



FREUDENTHAL BEDRIJFSWISKUNDE COMPUTERALGEBRA

december
2005/nr.3
jaargang 81





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraar. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
 Klaske Blom
 Marja Bos, hoofdredacteur
 Rob Bosch
 Hans Daale
 Gert de Kleuver, voorzitter
 Dick Klingens, eindredacteur
 Wim Laaper, secretaris
 Jos Tolboom
 Joke Verbeek

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
 Marja Bos
 Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
 e-mail: redactie-euclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
 Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
 Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvww.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraar

www.nvww.nl



Voorzitter:
 Marian Kollenveld,
 Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
 tel. 070-3906378
 e-mail: m.kollenveld@nvww.nl

Secretaris:
 Wim Kuipers,
 Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
 tel. 038-4447017
 e-mail: w.kuipers@nvww.nl

Ledenadministratie:
 Elly van Bommel-Hendriks,
 De Schalm 19, 8251 LB Dronten
 tel. 0321-312543
 e-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
 productie TiekstraMedia, Groningen
 druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
 Leden: € 46,50
 Studentleden: € 26,50
 Gepensioneerden: € 31,50
 Leden van de VWW: € 31,50
 Lidmaatschap zonder Euclides: € 31,50
 Bijdrage WwF: € 2,50
 Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
 Niet-leden: € 50,00
 Instituten en scholen: € 130,00
 Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
 Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
 Gert de Kleuver
 De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
 e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
 tel. 0318-542243

Indien afwezig:
 Freek Mahieu
 Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
 e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
 tel. 0411-673468

3

december 2005 JAARGANG 81

093	Van de redactietafel [Marja Bos]
094	Van ‘terloopse rekenlessen’ tot dagtaak [Sacha la Bastide-van Gemert]
099	In memoriam Albert Koldijk [Martinus van Hoorn]
	Verschenen
100	Internetmethode Ratio [Ton Konings]
104	Een puzzel [Ton Lecluse, Rob van Oord, Leon van den Broek]
107	40 jaar geleden [Martinus van Hoorn]
108	Draadloos netwerk in de klas [Jos Tolboom]
113	De wiskundedocent als goochelaar [Job van de Groep]
114	HBO-wiskunde in bedrijf [Hans Daale]
117	P.J. Palmer: de goeroe van het nieuwe leren? [Simon van der Salm]
120	Rechtlijnige krommen [Paul Drijvers e.a.]
126	Boeken voor Ethiopië [Hans van de Lagemaat]
130	Engelstalig wiskundeonderwijs [Esther van den Akker, Jos Verhagen]
134	Digitale toetsen voor de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde [Hans Krabbendam, Henk Staal]
138	Een meetkundige constructie van de som van een meetkundige rij [Dick Klingens]
142	Over wiskundeonderwijs: innovatie en consolidatie, 7 [Bert Zwaneveld]
	Verschenen
144	Nieuws van het Wereldwiskunde Fonds (WwF) [Wim Kuipers]
145	Mededeling, Aankondiging
146	Recreatie [Frits Göbel]
148	Servicepagina
	Foto voorpagina: TrudiSigned, Krimpen aan den IJssel
	Aan dit nummer werkten verder mee: Marjan Doijer, Sonja Tieck-Muller en Klaas-Jan Wieringa.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Het ABCD van 2007

Begin november hebben CEVO, SLO en Cito de uitgewerkte programmavoorstellen voor de examenprogramma’s wiskunde A, B en C aangeboden aan de minister. U vindt de voorstellen in ieder geval op www.digischool.nl/wi/community/ (onder ‘nieuws’) en op www.tweedefase-loket.nl/examenprogramma.

Voor EM-leerlingen is in principe het profielvak wiskunde-A bestemd, NG’ers kiezen tussen A en B, NT’ers doen wiskunde B, en vwo CM-leerlingen wiskunde C. Havo-leerlingen met een CM-profiel hoeven geen wiskunde te volgen.

Wiskunde A zal grofweg bestaan uit statistiek in combinatie met wat toegepaste analyse, havo B uit analyse met een beetje ruimtemeetkunde, en vwo B uit analyse met wat vlakke meetkunde. De invulling van wiskunde C zal de eerste paar jaar ontleend worden aan het huidige vwo A1-programma; later wordt een meer CM-ingekeurd programma ontwikkeld.

Verder komt er een vak wiskunde D, een verdiepend en verbredend profielkeuzevak, bestemd voor NT-leerlingen, ter aanvulling op wiskunde B. Het zal voor ongeveer de helft bestaan uit statistiek, en voor de andere helft uit verdiepingsstof, bijvoorbeeld in de vorm van modules die in samenwerking met het hoger onderwijs ontwikkeld worden. Het examenprogramma van wiskunde D ligt dus nog niet vast, maar het moet natuurlijk vóór 1 augustus 2007 klaar zijn. Scholen zijn overigens niet verplicht dit profielkeuzevak aan te bieden.

Voor de centrale examens van A, B en C zal de CEVO nog voor een nadere uitwerking van de eindtermen zorgen, in de vorm van een syllabus met uitgewerkte voorbeelden van examenopgaven. Waarschijnlijk zal in die syllabus *per* wiskundevak gespecificeerd worden welke algebraïsche vaardigheden de leerlingen moeten beheersen. Verder wordt de rol van de formulekaart tegen het licht gehouden. De syllabus wordt niet eerder verwacht dan februari 2006.

Tot slot is het de bedoeling dat het profielkeuzevak ‘Natuur, Leven & Techniek’ (NL&T, de nieuwe naam voor het geïntegreerde bètavak) ook wiskundige onderdelen zal bevatten.

Na 2010

Om de educatieve uitgeverijen niet in problemen te brengen had het ministerie geëist dat de examenprogramma’s-2007 samengesteld zouden worden uit de huidige domeinen; er konden dus géén nieuwe onderwerpen toegevoegd worden. Vanaf 2010 mag dat wél weer, en dat zal ook gaan gebeuren. Een voorbeeld is wiskunde C, dat vanaf 2010 dus pas echt op maat gesneden kan worden voor CM-leerlingen. Maar ook in de andere wiskundevakken zijn vanaf 2010 veranderingen te verwachten. Inmiddels is daartoe door NVvW en NOCW de vernieuwingscommissie CTWO (C2) ingesteld: Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs.

Op de NVvW-studiedag schoten ook nog een paar andere initiatieven voorbij, zoals DeltaWis en het Universum Programma, beide met wortels in het Platform Bèta Techniek. Binnenkort zal het bestuur u hierover nader informeren, zowel op de website als in Euclides.

1905 en 1925

Naast een blik op de toekomst ook een kijkje in het verleden. In 1905, nu honderd jaar geleden, werd Hans Freudenthal geboren. Ons openingsartikel is dit keer daarom gewijd aan het verloop van Freudenthals werkzame leven van vooraanstaand wiskundige tot befaamd wiskundedidacticus. Deze bijzonder interessante bijdrage is geschreven door Sacha la Bastide-van Gemert, die binnenkort ‘op Freudenthal’ promoveert. Vervolgens: 1925. Er gaat u geen licht op? U kent de statuten van ons aller vereniging niet uit uw hoofd?! Ik citeer: ‘De vereniging draagt de naam: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, en is gevestigd te Amsterdam. De vereniging is een voortzetting van de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea (*Wimecos*). De vereniging is opgericht op dertien december negentien-honderdvijfentwintig en met ingang van heden aangegaan voor onbepaalde tijd.’ Kortom, wij vieren volgende week onze 80ste verjaardag! Proost.

VAN 'TERLOOPSE REKENLESSEN' TOT DAGTAAK

Hans Freudenthal en de wiskundendidactiek

[Sacha la Bastide - van Gemert]

Inleiding

Hans Freudenthal (1905-1990) was hoogleraar wiskunde, wetenschapper, literator, maar bovenal de man van het wiskundeonderwijs, onlosmakelijk verbonden met de omwentelingen die er in wiskundeonderwijs en -didactiek in de vorige eeuw plaatsvonden. In een discussie over wiskundeonderwijs kan niemand om Freudenthal heen: 'wiskundeonderwijs volgens Freudenthal' dient ofwel als inspiratie, ofwel om andere invalshoeken tegen af te zetten. Hij is -eigenlijk tot op de dag van vandaag- dé dominerende figuur binnen de wiskundendidactiek in Nederland.

Toch was het midden vorige eeuw allesbehalve vanzelfsprekend om zich als hoogleraar wiskunde op wiskundendidactiek toe te leggen. Bovendien was Freudenthal een drukbezet man met meer dan voldoende andere interesses en talenten naast die voor wiskundendidactiek. Hoe is het dan toch zo gelopen?

Oriëntatie en literatuurstudie

Als jonge, veelbelovende wiskundige vertrok Freudenthal in 1930 van Duitsland naar Nederland, waar hem aan de Universiteit van Amsterdam een aanstelling als assistent van de wiskundige L.E.J. Brouwer wachtte. Tot 1946 woonde en werkte Freudenthal in Amsterdam. Hij trouwde er in 1932 met Susanna Lutter (1908-1986) en kreeg er vier kinderen. Didactiek en onderwijs speelden in deze jaren geen bijzonder grote rol in Freudenthals leven. Zijn vrouw daarentegen hield zich destijds wel in toenemende

mate met pedagogiek bezig. Vanaf de geboorte van hun oudste zoon in 1935 was zij op zoek naar het perfecte onderwijs voor haar kinderen, dat zij -uiteindelijk pas jaren later- zou vinden in het Jenaplanonderwijs.

Freudenthal besteedde het grootste deel van zijn tijd in de jaren dertig aan wiskunde en aan werkzaamheden voor het door Brouwer uitgegeven tijdschrift *Compositio Mathematica*. Wel experimenteerde hij met het geven van werkcolleges en een enkel didactiekcolloquium. Een uitzonderlijk begaafd docent was hij niet: voor de meeste studenten waren zijn colleges moeilijk te volgen.

Na het uitbreken van de Tweede Wereldoorlog werd de joodse Freudenthal door de bezetter uit zijn ambt ontheven. Deze gedwongen passiviteit gaf hem -ondanks de moeilijke omstandigheden- de gelegenheid zich toe te leggen op tot dan slechts sluimerend aanwezige interesses. Naast het wiskundige werk dat hij zo goed en zo kwaad als het ging bleef doen, schreef hij toneelstukken, romans en gedichten, verdiepte zich in de geschiedenis van de wiskunde en bracht daarnaast veel tijd met zijn kinderen door.

De rekenlessen die hij '*soms opzettelijk, soms terloops en meer toevallig*' aan zijn kinderen gaf, vormden de praktische aanleiding tot zijn uitgebreide literatuurstudie op het gebied van rekenonderwijs en didactiek. Begin 1944 zette hij zich aan het schrijven van het (overigens nooit voltooide) manuscript



Prof. Dr. HANS FREUDENTHAL

Hij is 18 juni 1943 geboren in "Aling" — als je wat zit en je weet niet, wat het is

FIGUUR 1 Portret van Hans Freudenthal in *Euclides*, 1947
FIGUUR 2 Fragment uit Freudenthals aantekeningenboekje, 18 juni 1943

'Rekendidaktiek'. Het moest een didactische handleiding worden, gebaseerd op wetenschappelijke proeven en onderzoek, en gezuiverd van elke valse pretentie van 'wetenschappelijkheid' zoals hij die in andere werken wél aantrof.

Het grootste deel van het manuscript besteedde Freudenthal dan ook aan het bekritisieren van het gebruik van wat hij de hulpwetenschappen van de rekendidaktiek noemde. Wijsbegeerte, psychologie, pedagogiek, algemene didactiek, ze werden allemaal afgewezen als hulpwetenschap, om uiteenlopende redenen. Freudenthal richtte daarbij zijn pijlen op zowel werken uit de hoek van de (test-)psychologie als die van de Reform-pedagogiek. En passant bekritiseerde Freudenthal ook nog de nodige rekenmethoden. Immers, zo schreef hij, 'elke positieve actie begint met kritiek'. Een uitspraak die hij zijn leven lang trouw is gebleven.

Energieke initiatieven

Een jaar na de bevrijding verhuisde het gezin naar Utrecht, waar Freudenthal aangesteld werd als hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde. Er wachtte Freudenthal veel werk bij de opbouw van het Mathematisch Instituut. Hierdoor lag het voor de hand, dat zijn uitstapje naar de 'Rekendidaktiek' een intermezzo zou blijven. Niets bleek echter minder waar! De kiem van zijn interesse voor onderwijskundige zaken was al gelegd tijdens de bezettingsjaren en werd natuurlijk mede gevoed door de activiteiten van zijn vrouw op het gebied van het onderwijs en de

pedagogiek. Freudenthal leek te popelen zijn door de literatuurstudie in de oorlog verkregen pedagogisch-didactische ideeën openbaar te maken. In eerste instantie koos hij hiervoor het vernieuwingsgezinde publiek van de Werkgemeenschap voor Opvoeding en Onderwijs (WVO), een organisatie waar zijn vrouw al vóór de oorlog lid van was en waarin zij later een actieve rol zou gaan spelen. Freudenthal bood zich aan om op de geplande WVO-zomerconferentie van 1945 te spreken over 'paedagogiek van het rekenen en de wiskunde, alsmede [...] de opvoeding tot het denken in de ruimste zin'.

De voordracht 'Opvoeding tot denken' werd naar eigen zeggen met succes ontvangen op de conferentie. Freudenthals denkbeelden pasten dan ook goed bij de in WVO-kringen populaire opvattingen als 'opvoeden is begeleiden van het kind in de natuurlijke groei' en 'mensvorming en opvoeding in dienst van de vrede'. Freudenthal beperkte zich in zijn voordracht niet tot (reken-)didactiek, maar sprak ook over het opvoeden van de grote massa van het Nederlandse volk in het algemeen. Daarvoor was niet het rekenonderwijs, maar het lezen van belang, want, zo sprak hij: 'een kind dat dubbel zoveel leest, leert dubbel zoveel denken.' Hij droeg hier overigens ook zelf aan bij door een ander door hem genomen initiatief: het schrijven van artikelen over de meest uiteenlopende wetenschappelijke en maatschappelijke onderwerpen in *De Groene Amsterdammer*.

Een nationale en internationale autoriteit

Via de WVO kwam Freudenthal terecht bij de Wiskunde Werkgroep (WW) van de WVO, een discussieplatform voor vernieuwing van wiskundeonderwijs. Hij was in de jaren veertig en vijftig een trouwe bezoeker van de maandelijkse WW-bijeenkomsten, waar hij zowel een klankbord als inspiratie voor zijn didactiekideeën vond: 'een milieu van wiskundig-didactische bewustwording', schreef hij erover. Hij mengde zich nu met grote regelmaat in lopende discussies over wiskundeonderwijs, waarbij hij niet schuwde tegen gangbare opvattingen in te gaan. Zo was er de kwestie van de vormende waarde van het wiskundeonderwijs, in het interbellum door velen gezien als een van de grootste deugden van dat onderwijs. De logische zuiverheid en de eerlijkheid van het mathematisch denken waren uitermate belangrijk voor de ontwikkeling van het intellect en het verhogen van het morele peil van de leerling, zo meenden voorstanders van deze invalshoek. Wetenschapshistoricus E.J. Dijksterhuis (1892-1965) en wiskundige H.J.E. Beth (1880-1952), beiden wiskundeleraar aan een Rijks-HBS, waren twee prominente vertegenwoordigers van deze stroming. Ook het tijdschrift *Euclides* was in dit opzicht in de jaren veertig en vijftig nog uiterst behoudend en conservatief te noemen. De nieuwlichters van de WW kregen daarin in eerste instantie dan ook slechts mondjesmaat ruimte voor publicatie.

Freudenthal bestreed die zo geroemde vormende waarde van het wiskundeonderwijs: wiskundeonderwijs moest in de eerste plaats het onderwijzen van wiskunde als doel hebben, hetgeen al moeilijk genoeg was volgens hem. Al in zijn 'Rekendidactiek' wees hij het rekenonderwijs als middel om logisch te leren denken af. Volgens Freudenthal kon 'logisch leren denken' veel efficiënter in het moedertaalonderwijs bereikt worden, want om het denkvermogen te ontwikkelen was het leren afwegen van argumenten nodig: *'Denken lernt man nicht im Einklang, sondern im Widerspruch'*, schreef hij in 1954. De wiskunde, waar alles bewijsbaar en overzichtelijk was, droeg volgens hem aan de ontwikkeling van dergelijke denkmethoden niets bij.

Freudenthal nam in zijn publicaties geen blad voor de mond: *'Schaf die prulwetenschap af!'*, riep hij over het HBS-mechanicaonderwijs. Met dit soort ongenueanceerde uitspraken maakte hij het zichzelf niet makkelijk. *'Zijn beweringen zijn [...] te impulsief, de gebezigde woorden te "dik"'*, schreef G.A. Janssen, voorzitter van Wimecos ('Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes-Hogere Burgerscholen met 5-/6-jarigen cursus'), over hem in 1953. Toch werd Freudenthal wel gehoord. Het aanzien dat hij als hoogleraar genoot, droeg daar aan bij. Maar er kwam in de jaren vijftig ook steeds meer ruimte voor vernieuwing van wiskundeonderwijs. Zo werd in 1958 een nieuw wiskundeleerplan ingevoerd, dat mede gebaseerd was op uitgebreid voorwerk van de WW. De scheidslijn tussen de 'vernieuwers' van de WW (met Freudenthal als voorzitter) en de 'conservatieven' van de lerarenverenigingen en hun contactorgaan *Euclides* vervaagde steeds meer.

Ook Freudenthals positie veranderde. Begonnen als roepende aan de zijlijn groeide hij eind jaren vijftig uit tot een ware autoriteit op het gebied van wiskundeonderwijs en -didactiek, niet in de laatste plaats door zijn toenemende stroom van publicaties op deze gebieden. Ook verscheen hij geregeld op het internationale toneel als Nederlandse vertegenwoordiger van de wiskundendidactiek. Zijn houding bleef echter onvermoeibaar kritisch. Wanneer hij de kans kreeg, hamerde hij in zijn voordrachten en artikelen op misstanden in het Nederlandse wiskundeonderwijs, zoals de achterlijke leerplannen, de slechte eindexamenopgaven en het gebrek aan een echte lerarenopleiding.

Theorievorming

De promoties van het echtpaar Van Hiele in 1957 vormden een keerpunt in de ontwikkeling van Freudenthals didactisch gedachtegoed. Tot dan toe beperkte Freudenthal zich in zijn artikelen voornamelijk tot het signaleren van wantoestanden en het bekritisieren van wat algemeen bekend stond

als de 'traditionele' onderwijsmethoden. Veel meer dan het aangeven van een richting waarin gezocht zou moeten worden naar verbeteringen kwam hij niet. Daarbij gaf hij overigens aan ook niet veel meer te kunnen doen, zolang er geen resultaten van deugdelijk onderzoek voorhanden waren. Maar met de promotieonderzoeken van de Van Hieles kwam daar verandering in.

Freudenthal had grote bewondering voor de observaties, de analyses en het op intuïtieve leest gestoelde aanvankelijk meetkundeonderwijs van Dieke van Hiele-Geldof (1911-1958), waarin ook invloeden van de wis- en natuurkundige Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa (1876-1964) te herkennen zijn. Toch was het de niveautheorie van zijn promovendus Pierre van Hiele (1909) die de grootste invloed op hem zou hebben. In zijn niveautheorie beschreef Van Hiele, op zijn beurt weer geïnspireerd door onder andere Piaget, de verschillende niveaus die leerlingen doorlopen in het leerproces voor het meetkundeonderwijs en de sprongen die tussen die diverse niveaus plaatsvinden. Freudenthal haalde Van Hieles niveautheorie uit de context van het meetkundeonderwijs en abstraheerde deze tot een werkwijze van logische analyse bij het inzichtelijk maken van de niveaus van willekeurig welke wiskundige leerstof. Een cruciale stap maakte hij in twee artikelen uit 1962 en 1963, toen hij twee belangrijke pijlers van zijn gedachtegoed voor het eerst gebruikte: de zogenaamde *anti-didactische inversie* en het principe van de *geleide heruitvinding*. 'Geleide heruitvinding' (ook wel 'geleide herontdekking' of *guided reinvention*) was het uitgangspunt dat het heruitvinden van de wiskunde door de leerling essentieel was voor het begrip, en daarmee essentieel was voor het leerproces. Als voorbeeld van 'anti-didactische inversie' gaf Freudenthal het opleggen van definities aan de leerlingen, nog vóórdat zij ervaringen in de betreffende stof hebben mogen opdoen en de noodzaak voor het formuleren van een dergelijke definitie voelen. Ook wiskundigen gingen niet zo te werk bij het creëren van wiskunde en dat mocht dus zeker niet van de leerling worden geëist!

Met deze twee termen vatte Freudenthal de voor hem uit de niveautheorie voortgekomen uitgangspunten voor het wiskundeonderwijs bondig samen: concreet beginnen, leerlingen de kans geven te experimenteren en te onderzoeken, en de stof aanbieden in een mate van exactheid die bij het desbetreffende niveau van de leerling hoort zonder concessies te doen aan de wiskundige correctheid van die leerstof. Bovendien moest wiskunde niet met het resultaat geïdentificeerd worden, maar als activiteit onderwezen. Hier is ook de invloed van Freudenthals intuïtionistische inslag te herkennen: wiskunde was voor hem een mentale creatie, en dat uitgangspunt moest ook aan het onderwijs ten grondslag liggen.

31 Jul 1945.

aan den Secretaris van de centrale
werkgroep van de N.V.C.
Inthorinslaan 67
Pijnacker

Dear Deutsche Meter J. B. Janssen,

het verhaalt mij mee, dat de N.V.C. (naar mijn
vraag 118 f.) voor lewensbekenen voortdoot, en wel het
bijzonder krachtige teken van organisatie van een conferen-
tie. Indien ik een middel van vervoer beschikking
heb, zal ik niet verzuimen, aan de conferentie deel te
nemen. In den tijd van mijn gedwongen aanblijfs werke-
loosheid (ik was vroeger docent in de Wijsdane aan de
Hollandsche Universiteit en zal hiernaakt mijn familie,
waarvan ik naar den Benetier onthoven was, hervatten)
heb ik mij veel met opvoedingproblemen bezig gehou-
den, vooral met de pedagogiek van het rekenen en de
rekenen, alsmede met de opvoeding tot het denken in
de ruimste zin. Nu de omstandigheden het voor mij weer
mogelijk maken, zal ik spoedig mijn onderzoekingen be-
doelen maken.

Daar ik mij vooral aan de moderne stroomingen in de Engels sprekende landen geïntereerd heb, lijkt mij de conferentie een geschikte plaats, om over het onderwijs "Opvoeding tot Denken" iets uitvoeriger te spreken dan in een discussie mogelijk is. Zou het misschien mogelijk zijn, een soort inleiding over dit onderwijs te houden? De ja, hoewel spreekblijk maakt u voor mij uit kunnen trekken uit het oop op de nodige voorbereiding die ik te mededeling gaarne tegenover, met de meeste hoopzucht.

H.F.

24-cv-76

Als volgt een opgave.

Wilt u beschrijven hoe u het zelf opgelost hebt.

Wilt U het zoveel mogelijk kinderen geven en beschrijven, hoe zij het oplossen.

Jan en Piet wonen op 't zelfde adres en werken in 't zelfde bedrijf. Zij fietsen er naar toe. Jan doet er 30 minuten over en Piet 40 minuten. Jan vertrekt 5 minuten na Piet. Waar haalt hij hem in?
(Het fietsen geschiedt uiteraard als eenparige beweging.)

[illegible]

De de grote meesters onderen - en het best.

Flora's ontdekking, dat haar zo veel liever te zijn en zo
 veel beter te zijn. Ze zag dat in den rust staat: die rust was
 in rust gekomen. Ze zag dat het was: "Hoe je een klein
 of klein staat." Ze zag dat, maar Flora's ging door
 dat ingang. Ze zag dat ze de grote meesters onderen
 te zien.

Deze, die roekende of wandelende op gebieden terecht
kamen, die hij bij zijn eerste stappen niet zag - liet staan
overdag, wel bij gelovden, wanneer ik verkeer, dat ook ik
tot degenen behoor, die een geschied als het nu verkeerden
niet van mij hebben verwacht. De eerste stappen op dit
gebied van de didaktische methodiek van het rekenonderwijs
deed ik ~~aan mijn kinderen~~ ^{in de eerste jaren van de twintigste eeuw} aan mijn kinderen hun eerste stappen doen; bin-
nenhuis, nl. in de rekenlessen, die ik soms opzettelijk,
soms terloops en meer toevallig aan mijn kinderen gaf.

Uitdragen en strijden

Het leerplan-1958 was nog maar nauwelijks een feit, of de wens voor radicale koersverandering stak eind jaren vijftig de kop op. Onder invloed van de Amerikaanse 'New Math'-beweging werd ook in Europa de wens gehoord om moderne wiskunde in de klas te introduceren. Een roerige tijd brak aan in het wiskundeonderwijs.

Freudenthal kwam uit deze periode naar voren als nauwelijks serieus genomen, eenzame tegenstander van New Math - niet in de laatste plaats doordat hij zichzelf als zodanig met gepaste trots afschilderde. Helemaal terecht is dit beeld niet. Zijn felle kritiek op New Math-initiatieven gold voornamelijk buitenlandse tendensen, die in de relatief behoudende Nederlandse wiskundeonderwereld niet aan de orde waren. In België bijvoorbeeld was de modernisering van het wiskundeonderwijs eind jaren vijftig al in volle gang. De wiskundige George Papy was daar voortrekker van een reeks leerplanexperimenten waarbij van kleuterklas tot eindexamenklas moderne wiskunde geïntroduceerd werd. Ook al werd er met bewondering naar de initiatieven van buurland België gekeken, dergelijke extreme vernieuwingen kwamen in Nederland niet van de grond.

Wat er in Nederland in de jaren zestig wél aan modernisering van het wiskundeonderwijs tot stand kwam, gebeurde met steun en medewerking van Freudenthal. Zijn hele leven hield hij vast aan het motto: 'Beter meewerken om bij te sturen, dan als tegenstander langs de zijlijn staan.' Bovendien plaatste Freudenthal zich voortdurend boven de lopende New Math-discussie door geen modernisering van slechts de *inhoud* van het wiskundeonderwijs te eisen, maar modernisering van wiskundeonderwijs *an sich*. Dé oplossing zag hij begin jaren zestig nog in bijscholing van de leraren. Hij had er het volste vertrouwen in, dat een leraar met voldoende kennis van de moderne wiskunde -en daarnaast de nodige kennis van de logische analyse van het leerproces- zelf de bijbehorende didactiek en methodiek zou kunnen ontwikkelen.

‘Kennismaken met de wiskundige methode, aan wiskunde die de leerlingen met inzicht kunnen toepassen’, zo zou Freudenthals standpunt in de jaren zestig samengevat kunnen worden. Als die wiskunde op school moderne wiskunde zou zijn, was dat een prettige bijkomstigheid, maar voor Freudenthal geen doel op zich. Langzamerhand zou hij er echter achter komen dat zijn ideaal minder gemakkelijk te bereiken was dan hij oorspronkelijk dacht: met zijn mening verkondigen in lezingen en artikelen en de bijscholingscursussen alleen kwam hij er niet. Het was tijd voor meer doortastende actie.

Bouwen aan wiskundeonderwijs

Eind jaren zestig zette binnen het wiskundeonderwijs een cultuuromslag in waarbij de aandacht verschoof van de wiskundige inhoud naar het lerende kind en

de bijbehorende (micro-)didactiek. In Nederland zou de oprichting van het Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs (IOWO) in 1971 een belangrijke factor in deze ontwikkelingen blijken. Hoewel bijna pensioengerechtigd, stond Freudenthal bij deze ontwikkeling allesbehalve aan de zijlijn. Naast talloze publicaties –waaronder zijn eerste didactische boek *Mathematics as an educational task* uit 1973– was hij actiever dan ooit: zijn activiteiten strekten zich uit van het organisatorische vlak tot het observeren van de onderwijspraktijk in het klaslokaal. Als hoogleraar-directeur van het IOWO profileerde Freudenthal zich als dé wiskundendidacticus en gaf bovendien het instituut een enorme impuls door zijn naam en faam eraan te verbinden.

Hij was vol bewondering en enthousiasme voor het IOWO-werk. Een vergelijking met de Wiskunde Werkgroep ging mank volgens hem. Hij schreef: *‘Wat ik ook in de Werkgroep heb geleerd [...] de Werkgroep was voor mij een gepasseerd stadium – ik deed niet meer één keer per maand aan wiskundendidactiek, maar dagelijks.’*

Mede door het IOWO-werk herontdekte Freudenthal zijn in de jaren vijftig en zestig nauwelijks aan bod gekomen interesse: die voor het observeren van kinderen, het kijken naar leerprocessen en het delen van die ervaringen om te verwerken in onderwijs. In ‘Rekendidactiek’ schreef hij al over het belang van dergelijke observaties: *‘... onder de onderwijzers zijn er misschien toch sommigen, die zonder theoretisch opzet, geheel zakelijk, in een dagboekachtig relaas stukje bij beetje achter elkaar kunnen aantekenen, hoe er feitelijk les wordt gegeven – schijnbare onbenulligheden zouden voor iemand, die zulk een relaas wetenschappelijk gaat ontleden, misschien meer verrassen en te denken geven dan een diep aangelegd theoretisch onderzoek.’*

Had hij zijn eigen zoons nog aan ellenlange socratisch getinte vraaggesprekken onderworpen, zijn kleinzoon Bastiaan probeerde hij bij de dagelijkse wandelingen zo objectief mogelijk te observeren. In zijn artikelen en voordrachten benadrukte hij niet zozeer de specifieke belevenissen met het jongetje, als wel het belang van het observeren van kleine kinderen in hun eigen, alledaagse wereld. Hij gaf zelf het goede voorbeeld door zich als ‘professor’ niet te verheven te voelen om zich op kleuterniveau te begeven.

Hoe deze observaties aanzet tot theorievorming gaven, bleek bijvoorbeeld uit het voor Freudenthals latere werk zeer essentiële concept ‘paradigma’. Het zoeken naar paradigma’s –cruciale voorbeelden bij het reflecteren en het je bewust maken van hetgeen je onbewust doet of kent– was voor Freudenthal een belangrijk uitgangspunt bij de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. ‘Paradigma’ –nauw gelieerd aan ‘realistische context’– was een typisch voorbeeld van een door Freudenthal uit zijn (buitenwiskundige)

omgeving opgepikte term, die in wisselwerking tussen hem en de medewerkers van het IOWO verder ingevuld en ontwikkeld werd. Freudenthal had in zijn gedachtegoed de basis hiervoor al gelegd in de jaren vijftig, maar zag het nu ook in de praktijk gebracht, uitgewerkt en toegepast in de onderwijsontwikkeling van het IOWO.

Met het IOWO als middel om zo vaak hij wilde tot de essentie –die van de realiteit in de klas– af te dalen, kon hij voor het eerst zijn tot nu toe voornamelijk theoretische beschouwingen over het wiskundeonderwijs aanscherpen, concreet maken, onderbouwen met praktijkervaringen en verder uitbreiden. Hij schreef: *‘Als we weinig van cognitieve ontwikkeling afweten, zou de reden ervan niet kunnen zijn, dat we het tot nu toe te ver, te hoog hebben gezocht, dat we over wat ons onbelangrijk leek, argeloos heen zijn gestapt?’* In combinatie met zijn hervonden enthousiasme voor het observeren van kinderen leverde dit stof voor zijn talloze voordrachten, artikelen en nieuwe boeken.

‘Een wiskundige [...] die zich altijd en de laatste jaren vrijwel uitsluitend voor het onderwijs heeft geïnteresseerd’, zo omschreef hij zichzelf in 1973. De balans in zijn belangstelling en werkzaamheden was midden jaren zeventig definitief doorgeslagen naar de kant van het onderwijs: Freudenthal –de ongenaakbare wiskunde professor, de onbevangen observerende grootvader, de onvermoeibare criticus– wás wiskundeonderwijs.

Literatuur

-
- De diverse aantekeningenboekjes, (ongepubliceerde) artikelen, voordrachten en correspondentie van Hans Freudenthal zijn te vinden in zijn persoonlijk archief: Rijksarchief in Noord-Holland, *Papers of Hans Freudenthal (1905-1990), mathematician, 1906-1990*.
 - Over Freudenthal over zichzelf als didacticus is te lezen in: Hans Freudenthal: *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven* (Amsterdam, 1987).
 - Veel van Freudenthals artikelen uit de jaren vijftig en zestig zijn verwerkt in zijn boek: Hans Freudenthal: *Mathematics as an educational task* (Dordrecht, 1973).
 - De proefschriften van de Van Hieles: P.M. van Hiele: *De problematiek van het inzicht* (Amsterdam, 1957); D. van Hiele-Geldof: *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* (Amsterdam, 1957).

Over de auteur

Sacha la Bastide-van Gemert (e-mailadres: slabastide@xs4all.nl) is bezig met de afronding van een proefschrift over Freudenthal en de wiskundendidactiek. Begin 2006 hoopt zij hierop te promoveren aan de Rijksuniversiteit Groningen.

IN MEMORIAM ALBERT KOLDIJK

[Martinus van Hoorn]



Op 6 oktober jongstleden overleed in zijn woonplaats Hoogezand op 88-jarige leeftijd Albert Koldijk. Hij was jarenlang leraar te Hoogezand, en daarna docent didactiek aan de Rijksuniversiteit Groningen en aan de nieuwe lerarenopleiding Ubbo Emmius, eveneens te Groningen. Tot zijn pensionering in 1982 bleef hij docent didactiek. Zowel aan de universiteit als aan Ubbo Emmius moest hij pionieren. Daarnaast nam hij, in de periode voor de invoering van de Mammoetwet in 1968, het initiatief voor de nascholing van mulo-leraren in het noorden des lands, wat later elders op dezelfde manier werd gedaan.

Van 1959 tot 1973 was Koldijk secretaris van de redactie van Euclides. Dat betekende destijds dat hij ervoor zorgde dat de auteurs een drukproef kregen om te corrigeren, dat hij elk nummer zelf opmaakte (dat was toen tien keer per jaar), dat hij jaarlijks een register maakte, dat hij het contact met de uitgever

onderhield, en nog vele dingen meer. Koldijk deed dit uitstekend en altijd op tijd – wat bepaald geen sinecure was – en hij hield dit werk ongekend lang vol, namelijk veertien jaar.

Ik zal mij Koldijk herinneren als iemand die altijd oog had voor de mensen met wie hij werkte, naast het gedegen werk dat hij afleverde.

Noot

In Euclides 78-2 (oktober 2002) staat een interview met Albert Koldijk.

Over de auteur

Martinus van Hoorn (e-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl) was van 1987 tot 1996 hoofdredacteur van Euclides. Hij heeft nog didactiek gevolgd bij Koldijk.

Verschenen / Romeinse cijfers Auteur: Ko van Harn (2005)

Uitgever: De Buitenkant, Amsterdam Prijs: € 12,00 ISBN: 90-76452-85-7, 72 pag.



Bij de Romeinen hadden zeven letters een cijferwaarde. Deze Romeinse cijfers werden eeuwenlang toegepast, ook na de val van het West-Romeinse Rijk. Toen de Arabieren andere cijfers naar Europa brachten, werd het gebruik van Romeinse cijfers minder, al hebben ze

tot op de dag van vandaag nog altijd een plaats in ons schrift.

Ko van Harn vertelt de geschiedenis van de Romeinse cijfers, hoe ze werden gebruikt en vormgegeven.

Romeinse cijfers werd gepresenteerd op 13 mei 2005 ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van Uitgeverij De Buitenkant, Offsetdrukkerij Jan de Jong en Zetterij Chang Chi Lan-Ying.

Eerste klas	Tweede klas	Derde klas
1 Tellen	11 Machten	18 Verbanden
2 Passen en meten	12 Veelhoeken	19 Goniometrie
3 Formules	13 Vergelijkingen	20 Ruimtelijke figuren
4 Ruimte	14 Geïkvormigheid	21 Lineaire functies
5 Algebra	15 Haakjes	22 Kwadraten en wortels
6 Breuken	16 Stelling van Pythagoras	23 Vierkantsvergelijkingen
7 Driehoeken	17 Ontbinden	24 Functies
8 De getallenlijn		
9 Afstanden		
10 Negatieve getallen		

Grote driehoeksgetallen uitrekenen

Het driehoeksgetal met basis 18 is $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 18$.
Het is een hoop werk om de uitkomst hiervan uit te rekenen.
In de plaatjes hiernaast wordt gedemonstreerd hoe je handig het driehoeksgetal met basis 18 kunt vinden.

Opgave: Bereken in het vijftalig stelsel 23×34

Een gesprekje tussen leerling en docent:

Leerling: Ik heb uitkomst 11112, maar dat rekent de computer niet goed.

Docent: Leg eens uit; hoe kwam je eraan?

Leerling: $23 \times 34 = 600 + 80 + 90 + 12 = 782$ en dat schrijf je vijftalig als 11112 ($1 \times 625 + 1 \times 125 + 1 \times 25 + 1 \times 5 + 2$).

Docent: Je hebt 23 en 34 tientalig vermenigvuldigd.

Leerling: Aah, dus ik moet doen:

- $20 \times 30 = 1100$
- $20 \times 4 = 130$
- $3 \times 30 = 140$
- $3 \times 4 = 22$

en dat optellen geeft 1442.

Leraar: Kun je je antwoord tientalig controleren?

Leerling: $13 \times 19 = 100 + 90 + 30 + 27 = 247 = 125 + 4 \times 25 + 4 \times 5 + 2$

FIGUUR 1 Hoofdstukkenoverzicht

FIGUUR 2 Driehoeksgetallen

FIGUUR 3 Andere talstelsels

INTERNETMETHODE RATIO

Wiskundig denken bevorderen in de onderbouw havo-vwo

[Ton Konings]

Ratio

Ratio is een project van het instituut voor wiskunde van de Radboud Universiteit Nijmegen (RU). Doelstellingen van Ratio zijn jongeren te motiveren voor wiskunde en met name getalenteerde leerlingen voor te bereiden op wetenschappelijk onderwijs in de bètavakken. Naast het project 'Wiskundig denken' voor leerlingen van 6 vwo ontwikkelt Ratio een 'internet-wiskunde-methode' die gericht is op de onderbouw vwo.

Lesmateriaal op internet

Het uitdagende en interactieve lesmateriaal is vrij beschikbaar op www.ratio.ru.nl. Daarbij worden de mogelijkheden van internet benut: de leerlingen krijgen direct feedback, leerstof wordt geïllustreerd met applets, oefeningen worden gemakkelijk gegenereerd, applets maken onderzoek door leerlingen mogelijk en zorgen voor een speels element. Ratio wil de komende jaren deze mogelijkheden uitbreiden o.a. met instaptoetsen, filmpjes, links naar voorkennis en extra stof, wiskundewoordenboek, alternatieve routes door de leerstof, niveauaanduidingen, uitwerkingen met diverse toegangsrechten, overzicht voor de docent van prestaties van de leerlingen,... en aansluiten bij nieuwe vormen van onderwijs.

Figuur 1 geeft het hoofdstukkenoverzicht.

Naast het leerlingenmateriaal op internet bestaat er per hoofdstuk een docentenhandleiding, een werkschrift voor tekeningen en uitwerkingen die beter op papier kunnen, per paragraaf een overzichtspagina, een proeftoets en een toets. Een CD met dit schriftelijke materiaal, eventueel samen met een off-line versie van het hoofdstuk, kan per hoofdstuk gratis aangevraagd worden via info@ratio.ru.nl.

Het materiaal van de eerste klas is uitgetest en aangepast; ook voor de tweede klas is al veel ontwikkeld. Op de site van Ratio kunt u de status van elk hoofdstuk zien.

De gebruikers

De gebruikers zijn in een aantal categorieën te verdelen:

- Met het materiaal van de brugklas is in schooljaar 2004/2005 op drie scholen in de regio Nijmegen vooral in vwo-klassen integraal gewerkt. De leerlingen hadden geen schoolboek meer.
- Op een aantal scholen worden in hele klassen enkele hoofdstukken gebruikt, ter vervanging van hoofdstukken uit de methode.
- Ratio wordt als verrijkmateriaal aangeboden aan de meer getalenteerde leerlingen, havo en vwo.
- Ratio-hoofdstukken van klas 1 en 2 worden gebruikt als oefenmateriaal voor leerlingen van hogere klassen havo en vwo.
- De applets en onderzoeksopdrachten worden veelvuldig gebruikt door docenten.

Voorbeelden uit het Ratio-lesmateriaal

Er volgen vier voorbeelden uit Ratio-lesmateriaal met betrekking tot het onderwerp algebra en daarbij

ook enige observaties vanuit de klas. De voorbeelden komen nog meer tot hun recht als u het hoofdstuk op de site erbij bekijkt (www.ratio.ru.nl > *lesmateriaal*). Daarbij is gekozen voor elementen die je meestal niet in gangbare wiskundeboeken aantreft, of niet al zo vroeg in een leergang. Vervolgens wordt, verwijzend naar de voorbeelden, de titel van dit artikel uiteengegafd.

Voorbeeld 1

Eerste klas, hoofdstuk 3 Formules, par. 3.2

Figuur 2 komt uit de paragraaf met de titel 'Formules maken' en demonstreert hoe met de 'truc van Gauss' de som van een rij getallen bepaald kan worden.

Hierna volgt al vrij snel de vraag: 'Hoe groot is dus het driehoeksgetal met basis n ?'

Ook met de applet *Stippelalgebra*, overgenomen van Wisweb^[1] kunnen de leerlingen goed uit de voeten. Leerlingen blijken heel goed in staat om al vroeg in de brugklas herkende regelmaat in getalpatronen om te zetten in formules.

Het is zonde om een andere veralgemenisering van de truc van Gauss te laten liggen:

'Met de truc van Gauss kun je ook andere sommen uitrekenen. Bijvoorbeeld de som van alle drievouden van 33 tot en met 300: $33 + 36 + 39 + 42 + \dots + 294 + 297 + 300$.' Hierbij is een applet gemaakt waarin vergelijkbaar met figuur 2 na eigen berekening op visuele wijze feedback wordt gegeven.

Voorbeeld 2

Eerste klas, hoofdstuk 5 Algebra, par. 5.4

Hoofdstuk 5 behandelt het haakjes verdrijven. Er worden regels voor typen opgaven als $(2a + 3b)(3c + 4d) = \dots$ ontdekt. Dit gebeurt via een applet met oppervlakten in roosters met lengten a en b , en via het gewone rekenen 12×34 (in het tientallig stelsel). **Figuur 3** demonstreert dat bij het vermenigvuldigen in andere talstelsels hetzelfde patroon van handelen geldt. Beoogd wordt dat daarmee de algemene werkwijze bij haakjes verdrijven wordt ondersteund. Of dit laatste bij alle leerlingen ondersteunend werkt, valt te betwijfelen. Niettemin is het verbazend dat de beslist niet speciaal getalenteerde leerling van de situatie in figuur 3 (ook na behandeling van talstelsels in hoofdstuk 1) aardig thuis is geraakt in andere talstelsels. Bij het hoofdstuk 'Machten', in de tweede klas, komt dat weer terug.

Voorbeeld 3

Tweede klas, hoofdstuk 11 Machten, par. 11.4

In het hoofdstuk 'Machten' zitten veel mooie applets en onderzoeksopdrachten. De torens van Hanoi spreken leerlingen van alle niveaus aan; zie **figuur 4**. Iedereen kan het vanuit paragraaf 11.4 achter de computer doen. Met deze onderzoeksopdracht aan het eind van het hoofdstuk laten leerlingen zich uitdagen tot allerlei redeneringen over het verband tussen het aantal schijven en het minimum aantal zetten.

Torens van Hanoi

Op een plank staan drie pinnen: A, B en C. Op pin A zijn een aantal schijven geschoven op volgorde van grootte; de onderste schijf is de grootste, de bovenste is de kleinste.

De speler (dat ben jij) moet in zo weinig mogelijk zetten de schijven van pin A naar pin C verplaatsen. Hierbij zal hij pin B als tussenstation moeten gebruiken. Je moet daarbij twee spelregels in acht nemen.

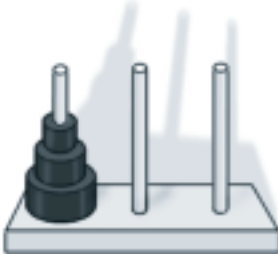
- Per zet mag je één schijf verplaatsen van een pin naar een andere pin.
- Je mag nooit een schijf op een kleinere schijf plaatsen.

a. Bekijk de applet.

b. Hoeveel zetten heb je nodig als je begint met een toren van 2, 3, 4 of 5 schijven?
Schrijf je antwoorden in een overzichtelijke tabel.

Stel dat je weet hoeveel zetten je nodig hebt bij een toren van 10 schijven. Noem dat aantal zetten a . Dan heb je precies $2a + 1$ zetten nodig voor een toren met 11 schijven.

c. Beredeneer dat.



FIGUUR 4 Torens van Hanoi

Voorbeeld 4

Tweede klas, hoofdstuk 17 Ontbinden, par. 17.3

In het hoofdstuk 'Ontbinden' leren de leerlingen, na een paragraaf over het ontbinden van getallen in priemfactoren en vóór de methode waarbij kwadratische vergelijkingen op nul worden herleid en ontbonden, de 'factor- x -methode' uit [figuur 5](#). Wellicht is dit de oorzaak van de onzekerheid bij leerlingen in het klassengesprekje dat in [figuur 6](#) wordt weergegeven.

Op de vraag van de minder sterke Leerling 4 zul je geneigd zijn te antwoorden: 'Nou, kies maar de weg van leerling 3.' De vraag van Leerling 5 is van het soort die de initiatiefnemers van Ratio graag meer in wiskundelessen willen tegenkomen.

De wiskunde

In de laatste decennia is bij het ontwikkelen van lesmateriaal voor het vwo in de schoolboeken veel de nadruk gelegd op het nut en de toepasbaarheid van de wiskunde en is er weinig aandacht geweest voor de rijkdom van de wiskundige cultuur op zich zelf. De Ratio-internetmethode kiest in de eerste plaats een wiskundige invalshoek, zonder daarbij de realiteit uit het oog te verliezen. Fundamenteel is steeds het ontwikkelen van een goed getalbegrip. Daarbij horen onderwerpen uit de elementaire getaltheorie zoals talstelsels, priemgetallen, modulo-rekenen, KGV en GGD, allerlei regelmaat in patronen met natuurlijke getallen. Toegankelijk maken van de rijkdommen van de klassieke meetkunde, ook in de onderbouw, is de tweede pijler van de methode. Alle vier voorbeelden illustreren hoeveel interessants aan gehele getallen valt te onderzoeken, en hoe eigenschappen van getallen het ontwikkelen van

algebra ondersteunen. Bij Ratio wordt algebra gezien als veralgemenisering van de regels voor het rekenen met getallen.

Wiskundig denken

Wiskunde is niet alleen weten hoe je het gemakkelijkst een som kunt maken. Wis-kunde als de kunst van het zeker weten betreft toch vooral de weg naar het vinden van zekerheid. Een wiskundige houding is essentieel en veronderstelt meer het vragen stellen dan het antwoorden geven. Wiskunde bedrijven begint veelal met vermoedens waarover onzekerheid bestaat, en moet wel enigszins moeilijk zijn. Dat illustreren de bovenstaande voorbeelden.

Wiskundig denken bevorderen

Het computergebruik suggereert misschien dat de leerling vooral individueel bezig is. Leerling-docent-interactie blijft echter, zoals dat altijd bij goed wiskundeonderwijs het geval was, van groot belang, zowel met de individuele leerling als klassikaal. Een docent is daarbij niet primair antwoorden- of uitwerkingenverstrekker, maar zaait juist twijfel, speelt meerdere (goede en foute) antwoorden tegen elkaar uit. Met name in voorbeeld 3 is hiervan sprake. Bij begeleiding is de kwaliteit van vragen essentieel: meer productief/open (waarom, hoe, wat kan gebeuren als, wat is het verschil tussen,...) dan reproductief/gesloten. Vereist blijft aandacht voor probleemaanpak en reflectie, en natuurlijk enthousiasme van de docent.

Wiskundig denken bevorderen in onderbouw havo-vwo

Daarbij dient er aandacht te blijven voor het inslijpen van vaardigheden. Naast uitdaging moet ook houvast

We zoeken de gehele oplossingen van de vergelijking: $x^2 + 3x^2 + 2x = -6$.
 We halen een factor x buiten haakjes: $x(x^2 + 3x + 2)$
 Bij het zoeken van oplossingen kun je je beperken tot de delers van 6 (eventueel negatief).
 Dus probeer $x = -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6$ en 6 .

x	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6
$x(x^2 + 3x + 2)$	0	6	0	24	-8	60	-120	336

Dus oplossing is -3 .
 Een vergelijking zo aanpakken noemen we de **factor-x-methode**.

Los op: $10x = x^2$.
 In een klassengesprek:
 Leerling 1: Delen door x geeft antwoord 10.
 Leerling 2: Eigenlijk zie je de oplossingen 0 en 10 zo zitten, vul ze maar in en het klopt.
 Leerling 3: Herleiden op 0: $x^2 - 10x = 0$, en dan $x(x - 10) = 0$, dus $x = 0$ of $x = 10$; vul maar in.
 Leerling 4: Welke oplossingsmethode is nu goed?
 Leerling 5: Maar hoe weet je nou dat je alle oplossingen hebt?

FIGUUR 5 Factor-x-methode

FIGUUR 6 Klassengesprek

geboden worden, want leerlingen moeten ook zelfvertrouwen krijgen.

En specifiek voor de onderbouw is enthousiasmering van belang door spel en puzzels, voorbeelden uit de kunst, zicht op geschiedenis en op de mensen die 'm maakten, wiskunde in de actualiteit, spreekbeurten, en werken aan onderzoeksopgaven.

Mits goed gedoseerd kan abstractie al vroeg beginnen, zeker voor een behoorlijke groep vwo-leerlingen.

Meer ontwikkelproject dan methode

De internetmethode Ratio is mogelijk gemaakt door subsidies van onder andere OMO (Ons Middelbaar Onderwijs) en RU. Steeds meer vindt dit gratis lesmateriaal haar weg naar de scholen. Eigenlijk is Ratio geen lesmethode zoals Moderne Wiskunde, Getal en Ruimte of De Wageningse Methode, waarin een zekere uniformiteit en volledigheid wordt nagestreefd en allerlei aanvullende service wordt verleend. Ratio is, hoewel er doorgaande leerlijnen worden uitgezet, meer een ontwikkelomgeving voor goed wiskundeonderwijs, waarin diversiteit in het digitale lesmateriaal in de toekomst juist zal worden gestimuleerd. De methode kan – omdat die via het internet wordt verspreid – steeds eenvoudig worden aangepast, uitgebreid en verbeterd, in discussie tussen docenten en leerlingen enerzijds en de universitaire wereld anderzijds. Het is denkbaar dat commerciële lesmethoden, waarin ICT steeds meer een plaats krijgt, gebruik gaan maken van elementen uit de aanpak van Ratio.

U kunt auteur worden

Ratio wil zijn activiteiten uitbreiden door de ontwikkeling van het materiaal nog meer naar de

scholen te verplaatsen. Graag stellen we docenten in de gelegenheid bijdragen te leveren aan Ratio. Financiering van hun taakuren kan komen van onderwijsorganisaties die goed onderwijs in bèta, techniek en wiskunde stimuleren.

Noot

[1] Vanuit het Ratio-leerlingenmateriaal worden koppelingen gemaakt naar een aantal applets van het Wisweb (www.wisweb.nl).

Nascholing

In het studiejaar 2004/2005 zijn onder de titel 'Wiskundig denken in de onderbouw havo-vwo' tot grote tevredenheid van de deelnemers twee series nascholingsbijeenkomsten verzorgd, over Getallen en over Algebra. In deze nascholing ontmoetten auteurs, gebruikers en belangstellenden elkaar. Er was, uitgaande van hoofdstukken van de internetmethode, aandacht voor bestudering van het leerlingmateriaal, achtergronden uit de wiskunde, en ervaringen uit de klas.

Ook in schooljaar 2005/2006 zijn er twee series. De onderwerpen zijn nu: Meetkunde en Redeneren. Verdere informatie vindt u op de Ratio-site onder 'Nascholing'.

Over de auteur

Ton Konings (e-mail: ton.konings@han.nl of konings@ratio.ru.nl) is werkzaam aan de tweede-graadslerarenopleiding van het Instituut voor Leraar en School te Nijmegen als vakdocent en vakdidacticus wiskunde. Hij verzorgt de nascholing voor Ratio, Radboud Universiteit, Nijmegen.

EEN PUZZEL

[Ton Lecluse, Rob van Oord, Leon van den Broek]

In de klas

Als wiskundeleraar ben je altijd dankbaar als je weer iets leuks hebt voor in de klas. Vooral als het een aardig probleem is dat je kunt gebruiken op laag én hoger niveau.

Zo kwam Ton een leuke meetkundepuzzel tegen, waarin een aantal verrassende wiskundige activiteiten verborgen zitten. Toen hij de puzzel aan collega's liet zien, kwamen er varianten van de aanpak hoe je de afzonderlijke stukken van een dergelijke puzzel kunt construeren. Dit artikel is een samenvatting van hun activiteiten. Daarnaast zijn er werkbladen^[1] ontwikkeld, één voor de onderbouw, één voor wiskunde B2 van de bovenbouw vwo en één om Geocadabra toe te lichten. Onlangs stond er een aardige puzzel in het tijdschrift *Volgens Bartjens*^[2]. Een rechthoek wordt in drieën geknipt (zie figuur 1). Van de drie stukjes moet je dan een vierkant leggen. Het lijkt niet spectaculair, maar het is verrassend te zien hoe menig een hier moeite mee heeft.

Wil je de puzzel zelf eerst proberen op te lossen, kopieer dan figuur 1, knip de rechthoek in drieën en maak met de stukken een vierkant! (De oplossing staat verderop in dit artikel.)

Wil je de puzzel doorgeven aan een groter publiek, bijvoorbeeld aan een klas, dan kun je natuurlijk voldoende kopietjes maken van de figuur. Maar het is veel uitdagender om te bedenken hoe je de lijntjes in een rechthoek moet tekenen om van de verknipte rechthoek een vierkant te kunnen leggen.

Hierbij moet je jezelf twee vragen stellen:

- Hoe moeten de knijplijntjes getekend worden?
- Kun je bij elke rechthoek de drie puzzelstukken maken die samen een vierkant vormen?

Het antwoord is niet zo moeilijk. Hieronder volgen enkele oplossingen. Om deze goed te begrijpen is het aan te raden dat je eerst een paar keer met de stukken van de puzzel heen en weer schuift, van rechthoek naar vierkant en omgekeerd. Dan zul je snel begrijpen hoe de vork in de steel zit.

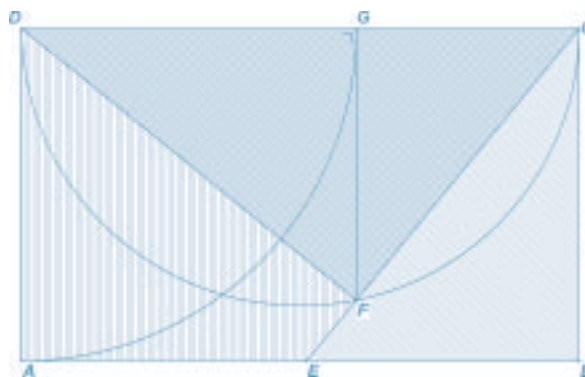
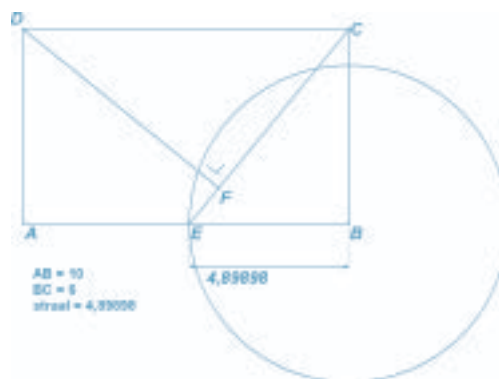
Een voorbereidende vingeroefening

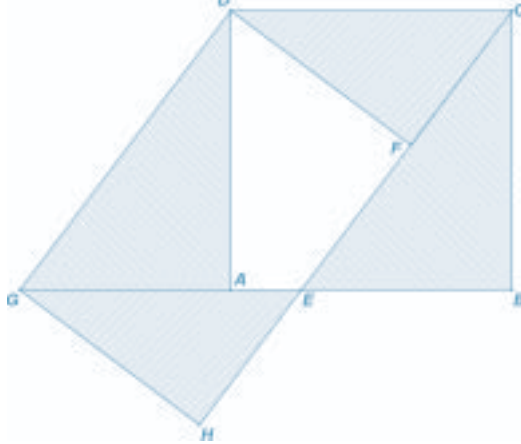
Teken een rechthoek $ABCD$ van 10 bij 6 cm, en kies punt E op AB zo dat $AE = 7$. Trek CE en kies F op CE

FIGUUR 1

FIGUUR 2

FIGUUR 3





FIGUUR 4

zo dat DF loodrecht op CE staat.

Je kunt deze rechthoek langs de lijntjes in drieën knippen en er weer een andere rechthoek van leggen, maar dat is géén vierkant! Je kunt dus punt E op AB niet willekeurig kiezen om een vierkant te krijgen.

De oplossing van Ton

Kies een rechthoek $ABCD$, met $AB > BC$. Uit de oplossing van de puzzel volgt, dat de lijnstukken CE en DF zijden van het vierkant vormen. Deze moeten dus even lang zijn. Zie eventueel [figuur 6](#) met de oplossing van de puzzel.

Hieruit volgt dat je de rechthoek niet zomaar willekeurig kunt gaan onderverdelen in drieën. Ook zijn de hoeken CFD en DFE beide 90° , dus moet DF loodrecht op CE getekend worden (zie [figuur 2](#)). De puzzel ligt dus vast bij de keuze van punt E .

Hoe bereken je nu de plaats van E op AB ?

Stel $AB = a$, $BC = b$. De zijden van het vierkant zijn CE en DF . Hoe bereken je BE uitgedrukt in a en b ?

De oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is $a \cdot b$.

De oppervlakte van het vierkant is CE^2 , dus $CE^2 = a \cdot b$.

De stelling van Pythagoras in driehoek CBE geeft $CE^2 = b^2 + BE^2$.

Hieruit volgt dat $BE = \sqrt{a \cdot b - b^2} = \sqrt{b \cdot (a - b)}$. Pas vanuit B de lengte BE af, en je hebt punt E . Hiermee kun je de puzzel zelf afmaken. Zie ook het naschrift.

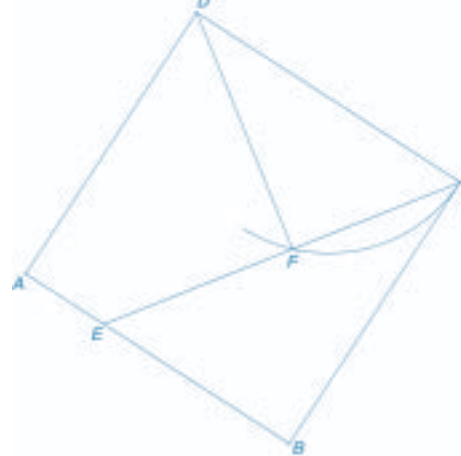
En nu op de computer

Een echte uitdaging is het de puzzel te construeren met een tekenprogramma, bijvoorbeeld met Geocadabra^[3]; zie [figuur 2](#). Begin met een rechthoek $ABCD$ met $AB = 10$ en $BC = 6$. De cirkel met middelpunt B en straal $\sqrt{6 \cdot (10 - 6)} = \sqrt{24}$ snijdt AB in E .

Het kan algemener. Om E te vinden kun je een hulpcirkel tekenen met middelpunt B en $\sqrt{a \cdot b - b^2}$ als straal.

Geocadabra biedt hiertoe een eenvoudige tweestapsoplossing; zie ook het werkblad^[1]:

- Maak een tekst waarin deze wortel wordt uitgerekend.
- Teken de cirkel met middelpunt B en deze



FIGUUR 5

tekstwaarde als straal (*maat overbrengen*). Deze cirkel snijdt AB in E . (Je kunt in Geocadabra een berekening in een tekst plaatsen, en het resultaat van die berekening als straal van een cirkel gebruiken. De berekende waarde op zich is gekoppeld aan lengtes in de tekening.)

- Nu je punt E gevonden hebt, kun je de tekening eenvoudig afmaken.

Het aardige van de computeraanpak is, dat je achteraf punten kunt gaan schuiven. Wanneer je punt A of B verschuift, verander je de verhouding *lengte : breedte* van de rechthoek, en krijg je telkens een nieuwe puzzel. Uit dit proces valt af te leiden dat de puzzel te maken is van elke rechthoek waarvan de verhouding van de zijden kleiner is dan 2. Zodra AB meer dan twee keer zo lang wordt als AD , ligt punt F in het verlengde van CE .

De aanpak van Rob

Rob van Oord is liefhebber van meetkundige problemen. Omdat $DF \perp EC$, dus $\angle DFC = 90^\circ$, dacht hij aan de stelling van Thales. Punt F moet dus op een cirkelboog liggen van de cirkel met middellijn CD . Wanneer je punt F hebt, dan ligt daarmee ook de plaats van punt E vast. E is het snijpunt van de lijn door C en F met AB . Als je nu nog iets anders kunt vinden over F , dan ben je klaar.

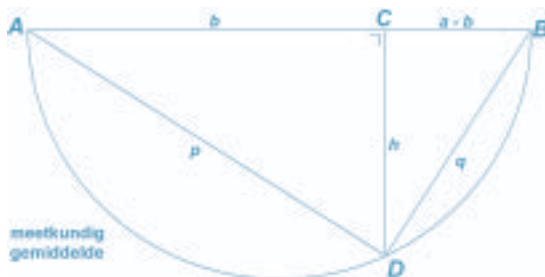
Trek uit F een loodlijn naar CD . G op CD is het voetpunt van deze loodlijn.

Uit het feit dat in de oplossing DF en EC zijden van het vierkant zijn, volgt dat $DF = EC$.

Je kunt nu eenvoudig inzien dat de driehoeken BEC en GFD congruent zijn ($\angle B = \angle G = 90^\circ$, $\angle DCF = \angle CEB$ (*Z-hoeken*), dus $\angle GDF = \angle BCE$, want $\angle CDF = \angle GDF = 90^\circ - \angle DCF$ en $\angle BCE = 90^\circ - \angle CEB$, *ZHH*). Hieruit volgt dat DG en BC even lang zijn, dus $DG = AD$.

Ga nu als volgt te werk:

- Teken de cirkelboog in de rechthoek van de cirkel met middellijn CD .
- Cirkel vanuit D straal DA om op DC . Dit is punt G .
- Teken in G de loodlijn op CD . Het snijpunt van de loodlijn met de cirkelboog is punt F .



FIGUUR 6

Hiermee kun je de puzzel zelf afmaken.

In **figuur 3** zie je de constructie van Rob, een aardig probleem bij wiskunde B2 op het vwo. Deze constructie is op de computer mooi uit te voeren, bijvoorbeeld met Cabri.

De aanpak van Leon

Leon van den Broek zag meteen dat het probleem triviaal wordt wanneer je het omkeert: begin met een vierkant en maak er een rechthoek van door het vierkant in drieën te verdelen (**zie figuur 4**).

Kies in vierkant ABCD een willekeurig punt E op (bijvoorbeeld) zijde AB. Trek CE en hierna DF loodrecht op CE. Verschuif driehoek EBC naar links zodat BC op AD past. Verschuif driehoek DCF schuin naar beneden zodat C op E komt. Dan heb je rechthoek HFDG.

Wel nog even aantonen dat de hoeken van deze vierhoek recht zijn. Maar dat is eenvoudig te doen met de hoekensom van de driehoek en Z-hoeken. Deze aanpak is dus geschikt voor in de tweede klas van het voortgezet onderwijs. Met een stapel gekleurde vouwblaadjes kun je meteen aan de slag.

De aanpak van Leon geeft aan hoe je een puzzel kunt maken uit een vierkant, maar niet hoe het moet bij een gegeven rechthoek. Uit zijn aanpak kun je ook direct zien wanneer de constructie niet meer gaat. Als CE een diagonaal is (dus gelijk aan CA), dan zijn twee van de drie puzzelstukjes hetzelfde, en zijn het alleen drie (gelijkbenige-rechthoekige = $45^\circ - 90^\circ - 45^\circ$) driehoeken. De rechthoek is dan tweemaal zo lang als breed.

De aanpak van Leon geeft ook een leuke opdracht voor wiskunde B2 op het vwo:

Punt E doorloopt zijde AB van een vierkant ABCD. F is de loodrechte projectie van D op CE.

Beschrijf de meetkundige plaats van F.

(Het is een kwartcirkel: Thales; **zie figuur 5**.)

De oplossing

Als je naar de oplossing van de legpuzzel kijkt, en deze zo neerlegt dat het vierhoekige puzzelstuk op zijn plaats blijft, kun je inzien dat het er op



FIGUUR 7

neerkomt, dat de twee driehoeken verschoven moeten worden; **zie figuur 6**.

Naschrift: constructie meetkundig gemiddelde

Het meetkundig gemiddelde van b en $a-b$ is gelijk aan $\sqrt{b(a-b)}$.

Op lijnstuk AB met lengte a wordt lijnstuk AC afgepast met lengte b . Dus is de lengte van lijnstuk BC gelijk aan $a-b$. Als je nu de halve cirkel met middellijn AB snijdt met de loodlijn in C op AB, met snijpunt D, dan is de lengte van CD gelijk aan $\sqrt{b(a-b)}$; **zie figuur 7**. Uit de gelijkvormigheid van driehoek ACD en driehoek DCB volgt dat $\frac{h}{b} = \frac{a-b}{h}$, waaruit volgt dat $h = \sqrt{b(a-b)}$.

Noten

[1] Deze werkbladen zijn te vinden op de downloadpagina van de NVvW-website (www.nvww.nl/download/eucl813.zip).

[2] Volgens Bartjens..., tijdschrift voor reken-wiskunde-onderwijs; jrg. 24 nr. 3, januari 2005, blz. 19. (Rubriek 'Ei van Columbus'; samenstellers Jos van den Bergh en Ron Felix.)

[3] Zie www.geocadabra.nl

Literatuur

Enkele andere bronnen voor deze puzzel zijn:

- www.jimloy.com/puzz/dissect.htm

- J. Bouwkamp, *On the Dissection of Rectangles into Squares*, Kon. Ned. Ak. van Wet., 1946, Vol. 49, pp. 1176-1188; 1947, Vol. 50, pp. 1296-1299.

Zie voor andere puzzels in dit genre bijvoorbeeld:

- 'Figuren opknippen en periodieke vlakvullingen', door Tom Verhoeff, in *Pythagoras*, 45e jrg., nr. 1, september 2005.

Over de auteurs

Ton Lecluse (e: lec@hetnieuwelyceum.nl) is docent wiskunde aan Het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Rob van Oord (e: robovanoord@tiscali.nl) is docent wiskunde aan het Coenecoop College te Waddinxveen.

Leon van den Broek (e: leon.vandenbroek@wageningse-methode.nl) is docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen.

WISKUNDE WERKGROEP VAN DE W.V.O.

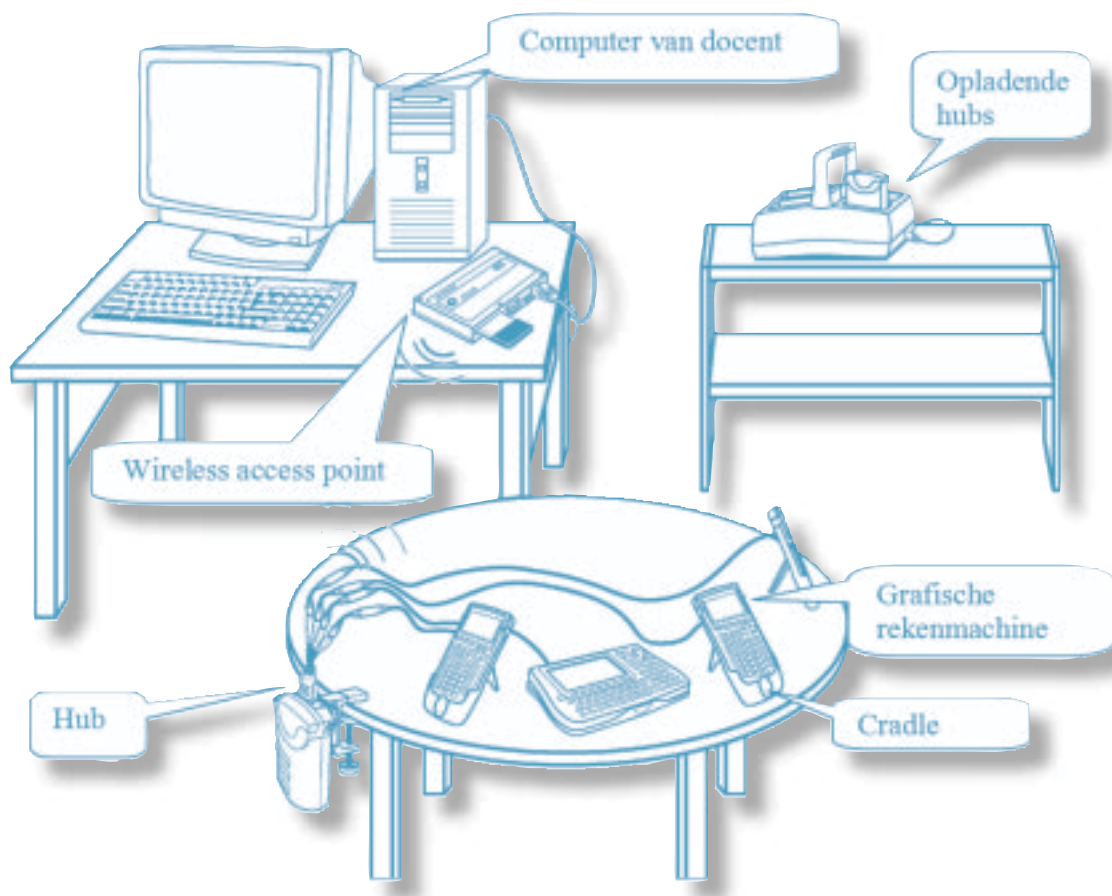
NAJAARSCONFERENTIE 1965.

20—21 november

- Plaats:** Internationale school voor wijsbegeerte, Dodeweg 8, Amersfoort.
Telefoon 03490—15020.
Men slaapt in verwarmde één- (en indien nodig twee-) persoonskamers.
- Thema:** Aanpassing van het huidige wiskundeleerplan en eindexamenreglement voor v.h.m.o.
- Toelichting:** De afgelopen cursus zijn vier regionale commissies van de Wiskunde Werkgroep aan het werk geweest in opdracht van 't bestuur, om na te gaan, hoe nieuwe begrippen ingevoerd en ontwikkeld moeten worden, zonder dat het huidige leerplan wettelijk wordt aangetast. Deze commissies zullen op de conferentie verslag uitbrengen. De deelnemers aan de conferentie gaan over deze verslagen discussiëren in vier groepen, waarna een samenvatting volgt. Er zal getracht worden de deelnemers van te voren een kort verslag van de conclusies van de commissies te doen toekomen.
- Programma:** Zaterdag 20 november:
- 15.— Ontvangst van de deelnemers
 - 15.15 Opening van de conferentie door Prof. dr. H. Freudenthal, voorzitter van de Wiskunde Werkgroep.
Mededelingen van de secretaris-penningmeester
 - 15.30 Verslag van de Commissie Logica door Dr. P. M. van Hiele
 - 16.— Verslag van de Commissie Functiebegrip Onderbouw
 - 16.30 Verslag van de Commissie Functiebegrip Bovenbouw
 - 17.— Verslag van de Commissie Analytische Meetkunde door Dr. W. P. Thijssen
 - 18.— Warme maaltijd
 - 20.— Groepsdiscussies
 - 22.— Sluiting, uitbrengen van voorlopig kort verslag door groepsrapporteurs aan de secretaris, Drs H. C. Vernout
- Zondag 21 november:
- 8.— Ontbijt
 - 11.— Vervolg groepsdiscussies
 - 13.— Sluiting, uitbrengen van eindverslag aan de secretaris
 - 13.30 Broodmaaltijd
 - 14.30 Gelegenheid tot vrije discussie
 - 15.— Samenvatting van de resultaten van de conferentie door Prof. dr F. van der Blij
 - 16.30 Sluiting van de conferentie door de voorzitter
Vertrek van de deelnemers
- Uitwerking:** Zo spoedig mogelijk na de conferentie ontvangen alle deelnemers een verslag van de besprekingen. Met dit verslag als basis zullen de regionale werkgroepen weer enige maanden aan het werk gaan. Er zal dan een eindverslag samengesteld worden, waarover in maart 1966 in een slotbijeenkomst te Utrecht door de deelnemers aan de conferentie gediscussieerd kan worden. Daarna zal het definitieve verslag aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde worden toegezonden.

Aankondiging najaarsconferentie van de Wiskunde Werkgroep van de WVO op zaterdag 20 en zondag 21 november 1965, in *Euclides* 41 (1965-1966), pag. 91-92.

N.B. Er werd begonnen op de zaterdagmiddag, zodat men op de zaterdagochtend nog les kon geven. Op de zondagochtend was er tijd voor kerkgang.

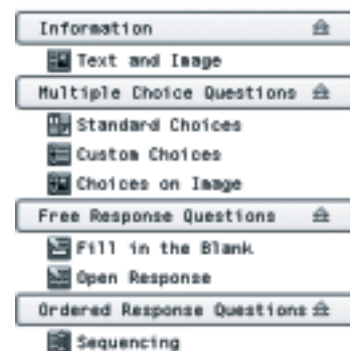


FIGUUR 1 Componenten van het draadloze netwerk in de klas

DRAADLOOS NETWERK IN DE KLAS

Grafische rekenmachines als communicatiemiddel

[Jos Tolboom]



FIGUUR 2 Inhoudstypen in Learning Check

Tweerichtingverkeer

Alle leerlingen in de Tweede fase beschikken over een grafische rekenmachine. De laatste generatie machines zijn al echte handcomputers, met veel meer functionaliteit dan alleen 'rekenen'. Leerlingen gebruiken de machines ook voor het spelen van spelletjes. Daarvoor moeten zij twee machines met elkaar verbinden; een 'peer-to-peer network' maken heet dat in computertermen. Dat is dus één-op-één computing. Texas Instruments heeft een systeem ontwikkeld waardoor de wiskundedocent, voor een belangrijk deel draadloos, kan communiceren met *alle* grafische rekenmachines in de klas: Navigator 1. Dat is dus één (docent)-op-alen (leerlingen) computing. Dit concept lijkt dus op 'broadcasting' (zoals een televisiezender naar alle aangesloten televisiestations), met één verschil: er is tweerichtingverkeer mogelijk. Dit artikel beschrijft de ervaringen van een lessenserie waarin het boek alleen nog als naslagwerk diende. Het basismateriaal (zowel opgaven als uitleg) werd verzonden naar en opgehaald van de grafische rekenmachines van de leerlingen. Leerlingwerk werd vervolgens geanalyseerd door de computer van de docent. Het experiment is opgezet door Jos Tolboom, van de afdeling Bètadidactiek van de Rijksuniversiteit Groningen, uitgevoerd in havo-4 EM, waarin Léon Tolboom docent was.

Hoe was het experiment opgezet?

We hebben het hoofdstuk 'Van normaal naar standaardnormaal' (*Moderne wiskunde 7e editie*, Havo Bovenbouw, Wiskunde A1 deel 2, hoofdstuk S4) omgewerkt voor het werken met Navigator. Dat betekent dat we zo veel mogelijk stof in opgaven hebben gegoten. Alleen als het echt niet anders kon, hebben we een blokje 'uitleg' ingevoegd. We kozen dit hoofdstuk omdat daarin de grafische rekenmachine (GR) sowieso een belangrijke rol speelt. In de experimenteergroep hebben we met het Navigatormateriaal gewerkt. In de controlegroep werd op de traditionele manier (wel met de GR, maar zonder inzet van Navigator) gewerkt. Beide groepen kregen van tevoren twee toetsen: één die de voorkennis op het gebied van statistiek en normale verdeling testte en één die de animo voor het vak wiskunde onderzocht. De lessen zelf werden allemaal door minimaal twee onafhankelijke observanten met dezelfde scorelijst geobserveerd. Na afloop van de lessenserie kregen beide groepen weer twee toetsen: één die de in het hoofdstuk opgedane kennis testte en één die onderzocht hoe de 'nieuwe' houding ten opzichte van het vak wiskunde eruit zag. De eerste drie toetsen zijn afgenomen via de webgebaseerde leeromgeving. In dit geval was dat *Brainbox*, een Blackboard-implementatie voor het voortgezet onderwijs, gehost door de Rijksuniversiteit Groningen. De laatste (kennis)toets is afgenomen via pen en papier, omdat we de controlegroep niet een toets wilden opdringen die 'te techniek-gebaseerd' was. Na afloop van de lessenserie zijn uit de experimenteergroep drie leerlingen geïnterviewd: op voorspraak van de docent een goede, een middelmatige en een zwakke

leerling. Naar aanleiding van de analyse van de post-toets die de 'nieuwe' houding van de klas ten opzichte van het vak wiskunde onderzocht zijn vragen voor dit interview bedacht. Na analyse van de uitkomsten van deze interviews is de docent van de experimenteerklas geïnterviewd.

Op basis van de vergelijkingen van de toestanden voor en na het experiment proberen we uitspraken te doen over:

- Wordt er minimaal even goed wiskunde geleerd via deze werkwijze?

- Beleven leerlingen minimaal evenveel plezier aan deze manier van werken?

Beide klassen hadden redelijk veel ervaring in het werken met *Brainbox* (zie bijvoorbeeld [4]). Omdat het de opzet was zoveel mogelijk 'leren' te laten lopen via het netwerk en de GR's, werd de webgebaseerde omgeving slechts mondjesmaat gebruikt.

Hoe ziet het eruit?

Figuur 1 beeldt af hoe de klas eruit ziet wanneer wordt gewerkt met Navigator 1. Iedere leerling beschikt over een zogenaamd 'cradle' (zadel). Dit zadel is verbonden met een 'hub' (knooppunt). Een hub kan vier cradles (en dus vier GR's) draadloos verbinden met een 'wireless access point' (draadloos toegangspunt). Communicatie tussen hubs en wireless access point vindt plaats via het standaard WiFi protocol (IEEE 801.11b). Wanneer het wireless access point wordt verbonden met de computer van de docent (waarop software voor TI Navigator is geïnstalleerd) kan de computer van de docent dus communiceren met de grafische rekenmachines van de leerlingen. Dat moeten minimaal TI83 Plus machines zijn. Er is, met andere woorden, een 'klaslokaal-netwerk' gerealiseerd. Voor alle duidelijkheid: dit netwerk staat dus los van het bekendste netwerk, het internet. In principe zijn er mogelijkheden om via de computer van de docent een verbinding tussen de grafische rekenmachines van de leerlingen te realiseren en het internet. In deze versie van Navigator heeft men de keus gemaakt dat niet te doen. Bovendien kunnen leerlingen in de huidige opzet niet met elkaar communiceren, maar alleen met de docent. Ook dat is een didactische keuze, wellicht ingegeven door de gemiddelde Amerikaanse klassenpraktijk. **Figuur 1** is wel volledig voor wat betreft het klaslokaal-netwerk, maar niet voor een optimale benutting daarvan. In de volgende paragraaf komen we er op terug waarom het aansluiten van een projector (beamer) op de computer van de docent didactisch essentieel is. Dat betekent dat er ook nog een projectiescherm noodzakelijk is. Het op orde brengen van een normaal wiskundelokaal tot de opstelling van **figuur 1** was geen sinecure. We kozen ervoor als docentcomputer een notebook te nemen, omdat we daarmee sneller in het gewone wiskundelokaal de ICT-infrastructuur van **figuur 1** konden aanleggen. Het inrichten van het lokaal, inclusief het aansluiten van beamer, kostte ons (twee ICT-ervaren docenten) toch telkens een kwartier. Gelukkig werden alle lessen na een pauze gegeven, zodat dit niet tot praktische problemen leidde.

Wat is er nog meer nodig in de voorbereiding?

Het installeren van de Navigator-software op het notebook was niet moeilijk. Wel kostte het enige tijd om de drie belangrijkste zaken die met de software moeten worden gerealiseerd, door te krijgen:

1. Hoe maak je lesmateriaal dat je naar de GR's van de leerlingen kunt sturen, rekening houdend met de mogelijkheden en onmogelijkheden van de software en de GR's?

2. Hoe gaat het verzenden van materiaal naar leerlingen en het ophalen van leerlingwerk? In principe een strikt technische aangelegenheid; de docent moet dit echter wel 'blind' beheersen om het verloop van de les niet in de weg te staan.

3. Hoe analyseer je de resultaten van het leerlingwerk? De software analyseert het werk van de leerlingen statistisch, maar de docent moet die statistische analyse vertalen naar een zinvol, klassikaal onderwijsleergesprek. Ook voor een ervaren docent is die nog een nieuwe vaardigheid. Ad 1.

De software die wordt geleverd bij TI Navigator, kent vele mogelijkheden. Na het bestuderen daarvan hebben we ons beperkt tot het gebruiken van één toepassing voor het maken van materiaal: *Learning Check*. De mogelijkheden van bijvoorbeeld *Studycards*, digitale kaarten met kennisvragen waarbij de leerling zichzelf kan controleren, hebben we niet gebruikt. Belangrijkste reden hiervoor is dat de Navigator-software leerlingwerk dat gemaakt is met *Studycards* niet kan analyseren. Voor talenonderwijs is hiermee wel succesvol geëxperimenteerd. Met *Learning Check* is het mogelijk om stukken instructie en opgaven te maken. Daarvoor is het wel noodzakelijk dat op de GR's het (gratis) programma *Learning Check App* is geïnstalleerd. Het boek dient dan alleen nog als naslagwerk, waarin desgewenst iets kan worden opgezocht. Noodzakelijk is het boek echter niet. Vooral de mogelijkheid om de gemaakte opgaven van feedback te voorzien en na binnenhalen te analyseren is natuurlijk interessant. In [figuur 2](#) zijn de mogelijkheden opgesomd.

Het voert te ver om alle typen inhoud bij langs te lopen; we kijken (in [figuur 3](#)) naar een voorbeeld van een 'Fill in the blank' opgave. Het gaat over een bekende context. Een instelling beschikt over een groot aantal lampen, waarvan de levensduur normaal verdeeld is met zeker gemiddelde en zekere standaardafwijking. Wat is het moment waarop je welke lampen gaat vervangen? Het rechthoekje met daarin het getal 2292.7 is op het scherm van de leerlingen uiteraard leeg. Zij kunnen daarin hun eigen antwoord invoeren.

Het systeem biedt de mogelijkheid om een afbeelding op te nemen. Maar dat was één van de tegenvallers: plaatjes die niet gemaakt zijn voor de TI-83/84 zien er absoluut niet goed genoeg uit. Een omweg is dan: Maak een uitwerking op je eigen GR, importeer hem op je computer, en gebruik hem vervolgens in het *Learning Check* materiaal, dat je verzendt

naar de GR's van de leerlingen. Doordat het plaatje is gemaakt op een GR, ziet het er op een GR ook redelijk uit. Wat onverlet laat dat de resolutie van een TI-83/TI-84 (64×96 pixels) zwaar achterloopt bij de mogelijkheden van deze tijd. Iedere leerling met een moderne mobiele telefoon zal dit beamen (mijn Palm Treo 650 heeft 320×320 pixels op 80% van de oppervlakte van mijn TI84Plus SE). Dit beperkt de mogelijkheden van het systeem aanzienlijk.

In de rechterkant van het venster kun je keuzes maken voor het goede antwoord. Bij typen vragen als deze is het voor de hand liggend om een interval op te geven waarin het antwoord moet zitten wil het goedgekeurd worden. Hier kan de docent dus rekening houden met allerlei marges rondom het exacte, correcte antwoord.

Na dit tabblad is dat voor 'Hints and feedback' het belangrijkste. Op dit gebied is alleen nog maar rudimentaire functionaliteit geïmplementeerd, maar er is al rekening gehouden met uitbreiding hiervan. Op dit moment komt het erop neer dat de docent kan kiezen uit de standaard-feedback (cyclische keuze uit Amerikaanse aanmoedigingen als 'Awesome!' en 'Way to go!') of zelf opgegeven feedback. Het grote probleem is dat er alleen feedback mogelijk is op het goede antwoord en op een willekeurig fout antwoord. Dit zelfs in het geval van meerkeuze-opdrachten, terwijl het programmeertechnisch natuurlijk heel eenvoudig is om op het goede antwoord en de drie meest voorkomende foute per antwoord specifieke feedback te geven.

Dit zijn zaken die in volgende versies van Navigator absoluut verbeterd moeten worden. Leerlingen maalden daar overigens nauwelijks om; zij vonden het al heel wat dat onmiddellijk duidelijk werd of ze het goed of fout hadden gedaan. Via het invoegen van een screendump van de goede uitwerking onder 'Pic' konden zij zichzelf controleren.

Ad 2.

Via de knop 'Send to Class' in *Learning Check* kan dit materiaal naar de leerlingen gezonden worden (zie [figuur 4](#)).

Ad 3.

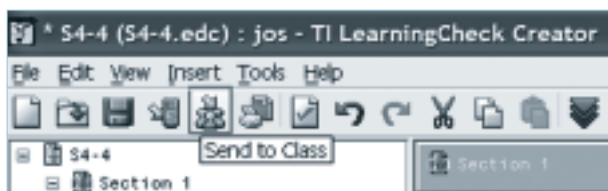
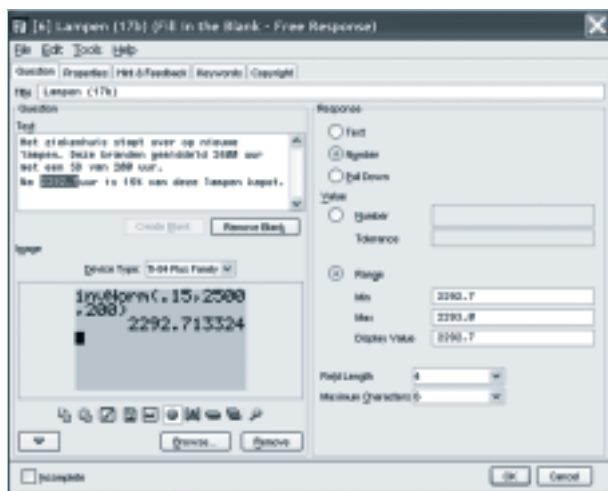
Via de knop 'Collect Answer Files from Classroom Devices' in *Class Analysis* kan leerlingwerk worden verzameld en statistisch worden geanalyseerd (zie [figuur 5](#)).

Via het tabblad 'Class Summary' krijgt men een overzicht over de resultaten van de klas.

Via het tabblad 'Student' is het mogelijk om per student de score te zien met daarbij allerhande statistische gegevens.

De mooiste knop vind ik 'Class Results Slide Show' (zie [figuur 6](#)). Hiermee is met één druk op de knop een diaprojectie te geven van de antwoorden die de klas gaf op de opgaven. Per opgave wordt er een overzichtelijk staafdiagram gemaakt van alle antwoorden door de klas gegeven. De vraag wordt nog eens herhaald, waardoor het houden van een klassikaal onderwijsleergesprek over de opgave

FIGUUR 5 Leerlinewerk verzameld in tabel



NewAnalysisS45.caf - Class Analysis

File Edit View Tools Actions Help

Assignment Title: S4-5 Collect Answer Files From Classroom Devices

Class Summary Student View

Student	1	2	3	4
Maximum Score	1.00	1.00	1.00	1.00
AVI	0.00	0.00	0.00	0.00
BARRY	1.00	1.00	1.00	1.00

NewAnalysisS45.caf - Class Analysis

File Edit View Tools Actions Help

Assignment Title: S4-5 Collect Answer Files From Classroom Devices

Class Summary Student View

Student: AVI

Print Student Report

Item ID	Student Response	Correct Response	Student Answer	Correct Answer
1		5,000,000		5,000,000
2		0		False



FIGUUR 6 Van tabel naar diaprojectie

opeens heel krachtig wordt. Het spannende voor de klas is dat iedereen zijn of haar eigen antwoord in principe in het histogram weet te staan. Indien gewenst kan de docent het antwoord op een specifieke opdracht van een specifieke leerling oproepen en hem of haar om toelichting vragen. Natuurlijk moet men hier in het geval van onzekere leerlingen voorzichtig mee om gaan. Toen de docent in de eerste les van de serie aan de klas vertelde dat hij de huiswerkopgaven op deze manier terug zou halen naar zijn computer, boog de leerling voor me naar zijn buurman. Hij was een duidelijke havo-4-leerling. Zeker niet dom, maar niet van plan uit de startblokken te schieten. Dat deed hij nu wel, met een bliksemsnelle analyse: 'Shit, dan kan hij dus meteen zien of we het gemaakt hebben of niet.' In figuur 7 staan twee dia's uit de analyse afgebeeld. De linker dia laat de tekst van de opgave nog eens zien; op de plek van het invoerveld staat nu een streep met een vraagteken erboven. De rechter dia bevat een staafdiagram met twee typen antwoorden. Het correcte antwoord is door 10 (9 + 1) leerlingen gegeven. N/R betekent 'geen antwoord' of 'antwoord buiten de ingestelde range van correcte antwoorden'. Het is eventueel mogelijk om de antwoorden 'terug te personaliseren' naar individuele leerlingen. Uit voorzichtigheid heeft de docent daar slechts een enkele keer gebruik van gemaakt. Het analysehistogram is natuurlijk een krachtiger middel wanneer er verschillende antwoorden door leerlingen zijn gegeven. Dat is meestal het geval bij meerkeuze-opdrachten. Overigens speelt bij het ontwerpen van meerkeuze-opdrachten natuurlijk de ervaring van de docent met 'klassieke leerlingfouten' de belangrijkste rol. Het effect van deze klassikale bespreking was groter dan de docent en ik hadden gedacht. Tijdens de bespreking van de opgaven was het muisstil in de klas. Af en toe werd er een individuele toelichting gevraagd. De leerlingen van havo-4 waren bij de les. In Learning Check kun je instellen of leerlingen op hun GR's de opgaven één keer mogen doen of zo vaak als zij willen. Ik heb voor één keer gekozen. Dat schroeft de druk op de leerling op en maakte de klassikale bespreking van de opgaven spannender, doordat leerlingen nog meer het gevoel hadden 'met de billen bloot' te moeten.

Wat vonden leerlingen en docent van het experiment?

Er waren tijdens de lessenserie zeer veel technische problemen die we hier niet zullen bespreken. Bijna 30% van de contacttijd ging hieraan op. Alle leerlingen antwoordden in de 'na-enquête' dat zij dit als hinderlijk hebben ervaren. De drie na afloop geïnterviewde leerlingen gaven dit nogmaals aan. Maar zij merken daarbij ook alle drie op, dat zij een goed werkend Navigator-systeem als een verrijking zien. Feedback specifiek op hun antwoord zouden zij op prijs stellen. Zij gaven allen aan dat zij het scherm van de TI83Plus ontoreikend vonden. Opvallend was dat zij aangaven

dat zij Navigator niet zagen als een vervanger van de docent. 'De docent moet er wel bij blijven', meldden de leerlingen, overeenkomstig de opzet van het systeem. De resultaten van de experimenteergroep waren niet significant toegenomen ten opzichte van de controlegroep. Dit zou te wijten kunnen zijn aan de contacttijd die verloren is gegaan aan technische problemen, of aan het feit dat de experimenteergroep de eindtoets op papier moest maken, terwijl het experiment bijna zuiver digitaal was. De experimenteergroep was wel positiever gaan denken over het vak wiskunde door het inzetten van techniek als die van Navigator. Een leerling merkte op: 'Ik denk dat jongeren wel gevoelig zijn voor technische snufjes.'

De docent was, ondanks de vele bochten waarin hij zich voor de klas door technisch geïmproviseer had moeten wringen, ook enthousiast over de mogelijkheden. Hij benadrukte dat een goed werkend Navigator-systeem voordelen bood boven werken met antwoordenboekjes, bijvoorbeeld doordat leerlingen pas een antwoord gecontroleerd krijgen wanneer zij iets hebben ingevoerd. Dat is inderdaad een voordeel, dat echter verdwijnt doordat ik ervoor gekozen heb in het materiaal achter de knop 'PIC' een schermafdruck op te nemen van de correcte uitwerking op mijn GR. Dat fungeert dan als 'antwoordmodel' voor de leerling. De voordelen 'sneller en je kunt niet achteraf verbeteren' (genoemd door een leerling) blijven geldig. De docent benadrukt dat er logistiek eenvoudiger zal moeten worden gewerkt, zodat Navigator ook echt in iedere les kan worden gebruikt en niet alleen in lessen die gegeven worden na een pauze. Daarnaast vond hij het belangrijk dat er iets gedaan zou worden aan het ongemakkelijke schakelen tussen een GR in de Navigator-modus en in de 'gewone' GR-modus. Dat komt natuurlijk vaak voor bij het maken van opdrachten: je hebt de rekenmachine nodig om iets uit te rekenen. Een personal computer is tegenwoordig 'multitasking': meerdere toepassingen kunnen –schijnbaar– tegelijkertijd draaien. Zij nestelen zich dan op de taakbalk onder in het scherm. Met de muis zijn de toepassingen met één klik weer actief te maken. Op een TI-8x is dat omslachtiger. Bovendien wil je graag een kopieer/plak-functie, zodat je uitkomsten van berekeningen op je rekenmachine niet hoeft op te schrijven om ze in de Navigator-modus te kunnen gebruiken.

Conclusies

De antwoorden op de onderzoeksvragen:

- Wordt er minimaal even goed wiskunde geleerd via deze werkwijze?

Op basis van dit experiment constateren we een lichte achteruitgang vergeleken bij de 'traditionele' werkwijze (zonder Navigator). We hebben sterk het vermoeden dat dit te maken heeft met de 25% contacttijdverlies door technische problemen.

- Beleven leerlingen minimaal evenveel plezier aan deze manier van werken?

Leerlingen werken met meer plezier aan wiskunde door deze manier van werken. Het is altijd de vraag

of dit effect duurzaam is, of door pure nieuwigheid en bijbehorende aandacht wordt veroorzaakt; het zogenaamde 'Hawthorne-effect' (zie [3]). Langeretermijn-onderzoek moet dit uitwijzen.

Het is raadzaam een 'Navigator-karretje' in te richten, waarmee je in een kleine vijf minuten een lokaal in orde kunt maken voor les met een 'klaslokaal-netwerk'. Voorwaarde is wel dat de leerlingen minimaal over TI-83Plus machines beschikken. Bijzonder en verrassend vond ik om te merken dat de werkelijke kracht van het Navigator-systeem niet gericht is op het verbeteren van het zelfstandig werken (zoals veel ICT-producten), maar juist om in de klas de 'ouderwetse' docent-leerling-interactie te faciliteren. Opnieuw is me opgevallen dat de display van de TI-8x eigenlijk in 15 jaar tijd niet verbeterd is. Eigenlijk vind ik dat een technologisch hoogstaand bedrijf als Texas Instruments onwaardig. Over een weinig sexy uitstraling kan ik me wel heen zetten, maar de lage resolutie beperkt de toepassing in mijn ogen veel te veel ten opzichte van de mogelijkheden die de rest van de machine heeft.

In deze versie van Navigator zitten nog enkele onvolkomenheden. De meeste zijn van technische, sommige zijn van didactische aard. De belangrijkste in mijn ogen zijn:

- Mogelijkheid om specifieke feedback in te bouwen op een specifiek antwoord, en niet zoals nu standaard-feedback voor het goede antwoord en standaard-feedback op ieder fout antwoord.
- Een hogere resolutie van het scherm zou het bijvoorbeeld mogelijk maken grafische afbeeldingen met elkaar te vergelijken in één opgave.

Wanneer de onvolkomenheden er worden uitgehaald, zal Navigator een belangrijke nieuwe stap in de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs betekenen. Inmiddels zijn belangrijke technische verbeteringen doorgevoerd in de nieuwe versie (zie website van Texas Instruments^[2]) en wordt docententraining opgezet. Het lijkt er dus op dat deze stap snel gezet gaat worden.

Noten

[1] Zie <http://brainbox.usor.nl>

[2] Zie <http://education.ti.com/nederland/producten/accessoires/navigator.html>

Referenties

[3] E. Mayo: *The human problems of an industrial civilization*. New York: MacMillan (1933).

[4] J. Tolboom, L. Tolboom: *Het boek in de hoek - hellingfuncties*. In: *De Nieuwe Wiskrant* (oktober 2003).

Over de auteur

Jos Tolboom (e-mailadres: j.l.j.tolboom@fun.rug.nl) is docent Wiskunde en BètaDidactiek aan de Rijksuniversiteit Groningen en ICT-redacteur van *Euclides*.

DE WISKUNDEDOCENT ALS GOOCHELAAR

Magisch vierkant

[Job van de Groep]



Inleiding

Goochelaars gebruiken voor een aantal van hun 'mentale' acts (gedachtelezen bijvoorbeeld) soms rekenkundige trucjes. Door de wijze van presentatie - en dat is bij goochelen het belangrijkste! - kunnen die op zich vaak eenvoudige oefjes een magische uitstraling krijgen. Ze roepen daardoor nieuwsgierigheid en verwondering op.

De klassensituatie is een uitstekend decor voor een dergelijk mysterieus gedoe - het publiek is al aanwezig! Er zijn immers genoeg momenten, waarop je als docent even iets anders, iets bijzonders wilt doen. Bijvoorbeeld om de aandacht van de leerlingen (weer) te vangen of gewoon om de laatste les voor de vakantie met iets leuks te vullen.

Voor mijn workshop *Gegoochel met getallen* tijdens de Nationale Wiskunde Dagen 1999 stelde ik destijds een boekje samen met goocheltrucs. In de vorige jaargang van *Euclides*^[1] verscheen hieruit al het een en ander, en ook in deze jaargang wil ik u enkele trucs presenteren. Let wel: deze goocheltrucs worden exclusief aan wiskundeleraars ter hand gesteld onder de uitdrukkelijke voorwaarde van geheimhouding! Abracadabra...

Advies

Het direct na de voorstelling zomaar verklappen van de truc, het 'geheim', moet ten strengste ontraden worden: de opgeroepen schijn dat men 'wonderen' kan verrichten, gaat dan onmiddellijk verloren... Op een later tijdstip, maar alleen als leerlingen daar zelf mee komen, kan eventueel worden ingegaan op de gehanteerde wiskundige principes, bijvoorbeeld in de vorm van een onderzoeksopdrachtje.

Deze keer: de truc van het magische vierkant

Een toeschouwer kiest een willekeurig getal G tussen bijvoorbeeld 25 en 75. De goochelaar schrijft onmiddellijk een magisch vierkant op waarvan het *kengetal* (som diagonalen, horizontaal, verticaal, enz.) gelijk is aan dat gekozen getal G . Merk op: Ook de vierkanten met vier getallen in de hoeken en verticaal in het midden geven

steeds het getal G . Bovendien is de som van de vier hoekgetallen gelijk aan het betreffende getal G . Tenslotte zijn het tweede en derde getal in de bovenste en onderste rij (of linker en rechter kolom) samen ook gelijk aan het kengetal.

Het geheim

Het gaat om het volgende vaste magische vierkant:

8	11	B	1
A	2	7	12
3	D	9	6
10	5	4	C

met

$$A = G - 21$$

$$B = G - 20$$

$$C = G - 19$$

$$D = G - 18$$

Transfer naar de les

Waardoor komt het zo mooi uit?

Kan zo'n vierkant ook op een andere manier worden geconstrueerd?

Opmerking. Het magische vierkant is niet volledig 'symmetrisch': de middelste linker en rechter vierkanten met vier getallen geven niet het kengetal. Wat het ene tekort komt, heeft het andere vierkant teveel.

Is het mogelijk het vierkant wél totaal 'magisch' te maken? Wat moet er dan veranderd worden?

Noot

[1] Job van de Groep: *De wiskundeleraar als goochelaar*. In: *Euclides* 80-4 (januari 2005), 80-7 (mei 2005) en 80-8 (juni 2005).

Over de auteur

Job van de Groep (e-mailadres: jvdgroep@wxs.nl) is naast wiskundeleraar en schooldecaan vwo aan het Oosterlicht College te Nieuwegein ook amateurgoochelaar.

HBO-WISKUNDE IN BEDRIJF

[Hans Daale]



FOTO 1 Klaas-Jan Wieringa

Bedrijfswiskunde, wat is dat voor studie?

Bij de NHL wordt bedrijfswiskunde in de kern gezien als 'Ondersteuning van beslissingen met behulp van wiskundige technieken met gebruik van hulpmiddelen uit de informatietechnologie.' Het profiel van de studenten in Leeuwarden wordt in het verlengde daarvan als volgt omschreven: 'Studenten Bedrijfswiskunde (& Informatica) zijn in staat om kwantitatieve modellen te ontwikkelen ter ondersteuning van beslissingen, bijvoorbeeld op het gebied van logistiek, financiële dienstverlening, kwaliteitsbeheersing in de industrie en overheidsbeleid. Ze combineren kennis van wiskundige methoden (zoals operations research, prognosetechnieken, simulatietechnieken, statistiek en actuariële wiskunde), met deskundigheid in het gebruik van ICT (onder meer Delphi/Pascal, Access, Excel).'

Degenen die meer willen weten van de opleiding Bedrijfswiskunde, kunnen natuurlijk aan de slag met Google. Bij de NHL is er op de website www.nhl.nl/bedrijfswiskunde ook meer informatie over de studie te vinden.

Inleiding

Naast opleidingen als Bedrijfseconomie en Bedrijfswiskunde kent ook Bedrijfswiskunde z'n specifieke plaats binnen het hoger beroepsonderwijs. Niet zo omvangrijk en bekend als die andere opleidingen, maar het vak van 'wiskundige in een bedrijfsmatige omgeving' heeft duidelijk recht van bestaan.

In een tweetal artikelen in deze jaargang willen we aandacht besteden aan hbo-Bedrijfswiskunde, eerst aan de opzet ervan en vervolgens aan de studenten (wie zijn dat eigenlijk?), de bedrijven die afgestudeerden in dienst nemen (waarom nemen ze juist die personen?) en de doorstroom naar de wetenschappelijke variant binnen de master (sluit alles goed aan?). In deze aflevering wordt ingegaan op de inbedding van de opleiding binnen het hbo, mede gebaseerd op een interview met Klaas-Jan Wieringa, de drijvende kracht achter de studentenpopulatie in Leeuwarden.

Bedrijfswiskunde

Als je op zoek gaat naar de opleiding Bedrijfswiskunde binnen het hoger beroepsonderwijs, dan moet je er wel even de gedachten bijhouden. Google levert zo'n 28.000 hits op na het invoeren van het begrip 'bedrijfswiskunde' en daarbij buitelen de aanbieders ervan in allerlei soorten en maten door elkaar heen over het scherm. Bij nader inzoomen op de informatie wordt duidelijk dat deze hbo-opleiding eigenlijk nooit zelfstandig wordt aangeboden, maar vooral in combinatie met andere studies en onderwijsgebieden. Bovendien verschilt ook nog eens de inbedding van de opleiding van school tot school en dan is het dus zoeken geblazen. Je zult maar leerling zijn en iets zakelijks met wiskunde willen gaan doen: kom je er dan wel? Daarom is het goed om eens nader te bekijken wat er allemaal achter deze opleiding schuilgaat. Met het oog daarop vonden we Klaas-Jan Wieringa bereid ons in te wijden in de geheimen van de bedrijfswiskunde. Hij is kerndocent bij deze hbo-opleiding binnen de Noordelijke Hogeschool



FOTO 2

Leeuwarden en is mede daarom aanspreekbaar op alles wat daarmee te maken heeft. Zodoende kon hij mij –en dus nu ook u als lezer– een en ander uit de doeken doen op een zonnige middag in het mooie Friesland. Voor mij een beetje een thuiskomst, omdat ikzelf zo'n acht jaar bij een ander onderdeel van de NHL heb mogen doorbrengen.

Advertentie

Misschien is het niet veel lezers opgevallen, maar in een van de laatste nummers van Euclides van de vorige jaargang stond een paginagrote advertentie van de vijf aanbieders van 'bedrijfswiskunde': Fontys Hogescholen Tilburg, Hogeschool InHolland Diemen, Hogeschool van Amsterdam, Technische Hogeschool Rijswijk en de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden. Zeker te weinig aanmeldingen? 'Nee, dat was een reden maar niet de belangrijkste. We vonden dat we als aanbieders wel eens wat meer naar buiten konden treden. Iets doen aan ons imago dus', geeft Klaas-Jan aan.

Toch komen er ondanks de relatieve onbekendheid elk jaar landelijk zo'n 60 tot 80 eerstejaars bij de hogescholen aankloppen voor deze studie. Dit studiejaar hebben zelfs 95 leerlingen de weg naar de bedrijfswiskunde gevonden.

Aanbieders

De opleiding Bedrijfswiskunde kun je dus binnen het hoger beroepsonderwijs bij vijf hogescholen doen. Maar dan wel bij elke school op een eigen wijze en in een setting die is toegesneden op specifieke mogelijkheden. 'Klopt, want dat heb je nu eenmaal met zo'n relatief beperkte instroom', meldt Klaas-Jan. 'Zo moeten wij het binnen onze hogeschool hebben

van een grote overlap met de lerarenopleiding voor het vak wiskunde.' De instroomcijfers voor de NHL laten zien dat er 19 eerstejaars studenten zijn, waarvan er twaalf opteren voor het leraarschap en zeven specifiek zijn gekomen voor de Bedrijfswiskunde. 'Valt eigenlijk wat tegen voor onze school, tegen de trend in, dus dat is jammer', moet Klaas-Jan toegeven, 'maar vorig jaar hadden we samen zo'n 28 studenten en dat vonden we toen behoorlijk veel. Eerst maar weer eens kijken hoeveel we er volgend jaar kunnen binnenhalen, voordat we overhaaste conclusies gaan trekken.'

Positionering

Lees even mee, zodat u kunt zien in welke constellatie Klaas-Jan zijn opleiding in de lucht moet proberen te houden (klinkt negatief, maar is positief bedoeld). Eén van de NHL-instituten is Educatie en Communicatie, met een afdeling Exacte Vakken. Daarin vormt Wiskunde één van de twee opleidingsstromen, gevolgd door een verdere uitsplitsing in Leraar Wiskunde Tweedegraads en –daar komt hij aan– Bedrijfswiskunde & Informatica. Overigens wordt 'B&I' in het spraakgebruik en in de PR gewoon met Bedrijfswiskunde aangeduid, wat de major ervan is en daarmee het kerndeel van de studie. Maar die samenvoeging met Informatica is toch wel opmerkelijk.

Klaas-Jan: 'Ja, maar daardoor kunnen we ons in deze markt behoorlijk onderscheiden en heeft een student een zekere meerwaarde voor de arbeidsmarkt. Maar, mogelijk is dat extra verrassend, we zijn dan officieel ook nog eens een technische opleiding, dus men krijgt als afgestudeerde gewoon de ing-titel, naast de graad van Bachelor of Engineering.'

Doelgroep

Is de studie nu iets voor een speciale groep leerlingen? Als je ziet dat men al moeite heeft om leerlingen naar de (echte) technische opleidingen te krijgen, moet je dan niet van alles doen om ze naar zoiets als 'bedrijfswiskunde' te lokken? Ook het niveau en de aard van de wiskunde op het voortgezet onderwijs zijn aan veranderingen onderhevig, of, anders gezegd: de rekenvaardigheden veranderen. Is wiskunde als studiegebied, ook nog binnen een technische omgeving, nog wel over het voetlicht te tillen bij de gemiddelde havist dan wel vwo'er, waarbij de laatste dus niet voor het wo maar voor het hbo moet willen kiezen? Klaas-Jan geeft aan dat hij die trends ook ziet, maar daarin zit 'm juist de uitdaging, door een aantal leerlingen zover te krijgen dat voor de 'toegepaste' wiskunde wordt gekozen: 'We proberen al in een vroeg stadium leerlingen van het havo en vwo te wijzen op onze studie. Zo bieden we bij ons in Friesland alle leerlingen van havo-3 en vwo-4 een workshop aan tijdens onze 'wegwijsdag', om ze te laten zien wat je allemaal met wiskunde kunt doen in echte situaties, dus in de praktijk. Wat wij merken is dat zo'n aanpak wel degelijk aanslaat en dat men enthousiast reageert op iets wat in eerste instantie maar erg saai lijkt.' Maar het blijft lastig, zoals te zien valt aan het aantal studenten. Dat is niet te merken aan Klaas-Jan: zijn inzet lijkt me garant te staan voor een goed en ook eerlijk verhaal. En dat zal zeker afstralen op het opleidingsteam. Voor de volgende aflevering maar even navragen...

Statistiek als meerwaarde

Als je een studiegids (zoals van de NHL) openslaat, springen de opties en varianten je van alle kanten tegemoet. Zo hanteren de hogescholen maar liefst acht aandachtsgebieden, zoals actuariële wiskunde, logistiek en planning, risk management en cryptologie. Klaas-Jan wijst op een bijzonder accent binnen zijn opleiding Bedrijfswiskunde: 'Een belangrijk aandachtsgebied binnen onze studie is de statistische analyse. Het is zelfs zo dat we in overleg met de landelijke vereniging voor statistisch analisten het programma zodanig hebben ingericht dat onze studenten tijdens de studie het zeer gewaardeerde diploma Statistisch Analist A krijgen en daarmee dus de erkenning van die vereniging verwerven.'

Hoewel een hbo-opleiding op zich natuurlijk al een landelijke waarde en een duidelijk civiel effect heeft, blijkt dus dat de arbeidsmarkt erg sterk hecht aan een gelijktijdige verkrijging van zo'n diploma. 'Het bedrijfsleven vraagt nu eenmaal om dit soort bewijzen voor het hebben van een zekere toegepaste kennis van zaken', geeft Klaas-Jan toe, 'en daar spelen wij op deze manier op in.'

Visitatie en aanbevelingen

De opleiding bedrijfswiskunde voorziet in een zekere behoefte: je kunt er allerlei kanten mee op

en het afnemende werkveld is tevreden over z'n nieuwe werknemers. Dus gewoon aan de weg blijven timmeren? 'Zonder meer, met alle inzet van docenten en onze studenten die ook weer ambassadeurs zijn naar onze havo- en vwo-scholen in de buurt. We leveren in ieder geval kwaliteit genoeg, dus daarop zijn we altijd af te rekenen.' Klaas-Jan wijst in dit kader met ingetogen maar gepaste trots op het visitatierapport dat begin 2004 uitkwam. Een zware commissie onder voorzitterschap van Jan van de Craats heeft alle opleidingen bedrijfswiskunde onder de loep genomen en kwam met een duidelijke waardering voor de inspanningen die de opleidingen leveren aan 'de hbo-studenten in de bedrijfswiskunde die min of meer toevallig tegen de opleiding zijn aangelopen' – om een van de binnenkomers van de commissie te citeren. Natuurlijk is er kritiek, vooral voortvloeiende uit de kleinschaligheid en de beperkte omvang van het docententeam dat alles voor elkaar dient te boksen, en dus is er ook in Leeuwarden veel werk aan de winkel. Maar ook pleit de commissie voor een zelfstandige positie, nu en op termijn: 'Waarborg als hogescholen dat ook bij eventuele reorganisaties de kwaliteit en het eigen karakter van de opleiding behouden blijven.' Klaas-Jan: 'Dat rapport heeft ons zeker een steun in de rug opgeleverd, omdat helder werd gemaakt wat de plus- en ook minpunten zijn.'

Volgen van studenten

Gelet op de specifieke situatie van de opleiding bedrijfswiskunde, een beperkte groep met toch een geheel eigen type studenten, een bijpassende (regionale) arbeidsmarkt en een op maat gesneden doorstroomtraject naar vervolgstudies bij de hogeschool zelf en mogelijk op termijn ook naar diverse universitaire masters, komen we tot de conclusie dat het best een aardige gedachte is om een paar studenten dit studiejaar in een specifieke situatie te gaan volgen, zoals de stage of het afstudeerproject.

Enige tijd na ons gesprek mailt Klaas-Jan dat hij het plan in de groep heeft gegooid, tijdens een periodieke vergadering van zijn interne overlegplatform. De studenten stonden niet massaal te trappelen van ongeduld (want men kijkt ook zeker daarbij berekenend de kat uit de boom), maar een paar studenten willen best meedoen. Kijk, zo kunnen we uit de eerste hand ons een beeld gaan vormen van hetgeen studenten bij Bedrijfswiskunde beweegt. En van wat nu juist deze studie zo aantrekkelijk maakt voor leerlingen en andere doelgroepen – als zodanig passend bij de onderzoeksaanbeveling van Jan van de Craats en zijn visitatiecommissie om goed met 'de omgeving' te communiceren.

Over de auteur

Hans Daale (e-mailadres: h.h.daale@hva.nl) is lid van de redactie van Euclides en is o.a. werkzaam als projectmanager bij de Hogeschool van Amsterdam.

P.J. PALMER: DE GOEROE VAN HET NIEUWE LEREN?

Over 'The Courage to Teach', door Parker J. Palmer
[Simon van der Salm]



Een fascinerend boek dat uitnodigt tot tegenspraak

'The Courage to Teach' is de Engelse titel van het boek dat de meeste Nederlandse lezers zullen kennen onder de sympathieke naam 'Leraar met Hart en Ziel'. Het boek werd al gepubliceerd in 1998, maar onlangs verscheen de bewerkte Nederlandstalige editie. Gezien de vaak zeer kritische recensies en lezerscommentaren is het boek van Palmer in ieder geval een boek dat velen niet koud laat.

De schrijver vindt dat het traditionele onderwijs bijna uitsluitend een beroep doet op intellectuele kwaliteiten van docenten en leerlingen. Hij pleit ervoor meer emotie en subjectiviteit toe te laten in de school. Critici van Palmer vinden echter dat er nu al te weinig beroep gedaan wordt op het intellect van leerlingen en vinden Palmers ideeën meer horen in de populaire emotiecultuur dan in de school. Palmer zegt echter niet dat intellectuele standaarden moeten worden losgelaten, maar dat er vele manieren zijn waarop leerlingen tot kennis, begrip en inzicht kunnen komen. De subjectiviteit van leerling en docent mag in dat proces een veel grotere rol spelen dan momenteel in het onderwijs gebruikelijk is. In die zin sluit het gedachtegoed van Palmer aan bij het Nieuwe Leren, maar de boodschap van Palmer is gericht aan elke docent.

Het boek wordt geprezen door met name Amerikaanse docenten, terwijl er, afgaande op de reacties, een hele groep leraren in het Nederlandse onderwijs is, die niets moet hebben van het gedachtegoed van Palmer. Zij gebruiken de kennelijke 'verderfelijkheid' van de ideeën van

Palmer om van leer te trekken tegen het Nieuwe Leren, het commerciële opportunisme van het APS, de managementcultuur in scholen en andere, al dan niet vermeende, misstanden in het onderwijs.

Palmer merkt op dat passie en spiritualiteit verloren dreigen te gaan in de dagelijkse praktijk van het onderwijs. Als leerling en docent een tijdje meedraaien in de onderwijsmolen, vergeten ze dat passie het fundament vormt van zinvol leren en onderwijzen. Palmer probeert een weg terug te vinden naar die basis. Welke docent is ten slotte niet 'met Hart en Ziel' in het onderwijs begonnen? In zeven hoofdstukken zet Palmer zijn ideeën over zinvol en betekenisvol onderwijs uiteen.

Voorbij didactische techniek

De ervaren docent ziet de grote moeilijkheden van stagiaires en beginnende leraren in de klas. Ze klampen zich, zeer begrijpelijk, vast aan de onderwijstechnieken die ze op de lerarenopleidingen hebben geleerd. Die technieken geven weliswaar houvast en reduceren onzekerheid, maar werken helaas slechts in beperkte mate en bovendien bij de een wel en bij de ander niet. Je weet dat je niet veel kunt doen voor de beginners, behalve een luisterend oor bieden en een stevige schouder om op uit te huilen. Het bieden van goedbedoeld advies werkt meestal averechts. De beginnende docent zal zijn eigen, kronkelige weg moeten vinden, didactische techniek aan de kant moeten zetten als die voor hem of haar niet werkt en andere techniek moeten behouden. Daarnaast moet de beginnende docent de bereidheid hebben tot het ontwikkelen van een

eigen aanpak, die na lang experimenteren in de klas blijkt te werken. Hoofdstuk 1 gaat precies daarover: je begint pas een goede onderwijzer te worden, als je onderwijstechniek achter je kunt laten, en bijgevolg je eigen persoonlijkheid kunt laten resoneren met je functioneren als docent.

De les: een angstige bezigheid

Angst in de klas, bij docenten en leerlingen, is het verrassende thema van het tweede hoofdstuk. Er wordt in het algemeen weinig geschreven over de angst van de leraar voor de klas. Elke docent, beginnend of ervaren, kent aan het begin van het schooljaar dat onaangename gevoel in de buik als hij of zij les moet gaan geven aan een nieuwe klas, waarvan hij de kinderen niet kent en nog niet eerder als klas gezien heeft. Ontkenning door docenten is vermoedelijk de meest voorkomende houding tegenover dat onaangename, angstige gevoel. Wel erkennen we de angsten van leerlingen, de angst om te falen, de angsten wegens de al of niet vermeende gebreken van het lichaam, de angst om niet populair gevonden te worden door medeleerlingen, de angst voor de onbekende toekomst en de angst voor de overweldigende hoeveelheid keuzes die het leven in een complexe maatschappij met zich meebrengt.

Volgens Palmer is het kunnen dragen van gezonde angst noodzakelijk om een goede leraar, maar ook leerling, te kunnen zijn: 'Onderwijzen is risico nemen' en 'De angst dat ik slecht onderwijs, is geen teken van mislukking, maar een bewijs dat ik geef om mijn vak.'

Palmer duidt daarnaast op andere angst in het onderwijs: verlamme, pathologische angst, die zowel leraar als leerling parten speelt. De angst voor de proefwerk- en examencijfers, de angst voor maatregelen van de onpersoonlijke bureaucratie en het management, de macht van de buitenwereld, die zich manifesteert in ouders en inspectie. Door die verlamme angst zien leraar en leerling elkaar niet echt, daardoor komt er geen waardevolle 'verbinding' tot stand tussen docent en leerling, daardoor mislukt, volgens Palmer, het echte, ware onderwijzen maar al te vaak.

Een belangrijke bron van angst is het *objectivisme*, de dwang om in het onderwijsproces op zoek te gaan naar de alles overheersende, 'objectieve Waarheid', waardoor er een pijnlijke scheiding ontstaat tussen lerende en hetgeen geleerd moet worden. Onderwijs is in het bijzonder cultuuroverdracht, wat geleerd moet worden is per definitie niet iets wat kinderen van zichzelf bezitten. Als de lesstof als iets dwangmatig ervaren wordt door leraar en/of leerling, dan vraagt men in feite of het wel tot de cultuur behoort die moet worden overgedragen. Die dwang is er mede de oorzaak van dat ware 'connectedness' meer uitzondering dan regel is in de dagelijkse praktijk in onze klassen.

Palmer lijkt, bij eerste lezing van zijn boek, sowieso

niet veel op te hebben met 'objectieve' kennis, begrip en inzicht, terwijl verreweg de meeste docenten het overdragen daarvan nu juist de rechtvaardiging van hun bestaan in de klas vinden, zo blijkt uit diverse reacties van leraren in kranten en op het internet. Daarom heeft men in de commentaren op Palmer en passant kritiek op Het Nieuwe Leren, dat wel iets ziet in het gedachtegoed van Palmer en, in de ogen van de critici, ook niet veel zou zien in het overdragen van objectieve kennis.

Leraar in een omgeving vol paradoxen

Het derde hoofdstuk gaat over bijzondere paradoxen in het onderwijs. Wiskundigen griezelen van paradoxen en tegelijkertijd kunnen ze er van smullen, vooral zij die affiniteit met filosofie hebben. Tenslotte heeft menig wiskundige zich ooit het hoofd gebroken over de Paradox van Russell, en ik vermoed dat juist de schoonheid van deze paradox veel aantrekkingskracht uitoefent op wiskundigen.

Een aardige paradox volgens Palmer is het (topologische) theorema: 'De intellectuele ruimte in de klas moet zowel open als begrensd zijn.' (In het Engels: '*The space should be bounded and open*', p. 74.) Het onderwerp dat op een bepaald moment bestudeerd moet worden ligt vast, vaak ook de vragen die moeten worden beantwoord, de problemen die moeten worden geanalyseerd en opgelost. De eindtermen voor een toets bijvoorbeeld begrenzen de gespreksstof die in de intellectuele ruimte aan de orde mag komen. De leerling mag niet (zomaar) een ander onderwerp kiezen. In die betekenis is de intellectuele ruimte in de klas begrensd. Maar de leerling moet volgens Palmer zo veel mogelijk vrij gelaten worden in het kiezen van zijn eigen weg bij het beantwoorden van vragen en het oplossen van problemen. Juist die vrijheid maakt creativiteit mogelijk die leidt tot verrassende ontdekkingen.

We zien hier een belangrijke kernnotie van de didactische ontwikkelingen in het hedendaagse onderwijs. Docenten zien de juistheid van Palmers stelling wel in. Daar zit ook niet het grote verschil tussen traditioneel onderricht en het Nieuwe Leren. Er is wel veel discussie mogelijk over hoe ruim de grenzen van het intellectuele kader mogen zijn. Binnen bepaalde vormen van het Nieuwe Leren wordt het kader wel erg ruim getrokken (*Iederwijs*), terwijl er ook experimenten gaande zijn waar het kader gezondere afmetingen heeft gekregen (*Quest*, bij het Adriaan Roland Holst College in Hilversum). Palmer maakt echter duidelijk dat ruimte zonder grenzen geen ruimte is, maar een chaotische leegte.

Paradoxaal taalgebruik

Het fraaie, soms mystieke, taalspel van Palmer, doet denken aan het werk van de Frans-Joodse filosoof Levinas. Aan de oppervlakte lijkt een bepaalde zin interne tegenspraak te vertonen, maar dieper vinden we toch eenduidige waarheid, zoals bijvoorbeeld in:

'My inward and invisible sense of identity becomes known, even to me, only as it manifests itself in encounters with external and visible "otherness".'
(Blz. 63.)

'Alstublieft langzaam lezen', had de uitgever als waarschuwing op de achterflap van het boek kunnen vermelden ten behoeve van de haastige 'rationele' westerse lezer.

Waarheid als constructie

De rationele lezer die de eerste drie hoofdstukken aandachtig heeft doorgelezen, krijgt het in de volgende drie hoofdstukken aanzienlijk zwaarder. Bij alles wat Palmer schrijft, lijkt zijn religieuze achtergrond als Quaker mee te trillen. Hij vertaalt zijn inzichten in ongebruikelijke, beeldende taal, die veel weg heeft van poëzie, in ieder geval een heel andere taal dan we gewoonlijk in het onderwijs bezigen.

Veel Nederlandse lezers zullen moeite hebben met het typisch Amerikaanse karakter van het gedachtegoed van Palmer. Het valt bijvoorbeeld op dat in Amerikaanse besprekingen van Palmers boek met respect gesproken wordt over de christelijke achtergrond van Palmer. Dat Palmer zich in zijn onderwijssociologie nadrukkelijk laat inspireren door de spirituele traditie van de Quakers, is in de ogen van Nederlanders, of algemener West-Europeanen, niet erg begrijpelijk. Wij vinden een dergelijk stellingname al gauw onwetenschappelijk.

Het valt niet mee om deze hoofdstukken met vasthoudende aandacht te lezen, en zelfs bij herlezen blijken vele noties van Palmer over onderwijs niet heel begrijpelijk.

Wel erg kort samengevat gaat het tweede deel van het boek over Palmers notie dat kennis en 'waarheid' niet objectief zijn, maar worden geconstrueerd in zogenaamde '*communities of truth*'. Hierbij kan men zich wel wat voorstellen als het sociologie (het oorspronkelijke vak van Palmer) betreft of geschiedenis, maar natuurwetenschappelijke en wiskundige kennis subjectief? Wiskundige kennis als maatschappelijk bepaalde constructie?

Interessante filosofische vragen, waarop wellicht verschillende antwoorden kunnen worden geformuleerd, maar wat moet de wiskundeleraar, die dagelijks te maken heeft met de praktijk in de klas, met zoveel 'onzinnige' subjectiviteit? Palmer raakt hier een open zenuw, gezien de soms zeer boze reacties op zijn gedachtegoed, een boosheid die ik zelf ook ervoer toen ik het boek voor de eerste keer las. Kennelijk krabbelt Palmer aan iets dat wij zeer wezenlijk vinden in ons beroep. Het zo goed mogelijk kunnen overdragen van 'objectieve' kennis is voor veel leraren misschien wel het belangrijkste facet van hun vak. Daarbij hoort subjectiviteit in de vorm van emoties en spiritualiteit een zo gering mogelijke rol te spelen, althans in eerste instantie. Kunnen leraren misschien daarom zo slecht overweg met het pleidooi van Palmer voor meer 'subjectiviteit'

in de school? Palmer vindt echter dat we met teveel 'objectiviteit', die tot uiting komt in de inhoud en de vorm van het onderwijzen, ons ideaal van zinvol onderwijs te kort doen, evenals de passie voor ons vak en onze leerlingen. Moeten we, bij nader inzien, Palmer daarin niet gelijk geven? Is passie voor ons beroep niet bij uitstek de 'subjectieve' bron waaruit we dagelijks drinken?

Palmers pleidooi: niet alleen hersens, ook het hart

Het boek raakt aan de fundamenteën van ons lerarenbestaan. Daarom is het ook een moeilijk boek, dat zich niet zomaar laat begrijpen. Het nodigt dwingend uit tot filosofische reflectie over de waarden van ons beroep. Door het uitgesproken – zeker on-Nederlandse – karakter van zijn ideeën moet de lezer een moeilijke, maar waardevolle discussie met Palmer aangaan.

Niettemin is de boodschap van Palmer een sympathieke, namelijk dat we als onderwijsgeveenden moeten streven naar heelheid van onze persoonlijkheid als docent, ondanks de omgeving vol paradoxen waarin we dagelijks moeten functioneren. We zijn meer dan cultuuroverdragers van objectieve kennis. We doen ons en onze leerlingen tekort als we alleen maar bezig zijn met de ontwikkeling van het intellect van onze scholieren en studenten. We mogen in ons onderricht best wat meer laten blijken van onze passies en onze idealen, waardoor leerlingen misschien wel méér leren dan we op het eerste gezicht geneigd zijn te denken.

Dit lijkt me een nuttig advies, voor alle leraren, en dus niet alleen voor hen die bij het Nieuwe Leren zijn betrokken.

Palmer eindigt met: 'Laten we lesgeven vanuit een Hart van Hoop.' Is dat niet een spirituele boodschap die wel eens wat vaker mag worden gehoord in onze scholen?

Parker J. Palmer: 'The Courage to Teach; Exploring the Inner Landscape of a Teacher's life', uitgegeven door Jossey-Bass, a Wiley Company, 1998, ISBN 0-7879-1058-9, prijs: € 25,90

Nederlandse editie: 'Leraar met hart en ziel', bewerkt door Sebo Ebbens (APS), uitgegeven door Wolters-Noordhoff, 2005, ISBN 90 0170 489, prijs: € 35,00

Noot

Mijn hartelijke dank gaat uit naar mijn collega Luuk Koens, voor zijn geduldige lezen en verbeteren van de eerste versies van deze boekbespreking.

Over de recensent

Simon van der Salm (e-mailadres: SvdSalm@arhc.gsf.nl) is docent wiskunde bij het Adriaan Roland Holst College (ARHC), Hilversum. Website: www.rekenkring.nl.

RECHT LIJNIGE KROMMEN

Computeralgebra als gereedschap bij een praktische opdracht

[Paul Drijvers, Swier Garst, Peter Kop, Jenneke Krüger]

Inleiding

Het gebruik van computeralgebra in het voortgezet onderwijs is een kwestie waarover al enkele jaren wordt gesproken. Bij de invoering van de Tweede Fase van havo en vwo is al sprake geweest van het toelaten van computeralgebra. In 1998 adviseerde een werkgroep van de NVvW om experimenten te starten waarin computeralgebra in de vorm van symbolische rekenmachines in het huidige programma van wiskunde-B van het vwo zou worden ingezet, tot en met het centraal examen. Zulke examenexperimenten hebben tot op de dag van vandaag jammer genoeg niet plaatsgevonden. Wel is er op kleinere schaal ervaring opgedaan met het gebruik van computeralgebra in de wiskundeles^[1]. In 2004 heeft de NVvW in samenwerking met GSG Leo Vroman in Gouda, RSG Goeree en Overflakkee in Middelharnis en het Freudenthal Instituut een zogenoemde veldaanvraag ingediend bij de SLO. Met zo'n veldaanvraag kunnen scholen aangeven welk onderwerp of welke vraag ze graag nader uitgewerkt zien^[2]. In dit geval was de vraag onder meer op welke manier computeralgebra zinvol in het huidige curriculum zou kunnen worden ingepast. Dit heeft tot een klein project geleid. Onderdeel daarvan was een kort experiment in vwo-5 wiskunde-B waarin computeralgebra als gereedschap bij een praktische opdracht functioneerde. Van de ervaringen met deze praktische opdracht geven we in dit artikel een impressie, waarbij we opmerken dat het experiment eerder een vingeroefening betreft dan systematisch onderzoek.

Hieronder wordt eerst de praktische opdracht beschreven. Dan komt de voorbereiding op en de organisatie van de praktische opdracht op de twee

deelnemende scholen aan de orde. Vervolgens geven we een indruk van de resultaten van de leerlingen. We besluiten dit artikel met een korte terugblik op het experiment.

De praktische opdracht

Computeralgebra is software die mogelijkheden voor algebra, zoals het herleiden van formules, algebraïsch oplossen van vergelijkingen en symbolisch differentiëren (zeg maar de algebraïsche mogelijkheden van Derive of Maple) combineert met mogelijkheden voor tekstverwerken (zeg maar Word) en grafieken tekenen (zeg maar de grafische rekenmachine). Binnen ons project hebben we gekozen voor het pakket TI Interactive^[3], omdat dat algebraïsche rekenkracht koppelt aan een toegankelijke interface, die voor wat betreft het tekenen van grafieken nauw aansluit bij de grafische rekenmachine.

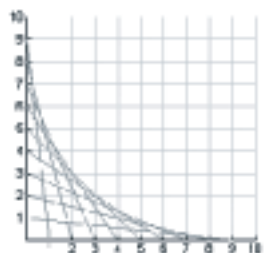
Het onderwerp van de praktische opdracht is het maken van krommen met behulp van rechte lijnstukken, wat ons inspireerde tot de titel van dit artikel. We lopen de opdracht globaal door.

In de eerste opgave (zie [figuur 1](#)) is de vraag om in TI Interactive een bundel lijnstukken te tekenen. Dit vraagt om het opstellen van de generieke formule voor het lijnstuk door een parameter te gebruiken. Ook moeten leerlingen hun vermoedens voor de formule van de omhullende testen.

In de tweede opgave (zie [figuur 2](#)) wordt de formule voor de omhullende gegeven. De taak voor de leerling is om te controleren dat de bijbehorende grafiek inderdaad alle lijnstukken uit de bundel raakt. Door de vergelijking van de raaklijn in een variabel punt op te stellen ontstaat een andere gedaante

1. Lijntrekken

Misschien heb je tijdens een saai les wel eens lijntjes zitten trekken, zoals in de figuur hieronder. Anders kan je vast wel die spijkervorden waarop met draadjes zoortgelijke figuren worden gemaakt.



Het leuke aan dit werkje is dat je met rechte lijnen toch een vloeiende kromme krijgt. Het doel van deze opgave is om dit plaatje in TI Interactive na te maken.

- Maak dit plaatje eerst een keer op papier na.
- Welke vergelijking heeft het lijntje van de bundel dat door het punt $(3, 0)$ gaat?
- Stel in het algemeen de vergelijking op van het lijntje van de bundel dat door het punt $(a, 0)$ gaat.
- Maak deze figuur na in TI Interactive. Klik eventueel op [help](#) als je hulp nodig hebt bij het tekenen van een bundel lijnen.
- Voeg nog meer lijnen toe, zodat een nog vloeiender kromme ontstaat.
- Probeer bij de 'meest vloeiende kromme' een formule te vinden. Geef, ook als het niet goed lukt, aan welke formules in aanmerking komen en wat je geprobeerd hebt.

FIGUUR 1 Opgave 1 uit de PO

van de bundel, waarbij natuurlijk de vraag is of die overeenkomt met de bundel van de eerste opgave. In opgave 3 (zie figuur 3) mogen de leerlingen hun fantasie gebruiken om zelf mooie bundels lijnstukken te tekenen in TI Interactive, die optreden als raaklijnstukken van een functie naar keuze. In opgave 4 (zie figuur 4) wordt de situatie wat gewijzigd, omdat de lijnstukjes uit de bundel een vaste lengte hebben. Dat leidt tot een nieuwe geparametriseerde bundel lijnstukken. Opgave 5 (figuur 5) is de clou: hoe kun je, uitgaande van de bundel lijnstukken, de formule voor de omhullende vinden? Daarbij wordt gesuggereerd om de x -waarde vast te houden en de parameter te variëren, tot die een maximale waarde voor y geeft. Voor die waarde ligt het punt (x, y) op de omhullende. De omhullende is in dit geval de zogenaamde astroïde. De laatste opgaven van deze praktische opdracht betreffen het zoeken van verdere informatie over deze intrigerende 'ster-kromme'.

Vorbereiding op de PO in de klas

Een van de docenten, Peter Kop, laat in zijn klas af en toe zien dat algebraïsche problemen ook machinaal met een symbolische rekenmachine exact oplosbaar zijn. Dit jaar had hij zijn traditionele 'Gewichtige probleem' – een opdracht die de leerlingen met de hand moeten uitwerken – afgesloten met de opdracht om dit probleem ook met computeralgebra op te lossen^[4]. Dankzij de medewerking van Texas Instruments kon het programma TI Interactive op de scholen worden geïnstalleerd.

Hoe moet je het werken met zo'n programma nu introduceren bij leerlingen? Door een van de projectmedewerkers was een introductiepracticum

2. De vergelijking van de kromme controleren

We gaan nu verder op zoek naar de vergelijking van de kromme die de bundel lijnen de vorige opgave 'omhult'. In deze opgave krijg je daarvoor een suggestie. Jouw taak is om die zorgvuldig te controleren.

- De grafiek van de functie f met $f(x) = x + 10 - 2\sqrt{10x}$ maakt aan de bundel. Ga dit na in je plaatje.
- Kies een punt van de grafiek van f met x -coördinaat tussen 0 en 10. Stel de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in dat punt. Ga na dat de lijn die je zo vindt inderdaad deel uitmaakt van de bundel van lijnen die door de algemene vergelijking van opgave 1a is bepaald.
- Herhaal de procedure van onderdeel b. en c. voor een algemeen punt.

FIGUUR 2 Opgave 2 uit de PO
FIGUUR 3 Opgave 3 uit de PO

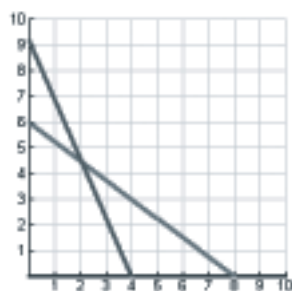
van enkele lessen ontwikkeld. De twee docenten hanteerden echter hun eigen manier om leerlingen met het pakket te leren werken.

Peter Kop heeft met de beamer een aantal zaken gedemonstreerd (ongeveer 20 minuten). Vervolgens heeft hij een collectie opdrachten laten uitvoeren waarin rekenen, grafieken, algebra en analyse aan de orde komen. Leerlingen konden kiezen tussen het introductiepracticum en het opgavenvel. Gelet op het hoge tempo van de leerlingen bleek het programma laagdrempelig te zijn.

Swier Garst heeft leerlingen aan het werk gezet met opgaven uit het boek. De leerlingen mochten die zelf kiezen. Zo leerden ze snel de mogelijkheden van het programma kennen. Daarnaast was een aantal hulpprogramma's beschikbaar. Leerlingen konden die gebruiken om hun ervaringen nog eens te toetsen en het zelfvertrouwen wat te laten groeien. Wat in deze fase al opviel, is dat het programma de antwoorden niet altijd in de vorm geeft die de leerlingen kennen. De sport was dus om een antwoord te herkennen als het een andere algebraïsche gedaante heeft dan wordt verwacht op basis van pen-en-papier werk. Verder merkten leerlingen op dat het wel aardig was, snel het antwoord krijgen, maar dat het achterliggende proces toch verborgen bleef. Na veel jaren onderwijs waarin steeds vooral naar de manier van oplossen en de tussenstappen is gevraagd, moesten ze ook op dit punt aan de nieuwe technologie wennen.

Organisatie van de PO

Op de school van Swier was het computerlokaal steeds bezet. Er moest worden uitgeweken naar de mediatheek. Leerlingen van andere klassen die met de computer wilden werken konden daar dus niet



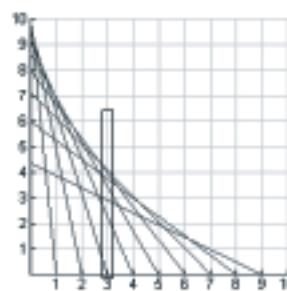
- Doe zelf de beweging na door twee boeken in een rechte hoek op de bank te leggen, en een pen er tussen te laten schuiven.
- Stel de vergelijking op van de lijn waarop de rode balk in de figuur hierboven ligt, en idem voor de groene balk.
- Welke vergelijking heeft de lijn waarop de balk ligt, als het rechter eindpunt zich in $(x, 0)$ bevindt?
- Laat in TIInteractive een halvebol staan van het balkje tekenen.

FIGUUR 4 Opgave 4 uit de PO

terecht. Een niet onbelangrijke ervaring. Stel je zou met vwo-4, vwo-5 én vwo-6 computeralgebra doen, welke faciliteiten zou je dan minimaal nodig hebben? Na de eerste versie van de PO's van commentaar te hebben voorzien, konden de leerlingen een verbeterde versie inleveren. In totaal kregen de leerlingen vier weken lestijd (twee weken lestijd en twee weken buiten-les tijd) om de opdracht af te maken. Overigens was ook in de tweede ronde geen van de leerlingen in staat de standaardvorm van de astroïde te vinden. Weliswaar werd daar niet naar gevraagd in de PO, maar aanmoedigingen van de docent leidden niet tot een standaardvorm.

Op de school van Peter was het computerlokaal gedurende drie weken twee lessen per week gereserveerd. Iedere leerling kreeg een diskette. De PO moest zowel schriftelijk als digitaal worden ingeleverd. Peter had voor deze periode weinig huiswerk opgegeven. De lestijd leek voldoende om de kern van de opdracht door te werken. Daarnaast konden de leerlingen er in de zogenaamde begeleidingsuren aan werken, of na schooltijd. De week na deze periode moest de PO worden ingeleverd. In de schoolexamenperiode die volgde zijn de PO's nagekeken en van commentaar voorzien: wat is echt fout en bij welke onderdelen moet nog een aanvulling komen? Voor deze verbeteringen kregen de leerlingen nog anderhalve week. Hierna kregen zij een beoordeling, die samen met de uitwerkingen van 'het gewichtige probleem' als proefwerk meetelde voor de overgang. Daarnaast bevatte het schoolexamen ook een opgave die sterk op de PO was geïnspireerd.

Op de school van Peter deed zich een technisch probleem voor. De school had een oudere versie



- Op het eerste gezicht lijkt de omhullende wel een kwart cirkel. Voeg die toe aan de tekening. Zou dit mogelijk de omhullende zijn?
- Besluit de figuur hierboven en met name het daarin getekende rechthoekje bij $x=3$. Dit kun je je voorstellen als een spleetje waar door je een stukje van het schuivende balkje laat zien. Schets op papier de hoogte van het schuivende balkje door het spleetje, als a loopt van 0 tot 10.
- Tijdens het schuiven raakt het punt met x -coördinaat 3 de omhullende als het zijn hoogste positie bereikt. Leg dit uit, en bereken het punt $(3, \dots)$ dat op de omhullende ligt.
- In het algemeen betekent dit dat je een punt van de omhullende vindt als bij vaste x -waarde de y -waarde maximaal is als functie van a . Gebruik dit om bij vaste x -waarde de waarde van a te vinden die bij het punt van de omhullende hoort en bepaal de vergelijking van de omhullende.

FIGUUR 5 Opgave 5 uit de PO

van TI Interactive geïnstalleerd. Deze bleek niet compatibel te zijn met de gratis demoversie die veel leerlingen thuis hadden gedownload, om er ook daar aan te kunnen werken. Dit bleek bij de verbeter slag. Verschillende leerlingen konden hun schijfjes op school niet meer lezen en de termijn van de demoversie thuis was verlopen. Bovendien bleken de bestanden bij sommige leerlingen zo groot te worden dat ze niet meer op de diskette pasten. In de tweede ronde zijn verbeteringen dus vaak los op papier ingeleverd. Een volgende keer zouden we de opgaven liever via een digitale omgeving laten inleveren.

Ervaringen en leerlingenwerk

Wat waren de ervaringen met de praktische opdracht in de klas? We lopen de opgaven langs aan de hand van fragmenten van leerlingenuitwerkingen. De opdracht aan de leerlingen was om hun stappen ook toe te lichten met behulp van 'verbindende teksten'. De start is flitsend: opdracht 1 gaat snel en binnen de kortste keren is iedereen bezig met het zoeken naar een formule voor 'de meest vloeiende kromme' (onderdeel 1d). De docent moet wel stimuleren om aan te geven wat voor soort functies er geprobeerd worden en waarom. Hyperbolen,

zoals $y = \frac{9}{x}$ en $y = \frac{10}{x+1} - 1$, maar ook kwart

cirkels en parabolen passeren de revue. Een van de leerlingen wil een cirkel tekenen met als middelpunt $(10, 10)$. Daartoe maakt ze y vrij uit de cirkelvergelijking (zie figuur 6). TI Interactive geeft daarvoor een opmerkelijke gedaante met mintekens onder het wortelteken. Dat merkt de leerling niet op; kennelijk kijkt ze niet kritisch naar de uitvoer. Het gebruik van de parameter om de bundel lijnstukken

$$\text{solve}((x-10)^2 + (y-10)^2 = 100, y)$$

$$y = -(\sqrt{-x}\sqrt{x-20} - 10) \text{ or } y = \sqrt{-x}\sqrt{x-20} + 10$$

$$y2(x) := \frac{a-10}{a}x + 10 - a$$

$$y3(x) := b + 10 - 2\sqrt{10-b} + \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{b}}\right) \cdot (x-b)$$

$$\text{solve}(y3(x) = y2(x), a)$$

$$a = \frac{\sqrt{10} \cdot x}{\sqrt{b}} \text{ or } a = \sqrt{10-b}$$

$$\text{solve}((y2(x) \mid a = \sqrt{10-b}) = y3(x), x)$$

true

FIGUUR 6 Vreemde gedaante van de oplossing

FIGUUR 7 Bewijs dat de twee gedaanten dezelfde bundel beschrijven

voor te stellen levert geen onoverkomelijke problemen op.

Ook het begin van opgave 2 gaat vlot. De bij onderdeel b gevraagde raaklijn komt vaak via de lineaire benaderingsformule van de formulekaart tot stand: $L(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a)$. De vraag bij d om te bewijzen dat een bepaalde lijn voor iedere waarde van de parameter tot een gegeven bundel behoort, levert problemen op. Niet vanwege het programma, maar door gebrek aan ervaring met bewijzen. Een aantal leerlingen kiest toch voor een 'bewijs' aan de hand van drie voorbeelden, daarmee de bijbehorende algebra vermijgend.

Hoe bewijs je nu echt dat twee verschillend gedefinieerde lijnenbundels gelijk zijn? In [figuur 7](#) staat de oplossing van enkele leerlingen. De bundels zijn gedefinieerd door $y2$, met parameter a , en $y3$ met parameter b . Het idee is nu om $y2$ en $y3$ aan elkaar gelijk te stellen en de vergelijking op te lossen naar één van de parameters, in dit geval a . Op die manier wordt a uitgedrukt in b . Het resultaat wordt gesubstitueerd in de uitdrukking voor $y2$. Dan geeft de melding 'true' aan dat $y2$ en $y3$ voor alle waarden van x aan elkaar gelijk zijn. Een vrij complexe en abstracte aanpak, die wel correct is!

Een ander groepje kiest voor een andere oplossingsmethode. Eerst worden de snijpunten van de grafiek van een lijn van $y3$ met de x -as en de y -as berekend ([figuur 8](#)). Dan worden deze uitkomsten bij elkaar opgeteld. Dat geeft 10, en daarmee behoort deze lijn tot de bundel van opgave 1, die met $y2$ is gedefinieerd. Eenvoudiger en mooi.

Bij opgave 3 kan wederom gebruik gemaakt worden van de lineaire benaderingsformule. Net zoals bij 1d kunnen leerlingen hun creativiteit botvieren.

Mariëtte bedenkt bijvoorbeeld:

$y1(x) = \sin(a) + \cos(a) \cdot (x - a) \mid a = \text{seq}(0.1 \cdot k, k, 0, 94)$. Dat geeft het plaatje van [figuur 9](#).

Opgave 4 loopt zonder veel problemen, maar dan komen we tot de kern van de PO: hoe vind je nu zelf een formule van de omhullende?

In opgave 5 wordt een didactische handreiking gedaan door het beeld van een smal, verticaal 'kijkraampje' op te roepen.

Weer zien we verschillende strategieën bij leerlingen.

Teun bijvoorbeeld lijkt het raampje te willen namaken op het scherm. Hij probeert de verschillende lijnen van de bundel rond $x = 3$ in beeld te krijgen en leest het maximum voor gehele waarden van a af ([zie figuur 10](#)). Hij bedenkt vervolgens dat a niet geheel hoeft te zijn en maakt dan een grafiek van y tegen a om de a -waarde preciezer af te lezen.

Anderen, zoals Mariëtte, gaan direct algebraïsch aan het werk. In [figuur 11](#) ziet u hoe dat gaat. Om de lijn uit de bundel te vinden die voor $x = 3$ de grootste waarde oplevert, substitueert ze eerst de waarde 3 voor x in de algemene gedaante van de bundel. Dan bepaalt ze met de functie fMax in TI Interactive de maximale waarde daarvan als functie van a . De gevonden waarde van a vult ze in en dat geeft de maximale y -waarde voor $x = 3$. Het algemene geval is nu simpel door niet met $x = 3$ te werken, maar x variabel te laten.

Vele leerlingen vinden dit natuurlijk lastige stappen. Het tempo waarmee ze deze PO doorwerken is inmiddels flink gezakt, onder meer door de hectische tijd van schoolexamens. Maar ook zijn de problemen bij deze vragen groter dan in het begin. Het idee om de rollen van variabele en parameter te verwisselen,

$$\begin{aligned} &\text{solve}(y3(x) = 0, x) \\ &x = \sqrt{10 \cdot b} \text{ or } \frac{\sqrt{b} - \sqrt{10}}{\sqrt{b}} = 0 \\ &y3(0) \\ &\frac{10 - \sqrt{10 \cdot b}}{(10 - \sqrt{10 \cdot b}) + \sqrt{10 \cdot b}} \\ &10 \end{aligned}$$

FIGUUR 8 De som van de coördinaten is 10

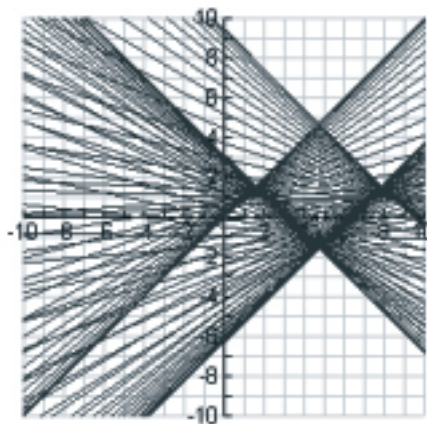
en niet x maar a als veranderlijke te zien vraagt een blikwisseling die voor velen te hoog gegrepen is. Hier geldt dat niet de computeralgebra, maar het abstract denken het struikelblok is.

De laatste opgave, waarin gevraagd wordt om iets over de achtergronden van de astroïde te zoeken, levert bij de meeste leerlingen weinig interessants op.

Terugblik

Laten we in deze terugblik eerst de leerlingen aan het woord laten. In een van de klassen is na afloop een kleine enquête gehouden. De eerste vraag daarvan was of het beeld van wiskunde door het werken met computeralgebra was veranderd. Iedereen antwoordde 'nee'. De tweede vraag luidde: 'In de nabije toekomst mag je verwachten dat de bewerkingen die je nu met TI Interactive uitvoert ook met een geavanceerde rekenmachine kunnen worden uitgevoerd. Is dat in jouw ogen een verbetering ten opzichte van de huidige grafische rekenmachine?' Hierop was het antwoord unaniem 'ja'. Wel constateerden leerlingen dat het werken met TI Interactive niet zo simpel is als met de grafische rekenmachine. Je moet precies weten wat je invoert, de uitkomsten zien er anders uit dan je verwacht, je hebt minder houvast en ter controle moet je het soms met de hand narekenen. In elk geval brengt computeralgebra de nodige afwisseling met zich mee en dat werd ook gewaardeerd.

Onze ervaringen maken eens te meer duidelijk dat het gebruik van computeralgebra niet zo simpel is. Ondanks de natuurlijke wijze waarop leerlingen met zo'n pakket aan de gang gaan en de krachtige middelen die hen ter beschikking staan, zien we hen

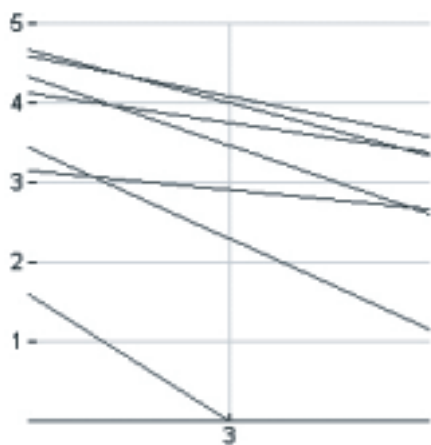


FIGUUR 9 Een bundel bedacht door een van de leerlingen

ook dwaalwegen bewandelen. Er is natuurlijk een groot verschil tussen de docent die veel ervaring heeft met algebraïsche manipulaties en de leerling die zich deze ervaring nog moet verwerven. Het antwoord van de computer kan verwarrend zijn, zeker als het een andere gedaante heeft. De interpretatie is dan ook zeker niet eenvoudiger dan bij eigen berekening.

De docenten kijken tevreden terug. Peter Kop stelt wel dat hij, na de hierboven beschreven technische problemen, weer verbaasd en gelukkig is dat er met de grafische rekenmachine zo weinig problemen zijn. Swier Garst constateert dat er nog een lange weg te gaan is voordat goed begrepen is welke factoren een rol spelen bij het leren van wiskunde met een computer.

De ervaring met deze praktische opdracht leert, dat het hele curriculum niet meteen op zijn kop gezet hoeft te worden als je computeralgebra inzet. De beschreven praktische opdracht ligt in het verlengde van het huidige programma, maar gaat net een stapje verder. De PO zou in principe ook zonder computeralgebra gedaan kunnen worden, maar TI Interactive blijkt wel heel handig voor het tekenen van de bundels en voor het algebraïsch rekenwerk. Het pakket biedt algebraïsche en grafische experimenteerterruimte. Het gebruik leidt ook tot een andere aanpak, waarbij leerlingen meer afstand nemen tot de uitvoering van de procedures en zich sterker concentreren op de probleemaanpak en op het formuleren van duidelijke opdrachten aan het programma. Dat is een abstractere manier van werken, die naar onze mening bijdraagt aan het leren van algebra.



FIGUUR 10 Inzoomen op de bundel bij $x = 3$

Gelet op deze ervaringen concluderen we dan ook dat we niet te veel koudwatervrees moeten hebben bij het gebruik van computeralgebra in het voortgezet onderwijs. Natuurlijk zullen we moeten nadenken over goede opgaven. We willen ook dat leerlingen bepaalde berekeningen met de hand blijven doen. Enige algebraïsche basisvaardigheid met de hand lijkt een voorwaarde om zinvol met computeralgebra te kunnen werken. De eindconclusie luidt dan ook: laten we doorgaan met ontwikkelen van materiaal waarin computeralgebra een rol speelt, en daarmee experimenteren. Daarbij denken we vooral aan wiskunde-B in de tweede fase van havo en vwo. De vraag is dan om een goede balans te creëren tussen handmatige algebraïsche vaardigheden en vaardigheden die van belang zijn bij het gebruik van de technische hulpmiddelen van de 21e eeuw.

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld:

- P. Drijvers: Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen. In: *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 22(1), pp. 36–41 (2002).
- P. Drijvers: Algebraïsche vaardigheden, symbol sense en ICT. In: *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 23(1), pp. 38–42 (2003).
- P. Drijvers, P. Boon, W. Hoekstra (2002): De leraar had het wel heel erg druk, ervaringen uit het Adlo-project. In: *Euclides*, 78(3), pp. 98–104 (2002).
- H. Staal: Computeralgebra en digitaal lesmateriaal. In: *Euclides*, 76(5), pp. 204–209 (2001).

[2] SLO ontvangt van OCenW jaarlijks een bedrag bestemd voor veldaanvragen. Deze aanvragen kunnen ingediend worden door instellingen die met onderwijspraktijk te maken hebben. Er zijn

$$\begin{aligned} \text{fMax} \left(\sqrt{100 - a^2} - \frac{\sqrt{100 - a^2}}{a} \cdot 3, a \right) \\ a = 10^{2/3} \cdot \sqrt[3]{3} \text{ of } a = 0 \\ y = \sqrt{100 - a^2} - \frac{\sqrt{100 - a^2}}{a} \cdot 3 \mid a = 10^{2/3} \cdot \sqrt[3]{3} \\ y = \left(1 - \frac{\sqrt[3]{10 \cdot 3^{2/3}}}{10} \right) \cdot \sqrt{100 - 10^{4/3} \cdot 3^{2/3}} \end{aligned}$$

FIGUUR 11 De maximale waarde voor de hoogte als functie van de parameter voor $x = 3$

restricties: zo dient het uit te voeren project passen binnen de thema's die in januari bekendgemaakt worden, de opgedane kennis moet overdraagbaar zijn en direct toepasbaar in het onderwijs, en de projecten dienen binnen een jaar afgerond te worden.

Aangezien de SLO-website op dit moment in revisie is, kunt u zich voor nadere informatie over veldaanvragen wenden tot Jenneke Krüger (email: j.kruger@slo.nl).

[3] Zie www.education.ti.com voor informatie over het pakket en een gratis demoversie. Bij APS is het boek 'Wiskundelessen met TI Interactive' verschenen, dat Nederlandstalig lesmateriaal bij TI Interactive bevat. Zie daarvoor www.aps.nl/apssite/publicaties.

[4] Dit probleem en de oplossing met behulp van computeralgebra wordt besproken in

- P. Drijvers: Oude wiskunde en nieuwe technologie. In: *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 16(3), pp. 49–53 (1997).

Over de auteurs

- Paul Drijvers (p.drijvers@fi.uu.nl) is als onderwijsontwikkelaar en onderzoeker verbonden aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Zijn belangstelling gaat met name uit naar het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs en de didactiek van de algebra.
- Swier Garst (garst@planet.nl) is ruim 30 jaar docent in het VO, bestuurslid NVvW, redactielid van de zebra reeks, docent wiskunde aan de Hogeschool Rotterdam en LION (leraar in onderzoek) aan de TUD.
- Peter Kop (peterkop@worldonline.nl) is ruim 25 jaar docent in het VO, lid van de algebra-werkgroep en de havo/vwo-werkgroep van de NVvW, redactielid van de zebra reeks en vakdidacticus aan de universitaire lerarenopleiding in Leiden.
- Jenneke Krüger (j.kruger@slo.nl) werkte jaren in het voortgezet onderwijs, o.a. als docent wiskunde. Ze is nu als leerplanontwikkelaar verbonden aan SLO, Enschede, met als specialisatie wiskunde en natuurwetenschappelijke vakken in havo/vwo.

BOEKEN VOOR ETHIOPIE

Het Wereldwiskunde Fonds ondersteunde een Nederlandse wiskundedocent aan een technische universiteit in Ethiopië.

[Hans van de Lagemaat]



Inleiding

Als ik soms in mijn kantoorje wat zit te mijmeren en naar buiten zit te staren, dan heb ik een goede kans dat ik een kamelentrein voorbij zie trekken. Als ik zo nu en dan niet van de taxiservice van het instituut gebruik maak en op de fiets naar mijn werk ga, zodat Scooby, mijn hond, met me mee kan hollen, heb ik meer kans op een aanrijding met een koe of een ezeltje dan met een auto. De zon schijnt hier elke dag. En hoewel alle aandacht die je onderweg krijgt soms wat irritant wordt, is de bevolking zonder meer vriendelijk en gastvrij.

Mekelle in Ethiopië is sinds september 2003 mijn woonplaats. Mekelle is de hoofdstad van de provincie Tigray in het noorden van Ethiopië. En ik werk als wiskundeleraar in het naburige dorpje Aynalem aan het Mekelle Institute of Technology (M.I.T.). In februari van dat jaar kwam ik in een Nederlandse krant een advertentie van de organisatie VSO^[1] tegen. Hierin werd een oproep gedaan voor docenten wiskunde en exacte vakken om voor twee jaar uitgezonden te worden naar een ontwikkelingsland. Niet dat ik mijn werk aan het Driestar College, een brede scholengemeenschap voor voortgezet onderwijs in Gouda, zat was, integendeel, maar aan deze oproep kon ik geen weerstand bieden. Het verlangen om in het buitenland en in het bijzonder in Afrika te gaan werken, was al heel lang min of meer latent aanwezig en stak zo nu en dan even de kop op. En hier was opeens een mogelijkheid op maat. Dezelfde dag heb ik een sollicitatiebrief met c.v. gemaild. En na een selectiedag, een aantal goede trainingdagen in zowel Nederland als Engeland en een voorbereiding van twee weken in Ethiopië zelf, bevond ik me opeens in toch wel een heel andere cultuur.

M.I.T.

Het M.I.T. is gestart in september 2002. Het is een technische universiteit met de studierichtingen Elektrotechniek, Computerwetenschap en IT. De doelstellingen zijn ronduit ambitieus. Alleen de leerlingen met de beste resultaten in de exacte vakken en Engels worden toegelaten, met het doel hen op te leiden tot professionals met zowel goede praktische als theoretische vaardigheden. Vooral in het praktijkgerichte denken is het Ethiopische hoger onderwijs niet bepaald sterk. Het M.I.T. moet daarop een gunstige uitzondering gaan vormen. Kosten zijn er voor de studenten niet aan verbonden, zodat in principe iedere student, ook de allerarmste, er mogelijkheden krijgt.

Op het ogenblik zijn er in totaal 160 studenten, waaronder slechts zes meisjes. Hoewel meisjes hier in Ethiopië zeker nog lang niet dezelfde maatschappelijke kansen hebben als jongens, is de oorzaak van het geringe aantal meisjes hier waarschijnlijk de technische aard van het instituut. De huidige groep studenten bestaat uit eerstejaarsstudenten en een gemengde groep van tweedejaars in het nieuwe vierjarige systeem en derdejaars studenten in het oude vijfjarige.

Mijn eerste kennismaking met M.I.T. was in meer dan één opzicht overweldigend.

De eerste aanblik van de campus was zeer verrassend en ook na de eerste rondleiding over het terrein en door de gebouwen was ik bijna trots dat ik hier twee jaar mocht gaan werken. Een unieke architectuur, ruime klaslokalen, een modern auditorium, een ruime eetzaal, een prettig aandoende, hoewel nog niet voldoende uitgeruste bibliotheek, fris aandoend gras; het was allemaal compleet tegengesteld aan het beeld dat ik me tevoren in Nederland had gevormd.

Curriculum

Ook verrassend, maar dan op een minder prettige manier, was het curriculum, dat ik toen pas voor het eerst onder ogen kreeg. Ik had vanuit Nederland al geprobeerd om contact te leggen. Maar communicatie is zeker niet het sterkste punt van het Ethiopische management. Zodoende had ik maar weinig idee van het niveau van de studenten en van de onderwerpen waarin ik les moest gaan geven.

Natuurlijk had ik wel mijn bedenkingen, die ik ook bij VSO had aangegeven. Het zou niet in mijn hoofd opgekomen zijn om bijvoorbeeld in Delft aan de TU te gaan solliciteren. Maar die twijfels werden min of meer weggewuifd. Een technische universiteit in Ethiopië is niet hetzelfde als een technische universiteit in Nederland. Ik zou alleen maar aan eerstejaars studenten les hoeven te geven, en met mijn opleiding en ervaring hoefde ik over het niveau echt niet in te zitten, zo werd me verteld. En dat had me enigszins gerustgesteld. En voor een door de overheid gesteunde universiteit zou dat ook waar geweest zijn.

Maar daar zat ik op die eerste zaterdagmorgen in het kantoorje van de *dean*, met het wiskundeprogramma op schoot. Fourier series, half range expansions, Fourier integrals. Onderwerp nummer één, Fourier, die naam kende ik natuurlijk wel, maar veel verder ging mijn kennis nog niet. Partial differential equations, onderwerp nummer twee. Daaronder zag ik allemaal termen staan die ik wel kon lezen, maar waar ik me geen enkele voorstelling bij kon maken. Langzaam begon een zekere paniek zich van me meester te maken. En langstreckende kamelentreinen, vriendelijk lachende kinderen en een ideaal klimaat konden die paniek toch niet zomaar wegnemen. Ik durfde nauwelijks verder te gaan op de bladzijde. Bessel, Legendre? Ah, Vector Calculus, onderwerp vier. Daar kon ik wat mee, vanuit mijn eerstegraadsopleiding. Maar het niveau waarop ik daarmee moest starten? Lag dat niet een beetje te hoog voor een student die net van de middelbare school komt? Dat gradiënt, Green, Gauss en Stokes niet onbelangrijk zijn voor elektrostudenten kon ik me nog wel voorstellen. Maar hadden ze echt ooit wel eens gewerkt met vectorfuncties? In hun middelbareschoolboekjes kwam ik die dingen toch met geen letter tegen. Veel verder dan wat eenvoudige vectoralgebra ging het daar niet.

Het startniveau van de studenten was een kwestie die mijn gevoel van onzekerheid al gauw begon te verdringen. Was dit programma niet een beetje ál te voortvarend? Hoe ga je een student uitleggen een partiële differentiaalvergelijking op te lossen als hij nog geen enkele ervaring heeft met het oplossen van een gewone differentiaalvergelijking en zijn kennis van functies van meerdere variabelen ook heftig te kort schiet? Dat ik behoorlijk intelligente studenten voor mijn neus zou krijgen, was inmiddels wel tot me doorgedrongen, maar zouden ze echt zoveel meer aankunnen dan de gemiddelde vwo-leerling in Nederland? Dat wilde er bij mij niet echt in.

Daar kreeg ik gelukkig gelijk in. Er klopte een hoop niet. Mededoorzaak van een heleboel verwarring was een verandering in het onderwijssysteem. De vijfjarige opleidingen in het hoger onderwijs werden gewijzigd in vierjarige. Over de consequenties daarvan hadden kennelijk maar weinigen nagedacht en oplossingen moesten ter plekke worden verzonnen.

Veranderingen

Voor mij was een oplossing dat ik gewoon een nieuw curriculum ging schrijven. Vast als men hier aan regeltjes zit en aan alles wat al op papier staat, stuitte dat wel op de nodige weerstand. Maar ik ben blij dat ik het gedaan heb.

Wiskunde in het hoger technisch onderwijs voor alléén de eerstejaars vond ik ook wat weinig. Met name voor studenten elektrotechniek. En zeker als ze op het niveau gebracht moesten worden waar het M.I.T. voor wil staan. Een curriculumworkshop aan het eind van het eerste jaar bracht daar verandering in. Nu zijn er drie semesters wiskunde. Het houdt nog niet over, maar het is in elk geval beter.

De ontwerpers van het curriculum erkenden toen ook dat een heleboel technische, toegepaste wiskunde en helemaal geen discrete wiskunde voor studenten computerwetenschappen toch wel een misser was. Ook die verandering kon doorgevoerd worden.

Ethiopische studenten

Er is een groot verschil tussen de Ethiopische studenten en die in Nederland.

Ik schrok eerst een beetje van hun goede kennis van stellingen en bewijzen. En ook hun vaardigheid in hoofdrekenen is erg goed vergeleken met mijn vroegere havo- en vwo-leerlingen. Dat heeft natuurlijk alles te maken met de wijze van leren op de lagere en middelbare school. Memoriseren en reproduceren is daar de hoofdzaak. En er zijn hier maar heel weinig kinderen die de beschikking over een rekenmachine hebben. Dat is gewoon te duur. Het ruimtelijk inzicht is echter minimaal. Onlangs vroeg ik mijn eerstejaarsstudenten naar het al-dan-niet symmetrisch zijn in de y -as van de grafiek van een zaagtandfunctie. Ik moest er echt een A4-tje bij pakken om te laten zien dat de beide helften niet op elkaar pasten als ik het blaadje dubbel klapte. Misschien heeft dit gebrek aan inzicht te maken met

hun opvoeding in het algemeen. Speelgoed is er maar weinig. Een lego- of blokkendoos, waarmee kinderen spelenderwijs vertrouwd raken met ruimtefiguren, is hier onbekend.

Een Amerikaanse collega legde dit jaar een aantal legpuzzels van 500 tot 1000 stukjes in de kantine neer. Aanvankelijk wist niemand wat er mee gedaan moest worden. En toen dat was uitgelegd, zag je eerst een gestuntel dat je bij een kind van zes in Nederland niet meer tegenkomt. Natuurlijk leren ze snel, maar toch geeft het iets aan van de enorme achterstand in de ontwikkeling (op dit gebied) van veel van deze jongeren ten opzichte van die in de Westerse wereld.

Bibliotheek

Voor het opdoen van kennis zijn de studenten aangewezen op de lessen en op de bibliotheek. Maar wat doe je als je een paar maanden met 70 studenten met kansberekening bezig moet zijn en de bibliotheek de beschikking heeft over hooguit twee of drie bruikbare boeken op dit gebied? Of wat te doen met het semester discrete wiskunde als boeken op dit gebied nagenoeg ontbreken? Om maar niet te spreken over het vak numerieke methoden.

Het Wereldwiskunde Fonds, opgezet door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, bood uitkomst. Met de steun van dit fonds kon ik vijftien exemplaren van een standaardwerk over elk van deze onderwerpen aanschaffen. Tevens heb ik van de bekende serie van Schaum een aantal relevante titels in de bibliotheek kunnen krijgen. En een aantal werken van bijvoorbeeld Ian Stewart en Simon Singh houd ik in mijn kantoor en duw ik regelmatig een student onder de neus om hem wat meer aan te bieden dan de verplichte stof. Hoewel de algemene houding in alles wat ze lezen en leren is: *Wat is het directe nut?*, beginnen steeds meer studenten ook daar de waarde van in te zien. Het is leuk om op deze manier ook wat andere wiskunde bij de studenten te kunnen introduceren. Boekhandels verkopen dit soort boeken hier niet. En een bestelling doen via internet kan een Ethiopiër niet omdat er geen credit-card-systeem bestaat.

Computergebruik in de wiskunde

Hoewel veel van deze jongens en meisjes na hun studie waarschijnlijk in het onderwijs terecht zullen komen, worden ze uiteindelijk toch opgeleid tot ingenieurswerk in het bedrijfsleven. Ik vond dat een klein beetje kennis van een wiskundesoftware programma essentieel was in hun opleiding. Mupad is zo'n programma, en gratis, wat in dit geval niet onbelangrijk was. Ik heb het gedownload en laten installeren op het netwerk. Voor het tekenen van grafieken (ook driedimensionaal), oplossen van differentiaalvergelijkingen en dergelijke wordt er enthousiast gebruik van gemaakt. En ook bij het onderwerp numerieke methoden kwam de software goed van pas. Dat onderwerp heb ik wat anders aangepakt dan de andere onderwerpen. In plaats van de stof uitgebreid te behandelen, gaf ik ze



FOTO 2 Een stukje van de wiskunde-afdeling in de bibliotheek met de nieuw aangeschafte boeken



FOTO 3 Computerpracticum. Op de voorgrond Nuria, het enige meisje in het eerste jaar.

tijdens de colleges meer handvatten. We bekeken een methode globaal, en vervolgens liet ik de studenten met behulp van opdrachten zelf aan de slag gaan. Daarbij liet ik ze waar mogelijk de methode grafisch beschrijven, een algoritme opstellen of verklaren, en een computerprogramma in C of C++ schrijven. De eindopdracht, waar ze een dag aan konden werken, en die het grootste deel van hun cijfer zou bepalen, zag er ongeveer hetzelfde uit. Hoewel ze het zelf hard werken vonden, en behoorlijk enerverend, waren de meesten er wel enthousiast over. Ze ervoeren het als heel leerzaam.

Slot

Toen ik naar Ethiopië vertrok, had ik niet verwacht dat er een periode van twee jaar hard werken voor me lag. En soms behoorlijk wat frustratie. Een zeldzaam gebrek aan goed management en organisatie op alle fronten. Studenten, van wie een flink aantal niet gespeend is van een stukje misplaatste arrogantie.

Student: 'Waarom heb ik een B? Ik had op de middelbare school altijd een A voor wiskunde.' *Ik:* 'Misschien ben je toch niet zo goed als je zelf denkt?'

Student: 'Mag ik mijn examen zien?' *Ik:* 'Jawel hoor, maar vertrouw je mij niet?'

Student: 'Jawel, maar ik weet zeker dat ik een A hoor te hebben.'

En na zo'n korte discussie volgt er als je niet oppast een eindeloos geredeneer over wat er in de grofste blunders toch nog goed was. Natuurlijk had ik er niets op tegen dat de studenten hun gemaakte werk kwamen inzien. En feedback wilde ik ook wel geven, maar daar was het hun in verreweg de meeste gevallen niet om te doen.

Maar toch. Terwijl ik dit schrijf liggen er nog vier maanden voor me. En ik zie nu al op tegen het afscheid van dit bijzondere Afrikaanse land, met zijn eigenzinnige, trotse, maar overwegend straatarme volk, en van de mensen uit mijn onmiddellijke omgeving, die me in hun armoedige hutjes vaak de grootste gastvrijheid betoonden met hun eindeloos durende koffiecereemonie. Ik spreek hun taal maar heel weinig, toch was het altijd gezellig.

Ik zie op tegen het afscheid van de kleintjes met hun gescheurde kleertjes, donkere ondeugende ogen en snotneuzen. Kinderen, die je letterlijk overal nog blij mee kunt maken. Al is het maar met een paar snoepjes, een banaan of een broodje. En natuurlijk van mijn werk en mijn collega's. Ik hoop dat het een klein beetje verschil heeft gemaakt.

Nee, ondanks ook de negatieve ervaringen heb ik geen seconde spijt gehad van twee jaar Ethiopië. En... in elk geval schrik ik nu niet meer van Fourier en partiële differentiaalvergelijkingen!

Noot

[1] VSO: Voluntary Service Overseas; een internationale ontwikkelingswerk-organisatie; zie www.vso.nl.

Over de auteur

Hans van de Lagemaat (e-mailadres: hansvandelagemaat@yahoo.co.uk) was vanaf september 2003 tot augustus 2005 in Ethiopië werkzaam, en is nu weer verbonden aan het Driestar College in Gouda.

ENGELSTALIG WISKUNDEONDERWIJS

A blessing or a curse?

[Esther van den Akker en Jos Verhagen]



FIGUUR 1

‘Good morning all’

Het is half negen op een doodgevone dinsdagochtend. De docente begint haar les in een doorsnee brugklas op een doorsnee middelbare school ergens in de randstad. Hoewel, doorsnee?

‘Today, we will discuss exercises 20 and 21 of your homework, and we will deal with square roots. “Wortels” in het Nederlands.’

We observeren een wiskundeles op een school waar tweetalig onderwijs (TTO) wordt aangeboden aan bovengemiddelde vwo-leerlingen. Het is nu voor het tweede jaar dat aan een beperkte groep leerlingen van deze school wiskunde wordt gegeven in het Engels.

Hierin staat deze school niet alleen. De laatste jaren springen scholen die naast het reguliere Nederlandstalige onderwijs een tweetalige stroming aanbieden als paddestoelen uit de grond. Op de TTO-stroom van deze scholen wordt meer dan de helft van de vakken in het Engels (of, op één school in Venlo, in het Duits) onderwezen. Vaak wordt ervoor gekozen om ook wiskunde in deze vreemde taal te geven. Tijdens deze lessen wordt er van de leerlingen verwacht dat zij in de vreemde taal communiceren en dat zij hun aantekeningen ook in deze taal maken. Ook de proefwerken en toetsen worden niet meer in het Nederlands maar in de vreemde taal afgenomen.

Europees Platform

De TTO-scholen worden inhoudelijk en financieel ondersteund door het Europees Platform^[1], het instituut dat zorg draagt voor de certificering van TTO-scholen en -docenten. De inhoudelijke

ondersteuning bestaat voor een belangrijk deel uit de coördinatie van het ‘Netwerk TTO’^[2]: een samenwerkingsverband tussen TTO-scholen, waarin de deelnemende scholen samenwerken aan thema’s als standaardisering en materiaalontwikkeling. Verder stelt het Europees Platform onder meer eisen aan de taalvaardigheid van de docenten. Ook mag de beheersing van het Nederlands bij de leerlingen niet in het geding komen^[3]. Verder visiteert zij scholen om toezicht te houden op de kwaliteit van het tweetalig onderwijs.

Ook de TTO-school stelt eisen, maar dan aan de potentiële TTO-leerlingen. Zo is er vaak een minimum Cito-score vereist en vinden er intake-gesprekken plaats om te zien of de leerlingen voldoende gemotiveerd zijn, of voldoende aanleg hebben voor het leren van de vreemde taal.

Ons onderzoek

Toen wij in aanraking kwamen met Engelstalig onderwijs op de middelbare school, rees bij ons de vraag of het lesgeven in een andere taal van invloed is op de kwaliteit van het wiskundeonderwijs. We besloten om hier een onderzoekje naar te doen in het kader van een vak binnen onze eerstegraads lerarenopleiding.

In dit kleinschalig onderzoek hebben we geprobeerd een indicatie te krijgen over wat de meerwaarde zou kunnen zijn van Engelstalig wiskundeonderwijs boven het Nederlandstalige wiskundeonderwijs. Hiertoe hebben we interviews gehouden met een tweetal wiskundelerares op twee TTO-scholen voor voortgezet onderwijs. We hebben een aantal vragen

**WERELDWIJS MET
TWEETALIG ONDERWIJS!**



Tweetalig onderwijs betekent dat de helft van de lessen in het Engels (op één school Duits) wordt gegeven. Hierdoor leer je die taal snel en goed. Daarnaast is er veel aandacht voor internationalisering en Europa, door bijvoorbeeld e-mailprojecten met andere landen en uitwisselingen. *Zo word je wereldwijs!*

**OP MEER DAN 70 VWO
(SOMS HAVO)SCHOLEN!**

Meer weten? www.tweetaligonderwijs.nl

 Dit wordt gesubsidieerd door het Europees Platform voor het Nederlandse Onderwijs

 LANDELIJK NETWERK VOOR TWEETALIG ONDERWIJS

FIGUUR 2

voorgelegd aan de coördinator van de TTO-stroom op één van deze scholen en er is onder de leerlingen van een TTO-brugklas een enquête afgenomen.

Leerlingen aan het woord

Leerlingen kiezen voor tweetalig onderwijs omdat zij voor zichzelf een uitdaging zoeken en zij denken dat het beheersen van een tweede taal een beter perspectief voor de toekomst biedt. Hiermee hangt een betere aansluiting op een vervolgstudie samen, aangezien er bij veel studies ook lessen in het Engels gegeven worden of Engelse boeken gebruikt worden. Dit is tevens het enige pluspunt van de Engelstalige wiskundeles dat de leerlingen kunnen noemen: de aansluiting op een (deels Engelstalige) studie waar wiskunde een belangrijk deel van uit maakt. Ze noemen dus geen specifiek aan de wiskunde gerelateerde voordelen. En natuurlijk is er de leerlinge die zegt: *'Ik vind Engels gewoon erg leuk.'* Opvallend is dat ze tegelijkertijd aangeven dat ze onder elkaar slechts zelden in het Engels praten. Hierbij dient opgemerkt te worden dat dit niet op iedere TTO-school het geval is. Door bijvoorbeeld een Engels vlaggetje te plaatsen op de tafel van een leerling die in het Nederlands praat, kan de docent de leerling laten merken dat dit niet de bedoeling is. Teveel vlaggetjes hebben consequenties voor het rapportcijfer.

Als keerzijde van de medaille noemen de leerlingen ook een aantal nadelen van het TTO. Wanneer zij moeite hebben met het begrijpen van de Engelstalige uitleg, worden vaak de Engelse begrippen als struikelblok ervaren. De beheersing

van de Engelse taal door de wiskundeleraar werd door deze leerlingen niet als probleem gezien in de wiskundeles. Ze gaven wel aan dat tijdens andere lessen, wanneer de beheersing van het Engels van de docent onder de maat is, ze moeite hebben met het begrijpen van de uitleg en zelf op een verkeerde manier Engels leren spreken. Het vormt een obstakel in het leerproces: *'Soms gaat de leraar de klas uit om een woordenboek te halen van de gang.'*

Het is goed om te beseffen dat dit soort situaties moeilijk te omzeilen zijn, maar dat de docent hier wel een positieve wending aan kan geven door er een wederzijds leermoment van te maken: de docent kan met de klas bespreken wat de juiste vertaling is en hoe het woord uitgesproken dient te worden.

Leerlingen op de twee door ons bezochte scholen klagen vaak over de hoge werkdruk die het TTO veroorzaakt. Op momenten dat de stof moeilijk wordt, is uitleg in het Engels soms te hoog gegrepen en schakelt de docent over op het Nederlands. En wanneer de stof juist aan de eenvoudige kant is, wordt de uitleg in het Engels gegeven. Dit betekent dat de leerlingen ofwel moeite hebben met de stof, ofwel extra inspanning moeten verrichten om het Engels te begrijpen.

Enkele docenten spreken

De docenten zien een aantal voordelen voor zichzelf. Het ruime aanbod aan Engelstalige materialen en applets die op het Internet te vinden zijn wordt genoemd als een groot voordeel. Deze applets en materialen worden gebruikt naast de Engelstalige

versies van Getal en Ruimte en Moderne Wiskunde. Hierdoor kunnen docenten de les voor zichzelf en voor de leerling aantrekkelijker maken. Een docent beschouwt het lesgeven op een TTO-school als een opstapje naar een carrière in het internationale onderwijs. Andere voordelen voor de docent zijn bijvoorbeeld de afwisseling in de werkzaamheden en het verbeteren van de eigen taalvaardigheid.

Er zijn echter niet alleen voordelen.

Het geven van de lessen in het Engels vraagt om een grondige voorbereiding van elke les, wat meer tijd vergt dan de voorbereiding van een Nederlandstalige les. Daarnaast is er gedurende de les minder ruimte voor nuances. *'Het maken van grapjes is erg moeilijk'*, geeft de docente aan, *'want het begrip van het Engels is bij leerlingen vaak ontoereikend.'* Zodra grapjes, een ironische opmerking of een gezellig praatje niet spontaan meer plaatsvinden, kan de sfeer tijdens de les zakelijker worden.

Als docenten het Engels onvoldoende beheersen, moeten zij dit door middel van een cursus op peil brengen. Een goede zaak, vinden beide docenten, maar het verhoogt ook de werkdruk.

Opvallend is dat er op één van de twee scholen onverwacht veel ordeproblemen in de TTO-klassen zijn, terwijl de TTO-leerlingen gezien worden als de serieuzere, goed gemotiveerde leerlingen. Wellicht moeten de leerlingen wennen aan de situatie waarin zij niet meer altijd de beste van de klas zijn, zoals op de basisschool vaak het geval was.

Tijdens ordeproblemen schakelen de twee docenten, net als bij de uitleg van moeilijke stof, vaak over op het Nederlands. In de eerste weken van het schooljaar wordt er in de brugklas zelfs voor gekozen om de uitleg in twee talen te geven, zodat de leerlingen kunnen wennen aan het Engels. Dit gebeurt niet op alle TTO-scholen. Sommige scholen kiezen ervoor om de leerlingen 'onder te dompelen' in de vreemde taal, wat vaak gezien wordt als een goede manier om een taal te leren. Wel beschikken alle leerlingen over een (al dan niet zelfgemaakte) woordenlijst met Nederlandse wiskundige begrippen en de Engelse vertaling.

Met het oog op de wiskundendidactiek laten de twee docenten weten dat ze de stof niet op een andere manier behandelen dan wanneer ze die stof in het Nederlands uitleggen. Ook de gebruikte methoden zijn grotendeels letterlijke vertalingen van de Nederlands varianten. Op basis hiervan zien wij geen didactische verschillen tussen het geven van wiskunde in het Nederlands of in een andere taal.

Verder geven de docenten aan dat ze het erg jammer vinden dat er alleen in de onderbouw wiskunde in het Engels wordt gegeven. Zij zouden graag zien dat dit in de bovenbouw wordt voortgezet, om op deze manier de aansluiting met het vervolgonderwijs te verbeteren.

De schoolleiding aan het woord

Ook de schoolleiding zou graag zien dat er TTO-lessen in de bovenbouw gegeven konden worden, maar dit wordt niet als haalbaar gezien. De leerlingen kiezen profielen en dit zou betekenen dat dan aan veel kleine groepen leerlingen in het Engels les gegeven moet worden, wat financieel niet haalbaar is en ook organisatorisch lastig kan worden. Bovendien is het eindexamen in het Nederlands en de leerlingen dienen daar goed, dus in het Nederlands, op voorbereid te worden.

De keuze om TTO aan te bieden komt voort uit de wens zich te onderscheiden van andere scholen in de omgeving. Hierdoor wordt de school aantrekkelijker voor meer vwo-leerlingen, bijvoorbeeld voor leerlingen die geen zin hebben in de klassieke talen, maar wel een extra uitdaging willen.

Beide scholen hebben aangegeven de TTO-stroming als iets bijzonders te zien, waar vaak extra aandacht aan wordt geschonken, bijvoorbeeld door vaker met de leerlingen op excursie te gaan. Het TTO wordt op één school zelfs het paradepaardje van de school genoemd.

Tijd om grondig onderzoek te doen naar de consequenties van tweetalig onderwijs voor de kwaliteit van het onderwijs was er niet: *'We hebben op een bepaald moment besloten de sprong in het diepe te maken.'*

Onze conclusies

Op basis van dit kleinschalige onderzoek zijn geen sluitende conclusies te trekken over de kwaliteit van het wiskundeonderwijs in het TTO, maar het is wel duidelijk dat tweetalig onderwijs zowel voor- als nadelen met zich meebrengt. Dit geldt voor zowel het vak wiskunde als voor TTO in het algemeen.

Specifiek voor het vak wiskunde kunnen we, naast het gebruik van Engelstalige websites en applets, maar moeilijk overtuigende voor- of nadelen ontdekken. Didactisch gezien bleken er vrijwel geen verschillen te zijn in de manier waarop onze twee geïnterviewde docenten de stof in het Nederlands dan wel in het Engels behandelen.

Als TTO gewenst is, zullen er nu eenmaal vakken in de vreemde taal gegeven moeten worden en lijkt wiskunde een geschikte kandidaat.

Tot slot

Gedurende dit onderzoek kregen we inzicht in bepaalde aspecten die de keuze voor het opstarten en het continueren van TTO kunnen beïnvloeden en waarvan wij denken dat het interessant kan zijn om hier nader onderzoek naar te doen.

Bij beide scholen kwam naar voren dat onderzoek naar de consequenties van het geven van wiskunde (en andere vakken) in het Engels niet of nauwelijks gedaan is. Tevens bleek dat de docenten op de twee scholen weinig tot geen inspraak hadden in de keuze van de school voor TTO, maar zij waren wel vrij in de keuze om les te geven in de vreemde taal.

9.4 Quadrilaterals

- Figure 9.50 shows six quadrilaterals.
- Which of them has point symmetry? Draw the points of symmetry of those quadrilaterals in your sketchbook.
 - Which of them has line symmetry? Draw the lines of symmetry.



Figure 9.50

Theory A
Figure 9.51 shows the parallelogram PQRS. Side PQ is parallel to side RS, and side QR is parallel to side PS.

Parallelogram

A parallelogram is a quadrilateral whose opposite sides are parallel.



Figure 9.51

A parallelogram is a quadrilateral with point symmetry, which is why it has the following characteristics.

Characteristics of a parallelogram

- A parallelogram has point symmetry.
- The opposite sides are equally long.
- The diagonals intersect at their midpoints.
- The opposite angles are equal.



- Exercise 9.1
- Draw parallelogram ABCD, with $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm and $\angle A = 60^\circ$.
 - Draw the diagonals of the parallelogram and mark the point of intersection S.
 - The diagonal AC divides $\angle A$ into two angles. Measure the angles. Are the two angles the same size?
 - Does the parallelogram have line symmetry?
 - Are the diagonals perpendicular to each other?

- Exercise 9.2
- Draw the parallelogram ABCD on a separate sheet of paper, with $AB = 3$ cm, $AD = 3$ cm and $\angle A = 50^\circ$. Draw the diagonal AC.
 - Cut out the parallelogram and cut it through the middle along AC. Are the resulting two triangles exactly the same?
 - By laying the two triangles next to each other, you can make a different parallelogram. How many variations are possible?
 - Glue the triangles in your sketchbook, in such a way that you have a different parallelogram than the one you started with.
- Exercise 9.3
- Plot the points P(3, 1), Q(5, -1) and R(5, 2).
 - The points P, Q and R are the vertices of parallelogram PQRS. Give the coordinates of vertex S and draw parallelogram PQRS.
- Exercise 9.4
- Why is a rectangle a special kind of parallelogram?
 - Why is a square a special kind of parallelogram?
- Exercise 9.5
- Draw parallelogram ABCD, with $AB = AD = 7$ cm and $\angle A = 70^\circ$.
 - How long is side BC? How long is side CD?
 - Draw the diagonals AC and BD.
 - Are the diagonals perpendicular to each other?
 - The diagonal AC divides $\angle A$ into two angles. Measure the angles. Are the sizes of the angles the same?
 - Does the parallelogram have line symmetry?
 - Draw the two diagonals. From the lines of symmetry of quadrilateral ABCD?



There are parallelograms everywhere.

Theory B
In exercise 9.4, you draw a special parallelogram. What makes it special is that all the sides are the same length. This type of parallelogram is called a rhombus.

Rhombus

A rhombus is a quadrilateral whose sides are all equally long.



FIGUUR 3

Wij zijn van mening dat een gedegen onderzoek naar de consequenties van TTO voor de kwaliteit van het onderwijs, deze kwaliteit alleen maar ten goede kan komen. Hierbij moet er voor het vak wiskunde zeker gekeken worden naar de vakdidactische verschillen tussen het geven van wiskunde in het Nederlands en wiskunde in een andere taal. Uit onze bevindingen met slechts twee docenten, die geen didactische verschillen opmerken, mag niet geconcludeerd worden dat die verschillen er ook niet zijn. Tijdens dit onderzoek kwam verder naar voren dat op deze twee scholen sommige delen van de wiskundestof in het Nederlands worden uitgelegd omdat het Engels niet begrepen wordt. Interessant zou zijn om uit te zoeken of dit op meerdere scholen het geval is en om welke delen van de stof dit gaat, wát daarbij dan de problemen vormen en hoe dit wellicht (in het Engels) opgelost kan worden. Het niveau van het Engels van de docent moet hoog zijn. Het volgen van cursussen om het Engels van docenten te verbeteren of op peil te houden, is lang niet altijd voldoende. Wellicht moeten er strengere eisen aan het Engels van de docenten worden gesteld, bijvoorbeeld het niet mogen verzorgen van onderwijs in de vreemde taal zolang zij de talencursussen nog niet hebben afgerond.

Een interessant laatste punt waar wij tegenaan liepen, is de Wet op het Voortgezet Onderwijs, artikel 6a, lid b^[4]. Vaak wordt gesteld dat examens verplicht in het Nederlands moeten worden afgenomen. Maar in dit artikel staat aangegeven dat scholen in een andere taal dan het Nederlands examens mogen

afnemen 'indien de specifieke aard, de inrichting of de kwaliteit van het onderwijs ... daartoe noodzaakt, overeenkomstig een door het bevoegd gezag vastgestelde gedragscode.' Wij vragen ons af of dit wetsartikel wellicht toch de mogelijkheid biedt tot Engelstalige examens. Het ontbreekt ons aan tijd en kennis om hier verder op in te gaan.

'Thank you for your attention during this class. Homework is written on the blackboard. See you all next Thursday!'

Noten

- [1] De website van het Europees Platform is www.europeesplatform.nl
- [2] De website van het 'Netwerk TTO' is www.netwerktto.europeesplatform.nl
- [3] De totale lijst met eisen is (nog) niet toegankelijk voor het publiek, maar kan bij het Europees Platform worden opgevraagd.
- [4] Zie <http://wetten.overheid.nl>. Zoek op 'Wet op het Voortgezet Onderwijs'.

Over de auteurs

Jos Verhagen (e-mailadres: JVerhagen@comenius.nl) is student aan de eerstegraads lerarenopleiding wiskunde van de TU Delft en werkzaam als docent wiskunde op de bovenbouw-unit van het Comenius College in Capelle aan den IJssel.

Esther van den Akker (e-mailadres: E.vandenAkker@duinzigt.teylingen.nl) studeert eveneens aan de eerstegraads lerarenopleiding van de TU Delft en is daarbij werkzaam als docente wiskunde op het Teylingen College, sector Duinzigt, te Oegstgeest.

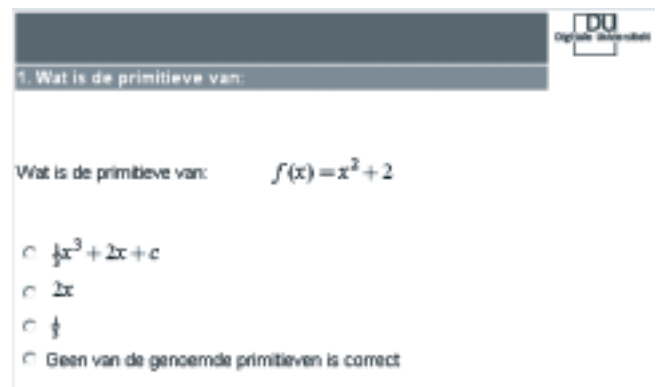
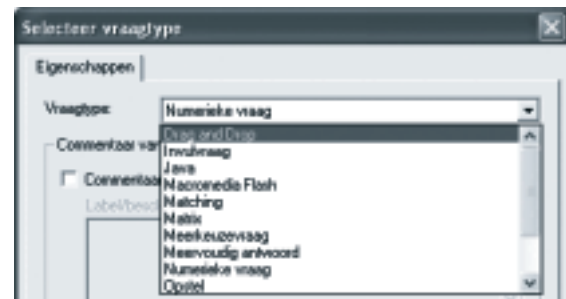
DIGITALE TOETSEN VOOR DE TWEEDEGRAADS LERARENOPLEIDING WISKUNDE

[Hans Krabbendam en Henk Staal]

FIGUUR 1
FIGUUR 2

Inleiding

De tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde hebben de laatste jaren te maken gekregen met een toenemende variatie in soorten studenten die aan de opleiding beginnen. Studenten die direct na de havo of vwo verder studeren aan een tweedegraads lerarenopleiding wiskunde vormen tegenwoordig een minderheid bij de instromende studenten. Het aantal aanmeldingen voor de deeltijdopleiding overtreft het aantal aanmeldingen voor de voltijdopleiding. Deeltijdstudenten hebben meestal een andere studie achter de rug en hebben vaak al jaren een beroep buiten het onderwijs uitgeoefend. Veel studenten combineren de studie met een baan. Sommige studenten hebben al leservaring in een ander vak. Dit vereist flexibiliteit van de opleidingen bij het samenstellen van het studieprogramma voor de verschillende studenten. Het programma voor een docent lichamelijke opvoeding die een bevoegdheid wiskunde wil halen ziet er anders uit dan het programma van een student die een technisch beroep heeft uitgeoefend. De eerste zal zich vooral in de wiskunde moeten verdiepen. Bij de tweede zal het accent liggen op de pedagogisch-didactische aspecten, als tenminste de wiskundekennis nog op peil is. Door deze ontwikkeling is er behoefte ontstaan aan toetsen waarmee snel kan worden nagegaan wat het wiskundig niveau is van de studenten op het moment dat ze de studie beginnen.



Daarnaast moeten ook de vorderingen van studenten op wiskundig gebied vastgesteld kunnen worden. Omdat veel studenten het programma voor wiskunde versneld doorlopen, is het bezwaarlijk om alleen toetsen af te nemen op enkele vaste data per jaar. Het inzetten van digitale toetsen zou een oplossing kunnen zijn.

Omdat deze ontwikkelingen ook gelden voor andere vakken van de tweedegraads lerarenopleiding, is er een project gestart voor het samenstellen van digitale toetsenbanken voor de verschillende vakken van de tweedegraads lerarenopleidingen en het vaststellen van het gewenste niveau voor de verschillende vakken. Dit project loopt via de Digitale Universiteit (www.du.nl), een samenwerkingsverband van tien hogescholen en universiteiten dat zich richt op vernieuwingen waarbij informatietechnologie een belangrijke rol kan spelen. Bij de Digitale Universiteit kunnen projecten worden aangevraagd. Het project Digitale Voortgangstoetsen Wiskunde is een deelproject. In dit artikel wordt de stand van zaken bij dit deelproject uiteengezet en enkele voorbeeldtoetsopgaven gepresenteerd. Aangezien het niveau van de studenten overlappend is met dat van het voortgezet onderwijs, kunnen de resultaten van het project ook zinvol zijn voor bijvoorbeeld havo/vwo.

Bedoelingen en randvoorwaarden

De opdracht van het project is: ontwerp een itembank die kan dienen om toetsen samen te stellen waarmee voortgang en niveau van studenten in hun vakstudie kan worden bijgehouden. De itembank moet ook geschikt zijn om intake-toetsen samen te stellen die afgenomen kunnen worden bij de start van de opleiding. Daarnaast moet worden geformuleerd wat het beginniveau, het propedeuseniveau en het eindniveau voor wiskunde moeten zijn. De toetsen moeten via internet beschikbaar komen voor de studenten en de score moet automatisch vastgesteld kunnen worden. Om dit alles te kunnen realiseren heeft de Digitale Universiteit gekozen voor het toetsontwerppakket Questionmark Perception, een uitvoerig programma met zeer veel typen vragen, bijvoorbeeld multiple choice, multiple response, open, fill in blanks, etc.; zie [figuur 1](#).

Er is in dit programma heel veel mogelijk. Zo heeft Questionmark Perception de mogelijkheid om toetsen via internet beschikbaar te stellen en allerlei statistieken over de afgenomen toetsen bij te houden. De invalshoek is echter nogal tekstgericht. Ook de projectgroep wiskunde moet de toetsen met dit programma maken.

De projectgroep wiskunde

In de projectgroep wiskunde zijn verschillende opleidingen vertegenwoordigd: EFA, Fontys, Hogeschool van Utrecht, Hogeschool Rotterdam, Open Universiteit. Bij het ontwerpen van de vragen lag er het gegeven

dat er gewerkt moest worden met toetsen waarbij de score automatisch vastgesteld kan worden. In de inleidende discussies werd echter al snel na de start duidelijk dat de projectgroep bij het soort vragen niet direct dacht aan vragen als die in [figuur 2](#). De projectgroep wilde de mogelijkheid hebben om toetsvragen te maken waarbij ook het inzicht van studenten en het vermogen om wiskunde toe te passen in een meer complexe situatie getoetst kunnen worden. Daartoe formuleerde de projectgroep de volgende wensen met betrekking tot de aard van de te ontwerpen vragen:

- In de toetsvragen moeten hulpmiddelen kunnen worden opgenomen waarmee de student berekeningen kan uitvoeren en grafieken kan tekenen.
- Om binnen een vraag onderzoekend bezig te kunnen zijn moet er de mogelijkheid bestaan om applets (bij meetkunde bijvoorbeeld Cabri-applets) in de toetsvragen op te nemen.
- Er moet de mogelijkheid zijn om vragen te stellen waarbij de student een functievoorschrift of formule als antwoord moet invoeren, die dan vervolgens gecontroleerd moet kunnen worden op correctheid.

Daarnaast stelde de projectgroep vast dat de digitale toetsen slechts een deel van de bestaande vormen van toetsen kunnen vervangen. Naast digitale toetsen blijven toetsen met open vragen nodig, bijvoorbeeld om te toetsen of studenten een correcte redenering kunnen opzetten. En digitale toetsen kunnen presentaties van eigen onderzoek van studenten niet vervangen. Juist in een lerarenopleiding blijft dit onderdeel belangrijk. Intussen bleek dat voor de wensen a en b Questionmark Perception voldoende mogelijkheden bood. Door gebruik te maken van open bronnen is de projectgroep erin geslaagd applets te maken voor het tekenen van grafieken, het uitvoeren van berekeningen en het manipuleren van meetkundige figuren; het lukte ook om die applets op te nemen in toetsvragen.

Voor onderdeel c is er een apart project gestart, uitgevoerd door de Universiteit Twente. Inmiddels is via dit project de mogelijkheid gerealiseerd om door studenten ingevoerde formules op de achtergrond te laten controleren door Maple, een computeralgebrapakket. Probleem is nog dat er op deze manier verschillende soorten software in huis zijn gehaald, die wat betreft de bediening van de formule-editor verschillen. Er waren tot nu toe geen middelen om een formule-editor te laten maken die geheel aan de wensen van de projectgroep voldoet. Dit blijft een belangrijk punt in het wensenlijstje van de projectgroep.

Niveaus

De projectgroep heeft vastgesteld wat gemeenschappelijke elementen zijn in het curriculum van de diverse wiskunde-opleidingen en heeft op basis daarvan een niveau-indeling in wiskundige

onderwerpen en vaardigheden ontworpen. Daarbij is uitgegaan van publicaties die er al waren voor het voortgezet onderwijs (examenprogramma's) en eindtermen die geformuleerd zijn door het Project Management Lerarenopleidingen (PML).

Er zijn vijf kennis/vaardigheidsniveaus voor

- wiskunde voor de lerarenopleiding beschreven:
- niveau 1, elementair niveau (vergelijkbaar met wiskundekennis op ca. havo-3)
- niveau 2, startniveau (vergelijkbaar met havo B1)
- niveau 3, propedeuse-niveau (vergelijkbaar met vwo-B12)
- niveau 4, hoofdfase (vergelijkbaar met vwo-plus van het PML)
- niveau 5, verdiepingsniveau (voorbereiding voor eerstegraads vervolgoopleiding)

Toelichting

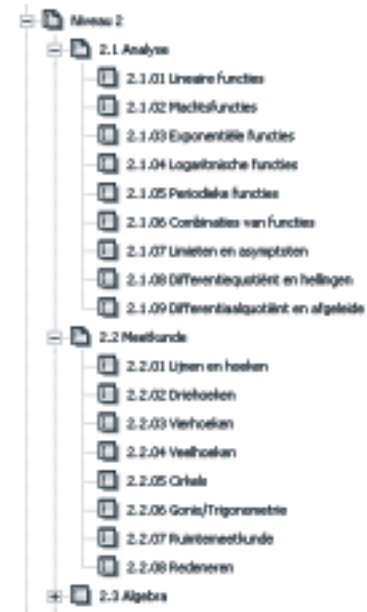
- Niveau 1 is geformuleerd als een soort minimaal niveau van 'gewone' wiskundekennis, zonder welk geen wiskundestudie mogelijk is.
- Lerarenopleidingen starten met als uitgangsniveau havo wiskunde B1, hoewel B12 eigenlijk voor de hand ligt. Eerst worden dan ook de deficiënties weggewerkt die B1-ers nog hebben ten opzichte van B12-ers. Niveau 2 is dan ook te zien als een soort instapniveau dat met name ook kan functioneren als beginniveau voor instromende deeltijders en zij-instromers.
- Niveau 3 t/m 5 spelen in de lerarenopleiding, en over de inhoud van 3 en 4 is redelijke overeenstemming. Daarna lopen de inhoudten sterk uiteen in wat we tegenwoordig het verdiepingsniveau (niveau 5) noemen.

Op het ogenblik is binnen de lerarenopleiding het meest behoefte aan toetsen op de niveaus 2 en 3, dit in verband met de gevarieerde instroom en de 'gewone' en versnelde trajecten. In het project zijn ook met name die niveaus ingevuld.

Subtopics

Na het vaststellen van de niveaus zijn onderverdelingen gemaakt. Gekozen is daarbij voor de leerstof domeinen die binnen de wiskunde zijn te onderscheiden. Uiteraard zou een andere indeling ook mogelijk zijn geweest, maar deze bood de beste kansen om te komen tot adequate toetsitems. Zo zitten in alle niveaus de volgende zes subtopics: Analyse, Meetkunde, Algebra, Kansrekening en Statistiek, Lineaire Algebra en Allerlei. Vervolgens is verder onderverdeeld en zijn de kennis en vaardigheden beschreven in de verschillende subtopics, zodat bijvoorbeeld in niveau 2 het beeld van [figuur 3](#) ontstaat.

Bij elk item zijn vervolgens kennen-en-kunnen lijstjes gemaakt; zie bijvoorbeeld [figuur 4](#) bij 2.1.02. Door deze (sub)indelingen ontstaan per niveau dus ongeveer 60 'bakjes' waarin toetsvragen kunnen worden gedaan. Voor niveau 2 en 3 zijn door het project die bakjes gevuld met ongeveer 10 tot 20 vragen per bakje.



2.1.02 Machtsfuncties

- Z102_1 Bij functies van de vorm $f(x) = c \cdot x^p$ (c een reëel getal, p een rationaal getal) de invloed van de parameters kennen op het verloop van de grafieken (inclusief de ligging van eventuele asymptoten) van deze functies.
- Z102_2 Vergelijkingen van het type $f(x) = c$ en $f(x) > g(x)$ kunnen oplossen, waarbij f en g machtsfuncties zijn.
- Z102_3 Ongelijkheden van het type $f(x) > c$ en $f(x) > g(x)$ oplossen, waarbij f en g machtsfuncties zijn.
- Z102_4 De eigenschappen en grafieken van $f(x)+c$, $f(x+c)$, $c \cdot f(x)$ en $f(c \cdot x)$ in verband brengen met de eigenschappen en de grafiek van de machtsfunctie f .
- Z102_5 Extremes waarden en nulpunten van kwadratische functies bepalen met behulp van een algoritme.
- Z102_6 Machtsfuncties gebruiken bij het oplossen van daartoe geschikte praktische problemen.

wiskundeOma

3. 03 Asymptoten

Bij deze opgave kun je het volgende grafiekenprogramma gebruiken.

Opgave is de functie $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$

Vink hieronder **alle** ware beweringen aan.

- ☐ Voor elke waarde van x die niet gelijk is aan 0 geldt: $f(x) > 2.001$
- ☐ Voor elke waarde van x die niet gelijk is aan 0 geldt: $f(x) > 2$
- ☐ Voor elke waarde van x die niet gelijk is aan 0 geldt: $f(x) = 1$
- ☐ De lijn $y=2$ is asymptoot van de grafiek van f
- ☐ De lijn $y=1$ is asymptoot van de grafiek van f

Voorbeelden van vragen

Via www.henkstaal.nl zijn negen voorbeelden van opgaven te zien. Deze vragen zijn bedoeld voor studenten die met deze voorbeelden kunnen wennen aan de manier van vragen en de hulpmiddelen die gebruikt kunnen worden. De opgaven demonstreren ook enkele van de mogelijkheden die Questionmark Perception biedt.

Als voorbeeld nemen we hier opgave 9 op (zie [figuur 5](#)). De andere opgaven zijn via de genoemde website te bekijken, maar worden ook hieronder kort besproken.

Nieuw is hier de animatie van de beweging van een punt over een grafiek. Dat is hier gedaan met een applet. In Questionmark Perception is ook de mogelijkheid om video-fragmenten, al of niet met geluid, op te nemen.

We lopen de andere vragen kort langs. Het is handig daarbij de website ernaast te hebben.

Opgave 1

Om de straal te berekenen van een bol met een gegeven inhoud kan gebruikt gemaakt worden van de rekenmachine in de vraag. Deze rekenmachine is een applet. Een benadering van π krijg je door 'pi' in te typen.

De opgavenauteur heeft verschillende mogelijkheden om in te stellen welke antwoorden goed gerekend moeten worden. Studenten zijn geïnstrueerd om in decimale getallen de punt te gebruiken. Je kunt instellen dat 5,5 ook goed gerekend wordt. Er is ook de mogelijkheid om grenzen aan te geven waarbinnen het antwoord moet vallen. Je zou hier ook kunnen instellen dat alle antwoorden tussen 5 en 6 goed gerekend worden.

Opgave 2

Het gaat hier om het combineren van grafieken van functies en grafieken van de afgeleiden van die functies. De grafieken van de afgeleiden moeten met de muis naar de goede plek versleept worden. De auteur van de vraag kan voor elke grafiek vastleggen in welk gebied die grafiek terecht moet komen. Daar kan een score aan gekoppeld worden. De auteur van deze vraag heeft dit zo ingesteld dat er slechts gescoord wordt als alle grafieken goed geplaatst worden.

Opgave 3

Als hulpmiddel is in deze vraag een applet opgenomen waarmee de studenten de grafiek van f kunnen tekenen in elk gewenst gebied. De vraag wordt pas als goed beantwoord gezien als alle ware beweringen aangevinkt zijn. Desgewenst kan ook een deel van de score worden toegekend bij andere antwoorden.

Opgave 4

Een voorbeeld van een veelkeuzevraag. Uit de vier mogelijkheden moet de goede geselecteerd worden. In

deze opgave is te zien dat ook illustraties in de vraag opgenomen kunnen worden.

Opgave 5 t/m 8

Hier worden dezelfde grafische mogelijkheden gebruikt als in de voorgaande vragen. Er worden meer antwoorden verlangd. De score is weer door de auteur van de opgave in te stellen. Dat is hier zó gedaan dat elk goed antwoord apart gescoord wordt.

Afwegingen en voorlopige conclusies

Met Questionmark Perception is het mogelijk om allerlei grafische en dynamische mogelijkheden van de computer te benutten. Ook kan de score van de opgaven op verschillende manieren ingesteld worden. Je kunt meer antwoorden vragen, waarbij elk antwoord een aparte score heeft. Ook kan aan elke vraag feedback worden toegevoegd, afhankelijk van het ingevoerde antwoord. Questionmark Perception biedt verder de mogelijkheid om alle gegeven antwoorden en toegekende scores op te slaan. De kwaliteit van de vragen kan dus achteraf statistisch onderzocht worden.

Voorlopige experimenten stemmen tot tevredenheid. Technisch loopt het allemaal redelijk. Wel is de beschikbaarheid en het operationeel zijn van computers ter plaatse soms een probleem. De vragen worden over het algemeen gewaardeerd en dekken de stof redelijk, zij het dat belangrijke onderdelen van het curriculum in een dergelijke toetsvorm niet voldoende aan bod kunnen komen.

Belangrijk bij dit alles is de manier waarop de toetsen gebruikt worden. Ze zijn geschikt om snel een indruk te krijgen van de vorderingen van studenten of van het niveau van instromende studenten voor bepaalde wiskundige vaardigheden op nauw omschreven leerstofgebieden. In de opleiding spelen het opzetten en weergeven van een goede redenering, het uitvoeren van een onderzoek en het houden van presentaties een belangrijke rol. De toetsen zijn niet geschikt om voor deze onderdelen de vorderingen van studenten te evalueren.

Bovendien vergt het een forse investering om een goede toetsenbank in elkaar te zetten. Daar staat tegenover dat, als dit eenmaal gebeurd is, je geen tijd meer kwijt bent aan correctie en je op elk moment kunt beschikken over toetsen en herkansingen. Bovendien zijn de toetsopgaven gekoppeld aan eindtermen en zijn ze door een team van docenten samengesteld. Dat komt de kwaliteit ten goede.

Over de auteurs

Hans Krabbendam is verbonden aan de Fontys Lerarenopleiding in Tilburg en van daaruit onder meer betrokken bij het project digitale voortgangstoetsen van de Digitale Universiteit.

Henk Staal is via zijn werkzaamheden als docent aan de Educatieve Hogeschool van Amsterdam betrokken bij projecten van de Digitale Universiteit.

Commentaar is welkom op hun e-mailadressen,

H.Krabbendam@fontys.nl en H.J.P.Staal@planet.nl.

EEN MEETKUNDIGE CONSTRUCTIE VAN DE SOM VAN EEN MEETKUNDIGE RIJ

[Dick Klingens]

Ἐὰν ὥσιν ὅσοιδηποτὺν ἀριθμοὶ
ἐξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ
ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ
ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ, ἔσται
ὥς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς
τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ
ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς προ-
έαυτοῦ πάντας.

Iets verder dan Euclides deed

Er wordt door sommigen nog wel eens gedacht dat Euclides (hij leefde rond 300 v. Chr.) alleen over meetkunde heeft geschreven. Dat dat niet zo is, blijkt onder meer aan het einde van boek IX van zijn *Elementen* waarin hij de door ons wellicht wat lastig te doorgronden propositie 35 formuleerde:

Indien er willekeurig veel getallen zijn, opvolgend evenredig, en er worden van het tweede en laatste <getallen> afgenomen, gelijk aan het eerste, dan zal, zooals het overschot van het tweede tot het eerste, zoo het overschot van het laatste tot alle aan hem voorafgaande staan.

Wat Euclides hier schreef^[1], heeft betrekking op een meetkundige rij $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ (opvolgend evenredige getallen). En propositie 35 zegt dan in hedendaagse terminologie:

$$\frac{ar - a}{a} = \frac{ar^n - a}{a + ar + \dots + ar^{n-1}}$$

waaruit de (ons) bekende formule voor de som S_n van de eerste n termen (de n -de partiële som) van die rij direct volgt:

$$S_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Maar Euclides ging met die meetkundige rij niet veel verder. Hij gebruikte propositie 35 alleen voor de er op volgende bijzondere stelling over volmaakte getallen.^[2]

Wij zullen in het onderstaande wel wat verder gaan, maar we blijven daarbij in de traditie van Euclides:

we geven een meetkundige interpretatie van de somformule.

Constructie met een scherpe hoek

We weten dat bij een meetkundige rij $a, ar, \dots$ met $-1 < r < 1$ geldt:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{a}{1 - r}$$

Het getal S wordt dan wel de 'som van de meetkundige rij' genoemd.

Wegens $-1 < r < 1$ kunnen we bij elke r een hoek φ vinden, waarvoor $r = \cos \varphi$. Voor deze waarden van r kunnen we φ berekenen met $\varphi = \arccos r$, met φ liggend tussen 0° en 180° , want we houden het hier maar bij graden.

We nemen φ eerst scherp.

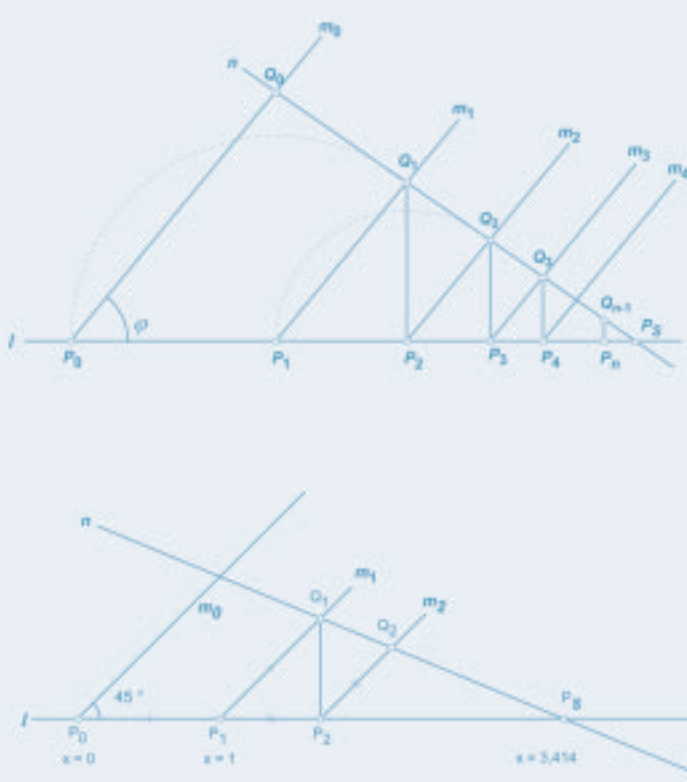
Op een lijn l , die we opvatten als x -as, kiezen we de punten P_0 en P_1 zo, dat $P_0P_1 = 1$. Met P_0 als beginpunt tekenen we de halve lijn m_0 met $\angle(l, m_0) = \varphi$ (zie figuur 1).

Vervolgens tekenen we met P_1 als beginpunt een halve lijn $m_1 \parallel m_0$ en kiezen daarop het punt Q_1 zo, dat $P_1Q_1 = P_1P_0 (= 1)$. Dan laten we uit Q_1 de loodlijn neer op l met voetpunt P_2 op l .

In driehoek $P_1Q_1P_2$ is nu $P_1P_2 = P_1Q_1 \cdot \cos \varphi = \cos \varphi$, zodat:

$$P_0P_2 = 1 + \cos \varphi$$

En we herhalen deze werkwijze: met punt P_2 als beginpunt tekenen we een halve lijn $m_3 \parallel m_1$ en kiezen daarop Q_2 zo, dat $P_2Q_2 = P_2P_1$. Enzovoorts.



FIGUUR 1
FIGUUR 2

Nu is:

$$P_2P_3 = P_2Q_2 \cdot \cos \varphi = P_1P_2 \cdot \cos \varphi = \cos^2 \varphi$$

En dus geldt:

$$P_0P_3 = 1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi$$

Voor het op deze manier geconstrueerde punt P_n op l geldt dan:

$$P_0P_n = 1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \dots + \cos^{n-1} \varphi$$

Het lijkt erop dat we dit proces oneindig vaak moeten herhalen, maar, zoals we zullen zien, is eenvoudig – en meetkundig – aan te tonen, dat we aan de eerste twee stappen van het proces genoeg hebben om $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0P_n$ te vinden.

We bekijken de rechthoekige driehoeken $P_1Q_1P_2$ en $P_2Q_2P_3$. Deze driehoeken zijn gelijkvormig; ze hebben immers beide een hoek φ en beide een hoek van 90° .

De punten Q_1, Q_2 bepalen nu een rechte lijn n en daarop liggen dan ook, vanwege de gelijkvormigheid, de punten $Q_3, Q_4, \dots, Q_{n-1}$.

Voor scherpe φ snijdt n de lijn l in het punt P_S .

We beweren nu dat P_0P_S gelijk is aan de som van een meetkundige rij met reden $\cos \varphi$.

Bewijs. We hebben

$P_1Q_1 = 1, P_2Q_2 = \cos \varphi, P_3Q_3 = \cos^2 \varphi, \dots$; voorwaar, een meetkundige rij met reden $\cos \varphi$.

De driehoeken $P_0Q_0P_S, P_1Q_1P_S, \dots$ zijn alle gelijkvormig (hh); en er geldt: $P_0Q_0 = \frac{1}{\cos \varphi}$. Bij de eerste twee driehoeken in deze opsomming is dan:

$$\frac{P_0P_S}{P_0Q_0} = \frac{P_1P_S}{P_1Q_1}, \text{ of met } |P_0P_S| = S,$$

$$\frac{S}{\frac{1}{\cos \varphi}} = \frac{S-1}{1}, \text{ zodat}$$

$S \cdot \cos \varphi = S-1$, waaruit volgt:

$$S = \frac{1}{1 - \cos \varphi}$$

P_0P_S is dus gelijk aan de som van de meetkundige rij $1, \cos \varphi, \cos^2 \varphi, \dots$

En dat we alleen de eerste twee stappen van het constructieproces nodig hebben om P_S te construeren, komt doordat de lijn n bepaald is door de punten Q_1 en Q_2 .

Voorbeelden. Voor $\varphi = 60^\circ$ hebben we

$$S = \frac{1}{1 - \cos 60^\circ} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \text{ Het gaat hier}$$

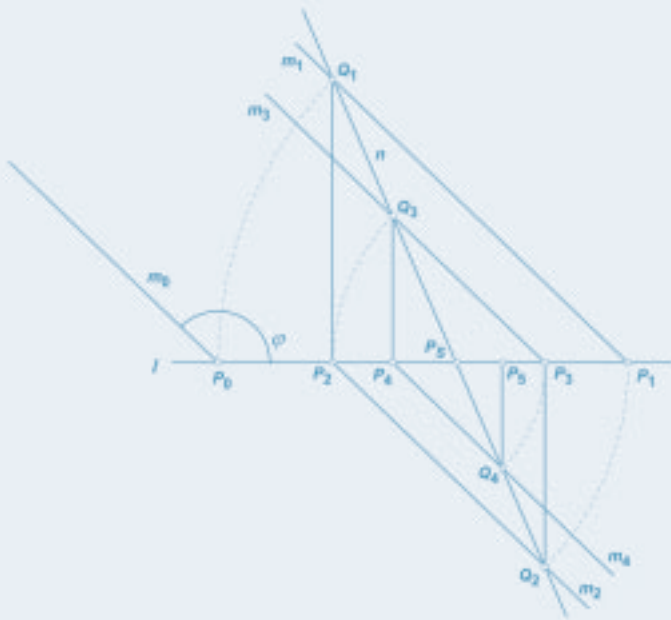
dus om de som van de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$.
Kiezen we $\varphi = 45^\circ$ (we kijken nu naar de som

$1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4} + \dots$), dan vinden we:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} \approx 3,414 \text{ (zie figuur 2).}$$

Voor $\varphi = 90^\circ$ ligt Q_1 op de loodlijn op l in P_1 , zodat elke volgende Q_k ($k \geq 2$) samenvalt met P_1 . En dan is ook $P_1 \equiv P_S$, zodat $S = 1$, hetgeen overeenkomt met de som van de rij $1, 0, 0, \dots$ (in dit geval is immers $r = \cos 90^\circ = 0$).

Als φ nadert tot 0° ($r = 1$), nadert de lijn n tot de



FIGUUR 3

lijn l , waarbij de punten P_k (voor $k \geq 2$) naar rechts schuiven, immers de lengtes van de lijnstukken $P_{k-1}P_k$ naderen dan tot 1. De lijn n gaat horizontaal lopen en valt, in uiterste stand, samen met l . Het aantal snijpunten van n en l is dan oneindig groot. De rij 1, 1, 1, ... divergeert.

Constructie met een stompe hoek

Is de hoek φ stomp, dan moeten we bij de constructie rekening houden met het feit dat nu $\cos \varphi < 0$. In de vorige paragraaf (φ scherp) konden we eenvoudig de lengte $\cos^n \varphi$ van het lijnstuk $P_n P_{n+1}$ optellen bij de som van de daaraan voorafgaande lijnstukken:

$$P_0 P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^k \varphi. \text{ Dat kan nu niet meer... Maar,}$$

we zullen zien dat we dit probleem kunnen oplossen door de halve lijnen m_k om en om in tegengestelde richting te tekenen.

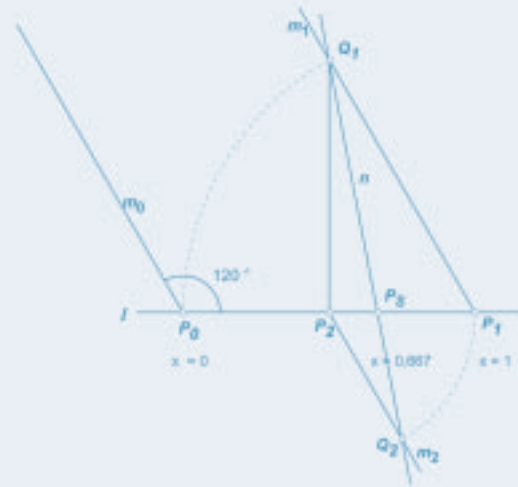
De halve lijn m_0 maakt dus in P_0 een stompe hoek met de lijn l (zie figuur 3). Op de lijn $m_1 \parallel m_0$ door P_1 (waarbij weer $P_0 P_1 = 1$) kiezen we ook nu Q_1 met $P_1 Q_1 = P_1 P_0$. Het punt P_2 vinden we weer met de loodlijn uit Q_1 op l . Nu is $P_1 P_2 = -\cos \varphi$; echter, voor $P_0 P_2$ hebben we daardoor toch:

$$P_0 P_2 = 1 - (-\cos \varphi) = 1 + \cos \varphi$$

En we herhalen het constructieproces...

Bewijs. In driehoek $P_2 Q_2 P_3$ geldt dan:

$$\frac{P_2 P_3}{P_2 Q_2} = \frac{P_2 P_3}{P_1 P_2} = \frac{P_2 P_3}{-\cos \varphi} = -\cos \varphi$$



FIGUUR 4

zodat $P_2 P_3 = \cos^2 \varphi$, waaruit weer volgt dat

$$P_0 P_3 = 1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi$$

Voor een willekeurig punt P_n op l is ook in dit geval:

$$P_0 P_n = 1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \dots + \cos^{n-1} \varphi$$

We krijgen twee stelsels geneste rechthoekige, en gelijkvormige, driehoeken $P_k Q_k P_{k+1}$ waarvan de hoekpunten Q_k weer op één rechte lijn n liggen. En deze lijn n snijdt de lijn l in het punt P_S .

Merk hierbij op dat de punten P_{2k} links van het punt P_S liggen, en de punten P_{2k+1} rechts van P_S . Daardoor naderen de partiële sommen van de rij dus afwisselend van de 'onderkant' en de 'bovenkant' tot S , afhankelijk van het optellen van een even of oneven aantal termen.

Voorbeelden. Voor $\varphi = 120^\circ$ krijgen we de meetkundige rij met $u_n = (-\frac{1}{2})^n$ als algemene term, zodat (zie figuur 4):

$$S = \frac{1}{1 - \cos 120^\circ} = \frac{1}{1 + \cos 60^\circ} = \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

Kiezen we $\varphi = 135^\circ$, dan is (zie figuur 5):

$$S = \frac{1}{1 - \cos 135^\circ} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \approx 0,586$$

Als φ nadert tot 180° , dan bewegen de punten P_{2k} zich naar P_0 en de punten P_{2k+1} naar P_1 . De punten Q_{2k} en Q_{2k+1} naderen tot een positie vlak bij de loodlijnen op l in opvolgend P_1 en P_0 . Het punt P_S nadert daardoor tot het midden van $P_0 P_1$ (zie figuur 6, waarin boven $\varphi = 167^\circ$, en onder $\varphi = 172^\circ$).

Kerndoelen en schoolautonomie

[Bert Zwaneveld]

Wiskunde: drie vormen?

In *Trouw* van 14 september 2005 wordt aandacht besteed aan een serie debatten die de SLO organiseert over wat leerlingen in het primair onderwijs moeten leren, en dan met name voor rekenen-wiskunde. Ik wil het in deze column hebben over de wiskundige inhoud in het primair onderwijs en de manier waarop scholen om kunnen gaan 'met de autonomie die zij steeds meer krijgen' (citaat uit het artikel). Die grotere autonomie verwijst natuurlijk naar het overheidsbeleid.

Aan de hand van voorbeelden met procenten worden drie vormen van wiskunde onderscheiden: burgerwiskunde, professionele wiskunde en wetenschappelijke wiskunde (zie figuur 1). In een publicatie van de SLO uit 2004, *Wat gaan we leren? Het kiezen van inhoud voor onderwijs* (door Jos Letschert, Annette Thijs en Joost Klep, ISBN 90-329-2180-0), wordt deze driedeling, zonder voorbeelden en zonder de labels als burgerwiskunde, in abstractere termen geformuleerd (blz. 111): ... *dat er in de samenleving een groep 'lekenwiskundigen' is die niet vaak actief rekenen of wiskunde doet, dat er een groep 'wiskundegebruikers' is die wiskunde gebruikt, inclusief rekenmachines, computers en meet- en regelapparatuur, en dat er een groep professioneel wiskundig onderlegden ('expertwiskundigen') moet zijn, die wiskunde in allerlei gebieden ontwikkelt*. En eerder, op blz. 100, staat dat de wiskundige methoden, of de manieren waarop een wiskundig oordeel tot stand komt, op een soort schaal zijn weer te geven met als uitersten: aan de ene kant die van het formalisme, aan de andere kant die waarbij de aanschouwelijkheid de doorslaggevende factor is. Bij de bewering dat van $y = x^2$ de afgeleide $y' = 2x$ is, hoort een formele redenering. Inzien

dat de som van de eerste n oneven getallen n^2 (het n -de vierkantsgetal) is, kan met behulp van een plaatje. Deze benadering is vergelijkbaar met de niveautheorie van Pierre van Hiele.

Verschillen tussen leerlingen

Uitgangspunt in het artikel in *Trouw* is dat 'uit onderzoek blijkt dat op elfjarige leeftijd de bovenste en onderste groep al mijlenver uit elkaar liggen' (citaat Joost Klep), zodat er naar inhoud gedifferentieerd moet worden. Scholen zouden er zelfs voor kunnen kiezen niet elke vorm van wiskundige inhoud aan te bieden. Want kennelijk is voor veel leerlingen het methodisch wiskundig doordenken van bepaalde verschijnselen niet (meer) haalbaar. Hoewel tegen de realiteit ingaan weinig zinvol is, voel ik veel verzet bij mezelf tegen deze aanpak, zeker als er vanuit de kennismaatschappij geredeneerd wordt. Het voorbeeld van figuur 1, waarvoor waarschijnlijk eerder *Trouw* dan de SLO verantwoordelijk is, maakt duidelijk dat een bepaalde wiskundige inhoud (hier procenten) maar één aspect is; een ander, en in mijn ogen minstens zo belangrijk aspect is: hoe pak je een probleem aan? En in de kennismaatschappij gaat het er juist om dat je niet alleen kennis van bepaalde wiskundige inhoud hebt, maar ook weet hoe je actief een probleem kunt aanpakken en niet passief bij de pakken neerzit.

Probleemaanpak en inzicht

Mijn visie op het onderwijs over procenten is dat het er juist op gericht zou moeten zijn leerlingen te leren om, afhankelijk van de situatie waarin procenten voorkomen, de goede of handige 'vertaling' van 25% te kiezen: soms 25/100, soms 'een kwart van', soms $\frac{1}{4}$, soms (eventueel in een paar stappen) $\frac{7}{28}$, maar

Komt in plaats van de kerndoelen straks wiskunde à la carte?

Hoeveel is 25 procent van 28? De uitkomst is uiteraard 7. Dit probleem kan op drie manieren worden behandeld; iedere aanpak leert verschillende vaardigheden.

■ **Burgerwiskunde:** als ik 25 procent korting krijg op een product van 28 euro, hoeveel moet ik dan beta-

len? (antwoord: 21 euro)

■ **Professionele wiskunde:** als bedrijfsleider verkoop ik normaal 10 producten van 28 euro, maar 14 producten als ik 25 procent korting geef. Loont het om korting te geven? (antwoord: ja, ik krijg 14 euro meer)

■ **Wetenschappelijke wiskunde:** 25 procent van 28, dat is een vierde deel, dat is $\frac{7}{28}$ en $\frac{25}{100}$, die breuken hebben dezelfde waarde. Werkt dat ook zo met 50 procent van 28? (antwoord: ja, $\frac{1}{2}$ is $\frac{14}{28}$ is $\frac{50}{100}$. Vraag kan worden uitgebreid naar alle percentages.)

soms ook 0,25 maal ... Dit laatste zeker in geval van minder mooie getallen. Zo ligt bij 3,6% rente 0,036 maal ... of misschien zelfs 1,036 maal ... erg voor de hand. En als de uitkomst dan met behulp van een apparaat bepaald wordt, is daar niets mis mee. 'In een samenleving die zit te wachten op goedopgeleiden' (citaat uit het artikel) zijn het hebben van inzicht en het beschikken over manieren om problemen aan te pakken minstens zo belangrijk als kennis; inzicht in de zin van Pierre van Hiele: adequaat en intentioneel kunnen handelen in een nieuwe situatie. Volgens mij heeft de (kennis)samenleving niet alleen behoefte aan dergelijk onderwijs, maar daar ook gewoon recht op. Sterker: dergelijk onderwijs is een noodzakelijke voorwaarde om tot die kennissamenleving te komen. Met dit pleidooi voor onderwijs gericht op inzicht en leren problemen aan te pakken, bedoel ik overigens niet te betogen dat alle leerlingen hoe dan ook tot het hoogste inzicht gebracht moeten worden. Daarvoor zijn er inderdaad te grote verschillen tussen leerlingen. Wel bedoel ik, dat altijd geprobeerd wordt leerlingen tot zo groot mogelijk inzicht te brengen. Want het opereren als burger in de huidige complexe maatschappij betekent dat je geleerd moet hebben om te gaan met situaties die anders zijn dan die van school en waarbij je vrijwel zeker niet kunt volstaan met eenvoudige algoritmes. Evenmin wil ik iets afdoen aan de poging om het denken over de inhoud van wiskunde in het primair onderwijs te structureren op de manier zoals in genoemde publicatie van de SLO.

Autonomie?

Als meer autonomie voor de scholen zou betekenen dat scholen er bewust voor kiezen om hun leerlingen

dit te onthouden en zich ook zo gaan profileren, bijvoorbeeld doordat zij meer aan de kunstzinnige dan aan de cognitieve vorming doen, beschouw ik dat dus als een zeer ongewenste ontwikkeling. Ook kan ik me niet voorstellen dat ouders hierop zitten te wachten. Daar komt nog bij dat veel ouders vermoedelijk nauwelijks in staat zijn, de consequenties van dergelijke keuzen te overzien.

Competenties van de leraar

In de vorige aflevering van deze serie columns heb ik als centrale competenties van de professionele leraar onder andere genoemd: de leerlingen van basale begrippen (bijvoorbeeld procenten) de betekenis en het gebruik te onderwijzen, hen te leren problemen aan te pakken, hen te motiveren door ze uitdagende wiskunde voor te zetten. De leraar die zich beperkt tot het leren van het correct uitrekenen van 25% van 28 is in mijn ogen niet professioneel bezig, aannemend dat die leraar zich altijd beperkt tot dergelijke algoritmes. Want het leren van algoritmes impliceert meestal geen kennis van betekenis en gebruik van de voorkomende begrippen, draagt niet bij aan het leren oplossen van problemen en is zeker niet uitdagend. De kerncompetentie van de professionele leraar is: leerprocessen bij de leerlingen op gang brengen die hen tot de toppen van hun kunnen brengen. En als er dan leerlingen bij zijn die voor hun top afhaken, dan zij dat zo, maar de leerkracht moet er wel eerst alles aan gedaan hebben.

Over de auteur

Bert Zwaneveld (e-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl) is hoogleraar 'professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit Nederland.

Verschenen / Environmental Mathematics in the Classroom

Editors: B.A. Fusaro, P.C. Kenschaft (2003) Uitgever: The Mathematical Association of America Prijs: \$ 51,95 ISBN: 0-88385-714-6, 255 pag.

Het boek bevat 14 artikelen die zijn voorzien van voorbeelden en opdrachten. De artikelen hebben alle betrekking op milieuproblemen en daarmee verwante problemen (zoals weersvoorspelling) die met wiskundige methoden kunnen worden aangepakt (maar uiteraard niet opgelost). Voor leerlingen in de Tweede fase kunnen deze artikelen dienen als basis voor een profielwerkstuk of als praktische opdracht. 'Environmental mathematics seeks to marry the most pressing challenge of our time with the most powerful technology of our time - mathematics.'



Verenigingsnieuws

Nieuws van het Wereldwiskunde Fonds (WwF)

[Wim Kuipers]

Een volgende WwF-projectronde

De volgende Wereldwiskunde Fonds-projectronde is onlangs van start gegaan. Op de NVvW-site treft u uitgebreidere informatie over de criteria die bij het toekennen van projectgelden gehanteerd worden. Bent u betrokken bij zo'n project of kent u iemand die dat is, dan kunt u een aanvraag indienen bij de secretaris van het Wereldwiskunde Fonds, Wim Kuipers (t: 038-4447017, e: w.kuipers@nvvw.nl). U kunt de aanvraag het beste eerst even met hem doorspreken. Aanvragen moeten vóór 10 januari 2006 binnen zijn.

De WwF-internetboekenveiling

Enkele weken geleden is al gemeld dat de WwF-internetboekenveiling, het WereldWiskundeWeb (WWW), zijn virtuele deuren binnenkort weer zal openen. Naar aanleiding van dat bericht hebben zich reeds mensen aangemeld die boeken ter verkoop zullen inbrengen. Dat kan natuurlijk nog steeds. Heeft u nog mooie, interessante, oude, nieuwe wiskundeboeken over, dan veilen wij ze graag. Voor de duidelijkheid: ervaring heeft geleerd dat het niet zoveel zin heeft schoolwiskundeboeken van na 1968 aan te bieden. De opbrengst van de veiling komt ten goede van wiskundeprojecten in de Derde Wereld. Titels van boeken kunnen naar Christian Bokhove

(e: cbokhove@quicknet.nl) gestuurd worden.

De WwF-veiling beschikt tegenwoordig over een eigen internetadres. Het WWW is dus niet alleen bereikbaar via de site van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren: www.nvbw.nl (doorklikken via WwF en WereldWiskundeWeb), maar ook via het nieuwe adres www.wiskundeveiling.nl. Op dit adres vindt u trouwens ook nog meer achtergrondinformatie over het WwF. Met name enkele recente projecten worden aldaar wat nader beschreven. Onze vraag: kijkt u nog even uw bibliotheek na. Misschien is er iets bij wat u ter veiling kunt aanbieden. Graag horen we van u.

NIEUW

[Iris van Gulik-Gulikers]

Zebra 21

Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde

In deze Zebra maak je kennis met een ander soort meetkunde dan je bent gewend. Bijvoorbeeld, volgens de niet-Euclidische meetkunde vormen de drie hoeken van een driehoek samen geen 180° .

Aan deze bijzondere meetkunde is een hele geschiedenis vooraf gegaan. Dit boekje begint ruim 2000 jaar geleden bij de Elementen van Euclides en laat zien hoe er door de eeuwen heen discussie over meetkunde was. Een van deze opvattingen speelt een rol in afbeeldingen van Escher.

De opgaven en opdrachten maken het mogelijk om zelf aan de slag te gaan met verschillende soorten meetkunde.

ISBN 90 5041 091 X

Prijs voor leden van de NVvW: € 8,00 (incl. verzendkosten);
bestellingen via girorekening 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven, Utrecht.
Prijs voor leden van de NVvW op bijeenkomsten: € 7,00.
Prijs voor niet-leden: € 9,00 (in de betere boekhandel).

Zie ook: www.epsilon-uitgaven.nl



Epsilon uitgaven

in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Mededeling / Grote Griepmeting weer van start

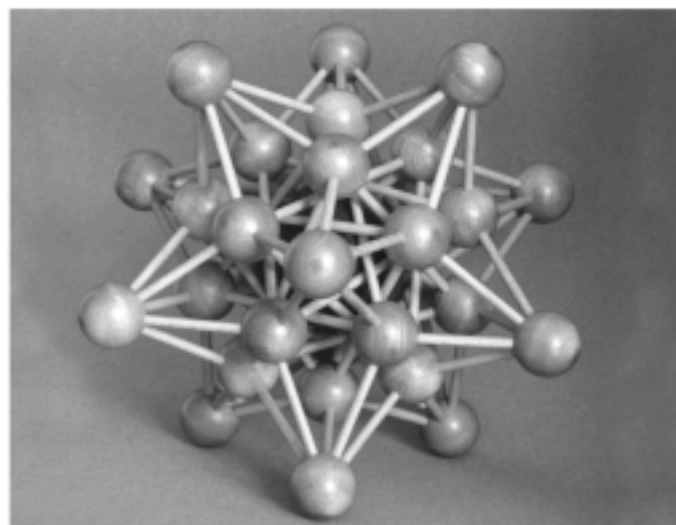
Nederlandse en Belgische onderzoeksinstituten organiseren van 15 november 2005 t/m 31 maart 2006 voor de derde keer de 'Grote Griepmeting'. Daarbij kan iedereen via de website www.grotegriepmeting.nl wekelijks doorgeven of hij/zij verkouden is, griepverschijnselen heeft, of gewoon gezond is. Een kaart van Nederland en België geeft dagelijks met blauwe stippen de gevallen van verkoudheid en met rode stippen de griepgevallen aan. Op die manier kunnen we volgen hoe de griep zich deze winter verbreidt. Vorig jaar brachten bijna 23000 enthousiaste 'griepmeters' de griepgolf in kaart. Uiteraard is de meting volledig anoniem. Alleen de postcodecijfers zijn van belang voor de meting.

'Aan de hand van de Grote Griepmeting en de gevallen van griep die door huisartsen worden gerapporteerd, is een vermoeden gerezen dat griep zich op een bepaalde manier van streek tot streek verspreidt', zegt Carl Koppeschaar, hoofdredacteur van de educatieve website Kennislink (www.kennislink.nl) en initiatiefnemer van de Grote Griepmeting.



'Zo leek de griep de afgelopen jaren eerst in Ierland en het noorden van Groot-Brittannië de kop op te steken om vervolgens van Spanje en Portugal in noordwaartse richting door Europa te trekken. Of dat ook echt zo gaat, kan deze winter blijken nu de griepmeting ook in Portugal wordt uitgevoerd. Als we weten hoe, maar vooral ook hoe snel griep zich van streek tot streek verspreidt, dan zijn we misschien ook een stuk beter voorbereid als eenmaal een gevaarlijke griepvariant mocht uitbreken. Daarom roep ik iedereen, van jong tot oud, op aan de Grote Griepmeting mee te doen!'

Voor aanmelding en nadere informatie zie www.grotegriepmeting.nl.



Een intelligent (relatie)geschenk?

Deze Kepler-Poinsot ster van Arjeu is één van de vele bijzondere objecten, puzzels en spellen gerelateerd aan natuurkunde, wiskunde en logica uit de Arabesk collectie. U vindt de volledige catalogus op internet:

www.arabesk.nl

AVENUE DOMODRIA 17 B - 3082 LA ROTTERDAM
TELEFOON: (010) 214 03 01 - FAX: (010) 214 03 00 - E-MAIL: ARABESK@ARABESK.NL

Aankondiging / Wiskunde Scholen Prijs 2006

Ook als u zelf denkt dat u 'niets bijzonders' doet op school, kan uw school in aanmerking komen voor het winnen van de Wiskunde Scholen Prijs. Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen, in drie categorieën (onderbouw, bovenbouw vmbo, klassen 3 t/m 6 havo/vwo), meedingen naar deze prijs. In iedere categorie is een prijs van 1000 euro te winnen. Meer informatie kunt u vinden op de website van de Wiskunde Scholen Prijs: www.wiskundescholenprijs.nl. Aanmelden kan tot 28 februari 2006.

Contactpersoon: Dédé de Haan (e: wiskids@fi.uu.nl).

Puzzel 813 Het Kralenspel

Elders op deze pagina ziet u een kaartje in puzzelvorm. De rebus in de eerste regel kan door iedere bevoegde wiskundedocent worden opgelost. Dat in de laatste regel een getal staat en welk getal dat is, zal ook wel duidelijk zijn, maar hoe is het 'gecodeerd'?

Het Kralenspel is een spel voor twee (jeugdige) personen. Het spelmateriaal bestaat uit een plankje met twee paaltjes, twee gelijke setjes van zes kralen in zes kleuren en een dobbelsteen met op de zijvlakken ook deze zes kleuren.

Voor onze opgaven bekijken we alleen $n = 4$.

Opgave 1

Het is duidelijk dat het voordelig is de volgorde van de andere speler te bekijken voordat je zelf een volgorde kiest. Dat mag dus niet. Hoe groot kan de winstkans van de tweede speler worden (bij $n = 4$) als hij dat tóch doet?

Opgav 2

Neem aan dat één van de volgorden 1, 2, 3, 4 is, met 1 bovenop. Hoe groot is dan de verwachte speelduur uitgedrukt in het aantal worpen als de tweede volgorde 4, 3, 2, 1 respectievelijk 2, 3, 4, 1 is?

—hte —chte 8-ch 3-dr
*wenst u prettige feestdagen
en een voorspoedig*
+○-+ -+○-

De spelregels: Iedere speler zet zijn kralen in een vrij te kiezen volgorde op zijn paaltje. Daarna wordt de dobbelsteen gegooid. Steeds als de geworpen kleur gelijk is aan de kleur van de bovenste kraal, mag die kraal er af, bij beide spelers als de bovenste kralen dezelfde kleur hebben. Wie het eerst zijn paaltje leeg heeft, heeft gewonnen.

Ik weet niet of het spel nog in de handel is, maar je kunt natuurlijk ook speelkaarten gebruiken en een gewone dobbelsteen. Als je n kralen of kaarten neemt (in plaats van 6), is dat ook geen probleem mits je een n -zijdige dobbelsteen weet te simuleren.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.

Zoals eerder gemeld is er een boekenbon van 30 euro beschikbaar voor de beste oplossing van deze kerstpuzzel. Ook aan de tussentijdse ladderstand is een prijs verbonden.

De deadline is 11 januari 2006.

Veel plezier!

Oplossing 'Betegelingen en partities'

Er waren zeven inzendingen. Alleen die van Herm Jan Brascamp en Wobien Doyer zijn geheel correct.

De gevraagde partities voor de diverse rechthoeken zijn:

3×4: 4422, 4332, 3333.
 3×5: 6432, 6333, 5532, 5442, 5433.
 4×4: 4444, 44332, 43333.
 3×6: 6633, 66222, 6543, 64422, 55521, 5544,
 55332, 44442, 44433.
 4×5: 6644, 66332, 6554, 65333, 5555, 54443,
 44444.

Voor de partities in vijf termen volgen hier mogelijke betegelingen:

44332: abac/dede/abab/cede
 43333: abac/cded/abab/edce
 66222: ababab/cdecde/ababab
 64422: ababac/cdedeb/bacaca
 55521: abcbac/cdaedb/abcbac
 55332: abacdc/ecebae/abacdc
 44442: abcdab/deaebc/cbdcad
 44433: abcabc/dedede/abcabc
 66332: ababa/cdcec/abada/cecec
 65333: abcda/cdabc/abeda/ecace
 54443: abcba/cdadc/abeba/edcde
 44444: abcde/deabc/bcdea/eabcd

Ton Kool beschouwde voornamelijk partities in vier termen, maar ging wel door tot rechthoeken van 7 bij 7. Wobien Doyer gaf zelfs een algemene methode om de partities in vier termen voor willekeurige rechthoeken te bepalen.

Verschillende inzenders hebben ook verfijningen van de gevraagde partities gemeld. Eén van hen heeft er zelfs ruim 260 opgestuurd. Maar als een partitie aan de eis voldoet, dan voldoen ook al z'n verfijningen eraan; die hoefde u dus niet te vermelden. Het mag natuurlijk wel, maar ze zijn overbodig: de verzameling van de partities waar een correcte betegeling bij behoort, wordt volledig beschreven door de 'maximale' elementen!

(Als iemand minder dan 20 punten heeft voor zijn of haar oplossing, is dat niet vanwege de verfijningen, maar omdat een onbruikbare partitie is gemeld, of omdat er één of meer partities ontbreken in bovenstaand lijstje.)

De kop van de ladder

L. van den Raadt 304
 W. Doyer 282
 J. Meerhof 244
 T. Kool 211
 W. van den Camp 206
 H.J. Brascamp 160
 A. Verheul 118

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvvw.nl).

Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*-versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html).

nr	verschijnt	deadline
4	2 februari 2006	6 december 2005
5	2 maart 2006	17 januari 2006
6	13 april 2006	28 februari 2006
7	26 mei 2006	4 april 2006
8	22 juni 2006	9 mei 2006

dinsdag 20 december 2005, Groningen
Lerarendag: Wiskunde leren. Leuk?!
Organisatie RUG

di. 27 t/m vr. 30 december 2005
Sterrenkunde-kamp 13- tot 18-jarigen
Organisatie JWG Sterrenkunde

zaterdag 7 januari 2006, Utrecht
KWG-Wintersymposium: Financiële wiskunde
Organisatie KWG

woensdag 18 januari 2006, Ede
4e Reehorst conferentie
Organisatie APS
Zie de advertentie op pag. 85 in Euclides 81-2.

vrijdag 20 januari 2006, op de scholen
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie Stichting NWO

vr. 3 en za. 4 februari 2006
Nationale Wiskunde Dagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

woensdag 8 maart 2006, op de basisscholen
De Grote Rekendag
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 14 maart 2006
 π -dag; de 300ste verjaardag van π

vrijdag 17 maart 2006, op de scholen
Kangoeroe wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

ma. 27 en di. 28 maart 2006, Delft
Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en TU Delft

donderdag 20 april 2006
Conferentie Wiskunde en ICT
Organisatie APS en FI

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

* Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

Leren doe je

samen

"TI-Navigator" is het nieuwste product dat de missie van Texas Instruments aantoont. TI-Navigator™, een nieuwe dimensie in lesgeven.



Voor een beter begrip van Wiskunde

Onze missie is u te voorzien van de beste instrumenten die u nodig heeft in uw dagelijkse lespraktijk*. Gebaseerd op een nauwe samenwerking met docenten en onderwijsspecialisten, ontwikkelen we producten die motivatie, participatie en begrip van de leerling bevorderen. Wiskunde en natuurwetenschap worden zo toegankelijk, concreet en interessant. Ons gamma bestaat uit geavanceerde rekenmachines, dataloggers, software en vele andere leermiddelen voor in de klas, en Texas Instruments biedt u een kwalitatief hoge servicegraad. Voor meer informatie kunt u terecht op education.ti.com/nederland.

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

TI Technology - Beyond Numbers

pagina IV omslag

advertentie WN