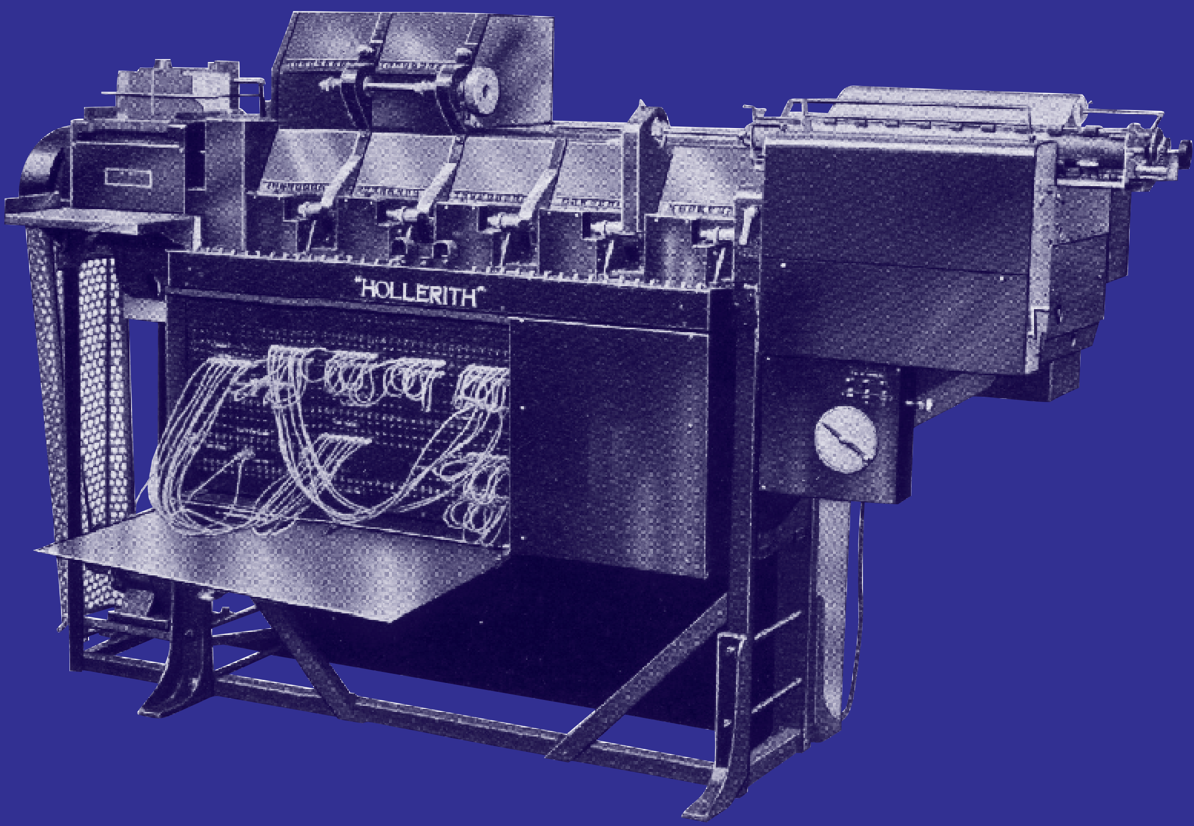
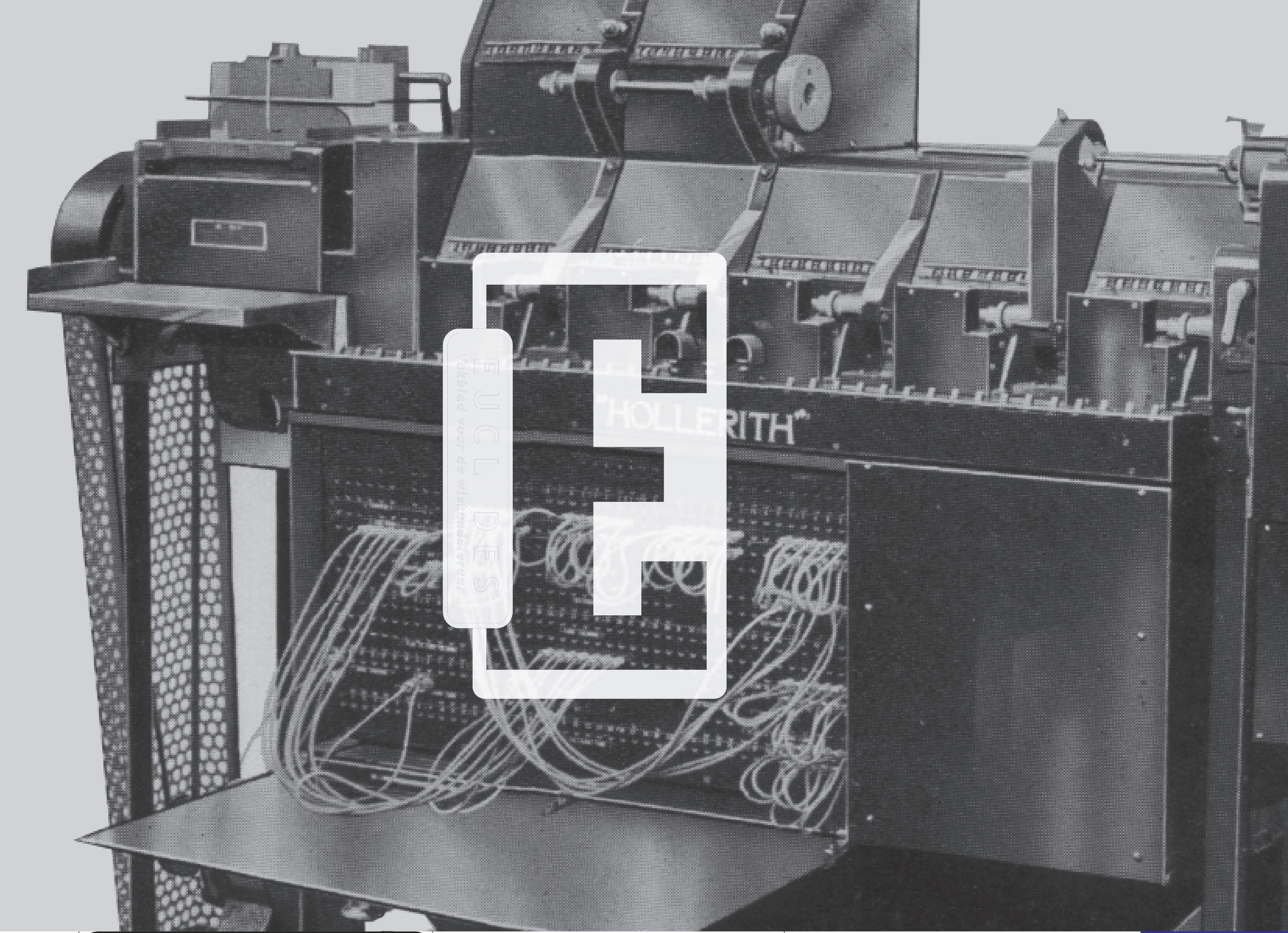
EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

Samenhang
Reflectie in de klas
Nieuwe vmbo-trends

mei
2005/nr.7
jaargang 80



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19 , 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp   Groninger Ontwerpers
productie   TiekstraMedia, Groningen
druk   Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 45,00
Studentleden: € 25,00
Gepensioneerden: € 30,00
Leden van de VVWL: € 30,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 30,00
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

7

mei 2005   JAARGANG 80

INHOUD

Aan dit nummer werkte verder mee: Peter Boelens.

Voorpagina
Herman Hollerith's Type III Tabulator met bedraad controlepaneel
Tabulating Machine Company (later IBM), 1906

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Raadpleging

Zoals u weet heeft het ministerie een veldraadpleging toegezegd met betrekking tot de voorstellen voor de nieuwe havo/vwo-examenprogramma's wiskunde vanaf 2007. Bij het ter perse gaan van dit nummer was echter nog steeds niet helder hoe, wanneer, door wie, en zélfs niet eens precies waarover geraadpleegd zal worden. Zo lijkt me bijvoorbeeld het door OCenW gewenste percentage van de leerstof die centraal getoetst gaat worden, 60%, een kwestie die nog open zou moeten staan voor discussie.
Aangezien de tijd begint te dringen en het ministerie ongetwijfeld geïnteresseerd is in de wensen, standpunten en adviezen van zowel 'opleiders' (havo/vwo) als 'afnemers' (hbo/wo), ga ik er zelf van uit dat er nog vóór de zomer een brede consultatieronde voor alle betrokken partijen (havo, vwo, hbo en wo) zal plaatsvinden. Let de komende weken dus op uw al dan niet virtuele brievenbus, thuis en op uw werk! De voorstellen van de NVvW kunt u nog eens nalezen op pagina 346 in het aprilnummer van Euclides, of op de website van de Vereniging.

Pabo en wiskunde

Tamelijk breed gedragen is de opvatting dat a.s. pabo-studenten zouden moeten beschikken over stevige rekenvaardigheden, dan wel dat zij die vaardigheden snel zouden moeten kunnen ontwikkelen. Dit is echter lang niet altijd het geval. In de eerste plaats doet zich het verschijnsel voor, dat juist relatief veel (vaak rekenzwakke) havo-CM-gediplomeerden belangstelling hebben voor een pabo-opleiding. Daarnaast is de instroom vanuit het mbo tamelijk groot, en ook daar gaat het nogal eens om studenten met relatief weinig aanleg voor en/of voorkennis van rekenen/wiskunde.
Een oplossing zou kunnen zijn, eisen te stellen aan de toelaatbaarheid van pabo-studenten. Elke opleiding heeft daartoe immers de mogelijkheid. Een korte-termijn-nadeel is wellicht dat de instroom (tijdelijk?) kleiner wordt, maar dat is natuurlijk een kwestie van afwegingen maken. De herinrichting van de Tweede fase lijkt me een goede aanleiding de doorstroomregelingen naar de diverse opleidingen weer eens tegen het licht te houden.
De HBO-raad heeft in dit kader recentelijk gepleit voor opname van wiskunde als verplicht vak in het profiel CM. Dat lijkt me niet de oplossing. In de eerste plaats ligt de discussie over de invulling van de profielen (helaas) al een tijdje achter ons, waardoor deze stellingname waarschijnlijk een achterhoedegevecht wordt; in de tweede plaats dreigt hiermee bovendien een nieuw probleem gecreëerd te worden. Er zijn immers ook havo-leerlingen die een vervolgopleiding kiezen waarvoor wiskunde niet of nauwelijks relevant is (denk aan opleidingen als SPH en SJD); voor een deel van hen zou het behalen van het havo-diploma dan misschien onnodig moeilijk worden.
Het lijkt me simpeler en logischer om het vak wiskunde verplicht te stellen voor de toelating tot de pabo. De profielen EM, NG en NT zouden dan rechtstreeks toegang verlenen tot de pabo, het profiel CM alléén als de leerling wiskunde gekozen heeft als extra vak, bijvoorbeeld in het vrije deel.
Ik realiseer me dat daarmee de problematiek rond de mbo-instroom nog niet opgelost is, maar daarvoor zijn ongetwijfeld ook aangepaste oplossingen denkbaar.

Special 2006

De redactie is van plan volgend jaar een themanummer uit te brengen over redeneren en bewijzen - in breed op te vatten zin! We zijn op dit moment met name nog op zoek naar artikelen die dit onderwerp belichten vanuit het vmbo. Daartoe nodigen we u uit uw ervaringen of ideeën op papier te zetten. Concept-bijdragen voor deze special kunnen nog worden ingediend tot 1 september a.s.

SAMENHANG? MOEILIJK!

Hoe een 'exacte' studieochtend tot verrassende inzichten kan leiden.

[Frank van den Heuvel]

Inleiding

Er zijn van die momenten dat alles in één keer op zijn plaats valt, dat er een inzicht doorbreekt, dat je verbanden ziet die je eerder niet zag. Pas geleden vond er zo'n moment plaats voor mij. In dit artikel probeer ik te beschrijven hoe dit in zijn werk ging omdat ik denk dat er meerdere lezers zijn die hierin iets herkennen en die er hun voordeel mee kunnen doen. Om recht te doen aan de rommelige, enigszins chaotische ontdekkingstocht heb ik niet geprobeerd er een gestroomlijnd geheel van te maken. Ik wil de lezer graag meenemen op onze zoektocht, met alle zij- en gedachtesprongen die zich daarbij aandienen. Ik hoop dat u niet zult verdwalen onderweg, maar zich mee laat voeren op de golven van dit proces.
In een volgend artikel zal ik beschrijven tot welke concrete gevolgen en resultaten dit alles heeft geleid.

Achtergrond

Binnen onze sectie hebben we dit jaar het plan opgevat om meer tijd en ruimte te nemen om met elkaar van gedachten te wisselen over zaken waar we in ons onderwijs mee te maken krijgen en die de waan van alledag te boven gaan. Dat deze uitwisselingen beurtelings bij iemand thuis plaatsvinden onder het genot van een drankje en een maaltijd, is daarbij mooi meegenomen. Op de eerste bijeenkomst hebben we besloten, het thema algebra en het omgaan met vergelijkingen bij de hoorns te nemen. De voorzichtige maar duidelijke conclusie van die avond was, dat we ons een stuk beter kunnen voorstellen dat er bij onze leerlingen flink wat ruis op de lijn ontstaat als je nagaat wat voor boodschappen wij eigenlijk zoal uitzenden.

Voorbeeld

We gebruiken zelf de termen *functie*, *verband*, *voorschrift*, *functievoorschrift* en *pijlenketting* nogal losjes door elkaar, afhankelijk van ieders eigen voorkeur, traditie, jaarlaag en niveau. Daarbij komen notaties aan de orde als:

$$y=4x+50$$
$$f(x)=4x+50$$
$$x\to 4x+50$$
$$x\to 4x\to 4x+50$$

en wordt er gesproken over 'een lineair verband met startgetal 50 en richtingsgetal 4', waarbij het woord richtingsgetal dan ook weer afgewisseld kan worden met 'richtingscoëfficiënt' of 'hellingsgetal'.
Is hier sprake van vergelijkingen? Nee, dus. Toch

kennen we allemaal de leerlingen die onmiddellijk $4x + 50 = 0$ zullen gaan oplossen.
Vergelijkingen komen wél voor als we vragen naar het snijpunt van de lijnen $y = 4x + 50$ (of nog lastiger, $4x + 50 - y = 0$) en $y = 10x$. Meestal niet in deze kale vorm, maar wel in een context als de volgende:

Een kortingkaart voor een zwembad kost 50 euro. Een kaartje kost dan 4 euro per keer. Zonder kortingkaart betaal je 10 euro per bezoek. Hoeveel keer moet je gaan zwemmen om met kortingkaart goedkoper uit te zijn?

Mijn ervaring is dat nagenoeg iedere leerling dit 'probleem' kan oplossen. Voor mij een voorbeeld van een stukje 'gezond verstand wiskunde'. Toch word ook ik regelmatig geconfronteerd met leerlingen die afhaken zo gauw je dit alles vertaalt naar algebra met de bijbehorende vergelijking $4x + 50 = 10x$ (als ze die al kunnen produceren), en leerlingen die alle bekende oplosfouten (zoals 6 aftrekken in plaats van delen door 6 in de tweede stap) gaan maken.
Een nuttige eerste avond dus, met vooral veel vragen. Een volgende keer gaan we op zoek naar antwoorden.

Verrassing op de studiedag

Ook onze school houdt één of meer keer per jaar een studiedag. Deze traditie is vooralsnog gehandhaafd ondanks de maatschappelijke druk dat het onverantwoord is om de leerlingen hiervoor 'zomaar' een vrije dag te geven. Op onze studiedag van 9 november jl. gebeurde er, min of meer bij toeval, iets wat heel mooi aansloot bij bovengenoemde ervaringen en wat voor mij de aanleiding was om dit artikel te schrijven.
We zaten die ochtend met de exacte hoek bij elkaar om met elkaar te praten over vakoverstijgende vaardigheden en mogelijke samenwerkingsrelaties tussen de verschillende vakgebieden. Er was geen vastgesteld programma, deze keer hadden we van de schoolleiding een open opdracht meegekregen.
Het gesprek kwam op gang naar aanleiding van de verzuchting van collega Hans (docent Economie en Management & Organisatie, die mee mocht doen alsof hij een exact vak geeft):
'Mijn leerlingen kunnen nog geen lineaire vergelijking opgelost krijgen. Dat leren ze toch nog wel bij jullie?' (Hij bedoelde uiteraard de wiskundedocenten.)
Als voorbeeld noemde hij het berekenen van het break-even point in een modelletje waarbij geldt:

$TO = 10x$
$TK = 4x + 50$

De wiskundigen beweerden dat de leerlingen dit allemaal zouden moeten kunnen. Je hoefde maar de termen *terugrekenmethode*, *balans-* of *weegschaalmethode*, *bordjesmethode* of de termen *startgetal* en *richtingsgetal* te laten vallen en de leerlingen zouden de overeenkomst met hetgeen ze bij 'ons' geleerd hadden wel begrijpen. Dit leidde echter tot verbijstering bij de overige collega's.
Ze hadden geen van allen ooit gehoord van deze termen en uitdrukkingen. Ze gebruiken voor dit soort problemen kennelijk een geheel andere taal. Zo vertelde Hans zelf dat de oplossing van de opgave bij hem leidt tot een algemene formule voor dit soort situaties:

$X = CK/DB = CK/(V_p - V_k) = 50/(10 - 4) = 50/6$

met de bijbehorende terminologie:
CK = constante kosten
DB = dekkingsbijdrage
V_p = verkoopprijs per product
V_k = variabele kosten per product

Vragen:
- Wie ter wereld lost dit probleem eigenlijk ooit op met deze formule? De leerlingen zeker niet! En is dat wel zo erg eigenlijk? Je zou toch niet willen dat ze dit uit hun hoofd leren en dan gedachteloos gaan invullen!
- Zien de leerlingen de reikwijdte van deze formule?
- Is het niet nodig dat we onze leerlingen veel explicieter wijzer op de overeenkomsten met bijvoorbeeld de wiskundige aanpak?
- Is dit voor leerlingen herkenbaar als vertaling van hun eigen 'gezond verstand oplossing'?

Bas doet een duit in het zakje

We hebben deze vragen ter plekke niet beantwoord. Wel merkten we dat er een stuk herkenning ontstond. We legden een vinger op een zere plek waar we allemaal last van hebben. Kijk bijvoorbeeld maar naar het probleem van Bas, onze scheikundecollega. Hij gebruikt in zijn vak de reactievergelijking (!) van figuur 1 op pag. 357.
(*Het begrip vergelijking duikt hier dus ineens in een heel andere gedaante op. Het heet zelfs een evenwichtsvergelijking, hetgeen appelleert aan de balans/weegschaalmethode bij wiskunde.*)
Bekend is verder: $K_s = [I^-]^2 \cdot [Pb^{2+}]^2$.
(*Even kort ophalen: De evenwichtsconstante K_s van deze vergelijking is gelijk aan het kwadraat van de concentratie I^- vermenigvuldigd met de concentratie Pb^{2+}.*)

Gegeven is: $K_s = 5$.
Bepaal $[Pb^{2+}]$.

Zijsprong. Als we praten vanuit het denken in concepten en structuren, wat staat hier dan al voor een schat aan (verwarrende) informatie?
- Het concept 'vergelijking' is heel anders (zie boven).
- De vierkante haken kunnen gemakkelijk de associatie oproepen met haakjes uitwerken in plaats van het te lezen als concentratie van een stof.
- Bij I^- is I een scheikundig symbool en geen wiskundige variabele, terwijl het min-teken hier

geen aftrekmin of negatief min (de minknop op de GR) voorstelt, maar slechts de lading van het Joodion aangeeft.
- De 2 van het kwadraat (wiskunde) is een andere 2 dan die van de $2I$ of die van PbI_2 of die van Pb^{2+} in figuur 1.

Terug naar waar het om gaat: de oplossing (wiskundig bedoeld).
Oplossing: Stel [Pb^{2+}] gelijk aan x.
(*Dit is al een moeilijke stap in de oplossingsstrategie; zie ook verder. Waarom kies je eigenlijk deze ingang? Hoe moet ik dat weten?*)
Op basis van scheikundige argumenten moet nu gelden dat [I^-] = $2x$.
Uitleg: Op 10 deeltjes PbI_2 heb je bij evenwicht ook 10 deeltjes Pb^{2+} en 20 deeltjes I^- en dus is [I^-] 2 keer zo groot.
(*Kunnen leerlingen hierin mogelijk het 'bewijs' zien dat 10 = 10 + 20 of zoiets? Volgens Bas spelen deze problemen allemaal niet; de leerlingen weten dat dit zo is/werkt/moet.*)
Verder met de oplossing. Er moet dus gelden:
$5=(2x)^2\cdot x$
(*Hé, nu zijn het weer wél wiskundige haakjes en moeten we wel gewoon haakjes wegwerken! Vermoedelijk zullen in de praktijk veel leerlingen vergeten de haakjes te zetten,waardoor ze prompt op het verkeerde antwoord uitkomen.*)
En eindelijk zijn we bij de algebraïsche vaardigheden uitgekomen. Nu mag het geen probleem meer zijn, alhoewel het een leuke opgave is te bedenken hoeveel (reken)fouten er nog gemaakt zouden kunnen worden.

Vragen:
- Waar zit voor de leerlingen hier de herkenning met wiskunde?
- Waar zit voor hen de feitelijke moeilijkheid bij het oplossen van dit probleem?

Gerlofs uitstapje naar de statistiek
En weer gebeurde er iets met de aanwezigen. We hadden echt het gevoel iets wezenlijks aangeboord te hebben (waarvan je eigenlijk al langer wist dat het er was, maar waar je nog niet eerder zo duidelijk een vinger op kon leggen).
Aangespoord door dit enthousiasme kwam biologiecollega Gerlof met een voorbeeld uit zijn vakgebied. Het gaat over de regel van Hardy-Weinberg.
Deze luidt: $p^2 + 2pq + q^2 = 1$.
De regel was ons onbekend, maar zag er wel lekker wiskundig uit.
We kregen van Gerlof een (ouderwets?) mini-hoorcollege. Het gaat hier om een gen met twee *allelen* A en a. Die komen in een eerste generatie voor met frequentie A = p en frequentie a = q. Er geldt hierbij (logischerwijs) dat $p + q = 1$.
(*Je kunt je afvragen of frequentie hierbij een gelukkige woordkeus is (ze krijgen straks ook nog natuurkunde), 'fractie' zou al veel beter zijn. Verder is het verschil en de overeenkomst tussen $p + q = 1$ en $p + q = 100$ als we in procenten denken vermoedelijk ook niet voor iedere leerling meteen duidelijk.*)
Wat gaan we doen? Een kruistabel maken!

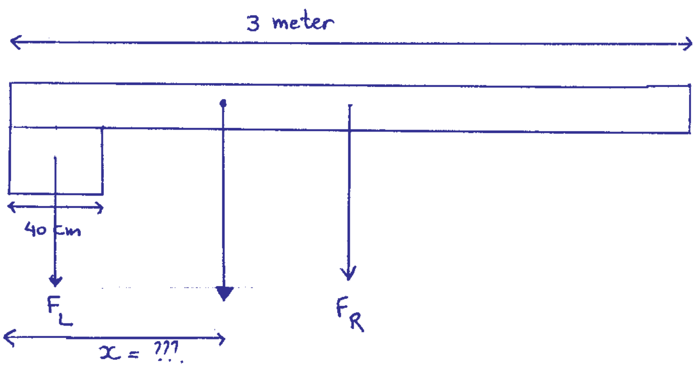
	A	*a*
A	*AA*	*Aa*
a	*Aa*	*aa*

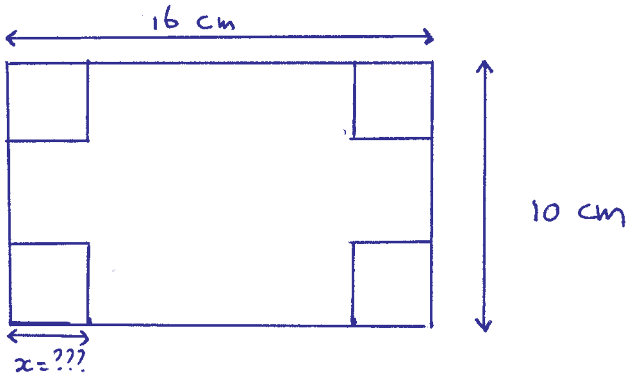
Intermezzo. Ho, stop! Even adempauze. Anders snap ik het zelf niet meer.
- A en a zijn dus GEEN variabelen, maar een soort van eigenschappen? Nee, het zijn ook geen eigenschappen. Het voorkomen van A bepaalt namelijk de eigenschap (fenotype), terwijl A en a te maken hebben met het genotype.
- De letters A en a zijn dus heel andere letters dan p en q? Ja, maar ook weer niet helemaal. Feitelijk is p namelijk afhankelijk van A in een praktijksituatie en zouden we dus moeten werken met een voorschrift van de vorm p(A) = ...
- Het was toch een kruistabel? Die kennen ze tenminste vanuit de wiskunde! Eindelijk hebben we een vakoverstijgende vaardigheid gevonden. Helaas, zo werkt het dus niet. Bij wiskunde gebruik je die immers voor het uitwerken van sommetjes als $(2x + 5y)(3x + 7)$:

	$2x$	$5y$
$3x$	$6x^2$	$15xy$
7	$14x$	$35y$

Vergeleken met de bio-tabel is er dus iets heel anders aan de hand. AA is zeker geen kwadraat, maar staat slechts voor het voorkomen van die combinatie. De *combinatie* Aa komt dus in de helft van het aantal gevallen voor. De *eigenschap* A komt echter in ¾ van de gevallen voor, terwijl maar ¼ deel van de populatie eigenschap a zal hebben.
- Je zult maar een leerling in de klas hebben die wel iets meegepikt heeft van de algebra en die een 'slimme' opa heeft (hij hoeft niet eens slim te zijn, vroeger wist iedereen dat). Bij haar laatste logeerpartij heeft opa haar verteld over de merkwaardige producten. Biologie vindt ze niet zo heel leuk, wiskunde wel. Dus toen Gerlof de regel van Hardy-Weinberg op het bord schreef, dwaalde ze weg met haar gedachten van de allelen en was ze terug bij opa in de herfstvakantie.
Ze wist het weer: $p^2 + 2pq + q^2 = 1$.
Dan dus ook: $(p + q)^2 = 1$.
Oplossen van vergelijkingen, dat kan ik!
$p + q = 1$ of $p + q = -1$
(*Oppassen, de negatieve oplossing niet vergeten; onze wiskundeleraar noemt dat de trakteersom.*)

FIGUUR 1, 2, 3





Dus: $p = 1 - q$ of $p = -1 - q$.
Maar... (Ze schrikt wakker van Gerlofs stem.) Wat heeft dit met biologie te maken?

Inmiddels waren wij bezig de finesses van Hardy-Weinberg te doorgronden. Aangenomen dat p(A)= 0,2 en q(a) = 0,8, kun je dus afleiden dat moet gelden:

$$Freq(AA) = p^2 = 0{,}2^2 = 0{,}04$$
$$Freq(Aa) = 2pq = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$$
$$Freq(aa) = q^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$$

En de regel blijkt dus te kloppen!

Eerlijk gezegd lukte het mij niet meteen de precieze betekenis van een en ander te begrijpen (ook ik vond biologie vroeger niet zo heel leuk). Toch nog eens nalezen in een biologieboek, of op internet, wat hierover te vinden is.
Wel duidelijk is dat het voor leerlingen knap moeilijk zal zijn om de overeenkomsten te blijven zien met hetgeen ze bij wiskunde over kansrekening, statistiek en algebra geleerd hebben.

De zorgen van Channah

Hierna wilde Channah, lerares natuurkunde, haar zorgen met ons delen. Die zijn wel van een ietsje andere wiskundige aard. Bij haar liggen de problemen vaak meer in de vertaalslag die er gemaakt moet worden van een natuurkundig probleem naar een hapklare wiskundebrok, bijvoorbeeld ‘wat kies je nu als x?’ Ze gaf ons het volgende voorbeeld: de hefboom met een onbekend draaipunt.

Gegeven de hefboom uit figuur 2 *met contragewicht. Bepaal de plaats van het draaipunt.*

Oplossing:
We hebben een geschikte instapvariabele nodig. Wat kiezen we voor x?
Channah gaf in haar uitwerking aan x de betekenis: x is de afstand van het draaipunt tot aan het linkeruiteinde van de hefboom; zie weer figuur 2.
Vanwege de momentenstelling moet dan gelden:
$M_L = M_R$
(*Is dit eigenlijk een vergelijking of toch ook weer niet?*)
En dus ook:
$$F_L \cdot (x - 0{,}2) = F_R \cdot (1{,}50 - x)$$
En met het invullen van de gegevens voor F_L en F_R moet de vergelijking (*nu wel!*) simpel op te lossen zijn.

Wat zijn nu zoal de problemen hierbij?
- De leerlingen weten al niet of nauwelijks wat ze als x moeten kiezen.
- De verdere vertaling levert op zichzelf alweer moeilijkheden op (rekenen in de goede eenheden bijvoorbeeld).
- Het oplossen is wel een probleem, uitwerken en oplossen valt nog zeker niet mee.
- Het probleem verandert niet wezenlijk als je een andere instapvariabele kiest. Dit is verwarrend voor

de leerlingen: 'Ik zal het wel fout hebben gedaan, want ik heb een heel andere x gekozen.'

Klap(je) op de vuurpijl

Aangestoken door al deze voorbeelden wilden wij als wiskundigen niet achterblijven. Klaske bracht de bekende 'bakjesvouwsom' in.

Zie figuur 3. *Hoekjes wegknippen, omvouwen. Hoe groot kan de inhoud van het bakje worden?*

Ook hier speelt immers het kiezen van de goede instapvariabele een belangrijke rol.
Zoals bekend gaat dit probleem voor sommigen al sterk tegen de intuïtie in: 'Het maakt toch niet uit, die inhoud kan toch niet verschillen?' Dat idee de wereld uit helpen gaat nog wel redelijk; in het vervolg gaat het veel vaker mis.
Kies hoogte bakje: x.
Dan is $I = l \cdot b \cdot h$ (*niet de I van scheikunde!*)
dus $I = (16-2x)\cdot(10-2x)\cdot x$
En nu? Oplossen I = 0 ?
(*Dat gaat toch juist heel handig in deze ontbonden vorm, dan moest je juist geen haakjes uitwerken!*)
Nee, nu moet je weer eens iets heel anders wiskundigs gaan doen: differentiëren! En dan nota bene wél oplossen I' = 0.

Zie nu door de bomen het bos nog maar eens!

Conclusies

- Wat doen we onze leerlingen aan? Je zult maar in je rooster op één dag Ec-Wi-Sk-Bi-Na achter elkaar hebben.
- Onze collega Petra, die ANW geeft, trok wit weg toen ze dit alles zag en zich realiseerde dat zij vanuit haar vak al dit soort dwarsverbanden met de leerlingen zou moeten bespreken.
- Er is voor ons exactelingen veel werk aan de winkel. Deze ochtend heeft een vervolg nodig. In eerste instantie willen we aan de slag gaan met onderwerpen als: - elkaar meer duidelijk maken wat er achter jouw eigen vakgebied allemaal schuilgaat; en - meer en explicieter aandacht in de lessen geven aan de overeenkomsten tussen de vakken; en - afstemming van taalgebruik en notaties.
- Iedereen onderschreef de noodzaak om dit soort bijeenkomsten vaker te houden. Aan ons om de schoolleiding te overtuigen hiervoor faciliteiten te geven. Het draagvlak is er blijkbaar al.

Tot slot

Het lijkt ons een uitdaging om te proberen onze ervaringen ook met de leerlingen te delen. Als idee daarvoor kwam naar voren om aan groepjes leerlingen van 5-vwo een aangepaste versie van genoemde problemen aan te bieden en ze te vragen deze met elkaar te bestuderen en uit te werken. Vervolgens zou dan aan ze gevraagd moeten worden of zij overeenkomsten zien en, zo ja, welke dan wel. Dit kan dan aanleiding zijn voor een vervolggesprek en een opstap om ze bewust te maken van het belang van dit soort operaties. Als bij-effect willen we kijken of er verschil in wijze van aanpak ontstaat tussen de verschillende groepen als je één groep in het scheikundelokaal laat werken, een andere bij natuurkunde, economie, wiskunde of biologie. Heeft de omgeving invloed op de prestaties? In een volgend artikel kan ik u eventueel verslag doen van onze bevindingen in deze.

Wat kunnen studiedagen toch vruchtbaar zijn! Zouden de minister, andere politici en ouders dat eigenlijk wel beseffen?

Met dank aan mijn collega's voor het verschaffen van al deze heldere maar verwarrende inzichten.

Over de auteur

Frank van den Heuvel (e-mailadres: hvw.heuvel@meridiaan-hl.nl) is wiskundedocent aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt, te Amersfoort.

Boekbespreking / Isaac Newton

Auteur: James Gleick, vertaald door Patty Adelaar

Uitgeverij De Bezige Bij (2004), isbn 90 234 1463 2, prijs € 19,90 (288 blz.)

[Peter Lanser]

Biografie

Een vallende appel waarnemen en vervolgens in een flits van inzicht de wetten van de zwaartekracht doorgronden, zoiets is niet iedereen gegeven. Isaac Newton klaarblijkelijk wel, en over hem verscheen in 2004 een biografie van de hand van James Gleick, schrijver van de populair-wetenschappelijke bestseller 'Chaos' (1987).

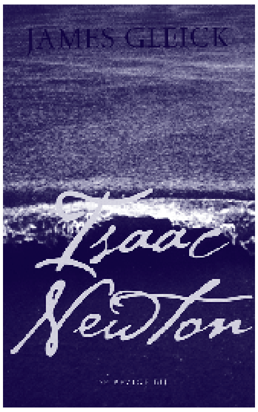
Gras en appels

Isaac Newton werd tijdens kerst 1642 geboren, maar zijn vader, een vrijboer, overleed reeds voor zijn geboorte. Isaac was 3 toen zijn moeder een niet bepaald ruimhartige predikant hertrouwde, die in de huwelijkse voorwaarden liet opnemen dat de zorg voor Isaac aan zijn grootmoeder moest worden toevertrouwd. Wat Isaac wilde worden wist hij niet, in ieder geval geen schapenhoeder of boer. Liever bracht hij zijn tijd door met het verzamelen van kruiden of het lezen van een boek, ergens in het gras, zó dat niemand hem kon zien. Was het ook in dat gras waar hij die flits van inzicht over een universele zwaartekracht verkreeg? In 1666 begon hij iets van de zwaartekracht te begrijpen, maar zijn vermoedens daarover hield hij tientallen jaren voor zich. Een aantal mensen hoorde dat hij door een appel geïnspireerd was, erover geschreven heeft hij zelf echter nooit. Alleen memoiresschrijvers als Voltaire maakten er melding van, en zorgden voor deze legende.

Newton en Leibniz

Newton, schrijft Gleick, opende een deur naar een nieuw heelal, een heelal dat in absolute tijd en absolute ruimte vervat was, dat tegelijkertijd onmetelijk én meetbaar was. Hiervoor moest hij een nieuwe tak van wiskunde ontwikkelen, die voor hem evenwel een paradox bevatte. Newton geloofde in een discreet heelal, in atomen die klein maar in laatste instantie ondeelbaar waren en in ieder geval niet infinitesimaal. Zijn wiskundig bouwwerk was daarentegen niet discreet maar continu.

Wie enigszins op de hoogte is van de ontwikkeling van de infinitesimaalrekening, zal de controverse tussen Newton en Leibniz kennen. Werkte Newton in zijn kamer bij kaarslicht dagen achtereen zonder zich druk te maken over maaltijden, was hij mager en had hij, volgens Gleick, met zijn forse neus en uitpuilende



ogen wel iets van een paard, de vier jaar jongere Leibniz had veel meer van de wereld gezien: hij was een kosmopolitisch reiziger, zakenman, jurist en diplomaat, en hoveling van het Huis van Hannover. Onafhankelijk van elkaar ontwikkelden zij de calculus. Newton deed zijn ontdekkingen als eerste en ontdekte meer, Leibniz deed echter waar Newton niet aan wilde: hij publiceerde zijn werk, zodat de hele wereld erover kon oordelen en het kon gebruiken. Dát leidde tot rivaliteit en afgunst.

Theologie

Newtons bekendste werk is *Principia,* maar pas eeuwen later werden al zijn geschriften bij elkaar gebracht, en bleek dat niemand wist dat hij een alchemist was geweest, en ook nog eens één die ongeëvenaard was in de omvang van de kennis ervan. In de middelste decennia van zijn leven hield Newton zich voornamelijk bezig met theologie. De bijbel nam hij letterlijk en hij had een fascinatie voor profetieën, die in zijn ogen een complex stelsel symbolen waren die ontrafeld en geïnterpreteerd worden moesten. Hij berekende de datum van de wederkomst des Heren, waarmee het oorspronkelijke en zuivere christendom zou worden hersteld, maar hij moest zijn berekening herzien. Daarom is het opmerkelijk om te lezen dat Newton duidelijke regels voor het filosoferen had, zoals: er mogen niet meer oorzaken aan natuurlijke dingen toegekend worden dan díe oorzaken die zowel waar zijn als volstaan om hun verschijnselen te verklaren.

Newton stierf op 84-jarige leeftijd op 19 maart 1727. Frappant genoeg bestaan er van hem geen Verzamelde Werken, dus zul je het eventueel moeten doen met deze interessante biografie.

Over de recensent

Peter Lanser (e-mailadres: p.lanser@wpkeesboeke.nl) is wiskundedocent op de Werkplaats Kindergemeenschap in Bilthoven. Hij is auteur van het Zebra-boekje 'De laatste stelling van Fermat'.

IN MEMORIAM

PROF. DR. E. J. DIJKSTERHUIS

28 oktober 1892 — 18 mei 1965

Elders zullen ongetwijfeld de verdiensten van Dijksterhuis als historicus van de natuurwetenschappen en van de wiskunde worden uiteengezet, hier past het ons stil te staan bij zijn betekenis voor het wiskunde-onderwijs op de diverse schooltypen van v.h.m.o.

Zijn ideeën over de betekenis die goed gegeven wiskunde-onderwijs kan hebben bij onze pogingen de leerlingen te dwingen tot zelfstandige, geestelijke arbeid en tot een correct taalgebruik, zijn gefundeerde beschouwingen over nieuwe programma's voor wiskunde in het v.h.m.o., zijn pleidooien enerzijds voor een erkenning van de wiskunde als onmisbaar bestanddeel van een voorbereiding tot universitaire studie onverschillig in welke faculteit ook, anderzijds voor een goede opleiding van de wiskunde-leraar, zijn neergelegd in tal van rapporten van commissies waarvan Dijksterhuis deel uitmaakte, in verslagen van door hem gehouden redevoeringen en in verdere artikelen van zijn hand.

Dijksterhuis heeft mede zijn stempel gedrukt op het karakter van ons didactisch tijdschrift in zijn eerste periode. De eerste jaargang van Euclides opende met een artikel van hem getiteld ,,*Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?*'', waarin hij polemiseerde met Mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa. Dit eerste artikel is in de loop van de veertig jaren dat Dijksterhuis medewerker van ons tijdschrift was, door dozijnen andere gevolgd.

Wie ooit een rede van Dijksterhuis mocht beluisteren, zal blijvend onder de indruk zijn gekomen van zijn ongemeen redenaarstalent, van zijn volmaakte taalbeheersing, van zijn steeds imponerende voordracht, van de conscientieuze documentering van elke van zijn beweringen en hij zal zich verwonderd hebben afgevraagd, hoe het hem mogelijk was zo'n voordracht te houden zonder de steun van enig geschreven woord.

Dijksterhuis maakte deel uit van de Commissie die op verzoek van het College van Inspecteurs in 1926 een onderzoek moest instellen en voorstellen moest doen die zouden kunnen leiden tot verbetering van het wiskunde-onderwijs op de hogereburgerscholen. Deze commissie die naar haar voorzitter en naar haar secretaris bekend is geworden onder de naam ,,Commissie Beth-Dijksterhuis'' heeft het getij niet mee gehad. Van officiële zijde is nimmer op de ingediende voorstellen gereageerd tot 11 jaar later bij de programmaherziening voor de h.b.s. van 1937 een klein deel van de wensen van de Commissie zou worden verwezenlijkt.

Het zal ons thans niet meer verwonderen, dat Dijksterhuis bij herhaling de betekenis van de geschiedenis van de wiskunde voor leerling en leraar naar voren heeft gebracht. Dat bij de jongste herziening van het wiskundeprogramma kennis van enige hoofdstukken van de geschiedenis van de wiskunde als facultatief onderdeel van het eindexamenprogramma van de α-leerlingen van het gymnasium werd opgenomen, ligt geheel in de lijn van de ideeën van Dijksterhuis, die hoopte op deze wijze voor de desbetreffende leerlingen tot een harmonischer geheel van de leerstof te geraken. Voor de leraren zelf beschouwde Dijksterhuis kennis van de historische ontwikkeling van de wiskunde als een beslist onmisbaar bestanddeel van hun studie. Zijn ideeën hierover heeft hij uiteengezet in een van zijn laatste publicaties: ,,*The place of history in the training of a mathematics teacher*," opgenomen in een rapport van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde van het jaar 1962.

Dijksterhuis heeft steeds gepleit voor ,,epistemisch onderwijs"; we gebruiken hier een door hemzelf ingevoerde term om een onderwijs aan te duiden dat diametraal staat tegenover ,,dril". Hij zag de taak van de docent tegenover de wetenschap als een viervoudige: de leraar kan optreden als zelfstandig beoefenaar van de wetenschap, hij kan zijn een belangstellend toeschouwer, hij kan de taak vervullen van middelaar en die van conservator.

Dijksterhuis is het grootste deel van zijn leven wiskundeleraar geweest, eerst te Groningen, daarna te Tilburg. Gezien zijn wetenschappelijke gaven is hij eerst te laat tot het hoogleraarsambt geroepen. In 1930 werd hij benoemd tot privaat-docent aan de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam, in 1953 en 1954 werd hij buitengewoon hoogleraar te Utrecht en te Leiden, in 1954 werd hij te Utrecht gewoon hoogleraar.

In 1952 ontving hij de P. C. Hooftprijs voor letterkunde naar aanleiding van zijn in 1951 verschenen werk ,,*De mechanisering van het wereldbeeld*", een werk dat ook in het Frans en in het Engels is vertaald. Dat deze prijs werd toegekend voor een wetenschappelijk werk over een natuurwetenschappelijk thema, is stellig te beschouwen als een uniek gebeuren. Kwaliteiten, die men traditioneel als α en β-kwaliteiten pleegt te onderscheiden, vond men bij Dijksterhuis tot een harmonische synthese verenigd. In dit verband mogen we misschien opmerken, dat Dijksterhuis ook een twintigtal jaren lang redacteur van ,,de Gids" is geweest.

Door een ernstige ziekte getroffen heeft Dijksterhuis bij het bereiken van de zeventigjarige leeftijd slechts in stilte afscheid kunnen nemen van zijn werk als hoogleraar.

De Nederlandse wiskunde-leraar zal Dijksterhuis blijven gedenken als een universele geest, wie het belang van het Nederlandse wiskunde-onderwijs zeer ter harte ging, en die ter bevordering van dat onderwijs, teleurstelling ten spijt, een leven lang zijn beste krachten heeft gegeven.

JOH. H. WANSINK

In memoriam, geschreven door Joh.H. Wansink, in Euclides 40 (1964-1965), pag. 289-291.

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

REFLECTIE IN DE KLAS (II)

[Floor van Lamoen]

Inleiding

In Euclides 79(7) van mei 2004 stonden twee stukken die mij na aan het hart liggen. In haar redactioneel vroeg Marja Bos onder de noemer ‘vakmanschap is meesterschap’ aandacht voor de nadelen van de prachtige volledig voorgekauwde materialen die de uitgevers ons leveren.[1] Voor je het weet word je een uitvoerder van andermans ideeën, in plaats van vormgever van het eigen onderwijs. Daarnaast vroeg Gerrit Roorda aandacht voor reflectie in de wiskundeles, nam hij reflectievragen uit de verschillende methodes onder de loep, en gaf wat hints tot andere middelen die tot reflectie uitdagen.[2]

Zelfstandig leren

Hier komen de dingen mooi samen met enkele *hot items* van mij persoonlijk en bij mij op school. Het onderwerp *reflectie* zal bij ons op school en in een buurschool veel aandacht krijgen binnen het kader van de Tweede fase, als fundamenteel onderdeel van zelfstandig leren. Zelfreflectie en zelfbeoordeling zijn van fundamenteel belang om op een goede manier zelfstandig te kunnen leren. Dit moeten vaste onderdelen van het leerproces zijn. Als wij ons in onze lessen beperken tot het herhalen van de theorie, de samenvatting en de diagnostische toetsen uit het boek, en nu kom ik bij Marja Bos, dan doen we onszelf en de leerlingen veel te kort.

Als u het uitlegt...

Een van de kenmerkende problemen waar wij in de lespraktijk tegenaan lopen is dat leerlingen niet altijd goed weten wat er van ze verwacht wordt als ze wiskunde moeten leren. Wie kent niet de volgende uitspraken:

- *Meneer, als u het uitlegt snap ik het prima, maar als ik de opgaven moet maken, dan snap ik het niet meer.*
- *Ik kon alle opgaven uit het boek prima maken, maar op het proefwerk snap ik er niks meer van.*
- *Als ik het uitwerkingenboekje lees, dan zie ik het wel. Maar voor het proefwerk had ik weer een 4.*

Uitspraken van onmacht. Uitspraken ook die nopen tot reflectie. Hoe goed snap ik het eigenlijk? Wat moet ik precies snappen? En vervolgens: wat moet ik doen?

Experiment

In mijn vwo-5 A12-groep heb ik afgelopen jaar via een experiment geprobeerd mijn leerlingen zich van hun eigen leren bewust te maken, en ze middelen in handen te geven om beter zelf te kunnen studeren. Kern van het experiment was om telkens bij te houden *wat* er geleerd moet worden, en dan te bedenken *hoe goed* de stof eigenlijk beheerst wordt. Aan de hand daarvan kan een goed studieplan gemaakt worden.

In de uitvoering bewandelde ik meerdere wegen:

- Ik praatte met de leerlingen na afloop van elke paragraaf over de *leerdoelen* (of het modewoord *competenties*) bij die paragraaf. Wat wordt er van je verwacht na dit hoofdstuk, en wat zie je daarvan zelf. Het blijft voor veel leerlingen heel lastig de rode draad uit een hoofdstuk te halen. Door het formuleren van de leerdoelen wordt het expliciet gemaakt. Een enkele keer ook formuleren leerlingen heel eigen leerdoelen, die horen bij specifieke fouten die ze maken. Meestal zijn het de voor de hand liggende of al genoemde leerdoelen.
- Ik liet de leerlingen de gemaakte fouten bijhouden op een foutenformulier. Dan namelijk doe je de

Wat moet ik kennen en kunnen	A	B	C	N
snijpunt van 2 lijnen			x	
→ stelsel			x	
→ elimineren			x	
gecombineerde ongelijkheid			x	
beperkende voorwaarden	x			
toegestane gebied		x		
productieprogramma's		x		
doelfunctie	x			x
iso-winstlijnen	x			x
optimaliseren	x			
hoekpuntmethode		x		
geheeltallig lineair programmeren				x
transportprobleem		x		
drie bestemmingen	x			

OPGAVE	Wat ging er fout	Iets te leren?
voorkennistoets 2	vanuit verkeerd standpunt vergelijking opgelost	ja
18a	fout abc-formule	ja
2b	fout $\frac{dy}{dx}$	ja
20d	verkeerd afgelezen	nee
35 c	moeite met differentiëren op a	ja
45 a	- " - - " -	ja
50 c	verkeerde formule gebruikt	nee

FIGUUR 1 Leerwijzer
FIGUUR 2 Zelfevaluatie

eerste reflectie: wat heb ik fout gedaan. Vergissing? Schrijffout? Begripsfout? Gebrek aan vaardigheid?
- Ik liet de leerlingen hun eigen mate van beheersing van de leerdoelen bepalen. Daarvoor gebruik ik de volgende schaal (een beetje grof, gericht op vaardigheidsdoelen):
A. Ik snap de sommen en theorie als anderen of het antwoordboek ze vertellen (passieve beheersing).
B. Ik kan de sommen bij de theorie zelf foutloos maken (actieve beheersing).
C. Ik snap hoe je dit op verschillende manieren kunt toepassen en in verschillende opgaven kunt tegenkomen. Ik sta boven de stof.
N. Ik snap het niet/onvoldoende.

Zelfevaluatieformulier

De eerste en derde weg kwamen samen op een *zelfevaluatieformulier*. De leerlingen vulden gaandeweg de leerdoelen in. Lopen ze ergens tegenaan? Nieuw leerdoel erbij.
Bij het voorbereiden van de toets voorzagen ze het formulier van de A-, B-, C- of N-scores.
Het blijkt voor een aantal leerlingen een eye-opener te zijn. Ze dachten dat ze er waren met het bereiken van niveau A. Quod non.

Met een zelfevaluatieformulier en door er steeds op terug te komen heb ik nu met de klas en met individuele leerlingen een taal om over het wiskunde leren te praten. Dat scheelt op zijn minst al frustratie. Het geeft ook duidelijkheid: wat moet er nog gebeuren. Maar dan komt er ook het volgende probleem: hoe moet ik dat aanpakken?

Er volgt het proefwerk, de terugkoppeling.
Klopte de geformuleerde mate van beheersing van de vaardigheden? Ook nu moet er natuurlijk gereflecteerd worden.

Expliciet

Geen van de dingen die ik hiermee gedaan heb is spectaculair. Iedere docent probeert duidelijk te maken wat de leerdoelen zijn, geeft zijn aantekeningen en aanwijzingen. Of zijn we inderdaad lui geworden van de uitgebreide ondersteuning door de uitgevers? Ook proberen we, onder andere aan de hand van de manieren die Gerrit Roorda voor ons weer eens opnoemde, leerlingen allemaal aan te zetten tot reflectie. Eén van de zaken die ik beoog met mijn manier van werken, is dat reflectie geen losstaand lesonderdeel is, maar integraal in het leerproces van de leerling is verwerkt.
Effectief studeren is erbij gebaat dat de zaken expliciet gemaakt worden. Een formulier is niet na het weekend vergeten dat de leerling iets niet goed kon. Vandaar expliciet leerdoelen noemen, en noteren hoe goed dat wordt beheerst. De volgende stap is het maken van een studieplan aan de hand van zo'n formulier. En dan zijn we bij zelfstandig leren.

Na de eerste periode van nieuwigheid blijkt dat een groep leerlingen het niet meer zo interessant vindt om de formulieren bij te houden, ondanks de kleine bonus die ze krijgen voor het goed invullen. Toch gebruiken ook die leerlingen soms de taal uit het formulier. Wel ben ik na een klassengesprek gestopt met het geheel open laten van de leerdoelen. De leerlingen gaven aan, het vervelend te vinden en bang te zijn belangrijke leerdoelen over het hoofd te zien. In de laatste versies vul ik dus veel in, en laat een paar regels open voor eigen leerdoelen.

Ook in de onderbouw gaan we met de sectie dergelijke formulieren inzetten. Natuurlijk wat meer basaal, natuurlijk met van tevoren ingevulde leerdoelen. Het idee en de explicitering zijn hetzelfde.

Natuurlijk zijn wij niet de enigen in het land die met deze zaken bezig zijn. En misschien zijn er ergens al zeer uitgebalanceerde methodes in werking. Wij zijn benieuwd naar voorbeelden van *good practice* in dezen. Ik ga in elk geval mijn experiment uitbouwen.

Noten

[1] Marja Bos: Van de redactietafel. In: Euclides 79(7), mei 2004; p. 293.
[2] Gerrit Roorda: Reflectie in de klas. In: Euclides 79(7), mei 2004; pp. 314-317.

Over de auteur

Floor van Lamoen (e-mailadres: fvlamoen@stwillibrord.nl) is leraar wiskunde aan het St. Willibrordcollege te Goes.

WISKUNDEONDERWIJS IN FRANKRIJK

Impressie van een studiereis naar Lille

[Irene Dalm]

Inleiding

Een zeventiental wiskundedocenten bracht van maandag 27 september tot en met zaterdag 2 oktober 2004 een bezoek aan Lille. Dit bezoek stond onder leiding van Jeanne Breeman bijgestaan door Hans van Lint.
Lille was vorig jaar de culturele hoofdstad van Europa, waardoor alle musea gratis toegankelijk waren en verschillende kunstenaars een project of kunstwerk neer hadden gezet (zie foto 1).
De studiereis was bedoeld om het onderwijs en in het bijzonder het wiskundeonderwijs in Frankrijk te bekijken. In Frankrijk heeft men de laatste jaren verschillende veranderingen doorgevoerd in het onderwijssysteem om er voor te kunnen zorgen dat meer leerlingen een opleiding afronden.
Tot de jaren '60 gingen alleen kinderen van rijke ouders naar het lyceum. Kinderen op het platteland stopten meestal op jonge leeftijd met school en gingen werken.
In jaren '60 veranderde het onderwijssysteem. Men ging meer uit van gelijkheid, met daarbij de invoering van de leerplicht in 1967.
In 1985 werd door de Franse regering het streven aangekondigd dat 80% van de jongeren aan het eind van de eeuw op examenniveau gebracht zou moeten. Dit streven werd in 1989 vastgelegd in de 'oriëntatiewet'. Een en ander leidde tot een massale instroom in lycea en hoger onderwijs. Inmiddels brengt ongeveer 70% van de jongeren het voortgezet onderwijs ten einde, in openbare scholen, landbouwscholen of in het leerlingstelsel. Dit percentage is in vijftien jaar (1989-2004) praktisch verdubbeld, met buitengewone ontwikkelingen in de technische en beroepsrichtingen.

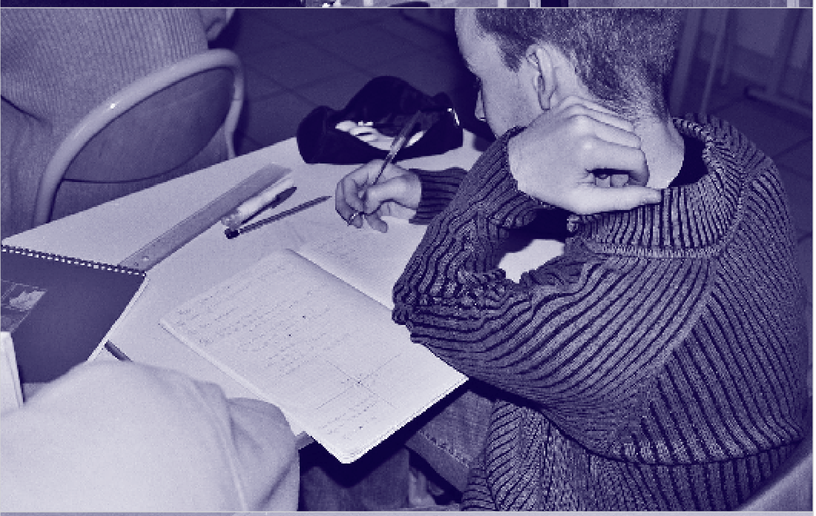
De organisatie van het Franse schoolsysteem

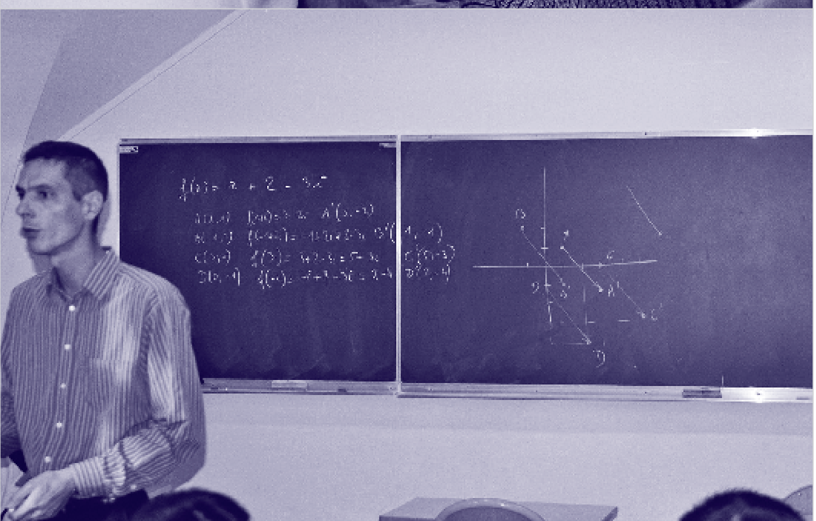
Sinds 1967 geldt de leerplicht voor kinderen van 6 tot 16 jaar. Maar sinds de jaren '70 is er in Frankrijk een zeer grote ontwikkeling in het voorschoolse onderwijs: de meeste kinderen van 3 (soms van 2) t/m 5 jaar gaan naar school en worden opgevangen in kleuterklassen: *école maternelle*.
Kinderen van 6 t/m 10 jaar gaan naar de *école élémentaire*. Daarna gaan alle leerlingen t/m hun 14e jaar naar een *collège*, en vervolgens bezoeken zij een *lycée* tot hun 18e jaar.
De *collèges* en *lycées* zijn alle gelijk en de leerling moet naar de school bij hem/haar in de buurt. Er is geen vrijheid van schoolkeuze. In Frankrijk ligt de nadruk op gelijkheid voor iedereen.
Het probleem waarmee het Franse onderwijs nu zit, is het verschil van populatie in dorpen, steden en wijken, waardoor in de praktijk het niveau per school toch verschilt. Sommige ouders proberen daarom hun kind op een andere school in dezelfde plaats te krijgen en huren daarom bijvoorbeeld een klein appartementje in de buurt van die school en laten zich daar als bewoner inschrijven. Ook is het mogelijk je kind te plaatsen op een school in de buurt van je werk.
Ook proberen *lycées* zich te onderscheiden door een bepaalde richting aan te bieden, bijvoorbeeld het vak Nederlands (voornamelijk in Noord-Frankrijk) of een polytechnische opleiding.

De docent in Frankrijk

Frankrijk heeft altijd een onderwijssysteem behouden met staatscontrole. De staat zorgt voor de werving, de opleiding en de betaling van docenten, opgeleid aan de *Instituts Universitaires de Formation des Maîtres* (IUFM). Aan deze in 1990 opgerichte instituten studeren zowel kandidaten voor de *école élémentaires, collèges* en *lycées*.
Als je docent wilt worden aan een *collège* of *lycée* moet je na het *lycée* eerst drie jaar naar de universiteit om inhoudelijke kennis en vaardigheden van het gekozen vak te verwerven. Na deze drie jaar doe je een toelatingsexamen voor het IUFM, waarna er nog één jaar aan de universiteit gestudeerd moet worden. In dit laatste jaar van de universiteit krijg je al wel begeleiding van het IUFM en volgt er ook een snuffelstage op een *collège* of *lycée*. Dan volgt er een afsluitend jaar aan het IUFM zelf en krijg je de status van *professeur stagiaire*. Je werkt dan ook al op een school en wordt betaald door de staat. Na dit jaar behaal je de status van *professeur certifié* en mag je lesgeven op een *collège* of *lycée* met een volledige baan van 18 uur. Het salaris van zo'n volledige baan is ongeveer gelijk aan het onze. De docent in Frankrijk is wel de gehele dag aanwezig op school, heeft vaak geen eigen lokaal maar wel veel tussenuren die gebruikt worden voor het corrigeren van de verplichte huiswerkopdrachten (zie verderop). Daarom is het in de docentenkamer rustig: de docenten zitten te corrigeren.

FOTO 1, 2, 3, 4





Wanneer je je specialiseert tot *professeur agrégé* door verder te studeren aan de inhoud van je vak, bestaat je volledige baan uit 15 uur lesgeven.
Omdat de staat de controle heeft over de werving van docenten, worden er op het IUFM evenveel docenten opgeleid als er in dat jaar nodig zijn.
Je bent daardoor je leven lang verzekerd van een baan - hoewel je zelf geen keuze hebt *waar* je komt te werken. In heel Frankrijk wordt er gewerkt met een puntensysteem: per jaar kun je je inschrijven voor de school van je keuze, maar hoe meer punten je hebt, hoe eerder je geplaatst wordt op de school van je voorkeur. De punten kun je verkrijgen door bijvoorbeeld getrouwd te zijn, kinderen te hebben, gespecialiseerd te zijn tot *professeur agrégé*, werkzaam geweest te zijn op een 'moeilijke' school (waar veel sociale problematiek heerst). Zo ontmoetten wij een jonge docent op een 'moeilijke' school in het centrum van Lille, die uit Bordeaux kwam en wel weer graag terug wilde naar de buurt waar hij vandaan kwam.

Het wiskundeonderwijs

Wij hebben diverse *collèges* en *lycées* in Lille bezocht en daar wiskundelessen bijgewoond.
Sommige wiskundedocenten trokken, voordat ze naar het lokaal gingen, een witte stofjas aan om hun kleding schoon van krijt te houden (zie foto 2).
Wat ons allemaal opviel was dat de leerlingen twee wiskundeschriften bij zich hadden: een werkschrift en een aantekeningenschrift. De schriften zagen er erg netjes uit: geen doorhalingen, verbeteringen etc. Dit wordt de leerling al heel vroeg aangeleerd, hoorden we op de lerarenopleiding. Hierdoor zal de leerling niet zo gauw zelf een oplossingsmethode uitproberen.
Over het algemeen werd er klassikaal lesgegeven, met uitgebreide aantekeningen. Groepswerk hebben we weinig gezien.
In de lessen die ik bijgewoond heb was er over het algemeen weinig sprake van interactie tussen docent en leerling; de docent vertelde en legde uit, de leerlingen schreven de aantekeningen over van het bord.
Eén keer per week moet elke klas een huiswerk-opdracht maken. Dit is door de overheid verplicht gesteld, waardoor de docent per klas ongeveer vier uur met corrigeren bezig is. Daarom wordt er tijdens de lessen vaak geen of heel weinig huiswerk gemaakt en/of behandeld.

Collège

Het niveau op een *collège* ligt ongeveer op het niveau van de onderbouw van de havo. Er wordt 3 à 4 uur wiskunde per week gegeven. Het aantal leerlingen in een klas varieerde van 18 tot 31. Omdat het *collège* gelijk is voor alle leerlingen, is het mogelijk dat leerlingen niet mee kunnen komen. Deze leerlingen deden hun best om alles netjes over te schrijven in hun aantekeningenschrift, maar wisten vaak niet waar het om ging (zie foto 3).

Dit probleem wordt nu in Frankrijk onderkend en men is druk bezig om hierover na te denken. Gelijkheid voor iedereen is een mooi streven, maar het blijkt dat niet iedereen dezelfde capaciteiten heeft.
Leerlingen krijgen soms in kleine groepjes extra Frans of wiskunde om bijgespijkerd te worden. Dit gebeurt voornamelijk in de scholen die in sociaal zwakkere wijken staan; zij krijgen van de overheid voor deze lessen extra geld. Ook is het in deze scholen verplicht om als docenten een echt team te vormen, waarin overleg over leerlingen gepleegd moet worden.
De docenten schreven vaak de definities op het bord, die dan overgenomen moesten worden; dat werd nauwlettend gedaan. Een docent op een ‘moeilijke’ school liet de leerlingen deze regels als huiswerk drie keer overschrijven. Hij hoopte op deze manier dat de leerling iets zou onthouden van de regels.
Boeken werden er niet veel gebruikt, hoewel de leerlingen die wel hebben; docenten maakten voor de leerlingen vaak stencils.
De wiskunde is veel formeler dan de contextrijke wiskunde bij ons. De vlakke meetkunde wordt behandeld door middel van constructies. Een geodriehoek hebben we niet gezien; rekenmachines erg weinig.

Lycée

Op het *lycée*, de eerste twee jaar alles op hetzelfde niveau, hebben we veel formele algebra gezien. Er werd veel aandacht besteed aan de notatie, die stap voor stap opgeschreven werd. Veel ontbinden in factoren, haakjes wegwerken etc. Een rekenmachine wordt niet veel gebruikt; $\sqrt{3}$ laat men in die vorm staan.
Op sommige scholen werd ook met computers gewerkt: Derive 5, Cabri, etc.
Enkele voorbeelden van onderwerpen die we gezien hebben in lessen uit de hoogste klassen van een *lycée*: complexe getallen (zie foto 4 en figuur 1), differentiaalvergelijkingen, de afgeleide definiëren met behulp van limieten.
Op een *lycée* worden de klassen één keer per week gesplitst in kleinere groepen om zo nog extra wiskunde te kunnen laten volgen op een hoger niveau.
Na het *lycée* zijn er voor de leerlingen drie mogelijkheden om verder te studeren:
- voor de middelmatige leerling: de universiteit;
- voor de iets betere leerling: een opleiding voor een hoge technische functie in het bedrijfsleven;
- voor de goede leerling: een ingenieursopleiding.

Waarom scholen bezoeken in het buitenland?

Het is belangrijk om te bekijken of wij met onze ontwikkelingen op de goede weg zijn. Reflectie en zelfreflectie kunnen je eigen lessen, lessen op je school en het wiskundeonderwijs een verrijking geven. Zelf heb ik weer eens gezien dat schoolboeken weliswaar een leidraad of aanvulling voor je lessen kunnen zijn, maar dat een boek alléén niet voor goede lessen zorgt.
Het praten over wiskundeonderwijs met buitenlandse collega’s en binnen de groep studiereis-deelnemers kan ons helpen met het meedenken over de vernieuwingen die eraan komen, in zowel het wiskundeonderwijs als in het gehele onderwijssysteem.
De maatschappij waarin wij leven houdt niet op bij onze landsgrenzen; wij moeten leerlingen daar ook op wijzen en blijven kijken hoe we het onderwijs in geheel Europa op peil kunnen houden.

Noot

Deze studiereis werd georganiseerd door Euroschool, in samenwerking met l’Académie du Nord-Lille, en werd gedeeltelijk gesubsidieerd door het Europees Platform (www.europeesplatform.nl). Het Europees Platform werkt in opdracht van het Ministerie van OCW en de Europese Commissie aan de internationalisering van het Nederlandse onderwijs. Via de website van Euroschool (www.euroschool.nl) is informatie over andere studiereizen te vinden.
Volgend jaar zal een studiereis voor wiskundedocenten plaatsvinden naar Magdeburg. Nadere informatie bij Jeanne Breeman, e-mailadres: vanlint-breeman@hetnet.nl.

Over de auteur

Irene Dalm (e-mailadres: idalm@ibiza-mail.com) is lerares wiskunde aan het Wellantcollege locatie vmbo ‘Mavo Stek’ te Dordrecht.

FIGUUR 1

Le but du TP est d’interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{b-a}{c-a}$.

A, B et C sont trois points du plan dont on note a, b et c les affixes dans un repère orthonormal direct $(o;\vec{u},\vec{v})$.

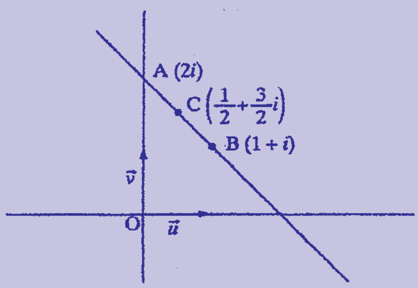
<u>1^er^ cas :</u> $\dfrac{b-a}{c-a}$ est un réel non nul. Posons (1) $\dfrac{b-a}{c-a} = k$ où k réel non nul.

a. Quelles sont les affixes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$?

b. Traduire (1) par une relation entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

d. <u>Application</u> : $a = 2i$, $b = 1 + i$, $c = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.



DOE MIJ MAAR HET METERSPEL

Wiskunde Scholen Prijs 2004; diverse lesprojecten van het Kennemer Lyceum

[Heleen Verhage]

Prijs

Op 29 april 2004, de laatste schooldag voor de meivakantie, had ik het plezierige genoegen de Wiskunde Scholen Prijs 2004 te mogen uitreiken op het Kennemer Lyceum in Haarlem[1]. Gelukkige winnaar is Sacha van Looveren, die de projecten *Wiskunde door het vizier van een scholier* en *Wiskunde, inspanning of ontspanning?* inzond.

Jongste spruit

De grootste verrassing is wel, dat Sacha van Looveren de jongste spruit is binnen het docentencorps van het Kennemer Lyceum. Ze was ten tijde van de prijsuitreiking zelfs nog niet eens klaar met haar studie aan de tweedegraads lerarenopleiding in Amsterdam (de EFA). Delen van haar inzending, het Meterspel en het Afvalproject (waarover verderop meer), heeft ze zelf ontworpen als onderdeel van haar studie. Het accent ligt in dit artikel op het Meterspel.

Boeiend is het om te horen hoe Sacha op het Kennemer terecht is gekomen: ‘Vanwege mijn LiO-stage zocht ik een betaalde baan voor het hele schooljaar. Ik heb op verschillende scholen gesolliciteerd en had de luxe dat er een tekort was, waardoor ik op verschillende scholen aan de slag kon. Ik heb gekozen voor het Kennemer, omdat ik een zeer ontspannen en leuk sollicitatiegesprek heb gehad en omdat deze school mij ook een baan na mijn LiO-stage kon aanbieden; dus er was toekomstperspectief.’
Sacha is in juni 2004 afgestudeerd, en hoorde in de week van de prijsuitreiking dat ze op het Kennemer kon blijven. Dubbel succes dus!

Bij het aannamebeleid van het Kennemer speelde zeker een rol dat deze oerdegelijke school net een nieuwe rector had die graag nieuw bloed de school in wilde halen.
De oudere collega’s in de wiskundesectie zijn heel positief over Sacha’s werklust en het enthousiasme dat ze uitstraalt, zo vertelt wiskundecollega Kees Houtman mij.

Sacha trok de stoute schoenen aan en stuurde twee projecten[2] in voor de Wiskunde Scholen Prijs 2004.

Eerste project: Wiskunde door het vizier van een scholier

Dit project bestaat uit twee (los van elkaar staande) onderdelen: de lessenserie ‘Afval’ en het ‘Meterspel’. Het doel van dit project is om wiskunde binnen de belevingswereld van de leerlingen te brengen. Sacha wil elk jaar een hoofdstuk uit het boek vervangen door een eigen lessenserie of voorzien van extra eigen materiaal. De lessenserie ‘Afval’ vervangt het hoofdstuk over Inhouden en Vergrotingen uit het boek (Getal en Ruimte). Het idee is dat de leerlingen in groepen aan de slag gaan met verpakkingsmaterialen en een inschatting maken van de hoeveelheid afval die ze op school produceren. Op het moment van de prijsuitreiking heeft Sacha nog geen praktische ervaring met deze lessenserie. Aan het eind van het schooljaar heeft ze die wel: de lessenserie is uitgeprobeerd in een tweede klas. Ze laat er het volgende over weten: ‘De leerlingen waren heel leuk aan het werk en het allerleukste was dat ze enthousiast waren over het feit dat het eens op een andere manier ging. Niet altijd maar weer die sommen uit het boek. De leerlingen schrokken ook van de hoeveelheid afval die ze produceren in de school. En als je naar de wiskunde kijkt: ze hebben zich eigen gemaakt hoe je de inhoud van verschillende ruimtefiguren moet uitrekenen. Daarnaast moesten ze zelf maten opmeten die ze nodig hadden om inhouden uit te rekenen. Daardoor leefde het veel meer dan wanneer je uit een boek de maten afleest en van daaruit het regeltje toepast.’

Het Meterspel

Het Meterspel zie ik in bedrijf op de dag van de prijsuitreiking, reden om er wat dieper op in te gaan. Het spel is bedoeld als aanvulling op het hoofdstuk over het metriek stelsel. Het is een bordspel (een soort ganzenbord) met als doel het rekenen binnen het metrieke stelsel te trainen en het gevoel voor bepaalde maten te vergroten.

Het spel wordt in groepjes van vier leerlingen gespeeld, twee tegen twee. Er zijn verschillende soorten opdrachtkaartjes, waarmee de tweetallen centimeters kunnen winnen of verliezen. Het tweetal dat als eerste de meterlat helemaal gevuld heeft, heeft gewonnen. Centimeterkaartjes kunnen zo nodig bij de bank gewisseld worden.
De belangrijkste materialen voor het spel (speelbord, opdrachtkaartjes, meterlatten met groeven, kaartjes van 1, 2, 5 en 10 cm) heeft Sacha zelf gemaakt. Daarnaast zijn dobbelstenen en pionnen nodig.
De kleur van een kaartje geeft aan wat voor type opdracht erop staat (zie figuur 1):
- gele kaartjes: gevarieerde vragen beantwoorden,
- blauwe kaartjes: rekenvragen beantwoorden,
- groene kaartjes: afstanden winnen,
- rode kaartjes: afstanden verliezen.

Deze opdrachten zijn afkomstig uit de makkelijke variant van het spel. Sacha maakte ook een moeilijke variant, waarin ook niet meer in tweetallen wordt gespeeld, maar ieder voor zich. In de moeilijke variant win je bijvoorbeeld 1,3 dm of moet je 140 mm in de pot doen.

Van idee tot uitgever

Sacha heeft het spel als onderdeel van haar studie aan de lerarenopleiding samen met studiegenote Marieke ten Thij ontwikkeld. Sacha: 'Samen hebben we het regelmatig over het ontwikkelen van meer materiaal of spelletjes ten behoeve van onze lessen, dus leuk voor de toekomst. We wisselen ook veel lesideeën uit met elkaar. Zo houd je elkaar scherp en blijf je geïnspireerd.'
Het spel is een tijdlang voor iedereen vrij beschikbaar geweest via de website van de virtuele school (*www.efa.nl/virtueleschool*, met daarop divers lesmateriaal). Maar daar is het nu van verwijderd omdat een uitgever belangstelling heeft getoond voor het spel. De geïnteresseerde uitgever is Bekadidact, vooral actief in het basisonderwijs. Maar dat hindert niet, aldus Sacha, want de opzet en de inhoud van het spel blijven gelijk. De vormgeving wordt veranderd, zodat het er allemaal wat aantrekkelijker uit gaat zien voor de leerlingen. Er komt een speldoos omheen, waardoor het praktischer wordt. Kort na de zomervakantie komt het waarschijnlijk op de markt. Oorspronkelijk is het spel ontwikkeld voor een klas 3-vmbo-Basis, maar Sacha weet ook een school die het in een 3-vmbo-TL gebruikt. Het is breed inzetbaar van groep 7 van de basisschool tot en met de onderbouw van de middelbare school. Op een havo/vwo-school is het uitermate geschikt voor de brugklas.
Zo zie je maar waar de Wiskunde Scholen Prijs toe kan leiden: jonge docent trekt stoute schoenen aan, wint prijs en weet uitgever voor haar werk te interesseren. De immer verder terugtrekkende overheid moet dit prachtig vinden!

Tweede project: Wiskunde, inspanning of ontspanning?

Terug naar de feitelijke inzending. Sacha heeft ook nog een tweede project ingezonden, met als thema: spelletjes met een wiskundige achtergrond. De spellen zijn mede bedoeld voor leerlingen die extra uitdaging nodig hebben om wiskunde leuk te blijven vinden. De spellen die Sacha tot nu toe in het project heeft opgenomen zijn: foamkubussen, *Quarto*, *Set*, *Het Land van Oct* en *Geheimtaal*. Deze spellen heeft ze niet zelf bedacht, maar ze heeft ze wel aangepast voor de eigen situatie. Zo is het spel *Set* enkele jaren geleden door het tijdschrift Pythagoras in Nederland geïntroduceerd. *Het Land van Oct* gaat over rekenen in het 8-tallig stelsel, en wordt op de Pabo gebruikt om de studenten de essentie van het rekenen en de moeilijkheden die daarbij horen te laten herbeleven.

Laatste les voor de vakantie

Met het Meterspel heeft Sacha al heel wat ervaring. Ook tijdens deze laatste les voor de vakantie is een aantal leerlingen er druk mee in de weer. De leerlingen mogen deze les zelf een spel kiezen om te doen. Groepjes leerlingen zijn in de weer met de foamkubussen, met *Set* en met het Meterspel. Als ik ze vraag wat ze er van vinden is het antwoord simpel: 'Leuk om te doen!' Het komt goed uit dat de leerlingen niet veel aandacht vragen, want er is een journalist van het Haarlems Dagblad gearriveerd om Sacha te interviewen. De fotograaf van de krant komt pas als de les al is afgelopen, maar gelukkig lukt het

Geel kaartje	Blauw kaartje	Rood kaartje	Groen kaartje
Vul op de puntjes de juiste lengtemaat in. Een kerktoren is ongeveer 360 ... hoog. Goed: 8 cm erbij. Fout: 1 cm eraf.	Vul het juiste getal in. 5 liter = ... dm^3 Goed: je wint 9 cm. Fout: je verliest 2 cm.	Je bent vandaag jarig en trakteert je medespelers ieder op $^1/_{10}$ dm. Geef alle spelers 1 cm.	Je hebt je kamer opgeruimd en je vindt nog 0,9 dm onder je bed. Je wint 9 cm.

FIGUUR 1

Sacha om gauw nog wat leerlingen van de gang te plukken en een tafereeltje te ensceneren.
Tijdens de les reik ik de prijs uit. Belangstelling genoeg, want behalve de leerlingen en de journalist van de krant zijn ook de wiskundecollega's en de schoolleiding hierbij van de partij. Vriendelijke woorden over en weer en een brede lach voor op de foto. De sectie kan met recht trots zijn op haar jongste spruit!

Het juryoordeel

Bij de prijsuitreiking hoort het voorlezen van het oordeel van de jury. Dit luidt als volgt:
'Deze inzending straalt enthousiasme uit, is goed uitgewerkt en ziet er heel verzorgd uit. Het afvalproject is origineel en er zou volgens de jury meer mee gedaan kunnen worden, bijvoorbeeld bij andere vakken. Het Meterspel is een leuke manier om het metrieke stelsel te oefenen. Een suggestie van de jury is, om ook extreme maten aan het spel toe te voegen (het gewicht van een mug of de oppervlakte van Nederland) waarbij de leerlingen dan ook moeten schatten. Het spel is volgens de jury ook geschikt voor de basisschool (en voor de Pabo). Het niveau van de vragen is goed, zij het dat de vragen nogal gesloten zijn. Daar staat tegenover dat het heel duidelijk is wat er geleerd wordt.
De jury waardeert dat het boek echt even opzij gezet wordt, zodat de lessen niet extra bovenop de reguliere stof komen.
Van de spelletjes spreekt Het Land van Oct de jury in het bijzonder aan, mede omdat het aansluit op aspecten van computergebruik. In kringen van het basisonderwijs is dit spel nogal bekend, maar in het voortgezet onderwijs niet, waardoor het toch een origineel idee is om dit spel in te zetten.
Tenslotte: de uitvoering van de projecten lijkt de jury veel werk voor de docenten.'
Met deze laatste opmerking heeft de jury vooral bedoeld dat de voorbereiding nogal wat werk is. Het Meterspel, bijvoorbeeld, moet wel eerst gemaakt worden alvorens het gespeeld kan worden. Maar dit probleem lost zich vanzelf op: gewoon wachten tot het spel in de handel is.

De blik vooruit

Sacha blijkt nog heel wat meer ideeën in het vat te hebben. Zo heeft ze plannen om met applets aan de gang te gaan binnen haar lessen. 'De zomervakantie is zo lang, dan kan ik weer een hoop materiaal maken', aldus Sacha.
Stel je voor dat alle docenten er zo over zouden denken! Dan zou Nederland inmiddels bol staan van de meest prachtige onderwijsmaterialen. Wie de jeugd heeft, heeft de toekomst, zullen we maar zeggen.
De rector van het Kennemer Lyceum had het in elk geval goed gezien met zijn idee om nieuw bloed de school in te halen. En de jury van de Wiskunde Scholen Prijs ook, want wat is er nou leuker dan een beginnend docent die nog niet eens afgestudeerd is in het zonnetje te zetten?

Noten

[1] Zie ook H. Verhage: Uitslag Wiskunde Scholen Prijs 2004. In: Euclides 79(8), pp. 364-365.
[2] Wie meer over de projecten wil weten, kan contact opnemen met Sacha van Looveren (e-mailadres: s.l.vanlooveren@freeler.nl).

De Wiskunde Scholen Prijs is ontstaan uit het WisKids-project, dat inmiddels beëindigd is. De doelstellingen van WisKids zijn nog steeds actueel: het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongens en meisjes van tien jaar en ouder en het verbeteren van het imago van de wiskunde. WisKids was een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs.

Over de auteur

Heleen Verhage (e-mailadres: h.verhage@fi.uu.nl) is Manager Beheer van het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Eerder was zij o.a. betrokken bij het WisKids-project, waaruit de Wiskunde Scholen Prijs is voortgekomen.

NIEUWE TRENDS IN HET VMBO

Competentiegericht onderwijs versus digitale examinering binnen het vmbo

[Klaske Blom]

Reehorstconferentie

Competentiegericht onderwijs was een van de onderwerpen op de Derde Reehorstconferentie Wiskunde, een jaarlijks gehouden conferentie voor docenten wiskunde in het vmbo en de onderbouw havo/vwo, georganiseerd onder auspiciën van het APS. Dit jaar vond de conferentie plaats op 19 januari 2005. Klaske Blom bezocht de conferentie en beschrijft de door haar bijgewoonde lezing en workshop.

Johan van der Sanden over competentiegericht onderwijs

Dit jaar werd de openingslezing gehouden door prof. dr. Johan M.M. van der Sanden, een man met een belangrijke missie. Hij is hoogleraar aan de Technische Universitaire Lerarenopleiding van de TUE en lector didactiek van het beroepsonderwijs bij de Fontys Pedagogische Technische Hogeschool in Eindhoven. Door een woud van verhalen, anekdotes en voorbeelden ontvouwde hij aansprekend zijn ideeën over de inhoud en de implicaties van competentiegericht onderwijs binnen het vmbo.

Competentiegericht onderwijs, wat houdt dat in? En wat vraagt dat van de leerling? Van der Sanden schetste het als volgt.
Competentiegericht onderwijs (cgo) helpt leerlingen ergens goed in te worden. En wanneer ben je dan ergens goed in? En hoe word je die vakman of vakvrouw op een bepaald terrein? Hiervoor is het nodig dat je

- iets kunt, en daarvoor dus de benodigde vaardigheden ontwikkelt;
- iets weet, en daarvoor beschikt over goed georganiseerde basiskennis;
- iemand bent, wat met name in het vmbo betekent dat (beroeps)identiteit ontwikkeld moet worden;
- iets wilt en daarvoor moet je je als leerling willen laten aanspreken op je ambities.

Het ontwikkelen van competentiegericht onderwijs heeft consequenties voor het lesprogramma.
Cgo is geen hype, maar een manier om ons onderwijs een tandje hoger te krijgen, aldus Van der Sanden. We brengen ons onderwijs naar een hoger niveau door maatwerk te leveren zodat de leerling díe competenties kan ontwikkelen die bij hem/haar passen. Daarnaast is het van belang dat de leerling participeert in het ontwerpen van onderwijs. Dit is een gedachte die zijn oorsprong heeft in het sociaal-constructivisme, waarin de nadruk wordt gelegd op de eigen, actieve en zelfstandige rol van de leerling bij het opbouwen van kennis. In de oratie die Johan van der Sanden op 12 maart 2004 hield (zie [1]), vinden we een onderbouwing van dit idee.
Een paar alinea's uit zijn oratie samengevat.
Het zou een verkeerde conclusie zijn als we denken dat instructie, uitleg of vormen van klassikaal onderwijs uit de tijd zouden zijn en leerlingen zouden verhinderen zelf actief kennis te construeren. Of –wellicht paradoxaal– dat zwakke leerlingen vooral te maken zouden moeten krijgen met klassikaal onderwijs en directe instructie, omdat zij niet in staat zijn om zelf actief kennis te construeren. (...) Hieraan ligt een verkeerde tegenstelling ten grondslag, die wel wordt aangeduid met de (vermeende) tegenpolen instructivisme-constructivisme. Beter is het om het leren uit ervaring te zien als tegenhanger van het leren uit instructie. In beide gevallen kan er sprake zijn van constructie van kennis. De mate waarin en de wijze waarop dat gebeurt, zijn direct afhankelijk van de persoonlijke leerstijl van de leerling. Tijdens instructiebijeenkomsten, klassikale lessen en wanneer een docent leerlingen iets uitlegt kunnen leerlingen wel degelijk – ook de zwakkere – een actieve rol spelen en kennis construeren; aan de andere kant slagen veel leerlingen – ook de betere – er niet in constructief en competentiegericht te leren in situaties waarin de docent minder prominent aanwezig is en waarin een groot beroep wordt gedaan op het zelfontdekkend leren uit ervaringen.

Het is volgens Van der Sanden van groot belang dat we ons onderwijs zo inrichten dat leerlingen de bovengenoemde vier aspecten van competenties (kunnen, weten, zijn, willen) integreren in wat ze al in huis hebben op de verschillende gebieden, en dat bijvoorbeeld de nieuw opgedane kennis past bij de nieuw verworven vaardigheden. Als leerlingen in staat zijn om kennis, vaardigheden, attitudes en persoonskenmerken te integreren in zichzelf, komen ze daarmee tot een 'eigen wijsheid' en 'persoonlijke bekwaamheid'. Deze opvatting verenigt zich niet met het idee dat competenties 'afvinkbare' vaardigheden zijn die je in specifieke periodes na elkaar kunt programmeren. In het competentievocabulaire passen volgens Van der Sanden geen uitspraken

als: ‘Die competentie heb ik al gehad’ of ‘Voor de kerst doen we de sociale competentie, na de kerst de didactische’.
En het geïntegreerd ontwikkelen van competenties correspondeert ook niet met klassieke opvattingen over ‘transfer’ waarbij de theorie aan de praktijk vooraf moet gaan; het zou bijvoorbeeld juist pleiten voor een samen opgaan van stage lopen en leren binnen het vmbo.

Woorden van deze strekking sprak Van der Sanden tijdens de openingslezing op de Reehorstconferentie. Het was inspirerend om naar te luisteren; ik realiseerde me hoe weinig ik me nog verdiept heb in het nieuwe competentiegerichte onderwijs. Het lijkt, binnen het zo ten onrechte regelmatig onder vuur liggende vmbo, een kans om leerlingen tot hun recht te laten komen.

Van der Sanden ging tijdens zijn lezing niet in op de manier waarop je competentiegericht onderwijs kunt en moet toetsen. Omdat ik na de openingslezing de workshop ‘Wiskunde-examens basisberoepsgerichte leerweg op de computer’ op mijn programma had staan, over de nieuwste trend binnen het Cito, vat ik kort samen waarover Van der Sanden in zijn oratie gesproken heeft met betrekking tot toetsing binnen cgo. Het is in mijn ogen namelijk erg de moeite waard om deze twee nieuwe ontwikkelingen binnen het vmbo, competentiegericht leren en digitaal examineren, in samenhang te bekijken.
Uit de oratie:
Overal waar men competentie-ontwikkeling centraal stelt in het onderwijs, vraagt men zich af op welke wijze de leerprocessen die zich voordoen in het kader van dit onderwijs moeten worden gediagnosticeerd en beoordeeld. De wijze waarop getoetst wordt, heeft een belangrijke invloed op het gedrag van zowel leerlingen als docenten. Bij een competentiegericht leerprogramma horen competentiegerichte en authentieke vormen van toetsing waarmee leereffecten in de vorm van ontwikkelde competenties zichtbaar gemaakt kunnen worden. Er dient sprake te zijn van een passend leerlingvolgsysteem waarbij het verloop van processen in kaart gebracht kan worden. Vanuit constructivistische opvattingen wordt het van belang geacht dat leerlingen zelf het verloop en de resultaten van hun leerproces in de gaten houden. De leerling dient een actieve rol te spelen in het ontwikkelen van proces- en productcriteria en standaarden voor beoordeling. Op de achtergrond speelt mee dat de voorspellende waarde van diploma’s voor het functioneren buiten de school in het algemeen gering is.
Bij alternatieve toetsmethoden kan worden gedacht aan:
- authentieke toetsen waarbij leerlingen geleerde kennis moeten kunnen toepassen in nieuwe situaties,
- gedragsbeoordeling waarbij leerlingen concreet moeten demonstreren wat ze geleerd hebben,
- portfoliomethode die bestaat uit verzameld werk van een leerling over een langere periode.
Door een combinatie van deze toetsmethoden zou een goed beeld verkregen moeten kunnen worden van de ‘persoonlijke bekwaamheid’ van een leerling.
Tot zover over competentiegericht onderwijs.

Wiskunde-examens op de computer: niet meer ver weg

Het is de bedoeling dat elke leerling in de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo (BBL) in 2007 een computergestuurd examen maakt voor de algemeen vormende vakken. Sinds 2003 wordt er op BBL-proefscholen geëxperimenteerd met dergelijke digitale examens. In 2006 doet het Cito een pilot op 40 scholen met een computerexamen in de kaderberoepsgerichte leerweg, met de bedoeling om in 2008 landelijk digitaal te examineren in de KBL (zie ook [2]).
Een dergelijk computerexamen vervangt de huidige papieren versie, en is gemaakt op grond van de ervaringen die opgedaan zijn in het project COMPEX (computers en examens). Dit project, dat draait vanaf 2002, is een samenwerkingsverband van de Citogroep, de CEVO en diverse scholen waarin experimenten met ICT in de centrale examens worden opgezet en uitgevoerd. Het doel van dit grootschalige project was om ervaring op te doen om een landelijke introductie van ICT-examens mogelijk te maken. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen IMEX- en CBT-examens: bij een IMEX-examen gaat het om de inzet van de computer als hulpmiddel bij examens op papier (bv. afspelen van een multimediabestand), bij een CBT-examen gaat het om een examen dat geheel via het beeldscherm aan de leerling wordt aangeboden (CBT = computer based test; de computer vervangt hierbij dus het papier).

Tijdens de workshop *Wiskunde-examens op de computer* noemde Anita de Bruijn van de Citogroep Amsterdam een paar redenen waarom het Cito nu de weg van CBT-examens is ingeslagen:

- De momenten waarop geëxamineerd kan worden, kunnen flexibeler gepland gaan worden. Je kunt je voorstellen dat elke school t.z.t. per vak kan beslissen wanneer eerste en tweede tijdvak afgenomen worden. Waarom zouden we alles tegelijk examineren? Waarom niet flexibeler plannen en bijvoorbeeld het vak Engels afnemen in februari en wiskunde in mei? Waarom pas beslissen welke herkansing gedaan wordt nadat het totaalplaatje duidelijk is? Het kan misschien al eerder, als een leerling nog 'in de stof zit'. Scholen krijgen meerdere versies van het centraal examen aangeleverd en kunnen binnen een bepaalde periode zelf bepalen wanneer ze het examen afnemen.
- Het lijkt voor leerlingen motiverender om computergestuurde dan papieren examens te maken. (Persoonlijk vraag ik me af of het een steekhoudend argument is als blijkt dat de digitale mogelijkheden van het Cito toch altijd achter de nieuwste mogelijkheden van de spelcomputers aanlopen omdat er zeer zorgvuldig op betrouwbaarheid getest moet worden, waardoor de programma's al weer achterhaald zijn voordat ze op de onderwijsmarkt verschijnen.)
- Op termijn krijgen digitale examens een meerwaarde boven de papieren examens vanwege de mogelijkheid van het toevoegen van videofragmenten, kleuren, animaties, applets en dergelijke. In de proefexamens spelen deze mogelijkheden nu nog geen rol van betekenis omdat alles gericht is op het 'veilig' houden van de examens (denk aan fraudegevoeligheid en het niet kwijt raken van antwoorden) waardoor er zeer voorzichtig ingezet wordt. Vanwege deze zwaarwegende eisen die aan veiligheid gesteld worden, heeft de Citogroep haar eigen programma's moeten schrijven ondanks het bestaan van een programma als Question Mark Perception; dit had te veel beveiligings- en implementatienadelen. De ervaringen die opgedaan worden met het schrijven van programma's zijn hoopgevend; de overtuiging is dat de ontwikkeling van computerexamens er toe zal leiden dat ze vanwege de ICT-toepassingen een meerwaarde zullen krijgen boven de papieren versies.

De ervaringen op de proefscholen zijn ondanks het nog grote aantal onbeantwoorde vragen en onopgeloste problemen, ook hoopgevend voor wat betreft de implementatie. Wel is er nog een aantal vakinhoudelijke struikelblokken voor het vak wiskunde. Een aantal opmerkingen hierover:
- Vanwege de context die voor leerlingen zichtbaar moet zijn als ze hun vraag maken, kan er maar één vraag per beeldscherm geprogrammeerd worden. Dit betekent dat leerlingen geen totaaloverzicht hebben over alle vragen per context.
- Er ontstaat soms ruimtegebrek op het beeldscherm als een opgave vereist dat zowel een foto als een grafiek als tekst tegelijkertijd in beeld zijn.
- Het tekenen van grafieken moeten leerlingen nog steeds op papier doen; ook het tekenen van kijklijnen en het opmeten van hoeken is technisch nog onmogelijk op de computer.
- Bij een groot aantal vragen kunnen leerlingen volstaan met het geven van een getal-antwoord. Deze antwoorden zijn automatisch scoorbaar. Bij andere vragen worden leerlingen geacht hun toelichting in een antwoordgebied te schrijven; deze antwoorden moeten handmatig nagekeken worden door de vakdocenten.
- Tot nu toe is geprobeerd om de digitale examens een afspiegeling te laten zijn van de papieren examens, waarbij praktische problemen er soms voor zorgden dat deze koppeling losgelaten moest worden.

Slotbeschouwing

Hierbij zou ik u willen aanraden om volgend jaar ook naar de Reehorstconferentie te gaan: boeiende lezingen en workshops, interessante ontmoetingen, informatie over de nieuwe ontwikkelingen binnen ons vak, en stof tot nadenken voor weken daarna. Want ik vraag me nog steeds af of de vakdidactici en onderwijskundigen die zich bezighouden met het ontwikkelen van competentiegericht onderwijs en de leden van de Citogroep die digitale examens ontwikkelen, wel op de hoogte zijn van elkaars bestaan. Misschien hebben ze elkaars bijdrage gehoord tijdens de Reehorstconferentie. Ik hoop het. Het zou toch wel heel jammer zijn als we in een klein land als Nederland twee parallel lopende ontwikkelingen uitzetten binnen ons onderwijs: het nadeel van parallelle lijnen is immers dat ze elkaar niet snijden. Alleen niet-Euclidisch zie ik dan nog een kruisbestuiving mogelijk. (Zo zie je maar, waar onverwacht de kansen weer voor het oprapen liggen.)
Ik zou er van harte voor willen pleiten dat we leerlingen die zich ontwikkelen binnen competentiegericht onderwijs de kans bieden om te laten zien waartoe ze in staat zijn aan het eind van hun schoolcarrière; het lijkt me stug dat dat mogelijk is in een getal-antwoord dat makkelijk scoorbaar is.

Bronnen

[1] Prof. Dr. Johan M.M. van der Sanden: Ergens goed in worden. Naar leerzame loopbanen in het beroepsonderwijs'. Oratie 12 maart 2004 (Fontys Hogescholen).
De digitale versie is te vinden op http://www.fontys.nl/pth/eindhoven/lectoraat.
[2] Ministerie van OC&W: Uitwerkingsnotitie examens voortgezet onderwijs. Dit rapport is te vinden op www.minocw.nl/brief2k/2004/doc/59215b.pdf.

Over de auteur

Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) is redacteur van Euclides en wiskundedocente aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt, in Amersfoort.

EEN SCHOOLONDERZOEK MET TI INTERACTIVE!

Interview met Epi van Winsen

[Henk Staal]

Over het pakket

TI Interactive is een computeralgebrapakket. Je kunt dit pakket allerlei wiskundige bewerkingen laten uitvoeren zoals haakjes wegwerken, vereenvoudigen, vergelijkingen oplossen, differentiëren, integreren en primitiveren, vermenigvuldigen van matrices. Je kunt ook grafieken laten tekenen van functies en krommen. Daarnaast kun je teksten toevoegen aan een document dat je maakt in TI Interactive. Dat geeft je de mogelijkheid oplossingen van een wiskundig probleem overzichtelijk in stappen te laten verlopen en elke stap te voorzien van commentaar. Je kunt ook lesmateriaal maken in TI Interactive. Er zijn redelijk wat mogelijkheden voor de opmaak, je kunt grafieken interactief maken door een schuifbalk op te nemen waarmee de invloed van een parameter op een grafiek zichtbaar wordt en je kunt ook allerlei zaken zoals figuren en animaties importeren. TI Interactive kun je zien als een forse uitbreiding van de grafische rekenmachine. De uitbreidingen zijn dan de betere grafische mogelijkheden, de computeralgebra, de mogelijkheden voor tekstverwerking en de mogelijkheid om figuren en animaties te maken en te importeren. Zie bijvoorbeeld **figuur 1 op pag. 374**.

TI Interactive is een product van Texas Instruments[1]. Dat is te zien aan de bediening van het wiskundige deel, dat lijkt op de bediening van de grafische rekenmachine van Texas Instruments.

Scholennetwerk

Om ervaring op te doen met de didactische mogelijkheden van TI Interactive organiseert APS Wiskunde een scholennetwerk. De deelnemende docenten gebruiken TI Interactive bij diverse wiskundeonderwerpen vanaf de derde klas.

TI Interactive wordt hoofdzakelijk ingezet bij wiskunde-B in havo en vwo. De deelnemers aan het scholennetwerk komen enkele keren per jaar bij elkaar om ervaringen uit te wisselen en plannen te maken voor experimenten. Eén van de deelnemende docenten is Epi van Winsen. Hij is wiskundedocent aan de Scholengemeenschap Sophianum te Gulpen en heeft in het afgelopen jaar voor de tweede keer een schoolonderzoek vwo-B afgenomen waarbij de leerlingen de opgaven uitwerkten aan de computer in TI Interactive. Voldoende reden om Epi enkele vragen voor te leggen[2].

Waarom een schoolonderzoek met TI Interactive?

In het examenprogramma staat ICT als verplicht onderdeel voor wiskunde. Ik vind het werken met een computeralgebrapakket bij wiskunde nuttiger dan werken met Word en Excel. Ik heb zelf veel belangstelling voor computeralgebra. Ik heb in het verleden al geëxperimenteerd met Derive in de klas. TI Interactive is een goede aanvulling op de grafische rekenmachine. Grafisch is TI Interactive natuurlijk veel sterker en als extra heb je de koppeling tussen de algebra en grafische weergaven. Leerlingen zien door het gebruik van TI Interactive vaak beter de grote lijn in een oplossingsproces. De stappen die je moet doen, komen duidelijker naar voren, omdat je het uitvoeren van berekeningen en manipuleren van formules door de computer laat doen. Ik heb gekozen voor een schoolonderzoek met TI Interactive omdat op die manier het werken met TI Interactive ook wordt beloond. Leerlingen ervaren dat ook zo. Het is geen vrijblijvend extraatje; je kunt er via het schoolonderzoek punten mee verdienen.

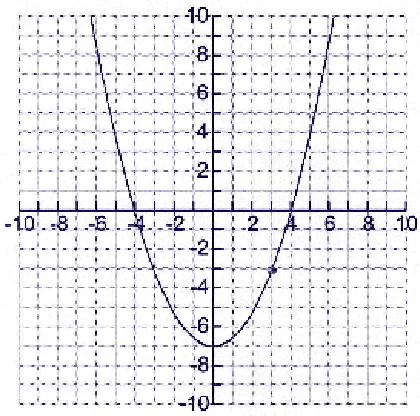
Welke rol speelt dit experiment in het beleid van de sectie?

Het experiment speelt zich af in vwo-5 en vwo-6 voor wiskunde-B en die groepen kwamen de laatste twee jaar geheel voor mijn rekening. Ik heb daarom het experiment alleen uitgevoerd. De sectie staat positief tegenover dit experiment. Ik heb voor de sectie ook een presentatie gehouden over het schoolonderzoek. In de derde klas doen we ook het een en ander met TI Interactive en daar is de hele sectie actief bij betrokken, collega's gebruiken daar ook het pakket in de klas. Bovendien gaat een collega van mij het komend cursusjaar vwo-5 wiskunde-B doen en ik verwacht dat hij dan ook met TI Interactive aan de slag zal gaan. Verder zijn de collega's inmiddels behoorlijk thuis in het pakket, want het wordt ook gebruikt bij het samenstellen van proefwerkopgaven. Met TI Interactive kun je snel allerlei alternatieven in een opgave doorrekenen en je kunt mooie grafieken maken die je kunt opnemen in proefwerkopgaven. Het experiment met TI Interactive past trouwens in het beleid van de sectie om de ICT-doelen in het examenprogramma serieus te nemen, niet omdat het moet, maar omdat we dat zinvol vinden. Het tweede deel van het schoolonderzoek bestond voor wiskunde-B12 uit meetkundeopgaven die uitgevoerd moesten

We kijken naar de volgende functie: define $f(x) = \dfrac{x^2}{c} - 7$

Met de schuifbalk kun je de waarde van c veranderen.

c = 2.3



FIGUUR 1

Opdracht 2 uit het schoolonderzoek

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 9$.

a Bereken de oppervlakte van vlakdeel V.
b Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam van V bij wentelen om de x-as.
c Bereken de x-coördinaat van het zwaartepunt van het omwentelingslichaam van V.

We maken het gebied V nu variabel. De rechtergrenslijn wordt nu de lijn $x = a$ ($a > 0$). We noemen dit gebied dan V_a. Hierboven is dus gewerkt met V_9.

d Laat zien dat de x-coördinaat van het zwaartepunt van het omwentelingslichaam van V_a een lineaire functie van a is.

FIGUUR 2

worden met Cabri. Op die manier kunnen leerlingen ook laten zien dat ze serieus het practicum met Cabri hebben doorgewerkt.

Is er buiten de sectie belangstelling voor dit experiment?

Alleen de wiskundesectie gebruikt TI Interactive. De schoolleiding staat wel positief ten opzichte van het experiment en stimuleert ook de deelname aan het TI Interactive scholennetwerk.

Hoe organiseer je zo'n schoolonderzoek met de computer?

We hebben twee computerlokalen met elk 30 computers. Voor het schoolonderzoek had ik één lokaal nodig. De computers staan redelijk ruim opgesteld. Je zou leerlingen ook naast elkaar kunnen zetten, maar dat was niet nodig. De computers zijn voorzien van een zogenaamde reborn-kaart. Dat betekent dat bij elke keer opstarten de door de systeembeheerder geïnstalleerde situatie op de C-schijf wordt hersteld. Leerlingen kunnen dus niets veranderen. Ze kunnen wel data wegschrijven naar een netwerkdrive of naar een floppy. Van TI Interactive is er helaas geen speciale netwerkversie. Misschien is het wel te installeren op een netwerk, maar dat hebben we niet geprobeerd. De systeembeheerder heeft het pakket op elke computer afzonderlijk geïnstalleerd.
De leerlingen kunnen tijdens het schoolonderzoek niet digitaal met elkaar communiceren. De systeembeheerder heeft de toegang tot internet afgeschermd tijdens het schoolonderzoek.
Leerlingen leveren hun werk in op een floppy.
Voor het geval dat hier iets mee mis gaat zetten ze hun werk bovendien op een netwerkdrive. Het is de verantwoordelijkheid van de leerlingen om te controleren dat hun werk inderdaad op twee plaatsen staat opgeslagen. Tot nu toe heeft dit geen problemen opgeleverd. Ik stel van tevoren vast aan welke kenmerken een uitwerking moet voldoen en daar is ook de puntentelling aan gekoppeld. Voor leerlingen is dit een doorzichtig systeem.
Bij de laatste keer heb ik leerlingen de gelegenheid gegeven om bij opgaven zogenaamde 'hulplijnen' te kopen. Dit zijn hints bij een opgave. Als ze niet uit de opgave kwamen konden ze, tegen inlevering van punten, hulplijnen krijgen. Opvallend was dat geen enkele leerling hier gebruik van maakte. Ze bleven tot het eind toe proberen om er zonder hulplijn uit te komen.

Hoe zijn leerlingen voorbereid op het schoolonderzoek?

Ze hebben in de derde klas een paar keer TI Interactive gebruikt. Aan het eind van klas 5 hebben ze in vier lessen een kennismakingspracticum gedaan met TI Interactive. In het begin van klas 6 hebben ze bij een serie opgaven die ze zelf al zonder computer gemaakt hadden, uitwerkingen van mij gekregen in TI Interactive. Van een serie andere opgaven moesten de leerlingen zelf met TI Interactive de uitwerkingen maken. De leerlingen konden zo beter de grote lijn in deze opgaven in de gaten houden. Het gewone rekenwerk (differentiëren, integreren en oplossen van vergelijkingen) konden ze aan TI Interactive overlaten. Denk hierbij aan het berekenen van de coördinaten van zwaartepunten van vlakdelen en omwentelingslichamen.
Enkele lessen direct voorafgaande aan het schoolonderzoek zijn volledig in het computerlokaal doorgebracht. In deze lessen werd geoefend met TI Interactive, maar ook met Cabri en VU-statistiek aan de hand van opgaven uit Getal en Ruimte.

Uitwerking van opdracht 2d door leerling A

De x-coordinaat wordt uitgerekend door

$$\frac{\int_0^9 \left(\pi\cdot x\cdot(f(x))^2\right)\,dx}{\int_0^9 \left(\pi\cdot(f(x))^2\right)\,dx}$$

$$\frac{45}{8}$$

Als je nu de 9 door een a vervangt en vervolgens de x-coordinaat laat bepalen zie je dat deze afhankelijk is van a met coefficient 0.625. Dus als a één groter wordt dan verschuift de lijn die V begrenst één naar rechts. x=a wordt dan x=a+1. Het zwaartepunt verschuift dan met 0.625 naar rechts. Deze verschuiving is constant omdat geldt x-zwaartepunt = 5/8*a. Zie hiervoor de onderstaande berekening. En de formule x=5/8*a is een lineaire functie.

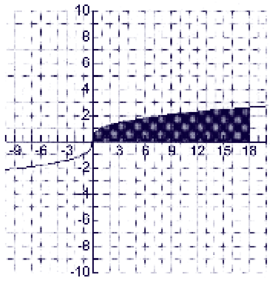
$$\frac{\int_0^a \left(\pi\cdot x\cdot(f(x))^2\right)\,dx}{\int_0^a \left(\pi\cdot(f(x))^2\right)\,dx}$$

$$\frac{5\cdot a}{8}$$

FIGUUR 3

Uitwerking van opdracht 2d door leerling B

Er is altijd dezelfde verhouding tussen de plaats van het zwaartepunt op de x-as en de grootte van a. Dit loopt dus lineair in elkaar op. Als je a nu 2x zo groot maakt zal de plaats van het zwaartepunt ook 2x zo groot worden. Ik neem a=18.



De plaats van het zwaartepunt zal nu ongeveer bij x=10 liggen.

$$\text{solve}\left(z\cdot\int_0^{18}\left(\pi\cdot f(x)^2\right)dx=\int_0^{18}\left(\pi\cdot x\cdot(f(x)^2)\right)dx,\ z\right)$$

$$z=\frac{45}{4}$$

De x-coordinaat van het zwaartepunt is nu dus:
approx(*ans*)

$$z=11.25$$

Bij a=9 was de xz 5.625. De xz van a=18 moet dus zijn:
2·5.625

11.25

Deze waarde klopt met de hierboven berekende waarde.

FIGUUR 4

Je hebt nu twee keer zo'n schoolonderzoek afgenomen. Wat zijn je conclusies?

Ik ben enthousiast en ga er zeker mee door. Ik denk dat ik mijn eigen enthousiasme voor het werken met computeralgebra heb overgedragen aan de leerlingen. Ze reageren positief. Vooral de wat zwakkere leerlingen vinden het een voordeel dat ze bij dit onderdeel niet verstrikt raken in rekenpartijen, maar zich kunnen concentreren op de vraag welke stappen ze moeten zetten om een goede oplossing te krijgen. De leerlingen zeggen in het algemeen dat ze door het gebruik van TI Interactive beter zien waar het om gaat.
Een bijkomend voordeel van TI Interactive is dat je andere soorten vragen in je schoolonderzoek kunt stellen, zoals: *'Bepaal een vierdegraads functie waarvan beide coördinaten van de twee buigpunten gehele getallen zijn.'* Een zeer open opgave. Deze opgave is zonder computeralgebrapakket ook wel uit te voeren, maar dan zou ik de vraag veel te moeilijk vinden. Met TI Interactive hebben de leerlingen de mogelijkheid om redeneringen af te wisselen met proberen, aanpassen en controleren, en zo puzzelend aan een oplossing te komen. Verrassend vond ik de uitwerking van een leerling die TI Interactive de opdracht gaf om –2 keer te differentiëren en daarmee de beginfunctie twee keer primitiveerde.

Heb je plannen om TI Interactive vaker te gebruiken?

Ja, ik ben nu bezig om uit te zoeken hoe en waar TI Interactive in klas 4 gebruikt kan worden.
De activiteiten met TI Interactive zijn voor mij de invulling van het zebra-onderwerp. Zolang die ruimte er is zal ik die blijven vullen met het onderwerp computeralgebra. Stimulerend is ook wat sommige leerlingen kunnen. Neem bijvoorbeeld de uitwerking van een leerling van opdracht 2d (zie figuur 2 en 3). Dat is heerlijk om te zien. Goed gedocumenteerd, goede formulering van gedachten. Illustratief voor het feit dat computeralgebra niet alles overneemt, is een uitwerking van een andere leerling (zie figuur 4). Dat de x-coördinaat van het zwaartepunt van het vlakdeel begrensd door de x-as, de grafiek van f en de de lijn $x = a$ lineair van de grens a afhangt, is natuurlijk niet met een steekproefje aan te tonen.

Een aardige extra vraag voor de lezers naar aanleiding van opdracht 2d is trouwens:
Toon aan dat alle functies $g(x) = x^n$ voor alle $n > 0$ dezelfde lineariteitseigenschap hebben als $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$: de x-coördinaat van het zwaartepunt van het omwentelingslichaam is een lineaire functie van a. Is hier ook een meetkundige verklaring voor?

Noten

[1] Vanaf http://education.ti.com/us/product/software/tii/down/download.html is een trialversie van het pakket te downloaden.
[2] Commentaar op dit artikel is welkom bij Henk Staal (h.j.p.staal@planet.nl) en Epi van Winsen (ej.van.winsen@sophianum.nl).

Over de auteur

Henk Staal werkt voor APS Wiskunde en de Educatieve Faculteit Amsterdam. Hij heeft ervaring opgedaan met het gebruik van de computeralgebrapakketten Maple, Studyworks en TI Interactive door het maken van lesmateriaal, het gebruik van computeralgebra in wiskundelessen aan de EFA en het via het APS verzorgen van cursussen voor wiskundedocenten over computeralgebra.

Meetkunde en economie

[Rob Bosch]

In overeenstemming met de historie eerst de meetkunde en daarna de economie.

Gegeven is een driehoek. Van een parallellogram liggen de hoekpunten op de zijden van de driehoek. Wat is de maximale oppervlakte van een dergelijk ingeschreven parallellogram?

Omdat alle hoekpunten van het parallellogram op de zijden van de driehoek liggen, bevat één zijde van de driehoek twee hoekpunten van het parallellogram (in figuur 1 is dit zijde *AB*). De driehoeken *GFC* en *ABC* zijn gelijkvormig en dus geldt $\frac{GC}{AC}=\frac{GF}{AB}=r$.
Als *h* de hoogte is van *ABC* en *AB* = *c*, dan is *GF* = *DE* = *rc*. Voor de hoogte *h'* van *GFC* geldt dan *h'* = *rh*. De hoogte van het parallellogram is dus *h* – *hr*.
De oppervlakte van het parallellogram *DEFG* is nu $rc(h - hr) = hc(r - r^2)$.
De maximale oppervlakte wordt bereikt als $r - r^2$ maximaal is. Het maximum hiervan is $\frac{1}{4}$ voor $r=\frac{1}{2}$. Dus het grootste parallellogram heeft een oppervlakte $\frac{1}{4}hc$, hetgeen gelijk is aan de helft van de oppervlakte van de driehoek.

In figuur 2 zijn twee parallellogrammen met maximale oppervlakte getekend.

Stelling 1. *De maximale oppervlakte van een in een driehoek ingeschreven parallellogram is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de driehoek.*

Uiteraard geldt deze stelling ook voor een ingeschreven rechthoek. Als we in een rechthoekige driehoek zo'n rechthoek beschrijven op de rechthoekszijden, dan zijn de andere zijden van de rechthoek middenparallellen van de driehoek (zie figuur 3).

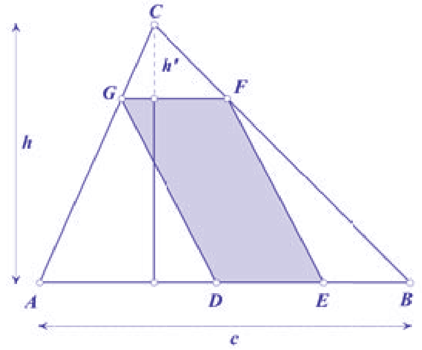
Nu de economie. De bovenstaande stelling kunnen we heel aardig toepassen in vraagstukken over maximale opbrengst en maximale winst. In de schoolboeken, met name voor het profiel E&M, komen we bijvoorbeeld de volgende opgave tegen.

De relatie tussen de prijs *p* en de omzet *q* wordt gegeven door *p* = –6*q* + 84. De kosten zijn *K*(*q*) = 12*q* + 100.
a. Bereken de maximale opbrengst.
b. Bereken de maximale winst.

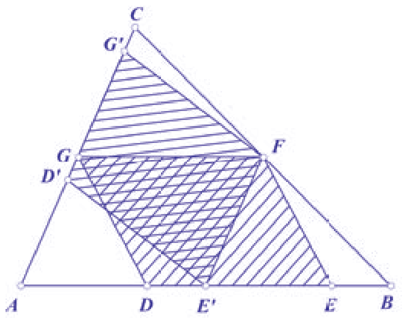
De gebruikelijke methode voor onderdeel a is het opstellen van de formule voor de opbrengst om daarna het maximum van de kwadratische functie te bepalen.
De opbrengst *R* is uiteraard
$R=pq=q(-6q+84)=-6q^2+84q$.
Het maximum van deze functie vinden we bij
$q=\frac{84}{12}=7 \quad (q=-\frac{b}{2a})$. De bijbehorende prijs volgt na substitutie van *q* = 7 in de vraagfunctie, waarna de maximale opbrengst $R=7\cdot 42=294$ volgt.

Dit resultaat is direct uit de grafiek van de *vraagfunctie* *p* = –6*q* + 84 af te lezen. Bij een gegeven hoeveelheid *q* is de opbrengst *R* = *pq* de oppervlakte van de rechthoek *OABC* (zie figuur 4). De meetkundestelling zegt dat de maximale oppervlakte van de rechthoek gelijk is aan de helft van de oppervlakte van de rechthoekige driehoek.
De maximale opbrengst is dus $R_{max}=\frac{1}{4}\cdot 84\cdot 14=294$.
Klaar!
Omdat *AB* en *BC* middenparallellen zijn, volgt ook onmiddellijk dat $q_{max} = 7$ en $p_{max} = 42$.
We zien dat een plaatje van de vraagfunctie voldoende is om het vraagstuk direct te kunnen oplossen.

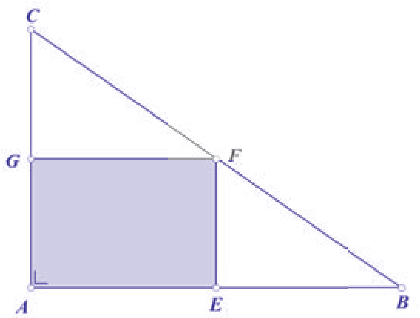
De berekening van de maximale winst is iets lastiger. Eerst weer de standaardmethode. De winst *W* wordt gegeven door *W* = *R* – *K*, dus
$W=q(-6q+84)-(12q+100)=-6q^2+84q-12q-100=$
$-6q^2+72q-100$.
Het maximum van deze kwadratische functie vinden we bij $q=-\frac{72}{-12}=6$.
Substitutie van *q* = 6 in de vraagfunctie geeft de prijs $p=-6\cdot 6+84=48$, waarna de maximale winst $W_{max}=6\cdot 48-6\cdot 12-100=116$ volgt.
Het lijkt dat we hier onze meetkundestelling niet kunnen gebruiken. Echter door iets anders tegen het probleem aan te kijken, blijkt dat toch het geval. Ten eerste merken we op dat bij de maximale winststrategie de vaste kosten (100) geen enkele rol spelen. Deze kosten hebben we misschien al maanden



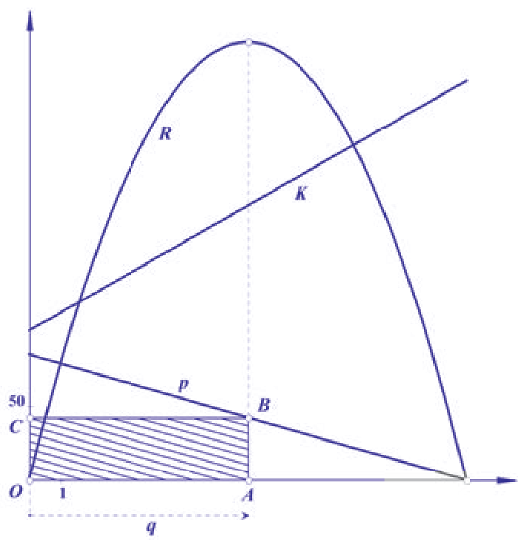
FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3



FIGUUR 4

geleden betaald en beïnvloeden derhalve onze huidige strategie niet. De economen spreken hier van *sunk costs*, en dergelijke kosten spelen geen rol bij de winstmaximalisatie. Blijft over de winst per product, w. Dit is de opbrengst per product min de kosten per product (zeg w = *verkoopprijs - inkoopsprijs*). Deze is hier (zie figuur 5): $w = -6q + 84 - 12 = -6q + 72$.
De maximale winst $W^* = q_w$ (W^* is de winst afgezien van de vaste kosten) is weer de helft van de oppervlakte van de getekende driehoek, en dus is $W^*_{max} = \frac{1}{4} \cdot 72 \cdot 12 = 216$.
O ja, we hadden nog 100 vaste kosten, dus de werkelijke winst is $W = 116$.

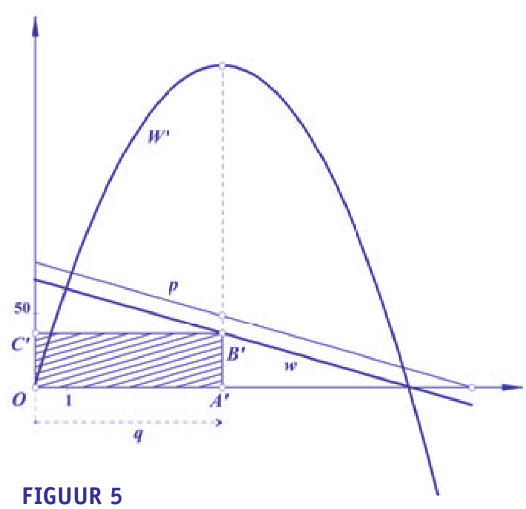
Ook hier is direct af te lezen dat $w_{max} = 36$ en $q_{max} = 6$.
De marge per product w is gelijk aan 36. Aangezien de variabele kosten 12 per product zijn, wordt de bijbehorende prijs $p = 48$.

We zien dat twee simpele plaatjes en enig begrip van de economie voldoende zijn om (uit het hoofd) antwoord te geven op de gestelde vragen.

In (micro)economieboeken staan heel veel verhelderende plaatjes met grafieken van bijvoorbeeld de vraagcurve en rechthoeken die de opbrengst weergeven, grafieken van de marginale opbrengst en de marginale kosten etc. Vaak wordt met een meetkundebewijsje (gelijkvormigheid en congruentie) de relatie tussen de diverse grootheden aangetoond. In onze wiskundeboeken staan in dit verband veel grappige cartoons (Anja en Frank op het strand achter een ijscokraam). Wellicht is het een idee om deze cartoons te vervangen door ook voor economen relevante plaatjes.

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is redacteur van Euclides en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.



FIGUUR 5

FEITENVEL KENIA

Twee projecten van het Wereldwiskunde Fonds

Conrector van Kimabole: ‘Nothing like this has ever happened before, praise the Lord!’

[Gerben van Lent]

Land

Kenia, Oost Afrika
Aantal inwoners: 32 miljoen
In Kenia is het onderwijs als volgt georganiseerd:
8 jaar primary school (basisonderwijs),
4 jaar secondary school (middelbare school),
4 jaar tertiair onderwijs: polytechnische school of universiteit.
70% van de leerlingen heeft een lagere school opleiding, 25% middelbare school en minder dan 5% volgt hoger onderwijs.

Projectscholen

Stichting Verkaart
School voor Wezen, ten zuiden van Mombassa.

Stichting Harambee
Kimabole Secondary School, in westelijk Kenia.

Meer informatie

- www.verkaarthelptkenia.nl
- www.harambee-kenya-nederland.nl

Projectsteun

School voor Wezen

Bedrag: € 2500,00
Leermiddelen:
– 100 geodriehoeken
– 100 passers
– 100 TI-30 eco rekenmachines
– 2 bordpassers
– 2 bordgeodriehoeken
– 2 bordlinialen
– 2 ruitjesborden A0
– 1 set met 5 stuks 3D-modellen

Kimabole Secondary School

Bedrag: € 2198,00
Leermiddelen:
– 425 wiskundeboeken
– 10 bordgeodriehoeken
– 10 gradenbogen
– 10 passers
– 40 kleine tekensets
– 1 rekenmachine

DE VOLDOENDE VOORBIJ

[Victor Thomasse]

Zich van geen kwaad bewust en zonder enige gêne vraagt Ton me of ik ook kinderen *of misschien wel kleinkinderen* heb. Tja, iedereen ouder dan dertig moet wel érg oud voor mijn leerlingen zijn. Zoals sommige verre culturen maar een paar telwoorden hadden, gevolgd door 'veel', zo ben ik voor hen 'veel jaren oud'. 'Nee Ton, ik ben nog geen opa, ik ben pas drieënveertig'. Terwijl ik het zeg bedenkt de rekenmeester in mij dat het dus eigenlijk best zou kunnen. Drieënveertig is tenslotte twee keer twintig plus nog wat. Ja, in die verre culturen was ik vast al lang grootvader. Bijna overgrootvader wellicht.
Toch moet ik nog wel een beetje jong zijn, troost ik me. Zo herinner ik me dat in mijn tijd, toen ik nog leerling was en alle docenten stoffige oude mensen, er al iets van beroepskeuzebegeleiding was. En dat is toch een modern begrip. We moesten vragenlijsten invullen en een bepaalde vraag is me altijd bijgebleven: 'Wat vind je belangrijker, werken met mensen of met getallen?' Echt, zo stond het er. Rare fantasieën krijg ik er bij. Over wereldvreemde mannetjes die eenzaam in kamers zitten tussen wiskundeboeken en computeruitdraaien en voor wie de getallen hun enige vrienden zijn. Soms koketteer ik met dat beeld als ik tegen mijn leerlingen iets zeg als: 'Dat interesseert me natuurlijk niet, jullie weten toch dat meneer Thomasse alleen van getallen houdt!' Gelukkig weten ze wel beter. Hoewel... zo'n Ton zal toch wel door een dergelijke opmerking heen kijken?

Getallen zijn belangrijk voor leerlingen, al is het maar omdat rapportcijfers er uit bestaan. De eerste periode is nog eenvoudig in te zien hoe zo'n cijfer tot stand komt: schriftelijke overhoringen tellen één keer mee en proefwerken twee keer. Maar de hele tweede periode telt weer twee keer zo zwaar mee als de eerste en dat maakt de berekening al moeilijker. Nu we tegen het einde van het jaar de vierde periode aan het afsluiten zijn, een periode met wéér een eigen afwijkend gewicht, is het te ingewikkeld geworden voor Yanni. 'Meneer', vraagt ze, 'wat moet ik op ons laatste proefwerk halen om nog een voldoende op mijn rapport te hebben?'
Op dat moment – toegegeven - had ik verder moeten denken dan de cijfers van Yanni. Maar in plaats daarvan bedenk ik iets 'slims'. Hoe ik er ook zonder rekenen snel achter kan komen. Als we de cijfers invoeren, toont ons geautomatiseerd systeem namelijk meteen het rapportcijfer. Ik hoef alleen te proberen bij welk getal het gemiddeld nog net op 5,5 uitkomt. 'Dat zoek ik voor je uit!', hoor ik mezelf zeggen en zit in mijn gedachten al achter het toetsenbord.
Maar toen hadden alle alarmlampjes al bij me moeten gaan branden.

'Een 6,2 is voldoende', zeg ik de volgende dag tegen Yanni. Ze is blij met de informatie. Voor haar was de berekening een onbegrijpelijk geheel waar cijfers in en uit kwamen en waarbij je altijd maar moest hopen op een goed rapportcijfer. Beter had ik haar kunnen laten zien hoe ze het zelf had kunnen uitrekenen. Maar nee, ik moest zo nodig weer iets slims bedenken: door de computer te gebruiken had ik mijzelf immers mooi een berekening bespaard?
'Wat had ie?', vraagt Mieke haar, als ze naar haar plaats loopt. En even later gaat de vinger van Mieke omhoog en volgt de vraag wat zíj nog moet halen voor de begeerde voldoende. Een onvermijdelijke vraag, besef ik nu. Met de onvermijdelijke gevolgtrekking dat het 'niet eerlijk' is als ik alleen aan Yanni deze service verleen. Zodat na aandringen van steeds meer leerlingen ik hun rechtvaardigheidsgevoel honoreer en mijzelf hoor beloven het voor iedereen uit te zoeken.

Nog diezelfde dag weet ik door inklemmen te bepalen wat elke leerling zou moeten halen voor een passend cijfer op het eindrapport. Maar nu kijk ik – zuchtend - veel verder dan de cijfers.

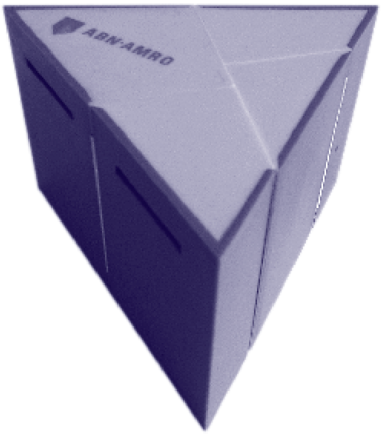
'Dus als ik het goed begrijp', vraagt dezelfde Ton, met ongeloof in zijn stem, 'heb ik sowieso een 6 als eindcijfer en alleen een 7 als ik een 8,6 haal?' Dat kan ik niet ontkennen, en inderdaad, een 8,6 is erg hoog. 'Maar niet onmogelijk', voeg ik toe, 'en zo moeilijk is het laatste hoofdstuk niet. Dus zie het maar als een uitdaging om in de laatste twee weken je uiterste best te doen.'
Nou, daar kwam ik nog redelijk mee weg. Helaas is dat niet zo bij twee jongens die toch al weinig deden en nu doorkrijgen dat ze met zo'n 8,6 - ja zelfs met een 10 - geen voldoende meer kunnen halen op hun eindlijst. Een van hen, de stoerste, vindt het 'wel lachen' en zakt onderuit in zijn stoel. Ook Patricia, die wél altijd hard werkt, begrijpt niet waarom ze haar best nog moet doen. De getallen wijzen uit dat ze hoe dan ook een 7 krijgt, ongeacht haar laatste cijfer.
Dat belooft niet veel goeds voor de lessen die nog gaan komen.
Werken met alleen getallen, dat lijkt me op dit moment zo gek nog niet.

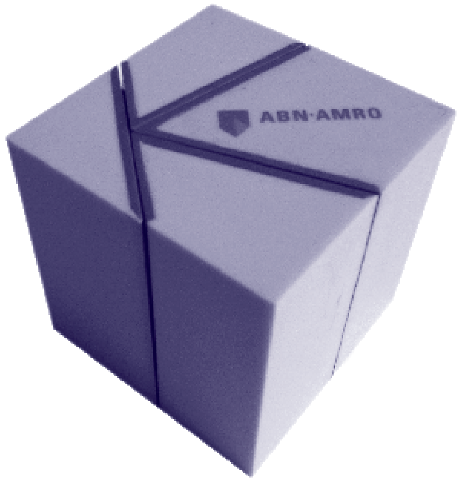
Over de auteur

Victor Thomasse (e-mailadres: v.thomasse@chello.nl) haalde zijn bevoegdheid Nederlands al in 1983, maar is daarna vooral in het bedrijfsleven actief geweest. Sinds ruim een jaar werkt hij weer in het onderwijs; hij heeft intussen de eerstegraads opleiding wiskunde afgerond. Momenteel volgt hij de lerarenopleiding natuurkunde.

VAN VIERKANT NAAR GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK

[Rob van Oord]





Spaarpot

Enige tijd geleden kreeg ik van mijn leerlingen een spaarpot van een zekere bank in handen. In deze spaarpot zitten drie ruimtes voor spaarcenten en een loze ruimte. Al scharnierend kun je er een kubus van maken of een driezijdig prisma met een gelijkzijdige driehoek als voorkant.

Het fascinerende aan dit ontwerp is dat je, wanneer je naar het vooraanzicht kijkt, kennelijk een vierkant in vier stukken kunt verdelen die (scharnierend) kunnen worden omgelegd tot een gelijkzijdige driehoek.

Je kunt je afvragen hoe iemand zo iets verzint, maar ook hoe je zelf de vier stukken in het vierkant kunt construeren en dan kunt nagaan of het echt klopt. In dit artikel beschrijf ik eerst hoe de vier stukken van het vierkant geconstrueerd moeten worden. Daarna volgt het bewijs dat deze stukken samen precies tot een gelijkzijdige driehoek kunnen worden gelegd.

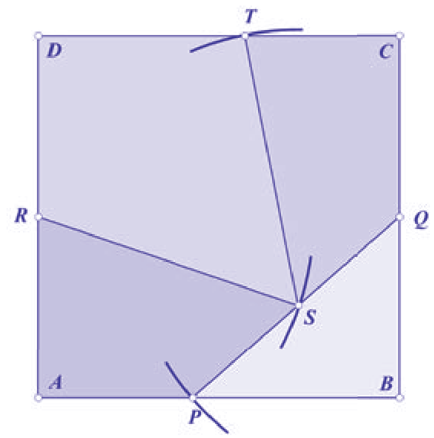
De lezer wordt door mij uitgedaagd (zo u wilt, uitgenodigd) om na het lezen van de constructie met een zelf gevonden bewijs te komen[1]. Onder de inzenders loof ik een beloning uit voor het fraaiste bewijs.

Start

Vooraf komen enkele aannames en berekeningen. Teken vierkant *ABCD*. Noem de zijde van het vierkant r en de zijde van de gelijkzijdige driehoek z.

De oppervlakte van het vierkant is dan r^2, de oppervlakte van de driehoek $\frac{1}{2}\cdot z\cdot\frac{1}{2}z\sqrt{3}=\frac{1}{4}z^2\sqrt{3}$.

Omdat de oppervlakten van het vierkant en de gelijkzijdige driehoek gelijk zijn, kun je z nu uitdrukken in r:



FIGUUR 1

$z=\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}r$ en $h=\frac{1}{2}z=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}r$

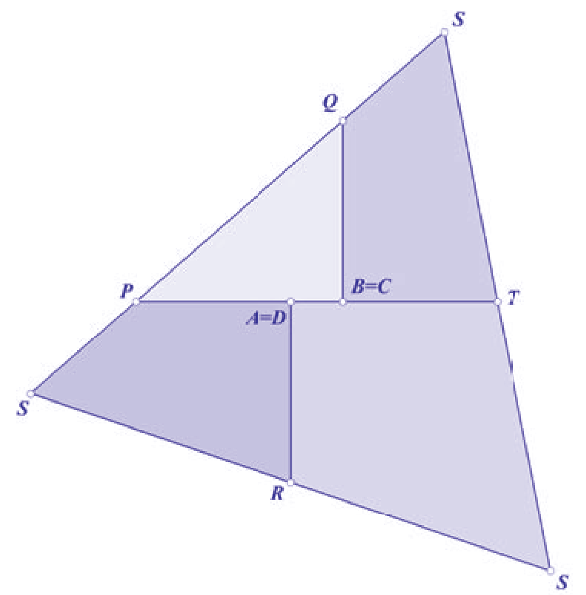
Zo hoort bij r = 16 cm de waarde $h \approx$ 12,16 cm.

Nu volgt de constructie.

1. Teken een vierkant *ABCD* met zijden van r (bijvoorbeeld 16 cm).
2. Teken Q als het midden van BC en R als het midden van AD.
3. Cirkel vanuit Q de lengte h (dat is dan 12,16 cm) om naar AB; het punt op AB dat je krijgt, noem je P. Trek PQ.

4. Cirkel vanuit R de lengte h om naar PQ; het punt op PQ dat je krijgt, noem je S. Trek RS. (N.b. Het punt S lijkt het midden te zijn van PQ, maar dat is net niet zo. Later meer daarover.)
5. Cirkel tenslotte vanuit S de lengte h om op CD; het punt op CD dat je krijgt noem je T. Trek ST.

Als je bovenstaande constructie uitvoert (zie figuur 1) en dan de vier stukken uitknipt, dan kun je van een vierkant een gelijkzijdige driehoek maken. Om het bewijs goed te kunnen snappen is het handig als je eerst een vierkant op deze manier in vier stukken verdeelt en de stukken uitknipt. Leg ze tegen elkaar als vierkant. Draai de stukken nu buitenom terwijl je er steeds voor zorgt dat de punten bij Q, R en T tegen elkaar blijven liggen. Gebruik eventueel een markeerstift op de zijden met lengte h om te zien waar die naar toe gaan, en ook (met andere kleuren) de lijnstukken SP en SQ.
Wanneer je de stukken helemaal buitenom scharniert, dan ontstaat een gelijkzijdige driehoek SSS (zie figuur 2).



FIGUUR 2

Past het?

De vraag is nu of de op deze manier geconstrueerde stukken na het scharnieren wel echt tegen elkaar passen en of ze inderdaad een gelijkzijdige driehoek vormen.
Eerst een beetje meetkunde.
$BQ = QC$ en $\angle PBQ = \angle TCQ = 90°$; dus valt na het scharnieren van driehoek PBQ (rechtsom om Q) B precies op C en liggen P, C (= B) en T op één lijn. Zo scharniert ook A (linksom om R) naar D en liggen P, D (= A) en T ook op één lijn.
Nu moet je nog aantonen dat $PB + CT = PA + DT$.

Als dit zo is, dan sluiten SP en PQS aan.
Omdat in het vierkant $\angle BPQ + \angle APS = 180°$, is dat ook het geval in driehoek SSS. Daarmee liggen de stukken SP, PQ en QS op één lijn en hebben ze samen lengte z. De zijden SRS en STS zijn evident ook z lang, dus is driehoek SSS gelijkzijdig.
Zoals gezegd moet je nog bewijzen dat $PB + CT = PA + DT$.
Nu is:

$$PB + CT + PA + DT = AP + PB + CT + TD = AB + CD = 2r$$

Dit kan alleen als $PB = DT$. Maar dan zou driehoek PBQ congruent moeten zijn met driehoek TDR, en moet ook $RT = PQ = h$ zijn. In dat geval zou je moeten bewijzen dat driehoek RST gelijkzijdig is.
Voor het gemak van het bewijs zou je in stap 5 van de constructie vanuit R de lengte h moeten omcirkelen naar CD; noem ook nu het punt op CD dat je krijgt T. Ten eerste is dan $RS = RT = h$, dus is driehoek SRT gelijkbenig.
Als $\angle SRT = 60°$ dan is driehoek SRT gelijkzijdig (tophoek in gelijkbenige driehoek).
Maar ook zijn PBQ en TDR dan congruent (ZZR), en dus is $PQ // TR$. Als nu $\angle RSP = 60°$, dan is $\angle SRT = \angle RSP = 60°$ (Z-hoeken) en ben je klaar.
Dus bewijzen dat het echt klopt, komt eigenlijk neer op het bewijzen dat $\angle RSP = 60°$.
Wie durft het aan?
Elders in dit nummer (zie pagina 386) staat een bewijs.

In elk geval kunt u nu zelf een leuke puzzel van vier stukjes (bijvoorbeeld van karton) maken waarmee de leerlingen zowel een vierkant als een gelijkzijdige driehoek kunnen leggen. Ook leuk om te gebruiken tijdens open-huis-dagen voor ouders.

Noot

[1] Oplossingen kunnen gestuurd worden naar Rob van Oord, Lindengaarde 11, 2742 TP Waddinxveen, of naar robvanoord@tiscali.nl.

Noot van de redactie

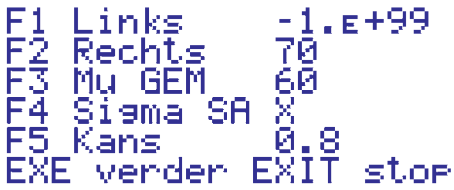
Honderd jaar geleden, op 17 mei 1905, werd dit probleem door Henry Ernest Dudeney (1857-1930) voor het eerst in algemene vorm besproken op een vergadering van de Royal Society. Daaraan voorafgaand had hij het, als puzzel, gepubliceerd in het blad 'Weekly Dispatch' (6 april 1902, met een oplossing op 4 mei 1902). Ook Greg Frederickson schreef erover, en wel in zijn fraaie boek 'Dissections: Plane and Fancy' (Cambridge University Press, 1997).

Over de auteur

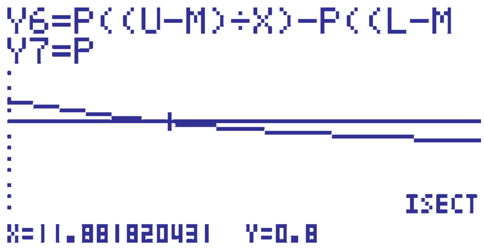
Rob van Oord is sinds 1974 werkzaam als docent wiskunde, (nu) op het Coenecoopcollege in Waddinxveen. Hij is mede-auteur van boekje 11 uit de Zebra-reeks, 'Schuiven met auto's, munten en bollen'.

MEER GRAFISCHE REKENMACHINE

[Simon Biesheuvel]



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Inleiding

In dit artikeltje wil ik laten zien hoe het wiskundeonderwijs door de komst van de rekenmachine en de grafische rekenmachine (GR) veranderd is. Door extrapolatie probeer ik een bijdrage te geven aan de mogelijke inhoud van het wiskundeonderwijs in de Tweede fase vanaf 2007 voor alle wiskunde behalve de wiskunde voor NT in het vwo.

Hoe het ging

Jaren terug lieten we leerlingen $\sqrt{300}$ benaderen met $\sqrt{3}\times\sqrt{100}=\sqrt{3}\times 10$. $\sqrt{3}$ zochten ze op in een tabellenboek en vermenigvuldigen met 10 deden ze uit hun hoofd. Hierbij werd een zinvolle splitsing gebruikt van een wortel in een product van twee wortels. Die regel zat er dan ook goed in. Ondanks het nut van deze bewerking ken ik geen docenten die hun leerlingen deze methode nog aanleren en $10\sqrt{3}$ op de rekenmachine laten intypen.

In die tijd ging cos 440° als volgt:
cos 440° = cos 80° = sin 10°
en dat laatste zochten de leerlingen op in een tabellenboek (met hoeken tot 45°). Ze gebruikten hierbij twee regels, die ze dus heel goed moesten kennen. Ondanks het nut van het kennen van deze bewerkingen, ken ik geen docenten die hun leerlingen deze methode nog aanleren.

Hoe het gaat

Bij sommige berekeningen met de GR is de gebruikte methode per docent wisselend.
Neem als voorbeeld de volgende opgave:

Bereken de kans bij een normale verdeling met gemiddelde 60 en standaardafwijking 20 op een uitkomst tussen 30 en 70.

Deze gegevens werden vroeger omgezet in $z=\frac{30-60}{20}=-1{,}5$ en $z=\frac{70-60}{20}=0{,}5$, via een tabel zochten de leerlingen twee kanswaarden op en het verschil ervan was de gevraagde kans.
Dit kan op een GR berekend worden via het invoeren van de getallen 30, 70, 60 en 20 en dan volgt direct het antwoord.
Vreemd genoeg ken ik wél enige docenten die de z-waarden nog steeds laten berekenen, en de opgave vervolgens oplossen door de getallen –1,5; 0,5; 0 en 1 in te voeren in de GR. Niet veel docenten laten dit zo doen en dit gebruik zal wel slijten, denk ik. Het overbodige van deze laatste methode is van dezelfde orde als de wortel- en de cosinus-methoden die hierboven staan en ook niet meer gebruikt worden. Het is dus blijkbaar een kwestie van tijd.

Nog even twee varianten op deze opgave:

Bereken de standaardafwijking bij een normale verdeling met een gemiddelde van 60, waarbij de kans op uitkomsten onder de 70 gelijk is aan 80%.

Vroeger zocht een leerling 0,8 op in een tabel, las de bijbehorende z-waarde af en berekende met $z=\frac{70-60}{SD}$ de standaardafwijking.
Vreemd genoeg ken ik heel veel docenten die dit op de GR nog net zo laten doen: via de inverse normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1 en een kans van 0,8. De GR levert dan een z-waarde. De verdere berekening gaat net zoals het vroeger ging.
Er zijn ook docenten die bij de normale verdeling de getallen -10^99, 70, 60 en x laten invoeren. Daarna definiëren ze op de GR een functie die aan iedere x-waarde de bijbehorende kans koppelt. Dan laten ze op een goed gekozen domein de bijbehorende grafiek plotten en daarna kom je heel eenvoudig aan x via het snijpunt van de kansgrafiek en de lijn y = 0,8 (zie figuur 1 en figuur 2). Sommige grafische rekenmachines kunnen dit vrijwel direct plotten, de CFX-9850 van Casio kan dit via een programmaatje[1]. Het is toegestaan dit

programmaatje in de GR mee te nemen naar het Centraal Examen.

Bereken de standaardafwijking bij een normale verdeling met een gemiddelde van 60, waarbij de kans op uitkomsten tussen 10 en 70 gelijk is aan 80%.

Nu wordt de methode met de z-waarden ineens veel moeilijker. De plot-methode is in dit geval echter net zo eenvoudig te gebruiken als in de bovenstaande berekening. Op deze manier is de berekening van linker- of rechtergrens, gemiddelde of standaardafwijking op één manier uit te voeren. Er zijn docenten die de plot-methode nog niet gebruiken, maar ik denk dat dat een kwestie van tijd zal zijn.
De methode met de z-waarden was een oplossing in een situatie dat er maar één tabel gebruikt kon worden voor alle normale verdelingen, namelijk die van de standaardnormale verdeling. Door de komst van de GR zijn er in feite eindeloos veel tabellen ingebouwd ín de GR en is de noodoplossing, het gebruik van z-waarden, overbodig geworden.

Op den duur vindt iedere docent het tegenover de zwakkere leerlingen toch wat flauw om de GR niet te laten gebruiken. Op een workshop die ik in december 2004 heb gegeven op de RuG-wiskundelerarendag in Groningen, bleek een aantal docenten wél graag de wiskundige achtergrond van oplossingen te willen uitleggen aan hun leerlingen, maar stapte vrijwel iedereen daarna over op een rekenmethode die zo eenvoudig mogelijk op de GR te doen is. Als je tijdens een tweede correctie merkt dat een eenvoudiger berekening via de GR op een andere school goed scoort, is overstappen op zo'n berekening snel gedaan. Zo kan er meer tijd besteed worden aan het zoeken naar wiskundig relevante gegevens in een opgave. Neem bijvoorbeeld de opgave 'Examenresultaten' uit het Centraal Examen vwo 2004 wiskunde-A12, waarbij veel leerlingen niet wisten of het ging om een binomiale dan wel een normale verdeling.

Tot zover twee voorbeelden van hoe het ging in het wiskundeonderwijs en twee voorbeelden van hoe het nu soms al gaat en hoe het in de toekomst waarschijnlijk door iedereen gedaan zal worden.

En wat het mag worden

Dan ben ik nu toe aan wat het van mij mag worden in het wiskundeonderwijs, de extrapolatie dus. Hiermee heb ik het differentiëren op het oog. Leerlingen havo/vwo wiskunde-A12 en -B moeten machtsfuncties kunnen differentiëren. Een aantal van hen moet ook exponentiële functies en logaritmische functies kunnen differentiëren en de productregel, quotiëntregel en kettingregel kennen. Differentiëren gaat over hellingen en/of snelheden. Leerlingen moeten regels kennen om hellingen te berekenen, maar het toepassen van de regels heeft geen enkel verband met het doel waarvoor ze worden gebruikt. Het is een regel die je uit je hoofd moet leren of van de formulekaart moet halen.
Zou het niet een heel goed idee zijn om alle leerlingen, behalve degenen in het vwo-NT-profiel, vanaf 2007 te laten werken met een GR met een Computer Algebra Systeem (CAS)? De leerlingen beschikken dan wel over de exacte afgeleide, maar hoeven geen (voor hen) 'vreemde' regels te leren om aan die afgeleide te komen. Het feit dat leerlingen dan geen differentieerexercities meer hoeven te doen, valt over een paar jaar vast wel in de categorie wortel-berekenen. Voor leerlingen vwo wiskunde-B voor NT is het kennen van de differentieerregels volgens mij wél nuttig. Er moeten toch wel een paar mensen op de wereld rondlopen die zelf kunnen differentiëren.

Natuurlijk moeten we wel nagaan welke problemen dit kan geven bij de vervolgopleidingen. Dit 'nagaan' is wel iets meer werk dan *nu* navragen wat er bij een opleiding van studenten wordt verwacht. Neem als voorbeeld een economiestudie. Daar moet men zich dus gaan bezinnen op de vraag wat men met de studenten wil op wiskundig gebied na het jaar 2010. Want pas in 2010 gaan de eerste vwo-leerlingen die een vernieuwd wiskundeprogramma doorlopen hebben, aan hun studie beginnen. Waarschijnlijk is daar nog niet over nagedacht bij economie[2].
Ze zijn daar net bekomen van de schrik van de tweedefaseleerlingen en de omschakeling naar de master-opleiding. Toch is informatie over het gebruik van wiskunde in de diverse vervolgopleidingen vanaf 2010 datgene wat we nodig hebben om goede wiskundeprogramma voor 2007 vast te stellen.
Of kunnen de makers van de examenprogramma's zelf de lijn uitzetten? En dan vragen of de vervolgstudies willen volgen? Misschien ook geen gek idee, omdat we op het vwo een paar jaar voorlopen op de vervolgstudies!

Noten

[1] Bedoeld wordt het programma NORMV G of NORMV MS zoals dat te vinden is bij www.digischool.nl/wi/ (via allerlei rekenmachines, Casio-programma's van Simon Biesheuvel).
[2] Navraag bij de economische faculteit van twee universiteiten, de VU en de UvA in Amsterdam, levert het volgende beeld. Bij de wiskundetentamens in het eerste jaar mogen grafische rekenmachines worden gebruikt, maar de opgaven zijn gemaakt om zonder GR op te lossen. Soms moet dat ook en mag de GR alleen ter controle gebruikt worden. Bij de niet-wiskundetentamens mag de GR niet worden gebruikt. In het tweede jaar wordt vaak met het programma Mathematica gewerkt. Het niet meer zelf differentiëren wordt daar op dit moment echt niet toegejuicht.

Over de auteur

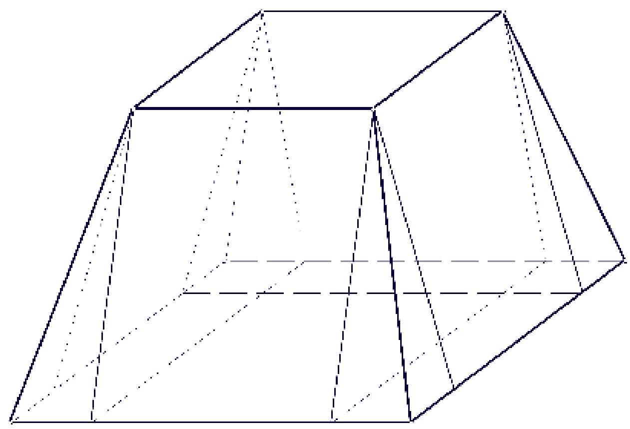
Simon Biesheuvel (e-mailadres: biesheuvel@zonnet.nl) is wiskunde-docent (bovenbouw havo en vwo) aan het Willem de Zwijger College in Bussum. Hij schreef ook een paar GR-programma's voor de Casio.

EEN BIJZONDER GEMIDDELDE

Een inhoudsformule voor afgeknotte kegels

[Ab van der Roest]

FIGUUR 1



Inleiding

De inhoud van een afgeknotte kegel is niet zo moeilijk uit te rekenen, maar doordat leerlingen het berekenen niet goed deden, kwam ik een formule op het spoor voor de inhoudsberekening. Deze formule was bij mij niet bekend. Het is nogal een 'vreemde' formule. In dit artikel wil ik een drietal afleidingen voor deze formule geven die bruikbaar zijn in de klas. De laatste afleiding is er een met historische waarde.

Toetsvraag

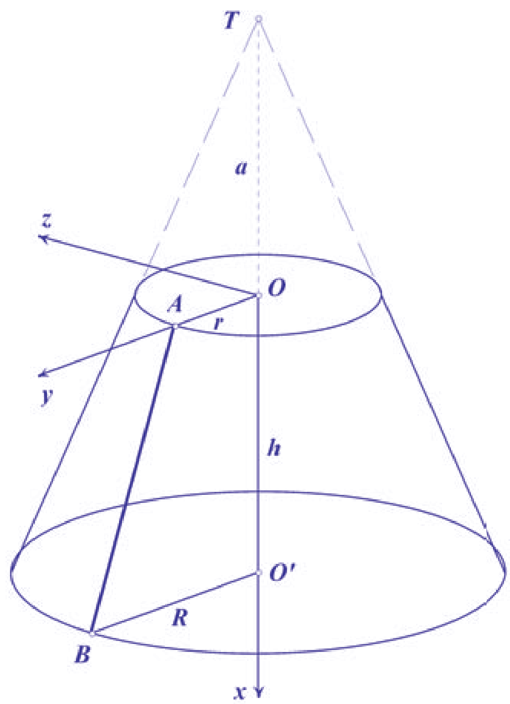
Toen ik bij een dossiertoets wiskunde-B12 in havo-4 een vraag stelde naar de inhoud van een afgeknotte kegel, kreeg ik van diverse leerlingen een verkeerd antwoord. Ze benaderden de inhoud van de afgeknotte kegel met behulp van een cilinder.
Als we de straal van het grondvlak R noemen en die van het bovenvlak r en we de hoogte aangeven met h, dan berekenden sommige leerlingen de inhoud met de volgende formule:

$$I=\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\cdot h$$

Deze formule is niet correct. Dit is eenvoudig te controleren met een voorbeeld. Daarom eerst een gedeelte uit de som van de toets:

Muurverf wordt in plastic emmers verkocht; zie afbeelding. *De diameter van de onderzijde van de emmer is 17 cm. De diameter van de bovenzijde is 19 cm. De emmer is 14 cm hoog.*
Volgens de verkeerde formule zou de inhoud van deze emmer $\pi\left(\frac{8{,}5+9{,}5}{2}\right)^2\cdot 14=3563\,\text{cm}^3$ zijn,

maar als je de berekening correct uitvoert is het $\frac{1}{3}\pi\cdot 9{,}5^2\cdot 133-\frac{1}{3}\pi\cdot 8{,}5^2\cdot 119=3566\,\text{cm}^3$.
Geen groot verschil, maar toch!



FIGUUR 2

De formule

Een collega wees me op een correcte formule:
$I=\frac{1}{3}h\left(B+G+\sqrt{B\cdot G}\right)$
waarbij G = oppervlakte grondvlak, B = oppervlakte bovenvlak en h = hoogte.
Bij deze formule komt dus niet een gewoon gemiddelde te voorschijn, maar er verschijnen een extra term $\sqrt{B\cdot G}$ en een factor $\frac{1}{3}$. Toen mijn collega deze formule noemde, begreep ik hem niet meteen. Ik kon me wel voorstellen dat de formule klopt, want als je een cilinder opvat als een 'afgeknotte kegel' en G dus gelijk is aan B, dan krijg je meteen de juiste formule voor de inhoud van een cilinder, en als je een gewone kegel beschouwt als een afgeknotte kegel met B = 0, dan krijg je meteen de inhoudsformule van de kegel.

Bewijs met behulp van gelijkvormigheid

Bij de bespreking van de toets heb ik de leerlingen uitgedaagd de bijzondere formule te bewijzen - en tot mijn grote verrassing waren er leerlingen die er meteen mee aan de gang gingen. Dat dwong mij ook na te denken over een afleiding. Het lukte hen niet tot een complete afleiding te komen, maar in een volgende les konden we al pratend en denkend tot een bewijs komen.
In figuur 1 zie je een afgeknotte kegel met hoogte h. Op die afgeknotte kegel past een kegel met hoogte a. De grote kegel verkrijg je door een vermenigvuldiging van de kleine kegel met centrum T en factor $\frac{a+h}{a}$. We noemen de oppervlakte van het grondvlak G en die van het bovenvlak B.
Er geldt nu $\left(\frac{a+h}{a}\right)^2\cdot B=G$.
De inhoud van de afgeknotte kegel is:

$$\begin{aligned}
I&=\tfrac{1}{3}G\cdot(h+a)-\tfrac{1}{3}B\cdot a=\tfrac{1}{3}(G\cdot h+G\cdot a-B\cdot a)\\
&=\tfrac{1}{3}\left(G\cdot h+\left(\frac{a+h}{a}\right)^2\cdot B\cdot a-B\cdot a\right)=\tfrac{1}{3}\left(G\cdot h+\left(a+2h+\frac{h^2}{a}\right)\cdot B-B\cdot a\right)\\
&=\tfrac{1}{3}\left(G\cdot h+B\cdot h+\left(h+\frac{h^2}{a}\right)\cdot B\right)=\tfrac{1}{3}h\left(G+B+\left(1+\frac{h}{a}\right)\cdot B\right)\\
&=\tfrac{1}{3}h\left(G+B+\sqrt{\left(1+\frac{h}{a}\right)^2\cdot B\cdot B}\right)\\
&=\tfrac{1}{3}h\left(G+B+\sqrt{G\cdot B}\right)
\end{aligned}$$

Al pratend kwamen verschillende leerlingen wel zover met de algebra, dat ze begrepen wat er op het bord kwam. De meesten waren blij dat ze het niet zelf hoefden te kunnen! Ze vonden het erg moeilijk en ik moest ze ook wel gelijk geven.

Bewijs met behulp van integreren

In een vwo-5 klas zou een bewijs met behulp van integreren kunnen. Ik denk dat de meeste leerlingen het niet eens zo moeilijk zullen vinden.
Beschouw de afgeknotte kegel als een omwentelingslichaam. Het lijnstuk AB met $A(0, r)$ en $B(h, R)$ wordt geroteerd om de x-as en de inhoud wordt bepaald met behulp van een integraal.
Een vergelijking van de lijn AB is $y=\frac{R-r}{h}x+r$.
De inhoud is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned}
\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2\mathrm{d}x&=\tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{h}\right)^2h^3+\pi\left(\frac{R-r}{h}\right)rh^2+\pi r^2h\\
&=\tfrac{1}{3}\pi h\left((R-r)^2+3(R-r)r+3r^2\right)\\
&=\tfrac{1}{3}\pi h\left(R^2-2Rr+r^2+3Rr-3r^2+3r^2\right)\\
&=\tfrac{1}{3}\pi h\left(R^2+r^2+Rr\right)\\
&=\tfrac{1}{3}h\left(\pi R^2+\pi r^2+\sqrt{\pi^2R^2r^2}\right)\\
&=\tfrac{1}{3}h\left(G+B+\sqrt{G\cdot B}\right)
\end{aligned}$$

Historisch bewijs

De formule is dus op twee manieren bewezen. Voor een afgeknotte piramide geldt de formule ook; de algebraïsche afleiding gaat op dezelfde manier als bij de afgeknotte kegel. Maar er is nog een ander fraai bewijs. Dit kwam ik tegen in een boek van Van der Waerden: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Dat bewijs was ook al bekend bij de Chinezen in de Han-periode, ongeveer twee eeuwen voor het begin van onze jaartelling. Het staat ook in *Nine Chapters on the Mathematical Art (Chu Chang Suan Shu)*. In Van der Waerdens boek las ik dat de leerlingen uit 4-havo zich in goed gezelschap bevonden, want de Babyloniërs, die een goed ontwikkelde wiskunde hadden, gebruikten dezelfde verkeerde formule als de leerlingen.
In die tijd werd de formule afgeleid voor een regelmatige vierzijdige piramide. De zijde van het bovenvlak noemen we a en van het grondvlak b. De hoogte van de piramide is h.
Verdeel de piramide in een balk, vier prisma's en vier piramides; zie figuur 2.
Nu geldt
$V=V_{afgeknotte\ piramide}=V_{balk}+4V_{prisma}+4V_{piramide}$.
Zodat

$$\begin{aligned}
V&=a^2h+4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b-a}{2}\cdot h\cdot a+4\cdot\tfrac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cdot h\\
&=a^2h+abh-a^2h+\tfrac{1}{3}b^2h-\tfrac{2}{3}abh+\tfrac{1}{3}a^2h\\
&=\tfrac{1}{3}a^2h+\tfrac{1}{3}b^2h+\tfrac{1}{3}abh=\tfrac{1}{3}h\left(a^2+b^2+\sqrt{a^2b^2}\right)\\
&=\tfrac{1}{3}h\left(B+G+\sqrt{B\cdot G}\right)
\end{aligned}$$

Conclusie

Onverwachts kom je een mooi stukje wiskunde tegen in de klas. Leerlingen laten zich uitdagen hoewel ze het heel moeilijk vinden. Stiekem oefenen we algebraïsche vaardigheden en stiekem stop ik er een stukje geschiedenis van de wiskunde in. Al met al de moeite waard, en ik hoop dat veel collega's hieraan hetzelfde plezier beleven.

Over de auteur

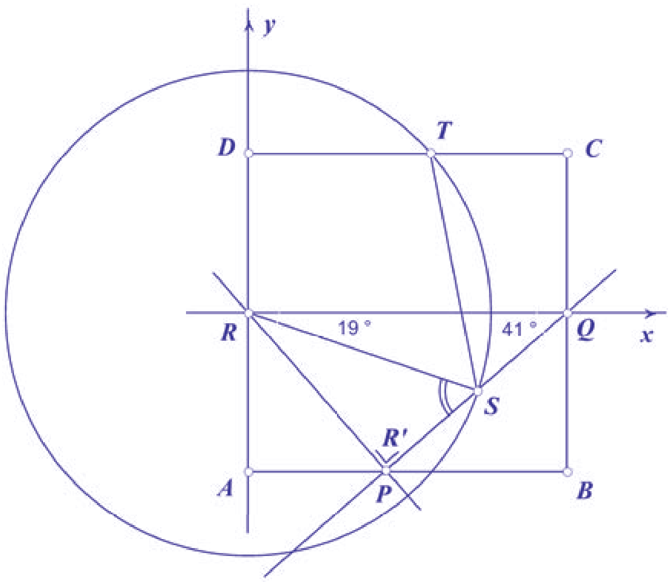
Ab van der Roest (e-mail: a.b.vanderroest@wanadoo.nl) is wiskundedocent aan het Ichthus College te Veenendaal.

VAN VIERKANT NAAR GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK (2)

Bewijzen bij het artikel op pagina 376

[Rob van Oord]

A. Om te bewijzen dat $\angle RSP = 60°$ zou je een assenstelsel kunnen aanbrengen in de tekening van het vierkant. Kies R als oorsprong (zie figuur).
Dan moet je de vergelijkingen opstellen van de lijn PQ en van de cirkel met straal h om R. Het bovenste snijpunt van de lijn PQ en de cirkel is dan punt S.
Wanneer je op gehele graden afrondt, kun je eenvoudig nagaan dat $\angle QRS = 19°$ en dat $\angle RQS = 41°$.
Hoek RSP is buitenhoek van driehoek QRS, dus is $\angle RSP = 19° + 41° = 60°$.
Het lijkt te kloppen!
Ik daag u uit om dit te doen voordat u verder leest.
Ga uit van r = 1 of r = 16. Toch loop je vast in breuken en wortels als je dit exact gaat doen.



B. Bij een handiger methode ga je uit van de projectie R' van R op lijn PQ. Driehoek RSR' moet dan een (30-60-90)° -driehoek zijn. Dit is zo als de zijden

$\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{4}z$ en $\frac{1}{4}z\sqrt{3}$ $(=\frac{1}{2}r\sqrt[4]{3})$ zijn.

Omdat $RS = \frac{1}{2}z$, is het voldoende om te bewijzen dat de afstand van R tot de lijn PQ gelijk is aan $\frac{1}{4}z\sqrt{3}$ is, want dan is $\angle PSR = 60°$.
De stelling van Pythagoras in driehoek BPQ geeft:

$$BP = r\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}} = \frac{r}{2\sqrt[4]{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}}$$

De helling van PQ is $\dfrac{BQ}{BP} = \cdots = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}$.

In het assenstelsel met R als oorsprong is een vergelijking van de lijn PQ:

$$y = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}(x-r) \quad \text{of} \quad \sqrt[4]{3}\cdot x - \sqrt{4-\sqrt{3}}\cdot y - \sqrt[4]{3}\cdot r = 0$$

Een normaalvector van die lijn is dan $\begin{pmatrix} \sqrt[4]{3} \\ -\sqrt{4-\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

met lengte $\sqrt{\left(\sqrt[4]{3}\right)^2 + \left(\sqrt{4-\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{3}+4-\sqrt{3}} = 2$.

Voor een normaalvergelijking van PQ vind je dan:

$$\left|\frac{\sqrt[4]{3}\cdot x - \sqrt{4-\sqrt{3}}\cdot y - \sqrt[4]{3}\cdot r}{2}\right| = 0$$

De afstand d van $R(0,0)$ tot de lijn PQ is dus:

$$d = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{3}\cdot r = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{3}\cdot(\tfrac{1}{2}\sqrt[4]{3}\cdot z) = \tfrac{1}{4}z\sqrt{3}$$

Bingo!

C. Tot slot nog de vraag of S het midden van PQ is. Dat is het geval als de projectie R' van R op lijn PQ zou samenvallen met punt P, want dan is $PS = \frac{1}{4}z$.
Daarvoor zou de lijn PR loodrecht moeten staan op de lijn PQ. En dan zou het product van de hellingen van PR en PQ gelijk moeten zijn aan –1.
Snijden van de lijn $y = -\frac{1}{2}r$ met de lijn PQ geeft:

$$x_{P=}\left(1 - \frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2\sqrt[4]{3}}\right)r$$

Helling PR maal helling PQ wordt dan:

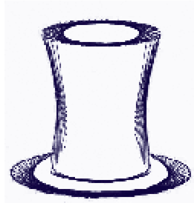
$$\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2\sqrt[4]{3}}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4-\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{(2\sqrt[4]{3}-\sqrt{4-\sqrt{3}})\sqrt{4-\sqrt{3}}} \approx -1{,}0213 \neq -1$$

Dus is S *net niet* het midden van PQ.

DE WISKUNDEDOCENT ALS GOOCHELAAR

Snel optellen in een Fibonacci-rij

[Job van de Groep]



Inleiding

Voor mijn workshop *Gegoochel met getallen* tijdens de Nationale Wiskunde Dagen 1999 stelde ik een boekje samen met goocheltrucs. In een vorig nummer van Euclides[1] verscheen hieruit al een drietal trucs, en in dit nummer wil ik u opnieuw een goocheltruc presenteren. Let wel: deze trucs worden exclusief aan wiskundedocenten ter hand gesteld onder de uitdrukkelijke voorwaarde van geheimhouding… Abracadabra!

De truc: snel optellen in een Fibonacci-rij

Een toeschouwer schrijft op een blocnote, niet zichtbaar voor de goochelaar, twee willekeurige getallen < 10 onder elkaar. Het derde getal daaronder is de som van de eerste twee. Het vierde, weer daaronder, is de som van het tweede en derde getal. Dit wordt net zolang herhaald totdat er in totaal 10 getallen onder elkaar staan.
De goochelaar mag de rij getallen in een flits zien en schrijft direct een getal op, niet zichtbaar voor de toeschouwer, die de opdracht krijgt de tien getallen bij elkaar op te tellen.
Het door de goochelaar genoteerde getal blijkt die gevraagde som te zijn!

Het geheim

De goochelaar onthoudt het vierde getal van onderen en vermenigvuldigt dat met 11. Dat is de totale som.
Voorbeeld: De som van de getallen 3, 7, 10, 17, 27, 44, 71, 115, 186, 301 is 781 (namelijk 11 maal 71).

Transfer naar de les

Het direct na de voorstelling zomaar verklappen van het ‘geheim’ moet ten strengste ontraden worden: de opgeroepen schijn dat men supersnel kan hoofdrekenen, gaat dan onmiddellijk verloren… Op een later tijdstip, dus zeker *niet* direct na de presentatie (laat de leerlingen er zelf éérst maar eens een nachtje over slapen!), kan eventueel worden ingegaan op de gehanteerde wiskundige principes. Als leerlingen écht geïnteresseerd zijn, kunnen bij deze truc de volgende suggesties worden gedaan: ‘Waarom kijk je eigenlijk naar het zevende getal en bijvoorbeeld niet gewoon naar de eerste twee? Gaat dat niet even snel/gemakkelijk? Construeer een dergelijke rij met de begingetallen a en b. Als de rij langer wordt (bijvoorbeeld 15 getallen of meer), kun je dan ook zo’n handig regeltje bedenken?’

Noot

[1] Job van de Groep: ‘De wiskundedocent als goochelaar.’ In: Euclides 80-4, januari 2005.

Over de auteur

Job van de Groep (e-mailadres: jvdgroep@wxs.nl) is, behalve wiskundedocent en schooldecaan vwo aan het Oosterlicht College te Nieuwegein, ook amateur-goochelaar.

3 Wiskundig projectonderwijs

[Bert Zwaneveld]

Inleiding

In nummer 80-3 van ons vakblad Euclides zat een manifest, waarin allerlei rollen van de wiskundeleraar worden beschreven. Toen ik het gelezen had dacht ik: een prima stuk – zeker voor havo/vwo, maar kunnen wiskundeleraren in het vmbo er ook voldoende mee uit de voeten? Met dat nieuwe leren beoogt men het onderwijs minder theoretisch en meer praktisch te maken. In mijn ogen gaat het vooral over het motiveren van leerlingen. De kern is dat er niet zozeer in afzonderlijke vakken als wel in leergebieden wordt gedacht en dat de werkvorm vooral is het uitvoeren in groepjes van een grote geïntegreerde opdracht – misschien is (klein) project een betere naam. De opdracht is in ieder geval zo breed dat kennis en vaardigheden uit verschillende vakken geleerd gaan worden. Die kennis en vaardigheden worden door de begeleidende leraren (want team-teaching ligt voor de hand) vanuit hun disciplinaire achtergrond ingebracht. Didactisch natuurlijk best moeilijk. Pedagogisch heeft een dergelijke aanpak als voordeel dat de leerlingen op het geheel van hun capaciteiten worden aangesproken en niet alleen op bepaalde, bij een afzonderlijk vak horende capaciteiten.

Projectonderwijs

Bij de inbreng vanuit de wiskunde zal rekenen, of wat algemener gecijferdheid, een belangrijke plaats innemen. Ondanks het feit dat veel leerlingen daar niet echt enthousiast voor zijn, vind ik het zeer de moeite waard om te proberen via projectonderwijs de motivatie van de leerlingen voor rekenen of gecijferdheid te verbeteren. Terzijde merk ik op dat ik vermoed dat ook in de onderbouw van havo en vwo dergelijk leren meer en meer in zwang zal komen. De vraag bij een dergelijke vorm van (wiskunde)onderwijs is hoe essentiële wiskundige kernen bij de leerlingen kunnen beklijven. Immers, in ieder geval moeten de leerlingen van havo/vwo en van het vmbo die voor de theoretische leerweg kiezen, aan bepaalde eindtermen voldoen.
Hierna twee voorbeelden van dergelijke projecten in het vmbo waarbij wiskunde in meer of mindere mate een rol speelt. Het eerste is een project waarbij leerlingen van een vmbo-school een karretje waarmee achter een fiets een hond vervoerd kan worden, moesten ontwikkelen, construeren en verkopen. Dat hierbij allerlei wiskundige activiteiten een rol spelen behoeft geen nadere uitleg. Het tweede voorbeeld is het uitvoeren van projectjes waarbij wiskunde en kunstzinnige vorming een rol spelen. Met name ging het om het construeren van ruimtelijke objecten. Hier spelen wiskundige thema's als symmetrie een rol. Deze voorbeelden maken overigens duidelijk dat het niet alleen om rekenen of gecijferdheid gaat.
Een voordeel van dergelijke projecten is dat ze gericht kunnen worden op het beantwoorden van vragen die bij de leerlingen spelen. Dat is immers de beste motivatiegrond voor leren. Bij de uitvoering kunnen de regels van projectmanagement en van didactiek gecombineerd worden. Dat wil zeggen (vanuit projectmanagement): de leerlingen leren dat in principe een vaste aanpak gevolgd kan worden.
- Vooraf moeten vragen beantwoord worden als: wat is het probleem, hoe gaan we het aanpakken, waaronder een schatting van de doorlooptijd.
- De vragen en antwoorden worden vastgelegd in een plan van aanpak.
- Het plan van aanpak moet worden goedgekeurd alvorens een leerling of een groepje leerlingen aan de slag kan gaan.
- Dan volgt de uitvoering.
- Die wordt afgesloten met een verslag waarin het product en het proces om tot het product te komen worden beschreven.

Rol van de wiskundeleraar bij projectonderwijs

Maar het allerbelangrijkste is (vanuit de didactiek) dat wordt vastgelegd wat er geleerd is. En dat dat zodanig gebeurt dat de opgedane kennis bij volgende projecten weer gebruikt of verder ontwikkeld kan worden: probleemaanpak, wiskundige begrippen en methoden, plannen, verslagleggen, enzovoort. Het geheel wordt afgesloten met een presentatie waardoor het geleerde nog beter kan beklijven. De rol van de leraar (of van de leraren) is begeleiden, inbrengen van relevante wiskundige kennis, bijvoorbeeld vanuit een schoolboek of met behulp van internet, stellen van vragen, stimuleren, de toetsing ontwerpen (is een verslag plus presentatie voldoende, toch een proefwerk?), enzovoort. Misschien wel de belangrijkste taak van de leraar is goed bewaken dat de in zo'n project opgedane kennis en vaardigheden geconsolideerd worden. In de figuur op pag. 389 heb ik geprobeerd te visualiseren dat met een dergelijke onderwijsaanpak de leerlingen aan de eindtermen kunnen voldoen. Dat het ontwerpen, ontwikkelen en uitvoeren van dergelijk onderwijs heel wat van de leraren vergt, moge duidelijk zijn.
De genoemde rollen komen heel aardig overeen met de rollen van de wiskundeleraar in het manifest bij nummer 80-3 van Euclides: zij zijn wel degelijk toepasbaar bij dergelijk wiskundig projectonderwijs.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verenigingsnieuws
Van de bestuurstafel

[Wim Kuipers]

Manifest en nu verder

Het manifest 'Wiskundedidactiek anno 2005'[1] is zo langzamerhand bij de meesten van u wel bekend. Op de jaarvergadering is het uitgedeeld en het is naderhand op de site geplaatst. Er is gelukkig een aantal mensen dat gereageerd heeft op de inhoud, en dat kan nog steeds. In Euclides 80(4), januari 2005, heeft Anne van Streun aandacht besteed aan het manifest.
Welke didactiek hebben we nodig nu we van alle kanten zien dat er allerlei ontwikkelingen gestalte gaan krijgen? De profielcommissies zijn druk bezig, de scholen geven ieder op verschillende manier inhoud aan de basisvorming en binnen het vmbo vinden enkele toe te juichen activiteiten plaats die te maken hebben met vakkenintegratie.
Op allerlei manieren wordt in bovenbouw en onderbouw aandacht geschonken aan het nieuwe leren.
Op een ander front wordt naar wegen gezocht om ict een goede plek te geven. Niet alles lukt, maar gelukkig lukt er veel.
Het bestuur heeft zich in een extra bestuursvergadering op vrijdagavond 1 april en zaterdagmorgen 2 april met enkele deskundigen willen bezinnen op de vraag: hoe expliciteren we wat in het manifest aan de orde komt. We willen graag docenten en leerlingen dienen met een aantal handreikingen.
Het is een vruchtbaar gesprek geweest en het heeft aangetoond dat we in de vaart van de ontwikkelingen samen de schouders er onder moeten zetten. We hebben elkaar hard nodig en klagen brengt ons niet verder. We zullen helder moeten hebben wat we met ons vak willen, wat is onze visie en wat is aansluitend de didactiek waarbij vooral de leerling in beeld dient te komen. Dat betekent dat we kijken in de richting van havo/vwo en in de richting van het vmbo. Niet alleen naar binnen kijken maar ook samen met andere disciplines zoeken naar wegen om vorm te kunnen geven aan zinvol en betekenisvol onderwijs.
Het bestuur zal naar aanleiding van de bezinning een aantal concrete actiepunten formuleren, gericht op hulp aan docenten en op het aandringen bij de overheid om docenten de noodzakelijke ruimte te geven. Na evaluatie zullen we u nader informeren.

Noot

[1] M. Bos, M. Kollenveld, W. Kuipers, Anne van Streun: Manifest 'Wiskundedidactiek anno 2005'. Bijgesloten in Euclides 80(3), december 2004.

Nieuws van het Wereldwiskunde Fonds

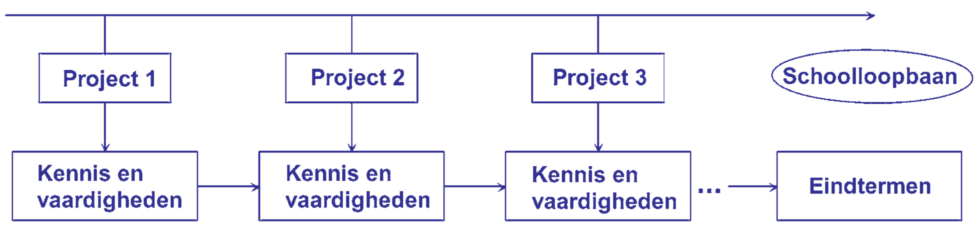
[Wim Kuipers]

WwF-projectronde 2005

De WwF-projectronde voor 2005 is van start gegaan. Op de NVvW-site treft u uitgebreidere informatie over de criteria die bij het toekennen van projectgelden gehanteerd worden. Bent u betrokken bij zo'n project of kent u iemand die dat is, dan kunt u een aanvraag indienen bij de secretaris van het Wereldwiskunde Fonds, Wim Kuipers, tel. 038–4447017, of via e-mail: *w.kuipers@nvvw.nl*.
U kunt de aanvraag het beste eerst even met hem doorspreken. Aanvragen moeten vóór 7 juni binnen zijn.

WwF-werkgroepleden

Verenigingsleden die geïnteresseerd zijn in het werkgroeplidmaatschap, kunnen eveneens met onze secretaris contact opnemen.
Zie ook de WwF-pagina's op de NVvW-site.

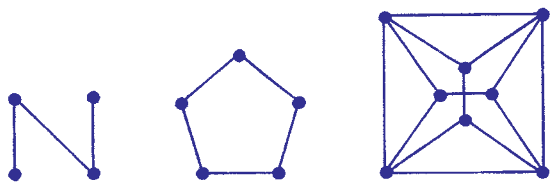


Recreatie

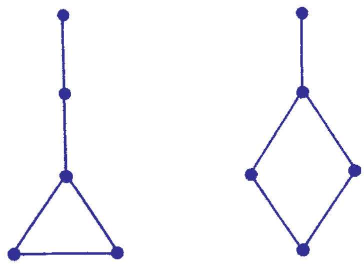
[Frits Göbel]

Puzzel 807
Tweelingen in Grafenland

Het complement van een graaf krijg je door de bestaande lijnen weg te laten en de lijnen erin te zetten die er eerst niet stonden. De twee grafen in figuur 1 zijn elkaars complement. Als een graaf isomorf is met z'n complement, spreken we van een *tweeling*; de officiële naam is: *zelf-complementaire graaf*. Drie voorbeelden ziet u in figuur 2. De eerste graaf is zó getekend dat het complement niet alleen isomorf, maar zelfs congruent is met het origineel.
De grafen zijn alle drie samenhangend, dat wil zeggen je kunt van ieder punt in de graaf naar ieder ander punt wandelen langs lijnen van de graaf.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Opgave 1
Zijn er eigenlijk wel niet-samenhangende tweelingen?

Tweelingen zijn zeldzaam: onder de 1646 grafen met 8 punten en 14 lijnen zijn er slechts tien. Met 5 punten zijn er twee.

Opgave 2
Bepaal de andere tweeling met 5 punten.

Een graaf met n punten kan natuurlijk alleen dan een tweeling zijn als het aantal lijnen gelijk is aan $\frac{1}{4}n(n-1)$. Een wat strengere nodige voorwaarde is: ook de graadrij moet 'zelf-complementair' zijn; dat wil zeggen als de graden $d_1, d_2, \ldots, d_n$ zijn met $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, dan moet gelden:
$d_{i+1} + d_{n-i} = n - 1$ voor $i = 0, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$

Maar deze eis is niet voldoende! Neem bijvoorbeeld (2,2,2,3,4,5,5,5). Dit is wél een graadrij; er behoren zelfs 20 niet-isomorfe grafen bij. Ook is de graadrij zelf-complementair, maar geen van de 20 grafen is een tweeling.

Opgave 3
Laat zien dat (2,2,2,3,4,5,5,5) niet de graadrij van een tweeling is.
Doe hetzelfde voor (3,3,3,4,4,4,5,5,5).

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 27 juni 2005.
Veel plezier!

Oplossing 'Clusters'

Er waren tien inzendingen, waarvan helaas slechts zes helemaal goed, te weten van J. Smit, W. Doyer, A. Verheul, H.J. Brascamp, P.X. Dillo en L. de Rooij.

Het antwoord op *opgave 1* is $\frac{k(n-k+1)}{n}$.

Drie inzenders bepaalden dit via de kansverdeling, maar het kan ook rechtstreeks. Jan Smit deed het als volgt. Er zijn $n + 1$ mogelijkheden voor de linker- of rechterrand van een cluster, namelijk de $n + 1$ verticale randen van de cellen. Nummer deze randen van links naar rechts 1, 2, ..., $n + 1$.
De stochast Y is als volgt gedefinieerd:
$Y(i) = 1$ als op plaats i een cluster begint of eindigt, anders is $Y(i) = 0$. Dan geldt

$P\left(Y(1)=1\right)=P\left(Y(n+1)=1\right)=\frac{k}{n}$, en voor

$1 < i < n + 1$ is $P\left(Y(i)=1\right)=\frac{2k(n-k)}{n(n-1)}$.

Omdat de variabelen $Y(i)$ alleen de waarden 0 en 1 aannemen, is $E\left(Y(i)\right)=P\left(Y(i)=1\right)$, dus

$$E\left(Y(1)+\cdots+Y(n+1)\right)=\frac{2k(n-k+1)}{n}$$

en het verwachte aantal clusters is de helft hiervan!

Opgave 2 kan op dezelfde manier worden opgelost, maar het kan ook iets eenvoudiger. De kans dat in cel 1 een cluster begint, is p en de kans dat in een andere cel een cluster begint, is $(1 - p)p$. Het verwachte aantal clusters is dus $p+(n-1)\cdot p\cdot(1-p)$. Met de niet ongebruikelijke afkorting $q = 1 - p$ is dit ook te schrijven als p^2+npq.

Opgave 3a. Nu $p=\frac{1}{2}$ zijn alle mogelijke constellaties van de begin- en eindpunten van de clusters even waarschijnlijk. De kans op i clusters is dus $\frac{1}{2^n}\cdot\binom{n+1}{k}$

Opgave 3b kan als volgt worden opgelost. Laat n het aantal cellen zijn en $A(n,i)$ en $B(n,i)$ de kans op i clusters met de n-de cel bezet respectievelijk vrij, terwijl
$P(n,i) = A(n,i) + B(n,i)$.
Dan geldt:

$$A(n,i)=\tfrac{1}{3}\left(A(n-1,i)+B(n-1,i-1)\right)$$
$$B(n,i)=\tfrac{2}{3}\left(B(n-1,i)+A(n-1,i)\right)=\tfrac{2}{3}P(n-1,i)$$

Met gehele getallen is het prettiger rekenen, dus we definiëren:

$$A(n)=\frac{a(n)}{3^n}\ ,\ B(n)=\frac{b(n)}{3^n}\ \text{ en }\ P(n)=\frac{p(n)}{3^n}$$

met als resultaat

$$a(n,i)=a(n-1,i)+b(n-1,i-1)$$
$$b(n,i)=2p(n-1,i)$$

De beginvoorwaarden zijn
$a(1,0) = 0$, $a(1,1) = 1$, $b(1,0) = 2$, $b(1,1) = 0$.
Nu kunnen de gevraagde kansen snel worden bepaald; zie onderstaande tabel.

i	0	1	2	3	4	5
$p(10,i)$	1024	9217	23524	19892	5120	272

Ladderstand

De top van de ladder na de clusters is:
L. de Rooij 292
L. van den Raadt 237
J. Meerhof 206
W. Doyer 202
T. Kool 179
W. van den Camp 131

De complete ladderstand is te zien op de website van Euclides: *www.nvvw.nl/euclladder.html*.

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*-versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*).

nr	verschijnt	deadline
8	23 juni 2005	10 mei 2005

Examens
di. 31 mei (11:30-13:00u) - vmbo BB
di. 31 mei (13:30-16:30u) - vwo B1/B12
do. 2 juni (13:30-16:30u) - havo A12

Examenbesprekingen
ma. 30 mei (15:00-18:00u) - vmbo TGK
ma. 30 mei (15:30-18:00u) - havo B1/B12
do. 2 juni (15:30-18:00u) - vwo B1/B12
ma. 6 juni (16:00-18:00u) - havo A12

vr. 26 en za. 27 augustus, Eindhoven
vr. 2 en za. 3 september, Amsterdam
Vakantiecursus 2005
Organisatie CWI

do. 15 t/m za. 17 september, Utrecht
Symposium Freudenthal 100
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 23 september, RU Nijmegen
Wiskundetoernooi voor scholieren
Organisatie Faculteit NWI

wo. 19 t/m wo. 26 oktober
WetenWeek 2005
Organisatie NEMO

zaterdag 5 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag NVvW

vrijdag 25 november, op de scholen
A-lympiade en B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto’s, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

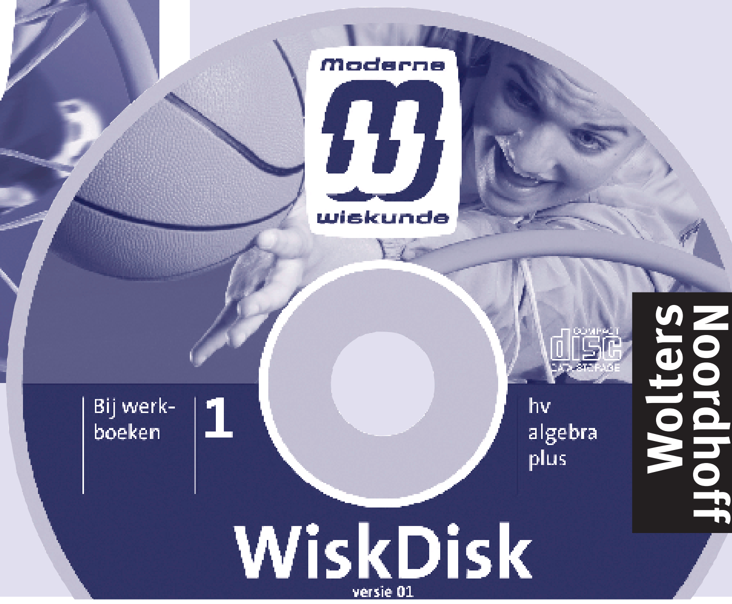
* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

Nieuw bij Moderne wiskunde 8 Werkboek Algebra plus

- **voor havo/vwo**
  (1 havo/vwo nu verkrijgbaar, 2 havo/vwo en 2 vwo in 2005, delen 3 in 2006)
- **meer oefening van technische en algebraïsche vaardigheden**
- **complexe opdrachten**
- **hoofdstukoverstijgende oefeningen**
- **extra opdrachten met de computer**



Wolters Noordhoff

Nieuwsgierig?
Vraag beoordelingsexemplaren aan bij Klantenservice Wolters-Noordhoff Voortgezet Onderwijs T (050) 522 67 76 of e-mail: vo@wolters.nl.

Neem ook een kijkje op de site:
www.modernewiskunde.wolters.nl

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen