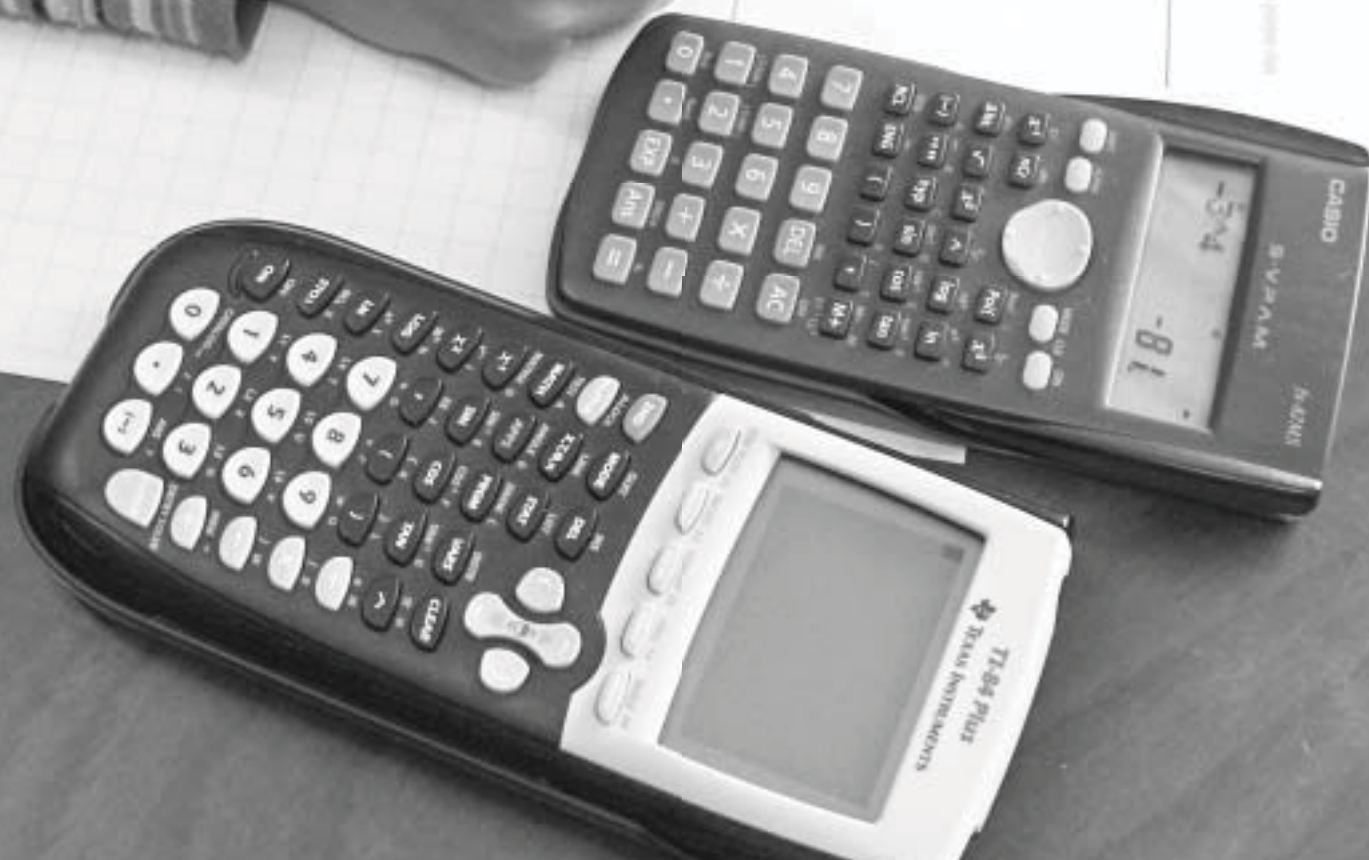


BREUKEN REKENEN APPLETS

oktober
2005/nr.2
jaargang 81





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
 Klaske Blom
 Marja Bos, hoofdredacteur
 Rob Bosch
 Hans Daale
 Gert de Kleuver, voorzitter
 Dick Klingens, eindredacteur
 Wim Laaper, secretaris
 Jos Tolboom
 Joke Verbeek

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
 Marja Bos
 Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
 e-mail: redactie-euclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
 Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
 Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvww.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van
 Wiskundeleraren

www.nvww.nl



Voorzitter:
 Marian Kollenveld,
 Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
 tel. 070-3906378
 e-mail: m.kollenveld@nvww.nl

Secretaris:
 Wim Kuipers,
 Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
 tel. 038-4447017
 e-mail: w.kuipers@nvww.nl

Ledenadministratie:
 Elly van Bommel-Hendriks,
 De Schalm 19, 8251 LB Dronten
 tel. 0321-312543
 e-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
 productie TiekstraMedia, Groningen
 druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
 Leden: € 46,50
 Studentleden: € 26,50
 Gepensioneerden: € 31,50
 Leden van de VWWL: € 31,50
 Lidmaatschap zonder Euclides: € 31,50
 Bijdrage WwF: € 2,50
 Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
 Niet-leden: € 50,00
 Instituten en scholen: € 130,00
 Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
 Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
 Gert de Kleuver
 De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
 e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
 tel. 0318-542243

Indien afwezig:
 Frek Mahieu
 Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
 e-mail: frek.mahieu@hetnet.nl
 tel. 0411-673468

2

oktober 2005 JAARGANG 81

049	Van de redactietafel [Marja Bos]
050	Breuken, wat zijn dat eigenlijk voor dingen? [Hessel Pot]
055	Aankondiging
056	40 jaar geleden [Martinus van Hoorn]
058	Teaching by exception 3 [Luc Weide]
063	Kunnen (wij op) onze kinderen rekenen? [Hans Sterk, Jacob Perrenet]
066	Algebra en applets, leren en onderwijzen [Jos Tolboom]
070	Intelligente feedback bij digitale toetsen en oefeningen [Christian Bokhove, André Heck, Gerard Koolstra]
074	(Wis)kundig kiezen / De diskwalificatie paradox [Rob Bosch]
076	Over wiskundeonderwijs: innovatie en consolidatie, 6 [Bert Zwaneveld]
078	Levende tijdlijn van 5000 jaar wiskunde [Johan Gademan]
080	Jaarverslag Euclides, jaargang 80 [Marja Bos]
082	Inhoud van de 80e jaargang (2004/2005)
086	Jaarvergadering / 5 november 2005
086	Verslag van het verenigingsjaar 2004-2005 [Wim Kuipers]
088	Meedoen met project samenhangend leren?
089	Notulen van de jaarvergadering en studiedag 2004 [Wim Kuipers]
090	Recreatie [Frits Göbel]
092	Servicepagina
	Foto voorpagina: TrudiSigned, Krimpen aan den IJssel
	Aan dit nummer werkten verder mee: Peter Boelens en Sam de Zoete.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Nieuwe examenprogramma's havo en vwo

Eerst waren er de volstrekt verkeerde timing en de grote technische problemen bij het digitaal invullen van de vragenlijsten van de CEVO-raadpleging. Van een echte veldraadpleging kan men dan ook niet spreken. Inmiddels lijken er, op een enkele uitzondering na, toch al wel de nodige knopen doorgehakt te zijn met betrekking tot de invulling van de havo/vwo-examenprogramma's wiskunde 2007-2010. Het ministerie heeft immers haast! Enkele beslissingen zijn echter opgeschort tot 1 november.

Het bestuur van de NVvW maakte eind september in zijn reactie op de voorstellen van de PEP-commissies nog de volgende opmerking: 'Uiteindelijk leidt die reductie tot verschrompelde programma's, die elk voor zich nauwelijks voldoen, waardoor het voor veel leerlingen interessant en nuttig wordt om twee wiskundevakken te kiezen. Voor de hardere economische richtingen zal dat zijn een combinatie van wiskunde A [eerdere naam: 'AB'] en wiskunde B, voor de technische richtingen is dat wiskunde B met wiskunde D. Hierdoor wordt het beslag van de diverse wiskundes op de lesruimte eerder groter dan kleiner, met veel praktische problemen op school, en onduidelijkheid voor het vervolgonderwijs.' Zie voor meer details bijvoorbeeld de redactietafel in het juni-nummer van Euclides en uiteraard de website, www.nvvw.nl. Overigens heeft de Tweede Kamer inmiddels besloten dat ook bij wiskunde het Centraal Examen betrekking zal hebben op slechts 60% van het programma. Daarnaast ziet het ernaar uit dat er geen tweede raadplegingsronde meer komt.

Het nieuwe leren

De laatste tijd is er in de media veel aandacht voor 'het nieuwe leren'. Het wordt tijd dat ook wiskundeleraren zich in de discussie mengen, al is het maar om te bezien of er wellicht wiskunde-specifieke (!) voor- en nadelen aan dit onderwijsconcept kleven. In de prille beginfase van de opkomst van het nieuwe leren was er natuurlijk nog onvoldoende praktijkervaring voorhanden om een goedonderbouwde analyse mogelijk te maken, maar inmiddels zullen er veel lezers zijn die op hun school al langere tijd aaneen vanuit dit concept gewerkt hebben, en daarover dus 'met verstand van zaken' en vanuit de dagelijkse praktijk kunnen meepraten. Ik nodig u uit om in Euclides uw ervaringen met collega's te delen en uw (gefundeerde) bijdrage te leveren aan de discussie - en daarmee aan de verbetering van ons wiskundeonderwijs.

Overigens zijn er allerlei vormen van 'nieuw leren' te onderscheiden, en dat maakt de discussie er niet bepaald eenvoudiger op. Toch zijn er een paar uitgangspunten die in bijna al die verschijningsvormen terug te vinden zijn:

- Onderwijs vanuit het nieuwe leren wordt vooral vraaggestuurd ingericht, dat wil zeggen vanuit de eigen interesse en dus de leerbehoefte van de lerende (leerling, student);
- die lerende is degene die initiatieven neemt in het leerproces, daarin keuzes maakt en aldus zijn eigen kennis construeert;
- het leren wordt zo mogelijk gerealiseerd binnen min of meer authentieke situaties, en is vooral gericht op toepassingen: het gaat om 'leren voor nu' en niet zozeer om 'leren voor later';
- de nadruk ligt sterker op de verwerving van vaardigheden en competenties dan op kennis als zodanig;
- de docent heeft een coachende rol.

Actie: gratis studentenlidmaatschap

Tot slot. Tot 1 december kunnen docenten-in-opleiding zich nog aanmelden voor een gratis jaarlidmaatschap van de NVvW, en dus voor een gratis abonnement op Euclides. Zie het aanmeldingsformulier op www.nvvw.nl.

Schema van getallensoorten

met standaardschrijfwijzen

Getal-soort:	Schrijfvorm-soort:	Schrijfvorm-voorbeelden:
Heeltallen (gehele getallen) <i>alle veelvouden van één</i>	decadische vorm wetenschappelijke vorm gemengde vorm binaire vorm factoren-vorm Romeinse vorm Oostarabische vorm, Farsi-vorm	1625 , 1 625 , 1625 $1,625 \cdot 10^3$ 1,6 mln , 1½ mld 11001011001 $5^3 \cdot 13$ MDCXXV , M DC XX V ١٦٢٥ , ١٦٢٥
Rationaaltallen (rationale getallen)	Zie bij breukgetallen en heeltallen.	
Breukgetallen (gebroken rationale getallen) <i>sommige (niet alle) veelvouden geheel</i>	teller-noemervorm wijzertallen-vorm	$\frac{486}{91}$, $\frac{486}{91}$, 486 / 91 $[5, 2, 1, 14, 2]$ $5 + (2 + (1 + (14 + (2)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$
Onechte breukgetallen <i>groter dan één</i>	ook: gemengdvorm	$2\frac{6}{7}$, $2\frac{6}{7}$, $2\frac{6}{7}$, $2 - \frac{6}{7}$, $2\frac{6}{7}$
Stambreukgetallen <i>een veelvoud is één</i>	ook: inversvorm	7^{-1}
Nietstambreukgetallen <i>geén veelvoud is één</i>	ook: oud-egyptische vorm	$12^{-1} + 51^{-1} + 68^{-1}$ (= $\frac{2}{17}$)
Decimale breukgetallen <i>getal $\times 10 \times 10 \times \dots \times 10 = 1 + 1 + \dots + 1$ (een 10-, 100-, 1000-voud is geheel) (herhaald vertienvoudigen geeft een heeltal)</i>	ook: decimalenvorm (kommavorm) ook: wetenschappelijke vorm	273,15 en 273.15 $6,6252 \cdot 10^{-34}$
Nietdecimale breukgetallen <i>geén tienmachtt-voud is geheel</i>	ook: repetentvorm	$2,85714\overline{2}$ (= $\frac{20}{7}$)
N.B. Breukgetallen zijn ook op heel veel manieren te schrijven zonder een standaardvorm te gebruiken; bijvoorbeeld in een:		
quotiëntvorm (deelstreepvorm)		$\frac{6}{8}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{1,5}{2}$, $(1 + 2)/4$
quotiëntvorm (deeltekenvorm)		3:4 , $3 \div 4$, 6:8
productvorm		$3 \cdot 4^{-1}$, $3^1 4^{-1}$, $2^{-2} 3$
somvorm		$4^{-1} + 4^{-1} + 4^{-1}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
talige vorm		driekwart , drie-vierde , anderhalf
Irrationaaltallen (irrationale getallen) <i>geen enkel veelvoud is geheel</i>	Geen standaardvorm bestaanbaar voor alle reële getallen tegelijk, wel voor bepaalde aftelbare deelverzamelingen.	
Briggs-tallen <i>getal $\cdot 10^{\wedge} 10^{\wedge} \dots \cdot 10 = 10 \times 10 \times \dots \times 10$ (herhaald tot de tiende verheffen geeft een tienmacht) (de tienlogaritme is een decimaal breukgetal)</i>	mantisse-vorm	$10^{\wedge} 0,8765$

FIGUUR 1

BREUKEN, WAT ZIJN DAT EIGENLIJK VOOR DINGEN?

Over rationale getallen, en hoe die te schrijven.

[Hessel Pot]

Lastige vraagjes

Wie eens snel in vakliteratuur over rekenkunde of rekenwiskundeonderwijs wil naslaan wat breuken nou eigenlijk zijn, zal daar niet één-twee-drie een antwoord vinden in de vorm:

1. Het woord *breuk* staat in de rekenles voor: ...

Daar verbaast zich zelden iemand over. We zijn niet anders gewend. Je vraagt je toch ook nooit af hoe je kunt zeggen wat het woord *getal* betekent? En hetzelfde geldt voor een hele reeks andere termen die we bij het praten en schrijven over rekenen en wiskunde gebruiken.

Uit het feit dat ik dit hier signaleer, mag u opmaken dat ik me daar niet helemaal happy bij voel. Het lijkt me niet slecht voor het onderwijs als de docent (en het boek) van gangbare vakwoorden een betekenisomschrijving kan geven, ook zonder te verwijzen naar de bekende symbolische notatievormen.

Eerst nog wat meer voorbeelden van vraagjes waar in de regel geen inhoudelijk antwoord op komt, maar iets afhoudends als: doe toch niet zo moeilijk/het gaat er toch om dat ze de sommetjes leren maken/de formele definities zijn alleen relevant voor specialisten.

2. Betekenen de termen *breuk* en *quotiënt* hetzelfde?
3. Is *deling* synoniem met *quotiënt*?
4. Is een *staartdeling* dus wel of niet een *deling*?
5. Is *vier-tiende* een breuk?

6. Zo ja, is z'n teller 4 of 2?

7. Is $4/9$ een breuk?

8. Is $4 : 9$ een breuk?

9. Is $\frac{2,5}{10}$ een breuk?

10. Is $2\frac{1}{2}$ een breuk?

11. Is *twee-en-een-half* een breuk?

12. Is *breuk* synoniem met *rationaal getal*?

13. Is $2/\pi$ een breuk? En $1/a$? En 2^{-1} ?

14. Is $\frac{3}{10}$ een decimale breuk? En $\frac{6}{10}$? En $\frac{3}{5}$?

15. Is een *decimale breuk* ook een breuk?

16. Is elk reëel getal in decimale vorm te schrijven?

17. Heeft een *decimale breuk* één teller en één noemer?

18. Heeft een *gewone breuk* één teller en één noemer?

19. Enige decennia geleden introduceerde het Wiskobas-team het woord *kommagetal*. Is een *kommagetal* een breuk?

20. Voor breuken zijn er de overbekende regels voor hoe je er mee moet rekenen. Bestaan er voor de later in de mode gekomen *irrationale* getallen óók zulke regels? Zo nee, betekent dit dat je twee *irrationale* getallen niet kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen?

Scheid de inhoud van de vorm

Het is mijn stellige overtuiging dat vraagjes zoals het voorgaande twintigtal alleen op een consistente manier beantwoord kunnen worden wanneer je een scheiding maakt tussen vorm en inhoud. Je moet duidelijk weten wanneer je het hebt over de inhoud/betekenis van begrippen, en wanneer over de symboolvormen waarmee die begrippen op papier of scherm genoteerd worden.

Bij het woord *breuk* lopen die beide aspecten notoir door elkaar heen; dit woord is daarom hier onbruikbaar.

In het 'schema van getallensoorten' (zie [figuur 1](#)) is van die scheiding uitgegaan. In de linkerkolom gaat het inhoudelijk over een aantal soorten getallen, en rechts daarvan over meer of minder gebruikelijke notatievormen-met-cijfertekens voor die verschillende getalsoorten.

Naast de verschillende *schrijfvormen* zijn er natuurlijk nog minstens zoveel *zegvormen*, in de gesproken communicatie. Omdat er op papier veel met compacte symboolvormen gewerkt wordt, is het verband tussen schrijfvorm en zegvorm vaak afwezig.

De inhoud. Wat is een getal?

Het schema noemt van een aantal soorten getallen wel hun specifieke kenmerk, maar er staat daar niet wat een getal nu eigenlijk zelf voor een ding is. Dat laatste komt hier aan de orde, waarbij we ons beperken tot wat we gewend zijn te noemen: de positieve reële getallen. De in de algebra en de analyse heel doelmatige uitbreidingen naar niet-positieve en naar niet-reële, meer kunstmatige 'getallen' blijven dus buiten beeld.

Met 'een getal' bedoelen we *niet* de verschillende aanduidingsvormen: op papier met combinaties van cijfertekens en andere symbolen, en in gesproken taal door combinaties van telwoorden en bewerkingsnamen. Maar *wel* het ding zelf dat door die vormen wordt aangeduid, te omschrijven als: *de relatieve grootte van een zekere grootheid ten opzichte van een eenheidsgrootte*.

Een wat gewoner woord voor grootheid is 'hoeveelheid', waarbij dan niet alleen gedacht moet worden aan hoeveelheden appels, pizza's of repen, en aan een massa of een volume van zand of water, maar ook aan een lengte, een kracht, een snelheid, een tijdsduur, een elektrische lading of spanning, etc.

Als het gaat om de mate van groter of kleiner zijn van een zekere hoeveelheid ten opzichte van een standaardhoeveelheid, zullen die beide hoeveelheden/grootheden natuurlijk wel van dezelfde soort moeten zijn. Want bij 'de grootte van een kilometer ten opzichte van een seconde' kan niemand zich iets voorstellen. Van twee gelijksoortige grootheden nemen we aan dat die steeds samen te voegen zijn tot een 'som'-grootheid, weer van dezelfde soort. De hierboven gecursiveerde omschrijving van 'getal' is ook te vertalen in: 'een getal is de verhouding van een zekere hoeveelheid ten opzichte van een eenheidshoeveelheid'; of ook: de veelheid (Frans: *pluralité*) van een grootheid ten opzichte van een eenheid.

En nog weer anders: een getal is een *klasse* van onderling evenredige (grootheid, eenheid)-paren. Hierbij noemen we de koppels $G;E$ en $H;F$ evenredig als voor alle paren m -vouden mG , mH en n -vouden nE , nF geldt: als $mG <, =, > nE$ dan ook tegelijk $mH <, =, > nF$.

We kunnen nu ook zeggen:

getallen zijn de grootte-soorten van (grootheid, eenheid)-paren,
in de zin dat twee van zulke paren gelijksoortig zijn indien ze evenredig zijn.

De gegeven getaldefinitie is bruikbaar om vast te leggen wat *product*, *som* en *volgorde* van twee getallen is, zonder een beroep te doen op een representatie met cijfers. Met 'de relatieve grootte van grootheid G ten opzichte van eenheid E ' afgekort tot $\{G \text{ tov } E\}$, kan dat als volgt.

Van $\{A \text{ tov } B\}$ en $\{C \text{ tov } D\}$, met P en Q zó dat $P;A$ en $Q;B$ beide evenredig zijn met $C;D$,

is het *product*: $\{P \text{ tov } B\}$,

is de *som*: $\{\text{het totaal } S \text{ van } A \text{ en } Q \text{ tov } B\}$,

en is de *volgorde* gelijk aan die van A en Q .

Het getal *één* is natuurlijk de groottesoort die hoort bij alle paren met twee *gelijke* grootheden.

Hetzelfde zeggen we nog een keer, nu aan de hand van een plaatje; zie [figuur 2](#). De twee getallen zijn gegeven door de lengte OA ten opzichte van eenheid OB en de lengte OC ten opzichte van eenheid OD , op twee stralen uit O . De verhouding van OC en OD is twee keer door parallellen op de onderste straal gezet. Van de gegeven getallen is het product: $\{OP \text{ tov } OB\}$, de som: $\{OA\text{-met-}OQ\text{-verlengd} = OS \text{ tov } OB\}$, en de volgorde: die van de lengten OA en OQ .

N.B. Bij 'verhoudingen' gaat het ook om klassen van evenredige groothedenparen, maar dan zonder dat een van beide grootheden als norm fungeert. Bijgevolg is er niet zoals hierboven een 'gelijknormig' gemaakte hulpgrootheid Q , en dus géén optelling, géén groter/kleiner-relatie, en géén natuurlijke koppeling met getallen.

Teller en noemer van een breuktal

Een *breuktal* is een getal met de eigenschap dat sommige veelvouden ervan geheel zijn. Het nummer van z'n *kleinste* gehele veelvoud heet *de noemer van het breuktal*, en dat kleinste veelvoud zelf *de teller van het breuktal*. Zo hoort bij ieder breuktal precies één (heeltallig) tellergetal, en één (heeltallig) noemergetal. Passen we dezelfde definities toe op heeltallen, dan blijkt elk heeltal één als noemer te hebben. Bij het noteren van een breuktal worden meestal z'n teller en z'n noemer gebruikt. Maar er zijn ook andere notatie-mogelijkheden; zie het schema in [figuur 1](#).

Verschillende vormen voor getallen

Nu je weet wat getallen voor dingen zijn, kun je kijken naar hoe ze op een handige manier zijn te *benoemen* en *beschrijven*. Omdat het aantal getallen oneindig groot is, zul je dat volgens een zeker *systeem* willen doen. Op de (taalafhankelijke) benoemingssystemen gaan we hier niet in; benamingen worden al snel onhandig lang –

zonder onder de één te komen, en elke volgende term is het grootste aantal keren dat de tiende macht van het vorige quotiënt door 10 te delen is zonder onder de één te komen. Klaar.

Net als in het vorige geval zijn alle termen gehele getallen van 0 tot en met 9. Anders is dat nu ook voor sommige *irrationaaltallen* de rij eindig is.

Een voorbeeld. De mantisse-ontwikkeling van $\sqrt{10}\sqrt{10}$ is de eindige rij met termen 7 en 5. Vroeger werd 0,75 de *mantisse* van het gegeven getal genoemd. De hoogstbelangrijke eigenschap van de mantisse-notatie is (was), dat je die vormen maar hoeft *op te tellen* om toch het *product* van de uitgangsfactoren te krijgen.

Het getal met als mantisse-ontwikkeling de eindige rij 8, 7, 6, 5 kan geschreven als

$$\sqrt[10]{10^8 \cdot \sqrt[10]{10^7 \cdot \sqrt[10]{10^6 \cdot \sqrt[10]{10^5}}}}$$

en ook korter als $10^{0,8765}$ of $10^{0,8765}$.

Wijzertallen-ontwikkeling

Toepasbaar op alle (positieve reële) getallen g .

De rij is voor alle rationale getallen eindig. Alleen zijn nu de termen niet meer allemaal kleiner dan 10, ook grotere heeltallen kunnen voorkomen.

De eerste term is het grootste heeltal in g , en elke volgende term is het grootste heeltal in het

FIGUUR 3

Andere auteurs over hetzelfde

Op het belang van het maken van onderscheid tussen inhoudelijke betekenis versus schrijfvorm is ook in het verleden al meermalen gewezen. Een vijftal citaten:

Maar hoe dan ook, het mathematische object waar het om gaat, is het rationaal getal en niet de breuk.

H. Freudenthal: Didactische fenomenologie van wiskundige structuren, 1984, p.146

Calculation with these signs – the process taught at school as “arithmetic” – is really the study of the decimal notation rather than the study of numbers.

H.A. Thurston: The Number-system, 1956, p.5

Men kan toch moeilijk volhouden dat 0,8 eene andere breuk is dan $\frac{4}{5}$.

Daarbij komt nog dat men gewoonlijk de zeer begrijpelijke en voor de hand liggende bepaling geeft: eene tiendeelige breuk is eene breuk, waarvan de noemer eene macht van 10 (of eene breuk die herleid kan worden tot eene met eene macht van 10 als noemer). Op grond van deze bepaling is $\frac{4}{5}$ eene tiendeelige breuk. Men zou moeten spreken van breuken in de tiendeelige schrijfwijze (0,8); de andere schrijfwijze de “gewone” te noemen is eigenlijk niet te verdedigen, daar zij niet gewoner is dan de tiendeelige, men zou haar de twee-ledige kunnen noemen.

J.H. Schogt: Wiskundige vaktaal, *Euclides* 1933-4, p.55

Een breuk is de uitdrukking eener deeling, en tevens het quotiënt dier deeling.

P. Brasseur: Rekenkunde, 1913, p.172

Eene breuk is eene verzameling van één of meer gelijke delen van een geheel

en ook:

Eene breuk is de voorstelling van één of meer gelijke delen van één geheel.

Bij de eerste bepaling heeft men de waarde, bij de tweede de schrijfwijze van deze soort van getallen op het oog.

A. Labberton: Leerboek der Rekenkunde, 1889, p.159

In de citaten wordt 'breuk' door Freudenthal gebruikt voor *notatie-vorm*, door Schogt voor *rationaal getal*, en door Brasseur en Labberton voor *beide*. Het zou misschien goed zijn voor het onderwijs als die nog steeds bestaande inconsequentie ooit eens verdwijnt.

Tot slot nog twee eigentijdse pogingen tot verheldering:

... rationale getallen, dat wil zeggen getallen die als een breuk geschreven kunnen worden, ...

In een breuk staan twee gehele getallen, gescheiden door een horizontale of een schuine breukstreep.

Jan van de Craats, Rob Bosch: Basiswiskunde, 2005, p.11

Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen, in zekere zin is het allemaal hetzelfde. Wiskundig gezien gaat het bij deze getallen telkens om een andere verschijningsvorm van hetzelfde object dat we in de wiskunde aanduiden als 'rationaal getal'.

Ronald Keijzer e.a.: De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen, 2005, p.9

omgekeerde van de vorige rest. Klaar. (Als de rest een keer nul wordt, is er geen omgekeerde meer!)

De elegantie van dit rij-recept (onafhankelijk van het grondtal 10) maakt de wijzertallen-notatie in sommige opzichten interessant.

Het getal met als wijzertallen de eindige rij 8, 6, 4, 2 kan geschreven als $8 + 1/(6 + 1/(4 + 1/(2)))$, wat wel met vierkante 'kettingbreuk-haken' wordt afgekort tot [8, 6, 4, 2].

Conclusie

Het woord *breuk* blijkt in de bestaande praktijk niet één vaste betekenis te hebben. De meeste van de 'lastige vraagjes' uit de inleiding zijn daarom niet eenduidig te beantwoorden. Wie in z'n onderwijs dubbelzinnigheden wil vermijden, zal voor de verschillende betekenissen ook verschillende benamingen moeten gebruiken.

In dit artikel en in het schema (figuur 1) kozen we voor:

- *breuktaal*: niet-geheel rationaal getal, dat zijn getallen waarvan sommige veelvouden geheel zijn, elders meestal 'gebroken getal' of 'breuk';
- *tellernoemervorm*: de schrijfvorm voor een breuktaal waarin z'n kleinste gehele veelvoud en het rangnummer daarvan voorkomt in decadische vorm, elders 'gewone breuk' of 'breuk';
- *deelstreepvorm*: elke quotiëntvorm waarin deeltal- en delervorm door een streep gescheiden zijn, vaak ook weer zonder meer 'breuk' genoemd.

Evenzo zal het de duidelijkheid ten goede komen, als het geen-vlees-geen-vis-woord 'kommagetal' achterwege blijft en er afhankelijk van de situatie gekozen wordt voor *decimaal breuktaal* (als de getalsoort bedoeld is) en voor *kommavorm* (als het om de wijze van noteren gaat van zo'n breuktaal dat door herhaalde vertienvoudiging geheel te maken is).

En nog algemener: gebruik de term *getallen* alleen voor de elementen van een getalverzameling, en kies een ander woord ter aanduiding van de *vorm/expressie/uitdrukking* waarmee een getal op papier, bord of scherm fysiek wordt weergegeven.

Bij 'kettingbreuken' is er evenmin één betekenis.

Het woord wordt enerzijds gebruikt voor bepaalde schrijfvormen van breuktallen:

de kommavorm 0,244 herleiden tot een *kettingbreuk*-(-vorm) geeft [0, 4, 10, 6] of ook $1/(4+1/(10+1/6))$.

En anderzijds ook voor een speciale rationale benaderingsrij van reële getallen:

de eerste vier termen van de *kettingbreuk*(-rij) van π zijn 3, 22/7, 333/106 en 355/113.

Gebruik dus verschillende bewoordingen, bijvoorbeeld: *een wijzertallenvorm* naast *de kettingbreukenrij van het getal...*

Over de auteur

Hessel Pot (e-mailadres: h.n.pot@hetnet.nl) houdt zich bezig met het opsporen van situaties in het wiskundeonderwijs waar het traditionele woordgebruik niet te koppelen blijkt aan één betekenisinhoud.

Aankondiging / Wiskunde Scholen Prijs 2006

In 2006 viert de Wiskunde Scholen Prijs haar eerste lustrum. De doelstelling is al die jaren hetzelfde gebleven: scholen stimuleren om met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden. Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen meedoen.

Er zijn drie categorieën:

- basisvorming (klas 1 en 2);
- bovenbouw vmbo (klas 3 en 4);
- havo/vwo (de klassen 3 t/m 6).

In elke categorie valt een prijs van € 1000,00 te winnen.

Tijdpad:

- Midden november 2005 ontvangen scholen de informatiefolder.
- Scholen die (vrijblijvend) belangstelling getoond hebben, krijgen eind februari 2006 een aanmeldingsformulier met nadere instructies.
- 31 maart 2006 is de sluitingsdatum voor de inzendingen.
- De prijsuitreiking is in mei 2006.

Belangstellende scholen kunnen zich ook nu al aanmelden via www.wiskundescholenprijs.nl. De Wiskunde Scholen Prijs wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut.

PROF. DR. H. FREUDENTHAL 60 JAAR

Op 17 september 1965 is prof. dr. H. Freudenthal, die ook medewerker is van „Euclides”, 60 jaar geworden.

Een comité van oud-leerlingen onder leiding van de professoren dr. W. T. van Est te Leiden en J. J. de Iongh te Nijmegen, heeft de jubilaris een receptie aangeboden die gehouden is in het nieuwe Transitorium van de Rijksuniversiteit te Utrecht op 17 september onmiddellijk na afloop van de heroriënteringscursus voor leraren, die in de week van 13 tot 17 september in dit gebouw werd gehouden. Er was voor deze receptie een zeer grote belangstelling.

Prof. Freudenthal werd toegesproken door prof. Van Est, die de leiding van de bijeenkomst op zich had genomen, door de rector magnificus prof. mr. L. J. Hijmans van den Bergh, door dr. A. van Heemert als een der oudste oud-leerlingen, door drs. H. J. Jacobs namens de W.V.O. en door prof. dr. F. van der Blij als naaste vak-collega.

In zijn toespraak liet Jacobs uitkomen, welke verdiensten prof. Freudenthal in de na-oorlogse periode gehad heeft voor didactische activiteiten in en buiten de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O., waarvan hij in 1950 het voorzitterschap op zich had genomen. Hij herinnerde aan de betekenis van de sinds 1946 bijna jaarlijks gehouden weekend-conferenties onder Freudenthal's leiding, aan zijn strijd tegen de beschrijvende meetkunde en tegen de mechanica op de hogereburgerschool, aan zijn aandeel in de tot stand koming van „het wiskunde-programma voor het v.h.m.o.”, ontwerp van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O., en aan de betekenis van dit ontwerp voor de later volgende herziening van het wiskunde-programma op gymnasium en h.b.s.

Jacobs wees er op, hoezeer Freudenthal's belangstelling voor didactische problemen gestimuleerd werd door de wezenlijke behoeften van zijn schoolgaande kinderen. Nu de periode van didactische observatie van eigen kinderen voorbij is, drogen ook de bijdragen die Freudenthal aan de Wiskunde-werkgroep placht te geven, op. Namens de Wiskunde-werkgroep sprak Jacobs de wens uit, dat deze didactische bijdragen weer ruimer zullen gaan vloeien zodra straks kleinkinderen in plaats van eigen kinderen tot dit werk zullen stimuleren.

Hieraan kunnen we toevoegen, dat Freudenthal's belangstelling voor didactische problemen zich geenszins tot de W.V.O.-kring heeft beperkt. Sinds 1955 is prof. Freudenthal voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en opgenomen in het Comité exécutif van de C.I.E.M. (commission internationale de l'enseignement mathématique).

Onder zijn leiding zijn tal van rapporten verschenen die op de internationale mathematische congressen te Edinburg (1958) en te Stockholm (1962) zijn ingediend. Aan alle scholen voor v.h.m.o. zijn deze rapporten bij hun verschijning toegezonden, waardoor ze voor alle wiskunde-leraren in Nederland bereikbaar blijven. Enige van deze rapporten zijn tot stand gekomen onder redactie van Freudenthal, die ze ook op de congressen te Edinburg en Stockholm indiende en verdedigde.

In het werk van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (Commissie Leeman) neemt prof. Freudenthal een werkzaam aandeel. In diverse syllabi voor de heroriënteringscursussen geschreven herkennen we mede zijn hand.

Wie een poging waagt een lijst op te maken van het didactisch oeuvre van Freudenthal zal onder de indruk komen van het grote aantal publikaties dat hij in de loop van de jaren voor binnen- en buitenlandse tijdschriften heeft geschreven. Didactisch werk, naast belangrijk wetenschappelijk werk op het gebied van de wiskunde zelf.

Wij wensen prof. Freudenthal nog zeer vele actieve jaren toe op alle gebieden waarop hij tot dusver werkzaam is geweest.

Namens de redactie,
Joh. H. Wansink

Artikel ter gelegenheid van de 60ste verjaardag van prof. H. Freudenthal, uit Euclides 41 (1965-1966), pag. 65-66, door de toenmalige redactievoorzitter van Euclides.

TEACHING BY EXCEPTION 3

Ontwikkeling in de praktijk van een systeem

- voor individueel gericht onderwijs in heterogene groepen,
- met minimale kosten en maximale flexibiliteit,
- en redelijke arbeidsomstandigheden van de docent.

[Luc Weide]

Voorgeschiedenis

Na een brede vooropleiding (LTS-timmeren/ gymnasium-B) en enkele jaren bedrijfservaring (industriële organisatie) ging ik naar Delft (industrieel ontwerpen). Halverwege de studie werd ik in 1970 part-time leraar wiskunde. Het eerste jaar op een school met een (toen nog zeer) experimentele 3-jarige brugperiode. De resultaten van dat experiment waren zodanig dat ik een eigen experiment startte, gebaseerd op zelfwerkzaamheid en zelfverantwoordelijkheid, naar analogie van wat ik in het bedrijfsleven had geleerd: *Teaching by Exception!*

Het jaar daarop werd ik benoemd op de Werkplaats in Bilthoven. Het bestuur van de Werkplaats wilde de oorspronkelijke werkwijze van (ir.) Kees Boeke revitaliseren. En mijn aanpak paste daar goed in (zie [1]).

Die aanpak werkte in de klas zeer inspirerend, zowel voor de leerlingen als voor mijzelf. Maar het maken en onderhouden van het systeem kostte met de technologische mogelijkheden van die (en Kees Boekes) tijd veel te veel handwerk. De studie was dan ook niet erg opgeschoten en ik besloot weer full-time naar Delft te gaan. Maar nu duidelijk gericht op (het industrieel ontwerpen van) onderwijsmedia, onderbouwd met een bijvak onderwijskunde in Leiden (zie [2]).

Na mijn afstuderen raakte ik al vrij snel zijdelings betrokken bij de ontwikkeling en uitvoering van een groot nascholingsproject voor artsen en arbeidsdeskundigen. De vraag naar mijn onderdeel (biomechanica) bleek zo groot, eerst binnen de eigen organisatie maar later ook daar buiten en hield zo lang aan, dat ik me er uiteindelijk full-time mee ben gaan bezighouden. Kennis verzamelen, bruikbaar maken voor toepassing in het veld en overdragen via cursussen een paar keer per maand ergens in het land.

De organisatie waar ik werkte werd opgeheven en een paar jaar later kon ik met vervroegd pensioen. Maar in de media kwam ik steeds vaker berichten tegen over teruglopende aantallen TU-studenten en over oplopende tekorten aan leraren voor bètavakken in het voortgezet onderwijs. Dat vond ik vreemd, want techniek is toch best leuk.

Ik besloot poolshoogte te nemen, en een open sollicitatie resulteerde in een tijdelijke benoeming tot leraar wiskunde voor de brugklassen van een fantastische (Dalton)school waar ik zó mijn kleinkinderen naar toe zou sturen.

De wiskundesectie had een systeem dat er heel goed uitzag. Zelfstandig werken aan de hand van uitgebreide leerstoflijnen met expliciet geformuleerde leerdoelen, te maken oefenstof (uit het boek) en toetsmomenten. En

Het boek introduceert de tabel als hulpmiddel bij het berekenen van E/km, gr/deel, strippen/zone, etc...
Rechtlijnig voortbordurend zou je hier onderstaande tabel kunnen verwachten:

wisk 1 MH(V) H 2 kaart 117

opdracht 26-a:
Johan heeft 250 bollen in de grond geplant.
In het voorjaar komen daarvan 220 bollen op.
Neem de verhoudingstabel over en vul hem in.

aantal bollen	250	...	220
%	100	...	...

antwoord:

aantal bollen	250	1	220
%	100	...	88

??? -> ... goed -> 118

zelfcontrole via nakijkboekjes. Helaas, klas 2 gaf geen enkel blijk van ervaring met dat systeem.
Na zes weken aanmodderen besloot ik om mijn eigen systeem maar weer in stelling te brengen. Niet met vierkleurenbalpen, schaar en lijm, zoals 30 jaar eerder. Maar nu met de computer. En vanwege technisch-economische efficiency: voor de 1e klassen, want daar had ik er ondertussen twee van. Aldus startte ik: *Teaching by Exception 2002/03*.

Opdrachtkaartjes

Kaartjes - De inhoud van het leerboek is helemaal overgezet op losse kaartjes (formaat A6). Op (bijna) elk kaartje staat steeds:

- op de voorkant een opdracht (compleet uitgetypt en geïllustreerd),
 - en op de achterkant het uitgewerkte antwoord; zie figuur 1 t/m 4.
- Soms staat op een kaartje een aanwijzing hoe de leerling verder moet; bijvoorbeeld:
- lees nu in je boek nog eens goed de samenvatting op pagina...
 - maak nu uit je boek het Testbeeld op pagina...
 - begin volgende les met Toets...

Curriculum - De opdrachten op de kaartjes komen zoveel mogelijk overeen met die in het boek: *Moderne Wiskunde*, 1e klas MH(V), 7e druk, van Wolters-Noordhoff. De stof is zo ver(der) uitgewerkt (200 à 300 kaartjes per hoofdstuk), dat de meeste leerlingen er in de meeste gevallen geheel zelfstandig mee uit de voeten kunnen. Veel nadruk wordt gelegd op het *daadwerkelijk doen* van opdrachten met knippen, plakken, meten, experimenteren, etc. Daarvoor benodigde *hulpmiddelen* liggen/staan steeds klaar voor zelfstandig gebruik. Doordat iedereen met iets anders bezig is, zijn er van elk hulpmiddel maar weinig exemplaren nodig.

Verwerking - Bij het verwerken van de opdrachten vormen zich spontaan groepjes van 2 tot maximaal 4 leerlingen die tijdelijk of permanent gelijk op werken. Kleine onduidelijkheden met de opdrachten en/of de hulpmiddelen worden binnen die groepjes meestal zelf opgelost.

Aanpassing en uitwerking - Als er onduidelijkheden zijn waar de leerlingen niet zelfstandig uitkomen, dan wordt hulp gevraagd aan de docent. Daarbij ontstaan vaak zeer boeiende onderwijsleergesprekken, ook (en vooral) leerzaam voor de docent. Maar als in de loop der tijd blijkt dat (te) veel leerlingen *dezelfde* problemen hebben en dus steeds weer *hetzelfde* onderwijsleergesprek(je) moet worden gehouden, dan wordt de essentie van dat onderwijsleergesprek(je) zo snel mogelijk 'in kaart gebracht'.

Productie - De vragen en antwoorden zijn opgemaakt in RagTime 5.6 (Mac OSX en Windows, gratis bij mij verkrijgbaar voor *niet*-commercieel gebruik). Voor gebruik in de klas zijn hiervan kaartjes geprint (120 gr. papier, 4 identieke kaartjes per pagina).

Echter, het boek gooit de tabel hier inhoudelijk (grijze gedeelte) een kwart slag om. Dat kan (en daar is ook wel wat voor te zeggen). Maar maak dat dan wel duidelijk door (ook) stels boven de kolommen. Dan leren ze niet alleen trucjes, maar misschien ook het wat en waarom.

wisk 1 MH(V) H 2 kaart 117

opdracht 26-a:
Johan heeft 250 bollen in de grond geplant.
In het voorjaar komen daarvan 220 bollen op.
Neem de verhoudingstabel over en vul hem in.

	N	Z	%
bollen op	220	...	88
bollen in	250	1	100

antwoord:

bollen op	220	...	88
bollen in	250	1	100

??? -> ... goed -> 129

Na het printen worden de kaartjes losgesneden en gemerkt met verschillende kleuren viltstift. Op deze wijze ontstaan vier identieke series, waardoor het grootste probleem uit '70-'72 (wachten op kaartjes) vrijwel geheel is ondervangen.

Werkwijze in de klas

Naamkaartjes - Elke leerling heeft een naamkaartje, even breed als de opdrachtkaartjes maar een centimeter hoger. Buiten de les staan deze kaartjes tussen de opdrachtkaartjes.

Start van een nieuwe les - Aan het begin van een nieuwe les pakt elke leerling zijn/haar naamkaartje met achterliggende opdrachtkaartjes uit een van de vier centrale kaartenbakken en gaat daarmee aan het werk, individueel of in het groepje van eigen keuze.

Werk in uitvoering - Tijdens het werk liggen de opdrachtkaartjes in een speciaal ontworpen bakje, gemakkelijk leesbaar en gestapeld in de goede volgorde.

Als de leerling een opdrachtkaartje omdraait om het antwoord te zien

- draait hij/zij het kaartje om (*naar zich toe*),
- en legt het (met het antwoord naar boven) op de andere al gemaakte kaartjes.

Kaartjes met gemaakte opdrachten blijven liggen - tot het hele stapeltje opdrachten is doorgewerkt, - of tot een leerling die bijna even ver is, er om vraagt.

Door deze werkwijze blijft de volgorde van de losse kaartjes redelijk gehandhaafd.

Stroom van opdrachtkaartjes - Als leerlingen door hun opdrachtkaartjes heen zijn, pakken ze nieuwe uit (een van) de centrale kaartenbak(ken) of ze vragen ze van een leerling die net klaar is met die kaartjes.

Einde van de les - Aan het eind van een werkperiode zet de leerling zijn/haar naamkaartje voor het onderhanden opdrachtkaartje en daarvoor weer de reeds verwerkte opdrachtkaartjes. Het hele stapeltje wordt vervolgens teruggeplaatst in de centrale kaartenbak met de juiste kleur en in de goede volgorde.

Huiswerk - Nieuwe stof wordt (in principe) geheel op school verwerkt. Ongeveer 1/3 van de klas kon het tempo van de rest van de school (zeer) gemakkelijk bijbenen. Wie dat tempo niet haalde mocht tijdens de daltonuren verder werken. Op school gemaakte opdrachten konden desgewenst thuis nog eens worden nagekeken met het boek erbij. (In noodgevallen mochten kaartjes mee naar huis.)

Toetsen - Als een leerling een hoofdstuk heeft afgerond, dan maakt hij/zij een toets (aan het begin van de volgende les). Elke toets bevat de moeilijkste opgaven van het desbetreffende hoofdstuk en moet ruim voldoende worden gemaakt. Wie niet ruim voldoende scoort moet het hoofdstuk opnieuw (en

nu goed!) bestuderen. Zonodig onder intensieve begeleiding (leren leren).

Evaluatie

Zelfstandigheid - Intrinsiek gemotiveerde leerlingen op middenniveau gingen steeds zelfstandiger aan het werk. Zo hebben enkele meisjes met vol enthousiasme voor wiskunde gewerkt op (zeer) goed havo-niveau, terwijl ze voor alle andere vakken op (of onder) mavo-niveau werkten.

Enkele zeer degelijke leerlingen weigerden in het begin om bij onduidelijke vragen eerst maar eens naar het antwoord te kijken en/of gemakkelijke opdrachten uit het hoofd te doen, in plaats van ongelooflijk netjes in het schrift. Na lang aandringen waren ze uiteindelijk bereid om het eens te proberen. En dat werkte. Het tempo steeg sterk. En het groeiende zelfvertrouwen was aandoenlijk.

Hele goede leerlingen gingen in het begin heel hard. Die kwamen bij een vrij tussenuur vragen of ze op de gang wiskunde mochten doen. En bij lessen met knip- en plakwerk lieten ze zien wat ze thuis nog meer voor moois hadden gemaakt. Maar ze waren wel steeds sneller door hun opdrachten heen (soms in een kwart van de beschikbare tijd). Na een paar hoofdstukken ging de motivatie stuk: veel te weinig krenten in de pap.

Tegelijkertijd klaagden de docenten van de bovenbouw dat het tempo daar zo hoog lag dat de leerlingen het nauwelijks konden bijbenen. Bij voortzetting van het systeem lijkt het dan ook zinvol (voor de potentiële vwo-ers) het tempo in de onderbouw *minstens* te verdubbelen, zodat ze in de bovenbouw wat rustiger aan kunnen doen. Als ze in de bovenbouw nog steeds tijd over hebben, dan zijn ze misschien echt rijp voor verdieping. En anders alvast wat universitaire propedeusestof! Die kaartjes daarvoor zijn zo gemaakt.

Discipline - Slimme, *extrinsiek* gemotiveerde leerlingen gingen in het begin ook hard. Maar geleidelijk aan werd hun belangstelling steeds oppervlakkiger. En hun (werk)houding gemakzuchtiger. Het principe van toetsen op eigen verzoek bij het begin van de volgende les zodra je een hoofdstuk af hebt, werkt niet bij deze leerlingen. Er moet dus een aparte, voor iedereen duidelijk zichtbare voortgangsregistratie komen.

Leergierigheid - De toetsresultaten (van de *intrinsiek* gemotiveerde middengroep) stemden behoorlijk tevreden. Als individuele leerlingen niet een 'goed' haalden, dan wilden ze uitleg tot ze het helemaal snapt. En het volgende hoofdstuk gingen ze dan weer extra gemotiveerd te lijf.

Transfer - Bij het vak Nederlands maakten leerlingen frequent diagnostische toetsen en werden dan op basis van de resultaten aan bepaalde werkbladen gezet. Naar analogie daarvan heb ik een groot aantal tweedeklassers met (zeer) slechte toetsresultaten

Na een fraaie aanloop via pijlenkettingen (in-door-uit) verliest het boek momentum door nog een aanloop via machientjes als een soort kruik van Elia (door-uit). Maar eigenlijk gaat het alleen maar om een andere manier van tekenen:

wisk 1 MH(V) H 10 kaart 51

je hebt al geleerd:

Als je steeds dezelfde berekening moet maken kun je dat laten zien met een rekenpijl of pijlenketting.

Bijvoorbeeld:

in aantal bezoeken $\times 2,00$ door $+20,00$ uit totale kosten

zie omslagijde.

je leert nu:

Je kunt zo'n pijlenketting ook anders tekenen:

aantal bezoeken $\times 2,00 + 20,00$ totale kosten

In het boek noemen ze zo'n tekening een machientje.

In de volgende opdrachten gaan we machientjes gebruiken.

??? $\rightarrow$... goed $\rightarrow$ 52

En hier het klapstuk van de veiling. Dit snappen ze zelfs in de 2e klas.

wisk 1 MH(V) H 10 kaart 111

goed onthouden:

aantal km $\times 0,25 + 40,00$ bedrag (machientje)

kun je ook opschrijven als

aantal km $\times 0,25 + 40,00 =$ bedrag (formule)

het opschrijven van een formule kost nog minder moeite dan het tekenen van een machientje.

??? $\rightarrow$... goed $\rightarrow$ 112

op het hoofdstuk over formules en vergelijkingen (th 6 / vmbo 9) geadviseerd om de kaartjes van hoofdstuk 10 voor de 1e klas door te werken. In eerste instantie uit het hoofd en alleen als ze dat zelf wilden ook schriftelijk. Met als bonus de mogelijkheid om de toets over te doen.

Van de leerlingen die dat *niet* te min vonden konden enkelen achteraf desgevraagd precies het kaartje met de belangrijkste samenvatting aanwijzen (zie figuur 4) en verklaren wat ze fout hadden gedaan op de toets.

Dyslexie - De letters op de kaartjes zijn groter en de bladspiegel is smaller dan in het boek. Bovendien rafel ik bij het overtypen lange zinnen graag uiteen tot een paar kortere. Voor dyslectische leerlingen blijkt dat voordeel te hebben.

Inrichting van het lokaal - Bij de beschreven werkwijze is in het wiskundelokaal grote behoefte aan een (open) wandrek om allerlei attributen klaar-voor-gebruik te kunnen neerzetten. Daarbij valt te denken aan:

- laden/kaartenbakken met opdrachtkaartjes;
- kaartenstanders voor op de tafeltjes;
- verschillende kleuren 120 gr. ruitjespapier voor knip- en plakwerk;
- opbergdozen per leerling voor cumulatief knip- en plakwerk van meerdere weken;
- draadmodellen etc. voor ruimtemeetkunde;
- maquettes van gebouwde omgevingen etc.;
- fototoestel met LCD-scherm om maquettes langs de juiste kijklijn te fotograferen;
- geografische kaarten voor oefeningen met kompas;
- plastic kompasrozen;
- etc.

Werkomstandigheden - Deze aanpak heeft ongelooflijke mogelijkheden voor maximale ontplooiing van leerlingen en toch redelijke werkomstandigheden van docenten. Vooral bij heterogene groepen. En helemaal bij klassen met minder makke schapen. Want als een bepaalde leerling wat extra aandacht vraagt, didactisch en/of pedagogisch, dan kun je je daar als docent rustig even helemaal op concentreren - tot het probleem is opgelost. Ondertussen kunnen alle andere leerlingen gewoon verder. En niet nadat ze 'even' aan het werk gezet zijn. Want ze zijn al aan het werk. Altijd. Iedereen. Met opdrachten op (eigen) maat. Speels en uitdagend.

Permanente ontwikkeling met maximale

flexibiliteit - Als een docent naar aanleiding van onderwijsleergesprekken (by Exception) ideeën krijgt voor verbeterde of zelfs helemaal nieuwe opdrachten, dan hoeven die niet te wachten tot de volgende druk. Hij/zij kan ze desgewenst gemakkelijk (na wat oefenen met RagTime) zelf invoeren. Geheel binnen het voor de leerling vertrouwde stramien. Het effect kan meteen worden uitgetest, de bedachte aanpassingen kunnen zo nodig worden bijgesteld en

na volle tevredenheid kan de nieuwe content moeite- en kosteloos worden verspreid onder collega's via internet.

Presentatie per computer

Computers in het onderwijs? - Evenals in het bedrijfsleven is het in het onderwijs verstandig om de processen eerst te organiseren en pas dan te kijken of en zo ja, welke computers nut kunnen hebben. En ook in het onderwijs blijkt dat je met dat organiseren heel ver kunt komen met hele simpele en goedkope technieken. Zoals goed gestructureerde en geëvalueerde content op eenvoudige kaartjes. Maar als die content er eenmaal is, dan kan die zelfde content vrij gemakkelijk geschikt gemaakt worden voor rechtstreekse presentatie op het (kleuren)scherf. Met een aantal grote voordelen, zoals:

Organisatie tijdens de les - Bij presentatie van opdrachten en antwoorden via losse kaartjes is het zeer praktisch als leerlingen in de klas zitten in volgorde van de kaartjes waaraan ze werken. Bij presentatie per computer is de volgorde waarin, of zelfs de plaats waar leerlingen zitten niet of nauwelijks meer relevant.

Systematische feedback - Leerlingen zijn interactief bezig met hun lesstof. Soms hebben ze commentaar op een opdracht, bijvoorbeeld: moeilijk/leuk/gemakkelijk/saai/ overbodig/irritant. Soms hebben ze aanvullende info bij antwoorden, zoals: zeker/ waarschijnlijk/misschien/ik gok maar wat. Voor leerlingen werkt het motiverend en stimulerend als ze die extra informatie kunnen uiten. Voor docenten is diezelfde informatie nuttig voor het evalueren en verder ontwikkelen van het curriculum. Bij presentatie per laptop kan diezelfde laptop worden ingezet voor het verzamelen van die informatie (aanklikken van alternatieve buttons op het scherm).

Flexibeler curriculum - Een computer kan veel flexibeler door programma's springen dan een leerling door een verzameling kaarten. Inzet van computers biedt dan ook grote mogelijkheden tot

- inbouwen van vertakkingen in het curriculum,
- automatisch afnemen van toetsen,
- direct presenteren van het resultaat,
- verder ELO-gebruik (rekenen, tekenen, foto's, film, muziek etc.).

Centrale server - Bij het aanbieden van de leerstof vanuit een centrale server via Wi-Fi (in plaats van *elke leerling* een CD-ROM) kunnen didactisch wenselijk en/of nuttig lijkende wijzigingen in het curriculum helemaal stante pede worden ingevoerd (CD-ROMs moeten eerst nog gebrand worden en kaartjes moeten eerst nog geprint en gesneden worden). Bovendien kan met een centrale server informatie voor het klassenmanagement (voortgang, toetsresultaten etc.) moeiteeloos worden verzameld en geordend.

Kosten op termijn - Iedere leerling een eigen laptop kost ca. € 1000 per leerling. Dat lijkt veel geld, maar het systeem wordt daarmee zoveel soepeler te hanteren, dat één (wiskunde)leraar (met een wat uitgerijpt curriculum) waarschijnlijk gemakkelijk dubbele klassen kan coachen. Op die manier zou die € 1000 per leerling binnen twee jaar kunnen worden terugverdiend. Maar zo'n laptop gaat gemakkelijk vier jaar mee en kan ondertussen gratis voor alle andere vakken op school en hobby's thuis worden gebruikt.

Met veel werkloze leraren aan de kant lijkt dat sociaal niet echt aantrekkelijk. Maar met een vloedgolf aan VUTters voor de boeg is dit misschien de manier om het onderwijs straks draaiend te houden.

Literatuur

[1] L. Weide: *Teaching by Exception*. In: *Euclides* 49(3), pp. 81-90 (1973).

[2] L. Weide: *Teaching by Exception 2*. In: *Euclides* 49(4), pp. 131-136 (1973).

Over de auteur

Ir. L. Weide (e-mailadres: lucweide@mac.com) zit nu in de VUT. De content staat in zijn computer (compleet met goedwerkende style-sheets en handig gebleken halffabrikaten). En de attributen liggen op zolder.

Als er een school (of andere organisatie) is die het systeem wil toepassen of mogelijk zelfs verder wil ontwikkelen, dan is hij graag bereid tot nadere informatie en/of samenwerking.

KUNNEN (WIJ OP) ONZE KINDEREN REKENEN?

Gewenste rekenvaardigheden voor aanstaande bètawetenschappers

[Hans Sterk en Jacob Perrenet]

Inleiding

Op diverse plaatsen in het land ondervinden universitaire bèta-opleidingen problemen met de basale wiskundige parate kennis en rekenvaardigheden van de instromende studenten. Bijspijkercursussen op het gebied van rekenvaardigheid aan diverse instellingen zijn een zichtbaar gevolg daarvan. Blijkbaar is er een kloof ontstaan tussen de (feitelijk bereikte) doelen van het wiskundeonderwijs in het vwo en de verwachtingen van het universitair onderwijs. Met het oog op veranderingen in het vwo in de komende jaren, willen we die verwachtingen onderbouwen. We bekijken de problemen vanuit het standpunt van de algemene praktijk van een universitair gevormde afgestudeerde in een bètawetenschap (werkzaam in een exact georiënteerd beroep: in het bedrijfsleven, in een niet-commerciële organisatie of in een academische onderzoeksomgeving) en vertalen terug naar geschikte of gewenste voorbereidingen in het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs, met name in de bètagerichte profielen N&G en N&T. We beperken ons hier wel uitdrukkelijk tot wiskundige zaken die betrekking hebben op rekenvaardigheden; op zaken als bewijzen gaan we niet in. We gebruiken de term 'rekenvaardigheid' en bedoelen een breed scala van gewoon rekenen tot en met symbolisch manipuleren.

Rekenen in structuren

Een kenmerkend aspect van (disciplines binnen) de bètawetenschappen is dat er bij de aanpak van problemen in structuren wordt gewerkt of dat nieuwe structuren worden ontwikkeld. Een scheikundige richt zich bijvoorbeeld op het gebied van chemische reacties, een econometrist op het gebied van onderhandelingsituaties (speltheorie), en een wiskundige misschien op symmetrieën. Binnen zo'n structuur drukt de academicus zich doorgaans uit in vaktermen en een voor het vakgebied ontwikkeld symbolenapparaat, vaak een mix van cijfers, letters, pijlen en andere tekens. De scheikundige schrijft bijvoorbeeld $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$. Die notaties dienen niet alleen om gegevens vast te leggen, maar zijn ook rijk in de zin dat je binnen structuren kunt 'rekenen' om allerlei specifieke informatie boven water te krijgen en nieuwe kanten van de structuur bloot te leggen: zo'n uitgekiend symbolenapparaat is mede ontwikkeld om het manipuleren binnen een structuur te faciliteren. Die voor een structuur typische rekenwijze stelt onze bèta in staat om resultaten weer te geven, om nieuwe resultaten af te leiden, en om eenduidig te communiceren, ook internationaal. Gewone taal is daarvoor te onbeholpen en legt de diepere structuur

onvoldoende bloot. De geschiedenis laat zien wat een moeizaam proces er dikwijls aan is voorafgegaan om op een bepaald terrein tot effectieve notaties te komen waarmee een structuur beter en beter doorgrond kan worden. De vergelijking $x^3 = 15x + 4$ komt bij Cardano (1501-1576) voor in ongeveer de notatie 'cubus.aeq.15.cos.p.4' (een derde macht is gelijk aan vijftien dingen plus vier; zie bijvoorbeeld 'Math through the ages' van Berlinghoff en Gouvêa^[1]). Dat nodigt niet echt uit tot rekenkundige manipulaties. Het specifieke symbolenapparaat, inclusief de wijze waarop je het hanteert, behoort tot de kostbare verworvenheden van elke bètadiscipline. Aan het front van het onderzoek zie je soms dan ook nog een moeizame zoektocht naar adequate notaties. Vaak heeft een wetenschapper binnen zijn eigen vakgebied al te maken met verschillende structuren en de bijbehorende rekenmechanismen en moet hij van de ene naar de andere gedachtewereld kunnen switchen. Denk aan de wiskundige die in de gewone rekenwereld werkt met de regel $ab = ba$, maar die, als hij switcht naar symmetrieën, niet zomaar meer RS door SR kan vervangen als R een rotatie en S een spiegeling voorstelt: samenstellen van afbeeldingen is namelijk niet commutatief. Of denk aan de scheikundige die, om de reactie tussen waterstof en zuurstof te beschrijven, van de scheikundige structuur $xH_2 + yO_2 \rightarrow zH_2O$ moet overstappen naar de wiskundige structuur van het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$2x = 2z \text{ en } 2y = z$$

Om deze overstappen te kunnen maken, is vertrouwdheid nodig met de ins en outs van de bewuste structuren. Kortom, een essentieel deel van de wereld van de bèta bestaat uit het kennen van de symbolen die bij een structuur passen en uit de vaardigheid te manoeuvreren binnen die structuur met haar eigen karakteristieken. Binnen zo'n structuur moeten vlot 'eerste stappen' gezet kunnen worden, moet aangevoeld worden welke richtingen men uit kan gaan en wat een volgende stap ongeveer als resultaat zal opleveren of zou kunnen opleveren, en moet aangevoeld worden waar de computer zinvol ingezet kan worden. Ook inhoudelijk overleg over een wiskundig probleem met anderen vereist een basale parate kennis om ideeën een stapje uit te werken: al snel verschijnen symbolen en voeren betrokkenen enige rekenstappen uit. In de symbolen verbergen we ook manieren van communiceren en informele varianten van notaties om de overdracht te bevorderen of de stappen toe te lichten. Bijvoorbeeld, in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 0 + 0 = 0$$

vertellen we met de stap '0 + 0' dat we een rekenregel voor limieten hebben gebruikt, althans voor de goede verstaander. Die tussenstap '0 + 0' zie je een rekenapparaat niet gauw maken. Zonder vertrouwdheid met die structuur met al zijn formele en informele aspecten komt een inhoudelijke discussie niet van de grond.

Rekenen in het vwo

Het gewone rekenen met getallen, letters en elementaire functies hoort bij een voor de wiskunde essentiële basis. Van daaruit heb je toegang tot diverse vakgebieden die deze rekenstructuur uitbouwen of heb je voldoende bagage om aan andere wiskundige structuren te wennen. Vertrouwd raken met deze rekenstructuur zou wat ons betreft een onderdeel van het vwo-programma moeten zijn, al pleiten we er niet voor om het trainen daarin met alleen maar driloefeningen in te vullen. Het vertrouwd maken van leerlingen met rekentechnieken moet gepaard gaan met het laten ervaren van de zinvolheid van de techniek en de zinvolheid van het paraat hebben van een zeker arsenaal aan manipulatiemogelijkheden. Serieuzere problemen vragen namelijk om doelgerichte manipulaties die van de traditionele rekenoefeningen (zoals het wegwerken van haakjes of het vereenvoudigen van uitdrukkingen) nogal eens afwijken.

Bijvoorbeeld, bij het onderzoeken van het gedrag van

$$\frac{n^3 + 2n^2 - 3}{3n^3 + 5n + 8} \text{ (voor grote } n\text{)}$$

is het zinvol om deze uitdrukking te herschrijven als

$$\frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{2n^2}{n^3} - \frac{3}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3} + \frac{5n}{n^3} + \frac{8}{n^3}} = \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{5}{n^2} + \frac{8}{n^3}}$$

terwijl je deze twee uitdrukkingen niet gauw een vereenvoudiging van de eerste zou willen noemen. Maar met die herschrijving breng je wel de overheersende rol van n^3 tot uitdrukking. Bij het analyseren van een kwadratische vergelijking zoals $x^2 + 6x + 4 = 0$ is juist het invoeren van haakjes ('kwadraatafsplitsen' of 'ontbinden in factoren') een goede volgende stap. Bij het zoeken van een primitieve van $x^3 e^{x^2}$ is een herschrijving in de langere vorm $x^2 \cdot x \cdot e^{x^2}$ juist zinvol. Als je rechte lijnen op de hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ wilt vinden, is het handig om de vergelijking eerst te herschrijven als $(x + z)(x - z) = (1 + y)(1 - y)$, zodat je de rechte lijnen kunt vinden als doorsnijdingen van vlakken als bijvoorbeeld $x + z = 2(1 + y)$ en $2(x - z) = 1 - y$. Dit arsenaal aan mogelijkheden verschuiven naar 'zoeken we op!' is hopeloos, net zo hopeloos als het is om zonder kennis van het Russisch, maar slechts met een woordenboek en een grammatica in de hand, te verwachten dat je in Moskou soepel zult kunnen communiceren. Maar met inzicht in de mogelijke rekenstappen kun je ook de uitdaging van een probleem aangaan en het vertrouwen hebben verder te komen.

Wat voor soort rekenvaardigheid dan?

Rekenvaardigheid klinkt voor velen als iets zo fundamenteels dat je nauwelijks in de gaten hebt hoeveel er achter steekt en hoe breed het spectrum is waar deze een rol speelt.

Bovendien hebben we boven al aangegeven dat rekenvaardigheid gepaard gaat met aspecten die niet een-twee-drie in machines te vangen zijn zonder weer een hoop extra ballast overhoop te halen (vertrouwdheid met de kracht en beperkingen van machines en software). Denk aan hoe wij met getallen en letters werken. Rekenvaardigheid dient gericht te zijn op de kracht die verborgen ligt in onze symbolische notaties. Hier enkele kanttekeningen en wensen.

- Doelgericht manipuleren

Dit betekent onder andere dat 'vereenvoudigings-opgaven' slechts een deel van het scala beslaan. Zoals eerder genoemde voorbeelden laten zien, bepaalt het te bereiken doel welke manipulaties dat doel dichterbij kunnen brengen - en dat hoeven niet de standaardmanipulaties te zijn. Om dat aspect te benadrukken zou je kunnen spreken van een expliciete vereiste van een zekere *manipulation sense* (naast het steeds meer gehoorde 'symbol sense'). Om te laten zien dat $x^2 - y^2 = 1$ voor $|x| < 1$ geen (reële) oplossingen heeft, is de herschrijving tot $y^2 = x^2 - 1$ zinvol. En om x op te lossen uit de vergelijking $6\sin^2 x - 11\sin x + 4 = 0$ is het zinvol om $\sin x$ tijdelijk door bijvoorbeeld t te vervangen en de vergelijking $6t^2 - 11t + 4 = 0$ aan te pakken.

- Gevoel voor getallen

Bij gehele getallen in een beperkt gebied hebben we direct diverse voorstellingen voor ogen zoals $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 6 = \frac{24}{2}$. Bij een getal als 3741 is dat niet meer aan de orde, maar zijn we in staat, eventueel met hulpmiddelen, het getal te 'ontleden' om bewust een stapje te zetten in een of andere richting. Kortom, bij kleinere of eenvoudiger getallen verwachten we gedetailleerde parate kennis, maar naarmate de getallen groter of ingewikkelder worden, verwachten we vooral vertrouwdheid met de overall structuur en kunnen manipulaties aan apparaten overgelaten worden.

- Bijzondere expressies

De situatie bij letterrekenen is vergelijkbaar met die bij getallen. Hier loopt het scala van parate kennis omtrent $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ tot het herkennen van deze vorm in een gecompliceerd verschil van kwadraten, zoals in $(33x^5\sqrt{y} + 27\sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2$. Verdere bewerking hiervan kan aan programmatuur overgelaten worden.

- Elementaire functies zoals goniometrische functies

Bij elementaire functies zoals de e -macht en goniometrische functies behoort een mentaal beeld van de grafieken van e^x , $\sin x$ en $\cos x$ alsmede de betekenis van bijvoorbeeld periodiciteit tot de standaardbagage, maar kan de bewerking van $\cos x + \cos(3.5x) - \sin^8 x$ weer overgelaten worden aan rekenmachines.

En de rekenmachine?

Met de huidige grafische rekenmachines zijn getallen vrijwel geheel verengd tot eindige decimale getallen. Elk getal wordt onmiddellijk op deze manier gerepresenteerd en dat draagt het risico in

zich dat zowel het bestaan als het nut van andere representaties van getallen geheel buiten beeld raken en dat überhaupt getallen en hun decimale benaderingen als volledig uitwisselbaar beschouwd gaan worden. Denk bij andere representaties bijvoorbeeld aan (het rekenen met) breuken. Zonder twijfel vertelt een breuk je in allerlei contexten meer dan een decimaal getal, bijvoorbeeld bij berekeningen aan tandwieloverbrengingen of gewoon bij het verdelen van taarten. Of denk aan reële getallen zoals $\sqrt{2}$, waarvan het exacte getal bepaald meer informatie in zich draagt dan een decimale benadering.

Een rekenmachine dient het doelgericht manipuleren in complexere situaties te ondersteunen, maar de gebruiker moet het overzicht hebben over de mogelijke vervolgwegen. Om de wiskunde daarbij recht te doen, moeten naast numerieke representaties ook exacte representaties en het rekenen met letters voorhanden zijn. Een symbolische rekenmachine kan een evenwichtiger beeld van het gangbare rekenwerk in de wiskunde geven en helpen eenzijdigheid te voorkomen.

Conclusie

Zowel om in de (beroeps)wereld van de bèta mee te kunnen doen als om een eerlijk beeld te krijgen van een aspect van de dagelijkse kost van de bèta is het een must, tot op zekere hoogte ingevoerd te zijn in rekenvaardigheid. Het verdient aanbeveling dan redelijk nauwkeurig af te bakenen welke vaardigheden met de hand beheerst moeten worden en op welk niveau.

Een plaats inruimen in het eindexamen voor onderdelen die zonder rekenmachine gemaakt dienen te worden, dwingt af dat deze vaardigheden snel een plaats in het onderwijs krijgen. Met het oog op de ontwikkeling van het getalbegrip bij de leerling valt te overwegen de GRM te vervangen door een symbolische rekenmachine.

Noot

[1] W.P. Berlinghoff, F.Q. Gouvêa: *Math through the ages, A gentle history for teachers and others. The Mathematical Association of America and Oxton House Publishers (2004).*

Over de auteurs

Hans Sterk is werkzaam bij de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven; Jacob Perrenet is daarnaast ook nog werkzaam bij het Onderwijs Service Centrum van de Technische Universiteit Eindhoven. Hun e-mailadressen zijn sterk@win.tue.nl en j.c.perrenet@tue.nl.

ALGEBRA EN APPLETS, LEREN EN ONDERWIJZEN

Onderzoeksrapport van het Freudenthal Instituut

[Jos Tolboom]

Inleiding

In maart 2005 publiceerde het Freudenthal Instituut (FI) het rapport 'Algebra en applets, leren en onderwijzen'. Auteurs zijn Peter Boon en Paul Drijvers. Het rapport beschrijft het onderwijs-onderzoek 'Didactische mogelijkheden van applets bij algebra', dat is voortgekomen uit een veldaanvraag ten behoeve van kortlopend onderzoek (zie website [1]) van het Sint Gregorius College in Utrecht bij de Landelijke Pedagogische Centra. In dit artikel kijken we naar de opbrengsten van dit onderzoek vanuit het perspectief van de wiskundendidactiek en – dus – de wiskundedocent (zie website [2]).

Onderzoekopzet

Het onderzoek is handig opgezet. Het bouwt namelijk voort op eerder gedane inspanningen van het FI: *WisWeb* en *WELP* (WisWeb En LessenPraktijk).

Het is een min of meer logische volgorde. Je maakt applets ('app' staat voor 'application' en 'let' is de Engelse manier om een zelfstandig naamwoord te verkleinen: 'kleine toepassing' dus); vervolgens maak je lesmateriaal bij die applets (wat in *WELP* is gedaan). Over deze volgorde valt nog wel te twisten. Tot slot voer je een onderzoek uit naar de kwaliteit van het geheel.

Onderzoeksvragen waren hier:

1. Wat zijn de didactische mogelijkheden van het gebruik van applets bij het aanbrengen van algebraïsche vaardigheden en de ontwikkeling van algebraïsch inzicht in klas 1, 2 en 3 van havo en vwo?
2. Welke verandering in leergedrag bewerkstelligt het gebruik van applets?
3. Wat zijn de gevolgen voor de rol van de docent in het onderwijsleerproces?

Voor de beantwoording van de vragen werden ervaren docenten geïnterviewd. Daarnaast werden leerlingen geobserveerd. Men gebruikte audio- en video-opname-apparatuur voor het opslaan van gesprekken en gedrag. Omdat onderzoek een

middelenintensieve bezigheid is, heeft men zich beperkt tot het analyseren van twee applets:

- a. AlgebraPijlen (modelapplet)
- b. VergelijkingenOplossen (oefenapplet).

Op het onderscheid 'modelapplet'/'oefenapplet' komen we later terug. Daarnaast bekijken we hoe de resultaten van het onderzoek naar deze twee applets generaliseerbaar zijn voor de andere applets in dit project en mogelijk zelfs voor willekeurige applets ontwikkeld voor wiskundeonderwijs.

De applets

Het FI zag al in 1998 de mogelijke waarde van applets via het web voor het wiskundeonderwijs. In 2000 is op basis van dat inzicht het *WisWeb*-project gestart. Samen met het vervolgproject *WELP* heeft dat meer dan 100 applets opgeleverd met bijbehorend lesmateriaal (zie website [3]). Er is een account nodig om in te kunnen loggen in de omgeving. Dat is natuurlijk noodzakelijk voor de identificatie van leerling en docent. Op dit moment is het aanvragen van een account gratis.

In het onderzoek wordt onderscheid gemaakt tussen twee typen applets:

- a. ModelApplets
- b. OefenApplets.

Door te werken met een ModelApplet ontwikkelen leerlingen idealiter een denkmodel rondom een wiskundig probleem. Bijvoorbeeld het 'weegschaal-model', dat begrip bijbrengt over het manipuleren met vergelijkingen. Met een OefenApplet zouden zij hun algebraïsche vaardigheden moeten kunnen verbeteren. De categorie OefenApplets is serieus opgezet, mede op sterk aandringen van docenten. Een uitstekend idee is het opnemen van de OefenApplets in een 'Digitale Wiskunde Oefenomgeving'. In de omgeving moet worden ingelogd. Leerlingen kunnen hier met de OefenApplets aan de slag en krijgen automatische feedback van het applet op de invoer die zij geven. Hun werk wordt in de omgeving opgeslagen. Op deze

Het kunnen afleiden van een inverse expressie is in mijn ogen een soort lakmoesproef voor het begripsmatig goed kunnen werken met pijlen-kettingen. Uit het rapport valt niet op te maken of hiervoor sowieso te weinig tijd was of dat ergens in het traject onvoorziene vertragingen ontstaan zijn, waar dat misschien in een meer traditionele werkwijze niet gebeurd was. Het zou interessant zijn daar in een vervolgonderzoek duidelijk op te letten.

OefenApplet 'VergelijkingenOplossen'

Naast het introduceren van een concept en het vormen van begrip dat een leerling traint met de ModelApplets, is er volgens docenten in de lespraktijk ook een belangrijke rol weggelegd voor training van vaardigheden. Het applet *VergelijkingenOplossen* is een voorbeeld van een OefenApplet, waarin de leerling kan oefenen met een behoorlijk aantal lineaire vergelijkingen, van verschillende typen (variabelen aan één kant van het '='-teken, variabelen aan beide kanten, negatieve coëfficiënten enzovoorts). Dit applet heeft drie varianten:

1. Vind de juiste strategie;
2. Zoek zelf de oplossing;
3. Toets je eigen vaardigheid.

Met enkele ModelApplets heeft de leerling het concept van de weegschaalmethode geleerd: 'Alles wat je aan de linkerkant van het '='-teken doet, moet je aan de rechterkant van het '='-teken ook doen, anders breng je de weegschaal uit balans.' Iedere verandering (vereenvoudiging) die een leerling aanbrengt in de oorspronkelijke vergelijking, wordt op correctheid (equivalentie) gecontroleerd. Daarbij accepteert het applet niet alle notaties: de decimale benadering wordt afgekeurd. De in mijn ogen op zijn minst verwarrende notatie als $3\frac{1}{8}$, waarin de prioriteit van vermenigvuldiging voor optellen wordt genegeerd – en waaraan wij gewend zijn, maar die bij sommige erg systematische leerlingen voor verwarring zorgt – vindt wel genade in de ogen van het applet. Punten en komma's mogen wel door elkaar worden gebruikt (zie figuur 2).

De vorm die gekozen is voor de oefenapplets, is schematisch en dus duidelijk, maar toch heeft het applet, in alle drie de varianten, in meer of mindere mate een speelse insteek. De indeling in niveaus en het vastleggen van scores is zeer gebruikelijk in computerspelletjes en zal leerlingen aanspreken. Black (zie [5]) waarschuwt wel voor een valkuil: wanneer leerlingen teveel in een openlijke onderlinge competitie komen, kan dat verlamdend werken voor de zwakkere en misschien zelfs de gemiddelde leerling. Ik heb zelf niet met een klas kunnen werken, en weet niet hoe openbaar de niveaus en bijbehorende scores zijn, maar hiermee moet een docent wel voorzichtig omgaan.

Een bijzonder goede insteek voor dit soort oefenopdrachten is het inbouwen in een administratieve structuur, die hier Digitale Wiskunde OefenOmgeving wordt genoemd. Dit geeft zowel de leerling als de docent de mogelijkheid tot monitoring.

De 'houdbaarheid' van de feedback wordt bovendien vergroot. De feedback op zich is, zoals in figuur 2 getoond, een kwestie van 'goed of fout' (krul of kruis). Door de aard van de stof en doordat er per elementaire stap feedback gegeven wordt, is dat hier niet een groot bezwaar. Maar bij opener, complexere problemen is dit type feedback wellicht te mager. (Red.: Zie ook het artikel 'Intelligente feedback' van Bokhove, Heck en Koolstra, op pag. 70-74.)

De onderzoekers concluderen:

1. *Het gebruik van de serie applets voor het oefenen van het oplossen van vergelijkingen heeft succes gehad in die zin dat de prestaties van de leerlingen duidelijk vooruit zijn gegaan [ten opzichte van de voortoets], terwijl er slechts twee lessen tussen voortoetsen zaten.*

Dit vind ik een spectaculair resultaat. Twee lessen is weinig. Ik ben benieuwd hoeveel leerlingen buiten de lessen om hebben gewerkt. Dat meldt het rapport niet.

2. *Het gebruik van de digitale leeromgeving waarin het werk van de leerlingen wordt vastgelegd heeft een positief effect op de resultaten.*

Dit is een uiterst belangrijke conclusie. Het inbedden in een dergelijke omgeving maakt een einde aan de vrijblijvendheid die het werken met applets altijd had.

3. *Ook in een OefenApplet zitten modelaspecten, zodat oefenen en begripsontwikkeling samenhangen.* Dit weet iedere ervaren docent. 'Begrip' en 'techniek' zijn alleen maar polariteiten van het spectrum in het leerproces.

Onderwijzen met applets

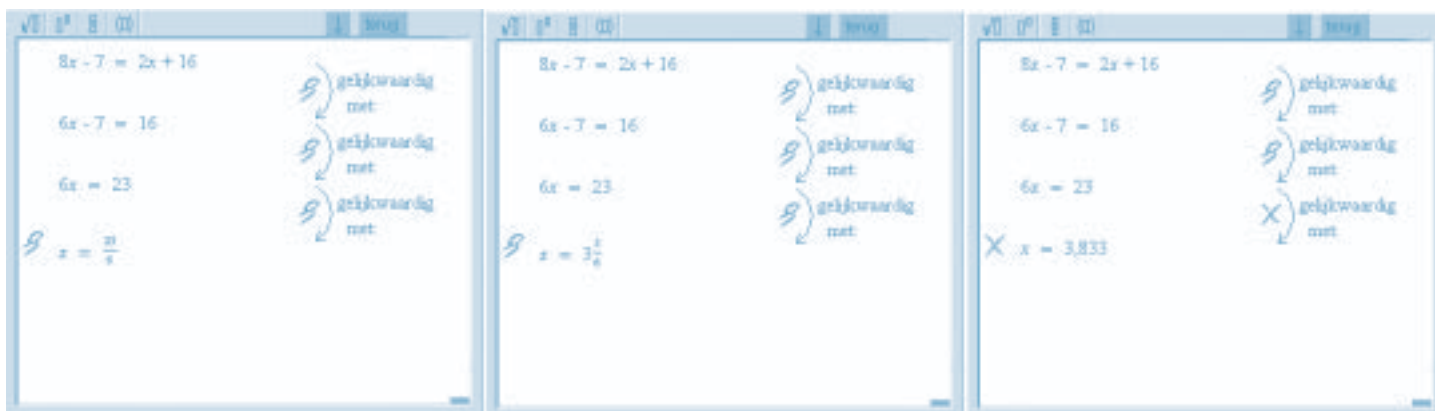
Wat zijn de ervaringen van de docenten die aan het project hebben meegedaan? De onderzoekers beschrijven dit aan de hand van de onderzoeksvraag: *Welke didactische mogelijkheden biedt het gebruik van applets in het wiskundeonderwijs en hoe kan de docent die mogelijkheden uitbuiten?*

Eén van de docenten uit het project merkt op: '...een applet is een middel om uit te leggen...'. Dat is een zienswijze die dicht op de lespraktijk zit. Een applet maakt interactie mogelijk, over een wiskundig probleem in dit geval. Via het applet kun je feedback geven op wiskundige activiteiten. Daarmee neemt het applet dus een deel van het werk van de docent over. Een docent uit het project merkt op: *'Ik moest dus heel duidelijk zijn in wat ik ze wilde uitleggen, ik had ook zoiets van: ik mag ook niet teveel vertellen. Ga jullie gang maar. En normaal ga je toch iets meer vertellen..., hier moet je het echt zelf uitzoeken. Alleen echt de basis vertellen en dat heeft wel heel goed gewerkt.'*

Een ander zegt: *'In een gewoon lokaal leg ik veel meer uit. (...) Ik deed dan voor op het bord inderdaad.'*

Aan de andere kant bleken de leerlingen veel hulp te vragen. Docenten hadden de indruk dat zij aanzienlijk meer interactie met de leerlingen hadden over de stof, die ook nog eens vaker op initiatief van de leerling tot stand kwam.

Ik denk dat applets dus een heel geschikte manier zijn om een dialoog over wiskunde op gang



FIGUUR 2

te brengen. Maar ik denk daarbij dat, vooral in het geval van ModelApplets, de *wiskundige interactie* tussen leerling en applet nog heel vaak geïnterpreteerd moet worden. En daarbij is een docent onmisbaar. Van belang is uiteraard wel dat de docent zich bijzonder goed realiseert hoe de interactie tussen leerling en applet er in het hoofd van de leerling uitziet. Bovendien nodigen applets op zichzelf uit tot een zekere trial-and-error-achtige oppervlakkigheid. Inbedding in een leeromgeving met controleerbare opdrachten gaat dit gevaar tegen. Maar ook een docent die nadrukkelijk aanwezig is in de klas kan reflectie en doordenken stimuleren. Er wordt een tip gegeven aan collega's die met applets werken:

Je moet leerlingen controleren, ook huiswerk. Toets individueel en laat die toetsen meetellen.

Kortom: door nog een leermiddel toe te voegen aan het wiskundeonderwijs wordt aan de ene kant een deel van het (basale) werk uit de handen van de docent genomen. Aan de andere kant is er wel weer een extra middel dat de docent zich instrumenteel en didactisch eigen moet maken en bovendien moet verwerken in het didactisch geheel. Het lijkt erop dat dit het werk van docenten uitdagender kan maken, maar misschien ook wel complexer.

Conclusies

Met dit rapport over het leren en onderwijzen van algebra met behulp van applets bewijst het Freudenthal instituut het wiskundeonderwijs een goede dienst. Dat geldt helemaal wanneer de ontwikkelde materialen toegankelijk blijven voor de wiskundedocent.

Vanuit het perspectief van onderzoek waren de middelen beperkt. Binnen die beperking worden toch enkele belangrijke en onderbouwde conclusies getrokken en nuttige aanbevelingen gedaan. Voor de wiskundedocent is het meest belangrijk dat er een schat aan materiaal is ontwikkeld, dat

na onderzoek effectief is gebleken en dat –hopelijk definitief– gratis beschikbaar is. De zin in algebra van de leerlingen en hun prestaties zijn erbij gebaat.

Publicatie

Titel: Algebra en applets, leren en onderwijzen

Auteurs: Peter Boon en Paul Drijvers

Uitgever: Freudenthal instituut / ICO-ISOR, Utrecht

ISBN: 90-6709-000-X

Prijs: € 7,50 ; te bestellen via www.fi.uu.nl >

ICT expertise > Winkel

Jaar van uitgave: 2005

Websites

[1] www.kortlopendonderzoek.nl

[2] www.kpcgroep.nl/kennisOnLine/artikelen/index.asp?ArticleID=2129&SubjectID=33&ThemeID=0&

[3] www.fi.uu.nl/wisweb/

Referenties

[4] D. van de Beld, B. ter Veer, M. Traas: *De laptopklas*. In: *Euclides* 78(7), pp. 317-321 (2003).

[5] P. Black: *Formative and summative assessment by teachers*. In: *Studies in science education* 21, pp. 49-97 (1993).

Over de auteur

Jos Tolboom (e-mailadres: j.l.j.tolboom@rug.nl) is docent Betadidactiek Rijksuniversiteit Groningen en ICT-redacteur van *Euclides*.

INTELLIGENTE FEEDBACK BIJ DIGITALE TOETSEN EN OEFENINGEN

[Christian Bokhove, André Heck, Gerard Koolstra]



Inleiding

Sinds december 2004 is de wiskundegemeenschap met steun van de 'Beleidsregel Vooruit!' een project rijker: het GALOIS-project, waarbij de naam van de welbekende wiskundige als acroniem gebruikt wordt voor Geïntegreerde Algebraïsche LeerOmgeving In School. Doelstelling is één digitale werkomgeving te realiseren waarin

1. leerlingen met wiskunde kunnen oefenen en zichzelf te allen tijde kunnen toetsen;
2. wiskundeopdrachten voor een deel 'willekeurig' gegenereerd worden, zodat de hoeveelheid oefenstof schier onuitputtelijk is;
3. activiteiten en antwoorden van leerlingen worden opgeslagen;
4. leerlingewerk automatisch 'intelligent' van commentaar wordt voorzien.

Daarbij willen we deze doelen bereiken op basis van *open source en open standaarden* (in verband met kostenbesparing en uitwisselingsmogelijkheden). In dit artikel willen we vooral op het punt van feedback op leerlingewerk ingaan.

Intelligente feedback?

Je komt als docent handen, ogen en oren te kort als je serieus werk probeert te maken van interactief onderwijs dat ook nog eens rekening houdt met verschillen. Af en toe – vaak met kleine groepjes of in één-op-één situaties – krijg je het gevoel dat je echt 'onderwijs op maat' kunt bieden, heel vaak mik je noodgedwongen – op een soort gemiddelde, of is de interactie meer steekproefsgewijs. De problematiek wordt niet zelden nog verergerd door grote klassen/groepen, (te) weinig contacturen, tijdsdruk etc.

Is het mogelijk met behulp van ICT hier verandering in te brengen? De ervaringen zijn niet onverdeeld positief. Uiteraard heeft de moderne docent veel

baat bij allerlei computerprogramma's en Internet (voor lesmaterialen en communicatie), maar over de mogelijkheden het onderwijs echt effectiever te maken met behulp van ICT is niet iedereen even optimistisch, en vaak om begrijpelijke redenen.

Het klinkt wel verleidelijk om te beweren dat leerlingen via een digitale toetsomgeving zelfstandig en zoveel als nodig kunnen oefenen met wiskunde, zonder dat dit gelijk een hogere werkbelasting voor de leraar met zich mee brengt. Maar vaak gaat het om een primitieve 'interactie', waarbij antwoorden botweg, zonder goede toelichting, goed of fout wordt gerekend. Een leerling blijft zitten met vragen als: 'Wat doe ik verkeerd? Moet ik een komma typen in plaats van een punt (of andersom)?', 'Is mijn antwoord nauwkeurig genoeg (of wellicht te nauwkeurig)?' en 'Heb ik iets fout gedaan en, zo ja, wat voor een fout: een slordigheidje, een leesfout, of een echte begripsfout?' En als je er als docent bijgeroepen wordt mag je hopen dat je snel ziet waar de schoen wringt.

De vraag is interessant in hoeverre het mogelijk is om de deskundigheid van een wiskundeleraar – de kennis van het onderwerp en van de leerlingen – 'in te bouwen' in oefenprogramma's, zodat leerlingen bij (veel)gemaakte fouten een reactie krijgen waar ze echt wat aan hebben. We noemen een dergelijke terugkoppeling voor het gemak '*intelligente feedback*'.

In onderwijs is feedback^[1] onlosmakelijk verbonden aan leerprocessen: het is meestal bedoeld om leerlingen inzicht te geven in hun eigen leerproces of functioneren, hun kennis te bevestigen, te versterken of te veranderen en om leraren inzicht in de competenties van hun leerlingen te geven zodat lesgeven effectiever gemaakt kan worden. In dit artikel beperken we ons tot zogenaamde '*lokale*

feedback, dat wil zeggen tot feedback op basis van een ingetoetst antwoord of een andere vorm van interactie op een gegeven vraag of opdracht. Er bestaat ook zoiets als *'globale feedback'* die zich niet richt op een bepaald onderdeel van het leerproces, maar meer een terugkoppeling is op een groter geheel.

We kunnen allerlei *vormen* van lokale feedback onderscheiden. Een paar voorbeelden:

- *conceptueel*: uitleg of toelichting op de gegeven reactie (commentaar op de nauwkeurigheid van een ingetoetst antwoord, toelichting op de invoer van een wiskundige formule, ...)
- *verhelderend*: inhoudelijke informatie ter ondersteuning (een hint, een verwijzing naar lesstof, ...)
- *beoordelend*: informatie over de totaalscore, gebruikte tijd etc.
- *affectief*: bijvoorbeeld een aanmoediging of een indicatie van correctheid van tussenresultaten
- *adviserend*: denk aan suggesties voor verdere oefening.

Vaak zullen diverse vormen in een reactie te herkennen zijn.

De *complexiteit* van feedback, dus de aard en hoeveelheid informatie, kan ook variëren: van *Goed-Fout feedback*, waarin de leerling alleen geïnformeerd wordt over de juistheid van het antwoord, tot *gedetailleerde feedback*, die de leerling uitlegt waarom zijn of haar antwoord al dan niet correct is of verwijst naar een lestekst of instructie over het onderwerp van de vraag.

We spreken van *intelligente feedback* als de terugkoppeling gebaseerd is op een analyse van het antwoord of actie van een leerling en verder gaat dan een simpel antwoord als goed of fout of een waarderingscijfer. Bij een foutief antwoord wordt bijvoorbeeld aangegeven wat er (vermoedelijk) misgegaan is, ook kan een hint gegeven worden en veelal zal een nieuwe kans geboden worden. Een ander voorbeeld is de aanscherping van een op zichzelf correct antwoord (bijvoorbeeld $\sqrt{50}$ tot $5\sqrt{2}$). Intelligente feedback is gedetailleerde feedback die gebaseerd is op drie zaken:

- expertkennis over het wiskundige onderwerp,
- een model waarin veel voorkomende fouten en gedragingen gerubriceerd zijn,
- kennis van leerstrategieën om de meest geschikte terugkoppeling te kunnen kiezen.

Numerieke antwoorden

Hieronder staan twee voorbeelden van intelligente feedback bij opgaven met een numeriek antwoord.

Voorbeeld 1

In een fietsband zit een lek. Elke minuut verdwijnt 6 % van de lucht.

Hoeveel % is er na 9 minuten verdwenen? Rond af op een heel getal.

antwoord	feedback	verklaring
43	Uitstekend	correct antwoord
42	Dicht bij het goede antwoord: een afrondfout?	afrondingsfout?
57	Nee: dit percentage is er nog over!	halverwege gestopt
69	Nee: misschien in de war met 6% <i>erbij</i> ?	leesfout?
54	Zo werkt dat niet: gebruik de groefactor!	conceptuele fout: 6 maal 9.
anders	Nee, dat klopt niet.	?

Deze vorm van feedback is geen toekomstmuziek, maar een programma (of liever een programma-concept^[2]; zie figuur 1) dat al geruime tijd gebruikt wordt. De precieze bewoordingen zijn misschien anders dan de lezer zelf zou gebruiken, maar nadere bestudering van de antwoorden (en een beetje rekenen) leert dat de getoonde reacties heel goed kunnen passen bij de gegeven antwoorden. Zo is 0,94⁹ ongeveer gelijk aan 0,57 en levert 1,06⁹ ongeveer 1,69 op – een stijging met 69%. Daarbij is het van belang te beseffen dat de getallen 6 (%) en 9 (minuten) geen vaste getallen zijn, maar semi-willekeurig worden gegenereerd. De volgende keer gaat het bijvoorbeeld over 12% en 15 minuten, zodat het zin heeft de vraag meermalen te maken.

Voorbeeld 2

Op een fruitschaal liggen 17 mandarijnen. Vijf daarvan zijn rot, maar dat is slecht te zien. Iemand pakt op goed geluk twee mandarijnen van de schaal. Bereken de kans dat daar minstens één rotte bij zit. Rond af op drie decimalen.

antwoord	feedback	verklaring
0,515	Uitstekend	correct antwoord
51,471	Een getal tussen 0 tot 1	eigenlijk goed, maar in procenten
0,514	In de buurt! Goed afgerond?	afrondingsfout
0,502	Geen vaste kans, dus <i>niet</i> binomiaal	verkeerde rekenmethode
0,485	Dit is de kans op geen enkele rotte mandarijn!	complementaire kans berekend
0,441	Dit is de kans op <i>precies</i> één rotte!	leesfout?
anders	Nee, dit klopt niet.	?

Het vierde antwoord hoort bij een binomiaal kansexperiment. In hoeverre de reactie 'Geen vaste kans, dus *niet* binomiaal' adequaat is, hangt sterk af van de situatie. Worden dergelijke uitdrukkingen in dit geval ook in de klas gebruikt? Zo zullen veel leerlingen en docenten gewend zijn aan uitdrukkingen als *'zonder terugleggen'*. In feite is dit een didactische keuze die zoveel mogelijk door de betrokken docent(en) genomen zou moeten worden.

Hoe werkt het?

In feite is het principe heel simpel. Naast het juiste antwoord worden op basis van de gegevens in de opgave en met behulp van kennis en ervaring die

je als docent bezit allerlei onjuiste antwoorden berekend. In het laatste voorbeeld wordt onder andere doorgerekend wat het (vermoedelijke) antwoord is wanneer ten onrechte met de binomiale verdeling wordt gewerkt, en wanneer over het woord ‘minstens’ wordt heen gelezen. In het geval dat een gegeven antwoord in de buurt komt van het correcte antwoord en mogelijk verschilt op basis van afrondingen, wordt de suggestie van een afrondingsfout gegeven. Andere herkenbare fouten, vaak ontleend aan de oefenpraktijk, zijn meestal gemakkelijk toe te voegen.

Uiteraard wordt hierbij uitgegaan een zeker eenduidig verband tussen het gegeven antwoord en de gemaakte fout. Met het oog hierop is het soms verstandig om de gevraagde nauwkeurigheid van het antwoord wat op te schroeven. Eventueel –en dat heeft ook om een andere reden wat sympathieks– kan de diagnose vragenderwijs gesteld worden: ‘Heb je gedacht aan het aantal mogelijkheden?’ of een reactie in de trant van: ‘Ben je soms in de war met ...?’ De kans op ongewenste interferentie van een bijna gelijk antwoord op basis van verschillende fouten kan vaak verder verkleind worden door een geschikte keuze van de grenzen waarbinnen de getallen in de opgave kunnen variëren. Het selecteren van geschikte ‘bandbreedtes’ voor de parameters in de opgave en het onderscheppen van ongewenste combinaties (zoals een klein groei-percentage gedurende een korte tijd, wat een bijna lineair verband oplevert) is een niet te onderschatten aspect bij het construeren van dit soort oefeningen.

Bij een aantal antwoorden is vooral van belang dat leerlingen inzien dat ze niet *kunnen* kloppen. Dit geldt niet alleen voor kansen buiten het gebied 0-1, maar ook bijvoorbeeld voor antwoorden die overduidelijk te groot of te klein zijn. Bij dergelijke fouten mag volgens ons de feedback wat directer zijn, hoewel deze nooit mag ontaarden in vervelende opmerkingen. De affectieve component van reacties is – ook op een computerscherm – niet onbelangrijk!

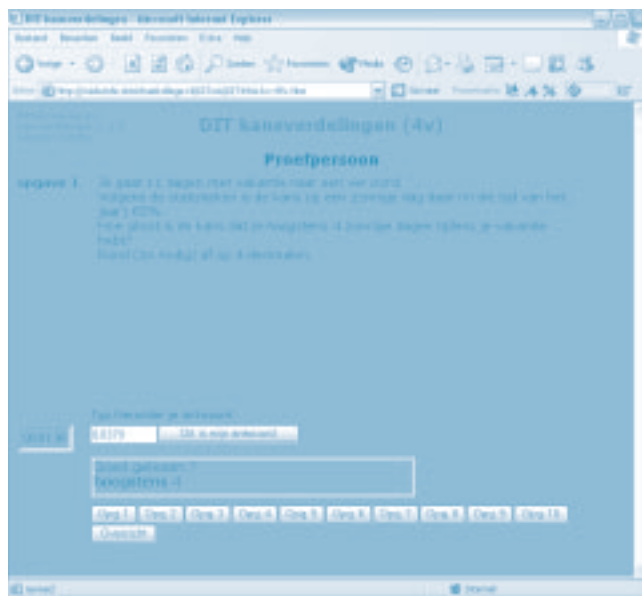
Wiskundige formules

De invoer en verwerking van getallen of uitdrukkingen die eenvoudig tot een getal herleid kunnen worden, is in een digitale toets goed te doen: vaak is meteen duidelijk wat bedoeld wordt en hoe het antwoord ingetikt moet worden. Bij formules ligt dit anders, zowel wat betreft invoer als evaluatie. Bij het goed kunnen lezen, herkennen en invoeren van algebraïsche uitdrukkingen als $x^3 - 3x$, $\sqrt{x^3 - 3}$ of $\frac{x-5}{2x-1}$ komt heel wat kijken. Bij gebruik van een computeralgebra-systeem en bij digitale toetsen met invoer van wiskundige formules wordt een leerling vaak met een vaste, verplichte syntax geconfronteerd, die dan ook nog eens afwijkt van wat er uiteindelijk op het scherm te zien is. In de gegeven voorbeelden kan dat zijn $x^3 - 3x$, $\text{sqrt}(x^3 - 3)$ en $(x-5)/(2x-1)$. Als een leerling daarentegen $x^3 - 3x$, $\text{sqrt}(x^3) - 3$ en $x-5/2x-1$ intikt, dan verschijnen er een foutmelding

(‘syntax error’) en twee onverwachte formules ($\sqrt{x^3 - 3}$ en $-\frac{3}{2}x - 1$) op het scherm. Formules met prioriteitshaakjes invoeren en adequaat omgaan met rationale uitdrukkingen, worteltekens en machten stellen hoge eisen aan leerlingen wat betreft het inzicht in de structuur van wiskundige formules^[3]. Dat de invoer ook anders kan tonen de toetsomgeving Maple T.A.^[4] en diverse algebra-applets^[5] van het Freudenthal Instituut aan. Leerlingen kunnen zowel $3x$ als $3*x$ typen, breuken kunnen met de deelstreep / worden ingevoerd, maar ook ‘onder elkaar’ via een formulepaneel, en exponenten (desnoods ook exponenten in exponenten) kunnen op diverse manieren ingevoerd worden. Deze flexibele invoer wordt benut in oefen- en toetsomgevingen waarin leerlingen bijvoorbeeld vergelijkingen stap voor stap kunnen oplossen. De feedback die bij dit type algebra-applets optreedt is direct, maar over het algemeen wel vrij beperkt: *goed*, *fout* en *nog onvolledig* (geaccentueerd door de kleuren groen, rood en oranje).

Een tweede punt van zorg bij digitale toetsen waarin vrij gebruik van formules is toegestaan, is de test op equivalentie van algebraïsche uitdrukkingen (zie figuur 2). Het lijkt misschien gemakkelijk om met een modern computeralgebra-systeem na te gaan of formules equivalent zijn. Bijvoorbeeld, haakjes wegwerken laat zien dat $8x^3 - 12x$ equivalent is met $x(8x^2 - 12)$, $4x(2x^2 - 3)$, $2x(2x - \sqrt{6})(2x + \sqrt{6})$ en $(2x)^3 - 6 \cdot (2x)$. Maar verificatie van de gelijkheid $\ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi\right)\right) = \text{arcsinh}(\tan x)$ is zeker geen sinecure. Men moet dus een groot vertrouwen hebben in de capaciteiten van een onderliggend computeralgebra-pakket. Maar ook in de capaciteiten van de ontwerper van toetsvragen: in de evaluatie van ingetikte wiskundige formules moet hij of zij ook rekening houden met de randvoorwaarden die aan een antwoord gesteld zijn. Wanneer bijvoorbeeld een ontbonden vorm gevraagd wordt is een antwoord als $x^2 - 2x + 1$ niet goed, maar moet de uitkomst toch echt $(x-1)^2$ wezen. Intelligente feedback zal hierop moeten inspelen.

Het verkennen van de mogelijkheden om meer inhoudelijke feedback te geven op ingevoerde wiskundige formules is dan ook een grote uitdaging voor degenen die zich met digitale toetsen en oefeningen bij wiskunde bezighouden. Er is al veel gebeurd, maar tot voor kort is weinig toegankelijk gemaakt voor een groter publiek en weinig is bruikbaar gemaakt voor het wiskundeonderwijs in Nederland op havo/vwo-niveau. Hierbij komt namelijk nog een complicerende factor om de hoek kijken: hoewel het noodzakelijk is om bij het interpreteren van algebraïsche uitdrukkingen gebruik te maken van geavanceerde computeralgebra-programma's, zijn deze voor scholen te duur. Interessant voor het GALOIS-project zijn daarom vooral initiatieven die gebruik maken van open source software en open standaarden.



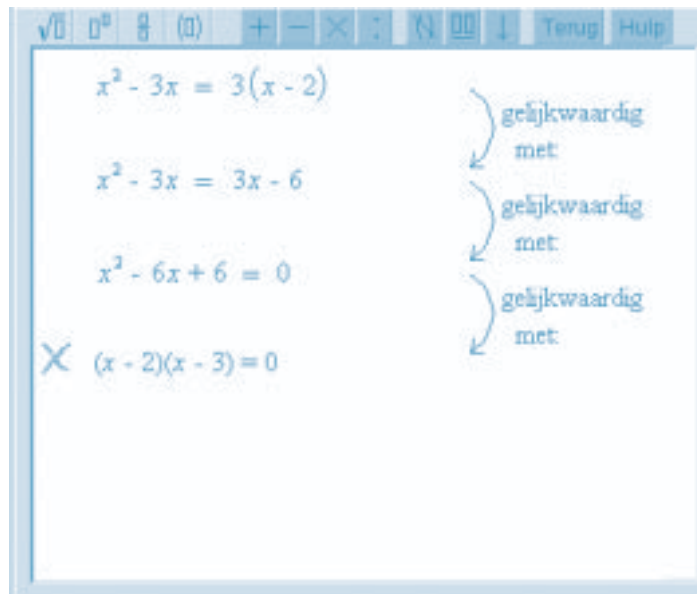
FIGUUR 1

Naar een open source en een open standaard

Goede toetsen maken is erg tijdrovend en mede daarom is uitwisselbaarheid van materiaal van groot belang. Het is de belangrijkste drijfveer in pogingen om tot een standaard te komen: een uniforme wijze waarop vragen, opdrachten en feedback wordt opgeslagen.

Zo bestaat al enige tijd de IMS-QTI^[6] standaard die probeert de vorm van vragen en toetsen te standaardiseren. Jammer genoeg is deze te weinig toegesneden op wiskunde: in verwerking van wiskundige formules is in deze standaard niet voorzien. Verschillende teams zijn bezig hier een aanvulling op te maken. Een voorbeeld hiervan is de in het kader van het Engelse 'Serving Maths' project^[7] ontwikkelde specificatie voor Mathematical Questions & Test Interoperability, kortweg MathQTI^[8]. Deze specificatie laat toe dat wiskundige vragen en problemen volgens een vaste opbouw worden vormgegeven. Een vraag bestaat kortweg uit een 'stam' en de mogelijke antwoordvarianten. Voor elke antwoordvariant kan worden beschreven wat er moet gebeuren en welke terugkoppeling moet plaatsvinden. Een variant hierop, die ook in het 'Serving Maths' project ontwikkeld is, heet RQP^[9] en regelt tevens dat antwoorden op toetsvragen 'op afstand' kunnen worden verwerkt door een computer. Het St. Michaël College te Zaandam heeft zo'n computer beschikbaar gesteld voor de buitenwereld en de eerste experimenten met de bijbehorende software zijn uitgevoerd, onder andere met de toetsomgeving STACK^[10] die gebruik maakt van het computeralgebra-systeem Maxima.

In RQP is het mogelijk om alternatieve antwoorden op te nemen. Dit raakt dicht aan de eerder in dit artikel beschreven programmaconcept voor verwerking van numerieke antwoorden. Het bijzondere is dat nu ook een computeralgebra-systeem in stelling kan worden gebracht. Dit is



FIGUUR 2

nuttig bij allerlei wiskundige vragen, bijvoorbeeld bij vragen over differentiëren en integreren.

Voorbeeld 3

Integreer de functie: $f(x) = 2x^6$

antwoord	feedback	verklaring
$\frac{2}{7}x^7 + C$	Helemaal goed!	correct antwoord
$2\left(\frac{1}{7}x^7 + C\right)$	Een goed antwoord, maar niet op de eenvoudigste manier opgeschreven.	ongebruikelijke, maar correcte formule
$\frac{2}{7}x^7 + 3$	Je hebt de vraag goed, maar er zijn veel meer waarden als constante mogelijk. Dit kun je aangeven door $\frac{2}{7}x^7 + C$ te schrijven.	geen algemene constante
$\frac{2}{7}x^7$	De primitieve klopt, maar je bent de integratieconstante vergeten.	geen integratieconstante
x	Nee. Bedenk dat de primitieve van een machtsfunctie x^n gelijk is aan $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.	?
$12x^5$	Je hebt nu gedifferentieerd in plaats van geïntegreerd!	leesfout?

Uiteraard zijn andere formuleringen en reacties mogelijk. Ook hier geldt dat dit aangepast kan (en moet) worden aan wensen van gebruikers (leerlingen en docenten). Cruciaal is dat dergelijke vragen duidelijk een stap verder gaan dan de welbekende meerkeuzevragen: de computer reageert 'intelligent' op een ingetoetst antwoord.

Een bijkomend voordeel van RQP is dat het geïntegreerd is in de (gratis) Elektronische LeerOmgeving MOODLE^[11]. Hierdoor is het mogelijk om resultaten per leerling (onder bepaalde voorwaarden ook in detail) op te slaan en later te raadplegen. Ook is het mogelijk om binnen

de leeromgeving gebruik te maken van diverse andere hulpmiddelen, waaronder forums en online opdrachten. Kortom, we komen iets dichterbij een realiseerbare 'wiskundige leer- en werkomgeving'.

Een blik op de toekomst

De hierboven geschetste ontwikkelingen staan nog sterk in de kinderschoenen. Het GALOIS-project probeert de gebruikte technologieën te bestuderen, te vertalen in werkbare concepten, verder te ontwikkelen, materialen te maken en uit te proberen in de klas en op deze wijze een bijdrage te leveren aan het wiskundeonderwijs in Nederland. Uiteindelijk zal dit alles echter ook *meerwaarde* moeten hebben. De eerste tekenen zijn gunstig, al zal nader onderzoek moeten uitwijzen hoe de inzet van intelligente feedback kan leiden tot beter of aantrekkelijker wiskundeonderwijs. Hierbij is het steeds van belang om te beseffen dat de computer slechts een hulpmiddel is. In essentie hebben we het hier namelijk over een didactische uitdaging: hoe helpen we de leerling bij het beter begrijpen van wiskunde.

Noten

[1] Een recent overzichtsartikel over onderzoek naar feedback is:

- E.H. Mory: *Feedback Research Revisited*. In: D.H. Jonassen (red.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah New Jersey (2004).

Zie www.aect-members.org/m/research_handbook/Chapters/29.pdf.

[2] DITwis is een reeks computertoetsen die gebruikmakend van Javascript eenvoudig kunnen worden aangepast. Een overzicht is te bekijken via <http://wiskunde.stmichaelcollege.nl/DITwis/>. Meer informatie via ditwis@chello.nl.

[3] P. Drijvers: *Learning algebra in a computer algebra environment*. Utrecht: CD-b Press (2003).

Zie www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation/

[4] Maple T.A. website: www.maplesoft.com/products/mapleta.

[5] Zoals diverse varianten van Vergelijkingen Oplossen; zie www.wisweb.nl.

[6] Question and Test Interoperability; zie www.imsglobal.org/

[7] Serving maths website: http://mantis.york.ac.uk/serving_maths/

[8] Geïnteresseerden worden verwezen naar www.maths.ed.ac.uk/mathqti/

[9] Remote Question Protocol; zie http://mantis.york.ac.uk/serving_maths/

[10] System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel: <http://stack.stmichaelcollege.nl>.

[11] Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment; zie www.moodle.org en www.stmichaelcollege.nl/moodle.

Website

Meer informatie over het GALOIS-project vindt u op de website www.galoisproject.nl

Over de auteurs

- Christian Bokhove (bokhove2@zonnet.nl) is docent wiskunde & informatica aan het St. Michaël College te Zaandam en projectleider van het GALOIS-project.

- André Heck (heck@science.uva.nl) is projectmanager aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam op het gebied van ICT-toepassingen in onderwijs bij wiskunde en natuurwetenschappen; hij heeft ruime ervaring met computeralgebra in onderzoek en onderwijs.

- Gerard Koolstra (g.koolstra@chello.nl) is docent wiskunde aan het St. Michaël College en al vele jaren betrokken bij diverse projecten op het snijvlak van ICT en wiskunde.

wiskundig kiezen

DE DISKWALIFICATIE PARADOX

[Rob Bosch]



Voor het bepalen van de winnaar van bijvoorbeeld het songfestival hanteert men een vorm van de zogenoemde *Borda-regel*^[1]. Hierbij kent men aan de plaatsen in de rangschikking een zeker gewicht toe. Voor het Eurovisie Songfestival is dat 12 punten voor een eerste plaats, 10 voor een tweede plaats,

8 voor een derde plek en 7, 6, ..., 1 voor de volgende plaatsen. De door de juryleden gegeven punten worden dan opgeteld om een totaalscore te krijgen. De eindrangschikking vindt plaats op basis van deze score. Degene met de meeste punten wint. De oorspronkelijke Borda-regel kent bij n kandidaten

de gewichten $n, n - 1, \dots, 1$. In het volgende voorbeeld hebben vijf juryleden vier kandidaten beoordeeld.

jurylid	1	2	3	4	5
4	A	B	D	A	B
3	D	D	C	C	D
2	B	A	A	D	A
1	C	C	B	B	C

Als we de Borda-regel hanteren, dan worden de totaalscores als volgt berekend.

$$\begin{aligned} A &= 2 \times 4 + 0 \times 3 + 3 \times 2 + 0 \times 1 = 14 \\ B &= 2 \times 4 + 0 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1 = 12 \\ C &= 0 \times 4 + 2 \times 3 + 0 \times 2 + 3 \times 1 = 9 \\ D &= 1 \times 4 + 3 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 15 \end{aligned}$$

Kandidaat D heeft de meeste punten gekregen en hij wordt derhalve de winnaar. De eindrangschikking is als volgt:

$$D \succ A \succ B \succ C$$

De Borda-regel heeft een aantal nuttige eigenschappen en wordt daarom dan ook vaak gebruikt voor het bepalen van een eindrangschikking op basis van individuele voorkeuren.

We bekijken een songfestival waaraan vier kandidaten meedoen die beoordeeld worden door negen juryleden. De rangschikkingen van de individuele juryleden zijn hieronder gegeven.

jurylid	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	A	A	A	A	B	C	B	C	B
3	D	D	C	C	C	B	C	B	C
2	B	B	D	D	A	A	A	A	A
1	C	C	B	B	D	D	D	D	D

Voor het eindoordeel gebruiken we weer de Borda-regel. We berekenen de totaalscores:

$$\begin{aligned} A &= 4 \times 4 + 0 \times 3 + 5 \times 2 + 0 \times 1 = 26 \\ B &= 3 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 24 \\ C &= 2 \times 4 + 5 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1 = 25 \\ D &= 0 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 5 \times 1 = 15 \end{aligned}$$

en zien dat kandidaat A het songfestival wint. De eindrangschikking is hier

$$A \succ C \succ B \succ D$$

Net voor de officiële bekendmaking van de uitslag blijkt dat kandidaat D gediskwalificeerd moet worden. Zijn liedje was voor het festival namelijk al op CD verschenen, hetgeen niet toegestaan is. Kandidaat D moet dus uit de eindrangschikking gehaald worden. Dit lijkt nauwelijks een probleem aangezien D stevig op de onderste plaats staat. Bovendien vond ieder jurylid het winnende liedje beter dan het nummer van D . We moeten de scores nog wel even herberekenen omdat we nu eenmaal geen 4 punten kunnen toekennen in een competitie met drie kandidaten. Na het verwijderen van D uit de individuele rangschikkingen ziet het overzicht er als volgt uit.

jurylid	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	A	A	A	A	B	C	B	C	B
2	B	B	C	C	C	B	C	B	C
1	C	C	B	B	A	A	A	A	A

De nieuwe scores berekenen we als volgt:

$$\begin{aligned} A &= 4 \times 3 + 0 \times 2 + 5 \times 1 = 17 \\ B &= 3 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times 1 = 19 \\ C &= 2 \times 3 + 5 \times 2 + 2 \times 1 = 18 \end{aligned}$$

De nieuwe rangschikking ziet er dus als volgt uit:

$$B \succ C \succ A$$

Kandidaat B wordt ineens, na de diskwalificatie van de slechte kandidaat D , tot winnaar uitgeroepen. Bovendien eindigt de 'vorige' winnaar A nu op de laatste plaats. Een onaangename verrassing, denk ik. Door de diskwalificatie is de oorspronkelijke volgorde geheel op zijn kop gezet. Ik heb dit fenomeen 'diskwalificatie-paradox' genoemd. In de literatuur heet dit: de Borda-regel is niet onafhankelijk van irrelevante alternatieven.

De lezer die beschikt over statistieken van de laatste afleveringen van het songfestival, kan zelf nagaan welke gevolgen een diskwalificatie heeft voor de eindrangschikking. Ontstaan er door de diskwalificatie verwisselingen in de eindrangschikking, en zo ja hoeveel? Aan de leerlingen overlaten kan natuurlijk ook.

Noot

[1] Naar Jean-Charles de Borda, *Frans wis- en natuurkundige, 1733-1799*.

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is redacteur van *Euclides* en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

De spagaat van wiskunde op school

[Bert Zwaneveld]

Een beetje geschiedenis

In 1999 schreef ik de epiloog van het jubileumboek van onze Vereniging, 'Honderd jaar Wiskundeonderwijs'. Aan de hand van een aantal thema's probeerde ik op basis van de 31 voorafgaande hoofdstukken een overzicht over het wiskundeonderwijs van de toen bijna voorbijgeen eeuw te maken en ook een heel klein beetje vooruit te kijken naar de 21e eeuw.

Een van de conclusies was dat vroeger alles op zijn minst *overzichtelijker* was, wat niet noodzakelijk *beter* betekent. In het voortgezet onderwijs waren er globaal gesproken drie stromen: vwo en havo (vroeger gymnasium en hbs) als vooropleidingen voor het hoger onderwijs, het vmbo (vroeger ambachtsschool en huishoudschool, later lbo) als voorbereiding op lagere beroepen, en daartussenin was er een grote derde stroom, mavo (vroeger mulo). De opvolger van de mavo, vmbo theoretische leerweg, lijkt nu meer en meer in de knel te komen. Waren vroeger alleen de ambachtsschool en de huishoudschool vaak eindonderwijs, tegenwoordig is het voortgezet onderwijs dat nergens meer, althans daar niet voor bedoeld.

Voor de inhoud van het wiskundeonderwijs werd het theezakjesmodel gebruikt: de leerstof van een bepaalde stroom was een aftreksel van de naast hoger gelegen stroom. Het wiskundeonderwijs op het hoogste niveau, dus op hbs en gymnasium en later dus ook op havo en vwo, gericht op een universitaire of hbo-opleiding, bepaalde zodoende het geheel. Uit dat jubileumboek werd echter ook duidelijk dat er een andere factor was die veel meer invloed op het wiskundeonderwijs van de vorige eeuw heeft gehad dan het theezakjesmodel: de vormende waarde die er van wiskunde op de leerlingen uitging. Een beetje populair gezegd: door wiskunde leer je denken. Die vormende waarde uitte zich in de nadruk op logische aspecten, onderlinge samenhang (binnen de domeinen meetkunde en algebra) en in een longitudinale opbouw: bij meetkunde het bewijzen van eigenschappen van figuren, bij algebra het manipuleren van algebraïsche vormen en het oplossen van steeds complexere vergelijkingen. In de jaren vijftig kwam daar de differentiaal- en integraalrekening bij. Met het leerplan van 1968 vervaagde de scheidslijn tussen meetkunde en algebra enigszins en kwam er een nieuw domein bij: kansrekening en statistiek.

In de loop van de jaren zeventig kwam het realistisch reken- en wiskundeonderwijs steeds meer in zwang:

een inhoudelijke en didactische doorbraak die onder andere ertoe geleid heeft dat de centrale examens wiskunde geheel of minstens voor een deel uit opgaven bestaan die uitgaan van een min of meer realistische situatie. Ik denk dat Nederland daarin redelijk uniek is. De claim van de vormende waarde is meer en meer losgelaten. Voor zover ik weet is die ook nooit door onderzoek gestaafd.

In 1980 formuleerde Freudenthal 13 problemen voor het wiskundeonderwijs in de twintigste eeuw, naar analogie van de 23 wiskundige problemen die Hilbert in 1900 voor de twintigste eeuw formuleerde. Zonder volledig te zijn geef ik er hier een aantal.

- Hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen inzicht krijgen en zich niet alleen op de regeltjes richten?
- Hoe houden we rekening met de onderlinge verschillen tussen de leerlingen in een groep?
- Welke criteria moeten we aan contexten stellen zodat zowel horizontale als verticale mathematisering kan optreden? (Horizontale mathematisering: de geleerde wiskunde in een andere, maar vergelijkbare situatie toepassen.)
- Hoe kunnen we computers verstandig inzetten?

Bij de eerste vraag had hij een idee voor de aanpak. Hij vermoedde namelijk: via reflectie, waarbij ook aspecten als taalontwikkeling, blikwisseling, adequate nauwkeurigheid (gegeven de situatie), mathematiseren en dan met name in verticale richting (de geleerde wiskunde verdiepen of op een hoger wiskundig plan brengen). Verder bepleitte Freudenthal als algemene aanpak voor deze agenda het gezamenlijk ontwikkelen van het wiskundeonderwijs door docenten, ontwikkelaars en onderzoekers. Later heeft hij als didactisch paradigma de geleide herontdekking van de wiskunde door de leerlingen geformuleerd.

Eerder, in 1973, had Freudenthal – enigszins provocerend – geprofeteerd dat in 2010 wiskunde als afzonderlijk schoolvak verdwenen zou zijn, want wiskunde vanuit realistische of concrete situaties zou beter geïntegreerd kunnen worden met andere schoolvakken. Wat hij er zelf van vond, weet ik eerlijk gezegd niet.

De huidige situatie

Wiskunde op school is tegenwoordig de knecht van teveel meesters: het moet dienstbaar zijn aan

andere vakken, voorbereiden op vervolgopleidingen, recht doen aan zichzelf. Daarmee bedoel ik dat wiskunde in zekere zin een eigen wereld is met eigen uitgangspunten en regels die op school in ieder geval wel in de reële wereld hun beginpunt hebben. Verder moet er rekening gehouden worden met de leerlingen en hun motivatie. En dat allemaal binnen het systeem met centrale examens. Daar komt nog bij het gebruik van elektronische apparatuur waarvan de uiteindelijke invloed nog lang niet duidelijk is. Ik noem dit een spagaat voor wiskunde op school. Daar komt nog bij dat de buitenwereld het belang van wiskunde op school lager inschat dan vroeger; zie bijvoorbeeld het gedoe rond de herijking van de tweede fase voor wiskunde, lees: de urenvermindering. Het lijkt erop dat wiskunde in de ogen van de buitenwereld in de vorige eeuw is blijven hangen en dat wiskunde in de huidige eeuw door die buitenwereld minder belangrijk wordt gevonden. Het is de wiskunde(onderwijs)wereld kennelijk niet gelukt hier een eigen, eigentijdse, aansprekende visie tegenover te zetten om dit verkeerde beeld weg te werken. Als dit negatieve beeld door steeds meer mensen gedeeld gaat worden zou Freudenthal met zijn profetie over 2010 wel eens gelijk kunnen krijgen: wiskunde, een verdwijnend of gemarginaliseerd schoolvak, maar dan zonder dat daar binnen andere vakken iets tegenover staat. In het hoger onderwijs vindt die marginalisering van wiskunde buiten het bèta- en techniekdomein al op ruime schaal plaats. Binnen het hbo gebeurt dat ook al binnen het bèta- en techniekdomein.

De toekomst

Op dit moment wordt hals over kop gewerkt aan het invullen van het programma voor de tweede fase van havo/vwo dat in 2007 van start moet gaan. Dat is duidelijk een overgangsprogramma, want ondertussen richten de profielcommissies en de zojuist ingestelde commissie vernieuwing wiskundeonderwijs zich op 2010 en later. Die commissies moeten natuurlijk van input worden voorzien: een visie op het wiskundeonderwijs en aanzetten voor de inhoud. Laat ik hier alvast een paar ideeën geven.

We beginnen niet met wat anderen (vakken, vervolgopleidingen) van wiskunde vergen, maar wat wij als gemeenschap van wiskundeleraars goed voor de leerlingen vinden. Dat betekent dat leerlingen gemotiveerd, en dus uitdagende wiskunde doen, dat ze de relevantie ervan vrijwel meteen inzien, dat er aantrekkelijke werkvormen gehanteerd worden, dat in ieder geval de basale begrippen, die iedereen moet kennen – evenredigheid om er maar een te noemen – aan de orde komen, maar vooral dat ze de betekenis en het gebruik van die begrippen leren. Sleuteltermen zijn dan: leren problemen aanpakken en oplossen, leren modelleren, leren redeneren. Daarnaast is er aandacht voor de vorming en ontwikkeling van de bijbehorende wiskundige taal. Voor de werkvorm denk ik aan het doen van

onderzoekjes en projectjes, mits ook steeds de geleerde wiskundige inhoud geconsolideerd wordt. Met oefenen van de basale begrippen en bijbehorende vaardigheden is verder niets mis. Als leidraad hierbij kies ik voor leren modelleren in de drie bekende domeinen: meetkunde, algebra en statistiek. Daarbij hoort ook het goed doordenken wat aan de computer overgelaten kan worden. Ik zeg daarvan: het 'domme (reken)werk' laten we aan de computer over; wat de mensen moeten blijven doen, het 'denkwerk', leren we de leerlingen. Wat natuurlijk ook moet gebeuren is nagaan wie welke wiskunde op welk niveau moet beheersen. En op enig moment, maar niet als eerste, vaststellen wat er op het examen wordt gevraagd. Ten slotte is er wat ik de culturele aspecten van de wiskunde zou willen noemen. Hiertoe reken ik zaken als de stelling van Pythagoras, waarbij ook hoort dat het een wiskundige stelling met bewijs is en geen natuurwet.

Wat we ook gaan doen, de rol van de wiskundeleraar is en blijft cruciaal, zeker ook als het om de verbetering van het beeld van wiskunde in de buitenwereld gaat. Hierop kom ik zeker in de laatste columns van deze serie terug.

Over de auteur

Bert Zwaneveld (e-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl) is hoogleraar 'professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit Nederland. Hij was wiskundeleraar, en tevens redactievoorzitter en hoofdredacteur van *Euclides*.

LEVENDE TIJDLIJN VAN 5000 JAAR WISKUNDE

Gratis lesmateriaal van Stichting Math4all
[Johan Gademan]



FIGUUR 1



FIGUUR 2 Gemaakt door
projectbureau ScalaMedia, Zutphen

Periode	Naam
3000 – 1000 v.o.j. Egypte en Mesopotamië	De eerste bekende naam op het gebied van de wiskunde is in deze periode de Egyptenaar Ahmes
1000 v.o.j. – 200 n.o.j. De Oude Grieken	Thales Pythagoras Euclides Euklides Apollonius Archimedes Heron Diophantos Hypatia
200 – 1200 China, Indië en Arabië	Lu Hui Aryabhata Brahmagupta Mahavira Bhaskara Al-Khwarizmi Tabit ibn Qora Omar Khayyam
1200 – 1700 West-Europese wiskunde	Fibonacci Oresme Pascal Cardano Tartaglia Riccioli Viete Stevin Descartes Miquel Fermat Pascal Huygens Roberval Cavalieri Newton Leibniz
1700 – 1900 Moderne wiskunde	Euler De Moivre Lamé Bernoulli Goldbach Simpson d'Alembert Lagrange Taylor Cauchy de Laplace Gauss Weierstrass Bolza Lebesgue Borel Poincaré Minkowski Riemann Pólya
1900 – 2000 De huidige wiskunde	Gödel Veit Julia Hilbert Pólya Russell Gödel Kolmogorov Mandelbrot von Neumann Turing Nash Wiles Perelman

FIGUUR 3

Aanleiding

Al een aantal jaren onderhoudt Frits Spijkers op internet een site met de naam 'wiskundeweb'. Zijn plan om deze site te verlevendigen met een levende tijdlijn over delen van de geschiedenis van de wiskunde, werd gehonoreerd door de Digitale Pioniers^[1]. Het gevolg was een subsidie van € 10.000,00.^[2] De toekenning van de subsidie bracht Frits tot het oprichten van een stichting onder de naam Stichting Math4all. Zijn site 'wiskundeweb' die qua naam erg veel lijkt op 'wisweb' is veranderd in www.math4all.nl. Al het bekende en gratis lesmateriaal van 'wiskundeweb' en het nieuwe lesmateriaal van '5000 jaar wiskunde' staan op deze site. Dit artikel bespreekt het nieuwe lesmateriaal dat ontwikkeld is met de subsidie. De site bevat veel meer dan lesmateriaal over geschiedenis van de wiskunde.

5000 jaar wiskunde

Ga naar www.math4all.nl (zie figuur 1), Kies in het menu '5000 jaar wiskunde' en u komt in het deel van de geschiedenis van de wiskunde.

- Levende tijdlijn:

5000 jaar wiskunde met spellen gemaakt met subsidie van Digitale Pioniers

- Fragmenten:

wiskundige wetenswaardigheden vanuit historisch oogpunt

- Wiskundigen:

korte biografieën van bekende wiskundigen

- Opdrachten:

praktische opdrachten bij geschiedenis van de wiskunde

Levende tijdlijn

De levende tijdbalk bestaat uit twee delen; zie figuur 2. Boven de streep staan wetenswaardigheden uit een bepaalde periode.

Onder de streep staan zes interactieve spellen.

Wilt u de spellen uitproberen? U moet eerst inloggen.

Uw gebruikersnaam en paswoord mag u zelf kiezen.

Wees niet bevreesd, het is en blijft gratis. De registratie is handig voor het bijhouden van de score en het speelniveau. Verder gebeurt er niets met uw gegevens.

Daarna kunt u in de tijdbalk een van de zes spellen aanklikken en spelen.

Er opent zich een nieuw scherm met de spellen Ahmes getallen, Pythagoras, Euclides' elementen, Talstelselspel, Kansrekenen bij dobbelen en Geheimschrift.

Voor uitleg van het spel drukt u op de informatiebutton. Niet alles wordt uitgelegd. Gezond verstand en enige ervaring met computerspelletjes kan geen kwaad.

Fragmenten en Wiskundigen

'5000 jaar wiskunde' bevat uitgebreide fragmenten en beschrijvingen van (bekende) wiskundigen; zie figuur 3. De fragmenten zijn geordend naar

thema en bestrijken alle gebieden van de wiskunde. Van zo'n 45 van de genoemde wiskundigen zijn de beschrijvingen gereed. Het taalgebruik bij deze beschrijvingen is geschikt voor leerlingen van de bovenbouw havo/vwo.

Dit materiaal is nog volop in ontwikkeling.

Opdrachten

Hier vindt u opdrachten voor klas 3 t/m 6 havo/vwo waarin vooral de geschiedenis van de wiskunde een rol speelt. Te gebruiken als praktische opdracht of onderzoeksopdracht.

Stichting Math4all

De stichting zetelt in Deventer en heeft tot doel om zonder winstoogmerk goed en aantrekkelijk educatief materiaal te ontwikkelen op het gebied van de (elementaire) wiskunde. Dit als ondersteuning van docenten, leerlingen en alle anderen die wiskunde een warm hart toedragen.

De Stichting Math4all laat het niet bij '5000 jaar wiskunde'. Op de site staat inmiddels veel meer lesmateriaal, zowel voor vmbo (basiswiskunde) als voor havo-vwo. Ook is de Stichting actief om samen met docenten van scholen lesmateriaal te ontwikkelen (zie weer www.math4all.nl).

De Stichting werkt samen met ervaren auteurs, wiskundigen, onderwijskundigen en technologen. Al deze mensen werken in hun vrije tijd aan de site en aan het lesmateriaal.

Wilt u meepraten of meedenken over nieuwe projecten, neem eens contact met ons op. U krijgt zeker reactie.

Noten

[1] De Digitale Pioniers ondersteunen kleinschalige vernieuwende internet-initiatieven die een bijdrage leveren aan participatie, meningsvorming en informatie-uitwisseling in het publieke domein.

[2] Zie www.digitalepioniers.nl/Projecten/Kunst_van_Wetenschap/Wiskundeweb.html

Over de auteur

Johan Gademan (e-mailadres: j.gademan@math4all.nl) is voorzitter van de Stichting Math4all. Hij was 14 jaar docent wiskunde en 10 jaar werkzaam als uitgever bij Wolters-Noordhoff en uitgeefmanager bij ThiemeMeulenhoff. Nu werkt hij sinds begin 2004 bij Codename Future in Den Haag. Hij is ontwikkelaar van lesmateriaal en onderwijskundig adviseur.

JAARVERSLAG EUCLIDES

Jaargang 80 (2004/2005)

[Marja Bos]

Inleiding

In dit jaarverslag wordt een beknopt overzicht gegeven van de werkzaamheden van de redactie in de periode van 1 augustus 2004 tot en met 31 juli 2005.

Redactie

De redactie van Euclides bestond het afgelopen cursusjaar uit een driehoofdige kernredactie (eindredacteur Dick Klingens, redactievoorzitter Gert de Kleuver en hoofdredacteur Marja Bos) en een aantal redactieleden met zowel algemene redactietaken (becommentariëren en genereren van artikelen) als een eigen aandachtsgebied: Bram van Asch (recensies), Klaske Blom (didactiek), Rob Bosch (wiskundige artikelen, eigen rubriek), Hans Daale (hbo), Wim Laaper (havo/vwo en mto) en Jos Tolboom (ict). In mei werd de redactie versterkt met een nieuwe redacteur vmbo: Joke Verbeek. De redactie kwam driemaal plenair ter vergadering bijeen. Daarbuiten vergaderde de kernredactie ook nog eens driemaal. Voorts was er contact met het bestuur van de NVvW.

Inhoud

De inhoud van Euclides wordt gevormd door artikelen op het gebied van het wiskundeonderwijs, spontaan ingezonden dan wel op uitnodiging geschreven, zowel informerend, actueel/journalistiek, als opiniërend. De redactie behandelde in het jaar 2004/2005 zo'n 270 inzendingen: conceptartikelen (waaronder boekbesprekingen en interviews), redactionele kopij, aankondigingen en mededelingen, en NVvW-bestuursbijdragen voor de Verenigingspagina's. Daarnaast ontving de redactie een groot aantal persberichten.

Euclides kende het afgelopen jaar een aantal vaste rubrieken.

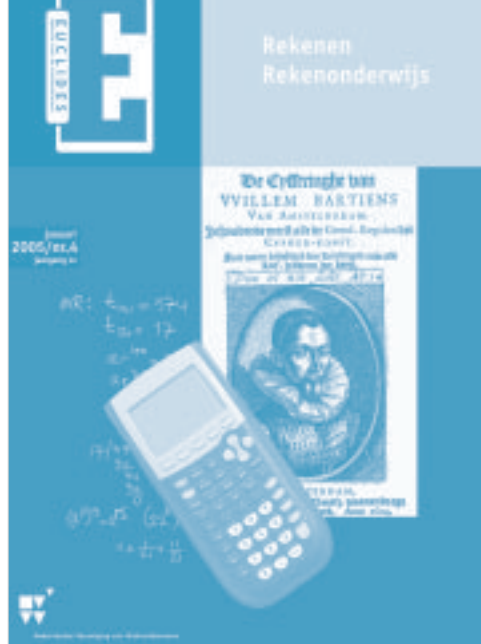
- De rubriek *Recreatie* werd voortgezet door Frits Göbel.
- Martinus van Hoorn leverde opnieuw de bijdragen voor de rubriek *40 jaar geleden*.
- Redacteur Rob Bosch verzorgde weer een rubriek met wiskundige bijdragen, dit jaar onder de titel *Optimaal*.
- Victor Thomasse leverde een zevental columns uit de praktijk van de startende wiskundedocent.
- Bert Zwaneveld startte in nummer 5 zijn rubriek *Over wiskundeonderwijs; innovatie en consolidatie*.
- Onder de titel *De wiskundedocent als goochelaar* beschreef Job van de Groep enkele rekentruc.
- Elk nummer werd ingeleid met een 'hoofdredactioneel' door Marja Bos, *Van de redactietafel*, waarin incidenteel ook actuele kwesties kort de aandacht kregen.

Daarnaast waren er een paar regelmatig terugkerende onderwerpen.

- Het *Wereldwiskunde Fonds* deed meerdere malen verslag van projecten die financiële steun ontvingen.
- Heleen Verhage rapporteerde over prijswinnende inzendingen in het kader van de *Wiskunde Scholen Prijs*, een uitvloeisel van het WisKids-project. Verder werd aandacht besteed aan diverse 'wiskunde-evenementen', symposia en prijsuitreikingen, al dan niet bijgewoond door verslagleggende redactieleden.

De jaarlijkse examenspecial (het septembernummer) was gewijd aan de in 2004 afgenomen wiskunde-eindexamens in het voortgezet onderwijs, van vmbo-BB tot en met vwo-B12.

In januari 2005 verscheen de special *'Rekenen en Rekenonderwijs'*, een 140 pagina's tellend themanummer.



Publicatieprocedure

Ingezonden bijdragen worden in eerste instantie beoordeeld door de hoofdredacteur. Geaccepteerde bijdragen worden vervolgens door de hoofdredacteur en door enkele andere redactieleden van commentaar voorzien, op grond waarvan de auteur in voorkomend geval om bijstelling verzocht wordt. Daarnaast wordt voor becommentariëring incidenteel een beroep gedaan op referenten buiten de redactie. De namen van deze incidentele medewerkers worden vermeld op de eerste pagina van het nummer waarvan zij een bijdrage becommentarieerden.

Nadere informatie over de publicatieprocedure en een aantal richtlijnen voor de aanlevering van bijdragen voor Euclides staan vermeld op www.nvvw.nl/euclricht.html.

Euclides als Verenigingsorgaan

Euclides is 'vakblad voor de wiskundeleraar', maar tegelijkertijd 'orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren'. Als Verenigingsorgaan kent het tijdschrift daarom een aantal 'geormerkte' pagina's ten behoeve van het *Verenigingsnieuws*. Het bestuur van de NVvW kan deze Verenigingspagina's, zonder inhoudelijke bemoeienis en buiten verantwoordelijkheid van de redactie, vrijelijk gebruiken om zich tot de leden te richten. Het afgelopen jaar werd hiervan in zeven nummers gebruik gemaakt; viermaal verscheen een zogeheten *Bestuurstafel*.

Omvang en vorm

De omvang van het blad bedraagt in principe 40 pagina's per nummer. Incidenteel werd dit aantal overschreden; de acht nummers van jaargang 80 telden in totaal 440 pagina's.

In aansluiting op het thema van de januarispecial was voor de omslagen van deze jaargang gekozen

voor afbeeldingen van objecten die met rekenwerk te maken hadden. De steunkleur was violet.

De steunkleur voor de nieuwe jaargang is zeeblauw (Pantone® 3125) geworden; de huidige vormgeving blijft nog een jaar gehandhaafd.

Andere zaken

- De redactie oriënteert zich op een nieuwe vormgeving, te effectueren vanaf jaargang 82 (2006/2007). Enkele bedrijven hebben inmiddels een voorstel en een offerte gedaan. Het bestuur van de NVvW is nauw betrokken bij de zakelijke aspecten.
- De advertentiezaken werden het afgelopen jaar tijdelijk waargenomen door redactievoorzitter Gert de Kleuver. Het bestuur is op zoek naar een structurele oplossing.

Voor en door wiskundedocenten

De lezers van Euclides vormen een brede doelgroep, ondanks hun gemeenschappelijke affiniteit met wiskundeonderwijs. De redactie streeft ernaar iedere lezer uit deze breed samengestelde groep een ruime sortering aansprekende, informatieve en lezenswaardige artikelen te bieden. Feedback van lezers is daartoe van wezenlijk belang. Daarnaast worden inhoudelijke bijdragen uiteraard met veel belangstelling door de redactie tegemoet gezien.

Over de auteur

Marja Bos is hoofdredacteur van Euclides. E-mailadres: redactie-euclides@nvvw.nl.

INHOUD VAN DE 80E JAARGANG (2004/2005)

Bijdragen

Gerard Alberts

Rekenaarsters, rekenwerk en rekentuig, 200

Ameling Algra

De examens komen er weer aan, 314

Ameling Algra, Ger Limpens

Examenconstructie: een langdurig en zorgvuldig proces, 002

Kees Alkemade

Het verhaal voor Floor, 411

Bram van Asch

De Nederlandse Wiskunde-Olympiade, 300

Roel van Asselt

En hoe nu verder..., 328

Danny Beckers

'Uit zucht om in de wiskunst bedreven te worden', 146

Simon Biesheuvel

Meer grafische rekenmachine, 382

F. van der Blij

In Memoriam prof.dr. A.W. Grootendorst 1924-2004, 277

Klaske Blom

Nieuwe trends in het vmbo, 370

Klaske Blom, Wim Laaper

Havo-A12, 2004, 022

Harm Boertien e.a.

Wiskunde-examens 2004, 1e tijdvak, 006

Rob Bosch

- Rekenen en algebraïsche vaardigheden, 194
- Rubriek 'Optimaal':
- Maximaliseren zonder differentiëren, 033
- 80ste jaargang, 059
- De stelling van Sperner, 108
- De stelling van Markov, 288
- Twee tentamenopgaven, 326
- Meetkunde en economie, 376
- Kolonel Blotto, 416

Jan van den Brink

Verrijken door vermijden; de rekenmachine op de basisschool, 216

Harrie Broekman

- Beeldtaal, 098
- Helpen met leren helpt!, 266
- Van vectoren naar lineaire ruimtes, 400

Evelien Bus

Zwoegen door de modder en zweven langs de hemel, 294 en 322

Jan van de Craats

Babylonisch rekenen, 234

Irene Dalm

Wiskundeonderwijs in Frankrijk, 364

Jan Folkert Deinum, Egbert Harskamp

Werken met kommagetallen, 180

Swier Garst

Een oloïde, 304

Jan de Geus

Verslag NVvW-examenbesprekingen 2004, 026

Job van de Groep

De wiskundedocent als goochelaar, 220, 387, 405

Teresa Hallmann

Laat je leerlingen zelf lesgeven, 290

Frank van den Heuvel

Samenhang? Moeilijk!, 354

Ingrid Homans, Klaske Blom

Rekenen met breuken, leren met of zonder trucjes?, 231

Peter Hoogendijk, Else Simons

Opstap, overstap en instap, 140

Kees Hoogland

Gecijferd, 186

Ruud Jongeling

Grafische rekenmachines in het vmbo, 156

Vincent Jonker, Frans van Galen

Rekenweb, 132

Ronald Keijzer, Sylvia van Os

Rekenen-wiskunde en didactiek op de pabo, 136

Paul Ket

Voortgangstoetsing in 3 vmbo-TL, 278

Gertrude van Keulen
Groot Zwolsch Bartjens Rekendictee, 154

Gert de Kleuver
Uit de doos van mijn vader: een mulo-examen, 242

Dick Klingens
- Klassikaal; rekenen en bewijzen bij veelhoeken, 070
- Klassikaal; minimaliseren, 428
- N.L.W.A. Gravelaar (1851-1913), 210
- Zoek de driehoek, een vervolg, 334

Teun Koetsier, Freddie Beckmans
Rekenen aan de mens, 246

Marjolein Kool
- Realistisch reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, 128
- Rekenliedjes in groep 3, 206

Arie van Kooten
Parallel, 426

Peter Kop
Niet terug naar af, 284

Floor van Lamoën
Reflectie in de klas (II), 362

Ton Lecluse
Zoek de driehoek, 302

Gerben van Lent / WwF
Feitenvel Kenia, 378

Fedde van der Lijn
CWI-onderzoeker Van Raalte laat computers sneller rekenen, 197

Ger Limpens / WwF
Feitenvel Filippijnen, 032

Petra van Loon
Combi-uren wiskunde-natuurkunde, 406

Ed de Moor
Herinneringen aan Wiskobas, 222

Jo Nelissen
Kinderen die niet leren rekenen, 166

Rob van Oord
Van vierkant naar gelijkzijdige driehoek, 380 en 386

Nicolai Petkov
Grid computing, 249

Henk Pfaltzgraaf
- Programmeer het zelf, 112
- Geprogrammeerd rekenen, of: met Socrates in het Studiehuis, 226

Wim Pijls
Gelijkvormigheid, 048 en 086

Otto van Poelje, Simon van der Salm
Rekeninstrumenten in maatschappij en school, 172

Martin van Reeuwijk, Peter van Wijk
Van experimenteren naar implementeren, 052, 094, 394

Ab van der Roest
Een bijzonder gemiddelde, 384

Harm Jan Smid
- Aansluiting vwo-wo: drama of hype?, 090
- Door onghehoorde lichticheit, 190

Lambrecht Spijkerboer
Wiskundewandelingen ontwerpen, 340

Melanie Steentjes
Eerste ronde Wiskunde Olympiade, 424

Anne van Streun
Op zoek naar... 'Wiskundedidactiek anno 2005', 260

Victor Thomasse
- Omdat ik het zeg!, 074
- Jan Modaal en ik, 110
- Negatief gedrag, 153
- De boze stiefmoeder van het paard, 287
- Thomasse, the rhinoceros slayer, 337
- De voldoende voorbij, 379
- Drie komma veertienvijftientweeënnegentig, 414

Jos Tolboom
NIOC: evenement én ontmoetingsplaats, 068

Arthur Veldman
Rekenen aan stromingen, 238

Jaap Vedder
'Volgens Bartjens...' en de NVORWO, 152

Heleen Verhage
- Doe mij maar het Meterspel, 367
- Er gaat niets boven Math Enrichment Courses, 418

Pauline Vos
PISA en TIMSS, 316

Klaas Wijnia
Machtig gerommel, 297

Chris Zaal
Weltmeisterschaft Kopfrechnen 2004, 160

Bert Zwaneveld
- Algebra: verloren zaak of uitdaging?, deel 1, 042
Rubriek 'Over wiskundeonderwijs: innovatie en consolidatie':
- De taal van de wiskunde, 283
- Formules in het vmbo, 345
- Wiskundig projectonderwijs, 388
- Modelleren, 430

Interviews

Klaske Blom, Frank van den Heuvel
Inspiratie uit Oudemolen, interview met Gerrit Krol, 330

Marja Bos
Slash21 – anders leren, 060

Rob Bosch
Interview met Wim Kleijne, 102

Dick Klingens, Wim Laaper
Tien vragen aan een 10e-jaars NWD-er
(Ruud Houweling), 116

Henk Staal
Een schoolonderzoek met TI Interactive!, interview
met Epi van Winsen, 373

Besprekingen

Danny Beckers
18 eeuwen meten en wegen in de Lage Landen
(G.J.C. Nipper), 244

Wouter Boer
Data: getallen met een context, over 'Design research
in statistics education' (Arthur Bakker), 118

Fokko Jan Dijksterhuis
Huygens bij de les, over 'Christiaan Huygens; de
Mathematisering van de Werkelijkheid' (Rienk Vermij),
272

Chris van der Heijden
- De Cijfferinghe (1604) van Willem Bartjens (ingeleid
door Danny Beckers en Marjolein Kool), 198
- Een wiskundige op de beurs (John Allen Paulos), 431

Ernst Lambeck
Zebra 17: Christiaan Huygens (Rienk Vermij,
Hanne van Dijk, Carolien Reus), 276

Peter Lanser
Isaac Newton (James Gleick), 359

Pauline Vos
Modelling motion: from trace graphs to instantaneous
change (Michiel Doorman), 433

Recreatie

Frits Göbel
- Tetromino's, 038
- Diophantos en de centicubes, 082
- Wiskundige legpuzzels, 122
- Er waren eens zes getallen, 254
- Clusters, 310
- De driehoek van Pascal, 350
- Tweelingen in Grafenland, 390
- Diameters, 438

40 jaar geleden

Martinus van Hoorn
021, 067, 106, 159, 271, 321, 360, 423

Aankondigingen

Studiedag 'Uitwiskeling live', 005
Wintersymposium KWG, 111
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2005,
115
Masterclass UT, 153
Syposium XI van de HKRWO, 286

Mededelingen

Prijsverhoging Zebraboekjes, 111
Wiskunde Scholen Prijs 2005, 165
Kring Historische Rekeninstrumenten, 178
Vrouwen en wiskundeonderwijs, 299

Van de redactie

Marja Bos
- Van de redactietafel, 001, 041, 085, 125, 265, 313,
353, 393
- Jaarverslag Euclides jrg 79, 072
- Inhoud van de 79^e jaargang, 075
- Leeswijzer ter inleiding op het thema 'Rekenen', 127
- Rectificaties Euclides 80(4), 299

Servicepagina

040, 084, 124, 264, 312, 352, 392, 440

Verenigingsnieuws

Grada Fokkens, Conny Gaykema
Examenbesprekingen 2005, 348

Jacob Hop
Forumdiscussie website, 307

Metha Kamminga
- Beeldverslag studiedag/jaarvergadering 2004, 308
- Aankondiging hbo-conferentie, 349

Gert de Kleuver
Oproep: advertentiebeheerder voor Euclides, 037

Marian Kollenveld
- Van de bestuurstafel, 306 en 346
- Jaarrede 2004, 256

Wim Kuipers
- Notulen Algemene Vergadering NVvW op 15
november 2003, 078
- Agenda jaarvergadering 6 november 2004, 078
- Verslag verenigingsjaar 2003/2004, 079
- Van de bestuurstafel, 389 en 437
- Nieuws van het Wereldwiskunde Fonds, 389

Marianne Lambriex
- Jaarvergadering/studiedag 2004, tweede
uitnodiging, 034
- Jaarvergadering/studiedag 2005, eerste
uitnodiging, 437

Aankondiging

4e Reehorst wiskunde conferentie
Woensdag 18 januari 2006



Deze conferentie brengt u op de hoogte van de trends en ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs in vmbo en onderbouw van havo en vwo.

Tijdens de openingslezing zal Anne van Streun, (hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen aan de RUG) ingaan op de plaats van wiskundeonderwijs in vakoverstijgende projecten en leergebieden.

Tijdens werkgroepen op deze dag worden meerdere voorbeelden van good-practice getoond en wordt u

geïnspireerd om uitdagend en vernieuwend aan de slag te gaan. Een medialab en een uitgebreide markt wordt weer opgebouwd met o.a. de laatste nieuwtjes van de uitgevers. De conferentie wordt afgesloten door Marjolein Kool met een luchtige maar ook inhoudelijke presentatie over niks: het getal 0.

Via de site zullen we u op de hoogte houden en te zijner tijd kunt u zich hier ook aanmelden voor de conferentie.

Ons volledige aanbod is te vinden op onze website:
www.aps.nl/wiskunde

Daar kunt u zich ook online inschrijven.
Geïnteresseerd en heeft u onze brochure nog niet ontvangen?

Bel of stuur een e-mail:
Secretariaat APS-wiskunde
Telefoon: 030-28 56 722
E-mail: wiskunde@aps.nl

wanneer is

$5 \times 1 > 5?$

met het bulkabonnement van
Pythagoras

nu nog maar 10 euro per exemplaar (België 12 euro)



www.pythagoras.nu

Aanvullende informatie m.b.t. de agenda van het huishoudelijk gedeelte

Rondvraag

In tegenstelling tot voorgaande jaren wordt de *rondvraag* vóór het themagedeelte gehouden. Leden die tijdens de rondvraag een vraag willen stellen, wordt verzocht deze voor de vergadering in te dienen bij de secretaris (e-mail: w.kuipers@nvww.nl).

Bestuursverkiezing

Aan de beurt van aftreden zijn de bestuursleden H. Rozenhart en H. Bijleveld. Zij stellen zich herkiesbaar en het bestuur stelt de vergadering een herbenoeming voor. Het bestuur vraagt de vergadering om namen op te geven voor mogelijke bestuurskandidaten met vmbo-ervaring. Het is nog steeds niet gelukt om hier in te voorzien.

Zie voor meer informatie de Verenigingspagina's in het vorige nummer van Euclides.

Verslag van het

verenigingsjaar 1 augustus 2004 - 31 juli 2005

[Wim Kuipers]

Bestuur

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld:

mw. drs. M.P. Kollenveld, voorzitter; W. Kuipers, secretaris; drs. S. Garst, penningmeester; overige leden: H. Bijleveld, J. Hop, mw. drs. M. Kamminga, drs. H. van der Kooij, mw. drs. M.A. Lambriex, drs. H. Rozenhart.

Nog steeds is er een vacature. Het bestuur is er niet in geslaagd om voor de jaarvergadering 2005 een geschikte kandidaat te vinden en deze voor te stellen aan de leden. Ze zal nogmaals de leden vragen om namen te noemen van mogelijke kandidaten.

Algemeen

De onderwijsontwikkelingen raken uiteraard ook het wiskunde-onderwijs. Veel collega's zijn op de werkvloer met deze ontwikkelingen geconfronteerd. In elk geval zijn veel inspanningen er dit verslagjaar op gericht geweest om deze ontwik-

kelingen te volgen en om speler in het veld te blijven. Voor het bestuur betekent dat: overleg met mensen van het ministerie van OCenW en mensen van zusterorganisaties.

De vraag speelt meer en meer in hoeverre we nog ons vak kunnen beschermen in zijn specifieke karakter tegenover de roep om vooral vakoverstijgend te denken. De aandacht vanuit de politiek dreigt de bètavakken onvoldoende te honoreren.

Daarnaast is er onder docenten vaak onzekerheid op te merken over de toekomst van het wiskunde-onderwijs. Het bestuur ervaart een toename van onrust. Het veld wil graag de rust om ingezette ontwikkelingen van een paar jaar geleden vorm en inhoud te geven zonder steeds maar weer te worden geconfronteerd met nieuwe regelingen en wijzigingen van programma's. Voor wat betreft het hoger onderwijs signaleert het bestuur een

zekere mate van ontevredenheid over de aansluiting als het gaat om de vereiste kennis.

Jaarvergadering

De jaarvergadering werd gehouden in het Oosterlicht College. Het thema was: 'Voor Wie Welke Wiskunde'.

Het thema werd door het bestuur gekozen tegen de achtergrond van de veranderingen in het onderwijs. In die veranderingen zijn er voor de leerlingen mogelijkheden. Mogelijkheden die direct in verband staan met hun toekomst. Welke wiskunde is voor hen van belang in het traject van hun schoolontwikkeling. Wat heeft een vmbo-leerling, sector techniek, nodig aan wiskunde. Welke basiswiskunde en welke specifieke wiskunde aansluitend bij hun nog te ontwikkelen competenties. Hoe staat het met een vwo-er die naar de universiteit gaat en bio-fysica gaat studeren.

De hoofdlezing in deze jaarvergadering was van prof. dr. Jan van de Craats, met als titel 'Basiswiskunde voor havo en vwo; wat moet erin en waarom?' De spreker pleit voor een basiswiskunde als een volstreekte voorwaarde om toegang te krijgen tot hogere opleidingen als technische studies, informatica, economie en sociale studies. Hij constateert dat formulevaardigheden met betrekking tot elementaire functies bij aankomende studenten volstrekt onvoldoende zijn ontwikkeld. Het bestuur wordt uitgenodigd om alert te zijn als er plannen op tafel liggen voor wijzigingen in de programma's en het aantal beschikbare uren.

Uit de op het referaat volgende discussie mag afgeleid worden dat veel docenten zich betrokken weten bij hun vak en bij wat er van overheidswege wordt voorgesteld. De op de jaarvergadering volgende studiedag met de op het onderwerp gerelateerde workshops gaf gelegenheid tot uitwisseling van ervaring maar tevens het kennisnemen van experimenten en *good practice*. Een jaarvergadering waarop we met tevredenheid terug mogen zien.

Vmbo

De werkgroep vmbo heeft tijdens de Reehorstconferentie de collega's gevraagd naar hun mening over de huidige examens. Gevraagd werd om te reageren op de stelling: 'De examens zouden moeten worden opgebouwd uit twee delen, namelijk een basisdeel en een aantal sectorgerichte vragen.' In de steekproef reageerden velen positief op de stelling. Het bestuur heeft naar betrokkenen de gedachte van een gedifferentieerd examen kenbaar gemaakt. Concreet betekent dit dat het ministerie zal worden verzocht, na te gaan welke mogelijkheden er op het punt van differentiatie uitvoerbaar zijn. De BB-examens zullen op korte termijn met de com-

puter worden af genomen. In 2007 zal het gehele examen digitaal zijn. Reeds dit jaar hebben een aantal scholen met dit soort examens geëxperimenteerd. De werkgroep vmbo zal kennisnemen van de evaluatie en hoopt dat eerder geformuleerde bezwaren worden weggenomen. Deze bezwaren betreffen vooral de praktische uitvoering, het opnieuw leven inblazen van meerkeuzevragen en de onmogelijkheid van de bestaande programma's om met simulaties te werken. De werkgroep stelt het bestuur voor om bij de SLO een aanvraag in te dienen voor een kortlopend onderzoek waarbij de vraag beantwoord moet worden wat een leerling vmbo van de wiskunde zou moeten weten om zich te kunnen redden in de maatschappij.

De werkgroep heeft in het verslagjaar drie maal vergaderd.

Havo/vwo

Veel tijd en energie waren nodig om deel te nemen in allerlei overleg-situaties die te maken hebben met het initiatief van het ministerie om invulling te geven aan gereduceerde havo/vwo-examenprogramma's voor de periode 2007-2010. Het gaat hier om een herverdeling van leerstofdomeinen over de programma's van havo en vwo.

De plannen van de minister worden door ons afgewezen. In februari heeft de NVvW met anderen deelgenomen aan een bijeenkomst waar de voorstellen zijn doorgesproken. Helaas heeft de veldraadpleging vanuit het CEVO niet veel bruikbaars opgeleverd. De CEVO heeft een aantal commissies ingesteld die de plannen verder moeten uitwerken. Het bestuur heeft zijn best gedaan om ten aanzien van de bemensing van de profielcommissies namen aan te dragen van mensen die het deskundig acht. Voor de huidige stand van zaken heeft de voorzitter in Euclides 6, jaargang 80, een overzicht gegeven.

Mbo/hbo

Een vertegenwoordiger van het bestuur van de NVvW heeft ook tijdens dit verslagjaar deelgenomen aan de besprekingen binnen de hbo-werkgroep van de NVvW waar o.a. aandacht wordt besteed aan de positie van de wiskunde-docent in het hbo.

Belangrijk is te vermelden dat er onderzoek wordt gedaan naar de mogelijkheden om het TWIN-project uit het mbo voort te zetten in het hbo. Samen met anderen wordt een didactiek ontwikkeld voor efficiënt en effectief wiskundeonderwijs in het hbo. Hierbij speelt computeralgebra een grote rol.

Ledenwerving

Het ledenaantal loopt enigszins terug. Het bestuur heeft zich dit verslagjaar in het bijzonder bezig gehouden met de werving van leden onder studenten. Indien studenten zich vóór december 2005 aanmelden ontvangen ze voor de tijd van een jaar een gratis lidmaatschap. Een aantal studenten heeft zich inmiddels aangemeld. Het bestuur hoopt dat een groot deel van dit aantal zich na deze periode zal laten inschrijven als lid. Verjonging van het ledenbestand zal ook de komende tijd punt van aandacht en actie zijn en blijven. Tegelijk heeft het bestuur geprobeerd bestaande leden te bewegen om collega's die geen lid zijn te stimuleren ook lid te worden. Daarvoor werden tijdens de Nationale Wiskundedagen flyers uitgereikt. Tegelijk hebben alle docenten via een nieuwsbrief deze flyer ontvangen.

Euclides

Met dankbaarheid wil het bestuur wijzen op de grote inzet van de redactie van Euclides om te komen tot een aantrekkelijk blad. Juist in woelige tijden is een vakblad van groot belang om de leden adequaat op de hoogte te brengen van de ontwikkelingen die er gaande zijn. Een ruime sortering van artikelen

informeert ons op allerlei manier. Ook dit jaar werd een themanummer uitgegeven, dit keer gewijd aan rekenen en rekenonderwijs.

WwF

Op 1 november werd een nieuwe ronde gestart van het Wereld Wiskunde Web, een internet-boekenveiling. De verkregen gelden komen geheel ten goede aan de projecten van het WereldwiskundeFonds. Naast publicatie in Euclides over de voortgang van de projecten kan men ook de site raadplegen. Het bestuur stelt het op prijs dat ook dit jaar hulp geboden kon worden aan studenten die nauwelijks kunnen rondkomen.

Manifest

Op de jaarvergadering van november 2004 werd het 'Manifest' uitgedeeld aan de leden, een manifest dat aandacht wil besteden aan de ontwikkeling van een goede wiskundendidactiek anno 2005. Nieuwe vormen van leren, competentiegericht leren en leren door middel van

prestaties, vragen meer en meer de aandacht. Actieve deelname van de leerling aan het onderwijsleerproces en de nadruk op vaardigheden maken een herbezinning nodig op de didactiek.

Enkele leden en bestuursleden wilden een discussie starten met als doel de praktijk van ons wiskundeonderwijs anno 2005 en later te verbeteren. Niets praktischer dan een goede didactiek. Tegelijk met dit initiatief liep de restyling van onze website. Ze zou o.a. geschikt gemaakt worden om met de leden te kunnen discussiëren. Reacties van leden op de website zouden bouwstenen kunnen vormen voor de didactiekcommissie. Spontaan meldden zich een aantal mensen die mee wilden denken. Teleurstellend bleek echter dat de geplande en aangekondigde vernieuwing van de website lang op zich liet wachten. Door allerlei oorzaak en reden liep het geheel een behoorlijke vertraging op. Teleurstellend ook voor de collega's die zich bereid verklaard hadden om mee te denken.

Voor het komende jaar gaan we voor de herkansing. Er wordt gezocht naar wegen om te komen tot de formulering van een aantal didactische noties. Hierbij zal de bijdrage vanuit het veld belangrijk zijn.

Examenbespreking

De besprekingen worden door een groot aantal leden nog steeds belangrijk geacht. Het belang blijkt ook hieruit dat er ten aanzien van de interpretatie van de eindtermen niet altijd eenduidigheid bestaat. Zeker geldt dit waar het het vmbo betreft.

Tenslotte

Veel energie moest er dit jaar worden besteed aan de perikelen rond de tweede fase. De contacten met velen in het veld waren een stimulans om alert de ontwikkelingen te volgen. Het gaat daarbij om goed onderwijs voor onze leerlingen. Waardering is er voor de vele inspanningen van docenten die er voor gaan om het vak in het geheel van het onderwijs een goede plek te geven.

Meedoen met project samenhangend leren?

De gecombineerde NVON/NVvW werkgroep *bovenbouw* is voorbeelden aan het ontwikkelen om meer samenhang te stimuleren tussen het onderwijs in de exacte vakken (natuurwetenschappen en wiskunde) in de bovenbouw havo en vwo. In samenwerking met de SLO zal een project worden uitgevoerd in enkele scholen.

We willen beginnen met een thema in havo-4 of havo-5.

Indien u op uw school met één of meer leraren van elk van de vakken

wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie en ANW eens wilt proberen hoe je meer samenhang kunt aanbrengen, geef u dan op om nog dit schooljaar of begin volgend schooljaar in havo-5 een thema uit te proberen. We denken aan het thema *transport*, maar ook een ander thema is nog mogelijk. De tijd die nodig is om het thema te behandelen, gaat niet ten koste van de behandeling van de onderwerpen voor het eindexamenprogramma, omdat in het door de werkgroep

ontwikkelde thema de relatie met een aantal onderwerpen voor het eindexamen is aangegeven. Inlichtingen en opgaven om mee te doen vóór 1 november a.s. bij de voorzitter van de werkgroep, Jan Hendriks, tel. 0528-371512, e-mail hendriks.locht@planet.nl, of bij de teamleider exacte vakken VO binnen de SLO, Jenneke Krüger, tel. 053-4840631, e-mail j.kruger@slo.nl.

Verenigingsnieuws

Notulen van de jaarvergadering en de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Utrecht, op 6 november 2004 [Wim Kuipers]



Opening

De voorzitter Marian Kollenveld opent de vergadering. Voor het eerst zijn we te gast in het Oosterlicht College.

Het is fijn om te kunnen vermelden dat er weer zoveel belangstellenden aanwezig zijn. Juist in een tijd waarin er zoveel in beweging is, is het goed om ervaringen uit te wisselen. In de jaarrede schetst de voorzitter een beeld van de ontwikkelingen in het afgelopen jaar. Het nemen van initiatieven is een sleutelwoord. Initiatieven om sturing te geven aan deze ontwikkelingen en kritisch volgen van de plannen is meer dan nodig.

We moeten niet al te braaf zijn. Met meer vertrouwen in eigen kracht en professionaliteit kunnen we veel doen voor ons vak. We kunnen ons het vak niet laten afnemen. De vrijheid die scholen krijgen om ook het wiskundeonderwijs een eigen vorm te geven zullen we moeten benutten. Het Manifest 'Wiskundendidactiek anno 2005', de conceptreactie van het bestuur op de tweedefaseplannen, en de reacties vanuit het veld demonstreren enige initiatieven. De tekst van de jaarrede zal een plaats krijgen in Euclides (inmiddels verschenen in nummer 80(4), januari 2005; red.).

Met dank maakt de voorzitter melding van de goede plaats die Euclides onder ons heeft mede dankzij de inzet van een hard werkende redactie. Ze spreekt een grote tevredenheid uit als het gaat om de inhoud en de vormgeving.

Om de wiskunde in ons land weer op de kaart te krijgen mogen we kennis maken met mevrouw Ionica Smeets. Zij zal de komende jaren onze ambassadrice zijn.

Verslagen

De notulen van de vergadering van 2003 kunnen worden goedgekeurd

onder dankzegging aan de secretaris. Niemand maakt gebruik van de gelegenheid om een toelichting te vragen. Het jaarverslag geeft een beeld over wat er het achterliggende jaar is gepasseerd en aan de orde is geweest. Niemand heeft hierover een vraag. De penningmeester geeft een toelichting op de jaarrekening en begroting.

Ook dit jaar zal er van Euclides weer een special verschijnen, een extra dik nummer. Dit keer met als thema 'Rekenen en Rekenonderwijs'. Een deel van de kosten zal worden betaald uit het Vredenduinfonds. De penningmeester stelt namens het bestuur voor om de contributie met € 1,50 te verhogen. De vergadering gaat met dit voorstel akkoord. De kascommissie heeft een goedkeurend rapport uitgebracht na controle van de boeken. De voorzitter stelt voor om de penningmeester te dechargeren. De vergadering reageert positief met applaus.

Bestuursverkiezing

Marianne Lambriex en Jacob Hop zijn aftredend maar stellen zich voor een volgende periode beschikbaar.

De vergadering gaat akkoord met de herbenoeming.

Marianne regelt de zaken van de jaarvergadering en vertegenwoordigt het bestuur in havo/vwo-aangelegenheden. Jacob vertegenwoordigt het bestuur in mbo-aangelegenheden.

De voorzitter roept de vergadering op om namen door te geven van een mogelijk bestuurslid uit de sector vmbo.

Studiedag

Marianne Lambriex krijgt vervolgens de gelegenheid om de studiedag in te leiden. Het thema is: 'Voor

Wie Welke Wiskunde'.

De studiedag vraagt bezinning op de vraag hoe scholen dienen om te gaan met de autonomie die ze van de overheid hebben gekregen. Een autonomie die kan leiden tot de meest ingrijpende veranderingen. Mogelijke veranderingen zijn nog niet altijd verbeteringen en de vraag is dan ook: welke wiskunde bieden we welke leerlingen aan. Prof. dr. Jan van de Craats leidt de studiedag in met een referaat over de vraag wat de basiswiskunde voor havo en vwo moet zijn.

Rekenwonder

Aan het einde van de studiedag genieten we nog van de enorme vaardigheid in het hoofdrekenen van Scott Flansburg uit de Verenigde Staten. Hij had meegedaan aan het wereldkampioenschap hoofdrekenen in Duitsland en deed, op speciale uitnodiging, op de terugreis onze vergadering aan.

Rondvraag

Marja Bos vindt het jammer dat er niet meer discussie mogelijk was over het referaat van Jan van de Craats. Gewezen wordt op een vervolg op 21 december tijdens de wiskundelerarendag in Groningen. Jan Maassen wenst het bestuur veel succes toe bij het werk van het komende jaar.

Sluiting

Na een geslaagde studiedag sluit de voorzitter het huishoudelijke gedeelte van de dag af. Een inspirerende dag, een dag waarin ervaringen werden uitgewisseld en een dag waar de markt weer volop in de belangstelling stond.

De voorzitter bedankt een aantal mensen voor getoonde inzet en wenst ieder een goede reis naar huis.

Puzzel 812

Kwadraten komen terug!

Sommige lezers herinneren zich wellicht dat in Recreatie 784 (Euclides 78 (4), januari 2003) enkele opgaven over kwadraten aan de orde kwamen. Maar dit onderwerp is nog lang niet uitgeput.

In het al eerder in deze rubriek genoemde boek van R.K. Guy, 'Unsolved Problems in Number Theory' (Springer-Verlag 1981, New York, ISBN 3-540-90593-6 cq. ISBN 0-387-90593-6), vraagt Sin Hitotumatu of er oneindig veel kwadraten zijn die met slechts twee verschillende cijfers worden geschreven. In [figuur 1](#) zijn de bekende oplossingen met vier of meer cijfers opgenomen. Kwadraten die deelbaar zijn door 10, laten we buiten beschouwing. Guy laat ook de gevallen met drie cijfers weg; bovendien ontbreekt in zijn opsomming $264^2 = 69696$.

Ik ga u nu niet vragen om Hitotumatu's probleem op te lossen. In plaats daarvan vraag ik uw aandacht voor twee variaties.

Bij de eerste variatie laten we drie verschillende cijfers toe. We zien dan meteen de triviale oplossing $10^k + 1$ (met $k \geq 2$). Het kwadraat hiervan wordt geschreven met de cijfers 0, 1 en 2. Met behulp van de notatie [a] voor een niet-leeg rijtje van willekeurig veel

a's kunnen we $10^k + 1$ schrijven als 1[0]1. We hebben hier dus een oneindige rij oplossingen. Er zijn diverse dergelijke rijen, zoals 2[0]2, 1[0]11 en 5[0]5, alle met veel nullen. Het aardigste voorbeeld vind ik 2[0]1[0]2 waarin de twee rijtjes nullen even lang zijn. Maar er zijn ook tal van voorbeelden zonder nullen.

Opgave 1

Bepaal een oneindige rij getallen waarvan de kwadraten worden geschreven met drie verschillende cijfers ongelijk aan 0.

Eén oneindige rij is voldoende, maar als u aan het verzamelen bent geslagen, mag u mij uw hele verzameling laten weten!

Bij de tweede variatie keren we terug naar kwadraten van twee verschillende cijfers, maar nu veranderen we het grondtal. Ook hier eisen we dat het kwadraat niet door het grondtal deelbaar is. En het grondtal 2 mag niet meedoen! Voor de grondtallen 3 en 4 is op grond van (dubieuze) statistische argumenten te verwachten dat er oneindig veel oplossingen zijn. Dit blijkt te kloppen. Er geldt namelijk dat het kwadraat van 2[0]1 drietallig met uitsluitend enen en nullen wordt geschreven. Ook het kwadraat van 1[0]2 bevat drietallig alleen nullen en enen. Voor het grondtal 4 voldoet 2[0]1 aan onze eisen, maar 1[0]2 niet: het kwadraat is deelbaar door 4.

Opgave 2

Bepaal voor het grondtal 3 een derde oplossing; dat wil zeggen een derde oneindige rij van getallen waarvan het kwadraat drietallig met slechts twee verschillende cijfers wordt geschreven.

Een oneindige deelrij van een oplossing is strikt genomen ook een oplossing, maar die tellen we niet!

Voor het grondtal 5 heb ik geen oneindige rij kunnen vinden.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.

De deadline is 20 november 2005.

Veel plezier!

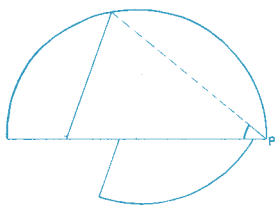
FIGUUR 1

n	n ²
11	121
12	144
15	225
21	441
22	484
26	676
38	1444
88	7744
109	11881
173	29929
212	44944
235	55225
264	69696
3114	9696996

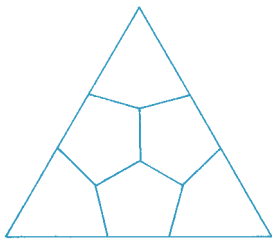
Oplossing Diameters

Er waren deze keer acht inzenders; zes hiervan spraken hun waardering uit voor de opgaven in diverse bewoordingen variërend van 'Weer leuk gepuzzeld' tot 'Prachtige opgaven'. Hartelijk dank voor deze complimenten! Achteraf heb ik een beetje spijt van opgave 1, omdat hij zo moeilijk is en geen elegante oplossing heeft.

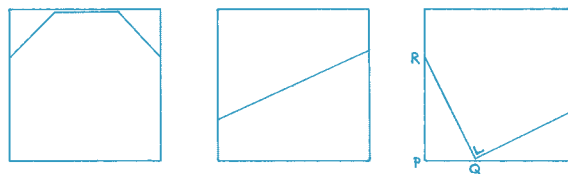
De optimale oplossing van *opgave 1* werd gevonden door W. Doyer, A. Verheul en H.J. Brascamp. De kleinste mogelijke diameter is ongeveer 1,531637. In [figuur 2](#) is aangegeven hoe dit is te bereiken. De hoek bij *P* is ongeveer 40°.



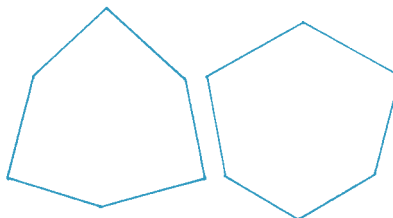
FIGUUR 2



FIGUUR 4



FIGUUR 3abc



FIGUUR 5ab

Het minimum in opgave 3 werd door zes oplossers gevonden; het bedraagt $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; zie [figuur 4](#).

Twee inzenders bestudeerden de verdeling in meer dan zes stukken: A. Verheul en H.J. Brascamp. Enkele resultaten:

$$D(9) = \frac{1}{3}, \quad D(10) = \frac{1}{6}\sqrt{3}, \quad D(12) = 2 - \sqrt{3}$$

Brascamp geeft ook een formule voor een

efficiënte verdeling in $\frac{k(k+1)}{2}$ stukken,

gebaseerd op een betegeling van het vlak met twee soorten onregelmatige zeshoeken; zie [de figuren 5a en 5b](#).

Wat de punten betreft: ik heb per opgave rangnummers uitgedeeld en dan 20 punten aan het beste drietal (AAB), 19 punten aan het op één na beste (ABB), enzovoort.

Opgave 2 gaf weinig problemen. In [figuur 3a](#) ziet u een methode om een vierkant 'klein te krijgen'. Het minimum is wel willekeurig dicht te benaderen, maar niet te bereiken, zoals ik al liet doorschemeren in de formulering van de opgave. Maar alle inzenders op één na pasten de verdeling van [figuur 3b](#) toe. Het minimum is even groot als in [figuur 3a](#) (!), namelijk $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$, ongeveer 1,3065 en nu wél te bereiken. L. de Rooij kwam als enige en zeer verrassend met een lagere diameter: 1,2992; zie [figuur 3c](#). Afgerond op vier decimalen geldt $PQ = 0,3121$ en $PR = 0,6508$.

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

L. de Rooij 356
L. van den Raadt 288
W. Doyer 262
J. Meerhof 244
T. Kool 197
W. van den Camp 189
H.J. Brascamp 140
A. Verheul 100

De ladderprijs, een boekenbon van 30 euro, gaat dus naar Lieke de Rooij. Gefeliciteerd!

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvvw.nl).

Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*-versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html).

nr	verschijnt	deadline
3	8 december 2005	25 oktober 2005
4	2 februari 2006	6 december 2005
5	2 maart 2006	17 januari 2006
6	13 april 2006	28 februari 2006
7	26 mei 2006	4 april 2006
8	22 juni 2006	9 mei 2006

wo. 19 t/m wo. 26 oktober, diverse locaties
WetenWeek 2005
Organisatie NEMO

zaterdag 29 oktober, Baarn
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis

zaterdag 5 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag NVvW
Zie ook pag. 041 e.v. in aflevering 1 en pag. 086 e.v. in dit nummer.

woensdag 9 november, Rotterdam
Docentendag 'Bouwen aan het nieuwe Bètavak'
Organisatie Platform Bèta Techniek

ma. 14 t/m do. 17 november, Zwolle
Bartjens-week 2005
Organisatie Gemeente Zwolle en VVV Zwolle

donderdag 17 november, Utrecht
Conferentie taalgericht reken- en wiskunde-onderwijs
Organisatie APS en Freudenthal Instituut

vrijdag 25 november, op de scholen
A-lympiade en B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

woensdag 18 januari 2006, Ede
4e Reehorst conferentie
Organisatie APS
Zie de advertentie in dit nummer.

vrijdag 20 januari 2006, op de scholen
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie Stichting NWO

vr. 3 en za. 4 februari 2006
Nationale Wiskunde Dagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 17 maart 2006, op de scholen
Kangoeroe wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



*Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

* Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

pagina III omslag

advertentie EPN

pagina IV omslag

advertentie WN