuwe domeinen toegevoegd waarin de samenwerking met instellingen voor hoger onderwijs een grote rol speelt. Wiskunde D wordt niet met een centraal examen afgerond. Voor de ontwikkeling en kwaliteitswaarborging van schoolexamens worden uitwisselings- en samenwerkingsmodellen opgezet.

Wiskunde D voor havo

Figuur 2 geeft de standaardinvulling voor wiskunde D in het havo. Het domein *statistiek en kansrekenen* omvat het programma van wiskunde A. De stippellijn in dit domein symboliseert de mogelijkheid (maar dus niet de plicht!) voor scholen om een deel van dit domein een meer profielspecifieke invulling te geven. Voorbeeldmateriaal hiervoor zal worden ontwikkeld.

Het domein *toegepaste analyse 2* is een verdieping van het algoritmisch denken over functies en verbanden. Dit domein leent zich verder voor het verwerken van wiskunde B-stof in relevante toepassingen. Het wordt gedeeltelijk ingevuld met subdomeinen uit wiskunde B12 die niet in wiskunde B terecht gekomen zijn en wordt uitgebreid met een extra subdomein over toenames, groeifactoren, periodiciteit en evenredigheden. Dit geeft aanleiding tot de inzet van algebra bij het verklaren van gevonden patronen. Daarnaast is ICT

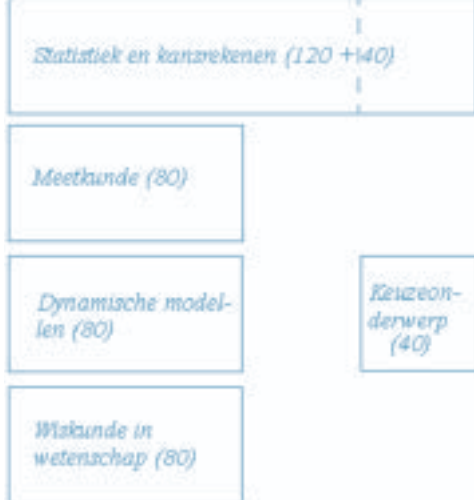


FIGUUR 3 Schoolmodel havo

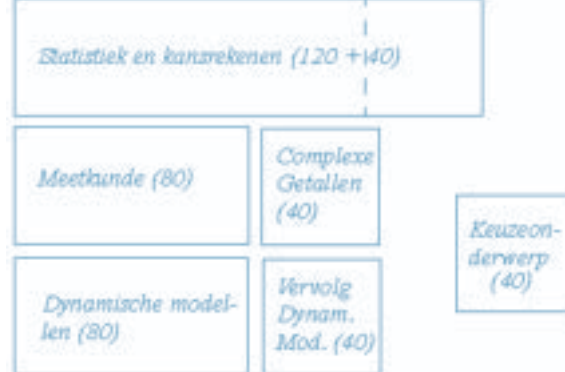
een hulpmiddel waarmee geëxperimenteerd wordt. Het domein *wiskunde in technologie* is nieuw. Het beoogt leerlingen zicht te geven op toepassingen van wiskunde in (exacte) vervolgopleiding en beroep. Het is een praktijkgericht domein dat zicht geeft op de processen waarin het toepassen van wiskunde een rol speelt. Wiskunde in technologie wordt vormgegeven in nauwe samenwerking met instellingen voor hoger onderwijs, wat de term 'samenwerkingsmodel' verklaart. Voor dit doel zullen binnen hogescholen steunpunten wiskunde D worden ingesteld. De invulling van dit domein wordt in overleg met de regionale hbo-instelling vastgesteld. Te denken valt aan een masterclass rond een voor deze doelgroep relevant onderwerp, die in samenwerking met de hbo-instelling wordt ontwikkeld en/of uitgevoerd. Een tweede component van dit domein kan een onderzoeksopdracht zijn die gericht is op de beroepspraktijk of deel uitmaakt van het programma van een vervolgopleiding. In het laatste geval ligt het voor de hand dat toekomstige studenten hiervoor tijdens de vervolgstudie worden gecompenseerd. Behalve met hbo-instellingen wordt ook samenwerking met het bedrijfsleven aanbevolen. Daarnaast is het mogelijk dat hbo-instellingen digitale modules aanbieden die op afstand te volgen zijn.

Voor sommige scholen zal de samenwerking met een hbo-instelling op praktische bezwaren stuiten, bijvoorbeeld door de geografische ligging. Voor zulke situaties stelt de commissie een alternatief voor (zie figuur 3). In dit zogeheten schoolmodel is het domein 'wiskunde in technologie' vervangen door *Ruimtemeetkunde 2*. Dit vormt een vervolg op de ruimtemeetkunde binnen wiskunde B. Behalve onderdelen uit wiskunde B12 die in wiskunde B geen plaats hebben gekregen, komen hier uitbreidingen aan de orde uit de analytische meetkunde met coördinaten en vectoren.

Ten slotte voorziet het programma in een *keuzeonderwerp*. Hier kan gedacht worden aan een onderwerp als optimaliseren. Voorbeeldmatige



FIGUUR 4 Samenwerkingsmodel vwo



FIGUUR 5 Schoolmodel vwo

invullingen, bijvoorbeeld in de vorm van zebraboekjes, worden ontwikkeld.

Wiskunde D voor vwo

Figuur 4 geeft de standaardinvulling voor wiskunde D in het vwo. Net als op het havo omvat het domein *statistiek en kansrekenen* het programma van wiskunde A. De stippellijn in dit domein geeft ook hier de mogelijkheid (maar dus niet de plicht) weer om op school een deel van dit domein een meer profielspecifieke invulling te geven. Voorbeeldmateriaal hiervoor zal worden ontwikkeld.

In het domein *meetkunde* wordt begonnen met de analytische aanpak van meetkunde, waarbij ook coördinaten in meerdere dimensies aan de orde komen. Punten, lijnen en vlakken worden gealgebraïseerd. De analytische benadering van meetkundige problemen, zoals geïntroduceerd door Descartes, is in de zeventiende eeuw een doorbraak geweest voor het vak wiskunde. Zowel inzicht in als ervaring met de analytische methode is essentieel in het gebruik van wiskunde in een meetkundige context. Deze synthese van meetkunde en analyse vormt tevens een belangrijk toepassings- en trainingsgebied voor algebra en algebraïsch modelleren, zoals het aanbrengen van een coördinatenstelsel, het kiezen van onbekenden en het werken met vergelijkingen. Software voor dynamische meetkunde kan in dit domein worden ingezet.

In het domein *dynamische modellen* komen de raakvlakken met andere exacte vakken aan de orde. Dit domein zal worden afgestemd met de inhoud van het vak NL&T. De volgende drie invalshoeken komen aan de orde. Mogelijk chronologisch gezien de eerste is die van dynamische systemen die worden gemodelleerd met behulp van een grafisch modelleertool zoals Powersim. Daarmee krijgt ICT een belangrijke plaats in dit domein. De tweede invalshoek is die van iteratieve discrete dynamische modellen. Algebraïsche vaardigheden zijn onmisbaar bij het ontwikkelen van theoretisch

gereedschap. De derde invalshoek is die van de continue dynamische modellen en differentiaal-vergelijkingen. Verschillende typen differentiaal-vergelijkingen worden opgesteld en numeriek dan wel analytisch opgelost. Ook hier spelen algebraïsche technieken een rol van betekenis. Het domein *wiskunde in wetenschap* is nieuw. Het beoogt leerlingen zicht te geven op wiskunde als wetenschap en op de manier waarop wiskunde binnen exacte wetenschappen functioneert. Het gaat hierbij niet alleen om de wiskundige resultaten, maar ook om het proces van het bedrijven van wetenschap. Wiskunde in wetenschap wordt vormgegeven in nauwe samenwerking met universiteiten, wat de term 'samenwerkingsmodel' verklaart. Een dergelijke samenwerking bevordert de doorlopende leerlijn van vo naar ho en komt niet alleen de kwaliteit en actualiteit van de inhoud ten goede, maar heeft ook een positief effect op de doorstroming. Met het oog hierop zullen binnen universiteiten steunpunten wiskunde D worden ingesteld, die worden gefaciliteerd.

De invulling van dit domein wordt in overleg met de regionale wo-instelling vastgesteld. Te denken valt aan een masterclass rond een uitdagend en voor deze doelgroep relevant onderwerp, die in samenwerking met de universiteit wordt ontwikkeld en/of uitgevoerd. Een tweede component van dit domein is een onderzoeksopdracht die onderzoeksmatige vaardigheden vraagt en gericht is op een wetenschappelijke denkmethode. Zo mogelijk worden toekomstige studenten van exacte studierichtingen hiervoor tijdens de vervolgstudie gecompenseerd. Behalve met universiteiten wordt ook samenwerking met onderzoeksinstellingen uit het bedrijfsleven aanbevolen. Daarnaast is het wenselijk dat universiteiten modules aanbieden in een vorm die zich leent voor afstandsonderwijs. Voor sommige scholen zal de samenwerking met een universitaire instelling op praktische bezwaren stuiten, bijvoorbeeld door de geografische ligging. Voor zulke situaties stelt de commissie een alternatief voor (zie **figuur 5**). In dit

zogeneten schoolmodel is het domein 'wiskunde in wetenschap' vervangen door *Complexe getallen* en *Vervolg dynamische modellen*. Complexe getallen zijn naast de meetkunde geplaatst om te benadrukken dat het aanbeveling verdient om ze ook in een meetkundige context te behandelen. In het domein 'Vervolg dynamische modellen' wordt dieper ingegaan op het oplossen van verschillende typen differentiaalvergelijkingen en worden iteratieve processen en numerieke benaderingen nader bestudeerd.

Ten slotte voorziet het programma in een *keuzeonderwerp*. Onderwerpen, lesmateriaal en ervaringen zullen op een centrale plaats digitaal worden verzameld en verspreid. Deze website zal in combinatie met het op te richten ontwikkelpunt wiskunde D en de regionale steunpunten wiskunde D de infrastructuur van dit vak vormen. Bij de keuzeonderwerpen wordt gedacht aan zebraboekjes en aan materiaal dat door het hoger onderwijs is ontwikkeld. Een keuzeonderwerp kan eventueel gecombineerd voor wiskunde D en NL&T worden aangeboden. Onderwerpen die zich hiervoor zouden kunnen lenen zijn bijvoorbeeld cryptografie en mathematische fysica. Scholen kunnen zo combinaties creëren die het aanbieden van het vak financieel en organisatorisch haalbaar maken.

Wiskunde D in de schoolpraktijk

Het gesternte waaronder wiskunde D wordt geboren, is niet helemaal gelukkig; het is een profielkeuzevak naast drie andere (biologie, informatica en NL&T) in slechts één profiel. Op verschillende manieren wordt de levensvatbaarheid van wiskunde D op school vergroot:

- Wiskunde D is *flexibel* te organiseren.

Het is bijvoorbeeld mogelijk om met wiskunde D te starten in het begin van klas 4, maar ook om de aanvang uit te stellen tot klas 5 (vwo) of midden klas 4 (havo). Een andere optie is om domeinen in een tweejaarlijkse cyclus aan te bieden, die door leerlingen van klas 4 en 5 of van klas 5 en 6 gezamenlijk wordt gevolgd. Daarnaast behoort combinatie van sommige domeinen met NL&T-modules tot de mogelijkheden.

- Wiskunde D is *efficiënt* uit te voeren.

Behalve de in het vorige punt genoemde mogelijkheden om leerlingengroepen te combineren, ligt het samenvoegen van wiskunde A en wiskunde D bij statistiek en kansrekenen voor de hand. Doordat de nieuwe domeinen 'wiskunde in technologie' en 'wiskunde in wetenschap' in samenwerking met het hoger onderwijs worden vormgegeven, zijn ook deze onderdelen naar verwachting eenvoudig te realiseren.

- Wiskunde D wordt *gefaciliteerd*.

Voor het experimenteren met en invoeren van

wiskunde D zijn faciliteiten beschikbaar die het vak voor de school betaalbaar maken, ook in geval het een kleine groep leerlingen betreft. Het gaat hier om ondersteuning in de vorm van taakuren.

Hoewel natuurlijk voorop staat dat wiskunde D een uitdagend en relevant vak is, kunnen de bovenstaande kenmerken de implementatie in de praktijk bevorderen.

Hoe u kunt meedoen

Inmiddels is een aantal werkgroepen van start gegaan die de verschillende domeinen uitwerken in domeinbeschrijvingen en voorbeeldmatig lesmateriaal. Met instellingen voor hoger onderwijs is contact gelegd over het inrichten van de steunpunten wiskunde D en het vormgeven van de domeinen 'wiskunde in technologie' en 'wiskunde in wetenschap'. Daarnaast heeft een aantal scholen aangegeven al in het schooljaar 2006-2007 onderdelen van wiskunde D binnen het huidige B12-programma te willen gaan uittesten. De ruimte daarvoor wordt gevonden in de overlap tussen wiskunde B12 en wiskunde D, in het zebrablok, in praktische opdracht of door het aantal contacturen uit te breiden. Om het meedenken, experimenteren en rapporteren te faciliteren stelt cTWO een aantal docenturen beschikbaar. Door middel van een overeenkomst tussen de school en cTWO worden de afspraken dit voorjaar vastgelegd, zodat daarmee in de planning voor het komende schooljaar rekening kan worden gehouden. In juni komen de deelnemende scholen bij elkaar om de lessenseries samen met de werkgroepen in concreto voor te bereiden.

Is er op uw school ook animo om voorop te lopen in deze boeiende ontwikkeling? Neem dan contact op met cTWO. We hopen dat velen deze uitdaging aannemen, en op deze manier een bijdrage leveren aan het ontstaan van een relevant wiskundevak!

Over de auteur

Paul Drijvers is werkzaam als senior onderwijsontwikkelaar bij het Freudenthal Instituut. Dit artikel schrijft hij als secretaris van de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs. De commissie is bereikbaar via E-mailadres: info@ctwo.nl en URL: www.ctwo.nl.

NLT OOK IN UW SCHOOL?

Kansen voor wiskunde, voor leerlingen en docenten

[Jenneke Krüger]

Natuur, Leven en Technologie

Het nieuwe geïntegreerde bètavak 'Natuur, Leven en Technologie' (NLT) staat volop in de belangstelling, hoewel het nog bepaald geen uitgekristalliseerd schoolvak is. NLT wordt een uitermate boeiend vak, waarin wiskunde structureel samenwerkt met de andere exacte vakken binnen het voortgezet onderwijs: dat is uniek en niet alleen in Nederland. Bij mijn weten komt dat nergens voor. Het is bovendien een vak dat aantrekkelijk is voor alle leerlingen in N-profielen: geen eenheidsworst maar zowel voor de 'zachte' bèta van profiel NG als de uitgesproken exacte leerling in profiel NT geschikt. Het geeft kijk op en ervaring met onderwerpen die *nu* van belang zijn in hogescholen, universiteiten en beroepen in het hele exacte gebied. Dan blijkt dat wiskunde vaak van belang is, niet alleen voor studies aan technische universiteiten en in technische richtingen van hbo, maar ook in mogelijke NLT-onderwerpen als *Forensische technieken* en *Rijden onder invloed*, om enkele voorbeelden te noemen.

Hoewel andere schoolvakken, ook wiskunde, voortdurend aan verandering onderhevig zijn, hebben we wel een bepaald beeld als we het over een vak, bijvoorbeeld wiskunde, hebben. Dat is voor NLT nog niet het geval. Scholen mogen het vak vanaf 2007 aanbieden, als profielkeuzevak binnen NG en NT, of in het vrije deel, maar het examenprogramma en de vakinhouden staan nog geenszins vast, al wordt daar in deze periode (eind maart) zo ongeveer zeven dagen in de week aan gewerkt. Docentenconferenties over NLT zijn zwaar overtekend; e-mails met vragen om informatie, aanbiedingen om mee te werken aan de ontwikkeling en aanmeldingen van scholen die het vak willen aanbieden stromen binnen. Wat is er aan de hand en hoe ver is het met de ontwikkeling van NLT? Welke rol speelt wiskunde? Gaan 'ze' het halen, de magische datum van 1 augustus 2007, waarop er een curriculum moet liggen?

Achtergrond en doelstellingen

De opdracht om NLT te ontwikkelen is door de minister gegeven op advies van de profielcommissie voor de N-profielen, vanuit het gegeven dat met de herinrichting Tweede Fase van 2007 met name het NT-profiel een flink aantal uren inlevert. Tegelijkertijd wil men leerlingen beter laten ervaren wat de praktijk van studie en beroep in de exacte richtingen inhoudt. Dat is uiterst zelden puur natuurkunde of wiskunde of een ander vak uit

de profielen. Schoolvakken zijn geen realistische afspiegeling van wat je na je diploma te wachten staat in beroepsopleiding of wetenschappelijke studie. Nieuwe ontwikkelingen spelen zich af in, maar vooral op de grensvlakken van de exacte vakken; NLT zal daarvan een beeld moeten geven. En uiteraard hoopt en verwacht men dat leerlingen door de ervaringen in dit vak in groteren getale voor een exacte richting gaan kiezen. In veel van die ontwikkelingen is wiskunde belangrijk. Denk bijvoorbeeld aan mathematische biologie, wiskunde in dienstverlening, computerondersteund modelleren, forensische technieken, enzovoorts.

NLT moet dus:

- samenhang tussen bètadisciplines tonen en versterken;
- uitdagend en stimulerend zijn;
- flexibel zijn, opdat bij actuele ontwikkelingen aangesloten kan worden;
- verbredend en verdiepend zijn;
- oriëntatie bieden op studie en beroep in het bètaveld.

Kenmerken van NLT worden dan:

- modulair met keuzemogelijkheden;
- mono-, multi- en interdisciplinair;
- havo meer beroepsgericht, vwo meer onderzoeksgericht;
- inhouden steeds vernieuwd;
- ontwikkeling samen met het onderwijsveld (VO en HO) en buitenschoolse instellingen.

Dat klinkt mooi, maar daarmee heb je nog geen vak waar docenten en leerlingen mee aan de slag kunnen.

Ontwikkeling van een nieuw vak: de praktijk

Om als vak erkend te worden moet er een examenprogramma zijn. Dat examenprogramma moet ergens over gaan, dus er moeten ook inhouden zijn. En het geheel moet tenminste gedurende één examencyclus uitgevoerd en geëvalueerd zijn. Dus vanaf 2007 kunnen scholen NLT op experimentele basis aanbieden, in 2010 wordt het advies over examenprogramma en curriculum aan de minister aangeboden en zal het naar verwachting een regulier vak worden, profielkeuzevak of verplicht. Dat betekent tussen 2007 en 2010 extra aandacht voor de wijze waarop het vak in scholen uitgevoerd wordt, hoe het vrije deel ingevuld wordt, welke keuzes er gemaakt worden voor onderwerpen, alles met het oogmerk een goed geëvalueerd curriculum met examenprogramma aan de minister aan te kunnen bieden.

Ideeen voor domeinen en thema's NLT-havo

domein	mogelijke thema's / modules
A. Vaardigheden	
B. Biosfeer	het systeem aarde; energie, motor van jouw leefomgeving; aerosolen en UV; waterkwaliteit; dynamische atmosfeer
C1. Biomedische technologie	medicijnen op maat; nucleaire geneeskunde; gezondheid in beeld; steun bij waarnemen; handicaps uit de weg; kunstmatige lichaamsdelen; geavanceerd oplappen
C2. Bio-informatica	forensische wetenschap; sleutelen aan je genen
D. Communicatie- en informatietechnologie	robotica; ruimtevaart; veilig met getallen; contact; Big Brother; het leven als spel
E. Wiskunde en technologie	the making of science; grenzen aan de voorspelbaarheid; wiskunde in de dienstverlening; dynamisch modelleren; kleine stapjes, grote gevolgen; ruimte in beeld; meer dan een cijfer; model en werkelijkheid; reken het maar na (of voor)
F. Nieuwe stoffen en materialen	constructies; materialen op bestelling; nano heeft de toekomst; sterker, slimmer, lichter
G. Duurzame ontwikkeling	ecodesign; energie voor later eisen aan het wonen; snel en comfortabel; hou het leefbaar / ruim je rotzooi op; energiebalans bij mens en dier

FIGUUR 1

Bevoegd om NLT te geven zijn teams van eerstegraads docenten wiskunde, biologie, (fysische) geografie, natuurkunde en scheikunde. Bij de ontwikkeling van NLT zijn dan ook vertegenwoordigers van deze vijf vakken betrokken, vanuit de vernieuwingscommissies en vanuit de vakverenigingen. Ze werken in een Stuurgroep NLT samen met vertegenwoordigers van hbo, universiteiten, het bedrijfsleven, het Platform Bèta Techniek en SLO. Daarnaast hebben informatici een adviserende rol bij de ontwikkeling van een aantal modules. NLT heeft als profielkeuzevak op vwo 440 slu en op havo 320 slu. Het vak staat naast en bouwt voort op de monodisciplinaire vakken in de N-profielen. Het examenprogramma zal beschreven worden op het niveau van domeinen en thema's binnen die domeinen. Een voorbeeld van mogelijke domeinen en thema's voor havo ziet u in [figuur 1](#). De inhoud wordt ontwikkeld in modules van in principe 40 slu. Dus uw leerlingen werken aan acht modules in havo en elf in vwo. Er zijn echter keuzemogelijkheden voor de school en, als de school dat wil, ook voor de leerling. Die keuzemogelijkheden zijn als volgt.

- De school vult een deel van het programma (we denken aan 25%) in met modules die ze zelf kiest. Dat kan zelf ontwikkeld lesmateriaal zijn, modules uit het aanbod van de Stuurgroep of materiaal van anderen.

- Het resterende deel wordt gevuld met modules uit verschillende domeinen. Om de gedachten te bepalen: als er voor havo acht domeinen in het examenprogramma opgenomen zijn, kiest de school

uit tenminste vijf verschillende domeinen modules die door de stuurgroep aangewezen zijn als modules voor NLT. Dit om de noodzakelijke spreiding te waarborgen. Er zal ook binnen elk domein een keuze aan modules zijn.

Binnen NLT hebben we te maken met een heterogene groep leerlingen, zowel in havo als vwo. We dienen rekening te houden met verschillen in vakkenpakket tussen NT- en NG-leerlingen. Wiskunde A of B, wel of geen biologie, wel of geen natuurkunde. En we moeten rekening houden met de zich ontwikkelende kennis en vaardigheden van leerlingen: een leerling in 4-havo heeft andere bagage dan in 5-havo. Het programma voor havo wordt met voorrang ontwikkeld, dat wil zeggen dat er wat meer modules voor havo in de eerste serie modules ontwikkeld worden dan voor vwo. Het programma voor havo zal meer gericht zijn op beroepsopleidingen; modules worden zoveel mogelijk door scholen samen met hbo ontwikkeld. Voor vwo is de insteek meer onderzoeksgericht en wordt samengewerkt met universiteiten. Een aantal universiteiten is al bezig (samen met scholen) met onderwerpen waarvan een flink deel geschikt is om tot NLT-module ontwikkeld te worden. Waar mogelijk wordt het bedrijfsleven bij de ontwikkeling betrokken.

Er moeten dus veel verschillende modules worden ontwikkeld, maar ook moeten er binnen modules differentiatiemogelijkheden zijn, zowel wat betreft het niveau van de leerling als wat betreft de mogelijkheden van de school.

Er zal in ieder geval een basismodule ontwikkeld worden. Wat daarin opgenomen wordt aan

wiskundige onderwerpen is nog aan discussie onderhevig.

Het uitvoerende werk (de ontwikkeling van het examenprogramma en met name de modules, de samenwerking met scholen en allerlei andere zaken) wordt gedaan door de mensen van het Ontwikkelpunt-NLT. De kern bestaat uit drie part-timers: een docent (Marten Hazelaar, de Populier), een docent-ontwikkelaar (Berenice Michels, SLO en Dorenweerd College) en een docent-didacticus (Hannah Wielenga, Hogeschool Utrecht).

De ontwikkeling van modules gebeurt samen met scholen, docenten en zo mogelijk hogescholen en universiteiten. Er is al een aantal enthousiaste docenten bezig met allerlei pilots, gesteund door het Platform Bèta Techniek. Een deel van die pilots wordt verder ontwikkeld tot module NLT. Een ander deel zal wellicht gebruikt worden om het schooleigen deel van het programma in te vullen. Wat er niet komt is een lesmethode in boekvorm. Publicatie van modules in digitale en papieren vorm komt veel beter tegemoet aan de eisen van aansluiten bij de actualiteit en de daarvoor noodzakelijke flexibiliteit.

Wiskunde en NLT

Wiskunde zal op verschillende manieren in NLT betrokken zijn.

In een aantal modules wordt wiskunde gebruikt. Een voorbeeld van een mogelijk domein voor vwo is *Wiskunde in wetenschap en technologie*. In dat domein zou dan een basis gelegd moeten worden van wiskundige kennis en vaardigheden die waar relevant in de andere domeinen kan worden toegepast. Ook ervaren leerlingen hierin wat de rol van de wiskunde is in natuurwetenschap en technologie. Voor mogelijke thema's binnen dit domein zou men kunnen denken aan:

- kleine stapjes, grote gevolgen,
- ruimte in beeld,
- meer dan een cijfer,
- model en werkelijkheid.

Wat betreft wiskundige onderwerpen kan men hierbij denken aan: differentiëren, integreren, meetkunde, vectoralgebra, getaltheorie, modellen van de werkelijkheid.

Zo'n domein bevat dus meerdere modules, op verschillend niveau, die afhankelijk van de inhoud in vwo 4, 5 of 6 gekozen kunnen worden.

Wat betreft havo zou men kunnen denken aan een domein *Wiskunde en technologie*. De nadruk zou dan meer liggen op ontwerpen, ontwerptools en productontwikkeling. Voorbeelden van thema's hierin zijn:

- the making of science,
- grenzen aan de voorspelbaarheid,
- wiskunde in de dienstverlening,
- dynamisch modelleren.

Wiskundige onderwerpen die voor dit domein genoemd worden, zijn: differentiëren, periodieke

verschijnselen, vectormmeetkunde, modelleren, statistische verschijnselen.

De modules in deze voorbeelden die bestemd zijn voor vwo 5 of 6 of havo 5 kunnen verdiepende modules voor wiskunde zijn, zoals er ook enkele verdiepende modules voor de andere vakken zullen zijn. Het is echter niet de bedoeling dat het programma met voornamelijk monodisciplinaire verdiepende modules gevuld wordt. Het grootste deel van het curriculum wordt gevuld met interdisciplinaire of multidisciplinaire modules. Andere voorbeelden van thema's waarin wiskunde functioneel is: Krachten op afstand, Kunstmatige intelligentie, Statistiek voor het leven. Ook zijn er plannen om een of enkele modules te ontwikkelen die zowel voor wiskunde D als voor NLT gekozen kunnen worden, bijvoorbeeld Dynamische modellen.

Wiskundedocenten hebben dus belang bij NLT. Het biedt uitgelezen kansen:

- de kans om leerlingen en collega's van andere vakken te laten ervaren waarom wiskunde belangrijk is;
- de kans om zelf te ontdekken waar wiskunde zoal voor gebruikt wordt en welke wiskunde gebruikt wordt in beroepen en bij allerlei studies;
- de kans om eindelijk met collega's van andere vakken op voet van gelijkheid samen te werken: je hebt elkaar nodig;
- de kans om met hbo of universiteit samen iets voor en met leerlingen te doen.

Helaas zijn bij die ontwikkeling nog te weinig docenten wiskunde betrokken. Jammer, want NLT biedt een unieke kans om over de grenzen van je eigen vak te kijken, samen te werken met collega's en bij een belangrijke ontwikkeling betrokken te zijn. Maar dan moeten wiskundedocenten zich wel met NLT gaan bemoeien.

De in dit artikel genoemde voorbeelden zijn voorlopig, op het moment van schrijven wordt er intensief over gediscussieerd. Bovendien komen heel veel zaken in dit artikel niet aan bod. Hoe modules er uit gaan zien, voorbeelden van module-inhoud, randvoorwaarden voor scholen om mee te doen, voorlopige inhoud van de examenprogramma's, etc.

U kunt veel informatie vinden op onze website www.betavak-nlt.nl. Het Ontwikkelpunt is te bereiken via info@betavak-nlt.nl, voor overige informatie, voor aanmelding als ontwikkelschool en/of examenschool, voor aanmelding als auteur en wat u verder zou willen melden wat betreft NLT.

Over de auteur

Jenneke Krüger is secretaris van de stuurgroep NLT en projectleider van het project Ontwikkeling en implementatie NLT.

E-mailadres: j.kruger@slo.nl

LET'S PLAY DARTS

Een winnende inzending voor de Wiskunde Scholen Prijs 2005 in de categorie basisvorming

[Dion Oolthuis]

Over de Wiskunde Scholen Prijs

De Wiskunde Scholen Prijs^[1] is ontstaan uit het WisKids-project, een gezamenlijk initiatief van wiskundig Nederland. De Wiskunde Scholen Prijs wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut, met steun van het ministerie van OCenW.

Uit het juryrapport

De kracht van deze opdracht ligt in de aansluiting bij de eigen belevingswereld van de leerlingen: darts is een cool, aansprekend onderwerp. Het is een rijke lessenserie, goed uitgewerkt, met duidelijke leerdoelen. Een motiverende en betekenisvolle opdracht, die ruimte biedt voor eigen ideeën: leerlingen mogen immers hun eigen systeem bedenken voor de puntentelling. Daarna wordt het systeem ook echt in een toernooi uitgetoetst. Het is duidelijk waar je het voor doet.

Gezellige drukte

Bij binnenkomst van het lokaal valt de onrust direct op. Geen sprake van een ingetogen werksfeer. Geen leerlingen die op gedempte toon met elkaar overleggen, maar een gezellige drukte waarbij niet direct duidelijk is wat er gebeurt. Tafels en stoelen zijn aan de kant van het lokaal geschoven en hebben plaats gemaakt voor speelvelden die met een afzetlint gemarkeerd zijn. Enkele leerlingen zijn druk met het gooien van dartpijlen, anderen schrijven op grote vellen of zijn met hun rekenmachine in de weer. Sommige leerlingen kijken toe.

Op het eerste gezicht lijkt het een mentoractiviteit, maar bij nader inzien blijkt het een wiskundeles te zijn. Het is een darttoernooi dat de afsluiting vormt van een project met als titel: *Let's play darts*.

Wederzijdse afhankelijkheid

Het toernooi is het eindproduct van een vijfdelige lessenserie waarin de leerlingen in groepsverband verschillende opdrachten hebben uitgewerkt. Voordat de groepen hun darttoernooi in praktijk brengen, zijn er vier voorbereidingslessen geweest volgens de principes van het samenwerkend leren. Samenwerkend leren, actief leren, ontwikkelingsgericht leren of coöperatief leren zijn voorbeelden van onderwijsvernieuwingen die, gezien de ontwikkelingen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs, meer en meer in de belangstelling staan. Alle genoemde stromingen maken gebruik van elementen uit het sociaal constructivisme. Het gaat om opvattingen over het leren die wat betreft de uitvoering één ding met elkaar gemeen hebben: het is geen onderwijs dat gericht is op de ontwikkeling van de individuele leerling, maar een filosofie ter bevordering van het samenwerkend leren in een sociaal interactieve omgeving^[2].

Deze manier van werken wijkt nogal af van bestaande samenwerkingsvormen in het wiskundeonderwijs. In vergelijking met 'gewoon' groepswork zoals je dat wel tegenkomt bij Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten en Praktische Opdrachten, ligt bij samenwerkend leren de nadruk op de wederzijdse afhankelijkheid. Alle groepsleden hebben een directe verantwoordelijkheid bij de voorbereiding en uitvoering van het project. Er is veel ruimte voor overleg. Slagen de leerlingen niet in een goede uitvoering van de opdracht, dan heeft dat directe gevolgen voor het verloop van de samenwerking en het uiteindelijke resultaat. De opdrachten bouwen op elkaar voort en zijn dus voorwaardelijk voor het vervolg. Valt de keuze op een speltype met bijvoorbeeld 10 darts, dan heeft dat onmiddellijk zijn effect op de uitwerking van de puntentelling. Daarnaast is het project zo opgezet dat aan het begin van elke les een terugkoppeling plaatsvindt. Daarin vertellen de groepsleden elkaar wat de stand van zaken is. Er kunnen vragen en opmerkingen gemaakt worden die mogelijk tot een bijstelling van de plannen leiden.

Darten is in!

Darts als onderwerp voor een lessenserie ligt voor de hand. Darten is in! Veel leerlingen spelen regelmatig darts en er is veel belangstelling voor dartwedstrijden in de buurt of op tv. Met andere woorden: de themakeuze sluit nauw aan bij de ervaringswereld van de leerlingen.

Ook bij de uitvoering blijkt dat darten populair is. Het verzamelen van de benodigde spullen voor het toernooi zelf is dan ook geen enkel probleem. Veel leerlingen hebben thuis wel een dartbord en een enkeling bezit zelfs semi-professionele darts. De doelgroep van het project waren twee bb-klassen uit het 2e jaar vmbo, één van 17 en één van 15 leerlingen. Na een introductie van het project en de samenstelling van de groepen was er in de lessen ruim aandacht voor de kenmerken van het samenwerkend leren. Er werden niet alleen duidelijke afspraken gemaakt over de manier van samenwerking, maar ook wat betreft de eisen waaraan het verslag en het toernooi moesten voldoen. Het verslag dat na afloop van het project door iedere groep afzonderlijk ingeleverd werd, vormde de schriftelijke weerslag van alle activiteiten vooraf en tijdens het toernooi zelf. Dit verslag werd door mij beoordeeld.

Het project

Door in concrete opdrachten per les aan te geven wat er moest gebeuren, was het voor alle groepsleden duidelijk wat er van hen werd verwacht en vooral ook wanneer. De verdeling van taken/opdrachten was een verantwoordelijkheid van de groepen zelf. Dit waren de basisopdrachten:

- Zoek op internet de spelregels/spelwijze van het officiële 501-puntensysteem van het dartspel en koppel dat terug naar de rest van de groep.
- Bedenk op basis van gevonden informatie een nieuwe vorm van een dartspel en werk dat uit zonder het bestaande 501-systeem of een variant daarvan te kopiëren.
- Geef aan hoe de puntentelling van het door jullie verzonden dartspel verloopt. Maak aan de hand van die puntentelling een scoreformulier.
- Ontwikkel voor een andere groep uit de klas een wedstrijdschema.

Extra opdrachten liggen klaar voor groepsleden die niet verder kunnen of zelfs met hun opdracht klaar zijn. Alle uitwerkingen samen vormen het verslag. De volgorde van de opdrachten is niet geheel willekeurig. Er zit een opbouw in waarbij de groepen stapje voor stapje steeds verder naar het eindproduct toewerken. Bovendien vormt elke opdracht een onmisbare schakel in de opbouw van het darttoernooi. Elke opdracht is essentieel en bovendien zodanig van opzet dat de groepen gedwongen worden om steeds met elkaar te overleggen, besluiten te nemen en keuzes te maken. Dat het in de praktijk niet altijd ging zoals ik verwacht had, was niet zo verwonderlijk.

Evaluatie

De basisopdrachten waren schriftelijk en dusdanig van opzet dat met gerichte vragen elke groep tot het gewenste resultaat moest kunnen komen. In de praktijk echter bleek dit niet helemaal zo te werken. Na de introductie gingen de groepen bijzonder gemotiveerd aan de slag. Het opzoeken van de nodige informatie was, zeker door de vermelding van enkele sites, geen enkel probleem. De terugkoppeling van de gevonden informatie verliep niet altijd vlekkeloos. Het verhaal was of te ondoorzichtig of er werd slecht geluisterd. Het was dan ook niet verwonderlijk dat het bedenken van een nieuwe spelvariant in bepaalde groepen minder soepel verliep. Dominante leerlingen namen direct het voortouw met als gevolg dat de rest zwijgzaam instemde. De nieuwe spelvormen waren in bijna alle groepen afgeslankte kopieën van het bestaande 501-systeem. Veelal was de variatie gezocht in kleine details, bijvoorbeeld met twee in plaats van drie darts gooien.

Vooraf de laatste twee opdrachten waren erg lastig. Bij de uitwerking bleek dat niet alle groepen voldoende hadden nagedacht over de consequenties van bepaalde spelregels. Niet zelden werden in deze fase alsnog, zonder ruggespraak, spelregels gewoon aangepast. Opvallend was dat bepaalde extra opdrachten veel uitvoeriger waren aangepakt dan oorspronkelijk de bedoeling was. 'Ontwerp een fantasie-dartbord' bleek een uitdagende opdracht te zijn. Soms zaten hiervan meerdere voorbeelden in het verslag.

De verslagen zagen er op het eerste oog verzorgd uit. Soms geschreven, maar meestal in *Word* uitgewerkt en voorzien van illustraties en een mooie kافت. Het toernooi op zich verliep voorspoedig.

Achteraf blijkt dat ik nog meer duidelijkheid had moeten geven over het door mij verwachte eindresultaat. De mate van samenwerking en de inhoud van de werkstukken waren toch enigszins teleurstellend.

Ik moest gedurende het project veel meer ondersteuning bieden dan ik in eerste instantie had gedacht.

Samenwerkend leren

Het project is gestoeld op de uitgangspunten van het samenwerkend leren. De belangrijkste kenmerken zijn:

- Positieve wederzijdse afhankelijkheid. Als groep ben je samen verantwoordelijk voor het resultaat en elk groepslid afzonderlijk is belangrijk bij de uitwerking van de opdrachten.
- Individuele aanspreekbaarheid, en:
- directe interactie. Iedereen heeft een taak en kan door de anderen hierop worden aangesproken. Komt één groepslid zijn of haar verplichting niet na, dan heeft dat direct gevolgen voor het toernooi.
- Sociale vaardigheid. Het project is zo opgezet dat



elke les minstens één overlegmoment bevat. Door regelmatig met elkaar te overleggen blijf je goed op de hoogte van wat iedereen doet en kun je als groep vroegtijdig bijsturen door middel van onderling overleg, op basis van gelijkwaardigheid, en kun je ondanks ontevredenheid over het product toch feedback geven, waardering naar elkaar kenbaar maken etc.

Ik merkte dat deze 'nieuwe manier van samenwerken' niet simpelweg eventjes in het lesprogramma opgenomen kan worden. Als je samenwerkend leren effectief als leerstrategie wilt inzetten, dan is een enkel project bij lange na niet voldoende, maar moet het een regelmatig wederkerend didactisch principe in de school zijn. Deze leerlingen zijn niet of minder gewend om voortdurend ideeën en oplossingen met elkaar te bespreken. Ze werken in groepen vaak *naast* elkaar in plaats van *met* elkaar. Het verdelen van de taken verloopt niet altijd even democratisch. De hiërarchie in de klas of in de groep speelt hierbij een grote rol. Waren de taken eenmaal verdeeld, dan ging ieder voor zichzelf aan het werk en vond er nauwelijks ruggespraak plaats. Pas bij de afronding kwam het resultaat op tafel en werd erover gesproken. Vaak betrof het kritiek: het was goed of niet goed en moest dan direct de prullenbak in. Ik moest elke les bij de groepen aandringen om bij elkaar te gaan zitten en te overleggen; het ging niet vanzelf. Dit zijn processen die tijd nodig hebben. Waarschijnlijk is het een kwestie van gewenning; indien de leerlingen vaker op basis van wederzijdse afhankelijkheid samenwerken zal het proces van individuele aanspreekbaarheid beter verlopen, zullen de sociale vaardigheden toenemen en zal het uiteindelijke resultaat beter van kwaliteit zijn.

Pluspunten

Ondanks mijn kanttekeningen heeft dit project ook hele duidelijke pluspunten. Voor mij is het hanteren van voor met name de bb-leerling doorgaans moeilijke en minder interessante wiskundetheorie in een betekenisvolle context zeer functioneel. Het is een welkome afwisseling waarbij leerlingen nauwelijks beseffen dat ze volop met het vak wiskunde bezig zijn. Deze manier van samenwerken prikkelt de leerlingen enorm en ze kunnen veel van hun creativiteit kwijt. Zonder het expliciet te benoemen gebruiken ze vaardigheden als systematisch tellen, statistiek, schematiseren en niet in de laatste plaats argumenteren en redeneren. Het regelmatig met elkaar in discussie gaan over gemaakte keuzes bevordert deze vaardigheden enorm, want hoe overtuig jij een medeleerling dat jouw puntentelling goed doordacht is. En misschien wel het belangrijkste: wiskunde blijkt ook heel leuk te kunnen zijn!

De volgende aandachtspunten zijn voor mij, bij een eventuele herhaling, van belang:

- Vier voorbereidingslessen is erg veel. Om tijdswinst te boeken kan de eerste opdracht ook vervangen worden door een korte uitleg van het dartsspel door één van de leerlingen uit de klas. In elke klas is er altijd wel iemand te vinden die verstand heeft van darts.
- Het niveau van de groep en het niveau van de opdrachten moeten beter op elkaar afgestemd worden. Bepaalde opdrachten hebben een te hoog abstractiegehalte. Dit is voor bb/kb-leerlingen van wezenlijk belang.
- Bij de basisopdrachten, zoals het ontwerpen van een wedstrijdschema of scoreformulier, ook gebruik gaan maken van concrete voorbeelden.
- Een beoordelingsschema in de vorm van een *rubric*^[3] hanteren zodat iedereen weet wat de eisen zijn en hoe de beoordeling in elkaar zit.
- Het verschil tussen basis- en extra opdrachten meer expliciet maken en verduidelijken wat dat betekent voor het uiteindelijke resultaat
- Eventueel één les toevoegen zodat de groepen ook de mogelijkheid krijgen hun ideeën vooraf aan de praktijk te toetsen en eventueel aan te passen.

Met wat kleine aanpassingen kan dit project in het tweede jaar van de brugklasperiode gebruikt worden ongeacht het type onderwijs. Ik verwacht juist dat de door mij ondervonden problemen in KB, GT en havo/vwo niet of nauwelijks een rol zullen spelen.

Projecten als *Let's play darts* moeten mijns inziens een uitzondering op de dagelijkse praktijk van lesgeven vormen. Dat maakt de kans op succes aanzienlijk groter, want de kracht van dit en andere projecten ligt in de afwisseling van werkvorm én onderwerp.

Eén ding staat voor mij vast. Dit project is, zeker met de nodige aanpassingen, voor herhaling vatbaar. De uitdaging voor mij ligt in de ontwikkeling van meer wiskundige projecten op basis van deze onderwijskundige ontwikkeling.

Noten

[1] Zie ook www.wiskundescholenprijs.nl

[2] Zie bijvoorbeeld <http://ict.aps.nl/krachtigleren>

[3] Zie voor meer informatie over rubrics bijvoorbeeld het artikel van Lambrecht Spijkerboer en Patricia Straatman in *Euclides* 79-6 (april 2004).

Over de auteur

Dion Oolthuis is 16 jaar werkzaam geweest in het basisonderwijs. Sinds 5 jaar werkt hij als docent wiskunde op het Candea College in Duiven. Als auteur vmbo bb/kb schrijft hij mee aan de methode *MATRIX*.

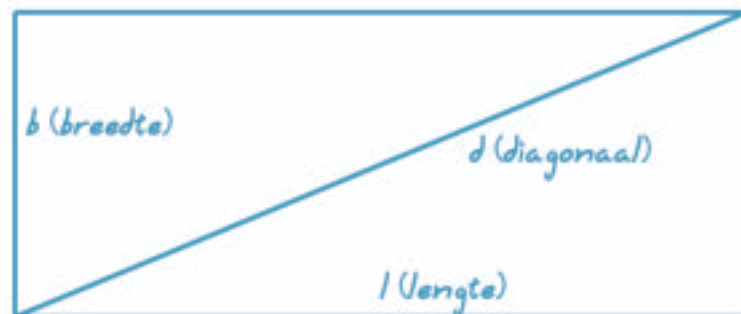
Voor algemene vragen naar aanleiding van dit artikel of voor het verkrijgen van een uitgewerkt lespakket kunt u contact met hem opnemen.

E-mailadres: D.Oolthuis@Candea.nl

DE STELLING VAN PYTHAGORAS VOOR DE BRUGKLAS OF GROEP 8

... als inleiding tot wortels, kwadraten en rechthoekige driehoeken.

[Yvonne Killian]



De stelling van Pythagoras wordt in het tweede jaar niet altijd enthousiast ontvangen. Kan het ook anders? Een poging. Nog even zonder bewijs.

Als je 'de stelling van Pythagoras' op het bord schrijft en vraagt wie er wel eens van deze stelling gehoord heeft, krijg je, zeker op het vwo, gegarandeerd reacties. Mooi zo. Eerst nog even vertellen wat een stelling is en wie Pythagoras was en dan ... daar komt-ie.

Eerst een rechthoek op het bord tekenen. Vijf bij twaalf. Bij de zijden geen maten zetten, maar l (lengte) en b (breedte). En onder de rechthoek komen de formules $l + b + l + b = \text{omtrek}$ en $l \times b = \text{oppervlakte}$. Dat weten de meesten nog wel. Dan komt het: er is nog zo'n formule, en dat is dus de formule die Pythagoras bedacht heeft en die gaat (zie de figuur):

$$l \times l + b \times b = d \times d$$

Wat is die d dan? Nou, dat is de diagonaal. Een mooi nieuw woord om op het bord te schrijven. Een definitie is niet nodig, een diagonaal tekenen - met de tekst d (diagonaal) erbij - is duidelijk genoeg.

En nu controleren of het klopt. Eerst de l , de b en de d op het bord meten, dan de waarden in de formule invullen. $12 \times 12 + 5 \times 5 = 13 \times 13$? opschrijven en de kinderen laten controleren of het klopt. Dan ze allemaal zelf een rechthoek laten tekenen, nu van 12 bij 16, waarvan ze zelf de diagonaal moeten meten. $12 \times 12 + 16 \times 16 = \dots$ opschrijven, ze de diagonaal laten meten, het eens worden, 20×20 ? invullen en ze nogmaals laten controleren of het klopt.

En nu zomaar een rechthoek op het bord. En meten. En rekenen. En nu komt het moeilijkste: er komen protesten, want het komt niet precies uit. In hoeverre je dan eerlijk uitlegt hoe dat komt of een halfbakken smoes vertelt, hangt natuurlijk van de

- $l + b + l + b = \text{omtrek}$
- $l \times b = \text{oppervlakte}$
- $l \times l + b \times b = d \times d$ (stelling van Pythagoras)

groep af. Maar 'hoe preciezer je tekent, hoe dichter je in de buurt komt' is altijd een nuttige boodschap. Nu moeten ze het zelf proberen. Met een rechthoek van 10 bij 20 ruitjes. Wie komt voor $d \times d$ het dichtst bij de 500, ofwel wie tekent en meet er het nauwkeurigst?

Gaat het goed, dan kun je vragen of je ook zonder tekening - en dus zonder te meten - $d \times d$ zou kunnen vinden als je l en b weet. Of wat $l \times l$ is als je b en d weet, of $b \times b$ als je l en d weet.

En hoe moet je d zelf berekenen? Als $d \times d$ 100 is, of 25 of zo, dan lukt dat nog wel, maar wat als d 500 is, zoals ze zojuist vonden? Daarvoor zit er op je rekenmachine een speciaal 'Pythagorasknopje', te herkennen aan een tekenetje dat wortel heet en dat een klein beetje op een worteltje lijkt. Probeer maar. En nu allemaal een zelfverzonnen rechthoek tekenen, nog zonder diagonaal, eerst $d \times d$ en dan d uitrekenen, dan de diagonaal tekenen, meten en ... controleren!

O ja, en nu we toch met de rekenmachine bezig zijn: als je het veel werk vindt om bijvoorbeeld $12,4 \times 12,4$ in te tikken, is er ook nog het kwadraatknopje.

Tot slot nog één definitie, voor op het bord: Als je een rechthoek langs de diagonaal doormidden knipt, krijg je twee rechthoekige driehoeken.

Over de auteur

Yvonne Killian is wiskundeleraar aan het Stedelijk Gymnasium Johan van Oldenbarnevelt te Amersfoort.

E-mailadres: yvonne.killian@planet.nl

VRAAGSTUKKEN TER OPLOSSING

De nrs 1565–1574 zijn van het eindexamen vmo 1966. Vooral van de opgaven goniometrie en analytische meetkunde was de typografische verzorging slecht: in nr 1569 werd $\sqrt{3}$ op twee verschillende wijzen afgedrukt, hetgeen bij sommige examinandi tot verwarring heeft geleid, was het letterteken onder f een kleine letter o in plaats van een nul en stond het symbool d cursief in plaats van rechtop; in nr 1573 werden de coördinaten van het punt $(2; 2)$ gegeven alsof tussen de haakjes het getal $2\frac{1}{5}$ stond; in nr 1574 ontbrak in de bundelvergelijking de letter y . Tenslotte bevatte het opschrift van een der examenblaadjes nog een drukfout. – Deze aangelegenheid was het onderwerp van schriftelijke vragen, die op 9 mei 1966 door het lid van de Tweede Kamer der Staten-Generaal J. A. van Bennekom (A.R.) aan de Regering zijn gesteld.

Evenals in voorgaande jaren heeft de redactie de examenvraagstukken niet in de rubriek van de hoge nummers opgenomen dan na verbetering van de tekst op enkele ondergeschikte punten.

1569. De functies f en g zijn voor $0 \leq x \leq 2\pi$ gedefinieerd door

$$f(x) = \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x + c,$$

waarin c constant is, en

$$g(x) = x.$$

- a. Bereken c , als gegeven is dat $\int_0^{\pi} f(x) dx = 3\sqrt{3}$ is.
- b. Voor welke waarden van c heeft de vergelijking $f(x) = 0$ geen wortels?
- c. Voor welke waarden van c raken de grafieken van de functies f en g elkaar?

1573. Gegeven is de parabool $y^2 = 2x$.

- a. Voor welke punten van de lijn $x - y + 2 = 0$ geldt, dat de poollijn van P ten opzichte van deze parabool loodrecht staat op de lijn OP ?
- b. Bepaal de verzameling van de toppen van de parabolen, die de gegeven parabool in het punt $(2; 2)$ loodrecht snijden en waarvan de symmetrie-as loodrecht op de y -as staat.

1574. Gegeven is de bundel cirkels

$$x^2 + y^2 - 16 - 2\lambda(x - 4) = 0.$$

- a. Bewijs, dat de bundel één basispunt heeft.
- b. De centraal en de machtslijn van de cirkel $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$ en een exemplaar van de bundel snijden elkaar in S . Bepaal de verzameling van de punten S .

Eindexamenopgaven vmo 1966, als vraagstuk opgenomen in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 53 (1965-1966), blz. 278-280; met een kritische noot van de redactie.



FOTO 1 Jan van de Craats met jury
FOTO 2 Twee quizteams met volle aandacht



FOTO 3 Han de Paepe en Ben Scholten
ontvangen de scholenprijs

SCHOLENPRIJS NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

[Freek van Megen]



FOTO 4 De docenten van de winnaars: Han de Paepe, Ben Scholten en de winnaars (vlnr) Frank Roumen, Manuel Kerssemakers, Tim Reijnders, Rogier Huurman en Guido Senden.

Op 30 maart werd op het Stedelijk Gymnasium Nijmegen de scholenprijs van de eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade uitgereikt. De prijs wordt toegekend aan de school met de hoogste somscore van de vijf beste leerlingen.

Het Stedelijk Gymnasium bleef met 155 van de 180 te behalen punten de winnaar van vorig jaar, het St. Ignatiusgymnasium, nipt voor.

Volgens de betrokken docenten van het Stedelijk Gymnasium, zeer aangenaam verrast door dit aansprekend resultaat, komt alle eer de vijf leerlingen toe: 'Er is niet speciaal voor getraind, al moet gezegd worden dat wij op school vanaf klas 1 proberen juist ook de betere leerling ruimte te bieden middels uitdagende opdrachten en spellen en wij bij vele wedstrijden (Kangoeroe, RU-wiskundewedstrijd, Olympiade) de gelegenheid bieden deel te nemen.'

Het Stedelijk Gymnasium, met ongeveer 1450 leerlingen een van 's lands grootste, heeft veel leerlingen met een N-profiel. Van de acht vijfde klassen zijn er vijf NG/NT-samengesteld. Het is alle leerlingen toegestaan een vak in een uitgebreidere versie te volgen. Zo zijn er ongeveer zeventig wiskunde B12-leerlingen uit klas 5 die allen waren vrijgeroosterd om met de prijswinnaars, deelnemers, docenten, genodigden en de bestuursleden van de stichting in een ongedwongen doch serieuze bijeenkomst van de prijsuitreiking te genieten. Na een korte inleiding door de secretaris van de stichting, Melanie Steentjes, wist de scheidend voorzitter, professor Jan van de Craats, het publiek en de kandidaten te boeien met een Grote Wiskunde Quiz. Vier teams uit klas 5 namen het tegen elkaar op met meerkeuzevragen waarbij snelheid en precisie (een fout antwoord levert puntenaftrek) een grote rol speelden. Een argeloze toeschouwer zou de indruk gekregen kunnen hebben dat het met de rekenvaardigheid van de huidige middelbare scholier dramatisch

is gesteld (op eenvoudige vragen werd diverse malen het verkeerde antwoord gegeven), natuurlijk veroorzaakt door de vermaledijde grafische rekenmachine. Maar, zoals een leerling terecht opmerkte: 'Ik kan dat heus wel, maar niet zó snel', met deze *deGRneratie* valt het althans op het stedelijk gym mee.

Na dit spannend half uur werd onder luid applaus de wisselbeker overhandigd aan Han de Paepe, als wiskundedocent al meer dan 30 jaar aan school verbonden.

Vervolgens kon Jan van de Craats de vijf winnaars, Frank Roumen, Manuel Kerssemakers, Tim Reijnders, Rogier Huurman en Guido Senden in het zonnetje zetten met mooie woorden, een oorkonde en elk een privé beker. Frank en Guido zijn voornemens wiskunde te gaan studeren, Manuel richt zich op informatica en ook Tim en Rogier komen vast en zeker in een exacte hoek terecht. Overigens werd Tim vorig jaar al door de olympiade-coach Jan Donkers gescout en neemt hij momenteel deel aan de trainingsgroep op weg naar de internationale olympiade 2006.

In informelere sfeer werd met borrel en noot door de winnaars, docenten en het bestuur van de stichting een feestelijke middag besloten. Tot volgend jaar in Nijmegen?!

Over de auteur

Freek van Megen is voorzitter van de sectie wiskunde van het Stedelijk Gymnasium Nijmegen.

E-mailadres: f.van.megen@stedelijkgymnijnijmegen.nl

DE INTEGRAAL, DAT IS DE OPPERVLAKE TOCH?

[Nellie Verhoef]

Inleiding

Wat gaat er om in de hoofden van leerlingen als ze bezig zijn met wiskunde? Waar denken zij direct aan, wat laten ze liggen, welke verbanden leggen ze spontaan?

Climmy Hoksbergen deed in haar opleiding een poging om daar meer zicht op te krijgen binnen haar vakdidactische opdracht. Haar aandacht richtte zich op *transfer*, het kunnen toepassen van bestaande kennis in nieuwe contexten of problemen. Specifiek zocht zij antwoord op de vraag: 'Welke is in het geval van het begrip integraal de relatie tussen succesvolle transfer en de cognitieve structuur van een leerling?'

Een cognitieve structuur is een soort spinnenweb. Elk knooppunt (cognitieve eenheid) bevat een hiërarchische structuur waarin de hoofdzaken boven de details staan.

Climmy legde vijf vwo-5 leerlingen een opgave voor en ging afzonderlijk hierover met hen in gesprek. De leerlingen hadden de betreffende opgave niet eerder gezien en ook niet eerder zo'n gesprek gevoerd. Ze moesten zelf een aantal lastige stappen zetten, waarbij creatief wiskundig denken een vereiste was. Dit artikel gaat - theoretisch onderbouwd - op deze vraag in aan de hand van twee exemplarische voorbeelden van Climmy's gesprekken, haar eigen overwegingen en een reflectie daarop.

De vraag naar de booglengte

Van de functie $y = x^2$ wordt op het interval $[0,1]$ de booglengte gevraagd; zie figuur 1 (Climmy koos er zelf voor om dx en dy te gebruiken in plaats van Δx en Δy).

Hierna volgen delen van de letterlijk door Climmy genoteerde impressies van de gesprekken met Karin en met Lotte.

Het gesprek van Climmy met Karin

Ik (C) vraag Karin (K) eerst een schatting te maken. Ze zegt direct dat het iets meer zal zijn dan $\sqrt{2}$. Vervolgens zeg ik dat we dit precies willen gaan berekenen. 'Dat moet dan vast met een integraal', zegt zij.

C: Wat is een integraal?

K: Daar bereken je een oppervlak mee.

C: Alleen oppervlakken?

K: Ehm... Oh nee, ook inhouden!

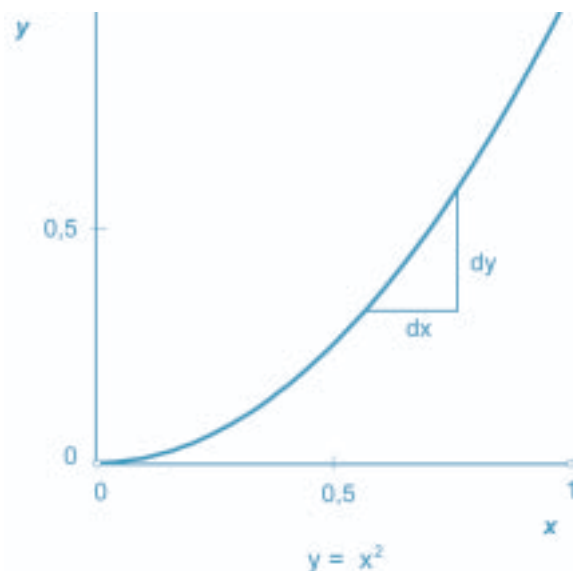
C: Wat is het dan?

K: (*stilte*) Nee, geen idee.

C: Kun je een oppervlakte schatten zonder een integraal te gebruiken?

K: Oh ja! Dat deed je met kleine stukjes!

Ik teken een aantal kleine rechthoekjes in de grafiek van $y = x^2$. Karin toont duidelijk dat ze dit herkent. Ik vraag of ze de link kan maken naar een integraal. Ze denkt even na, tekent voorzichtig een stukje grafiek en maakt daar zelf een driehoekje van! Wat een stap!



FIGUUR 1

Ik vraag naar een naam. Zonder twijfel noemt ze dx en dy . Ze zegt uit zichzelf dat het stukje grafiek bij benadering recht is, en dat je nu dus de stelling van Pythagoras kunt gebruiken.

De volgende stap is te groot voor haar. Ik wijs haar nogmaals op het driehoekje met dx en dy erbij, en vraag of haar dat ergens aan doet denken. Vrijwel direct zegt ze: 'De helling!'

C: Wat is de helling dan?

K: dy gedeeld door dx .

C: Hoe kun je dat gebruiken?

K: (*stilte*) Ehm... Nee, ik zie het niet.

C: Wat was je aan het doen?

K: We willen een integraal maken van al die kleine stukjes lijn, en die hebben een lengte van de wortel uit dx^2 plus dy^2 . Maar moet je daar dan nog dx achter zetten eigenlijk? ... Oh nee, natuurlijk niet. Ehm... (*stilte*) Oh! De dy is de helling maal dx ! Dus dan kan dy uit die wortel!

C: Fantastisch! Maar wat is de helling dan?

K: Dat is, ehm... ja! $2x$!

Ik vraag vervolgens om een algemene regel te geven voor het berekenen van de lengte van een grafiek. Ze gaat erg ver terug in de gezette stappen. Ze ziet niet in dat de term $4x^2$ gelijk is aan $f'(x)^2$.

K: Die dy verandert niet, en die dx natuurlijk ook niet. Alleen de helling hangt af van de grafiek. Dus die $2x$ daar wordt dan $f'(x)$.

Vervolgens zet ze alle stappen nog een keer, maar dan met $f'(x)$ in plaats van $2x$. Zo komt ze er uiteindelijk ook. Wanneer ze de algemene formule gevonden heeft, gaat ze achterover zitten en zegt: 'Goh! Wat leuk zeg!'

Het gesprek van Climmy met Lotte

Ook Lotte (L) vraag ik of ze ideeën heeft om het probleem aan te pakken. Lotte begint gelijk met een integraal. Maar ze wil er een oppervlakte mee gaan berekenen.

L: Ja, ik weet echt niet hoor, maar misschien... Een integraal opstellen of zo, om de oppervlakte eronder te berekenen en dan ook van dit oppervlak (*wijst het hele 'vierkantje' aan tussen x-as, y-as en punt (1,1)*) en ja, dan heb je... eh..., daar heb je niets aan. C: Nee.

L: Er is ook een paragraaf, en dan ga je die grafiek omwentelen... Misschien... Nee, daar heb je ook niks aan.

C: Wat is een integraal?

L: Die berekent een oppervlakte, tussen de grafiek en de x -as bijvoorbeeld.

C: Een integraal is altijd een oppervlakte?

L: Ja volgens mij wel.

C: En inhoud dan?

L: Oh ja.

Lotte gaat tekenen. Ze merkt al snel dat driehoekjes niet goed lukken. Ze maakt nu rechthoekjes, met een klein driehoekje bovenop elk rechthoekje. Het lukt haar niet om een beschrijving van de oppervlakte van een klein rechthoekje te geven. Uiteindelijk leg ik uit hoe een integraal 'werkt'. Ik vraag haar om de volgende stap: het berekenen van een lengte.

L: Dit hoogste punt hier heeft dus x -waarde 1 en y -waarde 1. En dan ehm... ja, als je datzelfde dus voor elk lijnstukje doet, dan kun je het totaal aantal y -waardes, die tel je bij elkaar op, heb je dan niet de lengte?

C: Laten we het maar eens gaan proberen. Wat is dan bijvoorbeeld de y -waarde van dit punt? (*ik teken een willekeurig punt op de grafiek*)

L: Gewoon x komma y ?

C: Oké. (*ik schrijf dat bij het punt*) En nu?

L: Nou, ik neem een ander punt, en dan die x , die heeft steeds een andere waarde, ehm...

C: Zullen we ze x_1 en x_2 noemen?

L: Oh ja, en dan zijn dat y_1 en y_2 . Nou, en als je dat heel vaak doet, met heel veel punten, dan tel je al die y -waarden bij elkaar op.

C: En wat bereken je dan?

L: Eh... ja, niet het goede. (*lacht*) Ik weet het niet!

C: Je zit wel op de goede weg!

Maar Lotte komt er niet uit. Ik wijs nogmaals op de kleine oppervlakjes die we gebruikten om een totale oppervlakte te berekenen en op de kleine stukjes inhoud die samen de totale inhoud maken. Het helpt niet...

Ik teken een klein driehoekje bij de twee punten op de grafiek. Ze ziet wel dat $y_2 - y_1$ bij het verticale stukje hoort.

Lotte blijft echter bij de notatie $x_2 - x_1$ en kan niet de stap maken naar dx , ook niet na meerdere verwijzingen naar de berekening van de oppervlakte. Ik teken uiteindelijk het driehoekje nogmaals, nu met dx en dy . Ze ziet nu wel in dat deze notatie handig is. Ik vraag of het haar ergens aan doet denken.

Ze komt hier ook niet verder mee. Ik vraag om dy uit te drukken in dx en het hellingsgetal. Het lukt haar niet. Als ik het voorzeg, voelt ze zich een beetje stom. Ik stel haar gerust. We schrijven nu het stukje grafiek met behulp van Pythagoras als functie van dx en het hellingsgetal. Ik vraag wat het hellingsgetal is.

L: De steilheid van dat stuk.

C: En hoe bereken je die?

L: (*lacht*) dy gedeeld door dx !

C: Maar hoe bereken je bijvoorbeeld het hellingsgetal in het punt $x = 1/2$?

L: Ehm... (*stilte*) Nee.

Het lukt niet. Ik vertel dat ze de afgeleide functie moet gebruiken. Ze zegt het te begrijpen, maar ik

heb het gevoel dat ze zich er niet zoveel bij voor kan stellen. Dit is duidelijk lastig.

Uiteindelijk ziet ze de totale lengte van de grafiek op het interval $[0,1]$:

$$L = \int_0^1 \sqrt{dx^2 + 4x^2 dx^2}$$

Hoe ze verder moet, ziet ze echt niet. Ze lijkt zich even af te vragen of het zo klaar is, maar ze merkt aan mij dat dat niet zo is. Wat moet er dan nog gebeuren? Eerst zegt ze:

$$\sqrt{dx^2 + 4x^2 dx^2} = dx + 2x dx$$

Vervolgens wil ze de wortel als een macht schrijven. Ze ziet snel dat dat ook niets wordt. Maar wat dan? Ik vertel haar dat ik eerst het gedeelte onder de wortel wat anders wil gaan schrijven. Na een aantal foute pogingen, haalt ze dx^2 correct buiten de haakjes. Maar dat je nu die term buiten de wortel mag halen, is weer lastig en lukt niet zonder hulp. Wanneer dx dan eindelijk buiten de wortel staat, zijn we klaar. Lotte knikt, maar kijkt een beetje alsof ik net een konijn uit een hoed heb getoverd.

Achteraf reflecteert Climmy op de gesprekjes. *Proces en concept* staan daarbij centraal.

Climmy's reflectie

Karin

Karin bedacht zelf om een klein stukje lijn te nemen (proces), én ze maakte bij dat kleine stukje lijn direct een driehoekje met de termen dx en

dy erbij (concept). Het driehoekje met dx en dy erbij deed haar vervolgens aan de helling denken. Blijkbaar is er een sterke verbinding tussen dat plaatje en de term 'helling'. Tevens associeerde Karin de term 'helling' met het concept 'afgeleide functie' en de formule 'hellingsgetal = dy/dx ' (van proces naar concept).

Daarnaast was de procedure voor het bepalen van de afgeleide functie bij de formule $y = x^2$ paraat (van concept naar proces).

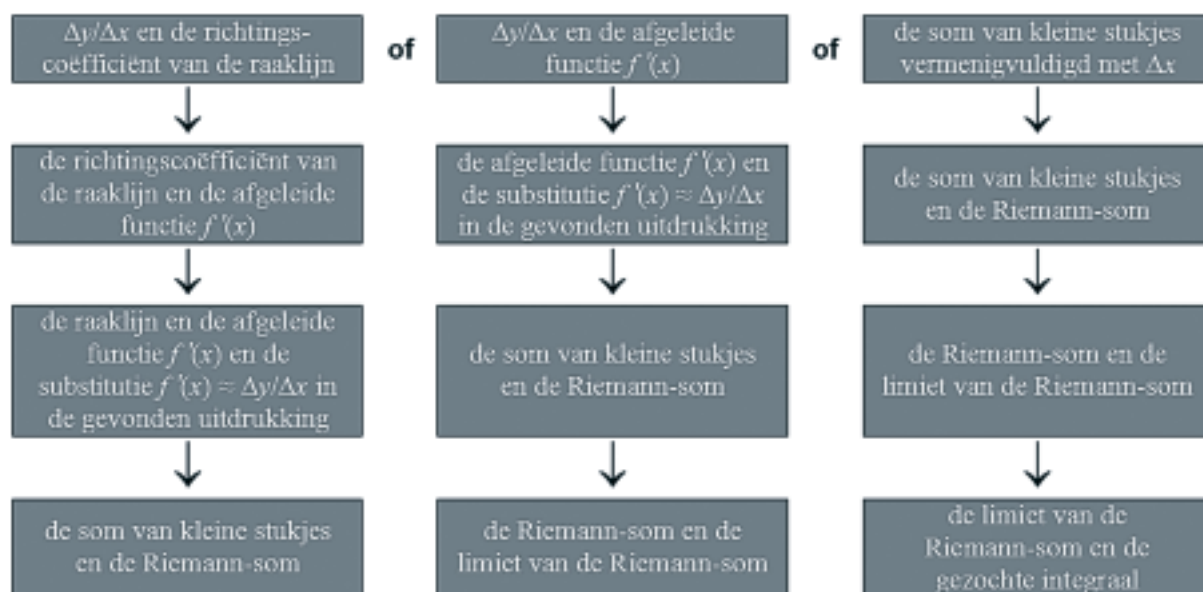
Het omschrijven en het buiten de wortel halen van de term dx was lastig, er is geen verbinding met de afgeleide functie in de vorm $dy = f'(x)dx$. Karin wist dat ze klaar was toen dx eenmaal buiten de wortel stond.

Conclusie: Karin beschikt over een krachtige cognitieve structuur.

Lotte

Lotte leek steeds hard op zoek te zijn naar een methode die bekend is (het proces staat centraal). Lotte wist niet hoe ze van de oppervlakte naar de lengte moest (geen verbinding), maar een oppervlakte berekenen kan ze wel (proces). Op de vraag naar de toepassing antwoordt Lotte: 'Ja, kleine stukjes lengte zoeken. Maar dan moet ik wel die lengte weten!' (Er is geen structuur aanwezig waarin de nieuwe informatie past.)

Ze weet niet hoe ze moet beginnen. Wanneer ze wordt geconfronteerd met een klein stukje lijn, kan ze niet de stap maken naar een geschikte naamgeving (geen juiste verbinding). Na het ophalen van de termen x_1 , x_2 , y_1 en y_2 komt het



driehoekje met de termen dx en dy erbij. Lotte denkt dan niet aan de helling of de afgeleide functie (geen structuur waarin de nieuwe informatie past). Zelfs wanneer dat wordt genoemd, weet ze niet wat ze er mee moet (ze kan de juiste verbindingen niet maken).

Lotte ziet geen oplossingsroute. Alleen bij een duidelijke directe vraag ('Hoe bereken je het hellingsgetal?') geeft ze een goed antwoord (proces).

De termen hellingsgetal en afgeleide functie zijn niet verbonden in de cognitieve structuur van Lotte, laat staan dat ze tot dezelfde gecombineerde eenheid behoren.

Conclusie: Lotte beschikt over een zwakke cognitieve structuur. Toch zegt ze achteraf dat ze het begrijpt! Ze begrijpt niet waarom het zo moet, maar ze accepteert dat ze het zo moet doen van de juf.

Tot zover Climmy's reflectie op de gesprekjes. Succesvolle transfer lijkt afhankelijk te zijn van de sterkte van de cognitieve structuur waarin *proces* en *concept* lijken samen te vallen.

De vorming van een cognitieve structuur

Piaget maakt in [2], als het gaat om abstraheren, onderscheid tussen *empirische*, *pseudo-empirische*, en *reflectieve* abstractie. Bij *empirische* abstractie gaat het om waarnemingen, experimenten en gedachte-experimenten. De eigenschappen staan centraal. *Pseudo-empirische* abstractie richt zich op het manipuleren. Het accent ligt op de eigenschappen van bewerkingen van objecten. Bij *reflectieve* abstractie gaat het om het idee hoe objecten en manipulaties van die objecten samen gethematiseerde concepten in gedachten worden (zoals de 'lijn' die de y -as snijdt, en in de lineaire vergelijking oplossen $x = 0$ invullen). De betekenis van eigenschappen en bewerkingen daarvan klonteren samen tot één cognitieve eenheid, *comprimeren* (zie [1]). Alle cognitieve eenheden en hun onderlinge *verbindingen* samen vormen een *cognitieve structuur*. Door problemen op te lossen en verbindingen te leggen wordt de cognitieve structuur verrijkt. Een onvolledige cognitieve structuur, met arme eenheden en weinig verbindingen, zal vaak leiden tot doodlopende oplosroutes, of contextafhankelijke foute antwoorden. Daarom blijft het streven gericht op de ontwikkeling van een sterke cognitieve structuur.

Reflectieve abstractie als motor voor cognitieve ontwikkeling

Reflectie op uitgevoerde activiteiten (reflectieve abstractie) is de sleutel tot de vorming van een sterke cognitieve structuur (zie [3]). Niet alleen het resultaat is van belang, maar vooral de vergelijking met activiteiten die tot dat resultaat leiden. Concreet gaat het dan om vragen als: 'Hoe ben je aan dit resultaat gekomen? Had je dit ook op een andere manier kunnen bereiken?', maar ook: 'Heb

je zoiets al eens eerder gedaan?'

In de weergegeven gesprekjes over de (sub)vraag naar de (boog)lengte biedt terugblikken op het antwoord en de aanpak allerlei mogelijkheden tot niveauverhoging. Om die kleine booglengte te kunnen bepalen dienen de termen $y_2 - y_1$ (verticale toename) en $x_2 - x_1$ (horizontale toename) vervangen te worden door Δy en Δx . Dit is de eerste activiteit die verbindingen oproept met andere cognitieve eenheden. Voor de ontwikkeling is het vervolgens noodzakelijk de gevonden uitdrukking te herleiden, door Δx buiten het wortelteken te halen, tot een uitdrukking die het leggen van verbindingen met weer andere cognitieve eenheden activeert. Schematisch gaat het na het vinden van $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ om de in **figuur 2** opgenomen voortzettingen (hypothetical learning trajectory). In de kolommen, die van links naar rechts in elkaar overlopen, staan mogelijke stapsgewijze aanpakken (zie pijlen).

Elke aanpak leidt vroeg of laat tot resultaat. Er zijn uiteraard meer relaties dan hier weergegeven staan. Essentieel is dat antwoorden op (sub)vragen gecombineerd worden met bestaande kennis. Als docent ben je niet in staat deze relaties bij alle leerlingen afzonderlijk te onderkennen en te sturen. Het is echter wel mogelijk leerlingen te wijzen op het belang van het bewust bezig zijn met activiteiten, het uitvoeren daarvan, en de mogelijke verbindingen met andere resultaten en activiteiten. Met elkaar praten (en naar elkaar luisteren) is daarbij van het allergrootste belang. Taal speelt een grote rol bij het leren. Gestructureerde conversatie kan alle deelnemers helpen bij de ontwikkeling van begrippen (gedeelde betekenissen).

Dank

Met dank aan Climmy Hoksbergen (e-mailadres: climmyhoksbergen@yahoo.com) en haar leerlingen van het Isendoorn College te Warnsveld, en aan Harrie Broekman voor zijn constructief commentaar.

Literatuur

-
- [1] T. Barnard, D. Tall: *Cognitive units, connections and mathematical proof*. In: *Proceedings of PME 21*, Vol. 2, Finland, pp. 41–48 (1997).
 - [2] J. Piaget: *The child's conception of a number*. New York: Norton (1965).
 - [3] A. Simon, R. Tzur, K. Heinz, M. Kinzel: *Explicating a mechanism for conceptual learning, elaborating the construct of reflective abstraction*. In: *Journal for research in mathematics education*, Vol. 35(5), pp. 305–329 (2004).

Over de auteur

Nellie Verhoef is vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente.
E-mailadres: n.c.verhoef@utwente.nl

SAMENHANG: WAAR TE BEGINNEN?

[Gerrit Roorda]

Inleiding

Een van de doelen van de tweede fase was, leerlingen in herkenbare en meer samenhangende programma's gericht voor te bereiden op bepaalde opleidingen in het hoger onderwijs. In dit artikel wil ik me richten op het thema 'samenhang'. Wat wordt daarmee bedoeld, en hoe kun je als school daaraan werken?

De geschiedenis van Samenhang

'Uiteraard bestaan de profielen uit een samenhangend geheel aan vakken; de programma's zijn zo geformuleerd dat de samenhang zichtbaar wordt. Het benutten van de mogelijkheden van de samenhang (niet hetzelfde behandelen bij alle vakken, maar aanvullend behandelen) kan leiden tot tijdswinst en zal de leerlingen doen inzien dat een ééndimensionale kijk niet voldoet.'^[1]

Bij de start van de tweede fase, maar ook bij de basisvorming, duikt vaak het woord 'samenhang' op. Bijvoorbeeld in termen als 'samenhangende profielen', en in de voor de basisvorming gebezigde afkorting TVS (toepassing, vaardigheid, samenhang). Met mooie woorden zoals hierboven wordt het belang van samenhang uitgelegd. Nu, zo'n 10 jaar later, zijn de berichten heel wat genuanceerder. In het kort geleden verschenen rapport *Zeven jaar Tweede Fase, een balans* (zie [2]) wordt gesproken over de problemen die optreden bij samenhang. Zo wordt er geconstateerd dat

- samenhang maar in zeer beperkte mate wordt gerealiseerd,
- er geen richtlijnen waren om de programma's voor de profielen in samenhang te ontwikkelen,
- het docenten niet lukt om tijd vrij te maken voor deze samenhang.

Daarnaast wordt in meerdere publicaties duidelijk dat de samenwerking tussen wiskundedocenten en hun collega's als het gaat om afstemming van vakinhouden en didactiek relatief zeldzaam is (zie [3]).

Toch zijn er docenten die tijd hebben vrijgemaakt, en bezig zijn gegaan met afstemming van vakken. Aan de ene kan zijn er initiatieven van docenten op scholen. Frank van den Heuvel rapporteert in *Euclides* (zie [4]) over een boeiend gesprek in een profielteam op zijn school, en Petra van Loon schrijft over haar ervaringen met combinatie-uren wiskunde-natuurkunde (zie [5]). Aan de andere kant zijn er scholen en docententeams die samenwerken met een nabij gelegen

universiteit. Zo wordt bijvoorbeeld in publicaties van het SONaTe-project (= Samenhangend Onderwijs in Natuur en Techniek)^[6] beschreven hoe op verschillende scholen aan afstemming tussen exacte vakken wordt gewerkt.

Er is ook een categorie docenten die wel wat wil met samenhang, maar nog niet echt op gang is gekomen. Dat blijkt uit workshops op lerarendagen, maar ook uit vragen aan uitgeverijen om materiaal voor samenhang in de schoolboeken bij te leveren. Verder valt op dat in vakbladen voor wiskundeleraren het aantal artikelen over samenhang is toegenomen.

Wat wordt bedoeld met samenhangend (wiskunde)onderwijs?

In publicaties en artikelen worden termen gebruikt als samenhangende profielen, samenhangend leren, samenhangend onderwijs, maar ook: vakkenintegratie, samenwerking tussen secties en afstemming van vakken. Dit geeft mijns inziens al direct aan dat 'samenhang' een gecompliceerde term is.

Een samenhangend profiel is een combinatie van vakken die met elkaar te maken hebben, bijvoorbeeld wiskunde, scheikunde en natuurkunde (profiel N&T). Dat deze vakken samen in één profiel zitten wil nog niet zeggen dat er samenhangend onderwijs wordt gegeven, dat is de afgelopen jaren wel gebleken.

Je kunt als secties met elkaar afspreken dat je een bepaald onderwerp inhoudelijk op elkaar afstemt. Je probeert samenhang in het onderwijs aan te brengen, maar dat wil nog niet automatisch zeggen dat leerlingen samenhangend 'leren', dus in hun leerproces bepaalde verbindingen tussen vakken leggen.

Al met al is het ingewikkeld om een definitie voor samenhangend onderwijs te geven.

Misschien is het makkelijker om voorbeelden te geven van wat het *niet* is:

- Leerlingen leren bij verschillende vakken verschillende technieken voor hetzelfde type opgaven, zonder dat ze door hebben dat ze met hetzelfde type opgaven bezig zijn. Voor procentuele toename bijvoorbeeld leer je bij wiskunde dat je

met $\frac{\text{nieuw}}{\text{oud}}$ de groeifactor en dus de procentuele toename kunt vinden; bij economie wordt meestal

$\frac{\text{nieuw-oud}}{\text{oud}} \times 100$ gebruikt.

- Leerlingen zijn bezig met een probleem voor een vak, maar zetten helemaal geen technieken in die ze bij een ander vak geleerd hebben. Voorbeeld: verhoudingstabellen bij wiskunde en rekenen met verhoudingen bij scheikunde.
- Leerlingen hebben bij het ene vak geleerd hoe ze een onderzoek moeten opzetten, maar vergeten het bij een ander vak toe te passen.

Onder samenhangend wiskundeonderwijs versta ik afstemming tussen wiskunde en andere schoolvakken op het gebied van:

1. vakinhoud
2. thema's
3. vaardigheden

waarbij de eigen structuur van het vak in stand blijft.

De mogelijkheid om ook op het gebied van didactiek zaken af te stemmen laat ik in dit artikel buiten beschouwing.

De indeling van het grote gebied 'Samenhangend onderwijs' in deze categorieën kan helpen bij het maken van keuzes in de school. Je hoeft niet aan alles tegelijk te werken.

De afsluitende opmerking '*waarbij de eigen structuur van het vak in stand blijft*' vind ik voor algemeen vormend onderwijs ook zeer relevant. Wiskunde heeft een eigen manier om bepaalde begrippen op te bouwen. De opbouw van een wiskundig concept moet niet gekoppeld zijn aan één ander vak, of één toepassing, wanneer je het concept ook in andere toepassingen moet kunnen gebruiken.

Hieronder ga ik verder in op de drie genoemde benaderingen van samenhangend wiskundeonderwijs.

1. Afstemming van vakinhoud

Bij afstemming van de vakinhoud staan begrippen van een vak centraal. Het doel is dat leerlingen een bepaald begrip beter leren en verbanden zien tussen de vakinhouden van verschillende vakken. Een kleine zoektocht op internet levert al snel interessant lesmateriaal op dat te gebruiken is voor inhoudelijke afstemming van wiskunde en andere vakken. Een aantal voorbeelden.

Verhoudingen en evenredigheden: In de natuurkunde, scheikunde en biologie worden allerlei soorten verbanden gebruikt zoals bijvoorbeeld recht evenredig, omgekeerd evenredig, kwadratisch evenredig, omgekeerd kwadratisch evenredig of evenredig met een wortel. Lesmateriaal kan erop gericht zijn de samenhang tussen wiskunde en andere vakken duidelijk zichtbaar te maken. Op de website van CD-bèta^[7] is lesmateriaal te downloaden. Op deze website zijn

nog andere suggesties te vinden voor inhoudelijke samenhang, zoals bijvoorbeeld *Procenten in de economie*.

Het begrip *afgeleide* komt in de wiskunde vaak pas in vwo-5 aan de orde, maar is voor scheikunde, natuurkunde en economie relevant, vaak al in vwo-4. Lesmateriaal kan erop gericht zijn, het concept 'afgeleide' op te bouwen binnen een natuurkundige context, om vervolgens de abstracte wiskundige insteek daar aan op te hangen. Michiel Doorman heeft lesmateriaal ontwikkeld waarin calculus wordt opgebouwd met kinematica, en met gebruik van ICT-applicaties (zie [8]).

Een voorbeeld van mogelijke inhoudelijke samenhang tussen wiskunde en biologie is lesmateriaal over *kansrekening bij genetica*, ook te vinden op de website van het Freudenthal instituut^[9].

Wiskunde en andere schoolvakken kunnen bij tal van onderdelen op elkaar afgestemd worden. Er zijn raakvlakken van wiskunde met techniek, aardrijkskunde, biologie, economie, management en organisatie, scheikunde, en zeker ook natuurkunde. Het kan gaan om algebra, statistiek, verhoudingen, evenredigheden, grafieken, differentiëren, logaritmen, goniometrie, meetkunde en differentiaalvergelijkingen (zie [10]). Op de website van de SLO^[11] is een overzicht gemaakt waarin voor diverse grote methoden de inhoudelijke raakvlakken in de natuurprofielen worden beschreven. Het overzicht kan een handig hulpmiddel zijn, maar geeft tegelijk ook de problematiek van afstemming aan. Het is complex dat er zoveel raakvlakken met andere vakken zijn. Waar moet je beginnen? Hoe stem je nu een vak af met diverse andere schoolvakken? Hoe organiseer je zoiets in de lessentabel?

Een tweede complicerende factor is dat in de wiskundeles ook de eigen structuur van het vak naar voren moet komen.

Een derde probleem is dat verschillende vakken eenzelfde begrip vanuit de eigen vakdiscipline benaderen. Elk vak heeft eigen notaties en een eigen context. Dat komt mooi naar voren in het al eerder genoemde artikel van Frank van den Heuvel.

Deze drie punten zal ik illustreren aan de hand van het onderwerp 'differentiëren' en 'gemiddelde verandering'.

1. Inhoudelijk is afstemming mogelijk met scheikunde (reactiesnelheid), economie (marginale kosten) en natuurkunde (snelheid, radioactief verval).

2. Wiskunde heeft ook zijn *eigen* structuur voor dit onderwerp. In schoolboeken gaat de opbouw bijvoorbeeld via differentiequotiënt naar differentiaalquotiënt, dan volgt soms de limietdefinitie en daarna komt de introductie van regels voor differentiëren. Toepassingen in de opbouwfase gaan vaak over snelheden, en in de

verwerkingsfase komt het vinden van extremen aan de orde.

3. In de opbouw bij wiskunde is sprake van 'gemiddelde verandering'. Maar hetzelfde woord 'gemiddelde' wordt door de verschillende vakken anders benaderd (zie figuur 1). Je kunt je voorstellen dat leerlingen in verwarring raken.

Kortom, afstemming van vakinhoud is complex omdat wiskunde relaties heeft met veel andere vakken, het vak wiskunde ook een eigen opbouw kent, en elk vak z'n eigen insteek heeft bij bepaalde begrippen.

2. Afstemming rond thema's

Bij veel thema's ontleend uit het dagelijks leven of de beroepspraktijk spelen meerdere schoolvakken een rol. Er zijn voorbeelden te over:

Opdrachten over *Hypotheek* of *Sparen en beleggen* kunnen samen met economie worden uitgediept. Op de website van het BPS-project (Bèta Profielen Studiehuis)^[12] staan voorbeelden over *waterkwaliteit* en *biodiversiteit*. De stichting Math4all heeft in samenwerking met scholen materiaal ontwikkeld over *demografie* (zie [13]) waarin aardrijkskunde en wiskunde samenkomen. Ook websites die onderzoeksopdrachten ondersteunen, zoals die van 'Bètasteunpunt'^[14] (figuur 2) en 'Werkstuknetwerk'^[15], kunnen veel inspiratie leveren voor thema's.

De thema's kunnen een sterk wiskundige insteek hebben, maar ook een insteek waarbij maar een klein beetje wiskunde komt kijken. Leerlingen kunnen aan zo'n thema werken tijdens een projectweek, een profielmiddag of een praktische opdracht. Petra van Loon beschrijft dat de praktische opdrachten (over bijvoorbeeld de regenboog of de kruisboog) tijdens combi-uren wiskunde-natuurkunde, erg succesvol waren (zie [5]).

Het doel van thematische afstemming is niet zozeer het aanbrengen van nieuwe begrippen, maar meer het toepassen van al eerder geleerde kennis. Andere leerdoelen, zoals samenwerken of onderzoeksmatig werken, kunnen benadrukt en beoordeeld worden.

Het aantal thema's waarin wiskunde kan samenwerken met andere vakken is groot. Voor echte afstemming is wel goed overleg met andere

secties nodig, om het thema ook werkelijk vanuit verschillende vakdisciplines te benaderen.

3. Vaardighedenbenadering

Een derde benadering is de afstemming van vaardigheden. Als bij het ene vak expliciet bepaalde vaardigheden worden geoefend, kun je daar bij een ander vak op terug komen. In dit opzicht is samenwerking met allerlei vakken mogelijk. Het kan gaan om heel algemene vaardigheden als verslagen maken, presenteren of samenwerken. Maar ook specifiek kan een lijn aangebracht worden in onderzoeks- en probleem-oplossingsvaardigheden.

Een voorbeeld van afstemming op het gebied van vaardigheden is het project Bèta-Blokker dat al weer een tijd geleden door enkele scholen in het noorden van Nederland werd uitgevoerd, samen met de Rijksuniversiteit Groningen. Voor de exacte vakken werd een bundel problemen opgesteld, waarbij de aandacht vooral uitging naar de systematische aanpak om dergelijke problemen op te lossen. Bij het maken en het bespreken van de opdrachten was het centrale punt de probleemaanpak (figuur 3), en niet zozeer de vakinhoudelijke kennis. De bundel^[16] is er nog steeds en bevat een mooie verzameling opdrachten, maar inmiddels is hij op de meeste scholen in een kast beland.

Samenhang: waar te beginnen?

Samenhangende profielen, samenhangend onderwijs, afstemming tussen vakken, vakkenintegratie: hoe kun je als school nu aan zoiets beginnen? Hierboven schets ik drie benaderingen om aan afstemming met andere vakken te werken. De keuze die gemaakt wordt voor één van de drie benaderingen heeft gevolgen voor de uitwerking in de school.

Bij *afstemming van vakinhoud* is het doel dat leerlingen vakkennis in een breder perspectief dan alleen het 'eigen' vak leren. Dat kan om veel verschillende begrippen gaan. Het is dus nodig om een keuze te maken voor vakinhoud die je met andere vakken wilt afstemmen. De afstemming van de vakinhoud kan vervolgens op twee manieren plaatsvinden:

FIGUUR 1

Gemiddelde verandering: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

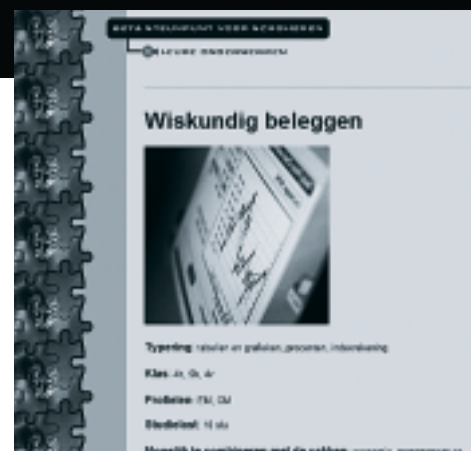
Gemiddelde snelheid kan $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ zijn, maar ook $v_{\text{gem}} = \frac{v_0 + v_{\text{eind}}}{2}$ (hier opeens een 'plus'?!)

Gemiddelde reactiesnelheid: $\frac{1}{n} \times \frac{\Delta[\text{NO}_2]}{\Delta t}$ (waar komt die $\frac{1}{n}$ opeens vandaan?)

De gemiddelde kosten: $GTK = \frac{TK}{q}$ (heeft niet direct met gemiddelde verandering te maken)

Gemiddelde eindcijfer: $\frac{7,8 + 6,7 + 2 \times 8,1 + 4,3}{5} = 7,0$

FIGUUR 2



1. In samenwerking met collega's van andere vakken lesmateriaal ontwerpen of bestaand lesmateriaal inzetten. Deze vorm van afstemmen vraagt erg veel overleg over inhoud en randvoorwaarden. Allerlei vragen rond inhoud en randvoorwaarden moeten vooraf goed doordacht worden: Welke begrippen hanteren de verschillende schoolvakken? Welke notaties worden gebruikt? Wat is de plek in het curriculum? In welke periode? Hoeveel lesuren? Welke docent doet wat? Hoe toetsen we de leerstof?

2. In overleg met collega's nadenken over de manier waarop een begrip in de verschillende vakken naar voren komt. De vraag is dan hoe je in je eigen lessen kunt inhaken op andere vakken, door voorbeelden uit een ander vakgebied te gebruiken, dezelfde begrippen te hanteren, of de relatie tussen notaties te benoemen. Ook andere vakken kunnen op deze manier inhaken op terminologie en notaties die bij wiskunde gebruikt worden.

Bij *afstemming rond thema's* is het doel vaak het toepassen van al aanwezige vakkennis. In overleg met collega's van andere secties moet een thema gekozen worden, maar ook duidelijk worden vastgesteld welke vakinhoud vanuit de verschillende vakken wordt ingebracht. Het overleg is nodig om te voorkomen dat er een eenzijdige nadruk is op één vak. Het lijkt me van groot belang om als begeleidende docenten zelf ook stevig in het thema te duiken. Daardoor kan een thema ook voor jezelf meer tot leven komen.

Bij *afstemming rond vaardigheden* is het doel het versterken van een bepaalde vaardigheid. De vakinhoud komt op een tweede plaats. Feedback op het werk van leerlingen zal dan ook met name feedback op het beheersen van de vaardigheid zijn. Afspraken met andere secties over de vaardigheden waaraan je wilt werken, het begrippenapparaat dat je gebruikt en de manier waarop je de leerlingen aan de vaardigheid laat werken zijn noodzakelijk.

Het containerbegrip *samenhang* kan dus vanuit verschillende invalshoeken benaderd worden. Om ergens te beginnen zijn keuzes noodzakelijk. Keuzes die bijvoorbeeld te maken hebben met het doel van je onderwijs en de randvoorwaarden op school. Je kunt klein beginnen door een project

rondom een thema met twee secties goed voor te bereiden, of door een overleg te starten met andere secties over een vakinhoudelijk onderdeel. Je kunt het ook groot aanpakken door als secties samen lesmateriaal te ontwikkelen, mogelijk in samenwerking met een hogeschool of universiteit. Welke benadering je ook kiest, overleg met collega's van andere secties is hoe dan ook noodzakelijk. Het zou mooi zijn als schoolleidingen goed uitgewerkte plannen en projecten honoreren met tijd en faciliteiten.

Noten en literatuur

-
- [1] STPFVO (Stuurgroep Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs): *Tweede Fase in vraag en antwoord*. Den Haag (1996).
- [2] *Tweede fase adviespunt: Zeven jaar Tweede Fase, een balans*. Den Haag (2005).
- [3] *Vakdossiers 2003 wiskunde*. Enschede: SLO.
- [4] F. van den Heuvel: *Samenhang? Moeilijk!* In: *Euclides* 80(7), mei 2005; pp. 354-358.
- [5] P. van Loon: *Combi-uren wiskunde-natuurkunde*. In: *Euclides* 80(8), juni 2005; pp. 406-410.
- [6] G.E. Zegers, K.Th. Boersma, M. Wijers, A. Pilot, H.M.C. Eijkelhof: *SONaTe in het studiehuis*. Delft: Stichting Axis (2002).
- [7] www.cdbeta.uu.nl/vo/salvo/downloads.php
- [8] www.fi.uu.nl/~michiel/proo/leergang.pdf
- [9] www.fi.uu.nl/bps/lessen/genetica/genetica.html
- [10] G. Zegers, A. Mooldijk, H. Eijkelhof: *Wiskunde en natuurwetenschappen staan samen sterk*. In: *Nieuwe Wiskrant* 22(3). Utrecht: Freudenthal Instituut (2003); pp. 11-13.
- [11] <http://digimap.slo.nl/vakinhoudensamenhang/>
- [12] *Waterkwaliteit: zie bijvoorbeeld* www.fi.uu.nl/bps/titles.html
- [13] www.math4all.nl/Vooruit/Start.html
- [14] www.rug.nl/fwn/informatieVoor/scholieren/betasteunpunt/onderwerp/wiskunde
- [15] www2.werkstuknetwerk.nl/tud/tbm/tbm/265/thema.html
- [16] Het gedeelte uit de Bèta-Blokker over probleem oplossen is te bestellen door een mail aan de auteur.

Over de auteur

Gerrit Roorda is lerarenopleider en docent wiskundendidactiek aan de universitaire lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen. Daarnaast doet hij onderzoek naar het leerproces van leerlingen van het concept 'afgeleide'.
E-mailadres: g.roorda@rug.nl

FIGUUR 3

Bm 3. Vouwlijnen

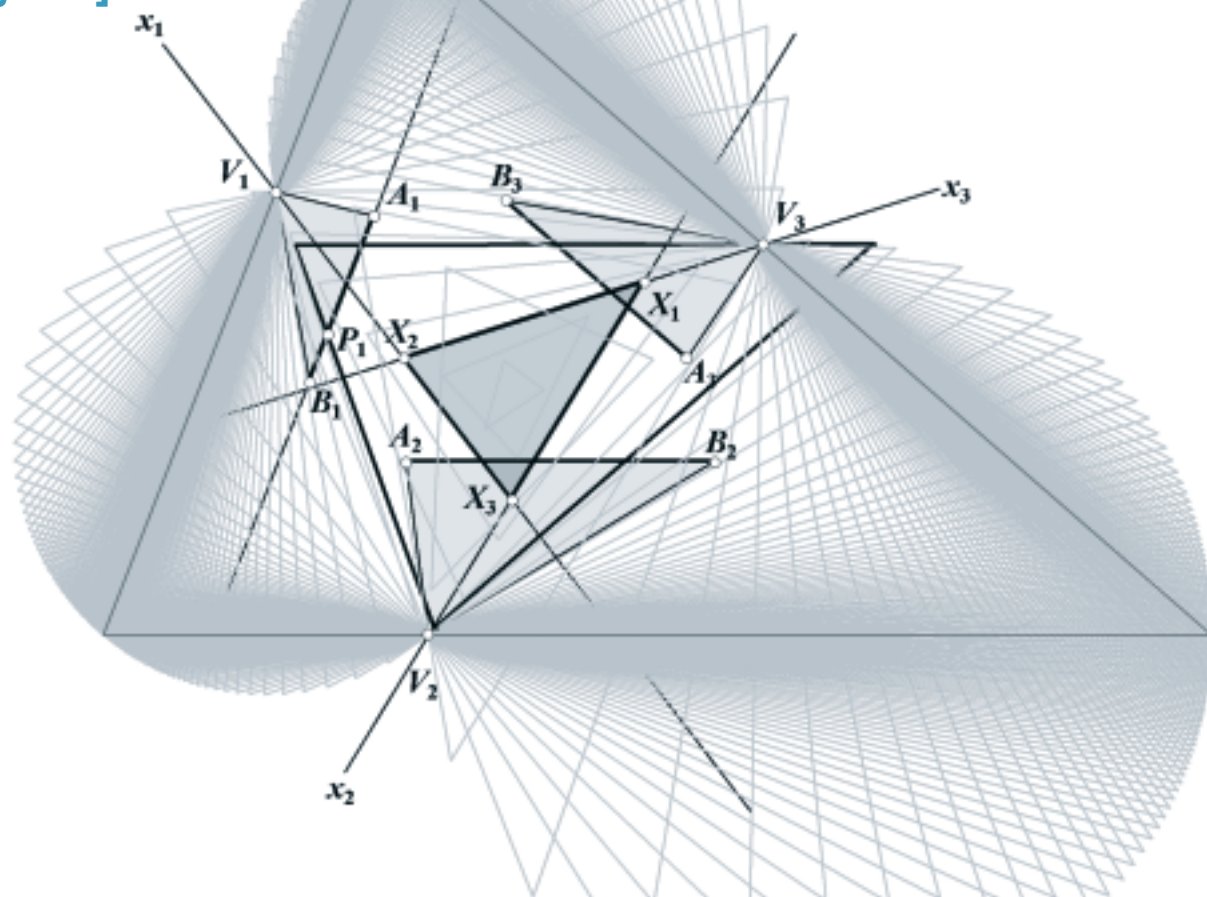
Neem in gedachten een lange rechthoekige strip papier die van links naar rechts voor je ligt op tafel.

Pak in gedachten het rechteruiteinde en leg dat op het linkeruiteinde. Maak de gevouwen strip weer vlak, zodat je rechts een vouwlijn krijgt. Vouw deze strip op dezelfde manier nog twee keer.

- Hoeveel vouwlijnen zijn er nu na drie keer vouwen ontstaan? Hoeveel vouwlijnen krijg je na tien keer vouwen? Probeer het nu te bedenken. Geef het niet te snel op!
- Vast? Kijk nog eens naar de tips, die bij *terrein verkennen* staan.
- Ben je er nog niet uit? Probeer dan de *hints*.
- Nu nog de formule maken. Bij n keer vouwen horen ... vouwlijnen.
- Nog even terugkijken. Schrijf op wat je achteraf gezien beter had kunnen doen. Heb je ondertussen al ontdekt dat je zonder vouwen direct het patroon had kunnen beredeneren? Zoek daar ander nog even naar!

DRAAISTREKKING EN NEGENPUNTSCIRKEL

[Dick Klingens]



Vooraf

In twee al enige tijd geleden verschenen nummers van Euclides schrijft Wim Pijls over *Gelijkvormigheid* (zie [e]). In de tweede aflevering stelt hij de *draaistrekkings* (draaivermenigvuldiging) aan de orde. Pijls' definitie: Een gelijkvormigheidsafbeelding bestaande uit een draaiing (rotatie) over een hoek α gevolgd door een puntvermenigvuldiging, beide met hetzelfde centrum, heet een draaistrekkings (DS).

Daarbij geeft hij ook aan hoe, met gebruikmaking van Apollonius-cirkels, het centrum van de DS kan worden geconstrueerd bij twee gegeven punten en hun beeldpunten.

Constructie van het centrum van een DS

Zie figuur 1. Het lijnstuk A_1B_1 wordt door een DS (in de figuur met factor $k = 2$) afgebeeld op het lijnstuk A_2B_2 . PP' is de middellijn van de Apollonius-cirkel Γ_A met factor k bij de punten A_1, A_2 ; QQ' is die van Γ_B bij de punten B_1, B_2 . De lijn PQ snijdt de beide cirkels ook in het punt R . Het andere snijpunt van de cirkels is dan het centrum S van de DS.

Zie ook [c3] voor een andere constructie van het DS-centrum.

In hetgeen volgt worden DS'en toegepast bij één van de (en misschien wel de meest) fascinerende eigenschappen van de driehoek, namelijk de *negenpuntscirkel*. Maar voordat het zover is, moeten we ons toch nog wel door wat theorie 'worstelen'.

Drie direct-gelijkvormige figuren

We bekijken drie figuren die direct-gelijkvormig zijn; ze hebben dan alle dezelfde oriëntatie. We gaan hier uit van de driehoeken $V_1A_1B_1$, $V_2A_2B_2$, $V_3A_3B_3$ (zie figuur 2), maar niets weerhoudt ons er uiteraard van andere figuren te bekijken.

De drie DS-centra zijn dan met de in figuur 1 geïllustreerde constructie eenvoudig te vinden:

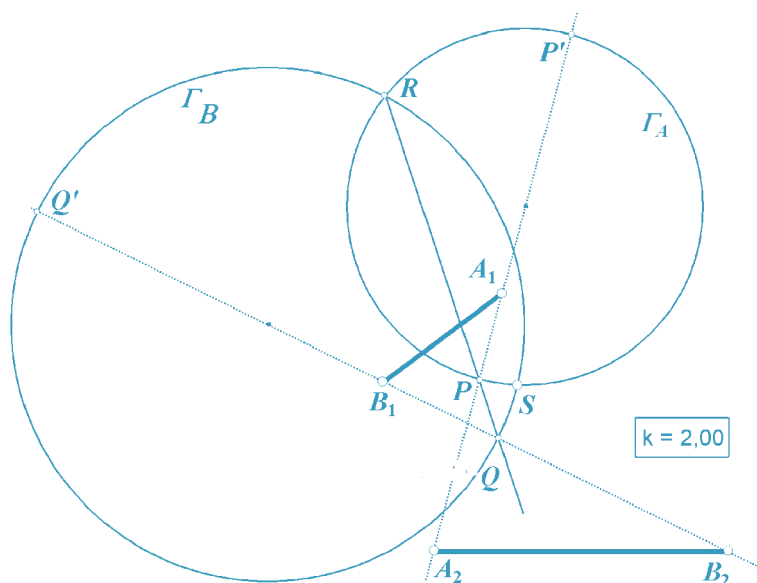
S_3 voor $V_1A_1B_1 \rightarrow V_2A_2B_2$ ($V_1A_1B_1$ wordt afgebeeld op $V_2A_2B_2$)

S_1 voor $V_2A_2B_2 \rightarrow V_3A_3B_3$

S_2 voor $V_3A_3B_3 \rightarrow V_1A_1B_1$

We zullen een DS hier meestal aangegeven met alleen de naam van het centrum: de DS met centrum S_1 noemen we kortweg (de afbeelding) S_1 ; enz. Voor de afbeeldingen S_1, S_2, S_3 geldt dat de productafbeelding $S_2 \circ S_1 \circ S_3$ (het van rechts naar links na elkaar uitvoeren) gelijk is aan de identieke afbeelding.

De rotatiehoeken worden in Pijls' artikel aangegeven met zogenoemde *gerichte hoeken*, maar er is in dit geval een eenvoudiger manier.



Zij namelijk $V_1P_1 \equiv x_1$ een willekeurige lijn door het hoekpunt V_1 (met P_1 op A_1B_1) in driehoek $V_1A_1B_1$ (zie weer [figuur 2](#)), dan maken de *overeenkomstige*^[1] beeldlijnen x_2 (via S_3) in $V_2A_2B_2$, en x_3 (via S_1) in $V_3A_3B_3$ gelijke hoeken met de overeenkomstige zijden van die driehoeken. De hoeken van de driehoek die gevormd wordt door de lijnen x_1, x_2, x_3 , (in [figuur 2](#) is dat driehoek $X_1X_2X_3$) zijn dus constant (gelijk aan $\alpha_1, \dots$). De hoeken van deze driehoek kunnen we dus ook gebruiken als rotatiehoeken.

Naamgeving. Driehoek $S_1S_2S_3$ noemen we *DS-driehoek*, de omgeschreven cirkel (omcirkel) ervan *DS-cirkel*; de driehoeken $X_1X_2X_3$ noemen we *homologiedriehoeken*^[2]. En dan hebben we direct:

Stelling 1. *Alle homologiedriehoeken gevormd door de snijpunten van overeenkomstige lijnen zijn gelijkvormig.*

We bewijzen nu allereerst:

Lemma 1. *Twee driehoeken ABC en $A'B'C'$, de laatste met zijden a', b', c' , zijn lijnperspectief dan en slechts dan als*^[3]:

$$\frac{Ab'}{Ac'} \cdot \frac{Bc'}{Ba'} \cdot \frac{Ca'}{Cb'} = 1$$

We gaan uit van de juistheid van het tweede deel van de stelling (de formule) en bewijzen dat de driehoeken lijnperspectief zijn. Stel de 'gelijknamige' zijden van de driehoeken snijden elkaar in de punten X, Y, Z (zie [figuur 3](#)). Te bewijzen is dan dat X, Y, Z op dezelfde lijn liggen. Er geldt:

$$Ca' : Ba' = CX : BX, Ab' : Cb' = AY : CY, Bc' : Ac' = BZ : AZ$$

Vermenigvuldiging geeft nu^[4]:

$$1 = \frac{Ca'}{Ba'} \cdot \frac{Ab'}{Cb'} \cdot \frac{Bc'}{Ac'} = \frac{XC}{XB} \cdot \frac{YA}{YC} \cdot \frac{ZB}{ZA} = (CBX) \cdot (ACY) \cdot (BAZ)$$

De Stelling van Menelaos^[5], toegepast op driehoek ABC met punten X, Y, Z op de zijden, zegt dan dat uit $(CBX) \cdot (ACY) \cdot (BAZ) = 1$ volgt dat de punten X, Y, Z op eenzelfde transversaal^[6] liggen.

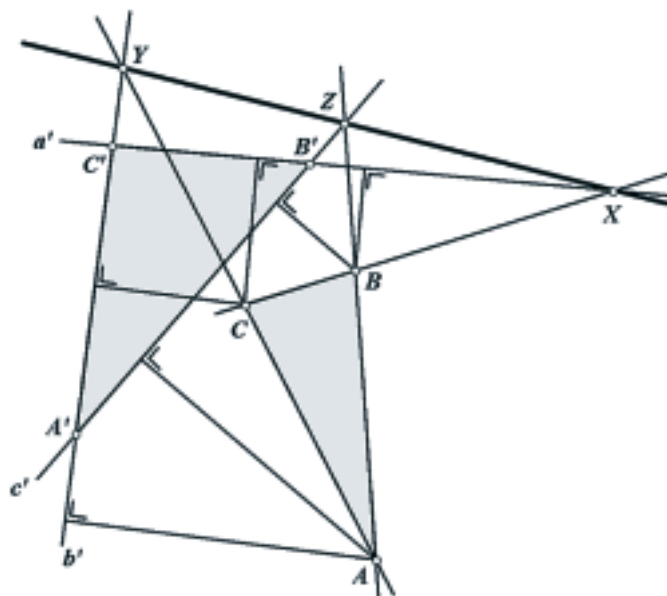
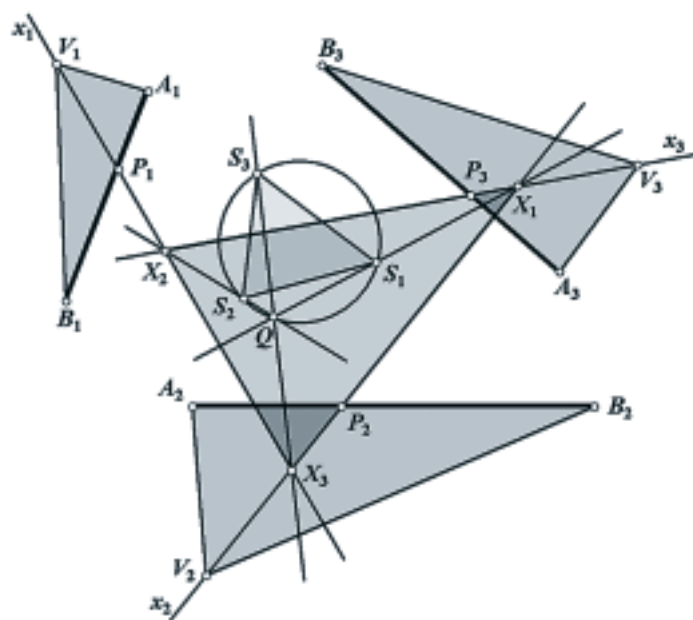
Het bewijs van het eerste deel van de stelling laten we aan de lezer. $\square$

En dan kunnen we bewijzen:

Stelling 2. *Een homologiedriehoek is puntperspectief met de DS-driehoek.*

Met andere woorden: de lijnen S_kX_k (met $k = 1, 2, 3$) gaan door één punt (in [figuur 2](#) is dat het punt Q).

We beginnen met het vereenvoudigen van de 'constructie' van [figuur 2](#), zonder daarmee echter de algemene geldigheid geweld aan te doen. We kiezen de lijn x_1 langs het lijnstuk A_1B_1 : we kiezen V_1 op (het verlengde van) A_1B_1 (zie



figuur 4), waardoor ook x_k ($k = 2, 3$) langs $A_k B_k$ valt. Zij nu $|A_k B_k| = a_k$. De gelijkvormigheidsfactoren bij de opvolgende afbeeldingen S_3, S_1, S_2 zijn dan $k_3 = a_2/a_1, k_1 = a_3/a_2, k_2 = a_1/a_3$.

Nu geldt:

$$S_1 x_2 : S_1 x_3 = k_2 : k_3$$

$$S_2 x_3 : S_2 x_1 = k_3 : k_1$$

$$S_3 x_1 : S_3 x_2 = k_1 : k_2$$

Vermenigvuldiging van deze uitdrukkingen

geeft: $\frac{S_1 x_2}{S_1 x_3} \cdot \frac{S_2 x_3}{S_2 x_1} \cdot \frac{S_3 x_1}{S_3 x_2} = \frac{k_2}{k_3} \cdot \frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{k_1}{k_2} = 1$, waaruit, via

Lemma 1, volgt dat de driehoeken $S_1 S_2 S_3$ en $X_1 X_2 X_3$ lijnperspectief zijn.

Uit de Stelling van Desargues^[7] (Twee driehoeken die lijnperspectief zijn, zijn ook puntperspectief) volgt nu: de lijnen $S_k X_k$ (met $k = 1, 2, 3$) gaan door één punt.

In dit geval is dat dus het punt Q . $\square$

In [figuur 2](#) en in [figuur 4](#) lijkt het erop dat het punt Q op de DS-cirkel ligt. Wel, dat is inderdaad zo. Er geldt:

Stelling 3. *Het perspectiefcentrum van een homologiedriehoek en de DS-driehoek ligt op de DS-cirkel.*

Zoals reeds is opgemerkt, wordt de grootte van de hoeken van driehoek $X_1 X_2 X_3$ bepaald door de afbeeldingen S_k . Dat is ook het geval met de hoeken die (bijvoorbeeld) $S_1 X_1$ maakt met $X_1 X_3$ en $X_1 X_2$; enz.

Hun som is echter constant (gelijk aan 180°) en de verhouding van de sinussen van die hoeken is dat ook (in het voorbeeld namelijk gelijk aan k_3/k_2). De hoeken $X_j Q X_k$ ($j, k = 1, 2, 3$ met $j \neq k$) zijn dan eveneens constant, en dus ook de hoeken $S_j Q S_k$. Q ligt dan inderdaad op de omcirkel van driehoek $S_1 S_2 S_3$ (volgens de *Stelling van de constante hoek*). $\square$

Gevolg (van stelling) 3. Drie overeenkomstige lijnen vormen een driehoek die puntperspectief is met de DS-driehoek (Stelling 2). Het perspectiefcentrum ligt op de DS-cirkel (Stelling 3). En dus...

Snijden drie overeenkomstige lijnen elkaar in één punt, dan ligt dat gemeenschappelijke snijpunt op de DS-cirkel.

Stelling 4. *Van de lijnen die evenwijdig zijn aan de zijden van een homologiedriehoek en die gaan door het bijbehorende perspectiefcentrum, gaat elke lijn door een (ander) vast punt van de DS-cirkel.*

Zie [figuur 5](#). Hierin zijn de lijnen x_k weer overeenkomstige lijnen die een driehoek $X_1 X_2 X_3$ vormen. Het bijbehorende perspectiefcentrum is Q (dat volgens Gevolg 3 op de DS-cirkel ligt). De lijnen y_k zijn de lijnen door Q evenwijdig met de

lijnen x_k . Zo'n lijn y_k snijdt de DS-cirkel behalve in Q ook in I_k .

De punten X_1 en Q zijn overstaande hoekpunten van een parallellogram, waarin dan $\angle I_2 Q I_3 = \angle X_1 = \alpha_1$. Hoek $I_2 Q I_3$ is dus constant. Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat de hoeken $I_3 Q I_1$ en $I_1 Q I_2$ constant zijn. En dat alles is alleen maar mogelijk als I_1, I_2, I_3 vaste punten zijn op de DS-cirkel. Waarmee het gestelde is aangetoond. $\square$

Naamgeving. Driehoek $I_1 I_2 I_3$ heet de *invariante driehoek* bij de productafbeelding $S_3 \circ S_1 \circ S_2$. De hoekpunten van die driehoek heten *invariante punten*.

Eindelijk: Feuerbach

Stelling 5 (Karl Feuerbach, 1800-1834). *Van een driehoek liggen de voetpunten van de hoogtelijnen, de middens van de zijden en de middens van de hoogtelijnstukken tussen de hoekpunten en het hoogtepunt op een cirkel (de negenpunts-cirkel van de driehoek, ook wel Feuerbach-cirkel of Steiner-cirkel genoemd).*

Zie [figuur 6](#). In driehoek ABC zijn AA', BB', CC' de elkaar in het hoogtepunt H snijdende hoogtelijnen. De driehoeken $AB'C', A'BC'$ en $A'B'C$ zijn dan elk indirect-gelijkvormig met driehoek ABC en daardoor direct-gelijkvormig met elkaar. Het is direct duidelijk dat de punten A', B', C' de DS-centra van deze driehoeken zijn; met andere woorden: de omcirkel N van driehoek $A'B'C'$ is de DS-cirkel.

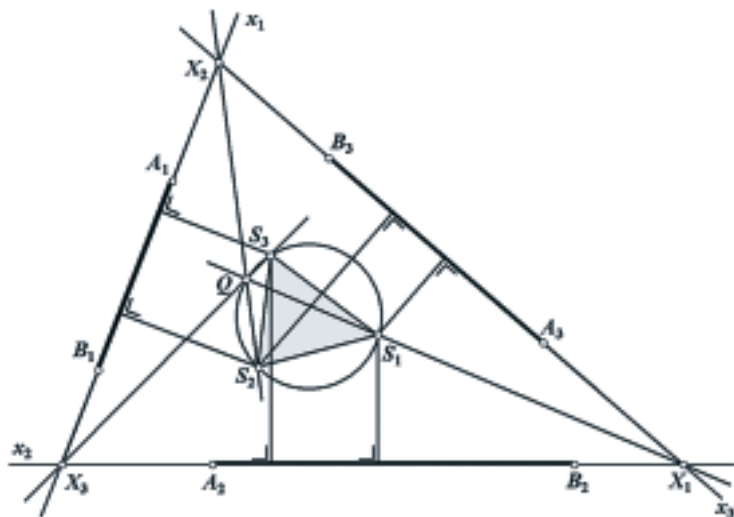
De punten D, E, F zijn de middens van de zijden van driehoek ABC ; de punten A'', B'', C'' zijn de middens van de lijnstukken AH, BH, CH . De middelloodlijnen van de lijnstukken $AB', A'B$ en $A'B'$ zijn nu overeenkomstige lijnen.

Maar deze lijnen gaan alle door het punt F , immers $ABA'B'$ is een koordenvierhoek en F is het middelpunt van de omcirkel daarvan. Het punt F ligt dan volgens Gevolg 3 (bij Stelling 3) op de DS-cirkel N . En dit geldt, analoog redenerend, ook voor de punten D en E .

De middelloodlijnen van $B'C', AC', AB'$ snijden elkaar in A'' (A'' is het midden van AH ; immers $A''F \parallel BH$ in driehoek BHA). Het punt A'' moet dus een invariant punt van het systeem zijn. En de punten B'' en C'' zijn dat dan ook. Die punten liggen ook op de DS-cirkel.

Samenvattend: de in de stelling genoemde punten, te weten $A', B', C', D, E, F, A'', B'', C''$ – negen stuks dus – liggen op een cirkel. $\square$

Met dank aan Wim Pijls voor zijn opmerkingen bij een eerdere versie van dit artikel.



Noten

- [1] Met overeenkomstige lijnen, zijden, ... bedoelen we hier lijnen, zijden, ... die door opvolgende DS'en uit elkaar worden verkregen.
- [2] Homologie (overeenstemming) wordt in de projectieve meetkunde soms gebruikt in de speciale betekenis perspectiviteit.
- [3] Met X_m bedoelen we de afstand van het punt X tot de lijn m .
- [4] (ABC) , een door het punt C bepaalde deelverhouding op de lijn AB , is een verkorte schrijfwijze voor CA/CB .
- [5] Voor een bewijs van de Stelling van Menelaos zie [c2] of [f, pp. 106-107].
- [6] Een transversaal van een driehoek is een lijn die de (verlengden van de) zijden van een driehoek snijdt en niet door een hoekpunt van die driehoek gaat.
- [7] Voor een behandeling van de Stelling van Desargues zie [b, pp. 5-7], [c1] of [d, pp. 428-429].

Literatuur

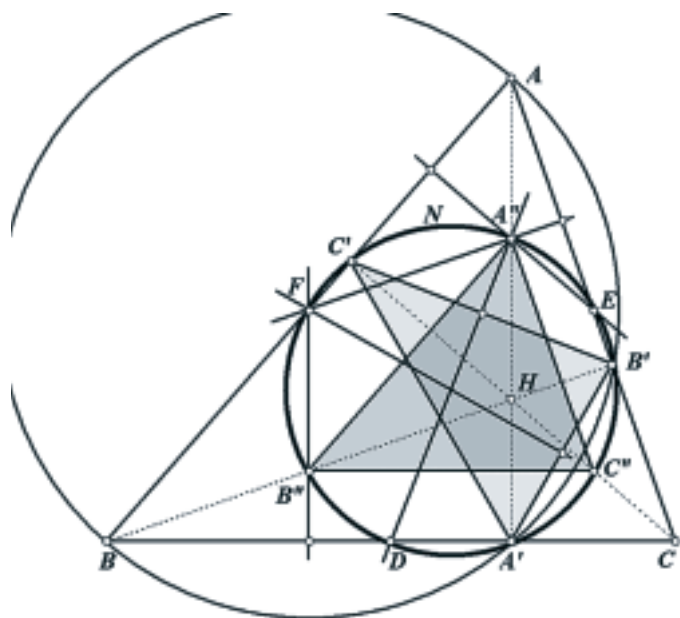
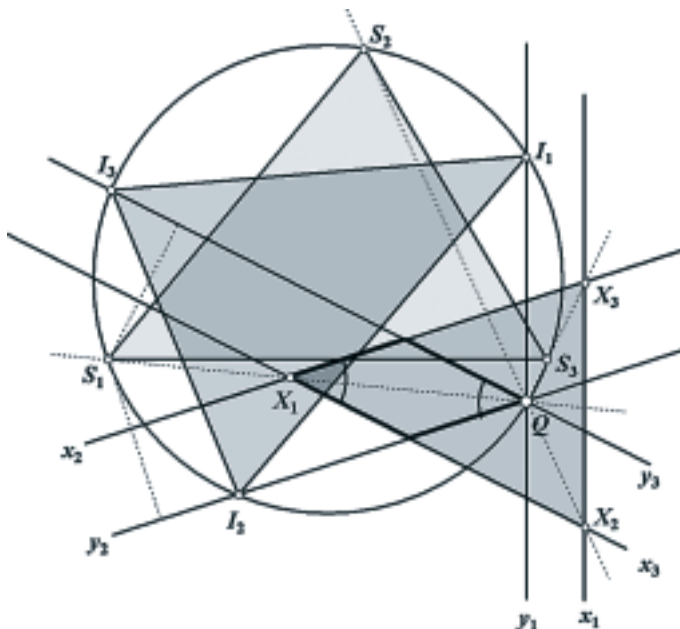
- [a] R.A. Johnson: *Advanced Euclidean Geometry*. New York: Dover Publications Inc. (1960, reprint).
- [b] Martin Kindt: *Lessen in projectieve meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (1996).
- [c] Dick Klingens: Homepage. Op: www.pandd.demon.nl. Webpagina's op deze website waarnaar in dit artikel wordt verwezen zijn:
- [c1] - www.pandd.demon.nl/transvers.htm#74
- [c2] - www.pandd.demon.nl/transvers.htm#6
- [c3] - www.pandd.demon.nl/draaiverm.htm#12
- [d] P. Molenbroek: *Leerboek der Vlakke Meetkunde*. Groningen: P. Noordhoff N.V. (1939).
- [e] Wim Pijls: Gelijkvormigheid 1, 2. In: *Euclides* 80(2 en 3), 2004; pp. 48-51, pp. 86-89.
- [f] P. Wijdenes: *Vlakke meetkunde voor voortgezette studie*. Groningen: P. Noordhoff N.V. (1964).

Over de auteur

Dick Klingens is als leraar wiskunde verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van *Euclides*.

E-mailadres: dklingens@pandd.nl

URL: www.pandd.nl





FIGUUR 1 Een deel van een pagina uit het Biografisch Woordenboek van Nederlandse Wiskundigen



WISKUNDE ALS LEVEND VAK FASCINEERT LEERLINGEN

Programma 'Leraar in onderzoek' brengt leraar in contact met universitaire wiskunde.

[Hanne Obbink]

Enthousiasmeren

Breng wiskundeleraren in contact met de universiteit door hen zelf wetenschappelijk onderzoek te laten doen. Het enthousiasme dat ze zo opdoen, brengen ze over op scholieren, en die kiezen daardoor wellicht vaker voor een universitaire wiskundestudie. Dat is de gedachte achter het programma 'Leraar in onderzoek'. Twee deelnemers daaraan, Gillien Geuze en Alex van den Brandhof, zijn enthousiast.

'Vorig jaar is er een leerling van me wiskunde gaan studeren aan de universiteit, dit jaar heb ik weer een leerling in de klas die dat van plan is. Daar ben ik heel tevreden over, ja. Ik beweer niet dat dat per se door mij komt, maar als ik elk jaar één aankomend wiskundestudent lever en elke middelbare school zou dat doen, dan zou er niets aan de hand zijn met de studentenaantallen wiskunde.'

Aan het woord is Alex van den Brandhof, leraar wiskunde aan het Vossiusgymnasium in Amsterdam. Hij is een van de 25 leraren die naast hun baan op school tijd steken in onderzoek aan een universiteit, via het programma 'Leraar in onderzoek' van onderzoeksorganisatie NWO (zie kader). De gedachte achter dat programma is dat leraren die in nauw contact staan met de universiteit beter in staat zijn hun enthousiasme voor de wiskunde over te dragen op hun leerlingen; daardoor kiezen wellicht meer vwo-scholieren voor een universitaire studie wiskunde.

Van den Brandhof denkt dat het werkt. 'Ik houd van puzzelen aan wiskundige problemen, ik houd er ook van leerlingen op dat vlak iets extra's te bieden. Dan moet je dus goed op de hoogte zijn van de actuele stand van zaken in de wiskunde.'

Juist die actuele stand van zaken kan wiskunde tot zo'n boeiend vak maken, ook voor leerlingen. Van den Brandhof: 'Je kunt wiskunde voor leerlingen interessant maken door er dingen bij te halen. En dat hoeven niet meteen toepassingen van de wiskunde te zijn, je kunt ook de wiskunde als vak op zichzelf leuk maken. Leerlingen denken vaak dat het een dood vak is, dat alles al opgelost is en dat zij het alleen nog even moeten leren. Maar het is juist een heel levend vak, er liggen nog heel veel problemen open. Dat hebben ze niet in de gaten. Als ik hen daarover vertel, fascineert ze dat enorm.'

Ook over het onderzoek dat hijzelf verricht in het kader van 'Leraar in onderzoek' vertelt Van den Brandhof regelmatig in zijn klassen. Dat onderzoek levert niet rechtstreeks lesstof op, maar, zegt hij, 'het gaat er niet zozeer om wát voor onderzoek ik doe, het feit dát ik onderzoek doe aan een universiteit, prikkelt leerlingen al. Dat maakt ze nieuwsgierig, dat werkt enthousiasmerend. Zeker omdat ik dankzij mijn contacten op de universiteit vaker een wiskundig nieuwtje kan brengen.'

HET PROGRAMMA 'LERAAR IN

ONDERZOEK'

Internationaal gezien heeft Nederland in de wiskunde een uitstekende reputatie. Maar die sterke positie wordt bedreigd doordat de instroom van studenten al jaren te laag is. Deze constatering was voor de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) de aanleiding voor het programma 'Leraar in onderzoek'. Veel leraren zijn onbekend met het klimaat aan de universiteit, denkt NWO. Laat leraren dus enkele maanden wetenschappelijk onderzoek doen, dan zullen ze waarschijnlijk bewust en onbewust hun enthousiasme voor een universitaire studie wiskunde op scholieren weten over te brengen.

Het programma 'Leraar in onderzoek' van het NWO-gebied Exacte Wetenschappen biedt de gelegenheid daarvoor. Docenten kunnen in het kader van dit programma bijvoorbeeld lesstof ontwikkelen, samen met universitaire onderzoekers een artikel schrijven of een proefschrift afronden. Dat onderzoek moet passen binnen 60 tot 120 werkdagen, te verdelen over maximaal twee jaar. NWO-EW vergoedt de kosten die de school voor de vervanging van de leraar moet maken en geeft daarbovenop nog 2270 euro als vergoeding voor de verstoring die dit met zich meebrengt.

Toeval of niet, Geuze en Van den Brandhof zijn beiden op hun huidige onderzoeksplek terechtgekomen via de Leidse hoogleraar Hendrik Lenstra. 'Leiden heeft een goede website met suggesties voor onderwerpen voor leraren in onderzoek', verklaart Van den Brandhof. 'Dat zouden meer universiteiten moeten doen.' Uiteindelijk wordt Van den Brandhof trouwens niet door Lenstra begeleid, maar door Gerard Alberts, wiskundehistoricus aan de Radboud Universiteit in Nijmegen. In de praktijk zit hij vooral op het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam. Geuze is wel terechtgekomen in Leiden; haar werkkamer grenst aan die van Lenstra.

Woordenboek

Van den Brandhofs onderzoek is gericht op het samenstellen van een biografisch woordenboek van Nederlandse wiskundigen. Daar is behoefte aan, want in de bestaande Nederlandstalige biografische woordenboeken zijn wiskundigen ondervertegenwoordigd; in wat er internationaal beschikbaar is, ontbreken vaak een aantal belangrijke Nederlanders. 'Zo'n biografisch woordenboek kan nuttig zijn voor docenten aan de universiteit die hun collegestof willen verrijken, voor scholieren die een werkstuk moeten maken of voor wetenschapsjournalisten', vertelt Van den Brandhof. 'Het woordenboek komt eerst online beschikbaar. De lemma's zullen kort zijn: ze vullen

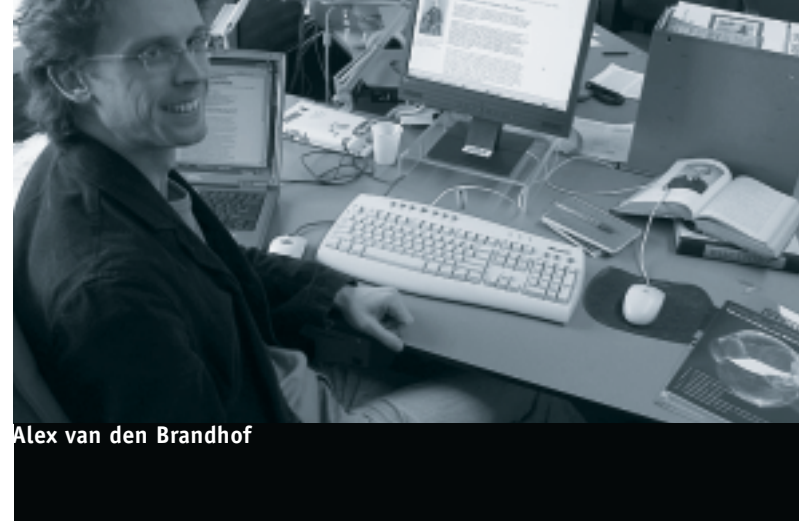
één scherm; want als je tien pagina's moet scrollen om aan je informatie te komen, leest niemand het. Uiteraard komen er bibliografische verwijzingen bij.'

Van den Brandhof is nu anderhalf jaar bezig, een dag per week. De eerste fase bestond uit het samenstellen van een lijst van –overleden– wiskundigen die in het woordenboek moeten worden opgenomen. Dat deed hij onder meer door zich te verdiepen in '*Geschiedenis van de wiskunde*' van Struik. 'Een standaardwerk dat ik nog niet gelezen had – schandelijk, het zou verplicht moeten zijn voor elke wiskundestudent', zegt hij. Vervolgens moest er materiaal verzameld worden, bijvoorbeeld via de jaarboeken van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en de levensberichten in het Nieuw Archief voor Wiskunde, maar ook in gemeentearchieven en universiteitsbibliotheken. Stap drie was het aanzoeken van auteurs. 'Ik kan niet alles zelf schrijven, daar heb ik de tijd niet voor', zegt Van den Brandhof. 'Bovendien is dat ook niet zinnig. Er bestaat bijvoorbeeld een goede biografie van L.E.J. Brouwer, de grootste Nederlandse wiskundige ooit. Dus heb ik zijn biograaf, Dirk van Dalen, gevraagd het lemma over Brouwer te schrijven. Dat komt de kwaliteit van het gebodene alleen maar ten goede.' Zodra er vijftig lemma's klaar zijn, zal het woordenboek online beschikbaar zijn. 'Wanneer dat precies zal zijn, is nog niet bekend; op zijn vroegst in juni, maar misschien wordt het pas september. De domeinnaam *bwnw.nl* is alvast geregistreerd, onder die naam komt het woordenboek op het internet. In de komende jaren moet het aantal lemma's natuurlijk gestaag gaan groeien.'

In september zit Van den Brandhofs tijd als 'leraar in onderzoek' erop. Was het de moeite waard? 'Zeker. Bij wiskundig onderzoek denk je allereerst aan het bewijzen van stellingen, en de geschiedenis van de wiskunde is een heel ander vak. Maar het is leuk. Al met al heb ik nu een goed beeld van hoe de wiskunde zich in Nederland heeft ontwikkeld en wat Nederlanders internationaal hebben bijgedragen. Dat is een enorme verrijking van mijn algemene kennis.'

ABC-vermoeden

Het zal niet al te vaak voorkomen dat Van den Brandhof zijn biografische kennis als lesstof inbrengt in de klas. Dat ligt anders voor het onderzoek van Gillien Geuze, een tweede deelnemer aan het programma 'Leraar in onderzoek'. Geuze werkt aan de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren in Middelburg en doet daarnaast één dag per week onderzoek aan de Universiteit Leiden. Daarbij draait het om het ABC-vermoeden, een nog onbewezen uitspraak uit de getaltheorie. Een zwakke versie van dat vermoeden luidt: in een optelsom van gehele getallen $a + b = c$ (waarbij de getallen a , b



Alex van den Brandhof

en c relatief priem zijn) is de macht waartoe je het product van de verschillende priemfactoren van a , b en c moet verheffen om c te krijgen kleiner dan 2 (zie ook het [kader op pag. 357](#)).

Het voornaamste doel van Geuzes project is het opzetten van een publieksproject '*Reken mee met ABC*', in samenwerking met de website Kennislink van het Nationaal Centrum voor Wetenschap en Technologie^[1]. 'Mijn taak is het om het ABC-vermoeden te vertalen voor de gewone man, in de vorm van een website voor Kennislink die het algemene publiek en scholen uitnodigt mee te doen aan een wedstrijd. Daarnaast moeten er ook lesbrieven komen die geschikt zijn voor basisonderwijs tot en met hogeschool', vertelt Geuze. 'Het onderwerp leent zich goed voor zo'n publieksproject. Iedereen die kan optellen en vermenigvuldigen, kan eraan meedoen. Tegelijkertijd biedt het aanknopingspunten om zaken uit te diepen die in de gewone lesmethoden wel worden aangekaart, maar niet uitgediept, zoals priemgetallen en modulo-rekenen.'

Voor haar onderzoek is Geuze allereerst in de beschikbare literatuur gedoken. 'Er wordt geschreven in een taal die ik in mijn baan op school niet tegenkom. Ik probeer aan te haken bij dat niveau, ik reken ook mee aan oplossingen. Maar goed, er zijn ook twee hoogleraren en promovendi mee bezig, ik heb niet de illusie dat ik degene ben die het bewijs voor het vermoeden gaat leveren. Dat is mijn taak ook niet; ik moet de taal van de wetenschap zo vertalen dat die begrijpelijk wordt voor een algemeen publiek. En dat is nog lastig genoeg.'

Omdat ze behalve in getaltheorie ook geïnteresseerd is in de geschiedenis, heeft Geuze ook de twee hoogleraren benaderd die ruim twintig jaar geleden het ABC-vermoeden formuleerden, de Zwitser David Masser en de Fransman Joseph Oesterlé. 'Hoe ontstaat zo'n vermoeden, hoe komen wiskundigen erop? Dat intrigeerde me', vertelt Geuze. 'Zoiets blijkt te ontstaan doordat mensen elkaar op steeds nieuwe ideeën brengen. Dat wiskunde 'af' is, zoals zo veel mensen denken, klopt dus niet. Daarom is het zo belangrijk om bij



Gillien Geuze

leerlingen de nieuwsgierigheid naar de wetenschap te stimuleren.'

Wat is het ABC-vermoeden?

We praten hier over positieve gehele getallen. We maken de optelsom $a + b = c$, bijvoorbeeld $1 + 8 = 9$. We ontbinden a , b en c in priemfactoren: $8 = 2^3$ en $9 = 3^2$. De radicaal r is het product van deze priemgetallen. In het voorbeeld: $1 \times 2 \times 3 = 6$. Is de radicaal nu kleiner dan het getal c , dan spreken we van een ABC-drietal. Omdat in dit geval $6 < 9$, is $(1, 8, 9)$ dus een ABC-drietal of ook wel ABC-tripel genoemd. Nog een voorbeeld: $5 + 27 = 32$. $27 = 3^3$, $32 = 2^5$ en $r = 5 \times 3 \times 2 = 30$ en $30 < 32$, dus $(5, 27, 32)$ is een ABC-tripel. Belangrijk is dat $\text{ggd}(a,b,c) = 1$. Als laatste: $4 + 15 = 19$. $4 = 2^2$, $15 = 3 \times 5$ en 19 is priem, dan $r = 2 \times 3 \times 5 \times 19 = 570$ en $570 > 19$. Dit is dus geen ABC-tripel. ABC-tripels zijn betrekkelijk zeldzaam. Zo zijn er maar vijftien ABC-tripels met $c < 300$.

Inspiratie

Sowieso is de wereld van de universitaire wiskunde nieuw voor Geuze. Ze is een 'laatbloeiër', zegt ze zelf. Pas na zeventien jaar in de gezondheidszorg koos ze voor de lerarenopleiding wiskunde en haar eerstegraads haalde ze pas een paar jaar geleden. 'Mensen werken hier veel individualistischer dan ik gewend ben', merkt ze op. 'Soms zit ik de hele dag alleen op mijn werkkamer en kom ik alleen tijdens de lunch anderen tegen. En het gaat altijd over het vak, ook tijdens de lunch. Belangstelling voor wat iemand privé bezighoudt, is er weinig. En zelfs toen er over de gemeenteraadsverkiezingen gesproken werd, zat daar nog een groot brok wiskunde bij.' Toch bevalt het onderzoek Geuze uitstekend. Ze moet er het nodige voor over hebben – op en neer reizen tussen Middelburg en Leiden kost haar zes uur per keer – maar ze brengt dat met plezier op. 'Het inspireert me. Ik hou van studeren, ik vind puzzelen leuk, en daar krijg ik hier de ruimte voor. Ik kan hier ook af en toe een college of een lezing bijwonen op een ander gebied van de

getaltheorie. Op school niet, daar gaat alle tijd op aan de leerlingen en de school zelf. Als ik na een dag Leiden 's avonds thuis ben, vind ik het meestal jammer dat ik de volgende dag niet verder kan.'

Een deel van die inspiratie geeft Geuze ook door op school. In een aantal klassen heeft ze inmiddels het ABC-vermoeden behandeld. 'Het boeit niet iedereen, natuurlijk', vertelt ze. 'Eén klas is heel enthousiast, die vraagt er steeds naar; aan hen leg ik steeds nieuwe stukjes uit. Maar of mijn leerlingen daardoor ook sneller voor de wiskunde kiezen? Ik weet het niet, misschien helpt het een beetje. En alle beetjes helpen.' Dat geldt ook voor haar collega's. Die probeert ze te interesseren voor deelname aan de wedstrijd rond het ABC-vermoeden, straks. 'Maar de tijdsdruk is groot, er is altijd zoveel te bespreken op sectievergaderingen.'

Combinatie

Zowel Geuze als Van den Brandhof is blij met de kans die 'Leraar in onderzoek' hun geboden heeft. 'Ik heb voor wiskunde gekozen omdat ik het vak zelf boeiend vond, niet zozeer omdat het onderwijs me trok', zegt Geuze. 'Maar ik vind voor de klas staan nu heel leuk. Ik weet ook niet of ik uitsluitend aan een universiteit zou willen werken en of ik het niveau dan zou aankunnen. Maar nu kan ik die twee combineren, en dat vind ik erg leuk.'

Iets soortgelijks zegt Van den Brandhof. 'Vijf dagen aan een universiteit, dat zou ik te eenzaam vinden. De saamhorigheid op school is groter. Maar alleen maar in het onderwijs werken, zou me ook niet aantrekken. Ik heb een voor mij ideale combinatie: drie dagen op school, één dag leraar in onderzoek en daarnaast ben ik ook nog één dag per week eindredacteur van het wiskundetijdschrift Pythagoras. Ik wil het contact met de universiteit niet verliezen.'

En de toekomst? Van den Brandhofs project loopt nog tot na de zomer. Maar, zegt hij, 'de connecties die ik heb opgebouwd helpen me misschien wel aan iets nieuws.'

Voor Geuze is dat moment nog iets verder weg. Ze zegt: 'Ik zie wel wat er op mijn pad komt.'

Noot (red.)

[1] In een komend nummer van Euclides zal aan dit project een afzonderlijk artikel gewijd worden, geschreven door Gillien Geuze en Ionica Smeets.

Over de auteur

Hanne Obbink is freelance journalist.

Voor nadere informatie over het programma Leraar in Onderzoek kan contact worden opgenomen met de coördinator van het programma, Lex Zandee (e-mailadres: zandee@nwo.nl).

EENVOUD BIJ TEKENEN EN REKENEN

[Jan van de Craats]

Vooraf

In het decembernummer 2005 van Euclides doen Paul Drijvers, Swier Garst, Peter Kop en Jenneke Krüger verslag van een experimenteel project in vwo-5 wiskunde-B met computeralgebra^[1]. De resultaten ervan waren niet in alle opzichten bevredigend. Afgezien van praktische moeilijkheden (bezette computerlokalen, haperende software) doken er ook inhoudelijke problemen op: het pakket liet meer dan eens onverwachte en voor leerlingen onbegrijpelijke tussenstappen zien en de eindresultaten waren verre van overzichtelijk. Ik kan me moeilijk indenken dat het project voor leerlingen in deze vorm erg inspirerend is geweest. Toch biedt dit onderwerp tal van aanknopingspunten voor prachtige wiskunde, ook op 5-vwo niveau. Daarbij kan de computer wel een rol spelen, maar voornamelijk om mooie en motiverende figuren te maken. En dat kan met elk tekenpakket waarin je met coördinaten en herhalingsloops kunt werken. Zelfs op de gewone grafische rekenmachine kun je een heel eind komen, ook al zien de plaatjes er op zo'n apparaat natuurlijk niet zo aantrekkelijk uit. Ik heb zelf alle illustraties voor dit stuk in PostScript gemaakt (zie mijn homepage www.science.uva.nl/~craats onder 'Wiskunde in beeld').

Kindertekeningen

Uitgangspunt is het plaatje dat veel kinderen zelf wel eens getekend zullen hebben (zie [figuur 1](#)) waarbij je punten met gelijke tussenruimtes op de x -as en de y -as met elkaar verbindt zodat er een kromme lijn als omhullende ontstaat. Dat je een kromme lijn ziet die je niet getekend hebt, is verrassend en fascinerend. Wat zit daarachter? En hoe kun je die kromme nader bepalen? Als de grafiek van een functie? Of als de kromme die hoort bij een vergelijking, zoals bijvoorbeeld de eenheidscirkel hoort bij de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$? Een variant ontstaat als je de verbindingslijnen

allemaal dezelfde lengte geeft (zie [figuur 2](#)). Er ontstaat dan een andere kromme. Kun je die nader bepalen?

Uit het artikel in Euclides blijkt dat de leerlingen in het project van Drijvers c.s. eigenlijk helemaal niet aan het beantwoorden van deze voor de hand liggende en motiverende vragen zijn toegekomen. Bij het eerste probleem werd eenvoudig een functie gegeven die de mysterieuze kromme als grafiek zou hebben. De leerlingen moesten alleen maar controleren dat het klopt. Hoe je zoiets zelf vindt, werd niet gezegd. Bij het tweede probleem werd een prachtig idee gelanceerd, maar helaas ging dat bij de uitwerking ervan een beetje de mist in doordat leerlingen gedwongen werden de knoppen van het pakket te bedienen, in plaats van zelf na te denken en de wiskunde te gebruiken die ze op school geleerd zouden moeten hebben. Hoe je hier wél een prachtig project van kunt maken, zal ik nu laten zien.

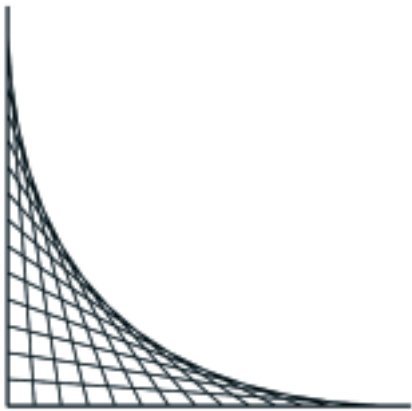
Eenvoud en symmetrie

In alle gevallen gaat het om de verbindingslijn van een punt $(a,0)$ op de x -as met een punt $(0,b)$ op de y -as (zie [figuur 3](#)). De vergelijking van die lijn is

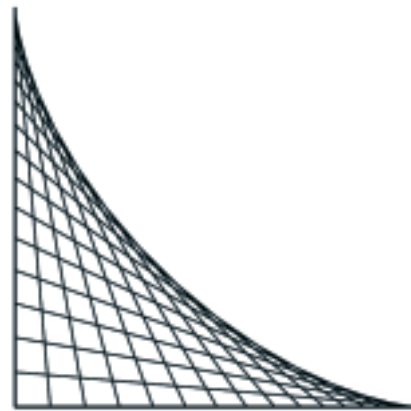
$$bx + ay = ab \quad (1)$$

In het eerste probleem ([figuur 1](#)) is de som van a en b constant. In het Euclides-stuk nemen Drijvers c.s. $a + b = 10$, maar daarmee introduceren ze een willekeurig getal 10 dat in de latere berekeningen alleen maar storend is. Een van de hoofdthema's van de wiskunde is het zoeken naar eenvoud, en in dit geval bereik je dat door $a + b = 1$ te kiezen, zoals ik dat ook in [figuur 3](#) heb gedaan. Naast vergelijking (1) geldt dus voor het eerste probleem ook

$$a + b = 1 \quad (2)$$



FIGUUR 1 Kindertekening met een kromme als omhullende



FIGUUR 2 Variant met lijnstukken van een vaste lengte

In het tweede probleem (figuur 2) is de lengte $\sqrt{a^2 + b^2}$ constant. Dan nemen we natuurlijk 1 als die lengte om de formules zo eenvoudig mogelijk te houden, dus de extra vergelijking waaraan dan voldaan moet zijn, luidt

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (3)$$

Het eerste probleem luidt dus de omhullende te vinden van de lijnen $bx + ay = ab$ onder de voorwaarde dat $a + b = 1$. Voordat je daaraan gaat rekenen, is het goed om de *symmetrie* op te merken die er in het probleem zit en die je ook in de tekening terugziet. De coördinaten x en y spelen dezelfde rol. Verwisselen van x en y (dus spiegelen in de lijn $y = x$) verandert het probleem niet. Als we dus een vergelijking voor de omhullende kromme vinden, zal die vergelijking ook symmetrisch moeten zijn in x en y , of in een symmetrische vorm gebracht kunnen worden. Verder spelen a en b ook een vergelijkbare rol. Dat houden we in het achterhoofd.

Probleem 1

Bij probleem 1 is de voorwaarde waaraan a en b moeten voldoen $a + b = 1$. De symmetrie tussen a en b gaan we nu verbreken doordat we $b = 1 - a$ stellen.

Vergelijking (1) wordt dan

$$(1 - a)x + ay = a(1 - a) \quad (4)$$

Er is nu nog maar één parameter over, namelijk a . Elke a met $0 \leq a \leq 1$ geeft een lijn, en we zoeken een vergelijking voor de omhullende van die lijnencollectie.

Nu komt het geniale idee uit het stuk van Drijvers c.s. Zij bewaren het voor Probleem 2, maar ik zal het hier al gelijk toepassen. Bekijk voor een *vaste* x -waarde x_0 een smal verticaal venstertje rond de lijn $x = x_0$ (zie figuur 4) met daarin de (delen van

de) lijnen van vergelijking (4). Als de parameter a van 0 naar 1 loopt, zie je binnen het venster de lijnen omhoog komen totdat ze bij een zekere a -waarde een maximum bereiken en dan weer naar beneden gaan. *Dat maximum zit precies bij de lijn die de raaklijn is aan de gezochte omhullende kromme!*

Nu komt de wiskunde die we geleerd hebben van pas. Maximum bepalen betekent differentiëren en de afgeleide gelijk aan nul stellen. Niet met computeralgebra, maar gewoon met de hand. De lijn (4) heeft voor $x = x_0$ als y -waarde

$$y = (1 - a) - \frac{1 - a}{a} x_0 \quad (5)$$

Je ziet dat y nog afhankelijk is van de parameter a , en dat komt goed uit, want we willen de waarde van a bepalen waarvoor deze y maximaal is. Differentieer het rechterlid dus met de quotiëntregel naar a

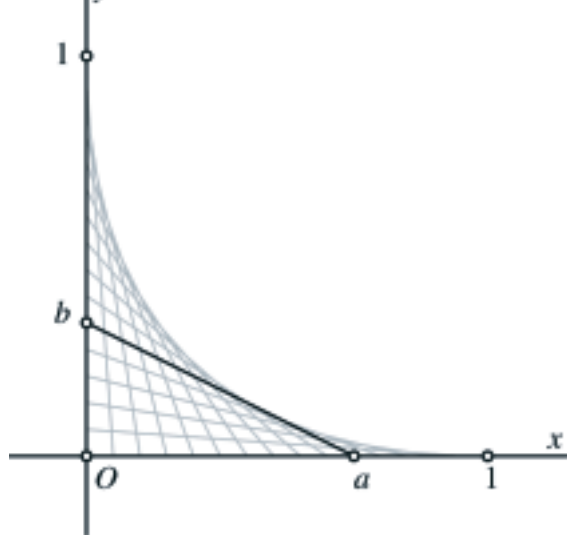
$$\frac{dy}{da} = -1 - \frac{-a - (1 - a)}{a^2} x_0 = -1 + \frac{x_0}{a^2}$$

De afgeleide is nul voor $x_0 = a^2$, dus voor $a = \sqrt{x_0}$. Voor deze waarde van a is (4) dus de raaklijn aan de omhullende kromme. De x -waarde van het raakpunt is $x_0 = a^2$ en de symmetrie van de probleemstelling geeft ons het vermoeden dat de y -waarde van het raakpunt moet voldoen aan $y_0 = b^2$. We kunnen immers net zo goed de rol van a en b verwisselen en werken met een horizontaal venstertje.

Maar als je dit te kort door de bocht vindt, kun je het ook direct verifiëren. Invullen van $a = \sqrt{x_0}$ in vergelijking (5) geeft de bijbehorende y -waarde y_0

$$y_0 = 1 - \sqrt{x_0} - (1 - \sqrt{x_0})\sqrt{x_0} = 1 - 2\sqrt{x_0} + x_0 = (1 - \sqrt{x_0})^2 \quad (6)$$

Omdat $a = \sqrt{x_0}$ geldt inderdaad $y_0 = (1 - a)^2 = b^2$ zoals we al vermoedden.



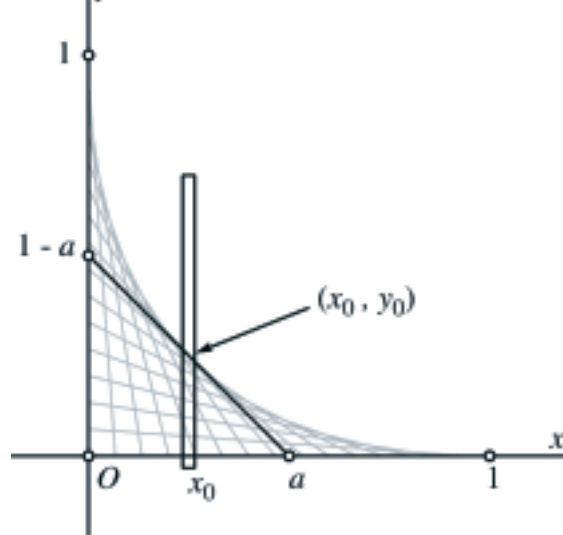
FIGUUR 3 De lijn $bx + ay = ab$

Hoe dan ook, we weten nu dat voor elk punt (x,y) op de omhullende kromme geldt dat $x = a^2$ en $y = b^2$. Wegens $a + b = 1$ wordt een vergelijking van die kromme dus in een mooie symmetrische vorm gegeven door

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad (7)$$

Er is over deze vergelijking en de bijbehorende kromme nog wel meer te zeggen, en aan het eind van dit artikel zal ik dat ook doen. Maar eerst wil ik nog even de methode recapitulieren. Bij vaste $x = x_0$ hoort een punt (x_0, y_0) op de omhullende kromme. De raaklijn aan die kromme in dat punt is één van de lijnen uit de collectie (4). De bijbehorende a -waarde vonden we via de venstermethode door (5) naar a te differentiëren en de afgeleide nul te stellen. Dat leverde $x_0 = a^2$ oftewel $a = \sqrt{x_0}$ en substitutie hiervan in (5) gaf het verband (6) tussen x_0 en y_0 waarin de parameter a niet meer voorkomt. Dit verband is, als je x en y in plaats van x_0 en y_0 schrijft, niets anders dan de *vergelijking van de omhullende kromme*! Deze vergelijking kun je door worteltrekken in de symmetrische vorm (7) brengen, maar ik heb ook aangegeven hoe je op een snellere manier tot (7) kunt komen door direct al van de symmetrie in a en b gebruik te maken, namelijk via $y_0 = b^2$ en de relatie $a + b = 1$.

Als je zo'n project in de klas doet, is het goed om aan al deze stappen en overwegingen uitgebreid aandacht te besteden. Dat geeft inzicht en bovendien kan ik me niet indenken dat een leerling daarbij niet onder de indruk komt van de kracht en de elegantie van de wiskunde die je hier gebruikt. Maar laat de leerlingen in dit stadium alsjeblieft niet te veel zelf aanmodderen. Goede sturing is hier essentieel! Verderop in dit artikel komen er nog gelegenheden genoeg waarbij de leerlingen zelf op onderzoek uit kunnen gaan.



FIGUUR 4 Het verticale venstertje bij x_0

Probleem 2

Bij Probleem 2 hebben alle verbindingslijnstukjes een vaste lengte, die we op 1 hebben gesteld. Het gaat dus om de lijnen (1) met als extra voorwaarde (3), dat wil zeggen $a^2 + b^2 = 1$ oftewel $b = \sqrt{1-a^2}$. We passen weer de methode toe van het smalle verticale venster. Vergelijking (5) wordt nu

$$y = \sqrt{1-a^2} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} x_0 \quad (8)$$

en de quotiëntregel geeft nu na vereenvoudigen

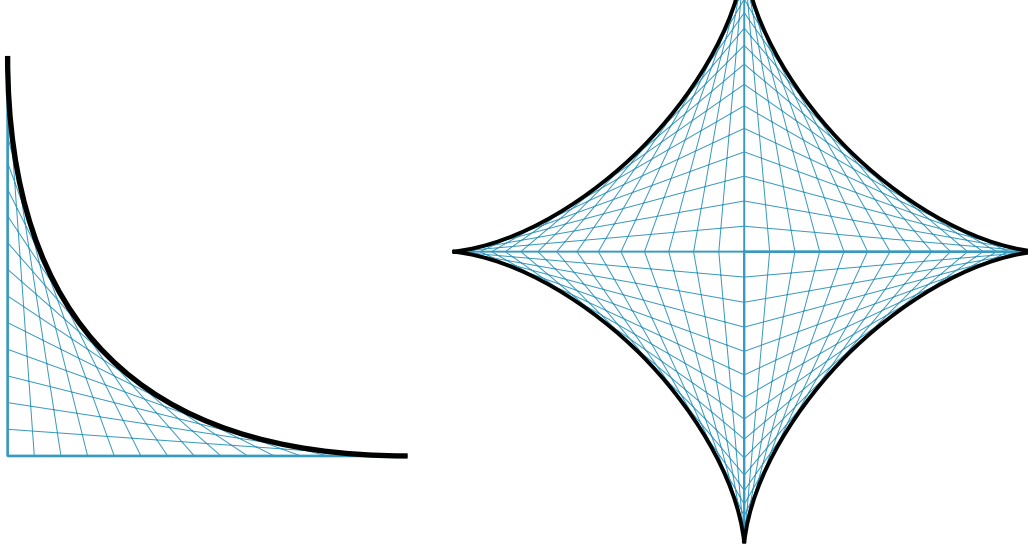
$$\frac{dy}{da} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{-1}{a^2 \sqrt{1-a^2}} x_0$$

Nogmaals: doe dit niet met computeralgebra maar met de hand. Dat is niet alleen een goede oefening in formulevaardigheid (die in het vervolgonderwijs broodnodig is!), maar met de hand kun je je resultaten ook veel beter eenvoudig en overzichtelijk houden. En pen en papier bevorderen de concentratie meer dan een computerscherm. Nul stellen van de afgeleide geeft $x_0 = a^3$ en op een soortgelijke manier $y_0 = b^3$ (symmetrie!). Wegens $a^2 + b^2 = 1$ is de vergelijking van de omhullende nu

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \quad (9)$$

Parametrisaties

Een vergelijking van een kromme is mooi, maar om hem te (laten) tekenen is een parametrisatie wel zo handig. En in dit geval is het ook niet moeilijk om zo'n parametrisatie te vinden als je gebruik maakt van de bekende relatie $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. Voor Probleem 1 (met vergelijking (7)) kun je nemen $x = \cos^4 \varphi$, $y = \sin^4 \varphi$ met $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Voor Probleem 2 (met vergelijking (9)) wordt een parametrisatie gegeven door $x = \cos^3 \varphi$, $y = \sin^3 \varphi$. In dit geval kun je φ het hele traject $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ laten doorlopen waardoor de volledige *astroïde* getekend wordt (zie ook [2], bladzijde 156, opgave 19.6 (c)).



FIGUUR 5 Parametrisaties (zwart getekend) voor de problemen 1 en 2

In **figuur 5** zie je de lijnfiguren en de omhullende krommen voor de beide problemen. Die omhullenden zijn met behulp van de parametrisaties in zwart getekend.

Generalisaties

De voorwaarden (2) en (3) zijn beide van de vorm

$$a^p + b^p = 1 \quad (10)$$

namelijk voor $p = 1$ (probleem 1) respectievelijk $p = 2$ (probleem 2). We kunnen dit generaliseren voor een willekeurige waarde van p , en zoeken dan dus naar de omhullende van de lijnen die gegeven worden door vergelijking (1), dat wil zeggen $bx + ay = ab$, onder de voorwaarde (10). De techniek met het verticale venster levert dan met $b = \sqrt[p]{1-a^p}$ de volgende vergelijking in plaats van (5)

$$y = \sqrt[p]{1-a^p} - \frac{\sqrt[p]{1-a^p}}{a} x_0 \quad (11)$$

Met behulp van de quotiëntregel krijgen we nu na vereenvoudigen

$$\frac{dy}{da} = \frac{-a^{p-1}}{(1-a^p)^{(p-1)/p}} + \frac{x_0}{a^2(1-a^p)^{(p-1)/p}}$$

Nul stellen levert $x_0 = a^{p+1}$ en evenzo $y_0 = b^{p+1}$ zodat de vergelijking van de omhullende gegeven wordt door

$$x^{p/(p+1)} + y^{p/(p+1)} = 1 \quad (12)$$

In dit geval wordt een parametrisatie gegeven door $x = \cos^{p/(2(p+1))} \varphi$, $y = \sin^{p/(2(p+1))} \varphi$

Het is leuk om op te merken dat er ook een waarde van p is die als omhullende de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ geeft, namelijk $p = -2$. Evenzo geeft $p = -4$ de 'supercirkel' $x^4 + y^4 = 1$. De waarde $p = -1$ zal problemen geven. Maar wat gebeurt er als $p \downarrow -1$ of als $p \uparrow -1$? Of als $p \rightarrow \infty$ of $p \rightarrow 0$? Kortom, genoeg stof voor verder onderzoek. Wie durft?

Nogmaals Probleem 1

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot waarden van a en b die tussen 0 en 1 liggen. Voor x en y geldt dan hetzelfde, en het verband tussen x en a en tussen y en b via $x = a^{p+1}$ en $y = b^{p+1}$ één-aan-één. Maar in het geval $p = 1$ (Probleem 1) is die beperking niet noodzakelijk. We kunnen a ook buiten het interval $[0,1]$ kiezen en de verbindingslijn van $(a,0)$ en $(0,b) = (0,1-a)$ tekenen. We krijgen dan een veel grotere omhullende kromme (zie **figuur 6**) die de beide assen raakt in $(1,0)$ respectievelijk $(0,1)$. Wat is dat voor een kromme?

We hadden met behulp van de venstermethode afgeleid dat voor elk punt (x,y) op de omhullende geldt dat $x = a^2$ en $y = b^2$. Hieruit concludeerden we $a = \sqrt{x}$ en $b = \sqrt{y}$. Maar dat geldt alleen als a en b groter dan of gelijk aan nul zijn. Voor een negatieve a of b moeten we $a = -\sqrt{x}$, respectievelijk $b = -\sqrt{y}$ nemen. Vergelijking (7) wordt dan

$$\pm\sqrt{x} \mp \sqrt{y} = 1$$

(a en b kunnen niet tegelijkertijd negatief zijn want $a + b = 1$). Kwadrateren van deze vergelijking of van vergelijking (7) geeft

$$x \pm 2\sqrt{xy} + y = 1$$

Herschrijven als $\pm 2\sqrt{xy} = 1 - x - y$ en nogmaals kwadrateren geeft

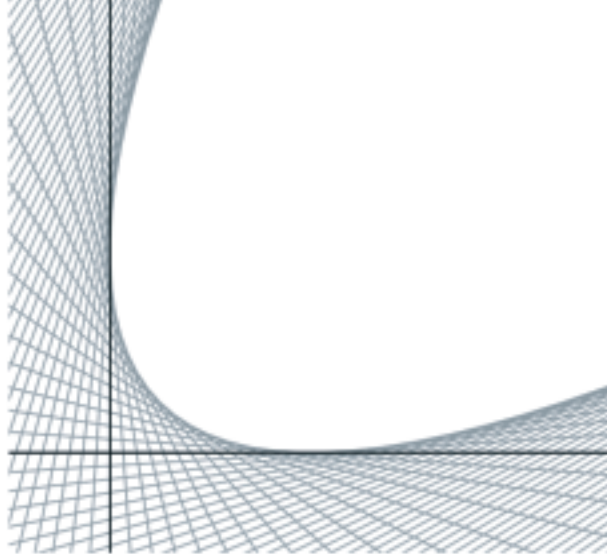
$$4xy = 1 + x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$$

en dat kunnen we ook schrijven als

$$2(x+y) = 1 + (x-y)^2$$

oftewel, via $u = x + y$, $v = x - y$

$$2u = 1 + v^2 \quad (13)$$



FIGUUR 6 De volledige omhullende voor $p = 1$

De omhullende is dus een scheve parabool met de lijn $v = 0$ oftewel $y = x$ als symmetrie-as.

Je ziet hoeveel mogelijkheden tot verdieping en herhaling van bekende stof het bovenstaande biedt: er zit blijkbaar een coördinatentransformatie $(x, y) \rightarrow (u, v)$ achter. Schets de lijnen $u = \text{constant}$ en $v = \text{constant}$ om het nieuwe stelsel, inclusief u -as en v -as, in beeld te krijgen, en controleer dat vergelijking (13) inderdaad een parabool voorstelt.

Verdere onderzoeksvragen liggen ook hier weer voor het oprapen. Hoe zit het bijvoorbeeld voor het geval $p = 3$? Komt er dan ook een mooie, bekende kromme uit?

Verwijzingen

[1] Paul Drijvers, Swier Garst, Peter Kop, Jenneke Krüger: *Rechtlijnige krommen*. In: *Euclides* 81(3), december 2005, pp. 120-125.

[2] Jan van de Craats, Rob Bosch: *Basisboek wiskunde*. Pearson Education Benelux (2005), ISBN 90-430-1156-8

Over de auteur

Jan van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.

E-mailadres: craats@science.uva.nl

advertentie

Nationale Wiskunde Dagen

Op vrijdag 2 en zaterdag 3 februari 2007 worden de

13^e Nationale Wiskunde Dagen

gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Kosten per persoon

€ 360,00 bij overnachting op een tweepersoons kamer en

€ 395,00 bij overnachting op een eenpersoons kamer.

Begin september wordt de programmaproject met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Meer informatie over de **NWD** is nu al te vinden op www.fi.uu.nl/nwd.

Inlichtingen

Ank van der Heiden, telefoon: 030-263 55 55 of e-mail: nwd@fi.uu.nl

KRAMPACHTIGHEID BIJ TEKENEN EN REKENEN

[Paul Drijvers, Swier Garst, Peter Kop, Jenneke Krüger]

In zijn bijdrage 'Eenvoud bij tekenen en rekenen' bespreekt Jan van de Craats een praktische opdracht die wij hebben ontwikkeld en uitgetest in een tweetal vwo-5 klassen. In deze PO gebruikten de leerlingen computeralgebra en ons doel was te exploreren hoe dit in de klas uitwerkt. Het verslag van onze ervaringen staat in Euclides 81(3). Graag maken we gebruik van het verzoek van de redactie om kort op het artikel van Van de Craats te reageren.

Om te beginnen waarderen we de inhoudelijke aanpak van Van de Craats. Hij beschrijft een aantal elegante doorkijkjes. Sommige daarvan leiden tot directe verbeteringen van de praktische opdracht (aandacht voor de symmetrie, gebruik van eenvoudiger constanten); andere voeren naar ons idee te ver voor gebruik in de klas. De parametrisering van de astroïde en de scheve parabool hebben wij bijvoorbeeld bewust uit de PO gelaten, al zou het laatste wel aan de orde kunnen komen door het assenstelsel te draaien. De generalisatie voegt naar ons idee niet veel toe. Niettemin is het stuk een perfecte docentenhandleiding met achtergrondinformatie.

Perfect? Nee, toch niet helemaal. Om te beginnen geeft Van de Craats een gekleurde weergave van wat zich in de klassen heeft afgespeeld. Zijn stelling dat leerlingen niet aan de kernvragen zijn toegekomen, is niet juist. Dat 'leerlingen gedwongen werden de knoppen van het pakket te bedienen, in plaats van zelf na te denken' is natuurlijk volstrekte onzin. Denkt Van de Craats dat er sancties volgen wanneer een leerling een stuk papier gebruikt of blijkt geeft van een gedachte? Het doel van de PO is natuurlijk juist om leerlingen te laten denken en de inzet van computeralgebra kan dat bevorderen. Het bewijs dat twee parametervoorstellingen van bundels lijnen, die er op het oog verschillend uitzien, toch dezelfde bundel beschrijven, is hiervan een voorbeeld.

Verder geeft Van de Craats blijk van een uiterst krampachtige houding als het gaat om werken met computeralgebra 'versus' het gebruik van pen en papier. Hij vindt dat alles met pen en papier moet: 'Nogmaals: doe dit niet met computeralgebra maar met de hand.' Los van het feit dat hij te ver gaat met de veronderstelde handmatige vaardigheden, stellen wij dat het werken met computeralgebra kan bijdragen aan formulevaardigheid en in die zin een aanvulling kan vormen op het werken met pen en papier: 'Het gebruik leidt ook tot een andere aanpak, waarbij leerlingen meer afstand nemen tot de uitvoering van de procedures en zich sterker concentreren op de probleemaanpak en op het formuleren van duidelijke opdrachten aan het programma. Dat is een abstractere manier van werken, die naar onze mening bijdraagt aan het leren van algebra.' We pleiten dus nadrukkelijk voor een uitgebalanceerde aanpak, waarbij handmatige vaardigheden niet verwaarloosd worden. Ongenuanceerde en onbewezen uitspraken als '... pen en papier bevorderen de concentratie meer dan een computerscherm' dragen daar niet aan bij.

In zijn inleiding stelt Van de Craats dat hij zich moeilijk kan indenken dat het project voor leerlingen in deze vorm erg inspirerend is geweest. Het is echter niet nodig het voorstellingsvermogen hierbij te beproeven: hij kan gewoon afgaan op de positieve reacties van leerlingen, zoals die uit de enquête na afloop naar voren kwamen, en van bekwame, ervaren docenten.

Over de auteurs

Deze bijdrage werd geschreven door de auteurs van het artikel

'Rechtlijnige krommen' in Euclides 81-3 (december 2005).

E-mailadressen: p.drijvers@fi.uu.nl, garst@planet.nl,

peterkop@worldonline.nl, j.kruger@slo.nl

DE WISKUNDEDOCENT ALS GOOCHELAAR: 142857

[Job van de Groep]



Inleiding

Goochelaars gebruiken soms rekenkundige trucjes. Door de wijze van presentatie kunnen die op zich vaak eenvoudige oefjes een magische uitstraling krijgen. Ze roepen daardoor nieuwsgierigheid en verwondering op.

De klassensituatie is een uitstekend decor voor een dergelijk mysterieus gedoe - het publiek is al aanwezig!

Ter afsluiting van de rubriek 'De wiskundedocent als goochelaar' presenteer ik hier een truc gebaseerd op de cyclische eigenschap van het getal 142857.

Sim Sala Bim!

Verloop

De goochelaar schudt een spel kaarten door de bovenste helft gelijkmatig te mengen met de onderste helft: de kaarten van de twee stapeltjes worden op de bekende wijze op de hoeken met de duimen een beetje opgetild en min of meer om-en-om in elkaar geschoven door de kaarten te laten 'vallen'. Deze procedure wordt nog één keer herhaald. In plaats van de goochelaar mag het spel ook door een toeschouwer twee keer op dezelfde manier worden geschud, als-ie behendig genoeg is. Een toeschouwer wordt vervolgens gevraagd de eerste zes *harten*kaarten waarop één cijfer staat (de 10, boer, vrouw en heer moeten dus worden genegeerd) uit het spel te nemen en van links naar rechts blind op tafel te leggen (aas = 1). Die zes getallen op die zes hartenkaarten vormen namelijk de zes cijfers van een voor de goochelaar onbekend getal. De cijfers van dat getal worden, niet zichtbaar voor de goochelaar, op een velletje papier genoteerd of in een rekenmachine ingetoetst. De goochelaar vraagt een andere toeschouwer (eventueel denkbeeldig) met een dobbelsteen te gooien en het aantal ogen te noemen. Bij een 1 moet opnieuw worden geworpen. Het zescijferige getal dat door de kaarten wordt gevormd, wordt door een toeschouwer met dat aantal ogen vermenigvuldigd. De goochelaar verwisselt daarop cyclisch een aantal kaarten. Als de toeschouwer stuk voor stuk de cijfers van het product bekend maakt en de goochelaar tegelijk de kaarten omdraait, blijkt de uitkomst van die vermenigvuldiging te worden aangegeven door die kaarten. Alom verwarring, verbazing en verwondering!

Verklaring

Vooraf wordt het spel kaarten als volgt geprepareerd. De hartenkaarten 1 (aas), 4, 2, 8, 5, 7, 9, 3 en 6 worden in dié volgorde onderop in het blinde spel gestopt en wel zó dat aas als eerste wordt gezien als het spel zou worden omgekeerd. De overige vier hartenkaarten worden willekeurig ergens in de bovenste helft van het spel gestopt. Wanneer het spel zorgvuldig op de hierboven beschreven wijze wordt geschud, blijft de volgorde van de eerste negen hartenkaarten dezelfde. En daar gaat het namelijk om: het cyclische getal 142857 moet op tafel komen te liggen. Als 142857 met een getal kleiner dan 7 wordt vermenigvuldigd, ontstaat er een getal met dezelfde zes cijfers, maar in een andere volgorde! Afhankelijk van het aantal ogen dat gegooid is, verschuift de goochelaar een paar kaarten zó dat de rechterkaart correspondeert met het laatste cijfer van de vermenigvuldiging 142857 maal aantal ogen van de dobbelsteen. Dat is eenvoudig te onthouden. Dus: als met de dobbelsteen respectievelijk 2, 4 of 5 wordt geworpen, dan worden de eerste *twee*, *vier* of *vijf* kaarten van de linker- naar de rechterkant van het rijtje verschoven. Met 3 ogen op de dobbelsteen wordt alleen de eerste kaart van links naar rechts verschoven en met 6 ogen de eerste drie. Alleen in deze gevallen vraagt de goochelaar (bij wijze van afleidingsmanoeuvre) of het aantal ogen als cijfer voorkomt in het getal. Zo niet (nee dus), dan verschuift hij het aantal kaarten dat de (afgeronde) helft is van het aantal ogen.

Transfer naar de les

Deze truc leent zich uitstekend als introductie van cyclische getallen (praktische opdracht?). Hoe komt het eigenlijk dat je na vermenigvuldiging van het getal 142857 dezelfde cijfers terug ziet? ($\frac{1}{7} = 0,1428571428571428\dots$) Zijn er nog andere getallen met een dergelijke merkwaardige eigenschap? (Jazeker!)

Noten

- Eerdere afleveringen van deze rubriek verschenen in *Euclides* 80-4 (januari 2005), 80-7 (mei 2005), 80-8 (juni 2005), 81-3 (december 2005) en 81-5 (maart 2006).

- Job van de Groep heeft recentelijk een groot aantal van zijn trucs bijeengebracht in het boekje *Gegoochel met Getallen* (Houten: EPN; ISBN 90-11-09944-3).

Over de auteur

Job van de Groep is, behalve wiskundedocent en schooldecaan vwo aan het Oosterlicht College te Nieuwegein, ook amateur-goochelaar.

E-mailadres: jvdgroep@wxs.nl

Wat adviseer je aan *wiskundig talent* in je klas?

Word Bedrijfswiskundige!!



Er zijn nog teveel leerlingen die zich niet realiseren dat hun aanleg voor puzzelen en wiskunde vele beroepsmogelijkheden geeft. De misvatting is dat je met wiskundetalent alleen docent kunt worden. Niets is minder waar. Ga bedrijfswiskunde studeren!



Na de opleiding bedrijfswiskunde heb je de unieke combinatie van bedrijfskundige kennis, ICT-vaardigheden en wiskundige diepgang om problemen en vragen uit de afwisselende praktijk van het bedrijfsleven te herkennen en met krachtige wiskundige methoden en de computer aan te pakken. De resultaten ondersteunen de klant of het management in het nemen van gefundeerde beslissingen.



Waar wordt wiskunde eigenlijk toegepast? In allerlei disciplines zoals het bankwezen, verzekeringsmaatschappijen, industrie, handel, transport, communicatie en automatisering. Het is duidelijk dat je niet geïsoleerd werkt maar je bezighoudt met uitdagingen uit andere vakgebieden, vaak in alledaagse taal en onvolledig geformuleerd. Dit verlangt een groot inlevingsvermogen van de bedrijfswiskundige en interviewtechnieken waarmee hij of zij snel hoofdzaken van bijzaken kan onderscheiden en de probleemstelling helder en kort kan verwoorden, het liefst in de taal van de wiskunde.



Vind je wiskunde het leukste vak en zit je nu op het havo of op het vwo? Ben je kritisch en kom je snel tot de kern van de zaak? Dan staat niets je in de weg om via de opleiding bedrijfswiskunde in een veelzijdige baan terecht te komen.

Je kunt bedrijfswiskunde aan de onderstaande hogescholen studeren.



Noordelijke Hogeschool Leeuwarden
www.nhl.nl

Hogeschool van Amsterdam
www.hva.nl

Fontys Hogescholen
www.fontys.nl

Hogeschool INHOLLAND
www.inholland.nl

Technische Hogeschool Rijswijk
www.thrijswijk.nl

Puzzel 817 Betegelen met halve vierkanten

In het begin van de vorige eeuw rees het probleem: kun je met ongelijke vierkanten een rechthoek betegelen? Onlangs waren wij ook met vierkanten in rechthoeken bezig, maar toen ging het om *verpakken*. Bij *betegelen* mag er geen lege ruimte overblijven.

In 1925 vond Moron een betegeling van de rechthoek van 32 bij 33 met negen vierkanten. De Bouwkamp-code hiervan is: 14, 18, 10, 4, 7, 15, 9, 1, 8. Ik laat het graag aan de lezer van deze rubriek over om de Bouwkamp-code te herontdekken en aldus de betegeling van Moron te reconstrueren.

Het duurde tot 1939 voordat Sprague een *vierkant* met ongelijke vierkanten kon betegelen. Hij had er 55 voor nodig. Natuurlijk vroeg men zich af of dat niet met minder kon. In 1940 schreven Brooks, Smith, Stone en Tutte een baanbrekend artikel in *The Duke Mathematical Journal*, waarin dit puzzelachtige probleem een zeer praktische achtergrond kreeg: stroomverdelingen in elektrische netwerken. (Een netwerk is in dit verband een 3-samenhangende planaire graaf.) Met die techniek kon het getal 55 geleidelijk worden verlaagd. Maar pas in 1978 vond Duijvestijn het minimum: 21.

Onze opgave is afkomstig van de Amerikaan Dick Hess. Wellicht is hij geïnspireerd door de vierkanten. Ook hier gaat het om betegelen met ongelijke stukken, namelijk halve vierkanten.

Opgave

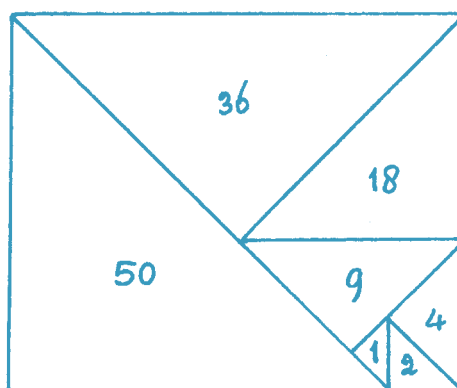
Gegeven zijn 12 puzzelstukken in de vorm van de rechthoekige gelijkbenige driehoek. De oppervlakten zijn 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 25, 32, 36, 49 en 50. Op hoeveel manieren kun je een rechthoek vormen met een deelverzameling van de gegeven stukken?

Eén van mogelijkheden ziet u in [figuur 1](#).

Als u een oplossing instuurt, kunt u volstaan met, per rechthoek, de afmetingen en een opsomming van de gebruikte oppervlakten. Voor het voorbeeld: 10×12 ; 1, 2, 4, 9, 18, 36, 50. Maar (mooie) plaatjes zijn altijd welkom, al geeft het openen van bijlagen soms problemen.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 19 juni 2006. Veel plezier!

FIGUUR 1



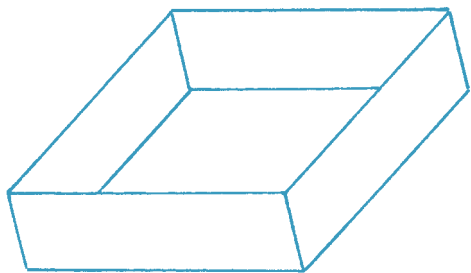
Oplossing 'Twee zesvlakken'

Er waren zeven inzendingen. De eerste kwam pas drie dagen vóór de deadline binnen, zodat ik lange tijd vreesde dat de opgaven te moeilijk of niet interessant waren. Misschien beide, want slechts vier van de zeven oplossingen zijn volledig.

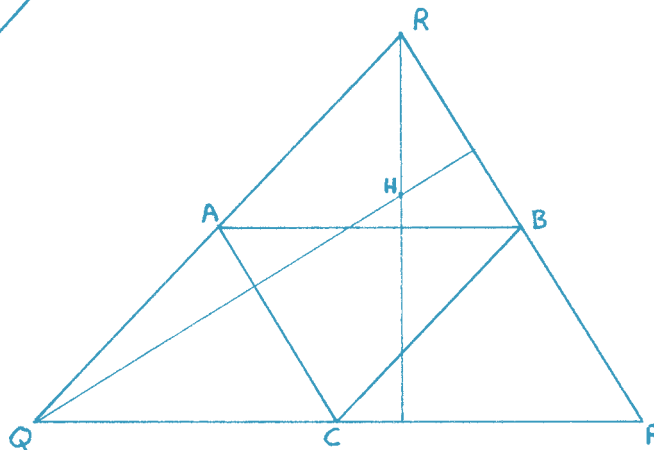
De omzetting van een spits blok naar een plat blok, zoals gevraagd in opgave 1, lukt dan en slechts dan als de som van de drie stompe hoeken kleiner is dan 360 graden. Dit gaat dus op voor willekeurige zijdelengten. Omgekeerd (opgave 2) kan ieder plat blok

Voor opgave 3 kwamen vijf (!) verschillende formules binnen, die alle equivalent bleken te zijn. In **figuur 3** ziet u een uitslag van een viervlak zijnde een helft van ons zesvlak. A , B en C zijn de middens van de zijden. Langs de lijnen AB , AC en BC vouwen we de drie punten P , Q en R omhoog. De projecties van hun banen zijn hoogtelijnen in de driehoek PQR . Het zesvlak is dan en slechts dan convex als het hoogtepunt H binnen ABC valt. Hierna is de gevraagde voorwaarde te berekenen.

De mooiste is $\tan \alpha \cdot \tan \beta > 2$. Deze werd door Herm Jan Brascamp en Lieke de Rooij gevonden. Een andere is $a^2 + b^2 \cos^2 \alpha > c^2$.



FIGUUR 2



FIGUUR 3

worden omgezet in een spits blok. Uit het feit dat het platte blok bestaat, volgt immers al dat de stompe hoeken aan bovengenoemde eis voldoen.

Herm Jan Brascamp stuurde bij zijn oplossing een papieren modelletje waarmee de situatie heel mooi te demonstreren is. Het bestaat uit een beweegbaar 'hekwerk' (zie **figuur 2**), en twee 'dekseltjes' die ieder op hun beurt als vijfde zijvlak dienen. De hoeken zijn zó gekozen dat met het ene deksel alleen het platte blok mogelijk is en met het andere deksel beide blokken.

Ladderstand

De top van de ladder luidt:

W. Doyer 362

J. Meerhof 292

T. Kool 268

W. van den Camp 263

H.J. Brascamp 239

A. Verheul 178

De volledige ladder is te zien op de website van Euclides:

www.nvww.nl/euclladder.html

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvvw.nl).

Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*-versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html).

8 22 juni 2006 9 mei 2006

za. 1 en zo. 2 juli, Oostende (België)

13e VVWL-congres

Organisatie Vlaamse Vereniging
Wiskundeleraren

31 juli tm. 11 augustus, Lunteren

Vierkant Zomerkampen

Organisatie Stichting Vierkant voor Wiskunde

do. 17 en vr. 18 augustus, Oostende (België)

T³ Europe Symposium

Organisatie KHBO en K.U.Leuven

vr. 25 en za. 26 augustus, Eindhoven

vr. 1 en za. 2 september, Amsterdam

Vakantie cursus 2006

Organisatie CWI

vrijdag 15 september, Eindhoven

2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Organisatie Stichting NWO

zaterdag 4 november, Nieuwegein

Jaarvergadering/Studiedag

Organisatie NVvW

vrijdag 24 november, op de scholen

Wiskunde A-lympiade / Wiskunde B-dag

Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook

www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie

www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie

www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde
22. Spelen en Delen

Zie ook www.nvvw.nl/zebrareeks.html en/of www.epsilon-uitgaven.nl

* Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* Wisforta - wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* Honderd jaar Wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW.

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:

www.nvvw.nl/Publicaties2.html

MATRIX

Innovatieve en bruikbare ict

De Digitale Instapmodule van *Matrix*, de nieuwe wiskundemethode van Malmberg, heeft verrassende voordelen:

- test volledig automatisch kennis van individuele leerling of klas;
- biedt remediërende stof toegespitst op leerling;
- garandeert aansluiting tussen VO en basisonderwijs;
- te gebruiken naast elke wiskundemethode;
- vergt slechts 1 lesuur in het computerlokaal.

De Digitale Instapmodule maakt deel uit van *Matrix*, een complete nieuwe wiskundemethode van Malmberg. Vanaf schooljaar 2006-2007 kunt u met de hand- en (leer)werkboeken van *Matrix* aan de slag. Daarnaast biedt *Matrix* de ict aan in de vorm van een ePack. Onderdeel van ePack is *Studiehulp* waarmee scholieren in het voortgezet onderwijs vanaf het cursusjaar 2006-2007 beschikken over betrouwbare en verhelderende informatie voor schoolopdrachten, in een veilige internetomgeving.



De Digitale Instapmodule van *Matrix* (DIM) bestaat uit drie onderdelen:

1. Het leerlingprogramma

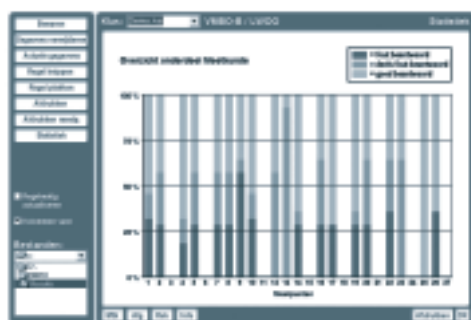
De Instaptoets test de kennis en vaardigheden van de individuele leerling op de 100 meetpunten die essentieel zijn in de overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs bij rekenen/wiskunde.

2. Het docentenprogramma

Het Leerling-Volg-Systeem genereert voor de docent een helder overzicht van individuele en klassikale verschillen in wiskundige kennis en vaardigheden. De eigen les kan daarop worden aangepast.

3. Het setup-programma

Met de Setup kan de docent de hele module op maat instellen door per klas, per niveau (vmbo-b (k) lwoo, vmbo-gt (vmbo-k), havo (vmbo-t), vwo (havo) en per onderdeel de gewenste meetpunten te selecteren.



Bel voor meer informatie de afdeling Voorlichting (073) 628 7554 of kijk op **www.matrix-malmberg.nl**. Bel voor uw bestelling naar onze afdeling Klantenservice (073) 628 8766.



Uitgeverij Malmberg • Postbus 308 • 5201 AH 's-Hertogenbos



Malmberg