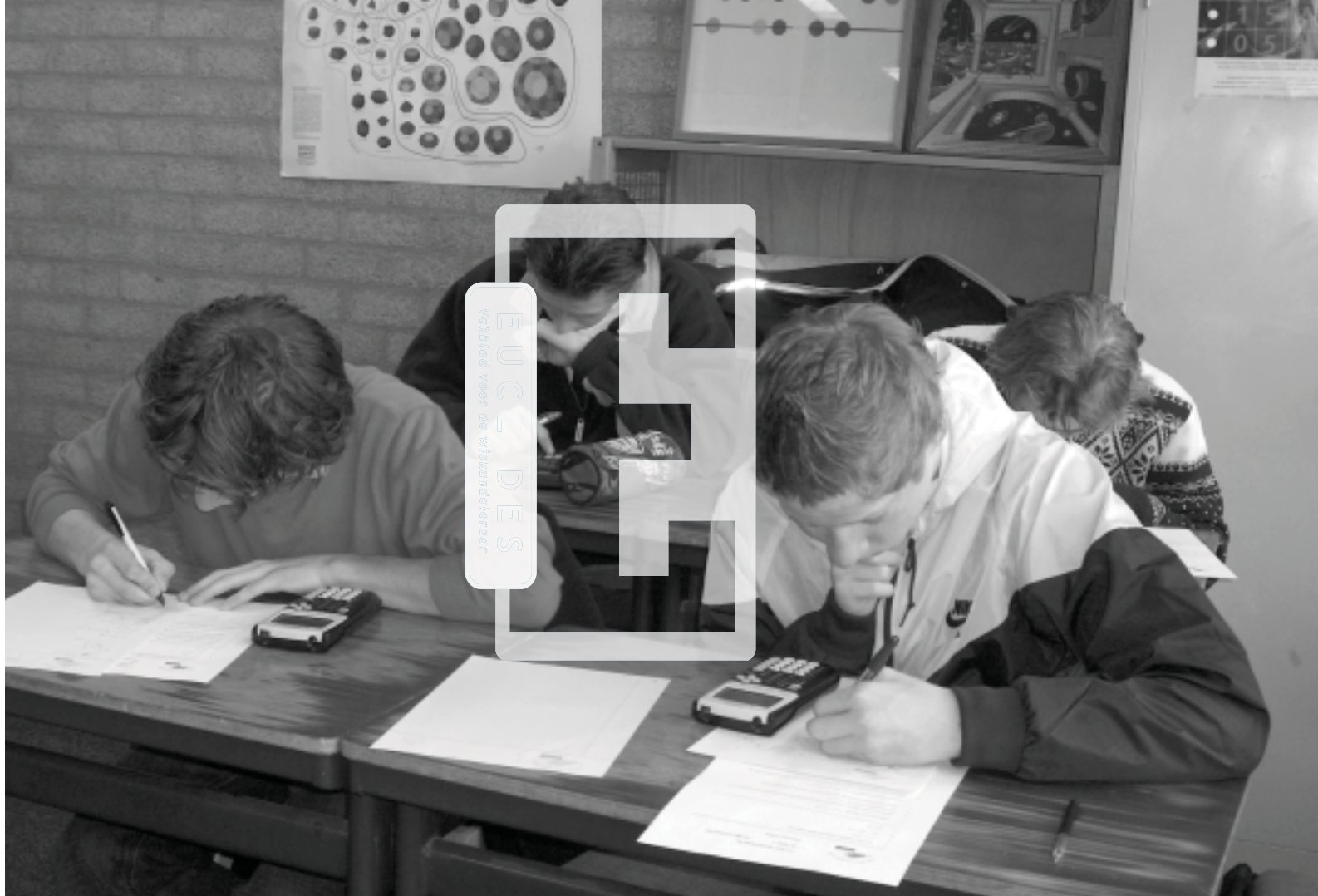


AANSLUITING VWO-WO DIGITAAL TOETSEN EXAMENBESPREKINGEN

april
2006/nr.6
jaargang 81





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
 Klaske Blom
 Marja Bos, hoofdredacteur
 Rob Bosch
 Hans Daale
 Gert de Kleuver, voorzitter
 Dick Klingens, eindredacteur
 Wim Laaper, secretaris
 Jos Tolboom
 Joke Verbeek

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
 Marja Bos
 Houtsnip 22, 7827 KG Emmen
 e-mail: redactie-euclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
 Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
 Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvww.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van
 Wiskundeleraren

www.nvww.nl



Voorzitter:
 Marian Kollenveld,
 Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
 tel. 070-3906378
 e-mail: m.kollenveld@nvww.nl

Secretaris:
 Wim Kuipers,
 Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
 tel. 038-4447017
 e-mail: w.kuipers@nvww.nl

Ledenadministratie:
 Elly van Bommel-Hendriks,
 De Schalm 19, 8251 LB Dronten
 tel. 0321-312543
 e-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
 productie TiekstraMedia, Groningen
 druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
 Leden: € 46,50
 Studentleden: € 26,50
 Gepensioneerden: € 31,50
 Leden van de VWW: € 31,50
 Lidmaatschap zonder Euclides: € 31,50
 Bijdrage WwF: € 2,50
 Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
 Niet-leden: € 50,00
 Instituten en scholen: € 130,00
 Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
 Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
 Gert de Kleuver
 De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
 e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
 tel. 0318-542243

Indien afwezig:
 Freek Mahieu
 Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
 e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
 tel. 0411-673468

6

april 2006 JAARGANG 81

281

Van de redactietafel
[Marja Bos]

282

Wiskunde als kritische succesfactor?
[Henk Broer]

286

Digitaal toetsen met Maple T.A.
[Metha Kamminga]

291

Veertig jaar geleden
[Martinus van Hoorn]

292

De (verborgen) wiskundeproblematiek
van taalzwakke leerlingen
[Corine van den Boer, Dolly van Eerde]

298

Bèta-projectweek op het Calandlyceum
[Bert Kruijer]

301

De wet van Benford
[Henk Pfaltzgraff]

304

Digitale wiskunde oefenomgeving
[Christian Bokhove e.a.]

308

Over getallen, rekenen en structuren
[Bert Zwaneveld]

312

Boekbespreking / Basisboek wiskunde
[Frans Martens]

313

Boekbespreking / Babylonische
Wiskunde (Zebra 20)
[Jan van de Craats]

316

Examenbesprekingen
[Conny Gaykema]

317

Van de bestuurstafel
[Wim Kuipers]

318

Recreatie
[Frits Göbel]

320

Servicepagina

Voorpagina: TrudiSigned, Krimpen aan
den IJssel

Aan dit nummer werkte verder mee:
Sam de Zoete.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Redactie

Intern hadden we als redactie eerder dit jaar wat te vieren: redacteur Rob Bosch promoveerde aan de Universiteit van Tilburg op een interessant onderzoek dat te maken had met, simplistisch gezegd, de wiskunde achter verkiezingen en andere keuzeprocessen. Rob, nogmaals gefeliciteerd! Door de hectiek tijdens de afronding van zijn promotieonderzoek én doordat hij te kampen kreeg met wat vervelende en hardnekkige ziekteverschijnselen, heeft Rob dit jaar weinig gelegenheid gehad om te schrijven aan zijn altijd weer interessante wiskunderubriek voor Euclides, dit jaar voorzien van de passende titel *(Wis)Kundig Kiezen* (zie de nummers 1 en 2 van deze jaargang). Maar in de volgende jaargang zal hij zijn rubriek weer oppakken.

CE-syllabi wiskunde A en B

In februari vonden de CEVO-raadplegingen plaats over de concept-syllabi voor de centrale examens wiskunde A en B havo (vanaf 2009) en vwo (vanaf 2010). Belangrijk punt van aandacht was de algebra: welke eisen willen we binnen het Centraal Examen gaan stellen aan de algebraïsche kennis en vaardigheden van de diverse groepen examenkandidaten? Het was de bedoeling tijdens de raadpleging ook uitgebreid van gedachten te wisselen over toekomstig gebruik van grafische rekenmachine en formulekaart, maar uiteindelijk ontbrak daartoe de tijd. Jammer, want over dit punt is ongetwijfeld het laatste woord nog niet gesproken! Over wiskunde C (vwo) wordt binnenkort een aparte raadpleging georganiseerd. Over wiskunde D hield de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) al eerder in het kalenderjaar een veldraadpleging; zie de redactietafel van het maartnummer van Euclides. Overigens leggen wiskunde D kandidaten geen Centraal Examen af; voor dat vak wordt door de CEVO dus geen syllabus gemaakt.

Inhoud

In het openingsartikel van dit nummer spreekt cTWO- en NL&T-stuurgroeplid Henk Broer zijn zorg uit over het gebrek aan ‘mathematical literacy’ bij Nederlandse scholieren en studenten, en vraagt hij aandacht in het voortgezet onderwijs voor de onderlinge verwevenheid van de bètavakken. Henk betreft in deze problematiek bovendien de internationale context. Gelukkig is het niet alleen kommer en kwel in ons wiskundeonderwijs. Sinds een paar jaar biedt de Wiskunde Scholen Prijs de gelegenheid aan wiskundesecties om anderen eens te laten zien wat men zoal aan mooie, bruikbare activiteiten organiseert. In dit nummer van Euclides schrijft WSP-prijswinnaar Bert Kruijer over een interessant vakoverstijgend project rond GIS, het Geografisch Informatie Systeem. Dat taal een factor van gewicht kan zijn in het leren van wiskunde, is natuurlijk geen nieuwe constatering. Hoe problemen van taalzwakke leerlingen getackled kunnen worden met behulp van taalgericht wiskunde-onderwijs, dat laten Corine van den Boer en Dolly van Eerde zien in hun bijdrage over het project Wisbaak. Digitaal toetsen en oefenen biedt fantastische mogelijkheden. Hierover wordt gerapporteerd in twee uitgebreide artikelen, op de pagina’s 286 en 304. In allerlei ‘echte’ situaties beginnen getallen merkwaardig genoeg vaker met een 1 dan met een 9. Hoe dat precies zit, daarover schrijft Henk Pfaltzgraff in zijn stuk over de Wet van Benford. Op de Verenigingspagina’s vindt u een overzicht van de regionale examenbesprekingen, vanaf eind mei. Persoonlijk vind ik het altijd weer zinvol én plezierig om met collega’s van gedachten te wisselen, niet zozeer over punten-en-komma-kwesties bij de examencorrectie als zodanig, maar juist ook naar *aanleiding* daarvan: wat streven we na met al die jaren wiskundeonderwijs, en hoe denken we dat te kunnen bereiken?

WISKUNDE ALS KRITISCHE SUCCESFATOR?

[Henk Broer]

Inleiding

Wiskunde onderscheidt zich als een discipline die vele millennia oud is, en die in samenhang en verwevenheid met de andere wetenschappen en de technologie een onmisbaar onderdeel is van de huidige complexe samenleving. Dit stuk gaat over lopende ontwikkelingen rond het schoolvak wiskunde zoals deze zich in het basis- en voortgezet onderwijs (havo-vwo) afspelen. We zullen ingaan op een aantal misstanden en er wordt een lange termijn toekomstperspectief geschetst. Een eerste punt is het verschijnsel dat scholieren gebrek aan 'mathematical literacy' vertonen, hier bedoeld in een tamelijk technische zin, inclusief algebraïsche en rekenvaardigheden. Dit gebrek, dat zich de laatste jaren in sterk toenemende mate voordoet, wordt niet alleen geconstateerd in de bètafaculteiten van de universiteiten, maar ook in andere delen van het afnemend veld, waaronder economische, sociale en medische faculteiten. Dit onderwerp heeft het afgelopen halfjaar flink aandacht gekregen in de geschreven pers en op tv, niet in de laatste plaats dankzij de actie 'LieveMaria' van 10.000 bètastudenten verspreid over het hele land en geïnitieerd door de studentenvereniging 'De Leidsche Flesch', die ernstig klagen over hun achterstand in dit opzicht. Een tweede punt is het feit dat op dit moment de onderlinge verwevenheid van de bètavakken en de centrale rol die wiskunde hierin speelt, onvoldoende uit de verf komt. Deze bèta-verwevenheid komt naar voren in de profielwerkstukken en ook in het nieuwe bètavak Natuur, Leven & Techniek (NL&T). Mijn stelling is dat de uitdagingen hiervan niet succesvol kunnen worden aangegaan zonder voldoende mathematical literacy.

Wat er zoal mis is

Om welke tekorten gaat het eigenlijk? De meeste vervolgoopleidingen vragen van de scholieren een 'voldoende' mate van reken- en formulevaardigheid en enige parate en samenhangende kennis op het gebied van elementaire functies, zoals rationale functies, de exponentiële functie, goniometrische functies en hun inversen. Dit geheel is inclusief het

soepel omgaan met grafieken, afgeleiden, etc. Wat hier precies 'voldoende' is, kan afhangen van de vervolgoopleiding en dus van het gekozen profiel. Gedeeltelijk kan hier ook een beroep gedaan worden op de (grafische) rekenmachine (GR), hoewel de vaak tamelijk oppervlakkige inzet van de GR ook onderdeel van het probleem vormt.

Maar er is meer... Wat veel vervolgoopleidingen volgens mij eigenlijk zouden wensen is dat de bètavakken, in het bijzonder wis- en natuurkunde, in een voldoende mate van onderlinge samenhang aan de orde zijn geweest in het voortgezet onderwijs. Dit betreft zeker de infinitesimaalrekening (de 'calculus' als geïnitieerd door Newton en Leibniz), tenslotte één van de grootste intellectuele verworvenheden tot nu toe en waarzonder de moderne, van technologie doordrenkte maatschappij volstrekt ondenkbaar zou zijn. Dit geeft een prachtige en inspirerende gelegenheid wiskundige concepten op diepgaande wijze te laten functioneren in een wereld van contexten, hetgeen op uitdagende wijze kan bijdragen aan de vorming van de mathematical literacy. Een voorbeeld hiervan wordt gevormd door het klassieke probleem van de kogelbanen in een constant zwaartekrachtsveld, maar er is veel meer. Ook is de samenhang van wiskunde met de schoolvakken biologie, scheikunde en economie op dit moment mondjesmaat. Dit terwijl de grote wetenschappelijke ontwikkelingen zich onder meer afspelen in de biomathematica en -informatica, waaronder biostatistiek, en natuurlijk ook in de mathematische fysica. Hierin toont wiskunde zich als de kritische succesfactor. Biologische voorbeelden zijn onder meer aan te treffen in de gentechnologie (waar veel statistiek nodig is), in de populatiedynamica (dynamische systemen) en in de neurobiologie, waarin grote systemen van interagerende cellen (coupled cell networks) voorkomen, die worden benaderd met wiskundige methoden, gedeeltelijk verwant aan statistische fysica.

Dergelijk ontwikkelingen zijn ook van belang voor de profielwerkstukken in het tweedefase-onderwijs. Zonder een behoorlijke mathematical literacy blijft hier echter niet veel meer van over dan 'cut and

paste' van internet. Ook vereist dit alles een grotere samenhang in de bètakennis van de scholieren dan nu het geval is, hetgeen meteen ook een grotere vakoverstijgendheid van de leraren veronderstelt. Zolang dit allemaal erg hapert, zal de boodschap van 'wiskunde als kritische succesfactor' zeker niet over het voetlicht komen, vandaar het vraagteken in de titel van dit stuk.

Mathematical literacy houdt meer in dan alleen formulevaardigheid en symbol sense; ook redeneren en inzicht speelt een centrale rol. In een vorig nummer van 'Euclides'^[1] is reeds uitvoerig gesproken over het grote belang van redeneren, argumenteren en bewijzen in het voortgezet onderwijs. Dit geldt zowel binnen de wiskunde als in de aangrenzende disciplines. Hierbij is het onder meer belangrijk dat de scholieren in de omgangstaal scherp kunnen redeneren met termen als 'want', 'dus', 'als', 'dan', 'omdat', etc.

Hoe dit komt

Zoals gezegd wordt bovenstaand probleem inmiddels als zodanig in bredere kring erkend. Hier gaan we natuurlijk oplossingsgericht mee aan het werk, maar toch is het nuttig even de revue te laten passeren waar deze problemen zoal vandaan komen of mee samenhangen. Voor een deel betreft dit open deuren, waaraan ook de pers recentelijk niet geheel aan voorbij gaat.

Als eerste wil ik noemen de toestand rondom de praktijk van het rekenonderwijs op de basisschool, waar leerlingen het rekenen nogal eens moeten leren van leerkrachten die zelf de aardigheid en vaardigheid erin missen. Dit onderwerp heeft de laatste tijd veel aandacht gekregen, waarbij met name de lage kwaliteit van de bijbehorende lerarenopleiding PABO onder de loep is genomen, en ik begrijp dat er inmiddels verbeteringen op til zijn. Het lijkt overigens nogal evident dat goed en begrijpend rekenen een belangrijke inleiding is op de wiskundige vorming en dat het een onmisbaar onderdeel vormt van bijna alle uitwerkingen van wiskundige problemen.

Een ander probleem is de veelal nogal fragmentarische en geïsoleerde behandeling van belangrijke technieken (zoals vierkantsvergelijkingen of differentiaalrekening in de mechanica) op het havo-vwo. De basis hiervan wordt niet stevig genoeg gelegd en er is te weinig tijd en aandacht voor routineverwerving en structureel onderhoud. Hiermee samen hangt het maar al te vaak enigszins klakkeloze gebruik van de grafische rekenmachine (GR), die ten onrechte bij veel leerlingen elementair denkwerk (hoofdrekenen en dergelijke) is gaan vervangen. In zulke omstandigheden staat de GR inzicht eigenlijk alleen maar in de weg. Een veelgehoorde tegenwerping is dat dit alles extra tijd zou kosten in het toch al zo krappe

programma. Mijn stelling is echter, dat als er vanaf het basisonderwijs meer aandacht zou zijn voor een goed onderhouden, groeiend en samenhangend pakket van routinematige algebraïsche en rekenvaardigheden, er wellicht zelfs wel tijd te winnen zou kunnen zijn. (In ieder geval hoeft de GR dan niet meer zo vaak uit de tas gepakt te worden.) Een dergelijk pakket aan basistechnieken is een noodzakelijk apparaat voor de leerlingen om meer diepgaande problemen aan te pakken, zoals ook hierboven betoogd. Gelukkig zijn ook wat betreft het gebruik van de GR verbeteringen op til.

Verder werkt de manier waarop de meeste scholen met het 'studiehuis' omgaan niet erg in het voordeel van het ontwikkelen, instandhouden en verbeteren van zo'n pakket aan vaardigheden. Het lijkt erop dat door het vaak geringe contact tussen leraar en leerling in deze fase, de in dit opzicht toch al vrij zwakke ontwikkeling bij de meeste leerlingen gedurende langere tijd stilstaat.

Een langere-termijneffect is uitgegaan van de loskoppeling van de (tweedegraads) lerarenopleiding van de universiteiten in de jaren 1970. Hierdoor is een hoop broodnodig contact, voor die tijd op institutionele wijze aanwezig, weggefallen. Dat er recentelijk verbetering is gekomen via de inrichting van nieuwe tweedegraads lerarenopleidingen aan de universiteiten ('Bachelors voor de Klas') is uiteraard alleen maar verheugend.

Deze problematiek blijkt veel verder te reiken dan alleen de bètasector, zoals ook blijkt uit stukken in de landelijke pers van Cyrille Offermans, Piet de Rooy en vele anderen. Zo komen allerlei technici (waaronder langzamerhand ook medische specialisten) uit verre landen, waar de frustratietolerantie hoger ligt en de kinderen dus (?) beter leren rekenen. Verder is er een tendens gaande om backoffice werk uit te besteden in dergelijke lagelonenlanden (een technische term hiervoor is 'outsourcing'); een aantal westerlingen wordt hiervan slapend rijk. De vraag wat er gaat gebeuren wanneer die lage lonen vergelijkbaar worden met de onze, is niet zo moeilijk te beantwoorden: het nu nog rijke westen zal een groot nieuw ontwikkelingsland worden. Ondertussen zullen wij hier steeds meer moeite krijgen onze infrastructuur op velerlei gebied (waaronder medisch) in stand te houden. In de VS is deze neergaande spiraal al veel verder ontwikkeld, met alle mogelijke gevolgen van dien. Het is geen wonder dat de evolutietheorie in sommige staten niet langer gangbaar is op scholen.

Uiteraard is het niet gewenst hier te gaan zwartepieten. Een voorzichtig geformuleerde conclusie is dat het afnemend veld kennelijk andere verwachtingen heeft van de abiturienten dan het voortgezet onderwijs. De discussie over dit onderwerp is recentelijk ontketend. Het staat overigens als een

paal boven water dat de universiteiten in dit opzicht boter op hun hoofd hebben: enkele jaren her hebben ze immers, uit angst voor een te lage instroom van eerstejaarsstudenten, de verplichting van het NT-profiel voor de bèta-opleidingen geschrapt. Dit heeft de boel danig op de kop gezet.

Recente ontwikkelingen

Om te beginnen kan gezegd worden dat bovenstaande problematiek tot voor kort nog op geen enkele politieke agenda stond. Daarentegen zijn per 2007 nieuwe havo- en vwo-programma's voorzien, met een nieuwe onderverdeling in wiskunde A, B, C, D en een discipline-overstijgend vak Natuur, Leven & Techniek (NL&T). Inhoudelijk worden hiervoor voorbereidingen getroffen binnen de ministeriële vernieuwingscommissies van de disciplines en in de commissie voor de natuurprofielen, waarin vertegenwoordigers van het havo-vwo, het hbo en het wo zitting hebben. Het goede nieuws is hier dat er zo op gestructureerde wijze nieuwe en boeiende leerstof bij komt. Denk hierbij aan zaken als de Zebra-reeks, het bestaan waarvan kennelijk inmiddels ook tot ministeriële kringen is doorgedrongen. Ook kan hierbij een grotere coördinatie binnen en tussen de vakken worden nagestreefd, die nu extra van belang wordt. Hierbij zou mijns inziens de onderlinge samenhang van de bètavakken, behalve in NL&T en in de profielwerkstukken, ook al vroeger in bepaalde leerlijnen veel meer vorm moeten gaan krijgen: jong geleerd, oud gedaan. Nu is de tendens vaak, wiskundig getinte onderwerpen óf slechts oppervlakkig en beschrijvend te behandelen óf ze uit te stellen tot later. De eerste oplossing is demotiverend voor de betere leerling en de tweede oplossing is mosterd na de maaltijd voor iedereen.

Het slechte nieuws is ondertussen dat over de hele bètalijn de urenaantallen drastisch omlaag gaan. Het feit overigens dat er in de recente ontwikkelingen tussen kabinet en Tweede Kamer op het havo-vwo uren 'bijkomen' betekent natuurlijk alleen maar dat een klein deel van de geplande urenvermindering ongedaan gemaakt zal worden. De overblijvende reductie van het aantal contacturen blijft nog steeds veel te groot.

Conclusies

Wat kunnen we met z'n allen doen, gegeven de vele beperkingen?

We moeten allereerst zorgen dat het probleem van mathematical literacy en de onderlinge verwevenheid van de bètavakken de komende tijd niet weer van de politieke agenda verdwijnt! Belangrijke doelstelling lijkt me dat de leerlingen zo worden opgevoed dat ze de samenhang tussen de vakken kennen en daarmee kunnen werken via een goed onderhouden pakket van algebraïsche en rekenvaardigheden. De leraren moeten daarom ook genoeg weten van de belerende vakken. Dat laatste zou op de lerarenopleidingen

in de toekomst veel meer aan de orde moeten komen dan nu het geval is; denk hierbij ook aan de brede bacheloropleidingen die de verschillende universiteiten aan het opstarten zijn. Verder moeten bij- en nascholing hier hulp bieden.

Natuurlijk moeten de universiteiten, inclusief alle raden, vakverenigingen en commissies, en onder meer het KWG en de NVvW, de gelegenheid mee te denken over de inhoud en de invulling van het havo-vwo met beide handen aangrijpen, daarbij diensten aanbiedend zoveel ze kunnen. Dat gebeurt dan in samenhang met de vernieuwingscommissies, schrijversteams, etc., al is het alleen maar door mentale ondersteuning en facilitatie. Het gaat daarbij om verdieping in wiskunde en verbreding richting de andere disciplines.

Hiertoe zal de bij- en nascholing van leraren een belangrijker plaats moeten gaan innemen dan nu het geval is: leraren moeten zich goed op de hoogte laten houden met betrekking tot de nieuwe ontwikkelingen in de exacte wetenschappen. De instellingen van wo en hbo kunnen, in goed overleg met bijvoorbeeld de NVvW, toeleveraar zijn van modules voor NL&T en wiskunde D, masterclasses organiseren voor leraren en leerlingen en zorg dragen voor de bijbehorende bij- en nascholing. Voor zover ik dat kan overzien, is hier van de aanbodzijde enthousiasme aanwezig: veel universiteiten staan klaar met interessant materiaal en hebben de bereidheid tot het leveren van bij- en nascholing. Uiteraard heeft dit ook een financiële kant, waarover bij instanties als het Platform Bèta Techniek en NWO aan de bel kan worden getrokken. Hierbij ontmoeten we overigens nóg een bierkaai, namelijk de geldbestedingspatronen van de scholen zelf. In de huidige stand van zaken wordt bij- en nascholing van leraren in financieel opzicht niet erg gefaciliteerd door het management van veel scholen.

Hoewel mathematical literacy nu op allerlei agenda's staat en tijdelijk een hoop aandacht krijgt in de pers, is het goed op te merken dat de hier gesignaleerde problemen geen eenvoudige, kortetermijnoplossingen toelaten: het betreft immers ook de condities op het basisonderwijs, de PABO, de eerste- en tweedegraads lerarenopleidingen, etc. Wat mijns inziens belangrijk is dat het probleem nu algemeen erkend wordt en dat men een doel 'aan de horizon' wil stellen, waar stapsgewijs en in goed onderling overleg naar kan worden toegewerkt door alle betrokken partijen.

We mogen ondertussen blij zijn met de steun van de LieveMaria-studenten. Wellicht is deze adequate reactie een onverhoopt positief gevolg van het studiehuis. De huidige minister van OC&W luisterde tot voor kort eigenlijk nauwelijks naar argumenten 'uit het veld', neemt wel beslissingen en wuift daarna bezwaren weg. Hopelijk wordt dat nu beter met de vernieuwingscommissies. Met de bezwaren van rechtstreekse slachtoffers

(in casu de studenten) wordt echter wel enige rekening gehouden. Het zou heel goed zijn als er uit nog meer onverdachte hoeken steun kwam. Ik denk aan fysici, technici, etc., maar vooral: uit het bedrijfsleven. Het zou nuttig zijn als de directeurs van bijvoorbeeld Shell, Philips, AKZO en Unilever te hoop zouden lopen tegen dit beleid. Dat dit niet gebeurt, komt waarschijnlijk omdat ze zich wel redden. Als het tij niet keert, verplaatst men gewoon de laboratoria naar lagelonenlanden, waar bovendien beter gerekend wordt; zie ook bovenstaande opmerkingen over outsourcing. Een drastische toename van mathematical literacy en bèta-verwevenheid zal echter hard nodig zijn om

de achterstand in de Nederlandse kenniseconomie weer enigszins in te lopen.

Noot (red.)

[1] *Euclides*, jaargang 81, nummer 4

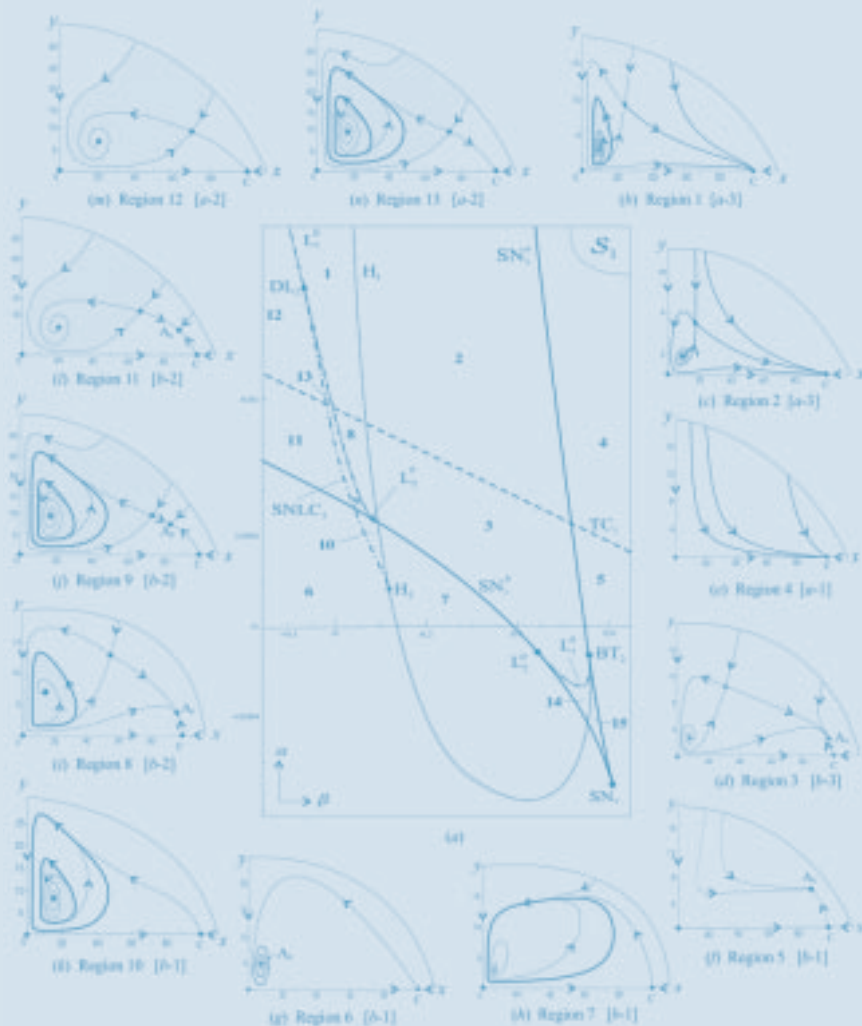
Over de auteur

Henk Broer is hoogleraar wiskunde aan de RuG, tevens lid van de vernieuwingscommissie wiskunde CTWO en van daaruit lid van de stuurgroep NL&T.

E-mailadres: broer@math.rug.nl

URL: www.math.rug.nl/~broer

FIGUUR 1



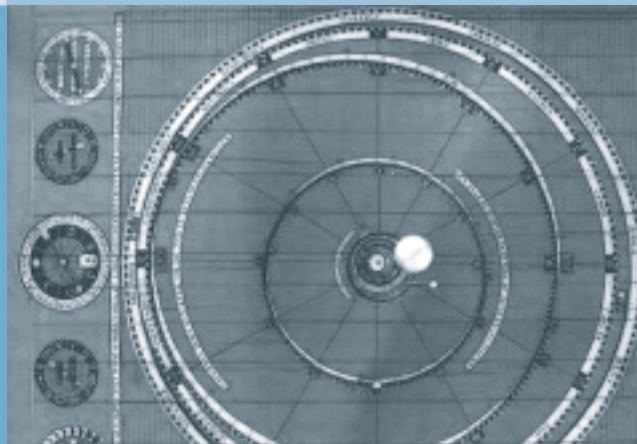
FIGUUR 2

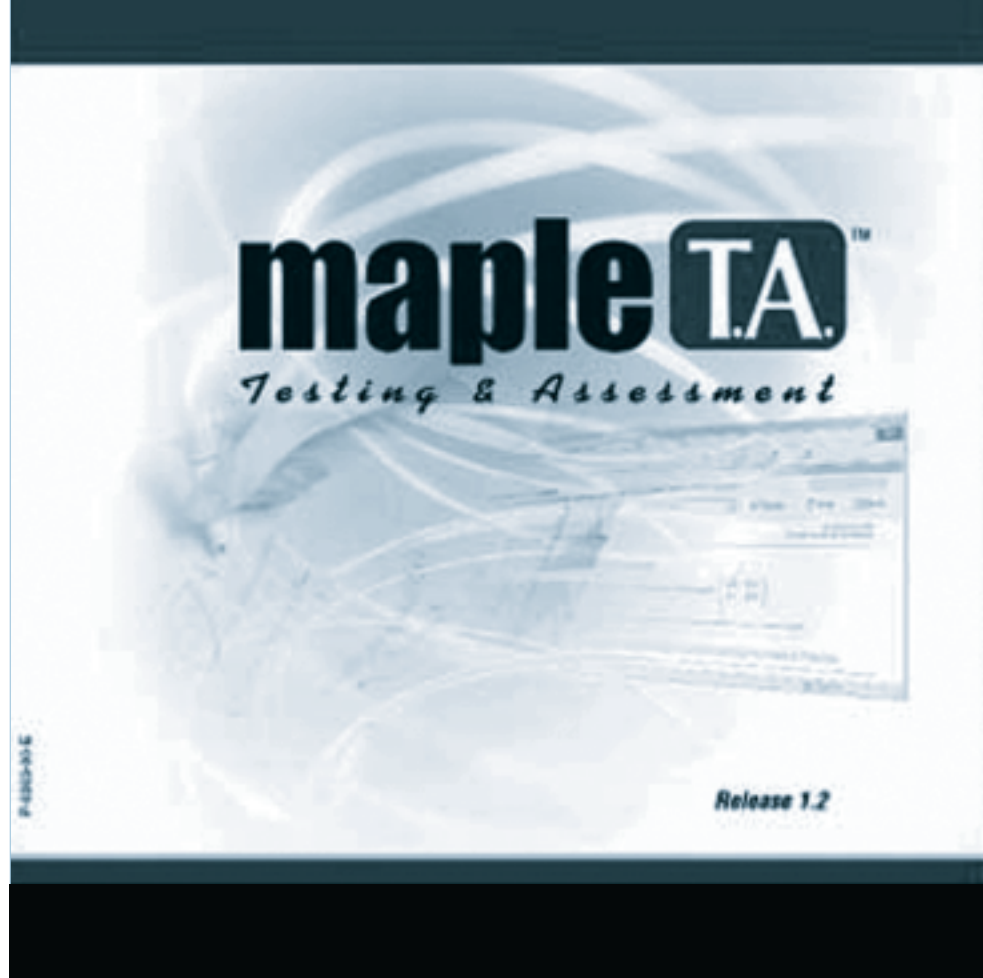
Een roofdier-prooi model in afhankelijkheid van populatieparameters zoals α en β , die samen een groot aantal biologische aspecten incorporeren, zoals onderlinge competitie tussen roof- en prooidieren en de mate waarin een groter aantal prooidieren zich succesvol kan verdedigen tegen een aanval van roofdieren.

Langs de x-as staat de dichtheid van prooidieren en y stelt de dichtheid van roofdieren voor. Voor de gebieden 1 tot en met 13 in het parametervlak (alleen $\alpha \geq 0$ is relevant) zijn faseportretten getekend die de bijbehorende dynamica weergeven. In een aantal gevallen sterft de roofdierpopulatie uit, maar in een aantal andere is er periodieke variatie van zowel roof- als prooidieren.

Het Zonnestelsel volgens Eise Eisinga (Franeker, 1781) in het Eisinga Planetarium in Franeker.

Dit klassieke systeem, waarbij Zon en planeten worden opgevat als puntmassa's, is nog steeds onderwerp van studie. Zo heeft de Fransman Jacques Laskar recentelijk betoogd dat de dynamica ervan chaotisch is, met merkbare effecten pas over een tijdsspanne van de orde van 100.000.000 jaar. Daar had Eisinga niet op gerekend, maar het zal onze tijd nog wel duren. In de statistische fysica stelt men belang in systemen die aanmerkelijk meer deeltjes bevatten, benaderd als oneindig groot. Dan blijken er verschillende globale aggregatietoestanden op te kunnen treden; denk bijvoorbeeld aan ijs, water en damp en de bijbehorende faseovergangen. Dergelijke grote systemen komen in de biologie ook voor en





DIGITAAL TOETSEN MET MAPLE T.A.

Open vragen bij wiskunde zijn nu ook digitaal te toetsen.

[Metha Kamminga]

Inleiding

Op de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden (NHL) is het project *Wisnet* in ontwikkeling met als doel studenten de mogelijkheid te bieden wiskundekennis die de student ooit gehad heeft in voorgaand wiskundeonderwijs, zó op te rakelen dat deze in staat is die kennis toe te passen in het onderwijs op de NHL. Daarnaast wordt ook gewerkt aan het aanbieden van een deel van het wiskundeonderwijs in de vorm van een digitale leeromgeving. Het toetsen vormt hierbij een belangrijk onderdeel waarbij de training van vaardigheden voor een deel digitaal kan gebeuren.

Metha Kamminga is initiatiefneemster van het *Wisnet*-project en werkt intensief mee als lid van deze projectgroep. In het volgende wordt alleen het digitaal toetsen belicht en geeft Metha haar ervaringen met de studenten weer.

Digitaal toetsen met Blackboard

Het helpt beslist als tijdens het leerproces de (verplichte) skill en drill parallel lopen met de realistische opdrachten en het effect is dan ook metéén merkbaar. Zo hoorde ik Gerrit Roorda (didacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen) eens zeggen dat er meer 'geheugenruimte' vrijkomt voor het echte denkwerk op hoger niveau, als veel laag-niveau-berekeningen en herkennen-van-formules op routineniveau plaatsvindt.

Het zou mooi zijn als we deze formuletraining, zonder gebruik te maken van (grafische) reken-machine, op de een of andere manier kunnen inpassen, zodat de communicatie waar het om draait niet stukloopt op formuleangst van de studenten en daarmee verregaande gevolgen krijgt voor de praktische opdrachten en de communicatie tijdens de lessen van technische vakken. Het is ook gebleken dat een formulevaardiger student gemakkelijker met een computeralgebrasysteem om kan gaan en de output daarvan op waarde kan schatten.

Al een paar jaar heb ik ervaring met de mogelijkheden die er binnen de digitale leeromgeving Blackboard zijn om digitaal te toetsen. Deze toetsen worden voornamelijk ingezet als korte diagnostische toetsen van meestal vijf toetsvragen en bieden de mogelijkheid aan studenten om te trainen en direct feedback te krijgen en daardoor te checken of bepaalde onderdelen van (voor)kennis al of niet beheerst worden. Naar aanleiding van de score op dit soort toetsen is er de mogelijkheid om extra lessen te volgen in de vorm van bijeenkomsten of digitale (trainings)lessen met uitleg, verlevendigd met applets en zelftoetsen.

Het maken van deze oefentoetsen geeft veel informatie aan student én docent. Niet alleen de scores worden daarbij geregistreerd, maar ook de keuzes die gemaakt zijn. De soorten vragen die we momenteel binnen Blackboard hanteren, zijn voornamelijk de multiple choice-vragen, multiple

answer-vragen en matchingsvragen. Er is analyse mogelijk zodat er inzicht is in de scores van de vragen. Er kan dan bekeken worden of er iets aan het lesmateriaal, de voorkennis van de student of de redactie van de vragen schort.

De *multiple choice-vragen* zijn bij de studenten het meest geliefd. Er kan daarbij maar één alternatief goed zijn en studenten gaan dan gauw trucjes bedenken zoals: als dit niet goed is, dan zal dat het wel zijn. Een getal invullen om te kijken of een gelijkheid waar is of niet, is één van die trucjes. De kans op een goede score bij gokken is daarbij ook vrij groot. Bij dit soort vragen is het tegenwoordig mogelijk om responsgevoelige feedback te geven. Bij het aanklikken van een bepaald alternatief komt dan informatie beschikbaar waaróm iets goed of fout is.

De *multiple answer-vragen* waarbij één of zelfs meer alternatieven goed kunnen zijn, zijn minder geliefd, maar daarmee meten we des te meer.

Door meer alternatieven aan te bieden is er bij het beantwoorden van de vraag veel minder kans op succes. Er kunnen bijvoorbeeld van de vijf alternatieven 1 of 2 of 3 of 4 of alle 5 goed zijn. Studenten raken hiervan snel in de war als ze niet erg zeker van hun zaak zijn. Het is zaak om alle goede alternatieven aan te vinken om de vraag helemaal goed te hebben. Vaak vinden ze het oneerlijk als de vraag als fout wordt beoordeeld, terwijl ze wel al één of twee van de meerdere goede antwoorden hebben aangevinkt (zie figuur 1). Ook bijvoorbeeld met het aanklikken van één goed alternatief en één fout alternatief denken studenten dat ze wellicht toch recht hebben op het gedeeltelijk goed rekenen van een dergelijke toetsvraag waar het nou juist gaat om het volledig beheersen van triviale rekenvaardigheden.

Verder is er nog de *matchings-vraag* waarbij je bijvoorbeeld de juiste grafieken bij de functievoorschriften kunt zoeken. Deze vragen kunnen voor een deel goed beoordeeld worden als een deel van de matching goed is ingevuld. Dit soort vragen is favoriet bij de studenten.

Er is binnen Blackboard ook de mogelijkheid om een *open vraag* te stellen waarbij het antwoord ingetoetst moet worden. Het Blackboardsysteem kan de beoordeling dan zelf niet doen; daar moet de docent zelf aan te pas komen. Ik heb wel proeven gedaan om bij sommige Blackboardtoetsen ook een enkele open vraag te stellen en dan later de beoordeling alsnog te doen, maar het merkwaardige is dat studenten juist de open vragen onbeantwoord laten en er dus op die manier niets te toetsen valt. Ik begon dus de behoefte te krijgen aan een toets-systeem speciaal voor open vragen, waarbij een formule zou kunnen worden ingevoerd en waarbij het systeem de beoordeling voor zijn rekening zou nemen.

Een dergelijk systeem bestaat en heb ik gevonden in de vorm van Maple T.A.

Question 1: Multiple Answer
De vergelijking van de lijn die door de punten $[0,3]$ en $[-5,0]$ gaat is:

Given Answers: ✓
 $y = \frac{3x}{5} + 3$
 ✓
 $5y = 3x + 15$

Correct Answers: ✓
 $y = \frac{3x}{5} + 3$
 ✓
 $5y = 3x + 15$
 ✓
 $3x = 5y - 15$

Question 3: Score 2/2
Maak uit de volgende vergelijking y vs x :

$$\frac{x}{y-x} = \frac{x}{y+6x}$$

Het antwoord mag in een zelfgekozen vorm ingetild worden.
Vul de stappen in:
 $y = \dots$

Your Answer: $-(11x+2)(x+2)$

Comment: Het goede antwoord is $-\frac{x(6x+x)}{x-x}$

Change grade: 2

Comments:

FIGUUR 1

FIGUUR 2

Toetsen met Maple T.A. - hoe het werkt

Maple Testing and Assessment (MapleTA) is een zeer geavanceerd toetssysteem met ongekend veel mogelijkheden, inzetbaar voor elk vakgebied. De mogelijkheid van het stellen van open vragen met formules is in dit systeem bijzonder goed ontwikkeld. Het onderliggende computeralgebrasysteem kan het ingetoetste antwoord vergelijken met het juiste antwoord en bijvoorbeeld deze twee van elkaar aftrekken. Als er vervolgens na vereenvoudiging 0 uitkomt, kan het systeem het ingetoetste antwoord als goed beoordelen. Op deze manier kan het mogelijk zijn om het antwoord, in de vorm van een formule, in verschillende schrijfwijzen in te voeren (zie figuur 2). Bij het opstellen van een toetsvraag kan gebruik gemaakt worden van willekeurige variabelen, zodat je met een bepaalde toetsvraag een hele serie gelijksoortige toetsvragen in handen hebt. Het is daarbij ook mogelijk de bijbehorende grafieken te genereren die steeds anders zijn; zie figuur 3, waarin de cosinusgrafiek als basis wordt aangeboden en van waaruit er een formulemanipulatie plaatsvindt. Gevraagd wordt hier naar het functievoorschrift van de bijbehorende gemanipuleerde grafiek. Als de toets waarin deze vraag zit, nogmaals afgenomen wordt, krijg je een iets andere vraag met een andere vermenigvuldigingsfactor en een andere verschuiving. De grafiek past zich daarbij automatisch aan omdat deze in het programma gegenereerd wordt. In figuur 3 is te zien dat er in dit geval drie hints worden aangeboden. Ook is het mogelijk om met de Plot-knop de grafiek te maken van het ingetikte antwoord, zodat je tijdens het maken van de toetsvraag kunt controleren of je het goed doet. De grafische rekenmachine heb je dan niet nodig bij het maken van de toets. Bij de instellingen van de toets kunnen de hints en het plotten 'uitgezet' worden.

Op deze manier kunnen studenten bepaalde toetsen bij herhaling maken zonder steeds precies dezelfde vragen te krijgen. De hoeveelheid oefenstof wordt daarmee enorm uitgebreid en aantrekkelijk. Naast open vragen kunnen bij MapleTA overigens ook de soorten vragen gesteld worden zoals bij Blackboard, maar dan op veel meer manieren en met veel uitgebreidere mogelijkheden. De alternatieven van een meerkeuzevraag kunnen bijvoorbeeld ook nog door elkaar aangeboden worden. Ook deel-vragen met verschillende weging zijn mogelijk.

Het intikken van formules

Bij het eerste gebruik door studenten stuit bij de open vragen het intikken van het antwoord nog wel eens op problemen. De meeste studenten die bij ons binnenkomen, hebben maar weinig ervaring op het gebied van het intikken van formules, hoewel je dat niet zou verwachten met het gebruik van de grafische rekenmachine in het voortgezet onderwijs. Studenten raken snel gefrustreerd als de vraag fout beoordeeld wordt terwijl ze het wel 'goed bedoeld' hebben.

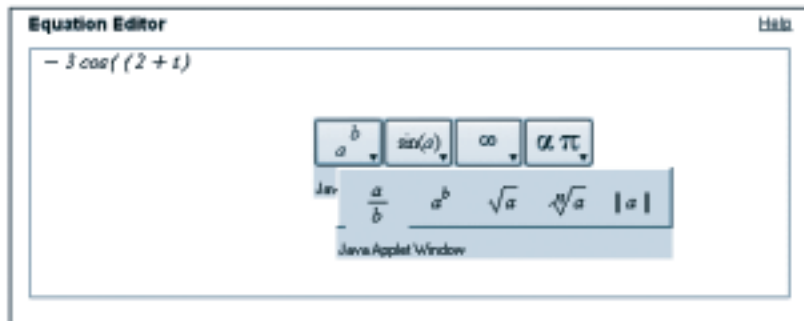
Om te wennen aan het systeem kan de student eerst een toets doen waarbij een gegeven formule nagetypt moet worden, zodat daarmee eerst eens even gescoord kan worden^[1].

Het is mogelijk om op meer manieren bij MapleTA een formule in te tikken. Het kan met sterretjes, dakjes en haakjes zoals ook bij de syntax van een computeralgebrasysteem. Het is echter ook mogelijk om bijvoorbeeld $2x$ te tikken als er 2 maal x (in te typen als $2*x$) bedoeld wordt, hoewel ik dat niet propageer omdat er situaties zijn waarbij verwarring ontstaat bij het weglaten van het maalteken in de vorm van een sterretje. Als alternatief is er een formule-editor in het toetsprogramma opgenomen waarmee het antwoord geformuleerd kan worden; zie figuur 4.

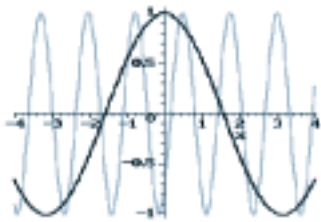
Differentieer de volgende functie tweemaal naar t

$$f(t) = 3 \cos(2 + t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) =$$

Gegeven de grafiek van de functie f (zwart) en de verschuilde functie g (groen).

$$f(x) = \cos(x)$$



Bedenk de formule voor de functie g als de grafiek van g ontstaat door die van f ten opzichte van de y -as 5 keer 20 maal te maken, daarna 3 eenheden naar links te verschuiven, en daarna nog te spiegelen ten opzichte van de y -as.
 Vul de stippen in: $g = \dots$
 en klik op "plot" om jezelf te controleren voordat je naar de volgende som gaat.
 Wandel voor je als volgt in: sept. ...

This question accepts numbers or formulas.
[Plot](#) | [Help](#) | [Change Math Entry Mode](#) | [Preview](#)
[Hint 1](#) | [Hint 2](#) | [Hint 3](#)

FIGUUR 3

Deze editor werkt op basis van MathML; de student merkt hiervan tijdens het gebruik van de editor overigens niets. Er zit dan wel weer een conversieslag tussen MathML en de formule waarmee uiteindelijk door het programma gerekend wordt, en dat kan in een enkel geval tot miscommunicatie leiden, vooral bij fysisch georiënteerde vragen waarbij de vermenigvuldiging 'E' wel eens anders opgevat wordt dan de bedoeling is met het intikken van $E \cdot I$. Na bijna een jaar met het systeem gewerkt te hebben kunnen we uit ervaring stellen dat bij het invoeren van formules met behulp van de syntax, zoals bij een computeralgebrasysteem, de minste problemen ontstaan als er enige training met het intikken van formules aan voorafgaat. Bovendien is het belangrijk te weten dat je na het intikken van de formule bij MapleTA op Preview kunt klikken om te zien hoe de formule er in twee dimensies uit komt te zien (zie figuur 5).

Naar aanleiding daarvan kan het ingevoerde antwoord eventueel nog door de student verbeterd worden voordat de toets afgerond wordt. Met het 'previewen' wordt zwaar op het programma Java geleund en het is dan ook belangrijk dat op de computers waarmee gewerkt wordt, de nieuwste *Java Virtual machine* is geïnstalleerd. Verder is voor gebruik van het programma alleen een webbrowser vereist.

In figuur 6 heeft de student waarschijnlijk verzuimd om op Preview te klikken alvorens zijn toets af te ronden. In deze figuur is ook te zien dat er achteraf nog uitgebreid commentaar geleverd kan worden en dat eventueel de score aangepast kan worden.

Instellingen van de toetsen

Pas als de eerste drempels zijn overwonnen en er een paar toetsen zijn geweest met het oefenen

FIGUUR 4

van het intikken van formules, is het tijd om werkelijk aan de gang te gaan met het toetsen van formulevaardigheid en het verwerken van nieuwe stof. Bij nieuwe onderwerpen kunnen bijvoorbeeld hints gegeven worden; dit wordt door studenten vaak zeer op prijs gesteld (zie figuur 3). In de praktijk is het vaak zo dat een student die het antwoord op de vraag weet, de hints niet eens bekijkt. Maar als er nog wat onbekendheid is met een bepaald onderwerp kunnen de hints met verwijzingen naar lesmateriaal toch heel belangrijk en leerzaam zijn. Er kunnen net zoveel hints bij een toetsvraag gegeven worden als wenselijk is. Het is echter ook mogelijk om het geven van hints 'uit te zetten' bij de instellingen van bepaalde toetsen.

Bij het trainen van routinevaardigheid met formules is de factor *tijd* een belangrijk aspect. Niet alleen het goede antwoord is van belang, maar ook de vlotheid waarmee het antwoord verkregen is kan van groot belang zijn voor het zelfvertrouwen van de student. De tijd voor een toets is op de minuut instelbaar. Meestal geef ik voor oefentoetsen een vijftal vragen zodat de toets maar kort hoeft te duren en de drempel om te gaan oefenen daarmee wat lager is. De duur van de toets wordt voor iedere student apart geregistreerd.

Het aantal malen dat een toets gemaakt kan worden is instelbaar en als de items zó gemaakt zijn dat er met willekeurige variabelen gewerkt wordt, is iedere toets weer anders en geeft dit de mogelijkheid om te trainen. Ook is instelbaar dat een student eerst de ene toets voldoende moet hebben afgerond alvorens hij toegelaten wordt tot een volgende toets. Als te vlug aan een moeilijke toets wordt begonnen, kan dat tot frustratie leiden. Het is immers altijd de schuld van het toetsprogramma als een toets slecht gemaakt wordt.

Question 3: (2 points)

Mak uit de volgende vergelijking y uit.

$$\frac{x}{y-x} = \frac{x}{y+8x}$$

Het antwoord mag in een zelfgekozen vorm ingediend worden. Vul de stappen in $y =$...

This question accepts numbers or formulas.
Plot | Help | Change Math Entry Mode | Preview
Hint 1



Question 3: Score 0/2

Schrijf de volgende uitdrukking als één breuk:

$$\frac{7}{y} + \frac{x}{8}$$



Your Answer: 0/0/0

Comment: Het goede antwoord is $\frac{1}{8} \frac{56+y^2}{y}$

Change grade: 0

Comments:
Het lijkt alsof de computer twee breuken geeft als antwoord, maar het betekent dat $\frac{7}{y}$ in zijn geheel in de noemer staat dus breukjes samen! In de teller moet dus $(56+y^2)$ staan!

FIGUUR 5

Mogelijkheden voor feedback

Bij het maken van de toetsvragen kan op voorhand feedback geformuleerd worden en eventueel kan het goede antwoord gecommuniceerd worden in deze feedback. Feedback is erg docentafhankelijk. Daarom propageer ik eigenlijk, als toetsvragen door meer docenten gebruikt worden, dat iedere docent zijn eigen feedback formuleert. Het heeft te maken met de manier van omgaan met de studenten en de taal die je tegen ze spreekt en het niveau dat ze hebben en wat je met een toets wilt bereiken. Het artikel 'Intelligente feedback' van Bokhove, Heck en Koolstra (Euclides 81-2, oktober 2005) spreekt daar ook van. Feedback kan eventueel ook 'uitgezet' worden bij de instellingen van bepaalde toetsen. De instellingen kunnen zelfs zó gezet worden dat bijvoorbeeld pas na een bepaalde datum en tijdstip de feedback beschikbaar komt voor de studenten. Deze mogelijkheden kunnen gebruikt worden bij summatieve toetsen waar studenten op afgerekend worden. Als bijvoorbeeld nog niet iedereen de toets af heeft, kan de feedback vertraagd en pas op een later tijdstip vrijgegeven worden.

Bij MapleTA is het vervolgens mogelijk om, nadat de toets gemaakt is, het aantal punten toegekend voor elke vraag te overrulen en nog extra commentaar toe te voegen; zo iets als: 'Bijna goed maar jammer dat je een hoofdletter X ingetikt hebt als het gaat over een kleine letter x '; zie ook [figuur 3](#). Deze mogelijkheid geeft natuurlijk wel extra werk, maar is interessant als het gaat om summatieve toetsen.

Tot slot

Het is mogelijk om MapleTA als Building Block aan de digitale leeromgeving Blackboard te koppelen. Meer docenten kunnen dan gezamenlijk beschikken over toetsbanken.

FIGUUR 6

Binnen het *Wisnet*-project op de NHL zijn we bezig het toetssysteem en het systeem met het lesmateriaal op elkaar af te stemmen en in evenwicht met elkaar te brengen.

Het maken van toetsvragen is een kunst waar een diepte-investering voor geleverd moet worden. Het modifieren van een vraag is echter vrij eenvoudig. Als je de beschikking hebt over een toetsbank kun je al gauw bijvoorbeeld alleen de vraagstelling en de feedback wat aanpassen of formules en plaatjes veranderen. Er is al een aantal toetsbanken in omloop waarmee je een eind op weg geholpen bent. Als je geavanceerde toetsvragen wilt gaan maken, is het wellicht handig om een cursus te volgen voor een snelle opstap.

Digitaal toetsen is overigens niet het enige en alleen-zaligmakende. Contact met een klas is minstens zo waardevol en het uitwerken van vraagstukken en onderzoeksopdrachten in groepsverband is eveneens een belangrijk aspect van het onderwijs in de toegepaste wiskunde.

Noot (red.)

[1] Zie: www.mapleserver.com/mapleta/classes/noordelijke/

Over de auteur

Metha Kamminga is docent wiskunde aan de Afdeling Engineering van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden. Voor meer informatie over de auteur en over MapleTA kan men terecht op de website <http://webserv.nhl.nl/~kamminga/> waar ook de mogelijkheid bestaat om eens een paar toetsen te proberen en te ondervinden hoe dat gaat.

E-mailadres: kamminga@tech.nhl.nl

Naschrift van de redactie

Wij zijn drs Westerhof zeer erkentelijk voor zijn vriendelijk aanbod, ten behoeve van onze lezers de uiteenzetting te geven die hierboven is afgedrukt.

Reeds eerder (zie blz. 162 van deze jaargang) merkten wij op, dat de bestudering van het wijzigingsbesluit-1965 en de daarbij behorende toelichting vele vragen oproept. Op een deel van deze vragen geeft het artikel van drs W. antwoord, maar de lezing ervan heeft tegelijk weer nieuwe, nijpender, vragen doen rijzen en aan de onbeantwoorde toegevoegd. Wij beseffen echter zeer wel, dat in de gedeelten, waarop die vragen betrekking hebben, veelal niet drs W. zelf, maar de examencommissie c.q. de hoofdinspecteur van het kweekschoolonderwijs aan het woord is; onze hieronder volgende kritische kanttekeningen bedoelen dan ook geenszins afbreuk te doen aan onze waardering voor de poging tot verheldering, die drs W. heeft willen leveren.

Algemeen bekend mag heten, dat de redactie van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde van de oprichting in 1913 af het tot haar taak heeft gerekend óp te komen voor de belangen van de toekomstige bezitters van de wiskunde i.o. Deze gezindheid kwam niet alleen tot uiting in de steun die de redactie de studerenden bood door het opnemen van voor hen belangrijke artikelen, door het publiceren van mondelinge examenvragen en volledig uitgewerkte schriftelijke examens en door het verzorgen van een speciale vraagstukkenrubriek op examenniveau (waarin tot dusver bijna vierduizend, meest oorspronkelijke, vraagstukken zijn opgenomen), maar tevens – en niet in de laatste plaats – in haar voortdurende bezorgdheid om *de kwaliteit van het examen en de daarvan afhankelijke intrinsieke waarde van de akte* (o.m. blijkende uit commentaren op examenverslagen en schriftelijke examen-vraagstukken). In dit licht gezien zal het geen verwondering wekken, dat de redactie voor de nieuwe examenregeling, zacht gezegd, allermint geestdriftig is. Haar voornaamste bezwaar geldt *de ontwaarding van de akte wiskunde i.o.*, die erdoor wordt bewerkstelligd.

(...)

Als om de gelijkschakeling met het vmo-eindexamenpeil te accentueren (een andere plausibele reden zien wij niet) heeft de minister van Onderwijs en Wetenschappen krachtens hem bij het laatste wijzigingsbesluit verleende bevoegdheid regels vastgesteld volgens welke bezitters van een vmo-eindexamen voor een of meer vakken vrijstelling kunnen krijgen. De consequentie hiervan is, dat het onderzoek naar de geschiktheid van een kandidaat om in bepaalde vakken *les te geven* achterwege zal blijven, als hij in het (grijs) verleden het *allermint op lesgeven gerichte* vmo-onderwijs in die vakken met redelijk goede resultaten heeft gevolgd; daarbij komt dan nog, dat ter beoordeling van die resultaten in de meeste gevallen de daartoe o.i. al zeer weinig geschikte, immers onvoldoende normatieve, cijferlijst van een *schooleindexamen* als maatstaf zal worden gehanteerd. Enig *praktisch* nut kan van de gecompliceerde vrijstellingsregeling (waarbij wij onwillekeurig aan de „derde wet van Parkinson” moeten denken!) niet worden verwacht: het examen wordt erdoor voor de kandidaten niet aantrekkelijker, het werk voor de examencommissie niet lichter. Bezitters van een diploma gymnasium B of hbs B worden slechts zelden onderwijzer (of men moet het met „stoomcursussen” als in het recente verleden héél attractief maken!); niet alle onderwijzers met zo’n diploma gaan op voor wiskunde i.o. en onder degenen die dat wél doen zullen slechts enkelen vrijstelling voor een half, een heel of anderhalf onderdeel kunnen claimen. Kans op vrijstelling voor anderhalf onderdeel hebben alleen gymnasiasten en hbs-ers van 1961 of later en dat zijn juist degenen, die er niet tegenop zien geëxamineerd te worden in hun beste vakken (cijfer 8 of meer; een 10 voor stereometrie legt echter geen gewicht in de schaal), die nog vers in het geheugen liggen.

Met verwijzing naar het geringe aantal gevallen (wij schatten 2 à 3%), waarin de vrijstellingsregeling toepassing zal vinden, zou men kunnen staan-de houden, dat met de regeling slechts *symbolisch* nut (symbolisch voor de nivellering) wordt nagestreefd; wij menen echter dat aan zo’n doel niet het aanzien van het examen en dat van de examencommissie (die met onzuivere vrijstellingsmaatstaven gaat werken) had mogen worden opgeofferd.

Gedeelte uit het naschrift door de redactie van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde op een artikel van de heer B.J. Westerhof, over het nieuwe programma wiskunde i.o.

Uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 53 (1965-1966), pp. 202-204.

DE (VERBORGEN) WISKUNDEPROBLEMATIEK VAN TAALZWAKKE LEERLINGEN

[Corine van den Boer en Dolly van Eerde]

Inleiding

Iedere wiskundeleraar weet dat zwakke wiskunde-prestaties van allochtone leerlingen iets met taal te maken hebben. Veel docenten noemen tekorten in de woordenschat als belangrijke oorzaak. Het wiskundeonderwijs is de laatste jaren immers veel taliger geworden: er wordt een groter beroep gedaan op de mondelinge en schriftelijke taalvaardigheid van de leerling en de docent. Daarbij worden de leerlingen geconfronteerd met verschillende soorten 'taal': met *vaktaal* (wiskundige begrippen en formuleringen) en met *schooltaal* (begrippen die op school bij diverse vakken voorkomen zoals: verband, constant, gegevens, tijdstip, maar ook formuleringen zoals: 'licht toe' en 'schets'). Echter niet alleen voor allochtone leerlingen – maar voor alle taalzwakke leerlingen – zowel allochtoon als autochtoon – vormt deze toegenomen taligheid van het vak wiskunde een obstakel.

In dit artikel beschrijven we de achtergrond van het project Wisbaak en de Wisbaakmaterialen. Binnen het project wordt samengewerkt door het Freudenthal Instituut en het APS, waarbij het Freudenthal Instituut de materialen en de website ontwikkelt, en het APS samen met het Freudenthal Instituut een bijbehorend professionaliseringsaanbod ontwikkelt en uitvoert. Wisbaak is geen nieuwe lesmethode maar een aanvulling op de bestaande lesmethodes. In de Wisbaakmaterialen is geprobeerd de principes van taalgericht vakonderwijs te concretiseren voor het vak rekenen in de bovenbouw van het primair onderwijs en voor het vak wiskunde in de eerste klassen van het voortgezet onderwijs. Binnen Wisbaak worden voorbeeldlessen en

ondersteunende computeractiviteiten ontwikkeld die leraren en leerlingen kunnen gebruiken. Deze producten zijn samen met achtergrondinformatie en docentenhandleidingen voor iedereen te vinden op de Wisbaakwebsite (www.fi.uu.nl/wisbaak).

Voorbeelden uit de praktijk

Om de achtergrond van Wisbaak te schetsen, geven we eerst enkele voorbeelden van mogelijke taalproblemen en vervolgens enkele uitspraken van docenten en leerlingen over hoe zij met deze problematiek omgaan.

Het begrijpen van teksten

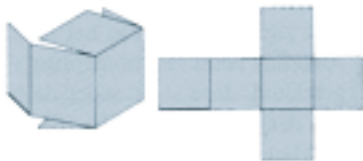
Taalproblemen manifesteren zich op diverse manieren. Leerlingen hebben bijvoorbeeld moeite met het begrijpen van teksten, omdat ze bepaalde woorden niet kennen of zinnen niet begrijpen. De wiskundeopgaven in [figuur 1](#) laten zien hoe zeer talige aspecten een rol spelen.

Voor het begrijpen van de eerste opgave is kennis van enkele begrippen uit de vaktaal (uitslag, zijde, grensvlak, kubus, ribbe) vereist; verder is de tweede zin lastig. Bij de tweede opgave kunnen begrippen uit de dagelijkse taal (peilstok, doorvaarthoogte) een barrière vormen. Als een leerling bij dergelijke opgaven een fout maakt of helemaal geen antwoord geeft, is het daarom niet zonder meer duidelijk of dit te maken heeft met de taal of met de wiskunde. Om dit te weten te komen, is het nodig om met de leerling in gesprek te gaan.

Het zelf schrijven van teksten

In het mondelinge taalgebruik van allochtone leerlingen is al vaak iets van de taalproblematiek

In de uitslag hiernaast is de zijde van een van de grensvlakken rood gekleurd. Als je van deze uitslag een kubus maakt vormt deze zijde samen met een zijde van een ander grensvlak een ribbe.



- 1-2 Op de foto hiernaast zie je een peilstek. Op deze peilstek kun je de doorvaarhoogte in meters aflezen.
- Wat is de doorvaarhoogte in meters op de foto?
 - Hieronder zie je nog twee tekeningen van zo'n peilstek. Schrijf op welke doorvaarhoogte bij elk van de pijltjes hoort.



Welk denkvelkje hoort bij Sanne?

Sanne moet bij de wiskundeles een verhaal vertellen waar je een grafiek bij kunt tekenen. Sanne zegt: "Een paar jaar geleden groeide ik niet zo hard, maar vorig jaar ben ik opeens enorm gegroeid." De klas moet er een grafiek bij tekenen.

Ik groeide niet zo snel, ik kan alle kleden van vorig jaar nog aan.

De broeken van vorig jaar, zitten nu allemaal te strak.

De broeken van vorig jaar, zijn nu allemaal te kort.

Sleeg ieder kaartje naar de grafiek waar het bij hoort.

Sanne moet bij de wiskundeles een verhaal vertellen waar je een grafiek bij kunt tekenen. Sanne zegt: "Een paar jaar geleden groeide ik niet zo hard, maar vorig jaar ben ik opeens enorm gegroeid." De klas moet er een grafiek bij tekenen.

groeide ik niet zo hard

enorm gegroeid

OK

De hele klas moet een grafiek tekenen. Welke zou jij tekenen?

Sanne moet bij de wiskundeles een verhaal vertellen waar je een grafiek bij kunt tekenen. Sanne zegt: "Een paar jaar geleden groeide ik niet zo hard, maar vorig jaar ben ik opeens enorm gegroeid." De klas moet er een grafiek bij tekenen.

merkbaar, maar bij opdrachten waarin leerlingen hun gedachten op papier moeten zetten wordt dit vaak pas goed zichtbaar.

Hieronder een voorbeeld van het resultaat van een opdracht waarbij leerlingen uit brugklas 1 (vmbo bb) in groepjes bij een stijgende grafiek zonder betekenissen en eenheden bij de assen, zelf een verhaal moesten bedenken en opschrijven.

'We heb het over auto's. Want we wij het per jaar want het is niet goedkoop een auto's en de gefiek stijgt en daarom als die antiek is wil veel mens willen antieke dingen en dat is dan goedkoper.'

De geschreven tekst van de leerlingen toont dat het opschrijven van een logische redenering een groot probleem is, zowel wiskundig als taalkundig.

Strategieën van taalzwakke leerlingen

Wat doen de leerlingen nu wanneer ze bijvoorbeeld een tekst in hun boek niet begrijpen? Hieronder vertellen een student en twee havo-leerlingen welke oplossingen ze kiezen als ze wiskundeteksten niet begrijpen.

'Als ik de tekst niet begreep, dan sloeg ik een aantal regels over en keek wat de tekst inhield. Ik lette niet op de details. Ik dacht dan, "dat komt later wel." Soms gaat dat mis, bijvoorbeeld interpretatie en inspiratie, die had ik door elkaar gehaald. Dat heeft drie, vier maanden geduurd, ik dacht dat die twee woorden hetzelfde betekenden en toen hoorde ik van iemand dat dat niet zo was.'

(Turkse student lerarenopleiding wiskunde; zij kan al terugkijken op haar eigen leerproces.)

'Als ik uit de rest van de zin kan opmaken wat het woord betekent, of een idee heb wat het is, dan kan ik de opgave wel maken.'

(Marokkaans meisje, 3 havo)

'Wanneer ik de uitleg niet begrijp, dan vraag ik niet nog een keer om uitleg. Ik weet zeker dat de docent het de volgende dag nog een keer bespreekt of uitlegt.'

(Surinaamse jongen, 3 havo)

Deze uitspraken laten zien dat tweedetaal-leerders allerlei strategieën toepassen als ze teksten niet begrijpen, zoals globaal lezen, woorden overslaan of gokken.

Strategieën van wiskundeleraren

Wiskundeleraren gaan heel verschillend om met mogelijke taalproblemen van hun leerlingen. Sommige leraren gaan ervan uit dat leerlingen die zich op het schoolplein goed kunnen uitdrukken (het dagelijks taalgebruik), voldoende taalvaardig zijn om zelf aan te geven wanneer er iets onduidelijk is. Zij vinden dat ze daarom geen aparte aandacht hoeven te besteden aan de taal.

Andere leraren besteden juist wel aandacht aan

taal. Zo vertelt een lerares dat zij leerlingen die met een probleem bij haar komen, eerst zelf de tekst nog eens laat lezen. Vaak blijkt dat het zorgvuldig lezen van alle tekst die bij een opgave staat voor de leerling voldoende is om weer verder te kunnen. Deze lerares laat leerlingen zelf opgaven voorlezen om ze ervan bewust te maken dat ze woorden niet kennen en/of overslaan. Deze aanpak maakt duidelijk waar het probleem zit en biedt zo ook aanknopingspunten om daar met een leerling verder over te praten.

Naast het besteden van aandacht aan de teksten in het boek (het taalaanbod) werken sommige leraren ook aan de actieve taalontwikkeling van de leerlingen, bijvoorbeeld door ze te laten praten. Deze aanpak zien we terug bij een leraar die aangeeft dat hij behoefte heeft aan activerende opdrachten waardoor de leerlingen ook met taal bezig kunnen zijn, *'(...) zodat ze vaardiger worden in de taal van de wiskunde bij wijze van spreken. Dat zou ik graag willen.'*

De moeilijkheden blijven verborgen

De voorbeelden die we tot nu toe gaven, maken alle iets zichtbaar van de hindernissen die taalzwakke leerlingen moeten nemen. Maar is hiermee alles gezegd?

Uit een onderzoek van Van den Boer (zie [1]) naar allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs bleek dat het grootste gedeelte van de problematiek onzichtbaar blijft door een combinatie van de leerstrategieën van allochtone leerlingen en het onderwijsgedrag van de docent. De leerstrategie van deze leerlingen is gericht op het volgen van de uitleg door de docent en het uit het hoofd leren van de bewerking die door de docent wordt gepresenteerd. De leerlingen lezen opgaven slecht of maar half en gaan direct op het rekenkundige element van de opgaven af. Taalproblemen worden omzeild door onbekende woorden weg te laten en te raden wat er zou kunnen staan.

Allochtone leerlingen blijken zich neer te leggen bij het feit dat zij een som of een uitleg dikwijls niet begrijpen. In interviews geven zij aan dat ze tekstproblemen niet zo belangrijk vinden. Ze menen er ook wel zonder volledig tekstbegrip uit te kunnen komen. Als ze de uitleg in de klas niet begrijpen, hopen ze de opgaven alsnog te kunnen oplossen bij het maken van huiswerk en anders vragen ze hun oudere broer of zus om raad.

In de klas zijn deze leerlingen passief. Ze vragen weinig om hulp of extra uitleg en als ze dat wel doen is hun manier van vragen globaal en daardoor soms weinig effectief. Uit interviews blijkt echter dat de meeste docenten juist verwachten dat een leerling uit zichzelf vragen stelt en aangeeft als er een onduidelijkheid is.

Er is dus sprake van een vicieuze cirkel: allochtone leerlingen uiten hun moeilijkheden niet en hun ineffektieve leerstrategieën worden door docenten niet opgemerkt en gecorrigeerd. Dit komt doordat

docenten die moeilijkheden niet in de gaten hebben, en onder tijdsdruk moeten werken omdat zij vast willen houden aan het leerplan. Problemen of onjuiste interpretaties van leerlingen komen hierdoor niet aan het licht.

Het achterblijven van wiskundeprestaties van allochtone leerlingen is weliswaar in de kern een taalprobleem, maar de oplossing moet niet alleen gezocht worden in remediërende taalactiviteiten gericht op het leren van onbekende woorden. Het echte probleem ligt dieper dan het niet kennen van bepaalde begrippen, het probleem is dat docenten en allochtone leerlingen zich niet realiseren dat taalproblemen en leerstrategieën van allochtone leerlingen een barrière vormen voor het leren van wiskunde. Didactische interventies moeten daarom primair tot doel hebben docenten en allochtone leerlingen hiervan bewust te maken, en hen vervolgens te helpen dit gedrag te veranderen. Het taalarm maken van de teksten is ons inziens geen goede oplossing. Immers, de informatie-dichtheid van de overgebleven tekst wordt daarmee vergroot, en daardoor wordt er een groter beroep gedaan op de taalvaardigheid van de leerlingen. Dit kwam ook naar voren in onze interviews met leerlingen die de voorkeur gaven aan extra zinnen en ondersteunende plaatjes, omdat dat hen helpt om de bedoeling van de opdracht of uitleg te begrijpen. Het vermijden van mondelinge taal werkt contra-productief. Alleen door met elkaar te praten over de opgaven en de (verschillende) oplossingswijzen, leert men van elkaar en wordt pas echt duidelijk wat de ander bedoelt. Dit wordt ook zichtbaar wanneer leerlingen zelf teksten schrijven. Door leerlingen te laten praten en schrijven in de wiskundeles achterhaal je als docent, of de leerlingen de (wiskunde)begrippen gebruiken zoals bedoeld. Door de leerlingen feedback te geven op hun mondeling en schriftelijk taalgebruik leren zij zelf de (wiskunde)taal actief te gebruiken. In de volgende paragraaf laten we zien hoe taalgericht vakonderwijs goede aanknopingspunten biedt om deze ideeën uit te werken.

Wisbaak: taalgericht vakonderwijs

Sinds een tiental jaren is er een nieuwe benadering van het te voeren taalbeleid in opkomst. Binnen deze benadering bepleit men dat de taalontwikkeling van leerlingen binnen alle vakken wordt gestimuleerd en niet meer alleen een verantwoordelijkheid is van de leraren Nederlands. Men streeft naar een integratie van taal en vakinhoud. Dit *taalgericht vakonderwijs* (TVO) beoogt taalachterstanden aan te pakken binnen de vakken en is gebaseerd op nieuwe inzichten op het gebied van leren, taalleren en onderwijzen. Taalgericht vakonderwijs is gericht op alle taalzwakke leerlingen, allochtone én autochtone. Kenmerkend voor taalgericht vakonderwijs is dat het onderwijs contextrijk is, dat het interactief van aard is en dat de leerlingen taalsteun krijgen. Een aanpak die prima aansluit bij de realistische benadering



Horizontale as

Een asenstelsel bestaat uit een horizontale as en een verticale as.
De horizontale as is de lijn die ligt



Horizontaal komt van het woord horizon.



De horizon is de grens tussen de zee en de lucht.

12. Zet een kruisje voor de zinnen of de plaatjes waarin iets onveranderlijk gebeurt.

- ☐ Ik snapte helemaal niets van wiskunde. Totdat mijn broer me hielp. Ineens begreep ik alles!
- ☐ De bomen in het bos worden steeds dikker en groter.
- ☐ Mijn fietsband loopt langzaam leeg. Ik moet hem wel twee keer in de week oppompen.
- ☐ Ik baakte wel gisteren. Er lag allemaal glas op het fietspad, mijn band was in 3 seconden leeg!



in het wiskundeonderwijs. Ook hierin staan contextrijke problemen centraal en is de didactiek interactief van aard. Taalgericht wiskundeonderwijs lijkt dan ook een kansrijke ingang voor taalzwakke autochtone en allochtone leerlingen.

Binnen het Wisbaakproject is een uitwerking van de ideeën van taalgericht vakonderwijs gemaakt voor het vak rekenen/wiskunde in de hoogste klassen van het basisonderwijs en de eerste klassen van het voortgezet onderwijs. Het doel van dit project is om docenten en hun taalzwakke leerlingen te ondersteunen. Dit gebeurt door samen met docenten voorbeeldlessen en ict-materialen te ontwikkelen.

Materialen

Op dit moment zijn de volgende typen materialen ontwikkeld:

- Docentenhandleidingen

In de algemene handleiding wordt achtergrondinformatie gegeven over taalgericht wiskundeonderwijs, en worden de structuur en het gebruik van de Wisbaakmaterialen beschreven. Verder zijn er per onderwerp aparte handleidingen waarin specifieke informatie betreffende het reken/wiskundig onderwerp en de bijbehorende materialen wordt beschreven.

- Introductielessen

Deze zijn sterk interactief van karakter en bieden de docent de mogelijkheid te verkennen wat leerlingen al van een onderwerp weten door hen te activeren daarover te vertellen en schriftelijke groepsopdrachten te maken. Eerst vindt klassikaal een gemeenschappelijke verkenning van een rijk probleem plaats, zowel van de betekenis van de context als van bepaalde begrippen. Vervolgens wordt het probleem opgelost in een samenspraak tussen docent en de hele klas. De docent stimuleert de leerlingen hun gedachten onder woorden te brengen en op elkaar te reageren. Hierna worden enkele schriftelijke groepsopdrachten gemaakt die weer uitnodigen tot overleg en discussie.

- Korte computerprogramma's (applets)

De applets zijn korte computerprogramma's rond wiskundige onderwerpen, waarin extra hulp geboden wordt rond wiskunde, vaktaal en schooltaal. Ook hier wordt gestart met een wiskundeprobleem. Vervolgens worden opgaven aangeboden waarmee de leerlingen de taal en wiskunde kunnen oefenen. Tot slot wordt een eindopdracht gegeven die op papier wordt gemaakt en met de docent besproken wordt. Interactie vindt plaats doordat de leerlingen in duo's met de applet werken en gestimuleerd worden de opgaven samen op te lossen. Feedback is deels geïntegreerd in het programma en wordt deels achteraf gegeven door de docent op de schriftelijke antwoorden van de

leerlingen op de eindopdracht.

In [figuur 2a, b, c](#) staan als voorbeeld enkele schermen afgedrukt uit de applet 'Sanne groeit' uit de module *Grafieken*. Hierin wordt eerst de context verkend, en vervolgens vertaald naar de wiskundige representaties.

- Een elektronisch woordenboek

Hierin kunnen leerlingen de betekenis van bepaalde begrippen uit de vaktaal en schooltaal opzoeken. Elk woord wordt weergegeven in een zogenaamd woordweb: een groep van samenhangende begrippen. Het woordenboek is op twee niveaus te raadplegen. Op het eerste niveau wordt een bepaald begrip heel kort omschreven en via een animatie verhelderd. Op het tweede niveau wordt de wiskundige betekenis van een begrip omschreven, schematisch weergegeven en toegelicht binnen een context. Zo mogelijk wordt ingegaan op de dagelijkse betekenis of de oorsprong van een begrip en wordt dit van een illustratie voorzien. Bovendien kan de leerling de uitspraak van het woord beluisteren door op het icoontje van de luidspreker te klikken.

De [figuren 3a, b, c](#) tonen afbeeldingen van een woordweb rondom het begrip 'grafiek'.

- Begrippentoetsen

Deze zijn bedoeld om kennis van vaktaal en schooltaal te controleren. In de Begrippentoetsen is geen sprake van een aanbod van rijke problemen noch van interactie. Het gaat er hier om dat leerlingen zelfstandig vragen en korte opdrachten maken waarmee de docent kennis van bepaalde begrippen kan meten. De docent geeft achteraf feedback of doet dit in samenspraak met de leerlingen. Het nakijken kan op diverse manieren gebeuren: schriftelijk door de docent of door de leerlingen zelf met behulp van een nakijkblad. Hierna kan een klassengesprek volgen waarin de verschillende antwoorden worden besproken. In [figuur 4](#) staat een voorbeeld van een opgave waarmee gecontroleerd kan worden of de leerlingen het begrip 'geleidelijk' begrijpen.

Tijd

Het geven van aandacht aan taal in de wiskundeles vergt extra tijd; de hoeveelheid tijd is afhankelijk van de taalvaardigheid van de leerlingen. Deze tijdsinvestering betaalt zichzelf terug doordat de leerlingen de wiskunde beter zullen begrijpen: taal en denken zijn immers sterk met elkaar verbonden.

Website

Voor docenten is het mogelijk om van de website www.fi.uu.nl/wisbaak uitgewerkte lessen, begrippentoetsen en de handleidingen te downloaden. Bovendien kunnen leerlingen hier de applets en het elektronisch woordenboek raadplegen. De site is voortdurend in ontwikkeling. Op dit moment zijn er voor groep 7 en 8 van het basisonderwijs en voor de eerste klassen van het voortgezet onderwijs materialen beschikbaar rond de reken/

wiskundeonderwerpen 'Grafieken', 'Formules', 'Vergelijkingen', 'Verhoudingen, kommagetallen, breuken, procenten' en 'Meetkunde'.

Leraren hebben echter niet genoeg aan materialen alleen. Om de aanpak binnen de klas (en de school) in te voeren is ook professionalisering nodig. Het Freudenthal Instituut en het APS ontwikkelen en verzorgen gezamenlijk conferentiedagen. Er zal ook een netwerk worden opgericht van leraren die aan de slag willen met taalgericht wiskundeonderwijs. Meer info via de Wisbaakwebsite of via e-mail (wisbaak@fi.uu.nl).

De ontwikkelde producten worden steeds op de website geplaatst: www.fi.uu.nl/wisbaak/. We adviseren u dan ook om daar regelmatig een kijkje te nemen.

Literatuur

-
- [1] C.J.E.M. van den Boer: *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs*. Utrecht: CD-β press (2003).
- [2] D. van Eerde, M. Hajer, T. Koole, J. Prenger: *Betekenisconstructie in de wiskundeles. De samenhang tussen interactief wiskunde- en taalonderwijs*. In: *Pedagogiek*, jg. 22, nr. 2 (2002).
- [3] M. Hajer, T. Meestringa: *Handboek taalgericht vakonderwijs*. Bussum: Coutinho (2004).

Bronnen

Figuur 1, boven: Moderne wiskunde, deel 1a vmbo (8e editie), pag. 170

Figuur 1, onder: Moderne wiskunde, deel 1a vmbo (8e editie), pag. 84

Overige figuren: www.fi.uu.nl/wisbaak/

Over de auteurs

- Corine van den Boer is werkzaam bij het Freudenthal Instituut en docent wiskunde aan het St. Gregorius College Utrecht.

- Dolly van Eerde is werkzaam bij het Freudenthal Instituut en bij de Hogeschool van Utrecht, kenniskring Lesgeven in de multiculturele school. Deze kenniskring doet onderzoek met als doel de lerarenopleidingen te verbeteren zodat leraren optimaal voorbereid worden op het werken in multiculturele klassen. Ook de professionalisering van docenten is een streven.

Voor vragen en/of opmerkingen: wisbaak@fi.uu.nl

Wat adviseer je aan wiskundig talent in je klas?

Word Bedrijfswiskundige!!



Er zijn nog teveel leerlingen die zich niet realiseren dat hun aanleg voor puzzelen en wiskunde vele beroepsmogelijkheden geeft. De misvatting is dat je met wiskundetalent alleen docent kunt worden. Niets is minder waar. Ga bedrijfswiskunde studeren!



Na de opleiding bedrijfswiskunde heb je de unieke combinatie van bedrijfskundige kennis, ICT-vaardigheden en wiskundige diepgang om problemen en vragen uit de afwisselende praktijk van het bedrijfsleven te herkennen en met krachtige wiskundige methoden en de computer aan te pakken. De resultaten ondersteunen de klant of het management in het nemen van gefundeerde beslissingen.



Waar wordt wiskunde eigenlijk toegepast? In allerlei disciplines zoals het bankwezen, verzekeringsmaatschappijen, industrie, handel, transport, communicatie en automatisering. Het is duidelijk dat je niet geïsoleerd werkt maar je bezighoudt met uitdagingen uit andere vakgebieden, vaak in alledaagse taal en onvolledig geformuleerd. Dit verlangt een groot inlevingsvermogen van de bedrijfswiskundige en interviewtechnieken waarmee hij of zij snel hoofdzaken van bijzaken kan onderscheiden en de probleemstelling helder en kort kan verwoorden, het liefst in de taal van de wiskunde.



Vind je wiskunde het leukste vak en zit je nu op het havo of op het vwo? Ben je kritisch en kom je snel tot de kern van de zaak? Dan staat niets je in de weg om via de opleiding bedrijfswiskunde in een veelzijdige baan terecht te komen.

Je kunt bedrijfswiskunde aan de onderstaande hogescholen studeren.



Noordelijke Hogeschool Leeuwarden
www.nhl.nl

Hogeschool van Amsterdam
www.hva.nl

Fontys Hogescholen
www.fontys.nl

Hogeschool INHOLLAND
www.inholland.nl

Technische Hogeschool Rijswijk
www.thrijswijk.nl

BETA-PROJECTWEEK OP HET CALANDLYCEUM

Een winnende inzending voor de Wiskunde Scholen Prijs 2005 in de categorie havo/vwo

[Bert Kruijer]

Over de Wiskunde Scholen Prijs

De Wiskunde Scholen Prijs is ontstaan uit het WisKids-project, een gezamenlijk initiatief van wiskundig Nederland.

De Wiskunde Scholen Prijs wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut, met steun van het ministerie van OCenW.

Juryoordeel over het GIS-project

Een project om stil van te worden. Geen kinderachtig gedoe, gewoon de echte wereld als uitgangspunt nemen en moderne technologie inzetten. De jury is onder de indruk van de ambitie in dit mooi uitgewerkte project. Vooral het vakoverstijgende aspect wordt zeer gewaardeerd, evenals het feit dat de echte wereld als uitgangspunt wordt genomen. Het project geeft een duidelijk antwoord op de vraag 'Waarom wiskunde?'

Sommige juryleden vroegen zich a priori af of zoiets in de vierde klas wel mogelijk is, maar dit project toont aan dat het kan.

De duinen in

Woensdag, 25 januari. In het Noordhollands Duinreservaat lopen groepjes vierdeklassers havo en vwo, voorzien van een 'gps' en van verre zichtbaar door hun paarse heliumballonnen. Er gaan watermonsters worden genomen, korstmossen verzameld en windsnelheden gemeten, en vele leerlingen van het Calandlyceum in Amsterdam-Osdorp lopen voor het eerst door een duinlandschap. In de discussies verneem je woorden als 'handheld', 'horizontale windvector', 'skyview' en 'waypoint'. De duinen zijn gisteren verkaveld, elk groepje zoekt zijn kwadrant.

Projectweek

Een dagje erop uit - ze zijn eraan toe, want de twee voorafgaande dagen is er hard gewerkt: kennismaken met het Geografisch Informatie Systeem (GIS), natuurwetenschappelijke proeven

FIGUUR 1



voorbereiden, een testtraject lopen met een 'handheld', en een dagvullend computerpracticum rond het Global Positioning System (gps), waarop bijvoorbeeld de Tomtom-navigatie berust. Het gps-apparaat in de hand van de waarnemer registreert zeer nauwkeurig de afstand tot vier of meer aan de hemel waargenomen satellieten, en berekent daaruit de positie (lengte- en breedtegraad, hoogte).

De laatste twee dagen van de projectweek worden alle waarnemingen uitgewerkt in de vaklokalen. De numerieke uitkomsten worden ingevoerd in het GIS (zie figuur 2), waarbij de door de gps berekende posities ('waypoints') worden benut om een kaart met gegevens op te bouwen. Het resultaat en de conclusies worden vrijdagmiddag gepresenteerd.



FIGUUR 2



FIGUUR 3

Binnen het project wordt enthousiast samengewerkt door de leraren informatica, natuurkunde, biologie, scheikunde, algemene natuurwetenschappen, aardrijkskunde en – last but not least – wiskunde.

Practicum

Het wiskundig computerpracticum betreft een simulatie van de aardbol, met eromheen draaiende gps-satellieten (zie figuur 3), waarbij de leerlingen veel parameters kunnen instellen, en zo een stelsel ontwerpen dat zo goed mogelijk voldoet aan een aantal eisen:

- op elke plaats op aarde zijn voldoende satellieten waarneembaar;
- satellieten komen nooit zo dicht bij elkaar dat er een kans is op botsen;
- de periode van het gehele systeem is deelbaar op 24 uur;
- aan de vorige voorwaarden is voldaan met zo min mogelijk satellieten.

Uiteraard moeten de baansnelheid van de satellieten en de straal van hun banen in overeenstemming zijn met het gravitatieveld rond de aardbol, dat je in de simulatie naar believen kunt in- of uitschakelen. De leerlingen komen er spoedig achter dat deze voorwaarden met elkaar in strijd zijn, er ontstaat een 'optimaliseringsveldslag'. De in het programma ingebouwde tests geven zonder tussenkomst van een leraar feedback op de kwaliteit van het ontworpen systeem, kunnen op elk moment worden toegepast, en geven een score waarbij '70%' helemaal niet gek is.

Coördinaten

Bij de simulatie spelen drie coördinatenstelsels een rol.

1. Het (u,v) -stelsel, lengte- en breedtegraden, gekoppeld aan de plaats op aarde. Het (u,v) -stelsel draait mee met de aardbol; voor Amsterdam geldt steeds: $u \approx 0,070$ en $v \approx 0,908$ radialen.

2. Het (x,y,z) -stelsel, met oorsprong $(0,0,0)$ in het middelpunt van de aarde. Dit is het virtuele 3D-model, waarin alle bewegingen rond de aarde plaatsvinden.

De aarde is in het computermodel een eenheidsbol met $O(0,0,0)$. In het (x,y,z) -stelsel staat de sterrenhemel stil. Om 0:00 uur ligt de Greenwich-meridiaan in het xOz -vlak; voor Amsterdam geldt dan:

$x \approx 0,6142$; $y \approx 0,0429$; $z \approx 0,7880$. Twaalf uur later geldt: $x \approx -0,6142$; $y \approx -0,0429$; $z \approx 0,7880$.

3. De schermcoördinaten (xs, ys) . Deze zorgen voor de beeldopbouw en ontstaan door projectie van het (x,y,z) -stelsel (zie figuur 4).

Draaien

Bij een stilstaande aarde geldt:

$$\begin{cases} x = \cos u \cdot \cos v \\ y = \cos u \cdot \sin v \\ z = \sin v \end{cases} \quad (1)$$

We willen de aarde laten draaien. Dus (1) wordt:

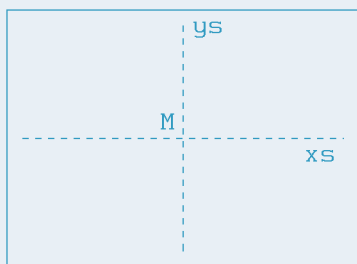
$$\begin{cases} x = \cos(u + t) \cdot \cos v \\ y = \cos(u + t) \cdot \sin v \\ z = \sin v \end{cases} \quad (2)$$

Als t toeneemt van 0 tot 2π , draait de aarde éénmaal om haar as. Er is 24 uur voorbij.

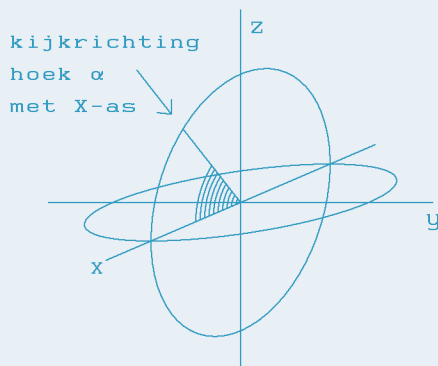
Uiteraard moet de aarde in de simulatie veel sneller om haar as draaien. Hiertoe wordt de waarde van t elke 40 milliseconden aangepast met een vast bedrag Δt .

Bovendien wordt de beeldopbouw telkens ververs. De toename Δt is in het paneel instelbaar (de 'kloksnelheid'), en bepaalt hoe snel de tijd in de simulatie verstrijkt.

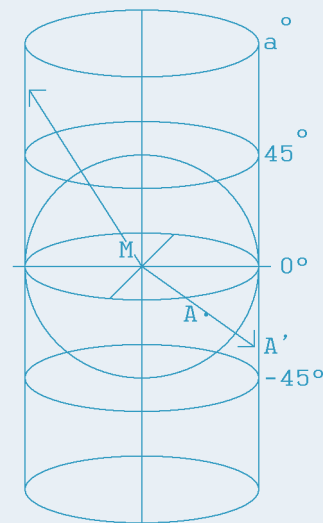
Als $\Delta t = \frac{2\pi}{600} \approx 0,01047$ ontstaat een film met 25 beeldjes per seconde waarin de aardbol één keer rondraait in 24 seconden.



FIGUUR 4



FIGUUR 5



FIGUUR 6

Projectie

Bij het tekenen van een kubus in parallelprojectie wordt de kijkrichting meestal iets ter rechter- of linkerzijde van het xOz -vlak gekozen. Er ontstaat dan een beter 3D-beeld.

Omdat de aarde en de satellieten in draaiende beweging zijn, kan de projectie naar het beeldscherm eenvoudiger worden uitgevoerd door:

$$\begin{cases} xs = y \\ ys = z \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases} \quad (3)$$

Zie figuur 5; de projectierichting ligt in het xOz -vlak onder een hoek α met de x^+ -as.

Als $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resulteert (3) in:

$$\begin{cases} xs = y \\ ys = -x \end{cases}$$

Dus de x^+ -as wordt benedenwaarts op het scherm afgebeeld.

Alle bewegingen worden eerst in het 3D-model opgebouwd, pas daarna vindt de projectie op het beeldscherm plaats. Het effect is een sterk ruimtelijk gevoel. Leerlingen én docenten worden vanaf de eerste minuut volledig door de simulatie in beslag genomen.

Probleemstellingen

Tijdens een dagvullend practicum werken de leerlingen aan twaalf probleemstellingen. Het voorbeeld hieronder heeft uiteraard slechts betekenis in combinatie met het programma, dat te vinden is als 'gps' op de website van de auteur^[1]. In de uitwerkfase aan het eind van de projectweek wordt wiskundige verdieping aangebracht.

7. Mercator

In de mercatorprojectie worden alle satellieten afgebeeld op een cilinder die de bol raakt bij de evenaar.

Het punt A heeft een projectie A' op de cilinder (zie figuur 6).

De cilinder wordt daarna 'opengeknijpt' bij de nulmeridiaan en plat uitgerold (van 0° tot 360°). De breedtecirkel '45°' is in de mercator-projectie een horizontale lijn.

- Welk aantal graden hoort bij de bovenste cirkel ($a = \dots$)?
- Waar is de '90°'-cirkel?
- Zet 'mercator' aan. Varieer de elevatie van de satellieten. Neem als relatieve snelheid bijvoorbeeld 200%. Probeer ook een elevatie van 90° . Wat valt je op?

Schat

Om 3 uur 's middags komen de eerste leerlingen met hun verhalen aan op punt 099747 497366; u begrijpt: Wijk aan Zee. Als ieder er is, wordt met behulp van de 'gps' nog even snel een schat gezocht en opgegraven op een geheime locatie aan het strand. Een van de medewerkers heeft per ongeluk de gridcoördinaten in het strand gegrift, dus de (eetbare) schat wordt binnen 5 minuten gevonden.

Noot

[1] De simulatie is beschikbaar op:
<http://home.tiscali.nl/bertkruijer>

Over de auteur

De gps-simulatie is ontwikkeld door Bert Kruijer, docent aan het Calandlyceum te Amsterdam, en beschikbaar op de in de noot genoemde website.

Leerlingmateriaal kan worden aangevraagd door het sturen van een e-mailbericht aan bkruijer@calandlyceum.nl.

De benodigde gps-apparaten zijn te huur bij de grotere buitensportzaken.

DE WET VAN BENFORD

Tegen de verwachting in beginnen getallen vaker met een 1 dan met een 9. Hoe zit dat?

[Henk Pfaltzgraff]

Verwachting

Ieder getal bestaat uit cijfers. Als je de cijfers turft van een groot aantal verschillende getallen, dan zullen, naar verwachting, alle cijfers ongeveer even vaak voorkomen - met de kanttekening dat het cijfer 0 (nul) bij de natuurlijke getallen uiteraard iets minder vaak voorkomt, omdat een van nul verschillend getal niet met een nul kan beginnen. We verwachten dus dat de gemiddelde frequentie van het *begincijfer* van een natuurlijk getal voor alle cijfers 1 tot en met 9 gelijk is aan $\frac{1}{9}$, en dat deze cijfers op andere posities (dus niet vooraan) een gemiddelde frequentie zullen hebben van $\frac{1}{10}$. Ook als je *random* (aselecte) getallen gebruikt, verandert er niets aan die verwachte frequenties.

De werkelijkheid is anders

We kijken in dit artikel steeds naar het *eerste* cijfer van een willekeurig geheel getal.

Hoe kun je een grafische rekenmachine zo slim krijgen dat hij het eerste cijfer van een getal vindt? Bedenk dat een getal als macht van 10 geschreven kan worden met een $^{10}\log$, en dan is het niet moeilijk te begrijpen dat het eerste cijfer van een getal $x \geq 1$ wordt gevonden uit

$$\text{int}\left(\frac{x}{10^{\text{int}(\log x)}}\right).$$

Tot zover is het niet te geloven dat er aan dit ogenschijnlijk flauwe onderwerp iets zinnigs valt te beleven. Toch is dat wél zo.

In een tabel in mijn oude BINAS-tabellenboekje vond ik de gegevens van een aantal diersoorten: er staan daar 279 getallen (als ik de laatste kolom *gemiddeld aantal eieren of jongen* even weglaat). Ik telde op die bladzijden het aantal getallen dat met een 'significante' 1 begint; dat zijn er 88. (Significant wil zeggen dat een nul als eerste cijfer van een getal niet meetelt. Zo is het significante eerste cijfer van 427 en van 0,00427 in beide gevallen een 4.) Aangezien er negen mogelijkheden zijn voor het eerste cijfer van een willekeurig getal en deze mogelijkheden even waarschijnlijk

lijken, zou je verwachten dat in de genoemde tabel ongeveer $\frac{279}{9} = 31$ van die getallen met een 1 beginnen en niet 88. Een enorm verschil tussen waarneming en verwachting! De voorlopige conclusie is dat niet alle negen cijfers even vaak voorkomen aan het begin van een getal. In deze kleine steekproef uit BINAS is het aandeel van de enen $\frac{88}{279}$, oftewel maar liefst 31,5 procent.

Andere getallen onderzoeken

De leerling kan gemakkelijk zelf een onderzoek opzetten naar de frequentie van de cijfers 1 tot en met 9 als eerste cijfer van allerlei getallen uit het BINAS-tabellenboek. De getallen waaruit de gegevens gehaald worden, moeten flink gevarieerd zijn en uit verschillende categorieën komen. Bijvoorbeeld de natuurconstanten of gegevens over metalen, vloeistoffen, vaste stoffen, de dichtheid, soortelijke warmte, smeltpunten en kookpunten. Je kunt ook een telefoonboek van je woonplaats pakken en de huisnummers van alle voorkomende adressen op een aantal pagina's turven. Dat gaat sneller dan je denkt: mij kostte het diersoortenonderzoek maar een paar minuten. Als je dan toch aan het turven bent, neem dan meteen de frequenties mee van de begincijfers 2 tot en met 9.

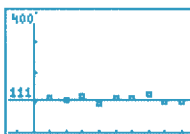
Waarom kun je trouwens niet de telefoonnummers gebruiken voor zo'n onderzoek, en evenmin de kolom die de gemiddelde nestgrootte of worp van de soorten geeft (bij de mens: 1)? En waarom bijvoorbeeld ook niet de dichtheid van metalen en alliages?

Benford

Voor je het weet ben je verzeild geraakt in een onderzoek naar een uiterst merkwaardig en buitengewoon moeilijk verklaarbaar verschijnsel. De astronoom Simon Newcomb deed eenzelfde onderzoek in 1881, nadat hij opgemerkt had dat sommige pagina's van logaritentafels (namelijk die van logaritmen met lage begincijfers) meer beduimd waren dan andere. Frank Benford verrichtte in 1938 opnieuw een uitgebreid onderzoek. Ik kopieer een stukje van zijn tabel met de gevonden percentages:

```
seq(X,X,1,9)→L1
For(N,1,1000)
  randInt(1,10000000)→R
  int(R/10^int(log(R))→E
  1+L2(E)→L2(E)
  If ES7: Output(E,4,L2(E))
  Output(8,12,N)
End
```

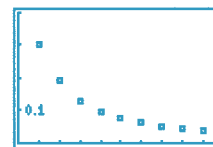
```
1: 116
2: 112
3: 123
4: 94
5: 115
6: 114
7: 126
SIMULATIES:1000
```



FIGUUR 1

```
BENFORD3
TREK RANDOM UIT
RANDOM UIT
RANDOM GETALLEN
EN KIJK NAAR HET
EERSTE CIJFER...
==>
```

```
1: 3042
2: 1864
3: 1290
4: 1016
5: 741
6: 652
7: 528
SIMULATIES:10000
```



FIGUUR 2

Col.	Title	First Digit									Samples
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
B	Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
K	1/n, 1/n, ...	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
P	Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
R	Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
T	Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
	Average	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011

De 1 als eerste cijfer is inderdaad favoriet in gemiddeld 30,6% van de getallen en eigenlijk is dat onbegrijpelijk en ongrijpbaar. Frits Beukers, de schrijver van *Getaltheorie voor Beginners* (zie [1], pp. 97-100), geeft toe dat het binnen de zuivere wiskunde niet mogelijk is te komen met een sluitende verklaring. We praten hier over een ervaringsfeit, een wet die soms wel maar soms ook weer niet opgaat zonder dat helemaal glashelder is waardoor dat komt. Toch zullen we proberen het onbegrijpelijke begrijpelijk te maken. En dat doen we, gebruikmakend van de harmonische reeks en de constante van Euler, in de voetsporen van Frank Benford.

Random

Wat is het verschil tussen getalverzamelingen in de BINAS-tabellen en in Benfords tabellen enerzijds en een 'gewone' random getalverzameling? Benfords getallen zijn gekozen, samengeraapt, uit verschillende categorieën; het zijn getallen die elk een verschillende waarschijnlijkheid hebben. Neem het voorbeeld van de huisnummers uit een telefoonboek. Niet alle straten zijn even lang: duidelijk is dat er maar zeer weinig huisnummers voorkomen boven de 1000, terwijl een huisnummer als 12 daarentegen erg vaak voor zal komen. En daar zit 'm de kneep. De kans op een groot getal zal kleiner zijn dan de kans op een klein getal. Evenredig met het omgekeerde misschien? Laten we eens kijken of de eerste cijfers van getallen die *random* (aselect) gekozen zijn, inderdaad gelijkmatig verdeeld zijn (zie figuur 1). Het eerste cijfer (E) wordt geteld in een lijst L2, de cijfers 1 t/m 9 staan in de plaatjes op de x-as. Met het TIBASIC-programma van figuur 1 kunnen we dat op een TI83 (of TI84) uitproberen. Je hoeft niet lang na te denken over het antwoord;

het eerste cijfer van random getallen is uniform verdeeld rond de kans $\frac{1}{9}$.

De software ORSTAT (Henk Tijms c.s.; zie [3]) heeft sterke helpbestanden (maar dat niet alleen). In een helpbestand over *Benford's Law* staat een verhaal over uit random verzamelingen getrokken random getallen. Bij het voorbeeld van de huisnummers uit een grote stad zijn de straten niet even lang, de straatlengte is als het ware een random getal. En de huisnummers per straat op hun beurt zijn getrokken uit een random lengte. We gaan random getallen trekken uit een verzameling met random bovengrens of liever, voor de zekerheid, random-uit-random-uit-random, als volgt:

```
For(N,1,1000)
  randInt(1,10000000)→R
  randInt(1,R)→R
  randInt(1,R)→R
  ...
```

Een spectaculaire verandering is opgetreden! De meetpunten liggen beslist niet meer op of rondom een rechte lijn. De meetpunten lijken terug te lopen zo'n beetje volgens het principe van de omgekeerde evenredigheid. Zie de schermplaatjes in figuur 2.

In lijst L2(1-9) staan de frequenties van de eerste cijfers 1 t/m 9 na random trekking van 10000 getallen, waarvan de bovengrens ook weer random getrokken is uit een getalverzameling die ook weer een random bovengrens heeft. Ook als je het aantal simulaties en de gebruikte grenzen (de bovengrens maar ook de ondergrens) verandert komt de wetmatigheid telkens weer op soortgelijke wijze terug.

Hypothese

Waarom komen niet alle cijfers van een getal even vaak voor? We proberen dat ongeloofwaardige verschijnsel geloofwaardiger te maken met behulp van een hypothese, die al aangestipt werd toen het over huisnummers ging.


```

0→T
For(X,100,199)
  T+1/X→T
End
ln(1000)+.577→S
Disp T/S
For(X,1000,1999)
  T+1/X→T
End
ln(10000)+.577→S
Disp T/S
...

```

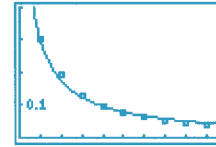
```

.3021184462
.3016285213
.301432632
Done

```

De wet van Benford

$$P_b = \log\left(1 + \frac{1}{b}\right)$$



FIGUUR 3

Laten we eens aannemen dat het aantal keren dat een getal n voorkomt, $\#(n)$, evenredig is met het omgekeerde van n , dus $\#(n) = \frac{C}{n}$.

Dit met de kanttekening dat de constante C straks weg gedeeld kan worden en dus niet relevant is. We laten C dus maar weg in het vervolg. Bekijken we de gevolgen van de hypothese voor het eerste cijfer 1 van de gehele getallen onder de 10000. De getallen hiervan die met een 1 beginnen zijn 1, 10 t/m 19, 100 t/m 199 en 1000 t/m 1999. De waarschijnlijkheden voor deze getallen lopen af, uitgaande van de hypothese, volgens $\frac{1}{1}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{19}, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{199}$ enzovoorts. De stipeltjes staan voor 'tot en met'. De relatieve kans op begincijfer 1 over het hele traject tot 10000 wordt dus berekend via:

$$P_1 = \frac{\frac{1}{1} + (\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19}) + (\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{199}) + (\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{1999})}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9998} + \frac{1}{9999}}$$

In de noemer staat de zogenoemde harmonische reeks die benaderd kan worden via de natuurlijke logaritme en de constante van Euler (γ):

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} = \ln n + \gamma \text{ met } \gamma \approx 0,577$$

De hypothese werkt beter bij grote aantallen, bovendien heeft de eerste term $\frac{1}{1}$ (te) veel invloed, vergeleken met al die kleine termen $\frac{1}{n}$. Vandaar dat we beter kunnen starten met bijvoorbeeld $\frac{1}{100}$ en langer doorgaan dan hiervoor gebeurd is:

$$P_1 = \frac{(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{199}) + (\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{1999}) + (\frac{1}{10000} + \dots + \frac{1}{19999})}{\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{9999}}$$

met

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{9998} + \frac{1}{9999} \approx (\ln 10000 + \gamma) - (\ln 100 + \gamma) = \ln 10000 - \ln 100 = \ln 1000$$

Ook de constante γ heeft zijn werk verricht en kan zich bescheiden terugtrekken.

Met TIBASIC

Dit vraagt om een TIBASIC-programmaatje; zie [figuur 3](#). Hierin berekent S de waarde van de noemer en telt T de cijfers. Omdat de TI83/84 een beperkte lijstlengte van slechts 999 getallen toestaat, gebruik ik *For*-statements.

FIGUUR 4

We herhalen bovenstaande berekening voor de getallen 100 tot en met 10^k (in het programma was $k = 5$) en krijgen dan de kans op een eerste cijfer 1:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{199}) + (\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{1999}) + \dots + (\frac{1}{10^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 10^{k-1} - 1})}{\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{10^k - 1}} \\
 &= \frac{\ln 200 - \ln 100 + \ln 2000 - \ln 1000 + \dots}{\ln 10^k - \ln 10^2} = \frac{\overbrace{\ln 2 + \ln 2 + \dots}^{(k-2) \text{ termen}}}{k \ln 10 - 2 \ln 10} \\
 &= \frac{(k-2) \ln 2}{(k-2) \ln 10} = \frac{\ln 2}{\ln 10} = {}^{10}\log 2 \approx 0,301
 \end{aligned}$$

Op dezelfde manier kun je laten zien dat de kans op een eerste cijfer 2 gelijk is aan $P_2 = \log 1 \frac{1}{2}$ en de kans op een eerste cijfer 3 gelijk is aan $P_3 = \log 1 \frac{1}{3}$.

Wet van Benford

Aldus wordt de wet van Benford (zie ook [2], p. 44) zichtbaar voor begincijfer b (zie [figuur 4](#)):

$$P_b = \log\left(1 + \frac{1}{b}\right).$$

De grafiek van P_b tegen b past dus uitstekend bij de gevonden random-uit-random-uit-random waarden. Of misschien is het beter te zeggen dat de random-uit-random-uit-random methode uitstekend het verloop van de grafiek verklaart.

Referenties

[1] Frits Beukers: *Getaltheorie voor beginners*. Utrecht: Epsilon Uitgaven, deel 42 (2005).

[2] Henk Tijms: *Spelen met kansen*. Utrecht: Epsilon Uitgaven, deel 43 (2002).

[3] ORSTAT2000. Freeware (gratis te downloaden van www.feweb.vu.nl/ectrie/nl/scholier.html).

Het programma is door Jos Tolboom besproken in *Euclides* 77(3) en 77(8); pp. 92-97 en pp. 366-371.

Over de auteur

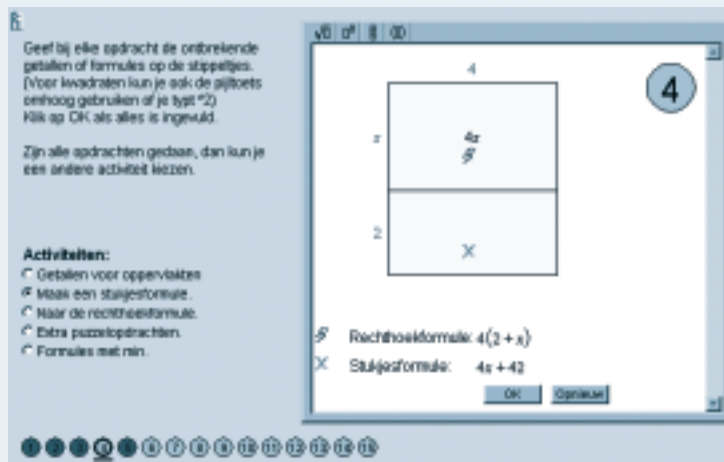
Henk Pfaltzgraff was 37 jaar leraar wiskunde en 20 jaar corrector bovenbouw havo/vwo aan het Zaanlands Lyceum.

URL: www.henkshoekje.com (> Stat: Kansen > S53)

E-mailadres: henk@henkshoekje.com

DIGITALE WISKUNDE OEFENOMGEVING

[Christian Bokhove, Peter Boon, André Heck, Gerard Koolstra]



FIGUUR 1
Oppervlakte-applet met onmiddellijke feedback

Inleiding

Dit is het tweede artikel in een reeks met ervaringen uit het GALOIS-project (zie [2] voor het eerste artikel).

De naam van de welbekende wiskundige wordt als acroniem gebruikt voor Geïntegreerde Algebraïsche LeerOmgeving In School. Doelstelling is één digitale werkomgeving te realiseren waarin

1. leerlingen met wiskunde kunnen oefenen en zichzelf te allen tijde kunnen toetsen;
2. wiskundeopdrachten voor een deel 'willekeurig' gegenereerd worden, zodat de hoeveelheid oefenstof schier onuitputtelijk is;
3. activiteiten en antwoorden van leerlingen worden opgeslagen;
4. leerlingenwerk automatisch 'intelligent' van commentaar wordt voorzien.

Daarbij willen we deze doelen bereiken op basis van *open source* en *open standaarden*, zodat ieder die dat wil zowel tijdens als na afloop van het project gebruik kan maken van de resultaten (kennis en producten)^[1]. In het vorige artikel^[2] gingen we vooral in op het vierde punt, het 'intelligent' reageren op hetgeen door een leerling wordt ingetypt; in dit artikel staan het eerste en het derde punt centraal.

Waarom registratie?

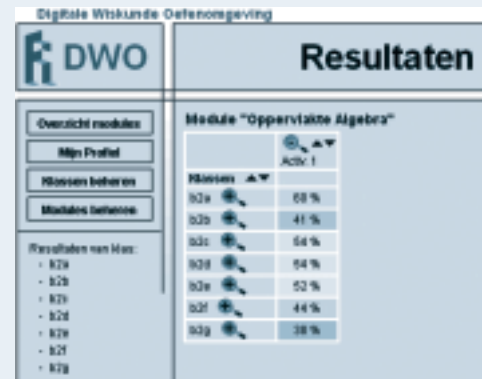
In de afgelopen jaren is de wiskundegemeenschap verblijd met steeds meer computerprogramma's die het leren van wiskunde vergemakkelijken en

verlevendigen. Zo zijn er digitale, lesstofvervangende hoofdstukken, vele applets, meetkundesoftware, enzovoorts. Sommige onderdelen maken deel uit van een langere leerlijn. Ondanks allerlei praktische en didactische problemen lijkt er steeds meer sprake te zijn van succes op dit gebied.

Juist dit succes leidt tot nieuwe verlangens. Het zou voor een docent prettig zijn om na afloop van een computerpracticum nog eens rustig te kunnen bekijken wat de leerlingen gedaan hebben, welke vorderingen zij gemaakt hebben, waar problemen de kop opstaken en aan welke onderdelen in de volgende les aandacht gegeven moet worden. Bij een opdracht om buiten de les met een programma te oefenen is het wenselijk eenvoudig na te kunnen gaan wat leerlingen ook daadwerkelijk gedaan hebben en een indruk te kunnen krijgen hoe dat ging. Hierdoor kan de docent efficiënter omgaan met de contacttijd. Ook leerlingen hebben baat bij opslag van eerder computerwerk en 'houdbare' feedback hierop: een digitaal archief van computeractiviteiten maakt dit werk minder vluchtig en bevordert het leerproces omdat eerder werk en feedback daarop geraadpleegd kan worden. Op deze manier kan niet alleen gebruik gemaakt worden van het positieve effect dat onmiddellijke feedback bij veel leerlingen heeft, maar kan deze feedback en de context waarin deze werd gegeven ook makkelijk later nog eens bekeken worden.



FIGUUR 2
Overzicht van resultaten van leerlingen in de klas



FIGUUR 3
Overzicht van resultaten van verschillende klassen

Het registreren van leerlingenwerk is een van de standaardvoorzieningen van een ELO^[3] (Elektronische LeerOmgeving), en het lijkt erop dat ook binnen het voortgezet onderwijs het gebruik van ELO's sterk aan het toenemen is. Het ligt voor de hand om na te gaan of het mogelijk is dat de diverse wiskundeprogramma's kunnen communiceren met een ELO zodat 'houdbare' feedback en uitwisseling van lesmateriaal realiseerbaar is. In dit artikel beschrijven we echter eerst ervaringen met het gebruik van de aan het Freudenthal Instituut (FI) ontwikkelde leeromgeving DWO (Digitale Wiskunde Oefenomgeving).

DWO

Om het werken met wisweb-applets minder vluchtig te maken is het FI gestart met het opzetten van de DWO^[4]. In deze omgeving logt een leerling in op een centrale server bij het FI, gaat aan de slag met een applet en krijgt automatische feedback van het applet. Het werk van de leerling wordt opgeslagen zodat hij of zij bij een volgend bezoek aan de DWO verder kan werken in plaats van opnieuw te beginnen. Docenten kunnen zowel vorderingen van iedere individuele leerling in de gaten houden als klassenoverzichten opvragen (zie figuren 2 en 3).

Op het St. Michaël College te Zaandam is de DWO ingezet bij hoofdstukvervangend materiaal voor een aantal algebrahoofdstukken in de tweede klas. Bij het eerste 'blok' gaat het om een eerste

kennismaking met wiskundige expressies en dus vooral over het begrip variabele, het krijgen van enig gevoel voor formules en het uitwerken van haakjes in wiskundige uitdrukkingen. Hierbij wordt het applet 'Oppervlakte Algebra' (zie figuur 1) gebruikt. Dit applet geeft via het oppervlaktemodel leerlingen inzicht in de wijze waarop formules kunnen worden uitgewerkt. De feedback in dit applet is direct: groene krulletjes geven aan welke onderdelen van het antwoord goed zijn en rode, oranje en groene bolletjes om de opdrachtcijfers wijzen respectievelijk op een foutief, onvolledig en correct antwoord.

De docent kan niet alleen snel zien welke opdrachten een leerling fout gemaakt heeft, maar ook heel gedetailleerd welke fouten. Figuur 1 geeft daarvan een voorbeeld. Wellicht is de leerling onoplettend geweest en vergeten om het betreffende hokje in de rechthoek in te vullen. Misschien is hij of zij op formele wijze te werk gegaan en heeft daarom 42 opgeschreven met in gedachte $4 \cdot 2$, net als je $4x$ opschrijft als het om een product gaat. Het is aan de docent om te beslissen dit met de leerling in kwestie door te nemen of hier een klassikale bespreking over te houden wanneer blijkt dat meer leerlingen met hetzelfde probleem kampen. Ook de wetenschap dat de meeste leerlingen géén moeite hebben met bepaalde onderdelen is nuttige informatie: dan hoeft je later in de les niet meer naar de bekende weg te vragen of onnodig uit te weiden over iets wat de leerlingen al snappen. Uiteraard zijn er in klassen altijd verschillen in het tempo waarin

leerlingen de zaken oppikken. De overzichten van vorderingen van leerlingen uit een klas (zie figuur 2) en van resultaten in andere klassen (zie figuur 3) helpen om zowel globaal als meer individueel bij te houden hoe de voortgang is.

Om deze overzichten goed te kunnen interpreteren moet u weten dat de docenten aan de leerlingen als huiswerk opgedragen hadden alleen de eerste twee onderdelen van het 'Oppervlakte Algebra' applet te maken. Hierdoor zou voor hen de hoogst haalbare score 42% geweest zijn. De cijfers in de tabel houden in dat de gemiddelde score van leerlingen in vijf van de zeven klassen minimaal gelijk is aan de streefscore. Bij nadere inspectie blijkt dat een kwart van alle leerlingen meer dan tweederde van alle beschikbare opdrachten goed gemaakt heeft en dat 5% van de leerlingen zelfs alle opdrachten goed gemaakt heeft, óók die niet als huiswerk waren opgegeven.

Ervaringen

Samenvattend: de DWO helpt om een beter zicht te krijgen op leerprocessen en zo goede keuzes te kunnen maken wat inrichting van de lessen, met name ten aanzien van nut en noodzaak van klassikale versus meer individuele activiteiten. Ook kan de lestijd effectiever gebruikt worden voor uitleg en discussie, in plaats van controle op huiswerk. De DWO blijkt bovendien zowel voor leerlingen als docenten een overzichtelijke omgeving te zijn met niet al te veel toeters en bellen. Het beheer ligt in handen van een andere organisatie en als docent heb je daar geen omkijken naar.

Er zijn echter ook enkele nadelen. Wanneer je op school een ELO gebruikt is het vervelend als er wéér een nieuwe omgeving bij komt. Ook heb je het beheer maar ten dele in de hand en is soms meer invloed handiger. Bijvoorbeeld om aan te geven welke onderdelen van een module in ieder geval door leerlingen gedaan moeten worden en welke onderdelen facultatief zijn.

Die voor- en nadelen van de DWO zijn we ook tegengekomen tijdens interviews met twee docenten en twee leerlingen. Voor de ene geïnterviewde docent was het gebruik van de DWO nieuw, terwijl de andere docent een jaar eerder ervaring opgedaan had. De ene leerling was goed in wiskunde, terwijl de andere leerling wat zwakker in wiskunde was en andere interesses en ambities had. We zetten de plus- en minpunten uit de interviews op een rijtje.

Praktische problemen, gebruikerswensen en andere kanttekeningen (voornamelijk van docenten)

- De procedure dat leerlingen zichzelf eerst moeten aanmelden bij de DWO in hun eigen klas geeft enige ruis: sommige leerlingen komen in een andere klas terecht dan bedoeld en zijn daardoor voor hun docent eigenlijk onvindbaar. Een door ervaring wijs geworden docent ondervangt dit

door een computerlokaal met beamer te reserveren en daar samen met de leerlingen de procedure tot aanmelding door te nemen en niet eerder te rusten voordat iedereen goed is aangemeld. Maar dan nog is dit geen garantie dat er geen interferentie met leerlingen uit andere klassen optreedt.

- Als een leerling zich tussentijds voor de tweede keer aanmeldt, bijvoorbeeld omdat hij of zij het wachtwoord vergeten heeft, komt dezelfde naam twee keer in de lijst van leerlingen terecht. Maar als docent, in de rol van beheerder van de klas, kun je niet zien welke van de twee namen verwijderd kan worden.

- Als maar een gedeelte van de in een module aanwezige opdrachten gemaakt hoeft te worden door de leerlingen, kan de docent dit alleen nagaan door het werk even te inspecteren en te kijken of er geen puntjes gesprokkeld zijn bij niet opgegeven opdrachten.

- Je kunt niet snel per e-mail reageren op werk van een leerling.

- Je kunt de overzichten met scores van leerlingen niet makkelijk afdrukken, of exporteren.

- Bij technische problemen ben je afhankelijk van anderen.

Overigens is de DWO nog sterk in ontwikkeling en wordt regelmatig op basis van opmerkingen van gebruikers aangepast.

Belangrijkste pluspunten van de DWO

- De docent krijgt een efficiënt middel om leerlingen (extra) te laten oefenen met lesstof en de oefenomgeving levert snel en gemakkelijk een overzicht van opgedragen huiswerk. Je kunt snel controleren of leerlingen het werk wel gemaakt hebben. Een geïnterviewde docente verwoordde het als volgt: *'Ik zie het nog steeds als extra oefenmateriaal waarbij niet altijd de docent over de schouder van een leerling hoeft mee te kijken, maar dat je wel kan controleren zonder dat je allemaal schriften in moet nemen. Het zijn ideale diagnostische toetsen. Leerlingen ervaren het over het algemeen ook als een voordeel dat een leraar kan zien wat ze doen; ze kunnen er dan makkelijker heel gerichte vragen stellen.'*

- Door middel van de DWO krijgt digitaal oefenen een belangrijkere plaats. Niet alleen vinden leerlingen het werken met de applets leuker en spannen ze zich meer in (*'Het is weer eens wat anders dan sommetjes in het schrift maken. Als je het eenmaal snapt, dan kun je het in één keer doen. Het kan gewoon tussen MSN-en en luisteren naar muziek door'* en *'je gaat net zolang door tot het groene bolletje'*), maar ook steken ze meer van de wiskunde op (*'Je ziet gelijk wat je fout doet en soms krijg je een hint in de trant van "we vragen dit en niet dat". Dit maakt het gemakkelijker en leuker'* en ook *'Het is best leuk om te doen. Gewoon, je kan het thuis doen en je leert er ook nog wat van. Dus, je hebt er wel wat aan'*). En ze voelen zich zo prima voorbereid op een proefwerk (*'Voor een schriftelijke toets kijk je even of je het nog kunt; je maakt nog*

eens een paar sommetjes opnieuw in het applet').

- Het is (bij een WisWeb+ abonnement) mogelijk voor de docent om de opdrachten binnen veel applets in de DWO zelf aan te passen. Hierdoor kan het materiaal beter op maat worden gemaakt voor een bepaald onderwerp.
- Het is binnen DWO mogelijk een eindtoets af te nemen. Daartoe kan de docent zelf een module maken en die voor de duur van een lesuur toegankelijk maken voor de leerlingen. In deze module kunnen speciale eindtoetsversies van applets worden gebruikt waarin de feedback en nakijkknop zijn weggehaald. Een ingelogde docent die het werk nakijkt krijgt wel de beschikking over een nakijkknop zodat een snelle evaluatie van het werk mogelijk wordt.

Om enkele van de genoemde nadelen op te lossen willen we kijken hoe we de genoemde applets kunnen integreren in een bestaande ELO. Hierover zal het volgende artikel in de reeks gaan.

Noten

[1] Zie hiervoor: www.galoisproject.nl

[2] C. Bokhove, A. Heck, G. Koolstra: *Intelligente feedback bij digitale toetsen en oefeningen*. In: *Euclides* 81(2) (2005), pp. 70-74.

[3] We gebruiken hier de gangbare uitdrukking ELO, hoewel op de naamgeving (*Elektronische LeerOmgeving*) wel het één ander af te dingen is. Ook over het begrip *Digitale Leeromgeving* zijn kritische opmerkingen te maken. Zie ook: G. Koolstra (2002): *Digitale leeromgevingen: een kritische verkenning*. In: *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* 22(1) (2002), pp. 9-11.

[4] Zie www.wisweb.nl of probeer de DWO uit op <http://www.fi.uu.nl/dwo>.

Over de auteurs

- Christian Bokhove is docent wiskunde & informatica aan het St. Michaël College te Zaandam en projectleider van het Galois-project.

E-mailadres: bokhove2@zonnet.nl

- Peter Boon is ontwerper van educatieve software bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

E-mailadres: P.Boon@fi.uu.nl

- André Heck is projectmanager aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam op het gebied van ICT-toepassingen in onderwijs bij wiskunde en natuurwetenschappen.

E-mailadres: heck@science.uva.nl

- Gerard Koolstra is docent wiskunde aan het St. Michaël College en al vele jaren betrokken bij diverse projecten op het snijvlak van ICT en wiskunde.

E-mailadres: g.koolstra@chello.nl

advertentie

Symposium XII van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs

BOEKEN DIE HUN SPOREN HEBBEN NAGELATEN

Over de meest bijzondere boeken uit de geschiedenis van de reken- en wiskunde-didactiek

zaterdag 20 mei 2006, Hogeschool Domstad te Utrecht, 10:00 - 16:30 uur
(Koningsbergerstraat 9)

Programma

9.30 - 10.15: Ontvangst en koffie

10.15 - 10.30: Opening door Marjolein Kool
(Hogeschool Domstad)

10.30 - 11.15: Harm Jan Smid
(Technische Universiteit, Delft)
Jan Versluys: een invloedrijk man of spoorloos verdwenen?

11.15 - 12.00: Sieb Kemme
(Kemme Educatieve Diensten)
De Übungensammlung van Tatiana Ehrenfest - Afanassjewa; inspiratiebron of relikwie?

12.00 - 13.30: Lunch, tentoonstelling
Eenieder is uitgenodigd om een poster op te hangen en/of iets te exposeren.

13.30 - 14.15: Ed de Moor
(emeritus Freudenthal Instituut)
Rekendidactiek tijdens het interbellum - de tijd van Diels en Nauta, en Kohnstamm

14.15 - 14.45: Theepauze

14.45 - 15.30: Joop van Dormolen
(PME, Universiteit Haifa)
Je kunt alleen maar iets begrijpen als je het al weet

15.30 - 16.00: Discussie
De toekomst van de HKRWO

16.00 uur: Sluiting

Deelname door overmaking van € 25,00 op giro 4657326 t.n.v. HKRWO te Heumen
(koffie, thee en lunch inbegrepen)

Inlichtingen: HKRWO, Dorpsstraat 26-A, 6582 AN Heumen, tel.: 024-3777928,
e-mail: d.beckers@inter.nl.net

HKRWO-symposium XII wordt mede mogelijk gemaakt door financiële steun van NWO, NVvW en NVORWO.
Verder is er ondersteuning vanuit het Freudenthal Instituut.

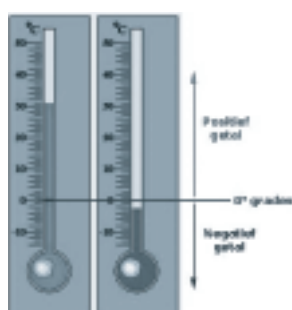


FIGUUR 1

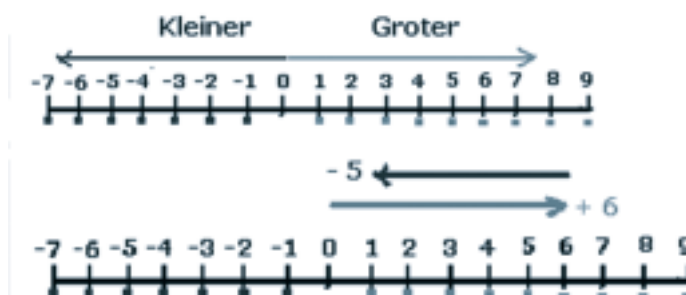
OVER GETALLEN, REKENEN EN STRUCTUREN

[Bert Zwaneveld]

FIGUUR 2



FIGUUR 3



Aanleiding

Het artikel *Over breuken, wat zijn dat eigenlijk voor dingen?* van Hessel Pot in het oktobernummer van Euclides^[4] was voor mij aanleiding nog eens wat na te denken over de vraag wat we bedoelen met getallen en rekenen en de eventuele didactische implicaties.

Het artikel van Hans Sterk en Jacob Perrenet^[5] in datzelfde nummer gaf mij een aanknopingspunt. Om in het onderwijs over getallen, betekenis en schrijfwijze, en het opereren ermee (rekenen) te kunnen praten is niet alleen een eenvoudige en inzichtelijke notatie nodig, maar ook een structuur die Sterk en Perrenet omschrijven als iets ‘waarbinnen “eerste stappen” vlot gezet kunnen worden, aanvoeld moet worden welke richtingen men uit kan gaan, en wat een volgende stap ongeveer als resultaat zal opleveren of zou kunnen opleveren, en aanvoeld moet worden waar de computer zinvol ingezet kan worden.’

Een en ander bracht mij ertoe de voor mij, didactisch gezien, relevante aspecten van getallen en rekenen op een rij te zetten, maar niet in de vorm van definities. Daarvoor is rekenen te complex. Eerst verken ik het rekenen aan de hand van een aantal voorbeelden, daarna bespreek ik het structuuraspect.

Rekenen

De vraag naar wat rekenen is, is de vraag naar de functie van rekenen in allerlei situaties. Nadat die functies zijn vastgesteld komen de bij die functies passende vormen. Vorm volgt immers functie.

De functie van het rekenen wordt sterk bepaald door de situatie. Gemakshalve onderscheid ik hier twee soorten situaties. De ene noem ik praktisch, de andere schools. Voorbeelden van rekenen in praktische situaties zijn: betalen in een winkel, bij klussen in huis bepalen hoeveel verf, vloerbedekking, enzovoorts je nodig hebt, beantwoorden van de vraag of je van ziektekostenverzekering zult veranderen, of je je telefoonabonnement zult omzetten, plannen van een reis. Een deel van wat wel gecijferdheid wordt genoemd betreft het rekenen in dit soort praktische situaties. Bij schools rekenen zijn relevante aspecten: het leren van een aanpak zoals doortellen, rekenen op je vingers of met een rekenmachine, verkorten van een zelf ontdekte of van anderen overgenomen rekenprocedure, oefenen, automatiseren, toepassen in een nieuwe situatie. Uiteraard is er een relatie tussen het rekenen in praktische situaties en in de schoolse situatie. De school moet de kinderen minstens voorbereiden op functioneren in praktische situaties.

Maarten Dolk van het Freudenthal Instituut heeft mooi videomateriaal uit de Verenigde Staten waarin een klas van de basisschool onder begeleiding van

hun juf uitzoekt hoe lang een kalkoen van een gegeven gewicht in de oven moet braden, gegeven een kwartier braadtijd voor een gegeven gewicht. De kinderen rapporteren over hun oplossing. Een de kinderen heeft de oplossing gevonden met behulp van een tekening van klokken waarop kwartieren zijn aangegeven. Pas daarna wordt er geteld en het antwoord met cijfers gerepresenteerd. De oplossing is zonder getalrepresentaties gevonden, althans zo is de video te interpreteren. Pas na afloop van het proces wordt het antwoord formeel gerepresenteerd, maar het rekenen heeft daarvoor begripsmatig op het niveau van het kind plaats gevonden. Kortom, een voorbeeld van rekenen zonder veel formele notaties.

Bij een vliegreis met een tussenstop na 12 uur vliegen waarbij na de tussenstop nog eens 7 uur verder gevlogen wordt, ligt het vervangen van $12 + 7$ door 19 niet echt voor de hand, zeker als je niet wilt weten hoe lang je echt vliegt maar hoe laat het is als je aankomt. Want dan moet je toch ook weten hoe lang de tussenstop duurt en wat het tijdsverschil is.

Nog een voorbeeld van rekenen in een praktische situatie. Je hebt 37 euro in je portemonnee en je krijgt er 48 euro bij. Wat heb je dan? Hier volgen een aantal mogelijke reacties die in mijn ogen alle adequaat zijn, want het hangt er maar helemaal vanaf wat je wilt weten:

- (1) Een hoop euro's.
 - (2) Je had (bijvoorbeeld) een briefje van 20, een briefje van 10, een briefje van 5 en een munt van 2 euro; je krijgt (bijvoorbeeld) twee briefjes van 20, een briefje van 5, een munt van 2 en een munt van 1 euro; je hebt dan drie briefjes van 20, een briefje van 10, twee briefjes van 5, twee munten van 2 en een munt van 1 euro.
 - (3) Je doet de 48 euro bij de 37 euro in je portemonnee en telt in gedachten door, eventueel met enige verkorting: eerst 3 bij de 37 (dat is 40), dan van de overige 45 eerst nog 40 erbij (dat is 80) en tenslotte de overige 5 erbij (dat is dan 85).
 - (4) Aansluitend aan (2): 3 maal 20 en 1 maal 10 en 2 maal 5 en 2 maal 2 en 1 maal 1, dat is, wellicht met tussenstappen, 85.
 - (5) Je rekent op de een of andere manier, bijvoorbeeld zoals in (3), $37 + 48 = 85$ uit.
- Uiteraard wordt bij de manieren (3), (4) en (5) op onderdelen gerekend. Dat is zeker bij (4) en bij (5) het geval. Maar misschien laat bij (4) de betreffende persoon de drie briefjes van 20 door zijn handen gaan en heeft hij zonder enige verwijzing naar 3 maal 20, het antwoord 60 in zijn hoofd. Voor de andere tussenstappen kan iets dergelijks gelden. Alleen bij (5) speelt de schrijfwijze echt een rol, bij (2), (3) en (4) is dat nauwelijks het geval. Bij (2) en (4) gaat het bij 20, 10, 5, 2 en 1 nauwelijks om de getallen, maar om de verwijzing naar de betreffende eurobiljetten en euromunten.

Nog een voorbeeld. Je doet je boodschappen in de supermarkt. Misschien wel onbewust schat je wat het bedrag is dat je aan de kassa moet betalen. Als bij het afrekenen blijkt dat je ongeveer 100 euro moet betalen, terwijl je dacht dat het om 60 euro zou gaan, controleer je de kassabon.

Uit onderzoek is bekend hoe bepalend de situatie is. Lauren Resnick geeft in [6] het volgende voorbeeld uit het pre-automatiseringstijdperk. Magazijnbedienden moesten met enige regelmaat de omvang van de voorraad melkflessen rapporteren. De flessen stonden op pallets die op elkaar gestapeld waren. Die pallets konden geheel of gedeeltelijk leeg zijn. Het bleek dat zij de voorraad heel anders bepaalden dan met behulp van op school geleerde rekenprocedures. Nieuwe bedienden namen heel snel die methoden over van de ervaren bedienden. Kennelijk ging het om een effectieve en efficiënte methode die beter functioneerde dan het schoolse rekenen.

Wat er wordt opgeschreven hangt van de omstandigheden af, maar is niet helemaal vrij. Vanwege uniforme procedures en goede communicatie hebben we, na eeuwen van zwoegen met notaties als het zestigtallig stelsel, Romeinse cijfers, sinds een paar eeuwen het universele systeem van het tientallig stelsel, waarbij ook de kommagetallen in dezelfde systematiek zitten. De breuken van de vorm $\frac{a}{b}$ vallen hier een beetje buiten.

Getallen die naar grootheden verwijzen

Bij het 'kale' rekenen zoals bij het oefenen op school, speelt de eenheid geen rol. In de praktijk, bij rekenen met getallen die vrijwel altijd naar bepaalde grootheden verwijzen, is de eenheid wel belangrijk. Zo betekent een zin als 'onze kamer is acht meter lang' zoiets als: 'een duimstok van één meter past acht keer in de lengterichting van onze kamer'. Het komt dan al gauw voor dat er van eenheid gewisseld moet worden. Het volgende voorbeeld moge dit illustreren.

In het Nederlandse weerbericht is sprake van bijvoorbeeld 3 mm neerslag. In het Vlaamse weerbericht, dat zeker voor mensen in Zuid-Limburg handiger is dan het Nederlandse weerbericht dat eerder op de Randstad georiënteerd is, spreekt men van 3 liter neerslag per vierkante meter. Als ik dat hoor denk ik meteen: dat zal wel 3 mm zijn, maar toch twijfel ik of het niet 3 cm is. Ik 'zie' natuurlijk wel dat 3 cm heel veel water is, als ik me bijvoorbeeld de wc-vloer voor de geest haal en daar 3 cm water op denk. Om zekerheid te krijgen ga ik rekenen. Daarbij moet ik natuurlijk rekening houden met de eenheden: 3 liter per $m^2 = 3 \text{ dm}^3$ per $m^2 = 3 \text{ dm}^3$ per $100 \text{ dm}^2 = 0,03 \text{ dm} = 0,3 \text{ cm} = 3 \text{ mm}$. Dit voorbeeld laat zien hoe complex eenheden de situatie kunnen maken. (Of de Nederlandse of de Vlaamse manier van zeggen de handigste is, laat ik in het midden, relevant is wat

je gewend bent.) Het taalgebruik in het Nederlandse weerbericht suggereert dat het om een enkelvoudige eenheid (mm) gaat, terwijl het Vlaamse weerbericht duidelijk maakt dat het om een samengestelde eenheid (liter per vierkante meter) gaat. Er zijn twee grootheden, hoeveelheid neerslag (in liter) en oppervlakte (in vierkante meter), die gecombineerd worden tot hoeveelheid neerslag per oppervlakte (in liter per vierkante meter). In deze situatie is het wisselen van eenheid lang niet eenvoudig. In ieder geval wordt het eenvoudige deel, omrekenen van dm naar mm, bekend verondersteld.

Samengestelde grootheden komen vaak voor; snelheid is de bekendste. Hierbij moet er met enige regelmaat worden omgerekend, bijvoorbeeld van km per uur naar m per seconde. Wat er precies moet gebeuren is weer afhankelijk van de situatie: auto rijden, fietsen, wandelen, terreingesteldheid, mate van haast, en de vraag wat je nu eigenlijk wilt weten.

Praktisch rekenen wordt steeds bepaald door een situatie en een vraag naar iets dat je in die situatie wilt weten. De functie van het rekenen is het proces om tot een antwoord te komen. Hoe je een en ander opschrijft, hangt weer van de situatie af. Bij communicatie met anderen (of met jezelf als het proces ingewikkeld of omvangrijk is), gaat de wijze van opschrijven een rol spelen. Dat geldt zeker als je bij dat proces hulpmiddelen als een rekenmachine of spreadsheet gaat gebruiken.

Betekenisgevende structuren

Pierre van Hiele zegt in [2] dat 'structuren de grondslag vormen van ons denken. Door structuren wordt de wereld leefbaar en ook bespreekbaar. Men is door middel van structuren in staat adequaat en met intentie te handelen in een nieuwe situatie.' Zoals de voorbeelden hiervoor laten zien bepalen situatie, vraag, proces om tot een antwoord te komen en antwoord samen een (lokale) structuur waarbinnen de optredende getallen betekenis hebben. Als er precies gerekend moet worden wint het proces om tot een antwoord te komen aan belang ten koste van de situatie, maar alleen maar voor dat moment. Zodra het antwoord er is, komt de situatie weer volledig in beeld.

Naar het rekenen met de natuurlijke getallen kan vanuit verschillende structuren gekeken worden. In [1] behandelt Freudenthal er vier: tellen, aantallen, maatgetallen en rekengetallen. Bij deze laatste gaat het vooral om de eigenschappen van getallen die bij het rekenen relevant zijn. Bij kinderen gaat het meestal in deze volgorde, maar dat hoeft niet per se. Het rekenen kan al beginnen als ze over de telrij beschikken, via doortellen of terugtellen. De telrij opnoemen en opschrijven, 1, 2, ..., 9, 0 en 1 links ervan (dus '10'), enzovoorts, kunnen ze al heel snel. De relatie leggen tussen vier in de telrij en vier als aantal (vaak vier concrete voorwerpen) is de volgende stap. Op dat moment kan het rekenen

uitgebreid worden door te manipuleren met de aantallen in concrete verzamelingen. De overgang naar maatgetallen is een volgende stap. De start is eenvoudig. Er is een voorwerp waarvan je een of ander aspect, bijvoorbeeld hoe groot het is, de lengte, nader wilt onderzoeken en waarbij je niet kunt volstaan met uitspraken over groter dan, kleiner dan of even groot als. De gebruikelijke procedure is: kies een maatstaf of eenheid en ga na hoe vaak die er op past. Past die maatstaf precies een heel aantal keren dan ben je klaar. Het maatgetal is dat aantal keren. Kom je te kort dan ga je één stap terug en houd je iets over dat kleiner dan je maatstaf is. Verdeel die maatstaf in een gelijk aantal delen. In eerste instantie ligt in tweeën delen voor de hand. Het kan zijn dat het begrip 'de helft' al bekend is of hier juist geleerd wordt. Lukt dat, dan ben je klaar. Lukt het niet, dan kun je ook met drie of vier gelijke delen aan de slag gaan. Maar al snel zul je een algemeen werkend principe moeten hebben. Bijna overal is voor 10 gelijke delen gekozen en ga je na met hoeveel van die ééntienden je het restant kunt overdekken. Lukt dat precies, dan ben je klaar en de bijbehorende schrijfwijze ligt voor de hand. Lukt het niet, dan herhaal je dit proces met ééntienden van die ééntiende. Op deze manier komen zowel breuken van de vorm $\frac{a}{b}$ als de tiendelige op een natuurlijke wijze aan de orde. Uiteraard moet ook het verband met delen en verdelen gelegd worden.

Nu lijkt het misschien zo dat Freudenthal de getallenlijn niet noemt. Dat is niet zo, integendeel. Nadat hij over grootheden heeft geschreven zegt hij het volgende. 'I saved the most attractive aspect of the measuring number till the end. (...) In teaching (...), from an early up to an advanced level, one model of magnitude should be outstanding. According to our axioms all magnitudes are isomorphic; indeed knowing one means knowing all of them provided they are recognized as such. (...) Among all magnitudes the most mathematical is length; in fact it is one of the fundamental concepts of geometry.'

Nu kan men zich afvragen of die getallenlijn niet slechts een visualisering is van de structuur van de getallen die bij grootheden horen, uitgebreid met de negatieve getallen. In mijn ogen overstijgt de getallenlijn die ver. Het is de meest concrete structuur waarin van de vorige structuren geabstraheerd is. Ook de rekenkundige bewerkingen kunnen ermee ondersteund worden. Het is daardoor een van de belangrijkste didactische hulpmiddelen.

En verder

Getallen los van hun schrijfwijze betekenis geven – 'laten krijgen' is wellicht een betere manier van zeggen – is essentieel. Die schrijfwijze ligt, globaal gesproken, vast, maar wat er in de praktijk wordt opgeschreven hangt er maar vanaf. Op school wordt terecht veel nadruk op dat opschrijven gelegd.

Naast het communicatieve aspect, leraar met leerling of met de klas, is er het didactische aspect. Het kunnen opschrijven versterkt het leren, het goed kunnen opschrijven is een leerdoel. Ook voor het gebruik van hulpmiddelen als rekenmachine en spreadsheet is inzicht in de schrijfwijze onontbeerlijk.

Voor het proces van betekenis geven is een zekere structuur nodig. Voor getallen en rekenen zijn de relevante structuren die van de telrij, die van (in onze wiskundige terminologie) het aantal elementen van verzamelingen, waarbij uiteraard het idee hoort dat voor bijvoorbeeld het getal vier de samenstelling van de bijbehorende verzameling er niet toe doet, die van de maatgetallen en als sluitstuk die van de getallenlijn. Betekenis geven aan getallen binnen een structuur is voorwaarde om ermee te kunnen rekenen. Dat rekenen, waarbij ook het gebruik van elektronische hulpmiddelen hoort, is een onderdeel van elke structuur. Rekenen is meer dan alleen volgens regels getalvormen omvormen. Het is een mengsel van inhoud en vorm, afhankelijk van de situatie, de vraag, de eigen ervaring, de noodzaak (of wens) er met anderen of jezelf over te communiceren.

Bronnen illustraties

Figuur 1: NAP bij Woerden, Wikipedia Commons (GNU Free Documentation License)

Figuur 2 en figuur 3: Digitale leeromgeving van College De Brink, Laren (<http://www2.cdb.gsf.nl/dedigitalebrink/>)

Literatuur

[1] H. Freudenthal: *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (1973).

[2] P.M. van Hiele: *Structuur*. Zutphen: Thieme (1997).

[3] G. Lakoff, R.E. Nunez: *Where mathematics come from*. New York: Basic Books (2000).

[4] H. Pot: *Breuken, wat zijn dat eigenlijk voor dingen?* In: *Euclides* 81-2 (2005), pp. 51-55.

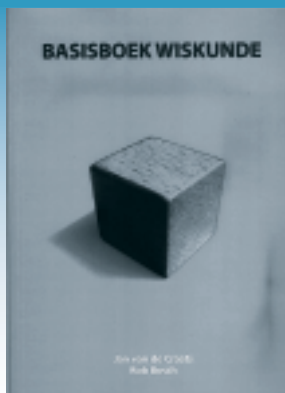
[5] H. Sterk, J. Perrenet: *Kunnen (wij op) onze kinderen rekenen?* In: *Euclides* 81-2 (2005), pp. 63-65.

[6] L.B. Resnick: *Learning In School and Out*. In: *Educational Researcher* 16(9) (1987), pp. 13-20.

Over de auteur

Bert Zwaneveld is hoogleraar 'professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit Nederland.

E-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl



Auteurs: Jan van de Craats en Rob Bosch
Uitgever: Pearson Education Benelux
ISBN 90-430-1156-8
Prijs € 29,95 (XII + 308 pagina's)

De auteurs geven in het Voorwoord een heldere uitzetting over hun bedoeling met dit boek. Samengevat: het boek bevat alle basiswiskunde die nodig is als ingangsniveau bij alle bètastudies (wo en hbo), waarbij het oefenen centraal staat. De stof is overzichtelijk verdeeld in gebieden: Getallen, Algebra, Getallenrijen, Vergelijkingen, Meetkunde, Functies, Calculus en Achtergronden. Bij de Achtergronden wordt opgemerkt dat de lezer die niet zover komt, geen probleem heeft; de oefeningen en toepassingen staan immers in de voorafgaande delen. Het boek is vooral bedoeld voor de scholieren en studenten die zich onzeker voelen bij de wiskunde.

Er zijn wel enkele harde kritische noten te kraken bij de bedoelingen. Om te beginnen suggereren de schrijvers met de inhoud van hun boek dat het ingangsniveau van wo en hbo duidelijk anders is dan het uitgangsniveau van het vwo. De openingszin van het voorwoord luidt namelijk: 'Dit boek bevat alle basiswiskunde die nodig is als ingangsniveau voor een universitaire of HBO-studie op het gebied van de bètavakken, informatica, economie en verwante studierichtingen.' De cyclometrische functies, limieten, partiële integratie en meetkunde in de ruimte behoren niet tot de vwo-stof, dus het zou wel heel vreemd zijn als het hoger onderwijs deze onderwerpen als behandeld beschouwt. Dit

impliceert dat zwakkere eerstejaarsstudenten dit boek beter onder begeleiding kunnen gebruiken, want er staat niet aangegeven wat vwo-stof is en wat nieuw is.

Een tweede pijnpunt is de introductie van het begrip *differentiaal*. In dit boek wordt de uitdrukking $f'(x)dx$ met dx een kleine verandering van x de differentiaal van f genoemd en met $df(x)$ aangegeven. In het deel Achtergrond wordt het differentiëren met behulp van differentiaal verder uitgediept. De auteurs hadden deze mystificaties beter achterwege kunnen laten. Differentialen komen in de vwo-wiskunde niet voor en hebben in het hoger onderwijs vaak een andere betekenis of worden alleen maar als rekensymbolen gebruikt. Het is mij een raadsel waarom deze differentialen tot de basiswiskunde behoren. Het boek zou aan kracht gewonnen hebben als de samenhang tussen differentieerbaarheid in een punt, het hebben van een raaklijn aan de grafiek in een punt en linearisatie rond een punt zonder differentialen was uiteengezet.

De opzet van het boek als ondersteuning bij een studie in het hoger onderwijs is prima. Over het algemeen zijn de opgaven eenvoudig en de toelichtingen duidelijk. Alle genoemde onderwerpen, uitgezonderd differentialen, zijn van belang bij de bètastudies. Eén onderwerp is onderbelicht en wel dat van de ongelijkheden. Dit onderdeel had ook meer expliciet aan de orde mogen komen.

Over de recensent

Frans Martens is coördinator serviceonderwijs wiskunde aan de TU Eindhoven en betrokken bij de aansluiting wiskunde tussen vwo en TU/e.

E-mailadres: F.J.L.Martens@tue.nl

BABYLONISCHE WISKUNDE (ZEBRA 20)

[Jan van de Craats]



Auteurs: Ab van der Roest en Martin Kindt
Uitgever: Epsilon
Uitgaven, Utrecht (2005)
ISBN 90-5041-090-1
Prijs voor niet-leden van de NVvW: € 9,00

Kleitabletten

Op vrijwel hetzelfde moment dat er een stukje van mij over Babylonisch rekenen in de *Rekenspecial* van Euclides (januari 2005) verscheen, kwam er ook een Zebra-boekje over Babylonische wiskunde uit. Dat was toeval: de beide auteurs, Ab van der Roest en Martin Kindt, wisten niets van mijn activiteiten op dit gebied, en ik was evenmin van de hunne op de hoogte. Maar natuurlijk is het niet toevallig dat de twee hoofdonderwerpen uit mijn verhaal, een kleitablet uit circa 1700 voor Christus waarop een Babylonische benadering staat van $\sqrt{2}$ (zie figuur 1) en de iets oudere kleitablet Plimpton 322 met daarop een verbazingwekkende serie pythagoreïsche drietallen (zie figuur 2), ook allebei prominent in de Zebra voorkomen. Algemeen worden die immers gezien als de meest spectaculaire voorbeelden van geavanceerde wiskunde uit het Oud-Babylonische tijdperk.

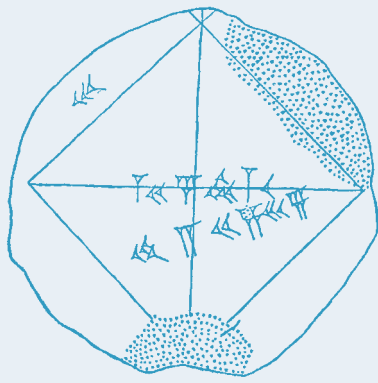
Zestigtallig positiestelsel

Babylonisch rekenen is overigens iets wat we nog elke dag doen bij het meten van tijd (in uren, minuten en seconden) en hoeken (in graden, minuten en seconden). Het Babylonische talstelsel is een zestigtallig (sexagesimaal) positiestelsel, het eerste voorbeeld van een positiestelsel uit de geschiedenis van de mensheid. Bij zo'n positiestelsel hangt de waarde van een symbool (cijfer) af van de positie in het getal. Ons eigen decimale

stelsel, dat omstreeks 300 na Christus in India is ontstaan, is er ook een voorbeeld van. In ons getal 3303 staat de eerste 3 voor drie maal duizend, de tweede 3 voor drie maal honderd en de laatste 3 voor drie maal één. De 0 op de voorlaatste plaats betekent dat er geen tientallen in het getal voorkomen. Anders gezegd, dat de plaats voor de tientallen onbezet is. Dat is ook de oorsprong van het cijfer 0. Die geeft een lege plaats aan. Pas veel later is men de 0 ook als een *getal* gaan zien waarmee je kunt rekenen, bijvoorbeeld bij het aftrekken: $3 - 3 = 0$. Omstreeks diezelfde tijd moeten de negatieve getallen bedacht zijn.

Spijkers en winkelhaken

Het getal *tien* is de basis van ons decimale positiestelsel: de posities van de cijfers geven machten van tien aan. Met negen cijfers en de nul kun je elk getal noteren. In het sexagesimale positiestelsel van de Babyloniërs geven de posities machten van zestig aan, en op elke positie staat een symbool dat een aantal tussen 1 en 59 voorstelt. Voor de 0 hadden de Babyloniërs nog geen symbool; een lege positie werd destijds vaak aangegeven door wat extra ruimte open te laten. In principe zou je voor zo'n zestigtallig stelsel dus 59 verschillende 'cijfers' nodig hebben, maar gelukkig deden de Babyloniërs het anders. Zij gebruikten slechts twee symbolen, een 'spijker', die voor één staat, en een 'winkelhaak' voor tien. Met winkelhaken (maximaal vijf) en spijkers (maximaal negen) kan dan elk 'cijfer' van 1 tot en met 59 genoteerd worden; zie figuur 3. Het getal zestig werd weer met één spijker aangegeven. Die ene spijker kan dus 1 betekenen, maar ook 60, of 3600 ($= 60^2$), of 216000 ($= 60^3$), enzovoort. Of ook $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$, enzovoort, afhankelijk van de positie. Want net zoals wij met decimale breuken werken, zo werkten de Babyloniërs met sexagesimale breuken. Ze kenden echter geen komma of iets dergelijks om het gehele deel van een getal te scheiden van het sexagesimale breukgedeelte. In de praktijk gaf dat zelden problemen omdat uit de context meestal wel



FIGUUR 1
Een Babylonische kleitablet uit circa 1700 voor Christus

duidelijk was wat er bedoeld werd, maar je moet er wel op bedacht zijn.

In **figuur 1** staan langs de horizontale diagonaal van het vierkant de 'sexagesimalen' (1)(24)(51)(10) (ik geef ze hier voor de eenvoud in gewone cijfers weer met haakjes eromheen). Uit de context kun je opmaken dat de komma na de (1) gezet moet worden, en dat het dus in onze notatie gaat om $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000} \approx 1,41421296$

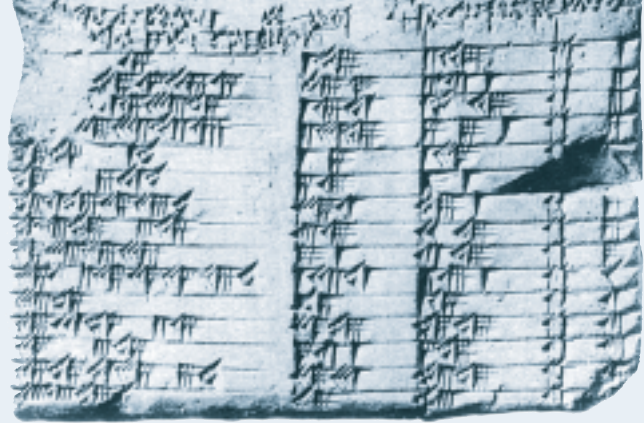
hetgeen een verrassend goede benadering is van $\sqrt{2} \approx 1,41421356$. Linksboven staat (30) als zijdelengte van het vierkant, en onder het midden staat (42)(25)(35), hetgeen het product is van (30) en (1)(24)(51)(10). Dat is de bijbehorende benadering van de lengte van de diagonaal als je de komma op de juiste plaats zet:

$$42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600} \approx 42,426389 \approx 30\sqrt{2}$$

Vermenigvuldigen en delen

In de eerste hoofdstukken van de Zebra wordt het Babylonische rekenen uitgelegd. Je krijgt onder andere een vermenigvuldigingstafel van 5 te zien en een tabel met de kwadraten van de getallen 1 tot en met 59. Die had een verrassend praktisch nut bij het vermenigvuldigen. Hoe? In het zestigtallig stelsel zou je eigenlijk 59 tafels van vermenigvuldiging moeten kennen, voor elk 'cijfer' één, met 60 regels in elke tafel. Maar de Babyloniërs deden het slimmer, want ze waren al vertrouwd met merkwaardige producten. Omdat $ab = \frac{1}{2}((a+b)^2 - a^2 - b^2)$ en $ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a-b)^2)$ kun je met behulp van de eerste 59 kwadraten alle producten van getallen a en b met $1 \leq a, b \leq 59$ gemakkelijk door optellen en aftrekken berekenen. Daarmee is dan ook de basis gelegd voor het vermenigvuldigen van grotere getallen: zo'n vermenigvuldiging gaat in principe net zoals we dat vroeger nog op de lagere school leerden.

Delen gaat met een sexagesimale staartdeling. Tegenwoordig mag je een staartdeling niet meer zo noemen en noteren want dan begrijpen de leerlingen je niet meer, maar oudere lezers zullen



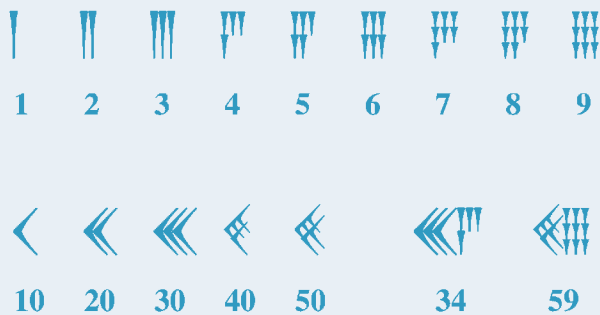
FIGUUR 2
De kleitablet Plimpton 322

de staartdeling wel herkennen die impliciet gebruikt wordt wanneer (op bladzijde 16 van de Zebra) het getal 1 'op zijn Babylonisch' door het getal 25 wordt gedeeld. We zijn dan aangeland in hoofdstuk 3 bij de uitleg van de sexagesimale breuken – de Babylonische 'kommagetallen'. Wanneer een breuk alleen maar priemfactoren 2, 3 en 5 in de noemer heeft, breekt de bijbehorende sexagesimale staartdeling na eindig veel stappen af. Zulke breuken hebben dus een eindigende sexagesimale breukontwikkeling.

Eigenlijk rekenden de Babyloniërs alleen maar met zulke breuken. Maar ze hadden er geen aparte notatie voor, want ze gebruikten geen komma! Zo gek is dat nog niet eens, want je kunt zo'n eindigende sexagesimale breuk ook zien als een geheel deel van een voldoende grote macht van zestig, het grondtal van het sexagesimale stelsel. Zo is 25 het 144-ste deel van 3600 ($= 60^2$). En aangezien $\frac{1}{25} \times 3600 = 144 = 2 \times 60 + 24$ is, noteerden de Babyloniërs $\frac{1}{25}$ als (2)(24), dat wil zeggen als twee spijkers (samen het symbool voor 2) gevolgd door twee winkelhaken en vier spijkers (samen het symbool voor 24). In dit verband betekent hun notatie (2)(24) dus $2 \times \frac{1}{60} + 24 \times \frac{1}{3600}$.

Vierkantsvergelijkingen en pythagoreïsche drietallen

Voor Babylonisch vermenigvuldigen en delen was de kwadratentabel een haast onmisbaar hulpmiddel. Het ligt dan ook voor de hand dat de Babyloniërs die tabel door en door kenden. Juist hierdoor is waarschijnlijk ook de vaardigheid ontstaan die ze ontwikkelden bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen. Dat deden ze in principe net als wij door kwadraatafsplitsen, in wezen dus via de abc -formule. In hoofdstuk 5 van de Zebra worden allerlei Babylonische oefenvergelijkingen geciteerd waarbij opvalt dat ze altijd zo zijn gekozen dat precies één van de beide wortels positief is (negatieve getallen kenden ze niet) en dat de discriminant altijd een kwadraat is. Wortels zijn dan niet nodig. De schoolmeesters van toen zorgden er dus ook al voor dat hun sommetjes mooi uitkwamen. Hier is een voorbeeld van zo'n opgave (bladzijde 29):



FIGUUR 3
Cijfers in spijkerschrift

Ik heb de oppervlakte van een vierkant vermindert met de zijde en dat is (14)(30). Gevraagd: de zijde van het vierkant.

Je ziet dat de Babyloniërs onbekommerd een lengte van een oppervlakte aftrokken: de meetkundige taal ('vierkant', 'zijde') heeft hier zijn meetkundige betekenis al verloren. Het gaat alleen nog maar om rekenen. Dat wil niet zeggen dat de Babyloniërs geen meetkunde deden. Hoofdstuk 6 van de Zebra is aan meetkunde gewijd. De Babyloniërs kenden de meetkundige stelling van Pythagoras en rekenden ook met oppervlakten van trapezia. Maar natuurlijk is hun meetkunde niet axiomatisch en deductief. En het ging bij hen ook steeds om meetkundige berekeningen, niet om stellingen en bewijzen. Zoals gezegd was de kwadratentabel een machtig hulpmiddel bij het Babylonische rekenen. Is het dan ver gezocht om daar ook de oorsprong te zoeken van de verbazingwekkende kennis die de Babyloniërs hadden van pythagoreïsche drietallen, dat wil zeggen drietallen getallen (a, b, c) waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$? Ze vormen de sleutel tot de verklaring van Plimpton 322, de beroemde kleitablet waaraan het laatste hoofdstuk van de Zebra is gewijd.

Kritische noten

Het bovenstaande geeft een idee van de rijke inhoud van deze Zebra. Ik ben er zonder meer enthousiast over, en hoop dat veel leraren en leerlingen ermee zullen gaan werken. Het is fantastisch dat er zo veel prachtige wiskunde uit zo'n ver verleden bewaard is gebleven en dat je zelf zonder veel moeite alle spijkerschrift-getallen kunt lezen en bestuderen. Het sexagesimale stelsel geeft je bovendien nieuwe inzichten in rekenen en talstelsels in het algemeen. Dat alles laat niet onverlet dat ik ook een paar kritische opmerkingen kwijt wil.

De eerste gaat over de $\sqrt{2}$ -benadering in hoofdstuk 4. In navolging van sommige bronnen presenteren de auteurs als verklaring van de manier waarop de Babyloniërs hun benadering $(1)(24)(51)(10)$ gevonden zouden kunnen hebben, een iteratieve methode voor wortels die in het algemene geval van $\sqrt{A}$ neerkomt op $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$. Dat is een

bijzonder geval van de zeer snel convergerende methode van Newton. Maar de suggestie dat de Babyloniërs die methode ook gebruikt zouden kunnen hebben, lijkt me zeer aanvechtbaar. Reeds na twee of drie stappen krijg je daarbij al niet-eindigende sexagesimale breuken, en daar wisten de Babyloniërs niet goed raad mee. Als je die gaat benaderen, zoals de auteurs suggereren, krijg je zeer omslachtige rekenpartijen, die bij elke nieuwe stap weer overgedaan moeten worden.

Het ligt veel meer voor de hand om te veronderstellen dat de Babyloniërs kwadraterend, interpolerend en controlerend te werk gingen, zoals wij dat ook zouden doen als we alleen maar potlood en papier hadden en geen kennis van slimme methodes. Naïef redenerend: je zoekt als Babyloniër een getal waarvan het kwadraat 2 moet zijn. Wat proberen levert: $(1),(24)$ is te klein en $(1),(25)$ is te groot (ik zet voor ons gemak komma's neer) want het kwadraat van $(1),(24)$ is $(1),(57)(36)$ en dat van $(1),(25)$ is $(2),(0)(25)$. Lineair interpoleren geeft $(1),(24)(51)$ en controle levert dat het kwadraat daarvan kleiner dan 2 is, maar dat het kwadraat van $(1),(24)(52)$ groter dan 2 is. Zo voortgaande vind je successievelijk ook de volgende sexagesimalen: $(1),(24)(51)(10)(7)...$

Mijn tweede kritische noot is didactisch van aard. De Zebra bevat 74 opdrachten die veelal tussen de hoofdstekst geplaatst zijn. Vaak onderbreken ze het betoog doordat ze je allerlei tussenstappen zelf laten uitvoeren. Dat lijkt een aantrekkelijk concept omdat het je voortdurend tot activiteit prikkelt. Maar het heeft ook een keerzijde. Je wordt voortdurend aan de hand meegenomen in een soort van geprogrammeerde instructie. Ik vind dat geen prettige manier van werken. Bovendien kun je de tekst op die manier niet globaal scannen omdat de grote lijn van het betoog steeds wordt onderbroken. Je raakt het overzicht kwijt en wordt gedwongen precies het pad te volgen dat de auteurs voor je hebben uitgezet. Ik zou het veel prettiger hebben gevonden wanneer de auteurs per hoofdstuk een helder, volledig en ononderbroken betoog hadden gepresenteerd met aan het eind telkens een flink aantal routinevragen en een paar verdiepende onderzoeksoopdrachten. Dan is het ook niet nodig om van alle opdrachten achterin een volledige uitwerking te geven – naar mijn idee frustreren zulke volledige uitwerkingen alleen maar de creativiteit en het zelfontdekkend leren. Korte antwoorden met hier en daar een hint zouden dan kunnen volstaan.

Niettemin: een mooie nieuwe Zebra die ik van harte kan aanbevelen!

Over de recensent

Jan van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.

E-mailadres: craats@science.uva.nl

Verenigingsnieuws Examenbesprekingen 2006

[Conny Gaykema]

VMBO TGK

donderdag 1 juni 2006, 15.00-18.00u

ALKMAAR
OSG Willem Blaeu
Robonsbosweg 11 (072-5122477)
mw. V. Smit (d.smit-
bruin@atlascollege.nl)

GRONINGEN
Noorderpoort College
Van Schendelstraat 1
(050-5297329)
dhr. J. Rijnaard (050-5254709)

ZEIST
KSG De Breul
Arnhemsebovenweg 98
(030-6915604)
dhr. B. Nieuwenhuis

BURGUM
CSG Liudger
Tj. H. Haismastraat 1
(0511-460260)
mw. G. Tack Althof (058-2572388)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-4552511)^[1]
NS Alexanderpolder
voorzitter nog niet bekend

ZWOLLE
Thorbecke SG
Dr. C.A. van Heesweg 1
(038-4564540)
dhr. R. Kronenberg (038-4210044)

HAVO A12

Alleen afspraken op internet i.v.m. Hemelvaartweekend

HAVO B1/B12

dinsdag 23 mei 2006, 15.30-18.00u

AMERSFOORT
S.G. Guido de Brès
Paladijnenweg 251
(033-4792900)
dhr. A.B. v.d. Roest
(0318-543167)

Regio Arnhem:
ROZENDAAL
Het Rhedens
Kleiberglaan 1
(026-3646845)
dhr. A.W.M. Tromp
(026-3254829)

GRONINGEN
Röling College
Melisseweg 2 (050-5474141)
mw. H. Lüder (0516-432889)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert
De Cuserstraat 3 (020-6423902)
(*CS tram 5; CS en Amstel snel-
tram 51*)
dhr. N.M. Admiraal (072-5340613)

's-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum
Colijnplein 9 (070-3687670)
dhr. R.J. Klinkenberg
(070-3559938)

ROTTERDAM
Geref. Sg. Randstad
Valenciadreef 15 (010-4552511)^[1]
NS Alexanderpolder
dhr. H.J. van Lien (010-5113530)

ZWOLLE
Van der Capellen SG
Lassuslaan 230 (038-4225202)
dhr. A. Ebberts (0341-252202)

VWO A1/A12

dinsdag 6 juni 2006, 15.30-18.00u

VWO B1/B12

donderdag 1 juni 2006, 15.30-18.00u

AMERSFOORT
SG Guido de Brès
Paladijnenweg 251 (033-4792900)
A: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)
B: dhr. F. v.d. Heuvel (030-2730898)

A: dhr. R. Stolwijk
(072-5325551)
B: dhr. S.T. Min
(0229-237756)

's-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum
Colijnplein 9 (070-3687670)
A: dhr. Ph.L.M. Bes (010-5110254)
B: dhr. J. Remijn (070-3684525)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert
De Cuserstraat 3 (020-6423902)
*CS tram 5; CS en Amstel snel-
tram 51*

Regio Arnhem: ROZENDAAL
Het Rhedens
Kleiberglaan 1 (026-3646845)
A: dhr. L.H. Rietveld
(055-5419287)
B: dhr. A.T. Sterk (055-3666466)

GRONINGEN
Röling College
Melisseweg 2 (050-5474141)
A: mw. N. den Braber (050- 5893847)
B: mw. O. Eringa (0512-519160)

's-HERTOGENBOSCH

Ds. Pierson College
G. ter Borchstraat 1 (073-6442929)
NS Den Bosch-OOST
A: geen bijeenkomst
B: dhr. H.J. Kruisselbrink
(073-5216386)

ROTTERDAM

Geref. Sg. Randstad
Valenciadreef 15 (010-4552511)^[1]
NS Alexanderpolder
A: dhr. B.L.G.P. Hillebrand
(0180-515210)
B: dhr. C. Rijke (078-6194286)

ZWOLLE

Van der Capellen SG
Lassuslaan 230 (038-422520)
A: dhr. Ph. Thijsse (0315-342436)
B: dhr. H. Schutjes (0529-427306)

Noot

[1] Parkeren op parkeerterrein Almeria-erf 8 is toegestaan.

Van de bestuurstafel [Wim Kuipers]

Regelmatig vergadert uw bestuur. Maar dat had u natuurlijk wel begrepen. Daar is een bestuur voor en tegelijk verwacht je dat ze daar nuttige dingen doen. Dingen die te maken hebben met de bevordering van goed wiskundeonderwijs in ons land. En dat is heel breed. Maar terecht zouden leden zich kunnen afvragen wat nu precies de agenda vult.

Het bestuur wil vanaf nu via de bestuurstafel wat meer openheid geven over wat er op onze vergaderingen aan de orde komt. Geen verslag punt voor punt, maar een indruk van de belangrijkste zaken. De secretaris is opgedragen dit te doen.

Tijdens onze laatste bestuursvergadering is uitvoerig het probleem van de aansluiting vwo naar een universiteit of hogeschool aan de orde geweest. Er worden regelmatig geluiden gehoord dat de wiskundige kennis vaak onvoldoende is, en in het bijzonder de algebraïsche vaardigheden. Wat is onderwijsbaar en wat niet?

Voor een leerling van de assistentenopleiding in het vmbo (niveau 1) is het bijvoorbeeld mogelijk om via

een omweg naar de Pabo te gaan. Dit is een wat extreem voorbeeld, aan de andere kant ontbreekt bij leerlingen vaak kennis van basale vaardigheden. De werkgroep HBO vanuit het bestuur heeft een gesprek aangevraagd met de HBO-raad om deze problematiek te traceren en na te gaan wat mogelijk kan bijdragen tot een verbetering. Voor wat de Tweede fase betreft is het bestuur vertegenwoordigd in een aantal overleggroepen met betrekking tot de ontwikkeling van de programma's A, B, C en D. Via Euclides zal nog een oproep worden gedaan aan de leden om zich beschikbaar te stellen voor het leveren van een bijdrage binnen een werkgroep of commissie.

Met betrekking tot het vmbo is er een project *globalisering examenprogramma's vmbo-avo* gestart. Om scholen meer ruimte te geven aan een eigen invulling in het kader van de autonomie zullen de eindtermen van het eindexamen vmbo minder gedetailleerd en op hoofdlijnen geformuleerd worden. De uit te voeren activiteiten zijn te onderscheiden in twee samenhangende fasen: redactie van de

syllabus en globalisering van de examenprogramma's. Het bestuur weet zich vertegenwoordigd in de syllabus-commissie die een toelichting zal schrijven bij het examenprogramma vmbo-wiskunde. Tevens zal er een uitsplitsing komen van de examens per leerweg. Enkele onduidelijke formuleringen in het oude programma zullen gerepareerd worden. Het bestuur hoopt dat er in de toekomst de mogelijkheid komt om de examens per sector in te richten. Steeds gaat het in de discussies om de vraag wat de inhoud van het wiskundeonderwijs dient te zijn.

Voor de komende jaarvergadering zal het thema iets te maken hebben met de doorlopende leerlijnen. De workshops zullen op deze thematiek gericht dienen te zijn. Naar een pakkende titel zal nog gezocht worden. Vroegtijdig zullen we op de website melding maken van de voortgang.

De revitalisering van de website nadert haar voltooiing. Gerard Koolstra wordt als webmaster opgevolgd door Lennart de Jonge.

Graag tot een volgende vergadering.

Puzzel 816 In het voetspoor van Ramanujan

Van de wiskundige Ramanujan werd gezegd dat hij bevriend was met alle natuurlijke getallen. De volgende, overbekende, anekdote is hiervan een illustratie.

Ramanujan ligt in een ziekenhuis en krijgt bezoek van zijn vriend en collega Hardy. Deze zegt: 'Het nummer van m'n taxi was een nogal saai getal: 1729. Ik hoop niet dat dit een slecht voorteken is.' En Ramanujan antwoordt: 'Nee hoor, 1729 is het kleinste getal dat op twee manieren te schrijven is als de som van twee derde machten.'

Dat 1729 op twee manieren de som van twee derde machten is, is eenvoudig te zien, maar dat Ramanujan wist dat er geen kleiner getal met die eigenschap is, dát zegt wel iets meer.

Opgave 1

Ook het getal 2047 is het kleinste getal met een zekere eigenschap. Welke?

Opgave 2

Wat is er voor bijzonder aan 641?

Hardy vroeg nog wat het kleinste getal zou zijn voor de som van twee vierde machten op twee manieren. Dat wist Ramanujan niet, en hij zei dat het vermoedelijk een erg groot getal zou zijn.

Ook bij de volgende opgaven is het wel handig om bepaalde getallen te 'herkennen'. Hierbij verstaan we onder een *macht* een getal van de vorm n^k met $n > 0$ en $k > 1$, en onder een *binomiaalcoëfficiënt* een getal van de vorm $\binom{n}{k}$ met $k > 1$ en $k \leq \frac{1}{2}n$.

De gelijkheid $9 - 8 = 1$ is het enige voorbeeld van twee machten met verschil 1. Bij een verschil groter dan 1 kan het aantal paren willekeurig groot worden. Neem maar $3 \cdot 2^n$; dit getal is al op $n - 1$ manieren het verschil van twee kwadraten.

Opgave 3

Bepaal minstens 7 voorbeelden van machten met verschil 100.

Vergeleken bij machten liggen binomiaalcoëfficiënten dichter bij elkaar; daar komt het verschil 1 heel wat vaker voor.

Opgave 4

Bepaal minstens 7 voorbeelden van binomiaalcoëfficiënten met verschil 1.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 29 april 2006.

FIGUUR 1



In een televisie-interview vertelde de weduwe van Ramanujan dat hij gewoon vergat om te eten als hij in zijn werk was verdiept. Ze stopte af en toe maar wat rijst in zijn mond!

Veel plezier!

Oplossing 'Een inpakprobleem met vierkanten'

Er waren elf inzendingen. Vier daarvan gaven voor alle zes gevallen de optimale rechthoek.

De foutloze inzendingen kwamen van Wobien Doyer, Arie Verheul, Frans Lipperts en Gerhard Riphagen. Ik heb 1 punt in mindering gebracht voor iedere niet-optimale rechthoek (ook al was hij nog zo groot). Soms werd de computer ingeschakeld (niet ongebruikelijk), maar ook een echtgenote en zelfs een hele schoolklas hebben aan de oplossingen bijgedragen!

De gevallen $n = 9$ en $n = 11$ gaven de meeste moeilijkheden. Voor degenen die hem niet vonden: de rechthoek voor $n = 9$ is eenvoudig te reconstrueren uit de gegeven afmetingen. De oplossing voor $n = 11$ staat in **figuur 2**.

Frans Lipperts gaf ook een oplossing voor $n = 12$, Arie Verheul ging door tot 14 en Wobien Doyer zelfs tot 17. Zij bewees ook dat de lege ruimte voor grote n hoogstens van de orde $n^{2.5}$ is. Ook Herm Jan Brascamp bekeek oplossingen voor grote n . Hij kwam tot het (gegronde) vermoeden dat de lege ruimte hoogstens van de orde n^2 is en hoopt dit nog te kunnen bewijzen.



FIGUUR 2

De optimale rechthoeken met de bijbehorende lege ruimten zijn achtereenvolgens:

$n = 6$:	9×11	(8)
$n = 7$:	7×22 of 14×15	(14)
$n = 8$:	14×15	(6)
$n = 9$:	15×20	(15)
$n = 10$:	15×27	(20)
$n = 11$:	19×27	(7)

Ladderstand

De top van de ladder is nu als volgt:

W. Doyer 342
J. Meerhof 282
T. Kool 268
W. van den Camp 245
H.J. Brascamp 219
A. Verheul 178

De complete ladderstand is te bekijken op de website van Euclides: www.nvww.nl/euclladder.html.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvvw.nl).

Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*-versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html).

7	26 mei 2006	4 april 2006
8	22 juni 2006	9 mei 2006

27 maart tm. 23 april
UvA Webklas Wiskunde
Organisatie UvA en HvA

donderdag 20 april
Conferentie Wiskunde en ICT
Organisatie APS en FI

zaterdag 22 april, Utrecht
Conferentie PISA-NL
Organisatie Freudenthal Instituut
Zie de advertentie in Euclides 81-5.

vrijdag 12 mei, Amsterdam
Leve de wiskunde!
Organisatie Korteweg-de Vries Instituut

zaterdag 20 mei, Utrecht
12e HKRWO symposium
Organisatie Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs
Zie de advertentie op pag. 305.

za. 1 en zo. 2 juli, Oostende (België)
13e VVWL-congres
Organisatie Vlaamse Vereniging Wiskundeleraren

31 juli tm. 11 augustus, Lunteren
Vierkant Zomerkampen
Organisatie Stichting Vierkant voor Wiskunde

do. 17 en vr. 18 augustus, Oostende (België)
T³ Europe Symposium
Organisatie KHBO en K.U.Leuven

vr. 25 en za. 26 augustus, Eindhoven
vr. 1 en za. 2 september, Amsterdam
Vakantiecursus 2006
Organisatie CWI

vr. 24 november, op de scholen
Wiskunde A-lympiade / Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde
22. Spelen en Delen

Zie ook www.nvvw.nl/zebrareeks.html en/of
www.epsilon-uitgaven.nl

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta - wiskunde, formules en tabellen*
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

MATRIX

Innovatieve en bruikbare ict

De Digitale Instapmodule van *Matrix*, de nieuwe wiskundemethode van Malmberg, heeft verrassende voordelen:

- test volledig automatisch kennis van individuele leerling of klas;
- biedt remediërende stof toegespitst op leerling;
- garandeert aansluiting tussen VO en basisonderwijs;
- te gebruiken naast elke wiskundemethode;
- vergt slechts 1 lesuur in het computerlokaal;
- op maat instelbare meetpunten naar de niveau's: vmbo-b (lwoo), vmbo-kgt, vmbo-t/havo en havo/vwo.



De Digitale Instapmodule van Matrix (DIM) bestaat uit drie onderdelen:

1. Het leerlingprogramma

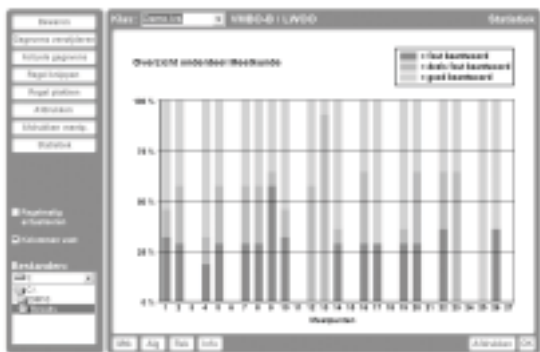
De *Instaptoets* test de kennis en vaardigheden van de individuele leerling op de 100 meetpunten die essentieel zijn in de overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs bij rekenen/wiskunde. *Uitleg en oefening* wordt automatisch en op maat aangeboden bij de meetpunten waarop de individuele leerling slecht scoort.

2. Het docentenprogramma

Het *Leerling-Volg-Systeem* genereert voor de docent een helder overzicht van individuele en klassikale verschillen in wiskundige kennis en vaardigheden. De eigen les kan daarop worden aangepast.

3. Het setup-programma

Met de *Setup* kan de docent de hele module op maat instellen door per klas, per niveau en per onderdeel de gewenste meetpunten te selecteren. Ook kunnen hier geluidseffecten, wachttijden, wachtwoorden en vele andere instellingen gewijzigd worden.



Bel voor meer informatie: (073) 6 287 554
of kijk op www.matrix-malmberg.nl

Naast de DIM biedt *Matrix* ook complete, interactieve computerlessen voor leerlingen en een PresentatieEditor voor docenten.

Uitgeverij Malmberg • Postbus 308 • 5201 AH 's-Hertogenbosch • T (073) 6 287 554 • E Klantenservice.vo@malmberg.nl



Nieuw!



Werkboek Nieuwe Onderbouw

Bent u op zoek naar materiaal waarmee u de Nieuwe Onderbouw inhoud kunt geven? Maak dan kennis met de werkboeken Nieuwe Onderbouw bij *Moderne wiskunde 8*. Vanaf schooljaar 2006/2007 zijn de werkboeken Nieuwe Onderbouw beschikbaar voor 1 vmbo basis, 1 vmbo k(gt) en 1 vmbo gt/h.

Extra: vier projecten!

De werkboeken bevatten, naast het materiaal dat in de reguliere werkboeken staat, vier projecten. De projecten zijn duidelijk anders opgezet dan de leerstof in het boek en zetten uw leerlingen actief aan het werk. De projecten bieden duidelijke aanknopingspunten voor een eventuele uitbreiding naar andere vakken.

Getest in de praktijk

Om goede aansluiting met de dagelijkse lespraktijk te garanderen, zijn alle projecten op verschillende scholen getest! Daarnaast bevatten de werkboeken een computerpracticum dat gebruik maakt van het programma Doorzien. Dit programma staat op de bijgeleverde cd-rom, de WiskDisk.

Gebruik de werkboeken Nieuwe Onderbouw in plaats van de reguliere werkboeken

U kunt de werkboeken Nieuwe Onderbouw bestellen in plaats van de reguliere werkboeken. De boeken verschijnen half juni 2006.

Maak kennis met de werkboeken Nieuwe Onderbouw bij Moderne wiskunde 8

Reserveer nu alvast uw beoordeling-/gebruikersexemplaren op www.modernewiskunde.wolters.nl

Bestelgegevens:

90 01 59041 1

Mw 8 vmbo basis 1 werkboek Nieuwe Onderbouw a+b+Wiskdisk cd ca 148 p. € 18,25

90 01 59043 8

Mw 8 vmbo k(gt) 1 werkboek Nieuwe Onderbouw a+b+Wiskdisk cd ca 148 p. € 18,25

90 01 59042 X

Mw 8 vmbo gt/havo 1 werkboek Nieuwe Onderbouw a+b+Wiskdisk cd ca 148 p. € 18,25

Met Moderne wiskunde zet u de toon!

**Wolters
Noordhoff**

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen