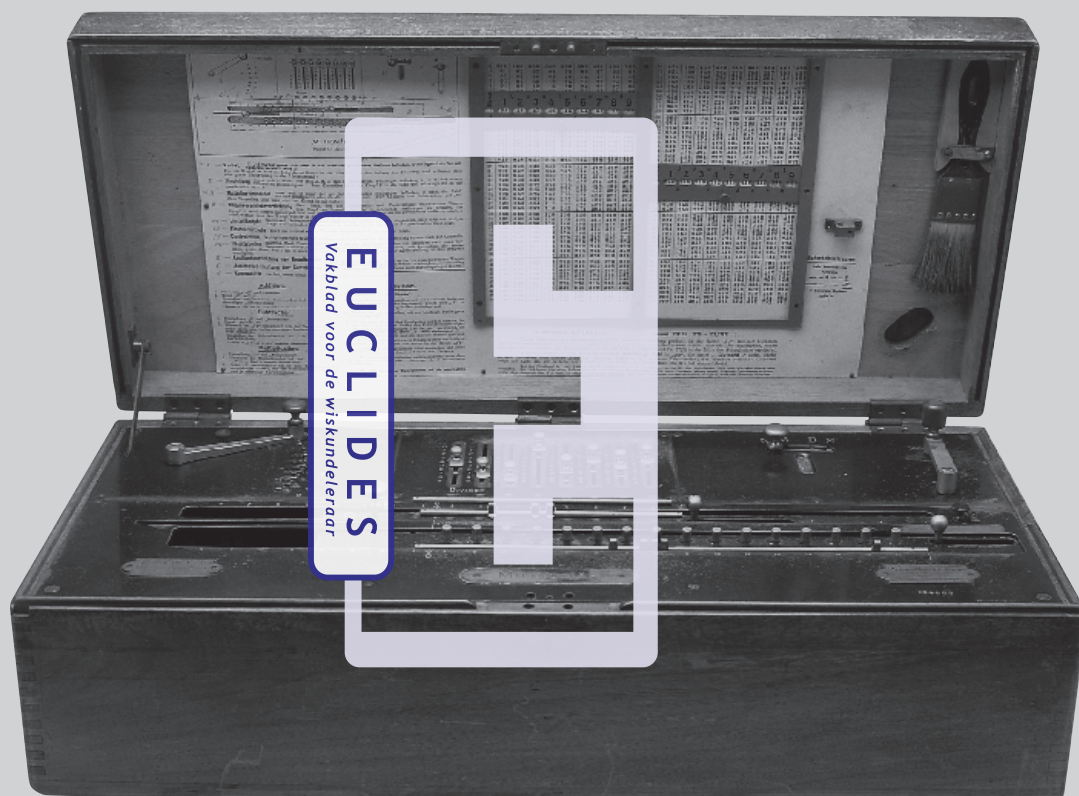


Examens PISA en TIMSS Wiskunde 2007 Examenbesprekingen

april
2005/nr.6
jaargang 80





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom
Marja Bos, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Jos Tolboom

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvww.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleren

www.nvww.nl



Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvww.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvww.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bommel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 45,00
Studentleden: € 25,00
Gepensioneerden: € 30,00
Leden van de VWW: € 30,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 30,00
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

6

april 2005 JAARGANG 80

313	Van de redactietafel [Marja Bos]
314	De examens komen er weer aan [Ameling Algra]
316	PISA en TIMSS [Pauline Vos]
321	40 jaar geleden [Martinus van Hoorn]
322	Zwoegen door de modder en zweven langs de hemel, deel 2 [Evelien Bus]
326	Optimaal / Twee tentamenopgaven [Rob Bosch]
328	En hoe nu verder... [Roel van Asselt]
330	Inspiratie uit Oudemolen [Klaske Blom, Frank van den Heuvel]
334	Zoek de driehoek, een vervolg [Dick Klingens]
339	Thomasse, the rhinoceros slayer [Victor Thomasse]
340	Wiskundewandelingen ontwerpen [Lambrecht Spijkerboer]
345	Over wiskundeonderwijs: innovatie en consolidatie, 2 [Bert Zwaneveld]
346	Van de bestuurstafel [Marian Kollenveld]
348	Examenbesprekingen 2005 [Grada Fokkens, Conny Gaykema]
349	Aankondiging / Hbo-conferentie
350	Recreatie [Frits Göbel]
352	Servicepagina
	Voorpagina Rekenmachine Millionär Hans W. Egli Rechenmaschine-Fabrik, Zurich, circa 1910

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Centraal schriftelijk

De examens komen er weer aan! U hebt uw kandidaten ongetwijfeld goed voorbereid, en zij zijn zelf hopelijk ook actief met de laatste voorbereidingen bezig. En bent uzelf goed voorbereid?! Ameling Algra geeft vanuit de CEVO nog wat laatste praktische informatie; zie pagina 314.

De Vereniging organiseert weer de regionale examenbesprekingen, direct na de schriftelijke eindexamens. Niet alleen een nuttige bijeenkomst om met elkaar van gedachten te wisselen over bepaalde aspecten van het examen als zodanig, en dus impliciet vaak over de diverse doelen van ons wiskundeonderwijs, maar ook een aardige gelegenheid om collega's van andere scholen te ontmoeten. Voor een overzicht van data en locaties van deze besprekingen zie pagina 348. Voor algemene regelgeving en andere formele kwesties kunt u goed terecht op www.eindexamen.nl. Mocht u 'gewoon' op zoek zijn naar de actuele inhoud/ eindtermen van de SE- en CE-programma's wiskunde, dan biedt de website van de Vereniging uiteraard de juiste informatie: klik via www.nvww.nl door naar 'Eindtermen'.

Invulling examenprogramma's 2007

Op de Verenigingspagina's wordt u door Marian Kollenveld bijgepraat over de stand van zaken met betrekking tot de programmaherzieningen havo/ vwo vanaf 2007; zie pagina 346. Er liggen voorstellen tot invulling van de examenprogramma's. In de loop van dit voorjaar zal uw mening daarover via een veldraadpleging worden opgevraagd. U wordt van harte uitgenodigd om op het discussieforum op www.nvww.nl alvast te reageren op de voorstellen.

Verder in dit nummer

Pauline Vos analyseert in dit nummer de recente PISA- en TIMSS-rapporten, twee internationale studies naar o.m. de wiskundeprestaties van 14/15-jarigen. Mogen we inderdaad tevreden zijn met de positieve resultaten die Nederland behaalde?

Evelien Bus rondt haar tweeluik af over de beleving van de wiskunde door wiskundigen. Hoe zit dat met die karikaturen van wiskundigen; kloppen ze? En is het niet merkwaardig dat veel wiskundige voordrachten zelfs door experts vaak nauwelijks te volgen zijn?

In dit nummer ook een interview met Gerrit Krol, naar aanleiding van zijn vorig jaar verschenen roman 'Rondo Veneziano'. Krol, die wiskunde studeerde en werkzaam was als computerprogrammeur en systeemontwerper, schrijft romans, nouvelles, gedichten en essays waarin het bèta-element nogal eens prominent aanwezig is. Zijn literaire werk werd in 1986 bekroond met de Constantijn Huygensprijs en in 2001 met de P.C. Hooftprijs.

Vmbo

We hebben het binnen de redactie een tijdje zonder vmbo-redacteur moeten stellen. Gelukkig kan ik nu melden dat we iemand bereid gevonden hebben deze klus op zich te nemen: Joke Verbeek.

Joke brengt veel relevante ervaring in, en daar zijn we als redactie bijzonder blij mee.

We krijgen wel eens te horen, dat Euclides te weinig aan het vmbo 'doet'. De redactie streeft wel degelijk naar een stevige vmbo-inbreng, maar ongetwijfeld is het ons niet altijd even goed gelukt om dit aandachtspunt om te zetten in concrete artikelen. Een extra aanleiding voor mij om hier nog weer eens te vermelden dat uw bijdragen (over het wiskundeonderwijs in het vmbo of elders!) zoals altijd van harte welkom blijven. Mocht u het lastig vinden om uw ideeën of 'boodschap' schriftelijk vorm te geven, dan bestaat de mogelijkheid dat de redactie een helpende hand toesteeekt. Dus néém die drempel en *schrijf* dat stuk waarmee u de collega's elders in het land een plezier kunt doen...

DE EXAMENS KOMEN ER WEER AAN

[Ameling Algra]

Inleiding

De centrale examens komen er weer aan. Zijn daarbij nog speciale zaken te melden die van belang zijn voor de docent wiskunde? De redactie van Euclides legde deze vraag voor aan Ameling Algra, die als CEVO-secretaris en ex-wiskundedocent op de hoogte is *niet* van de inhoud van de examens maar *wel* van de eventuele aandachtspunten voor de wiskundedocent.

Ameling: "Grote zaken zijn over het examen 2005 eigenlijk niet te melden. In 2006 en volgende jaren zijn er een paar grote veranderingen zoals de algemene beschikbaarstelling van examens met computertoepassingen bij vwo wiskunde-A, en de beeldschermexamens in de basisberoepsgerichte leerweg vmbo. En in een iets verdere toekomst de herziening van de vakkenindeling Tweede fase. Voor 2005 zijn er wat kleinere aandachtspunten die in de meeste gevallen in de *Septembermededeling* of in de *Maartmededeling* van de CEVO^[1] een plaats hebben gevonden."

Grootschrift

Allereerst het grootschrift bij wiskunde-GTL en wiskunde-A12 havo voor dyslectische kandidaten. Beide examens worden in 2005 in een grotere letter gezet en er wordt geen afzonderlijk grootschrift geleverd. Als de grotere letter nog niet groot genoeg is (de examensecretaris heeft een voorbeeld) dan kan de school zelf een extra vergroot examen maken aan de hand van het bij het examen geleverde PDF-bestand. Eventueel kan de school de kandidaat ook het PDF-bestand op het beeldscherm van de computer geven: dan kan de kandidaat steeds zelf bepalen welke vergroting nodig is.

Een belangrijk aandachtspunt hierbij is, dat het zelf vergroten nare gevolgen kan hebben voor het meten en tekenen. Het is daarom van belang om ervoor te zorgen dat de kandidaat niet op een vergrote tekening werkt. Waar, zoals vaak bij wiskunde, sprake is van een losse bijlage, is dat heel goed te doen: deel van de bijlage niet de vergroting uit, maar het origineel. Die bijlage bevat meestal ook niet zoveel tekst dat de dyslectische kandidaat een vergroting nodig heeft. En het werken op de originele bijlage met zijn goede drukkwaliteit is voor de leerling sowieso prettiger.

De examens wiskunde-GTL en wiskunde-A12 havo zijn op dit punt een voorloper. In 2007 worden alle examens in een grotere letter gezet. Dat dat nog twee jaar duurt, heeft te maken met het feit dat tegelijkertijd de lay-out en het lettertype wordt geoptimaliseerd.

Formulelijstje vmbo

Bij wiskunde vmbo is dit jaar meetkunde weer examenonderwerp. Het eindexamenprogramma geeft aan dat er formules zijn die herkend en toegepast moeten kunnen worden maar die niet behoeven te worden gekend. Bij de examens KB en GTL worden de formules in een compleet lijstje aan het begin van het examen vermeld, bij BB worden de formules gegeven waar van toepassing. Dus geen los 'erratum' zoals in 2003.

Nieuwe formulekaart vwo

Een andere formulevraag doet zich voor bij wiskunde-B12 vwo. Vier standaardlimieten uit de oude formulekaart zijn op de nieuwe verdwenen. Dat roept vragen op bij docenten. Moeten de leerlingen

de formules nu weer wél uit het hoofd kennen? Of wordt over die formules niet meer gevraagd? Het antwoord is: geen van beide. De tekst in het examenprogramma is bindend: leerlingen moeten de formules herkennen (dus niet kennen) en kunnen gebruiken (dus kan erover gevraagd worden). Als ze niet op de formulekaart staan, betekent dat hetzelfde als bij vmbo: dan zullen ze bij eventueel noodzakelijk gebruik in het examen moeten staan.

Eén van de formules, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, hoort niet meer

bij de c.e.-stof, dus daar wordt sowieso niet over gevraagd.

Het kan zijn dat een ijverige docent wiskunde al aan zijn leerlingen een fraai geplastificeerde kaart heeft gegeven waar hij de 'vervallen' of 'vergeten' formules bij heeft gezet. Strikt genomen is dat een ongeldige kaart: er staat meer info op dan mag. Maar omdat het info is die óf geen functie heeft óf in het examen toch wordt vermeld, geeft de CEVO in de Maartmededeling aan dat dit geen punt is: u hoeft geen nieuwe kaarten te maken.

Grafische rekenmachine

Over de grafische rekenmachines komen meer vragen van docenten economie (die pas sinds vorig jaar het apparaat door hun leerlingen op het centraal examen mogen laten gebruiken), en van docenten biologie (waar het niet mag).

Eén vraag is wel door wiskundedocenten gesteld.

In de regeling staat de TI84 van Texas Instruments vermeld, die nog pas sinds kort te koop is. De meeste leerlingen die een TI gebruiken, hebben de TI83. De regeling zegt dat een ouder type mag, maar dat geen garantie wordt gegeven dat de opgave ook maakbaar is. Die garantie is er voor de TI83 wél.

Papier

Niet meer nieuw, maar toch misschien goed om nog even te herhalen, is het feit dat de exclusieve en soms moeilijk leverbare papiersoorten als normaal waarschijnlijkheidspapier en dubbellogaritmisch papier bij beide examens wiskunde-A vwo niet meer klaar hoeven te liggen.

Correctie

Tot zover enkele kleine punten over de examens wiskunde. Dan nog een paar algemene zaken waarmee de docent wiskunde bij zijn correctiewerk te maken kan krijgen.

In het correctievoorschrift wordt dit jaar voor het eerst vermeld dat er geen regels van hogerhand zijn over punten op het werk, het aangeven van onvolkomenheden, enzovoorts. Dat daarvoor geen regels zijn, is op zichzelf niet nieuw; dat geldt al vanaf het begin van de jaren negentig. Bij het ontbreken van centrale voorschriften is het goed als scholen intern wel afspraken maken en die ook doorgeven aan de school die de tweede correctie verzorgt. Veel scholen doen dat, maar bij de *Examenlijn*^[2] blijkt ieder jaar weer dat dat

niet altijd gebeurt of dat nieuwe docenten niet van de schoolafspraken op de hoogte zijn. Misschien een idee om daar bij de examensecretaris naar te informeren.

N-term tweede tijdvak

Een ander algemeen punt betreft de N-term voor het tweede tijdvak. De algemene regel is dat de N-term voor het tweede tijdvak voorlopig gelijk is aan die voor het eerste tijdvak, en dat van die voorlopige N-term niet naar beneden wordt afgeweken. Dat geeft de docent wat houvast. Je kunt principieel voor of tegen de 'calculerende' docent zijn, maar bij een tweede tijdvak met vaak maar één kandidaat en bovendien een er-op-of-eronder situatie is het niet ondenkbaar, dat een docent even de consequentie van zijn beoordeling wil zien.

Nu is er bij die voorlopige N-term één uitzondering: als in het eerste tijdvak een duidelijke onvolkomenheid zat die in de N-term is gecorrigeerd, dan werkt die correctie niet bij voorbaat door in de N-term tweede tijdvak. Zo was in 2004 de voorlopige N-term wiskunde-A1 vwo tweede tijdvak een tiende punt lager dan de definitieve N-term van het eerste tijdvak. De docent die uitgaat van de N-term van het eerste tijdvak, kan dan voor een onaangename verrassing komen te staan. Na de vaststelling van de N-term voor het eerste tijdvak beschikt de examensecretaris van het examen over de voorlopige N-term tweede tijdvak, en die voorlopige N-term staat ook op www.eindexamen.nl. Even checken dus, en niet blindvaren op de N-term van het eerste tijdvak; dat voorkomt een onaangename verrassing bij de vaststelling van de uitslag.

Tot slot

Tot zover enkele kleine punten over de komende wiskunde-examens. Het belangrijkste is nog even geheim: de examens zelf. Laten we hopen dat wij dit jaar ervaren dat de examens op een goede en evenwichtige manier laten zien wat de kandidaten kunnen en moeten kunnen.

Noten

[1] Zie www.eindexamen.nl

[2] De CEVO-Examenlijn is bedoeld voor het melden van fouten of onvolkomenheden in een examen of het bijbehorende correctievoorschrift. De CEVO-Examenlijn is als volgt te bereiken:

fax: 030-2843056, tel.: 030-2843055, e-mail: via www.eindexamen.nl.

Over de auteur

Ameling Algra (e-mailadres: a.algra@cevo.nl) was van 1974 tot 2000 werkzaam als wiskundedocent en schoolleider in het voortgezet onderwijs. Thans is hij secretaris van de CEVO (Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo).

PISA EN TIMSS

Hoe staat het Nederlandse wiskundeonderwijs er internationaal gezien voor?

[Pauline Vos]

Ter inleiding

Bijna tegelijkertijd werden er in december 2004 twee rapporten uitgebracht. Beide gingen over het Nederlandse wiskundeonderwijs in vergelijking met andere landen. Het ene rapport beschreef de studie PISA (Programme for International Student Assessment) van de OECD, de organisatie van economisch ontwikkelde landen. Het andere rapport beschreef de studie TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) van de IEA, een internationale onderwijsorganisatie. In beide rapporten komt Nederland qua wiskunde goed voor de dag, respectievelijk op plaats 4 van de 40 landen (PISA) en op plaats 7 van de 45 landen (TIMSS). Pauline Vos las beide rapporten, vergeleek ze en plaatste kanttekeningen.

Wist u dat...?

De rapporten van PISA en TIMSS gaan over het wiskundeonderwijs aan 14/15-jarigen in verschillende landen. Ze gaan niet alleen over de prestaties van de leerlingen (daarover zo meer), maar ook over de lessen, de school enzovoorts. Wist u dat Nederlandse leerlingen relatief weinig lestijd voor wiskunde hebben? Nederlandse tweedeklas leerlingen werken aan wiskunde op school gemiddeld 94 uur per jaar, terwijl de lestijd in bijvoorbeeld Hong Kong wel 145 uur is. Stel je voor, wat je als wiskundeleraar in die vijftig extra uren zou kunnen doen! En nóg zo'n feit: van een volledige schoolweek spenderen Nederlandse tweedeklassers minder dan 10% aan wiskunde, terwijl dit in andere landen oploopt tot 17%. In veel landen is wiskunde nog een belangrijk vak!

Hoe ziet een gemiddelde les eruit? In Nederland wordt, in vergelijking tot andere landen, weinig klassikaal uitgelegd en weinig sommen worden onder leiding van de leraar opgelost. In plaats daarvan is er in Nederland relatief meer tijd voor huiswerkbespreking en voor zelfwerkzaamheid. Het gebruik van rekenmachines wordt in veel landen aan banden gelegd, en dan valt Nederland als uitschieter op, omdat wij die apparaatjes bijna onbeperkt toestaan. Maar als je kijkt naar de inzet van computers, dan is Nederland een modaal land en springen we er niet uit. 70% van de Nederlandse tweedeklassers zegt bij wiskunde *nooit* een computer te gebruiken (in Vlaanderen is dit 52% en in Engeland 34%).

Nederland heeft relatief veel verschillende schooltypes waarover de leerlingen worden verdeeld. In andere landen (bijvoorbeeld Finland, Spanje en de VS) worden de leerlingen tot hun 16e in één schooltype bij elkaar gehouden en volgen ze allemaal eenzelfde leerplan. Pas daarna vallen de keuzes. Nog meer weetjes: Nederlandse wiskundeleraars zijn meestal man (72%), terwijl mondiaal gezien het wiskundeleraarschap in de onderbouw een vrouwenberoep is (60% is vrouw). Nederlandse leraren geven relatief veel lessen en verdienen daarvoor een salaris dat lichtelijk hoger is dan in de meeste andere landen. Voor de betere salarissen moet u in Duitsland, Zwitserland, Japan of Korea zijn.

Wat wordt getoetst?

De twee studies bedienen zich van vragenlijsten aan leerlingen, leraren en directies om bovenstaande feitjes te weten te komen. (Hoeveel minuten is

één 'lesuur'? hoeveel lesuren wiskunde per week? hoeveel lesweken per jaar?) Daarnaast, en dat is waar de staatssecretaris en de media vooral naar kijken, hebben de studies een proefwerk. Dat proefwerk is in alle landen hetzelfde, alleen vertaald naar de plaatselijke taal.

PISA meet 'mathematical literacy'^[1] en daarom bevat de PISA-toets contextrijke opgaven van het type dat we in Nederland sinds Wiskobas en HEWET kennen. Dit soort opgaven zijn redelijk onbekend in veel landen, waar wiskundelessen veelal bestaan uit het toepassen van regels en definities middels eindeloze rijtjes kale sommen. Via PISA maken veel landen dus voor het eerst kennis met opgaven waarin wiskundige kennis en vaardigheden functioneel ingezet moeten worden.

Naast rekenen/wiskunde meet de PISA-toets nog drie andere vakgebieden: leesvaardigheid, *science* en 'probleemoplossen'.

TIMSS omvat, behalve rekenen/wiskunde-opgaven, alleen nog *science*. De TIMSS-toets is sterk op het Amerikaanse leerplan geënt (en dat lijkt op het Nederlandse mavo-leerplan van vóór 1993). Voor wie de toetsen wil zien: op de websites van de studies staan links naar voorbeeldopgaven.

Er ontstaat in Nederland altijd enige verwarring rondom dit soort internationale toetsen. De studies meten 'mathematics' en dat is niet hetzelfde als 'wiskunde'. We moeten uitkijken met de vertaling van 'mathematics', want dit Engelse woord omvat ook rekenen. Beide toetsen beslaan dus ook veel rekenen, toegepast rekenen en voortgezet rekenen, en in mindere mate 'hogere' wiskunde. Beide internationale toetsen hebben een behoorlijke overlap met het reken-gedeelte uit de Cito-toets voor groep 8. Dit is eigenlijk ook wel logisch: de cumulatieve kennis van 14/15-jarigen bestaat voor een groot deel uit kennis van de basisschool.

En dan is er een tweede misverstand: er wordt over de gehele populatie getoetst, dus inclusief vmbo en praktijkscholen. Deze maken 60% van de toetspopulatie uit. Havo- en vwo-leerlingen zijn een minderheid. Dit maakt dat universitaire wiskundigen en eerstegraads wiskundeleraren zich niet op voorhand deskundig hoeven achten om commentaar te geven. Ook kunnen de studies dus helemaal niet in verband gebracht worden met het Studiehuis.

Internationale studies als PISA en TIMSS worden statistisch nauwkeurig uitgevoerd. In alle landen worden de steekproeven volgens strenge protocollen getrokken. Als de procedures in een land niet goed worden uitgevoerd, worden de gegevens uit de database verwijderd. Dit overkwam Nederland in PISA-2000, Engeland in PISA-2003, Indonesië in TIMSS-1999 en Argentinië in TIMSS-2003. PISA richt zich op 15-jarigen, onafhankelijk van de klas waarin ze zitten. Deze doelgroep zit grotendeels in de derde en vierde klas, maar ook in de brugklas. In Nederland belandde in 2003 zelfs één 15-jarige

zesdeklasseer in de steekproef. TIMSS daarentegen heeft een jaarlaag als doelgroep, en wel de tweedeklassers (USA: grade 8), ongeacht de leeftijd. Beide studies worden met regelmatige intervallen herhaald, zodat er voor- of achteruitgang kan worden gemeten.

PISA wordt om de drie jaar herhaald: PISA-2000, PISA-2003 en PISA-2006. Telkens leggen ze een ander zwaartepunt in de toets. In 2000 waren er meer opgaven voor leesvaardigheid, in 2003 meer voor rekenen/wiskunde en in 2006 zullen er meer natuurwetenschappelijke opgaven zijn. TIMSS wordt om de vier jaar herhaald: TIMSS-1995, TIMSS-1999 en TIMSS-2003, en wordt steeds afgenomen in twee vakken: rekenen/wiskunde en *science*.

Beide internationale toetsen werden door de samenloop van cycli tegelijk in 2003 afgenomen. Na de data-afname duurde de dataverwerking meer dan een jaar, en verschenen de rapporten met een jaar vertraging. Dat is niet erg, want in een jaar tijd gebeurt er statistisch, op grote schaal, niet zoveel en blijven de gegevens actueel.

Schaalrekenen of olympische ranking

De twee studies PISA en TIMSS hebben nogal wat overeenkomsten. Het zijn beide grootschalige studies, waarin per land een *random* steekproef van duizenden leerlingen worden getoetst. Naast een toets voor de prestaties delen ze vragenlijsten uit voor aanvullende achtergrondinformatie. Het zijn beide kwantitatieve studies: alles wordt omgezet in cijfers. Beide maken een *prestatie-ranking*. Beide studies rapporteren de resultaten van de landen op een schaal met gemiddelde 500 en standaarddeviatie 100. Geen van beide geven een reden waarom ze hun resultaten transformeren naar deze schaal. Waarschijnlijk is een reden, dat er zo 'mooie' cijfers zonder komma uitkomen. De onderzoekers hadden ook kunnen zeggen: 'De Nederlandse kinderen maakten 59% van de opgaven goed', maar dan was het lastig om te gaan vergelijken met een eerdere toets, waarin de opgaven misschien moeilijker waren. Daarom is waarschijnlijk gekozen voor een enigszins tijdsafhankelijke schaal met een 'mooi' gemiddelde 500.

Nederland scoorde in PISA-2003 met rekenen/wiskunde 538 en in TIMSS-2003 met rekenen/wiskunde 536. In [figuur 1](#) en [figuur 2](#) ziet u de landenscores in een gedraaide staafgrafiek. U ziet ook, dat beide studies hun resultaten in eenzelfde lay-out gieten. In de grafiek kunt u aflezen welke landen er hebben deelgenomen. Veel landen doen aan één van beide studies mee, Nederland is één van de weinige landen dat aan beide studies meedoet. De scores van Nederland in TIMSS en PISA lijken op elkaar (538 en 536). Beide scores zitten ruim boven het gemiddelde. Maar toch zijn beide scores op een verschillende schaal gemeten. Voor PISA is de schaal geijkt op de OECD-landen (economisch ontwikkelde landen, zoals Finland en Canada).

De score van 500 is het gemiddelde van de OECD-landen. Niet-OECD-landen die aan PISA deelnemen (o.a. Brazilië en Thailand) worden niet meegenomen in dit gemiddelde. In PISA is het hoogst scorende land Finland (score 544) en het laagst scorende land is Mexico (score 385).

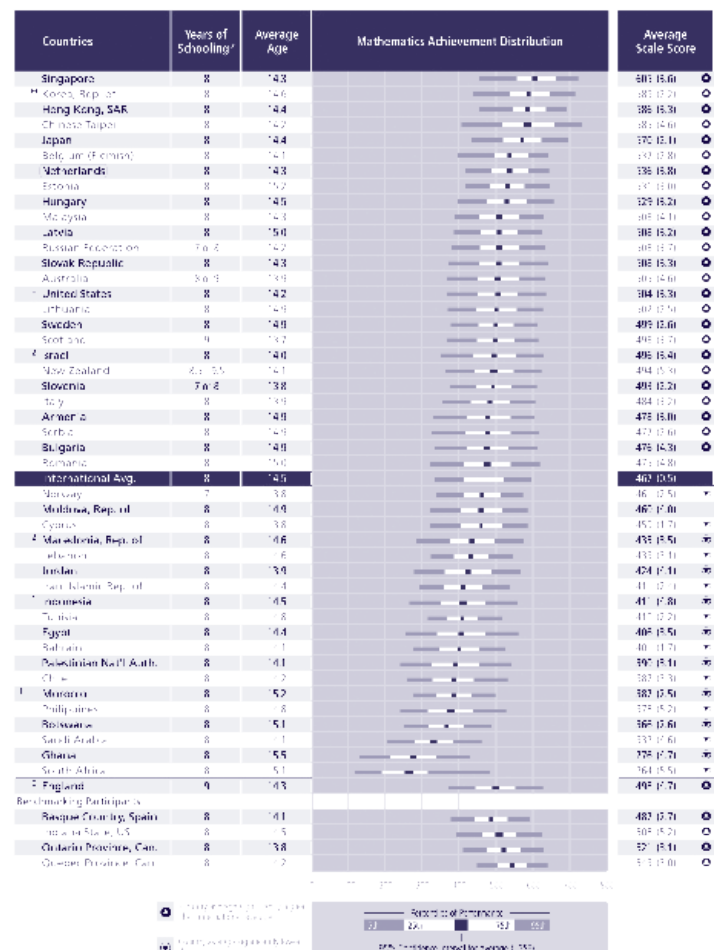
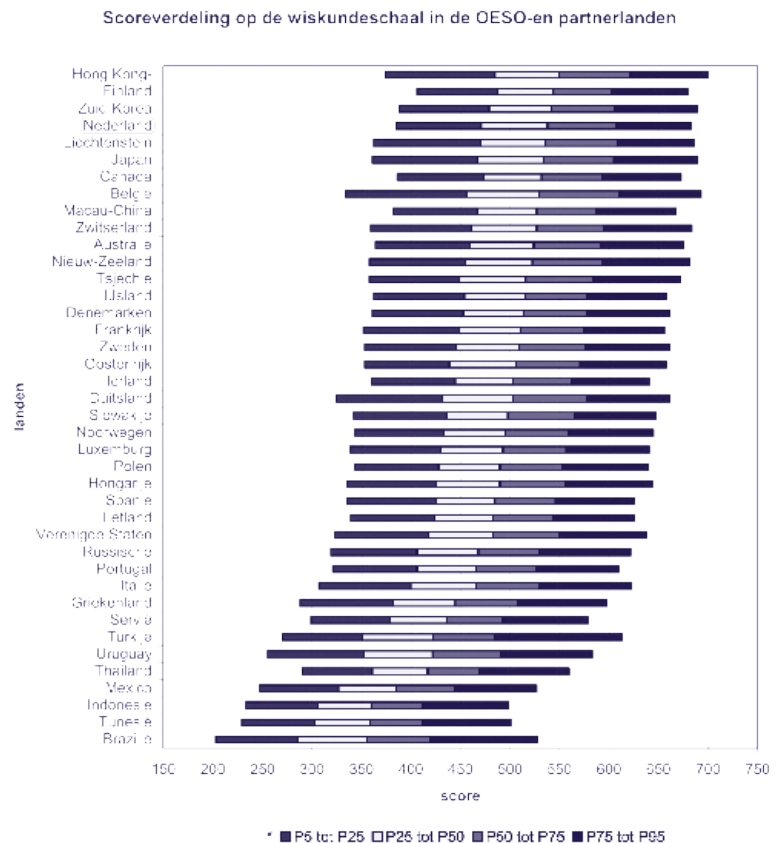
De landen in TIMSS zijn economisch gevarieerder met exotische landen, inclusief hoge presteerders als Singapore (score 605) en Taiwan (score 585) en een hele grote groep lage presteerders als Marokko (score 387) en Zuid-Afrika (score 274). De berekeningen voor de schaal van TIMSS zijn gecompliceerd, omdat de groep deelnemende landen telkens verandert. Veel 'rijkere' landen zijn gaan kiezen voor PISA (o.a. Duitsland, Frankrijk, Denemarken) of willen niet elke keer meedoen, maar alleen om de acht jaar (o.a. Zweden, Noorwegen). Tegelijkertijd voegt zich bij elke afname een groep armere landen bij TIMSS (o.a. Armenië, Bahrein, Botswana, Ghana). Om een trendvergelijking tussen de metingen te behouden, werden de TIMSS-2003 resultaten geijkt op de groep landen die zowel in 1999 als in 2003 deelnamen. Hierdoor is het internationale TIMSS-2003 gemiddelde, inclusief de nieuwkomers, lager uitgevallen dan 500, en wel 467. Dit is de dikkere balk in het midden in [figuur 2](#).

De landengroep van PISA is dus een andere dan van TIMSS. Hierdoor komen landen die aan beide studies meededen, meestal niet uit op vergelijkbare scores. De VS scoort bijvoorbeeld 483 in PISA en 504 in TIMSS, Japan scoort 534 in PISA en 570 in TIMSS.

Dat Nederland op gelijksoortige scores (536 en 538) uitkwam, mag om nóg een reden als toeval worden aangemerkt: er is een inhoudelijk verschil tussen de twee toetsen. PISA is contextrijker en TIMSS is kaler. Omdat het Nederlandse leerplan beter aansluit bij PISA, konden we verwachten dat Nederland in deze studie goed meedraait. Dat Nederland tegelijkertijd goed meedoet in TIMSS geeft dan aan, dat onze leerlingen ook goed overweg kunnen met iets kalere sommen (die evengoed in Nederlandse wiskundelessen voorkomen). Het inhoudelijke verschil tussen de twee toetsen zou een verklaring kunnen zijn waarom de VS en Japan het relatief beter doen in TIMSS dan in PISA.

Veel journalisten en politici kijken liever niet naar de scores, maar naar de rangvolgorde. Ze zien dan Nederland op plaats 4 van de 40 landen (PISA) en op plaats 7 van de 45 landen (TIMSS). Dit is om meerdere redenen een beetje simpel. Ten eerste: wiskunde is geen Olympische discipline en onderwijs moet geen wedstrijd worden. Ten tweede: de rangvolgorde is statistisch wankel. De discrete schaal voor de ranking verdoezelt dat sommige landen op een continue schaal héél dicht bij elkaar liggen, én dat de scores een onnauwkeurigheid hebben (vanwege de steekproeven). Het is daarom beter om te zeggen: in PISA eindigde Nederland ergens op de gedeelde plaatsen 2 - 7 (geen significant verschil met

FIGUUR 1 Wiskunderesultaten PISA-2003



FIGUUR 2 Wiskunderesultaten TIMSS-2003

FIGUUR 3
Scores van zeven landen in SIMS, TIMSS en PISA

	SIMS	TIMSS			PISA	
	1982	1995	1999	2003	2000*	2003
Nederland	58	541	540	536	--	538
Vlaanderen	52	565	558	537	543	553
Duitsland	--	509	--	--	490	503
Frankrijk	53	538	--	--	517	511
Engeland	47	506	496	498	529	--
Zweden	44	519	--	498	510	509
Denemarken	--	502	--	--	514	514
Finland	50	--	520	--	536	544

* alleen op de wiskundegebieden 'vorm en ruimte' en 'verandering en relaties'

-- geen data (geen deelname of onnauwkeurige data)

Finland, Korea, Liechtenstein, Japan en Canada) en in TIMSS eindigde Nederland ergens op de plaatsen 6 – 9 (geen significant verschil met Vlaanderen, Estland en Hongarije). U kunt zelf ook in de figuren aflezen hoe dicht het allemaal bij elkaar ligt.

Vergelijken met buurlanden

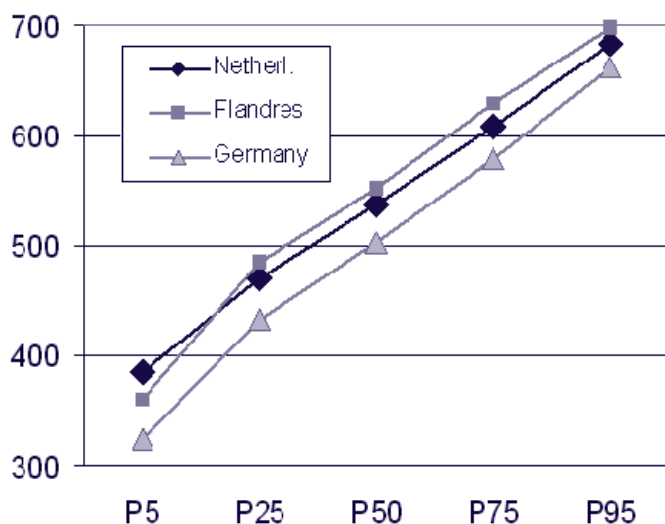
Persoonlijk blijf ik de brede internationale vergelijkingen curieus vinden: wie zou er nou ooit bedenken om Nederland met Saoedi-Arabië of met Liechtenstein te vergelijken? Interessanter vind ik de vergelijking met buurlanden. Een goede vergelijkingskandidaat is onze zuiderbuur, maar België heeft het probleem dat het op onderwijsgebied uit twee verschillende landen bestaat, Vlaanderen en Wallonië, met eigen ministeries, leerplannen en onderzoekers. Vlaanderen deed mee aan PISA en TIMSS; Wallonië deed alleen aan PISA mee. Ik heb daarom gekozen om alleen Vlaanderen in de buurlandenvergelijking mee te nemen.

In **figuur 3** heb ik van een zevental referentielanden de vergelijkende gegevens bij elkaar geharkt.

Niet alleen van de voorgaande PISA- en TIMSS-resultaten, maar ook de resultaten van de Second International Mathematics Study (SIMS) uit 1980-82. Die laatste moet u met een korrel zout nemen, want de nauwkeurigheid van SIMS was beduidend minder. SIMS was een *pilotstudy* voor de latere studies.

U moet in de tabel vooral verticaal vergelijken tussen de landen, want de scores zijn op verschillende nulpunten geijkt. En u moet steeds een ruime foutenmarge hanteren! Zoals u ziet, draait Nederland in de afgelopen twintig jaar aardig hoog mee. Het lijkt met de invoering van de realistische wiskunde nauwelijks veranderd. Vlaanderen is de afgelopen tien jaar beter dan Nederland (zowel in TIMSS als in PISA), en Finland is alleen in PISA beter.

Ik wil benadrukken dat het heel lastig is om iets zinnigs te zeggen over veranderingen in de tijd. Want horizontaal in de tabel kijken wordt bemoeilijkt door de verschillende ijkpunten. Ik vertrouw daarom op hetgeen de onderzoekers zelf zeggen. Volgens het internationale TIMSS-rapport is de score van Nederland, Engeland en Zweden in de afgelopen acht jaar niet *significant* veranderd, alleen Vlaanderen is sinds TIMSS-1995 achteruit gegaan. Het internationale PISA-rapport is bescheidener, maar die hebben ook pas twee keer gemeten. Zij kunnen niet goed zeggen of de scores van landen zijn veranderd, want in 2000 werden alleen de gebieden 'vorm en ruimte' en 'verandering en relaties' getoetst, terwijl in 2003 hier ook nog de gebieden 'hoeveelheid' en 'onzekerheid' bij kwamen. Wat betreft de subschalen 'vorm en ruimte' en 'verandering en relaties' lijkt het erop dat Nederland licht is achteruitgegaan, maar dit zou ook aan de kwaliteit van de steekproef in 2000 kunnen liggen. En wat betreft de buurlanden en de subschalen: Duitsland en Vlaanderen zijn vooruit gegaan, Zweden en Frankrijk zijn gelijk gebleven, Denemarken is achteruitgegaan op 'vorm en ruimte' en gelijk gebleven op 'verandering en relaties'.



FIGUUR 4 PISA-scores van percentielen in Nederland, Vlaanderen en Duitsland

Een goede prestatie van een speciale groep

Ik wil nog terugkomen op de figuren 1 en 2. Hierin worden de prestaties per land in een lange balk weer gegeven. In elke balk zijn verschillende groepen leerlingen weergegeven. Het eerste stukje balk loopt van het 5e percentiel tot het 25e percentiel (P5-P25). Na de P5-25 komen P25-P50, P50-75 en P75-P95. De slechtst presterende 5% van de leerlingen en de beste 5% zijn dus niet in beeld gebracht, want extremen vertekenen de figuur. (Ze zijn uiteraard wel meegenomen in de berekening van de totaalscore.) In beide grafieken ziet u (zowel bij PISA als bij TIMSS), dat Nederland tot de landen behoort met een kortere balk. Dit was ook al zo bij eerdere studies, en dit is afwijkend van veel andere landen. Wat betekent dit?

Om dit te laten zien, geef ik de prestaties in PISA-2003 van de verschillende percentielen opnieuw weer in **figuur 4**, maar nu in een lijngrafiek. Hierin geef ik, voor de vergelijking, ook de gegevens van Vlaanderen en Duitsland. Wat ziet u? De drie grafieken zijn stijgend: dat is logisch want elk hoger percentiel is beter in rekenen/wiskunde en scoort dus hoger. U kunt echter ook zien, dat de Nederlandse grafiek in het begin minder steil loopt. Dit betekent, dat het laagste percentiel P5 in Nederland relatief hoger scoort dan in de andere landen. De minderbegaafden in Nederland zitten dus relatief dicht op de gemiddelde leerlingen. Dus: als Nederland met de minderbegaafde leerlingen zou meedoen tegen de minderbegaafden van de andere landen, dan zouden we nóg hoger eindigen. De leerlingen die rondom het vijfde percentiel P5 zitten zijn de leerlingen van de praktijkscholen en in de 'lagere' leerwegen van het vmbo. Dus niet de vmbo-tl-leerlingen en hoger. Kortom: we doen in Nederland dus iets, dat goed is om de laagstbegaafden binnen de boot te houden. Wát we in Nederland goed doen, daarop geven de rapporten geen antwoord: het kan aan het onderwijs liggen, maar ook aan een relatief hoog beschavingspeil of economische welstand van de 'lagere' sociale groepen. Dat blijft speculatief.

De twee mega-studies geven al met al een interessant, maar ook incompleet beeld, dat schreeuwt om verder onderzoek. Ik kan uit de rapporten concluderen, dat Nederland het goed doet in vergelijking met de buurlanden. Uit geen van beide studies is een duidelijke voor- of achteruitgang te bespeuren. De goede Nederlandse prestatie kan ik bijvoorbeeld toeschrijven aan de relatief hoge prestatie van de leerlingen in de praktijkscholen en op het vmbo-kb/bb die rondom het vijfde percentiel P5 zitten. Wat betreft de hogere percentielen, dus voor de vmbo-tl-leerlingen en hoger, zouden we naar 'beter' kunnen streven. En gezien de scores van Finland in PISA en van Vlaanderen in PISA en TIMSS, moet dat ook haalbaar zijn.

Noot

[1] 'mathematical literacy' (volgens het Nederlandse PISA-rapport): de vaardigheid om – met gebruikmaking van wiskundige kennis – vraagstukken in een realistische context op te lossen.

Literatuur

Lezers die geïnteresseerd zijn in verschillen in prestaties tussen meisjes/jongens, leerlingen met een wel/niet-Nederlandstalige achtergrond en andere aspecten, verwijs ik naar de dikke rapporten. U kunt de meeste rapporten op Internet vinden:

- Het internationale PISA-2003 rapport 'Learning for Tomorrow's World' via: www.pisa.oecd.org/.

- Het Nederlandse PISA-2003 rapport 'Resultaten PISA-2003: praktische kennis en vaardigheden van 15-jarigen' door E. Gille e.a. via: www.citogroep.nl/.

- De Vlaamse PISA-2003 én TIMSS-2003 rapporten via: www.ond.vlaanderen.be/onderwijsstatistiek/.

- De internationale TIMSS-2003 rapporten voor rekenen/wiskunde en science via <http://timss.bc.edu/>.

- Het Nederlandse TIMSS-2003 rapport: 'Nederland in TIMSS 2003' door M. Meelissen & G. Doornekamp, Universiteit Twente, is te bestellen via tel.: 053-4892022.

Over de auteur

Pauline Vos (e-mailadres: f.p.vos@rug.nl) was wiskundelerares (o.a. vmbo en onderbouw havo/vwo) en deed onderzoek naar praktische wiskundevaardigheden van tweedeklassers. Haar vertrouwdheid met internationale studies komt doordat ze in het buitenland les gaf en meewerkte aan TIMSS-1999. Ze werkt aan het Instituut voor Didactiek en Onderwijsontwikkeling (IDO) van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen.

PROF. DR FRED. SCHUH NEGENTIG JAAR

Meer dan een halve eeuw geleden, zo omtrent 1910, had ik het genoegen kennis te maken met prof. Schuh, die op 7 maart 1965 zijn negentigste verjaardag vierde. Ik had toen de gelegenheid hem hulde te brengen voor al hetgeen hij toen reeds op het gebied van de wiskunde had verricht; nadien is er nog veel, onbegrijpelijk veel, van zijn hand verschenen, waarmee hij de wiskunde heeft verrijkt.

Het lag in de rede, dat ik hem bij de oprichting van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verzocht medewerker te worden; hij stemde toe en zijn naam is de enige, die thans bijkans tweënvijftig jaar onafgebroken in de lijst van medewerkers op het omslag voorkomt.

Hoe ernstig Schuh zijn medewerkerschap van het Tijdschrift heeft opgevat, moge blijken uit de onderstaande lijst van artikelen, die daarin van zijn hand verschenen.

...

Aan het artikel, dat wijlen ir W. J. Vollewens aan het leven van de toen tachtigjarige Schuh wijdde (jg 42 blz. 250), ontleen ik:

„Reeds in 1895 werd aan de twintigjarige student Schuh, die nog geen enkel academisch examen had afgelegd, de grote gouden medaille uitgereikt wegens de beantwoording van een prijsvraag, uitgeschreven door de faculteit der wis- en natuurkunde van de Amsterdamse universiteit. Hij deed zowel zijn kandidaatsexamen als zijn doctoraal examen met lof en promoveerde in 1905, weer met lof, op een proefschrift „Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen”. Vóór zijn promotie studeerde hij ook enkele semesters in het buitenland, o.a. in Göttingen onder leiding van Klein en Hilbert. Van 1902 af vervulde hij een betrekking bij het middelbaar onderwijs te Apeldoorn en te Sneek. Na zijn promotie bleef hij nog als leraar in Sneek en werd tegelijk toegelaten als privaatdocent aan de Universiteit te Groningen. In 1907, op 32-jarige leeftijd, volgde zijn benoeming tot hoogleraar, eerst in Delft (1907–1909), daarna in Groningen (1909–1916) en ten slotte weer in Delft (1916–1945) tot zijn emeritaat”.

Ik hoop van heler harte, dat Schuh nog enige jaren in het land der levenden moge blijven. Wat hij in zijn lange leven heeft gedaan, zal hij tot de laatste dag blijven doen: wiskunde en spelen. Als om dit te bevestigen, schreef hij voor deze aflevering het artikel „Vragen betreffende een onbepaalde vergelijking”, dat ik gaarne in de aandacht van de lezers aanbeveel.

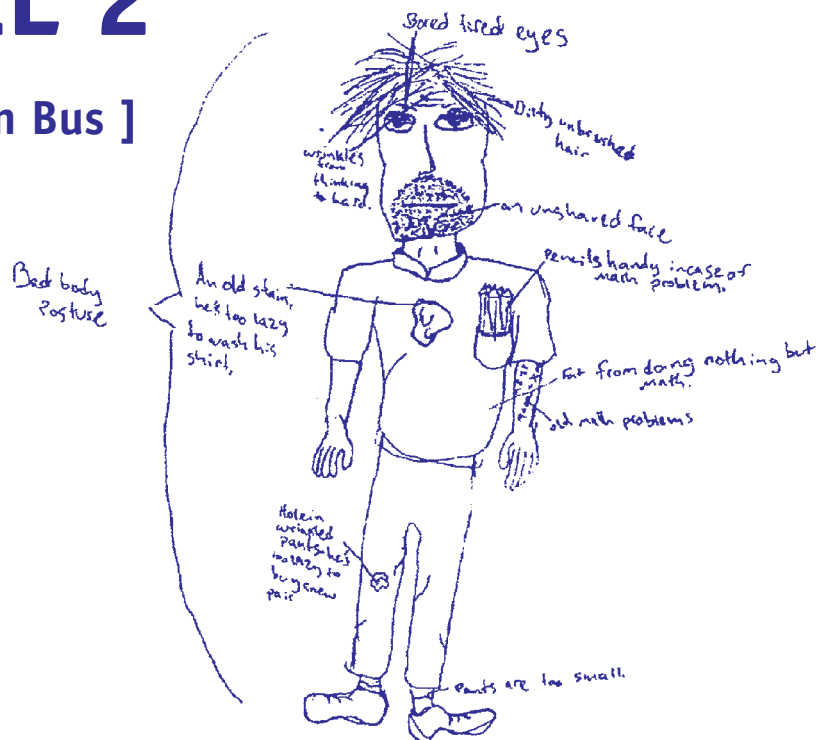
P. WIJDENES.

Gedeelten uit een artikel van P. Wijdenes in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 52 (1964–1965), pp. 190–192.

Opmerking. Prof.dr. F. Schuh overleed op 6 januari 1966.

ZWOEGEN DOOR DE MODDER EN ZWEVEN LANGS DE HEMEL, DEEL 2

[Evelien Bus]



FIGUUR 1 Tekening van een wiskundige door een jongen van ca. 12 jaar oud uit de Verenigde Staten.

FIGUUR 2 Geslacht van de wiskundige in de tekening, in procenten. In sommige gevallen is het geslacht niet duidelijk uit de tekening of uit de bijgeschreven tekst.

Ter inleiding (red.)

In Euclides 80-5 (het maartnummer) publiceerden we het eerste deel van *Zwoegen door de modder en zweven langs de hemel*, een tweeluik waarin Evelien Bus themagewijs een aantal resultaten bespreekt uit haar afstudeeronderzoek over de beleving van wiskunde door wiskundigen. In de eerste aflevering kwamen de thema's 'Verleiding en verlating' en 'Ploeteren en schitteren' aan bod. Wiskundigen verhaalden over hun ervaringen van trots, frustratie, schoonheid, verleiding en zwoegen. In dit tweede deel leest u over de thema's 'Onder wiskundigen' en 'Overdragen'. Wat vindt u van de beeldvorming rond wiskundigen? Gaat het u ter harte of laat het u koud? Kunnen we het ons (nog) permitteren om er geen consequenties uit te trekken?

Onder wiskundigen

De tekening in **figuur 1** werd gemaakt in het kader van een onderzoek naar de beeldvorming rond wiskundigen. Susan H. Picker en John S. Berry vroegen 476 kinderen van twaalf of dertien jaar oud een wiskundige te tekenen die aan het werk is. Ze ondervroegen kinderen uit de Verenigde Staten, Groot-Brittannië, Finland, Zweden en Roemenië[1]. De wiskundigen die werden getekend, waren bijna altijd mannen; zie **figuur 2**. Alleen de meisjes uit Groot-Brittannië maakten hierop een uitzondering: 57% van hen tekende een

Land	jongens die een man tekenen	jongens die een vrouw tekenen	meisjes die een man tekenen	meisjes die een vrouw tekenen
Verenigde Staten	94	3	61	31
Groot-Brittannië	94	6	41	57
Finland	86	0	41	57
Zweden	100	0	79	20
Roemenië	100	0	75	17

vrouwelijke wiskundige. Dit resultaat wordt door de onderzoekers toegeschreven aan de invloed van het televisieprogramma *Countdown*, met de televisiester Carol Vorderman, een voormalig ingenieur. Ruim 21% van alle kinderen tekende een wiskundeleraar. De onderzoekers vonden zeven karakteristieken die in elk land door één of meerdere kinderen getekend werden.

1. Wiskundedocenten gebruiken intimidatie, geweld of dreiging om hun leerlingen wiskunde te laten leren.
2. Wiskundigen ontberen gezond verstand, hebben geen oog voor kleding of kunnen zelf niet rekenen. Kortom, ze zijn dwaas.
3. Wiskundigen zien er gespannen of overspannen uit.
4. Wiskundigen kunnen niet lesgeven. Ze kunnen geen orde houden of beheersen zelf de stof niet.
5. Wiskundigen zijn verachtelijk, omdat ze bijvoorbeeld te slim zijn.

6. Wiskundigen lijken op Einstein.
 7. Wiskundigen hebben speciale krachten.
- Wiskundigen worden afgebeeld als een soort tovenaars.

De kinderen lijken hun tekeningen niet te baseren op de wiskundedocent die ze op dat moment hebben, rapporteren de onderzoekers. De jongen die de tekening van [figuur 1](#) maakte, had bijvoorbeeld een vrouwelijke, Aziatische docent. De onderzoekers veronderstellen dat de beelden overgedragen worden door de media en de directe omgeving.

In boeken, films en in het theater is er inderdaad sprake van een eenzijdige beeldvorming van wiskundigen. Janelle L. Wilson (*associate professor* in sociologie en antropologie aan de University of Minnesota Duluth) en Carmen M. Latterell (*assistant professor* in wiskunde en statistiek aan dezelfde universiteit) hebben onderzocht hoe wiskundigen worden geportretteerd in de Verenigde Staten[2]. Dit blijkt bijna altijd negatief te zijn. In populaire strips worden ze meestal afgebeeld als *nerds* of *social misfits*. Als er al een wiskundige voorkomt als personage in een roman, film of theaterstuk, dan is het meestal iemand met problemen. Vaak psychische problemen. Ter illustratie: van de zestig onderzochte romans waarin een wiskundige voorkomt, gaat het in 45% van de gevallen om personages die in die problemen zitten en in nog eens 20% van de gevallen om mensen die gek zijn. Hierbij wordt verwezen naar een onderzoek van Alex Kasman.

In hoeverre komen deze veronderstellingen overeen met de werkelijke situatie? Dat de meeste tieners zich een man voorstellen als ze aan een wiskundige denken, is niet onterecht. In Nederland zijn de mannen ruim in de meerderheid bij de studie wiskunde. In het collegejaar 2002/2003 stonden er 150 vrouwelijke studenten ingeschreven op een totaal van 540 (bron: CBS). Onder de universitaire onderzoekers en docenten is de verhouding vrouw/man nog kleiner. Van de 100 promovendi en post-docs die in 2003 gesubsidieerd werden door NWO waren er 19 vrouw (bron: NWO). Hoe hoger de functie, des te minder vrouwen. Onder de ongeveer honderd hoogleraren wiskunde aan de Nederlandse universiteiten waren er in 2004 maar twee vrouwen[4].

De wiskundigen die ik ken, zien er zeker niet zo slonzig uit als de Amerikaanse jongen tekende ([figuur 1](#)). Toch klopt het dat wiskundeonderzoekers op de universiteit over het algemeen weinig aandacht aan hun uiterlijk besteden. De standaardoutfit bestaat uit een onopvallende blouse of trui op een spijkerbroek of eenvoudige pantalon, soms met jaren lang hetzelfde jasje.

De vaak gehoorde veronderstelling dat de gemiddelde wiskundige op leeftijd is, is terecht. De populatie van Nederlandse wiskundigen is sterker aan het vergrijzen dan de Nederlandse bevolking in het

algemeen. Er is een dalende trend in de instroom van wiskundestudenten. Jong talent kan op de universiteiten moeilijk doorstromen vanwege het opheffen van leerstoelen als gevolg van bezuinigingen[5]. In 2002 was meer dan de helft van de (gewone) hoogleraren ouder dan 55. Over de geestelijke gezondheid en sociale vaardigheden van wiskundigen in het algemeen heb ik in de literatuur geen onderbouwde gegevens kunnen vinden. Zelf geloof ik dat het met de geestelijke gezondheid van wiskundigen niet zo slecht gesteld is. Alle wiskundigen die ik ken, zijn bij hun volle verstand.

‘Mijn studiegenoten vonden het maar raar dat ik lid was geworden van een studentenvereniging en zochten niet echt contact’, zei Simone van Neerven, medewerker bij de technische dienst van de KLM. ‘Ik was zelf ook in niemand echt geïnteresseerd. Ik vond het *nerd*-gehalte erg hoog. Bijna alle studenten woonden nog bij hun ouders. Ze kwamen om negen uur aan, stapten direct de collegebanken in, aten ‘s middags netjes hun boterhammen op en gingen om vijf uur weer naar huis. Ze leken een afgevlakt leven te leiden, je zag ze nooit gelukkig of ongelukkig zijn. Ze leken ook een beetje los te staan van wat er in het dagelijks leven gebeurt. Op de middelbare school had je een groepje hele populaire mensen, je had een grote groep van *go with the flow* en je had een groepje uitzonderingen. Wiskundestudenten horen bij dat groepje uitzonderingen. Ook het merendeel van de docenten vond ik ver van de werkelijke wereld staan.’

‘De tafelgesprekken op conferenties zijn vaak verschrikkelijk’, zegt ook Klaas Landsman, hoogleraar in de mathematische fysica aan de Universiteit van Amsterdam in zijn interview, ‘ze gaan meestal over wiskunde. Ik vind het zelf niet bijzonder aangenaam om daarover aan tafel te praten. Maar het is nog erger om met wiskundigen over iets anders dan wiskunde te praten. Als het al een keer over zo iets als politiek gaat, hoor je meestal heel oppervlakkige meningen. In Nederland gaat het bij seminaria bijna altijd over organisatorische dingen. Voor mij is de interactie met wiskundigen slechter dan die met de gemiddelde mens.’

In totaal deden negen van de zeventien geïnterviewden negatieve uitspraken over wiskundestudenten of over wiskundigen in het algemeen. Ze noemden de volgende aspecten:

- Wiskundestudenten zijn gesloten en contactschuw.
- Wiskundestudenten zijn serieus en ongezellig.
- Universitaire wiskundedocenten staan ver van de werkelijke wereld af.

- Wiskundigen hebben over het algemeen weinig interessants te melden over andere zaken dan wiskunde.
- Universitaire docenten en collega-onderzoekers zijn arrogant en afstandelijk.
- Wiskundeonderzoekers zijn erg competitief ingesteld.

Over wiskundestudenten en wiskundigen in het algemeen zijn er ook vele positieve dingen te zeggen. Simone van Neerven: 'Momenteel werk ik bij de technische dienst van KLM. Hoewel bij KLM nogal wat wiskundigen en econometristen werken, zitten er weinig in mijn directe omgeving. Ik zou meer met bèta's willen samenwerken. Die denken vaak gestructureerd, snel en analytisch. Ik kan helemaal kriegel worden van mensen die met hun vragen en opmerkingen continu van de kern van de zaak afdwalen.'

Tien van de zeventien geïnterviewden noemden één of meer positieve eigenschappen van wiskundigen:

- Wiskundigen zijn geïnteresseerd, vriendelijk en behulpzaam.
- Er zijn genoeg wiskundigen die het waard zijn om vriendschap mee te sluiten.
- Wiskundigen zijn niet competitief ingesteld.
- Wiskundigen komen in gesprekken snel tot de kern van de zaak.

Persoonlijk zie ik ook toewijding, eerlijkheid en tolerantie als veelvoorkomende deugden van wiskundigen.

Overdragen, een kunst op zich

'Een ruwe schatting leert dat ik, sinds mijn tijd als afstudeerder in 1985, ongeveer 1000 voordrachten op het gebied van de theoretische natuurkunde en wiskunde heb aangehoord. Van deze 1000 heb ik een stuk of 10 verhalen van het begin tot het eind begrepen', schrijft Klaas Landsman in 2001 in het Nieuw Archief voor Wiskunde[7]. 'Maar van de helft heb ik zo weinig opgestoken, dat een verzuuchting van W.F. Hermans steeds in mij opkwam: Hoe kom ik hier vandaan? Hoe kom ik hier in Godsnaam vandaan? De rest zat hier ergens tussenin. Lange tijd dacht ik dat het aan mijzelf lag dat ik al deze voordrachten niet begreep. Toen ik student was, meende ik dat seminariumvoordrachten waren gericht op afgestudeerden. Toen ik promovendus was ging ik ervan uit dat je gepromoveerd moest zijn om de gemiddelde voordracht te kunnen begrijpen. Toen ik gepromoveerd was leek het mij duidelijk dat seminaria uitsluitend door hoogleraren op waarde kunnen worden geschat, en ook voor die groep bedoeld zijn. Veel sprekers wekken die indruk in ieder geval, en veel hoogleraren horen ieder seminarium blakend van zelfvertrouwen aan.' Bovenstaand citaat heb ik aan de andere geïnterviewden voorgelegd. Niemand was verbaasd. Ongeveer de helft viel Klaas volmondig bij. Henk Barendregt: 'Klaas verwoordt het uitstekend. Ik ga daarom niet zo vaak naar voordrachten. Ik kies zorgvuldig uit naar welke ik wel ga.' Ook vragen stellen heeft geen zin, zeggen sommige geïnterviewden. Er is geen beginnen aan. Veel voordrachten zijn onbegrijpelijk, omdat de spreker te snel gaat of op een te hoog niveau start, zeggen de geïnterviewde onderzoekers. Volgens Mark Peletier, tegenwoordig hoogleraar aan de Technische Universiteit Eindhoven, heeft dat te maken met

een wijdverbreid misverstand: 'Men denkt: als het niet moeilijk en veel is, kan het ook niet goed zijn.' Daarnaast geven sommige sprekers geen goede inleiding. Frans Oort: 'Sommigen beginnen direct met de details. Ze vertellen niet wat de grote lijn is.' Ook komt het veel voor dat de presentatietechniek te wensen over laat, zeggen de geïnterviewden. Een ideale voordracht, zeggen de geïnterviewden, bevat de volgende elementen: een goede inleiding met opbouw en doel van het praatje, simpele voorbeelden aan het begin, wiskundige context, prikkeling van de intuïtie, beperkte hoeveelheid stof, interactie met het publiek.

Slechte voordrachten vormen een grote frustratie voor de geïnterviewden, maar niet iedereen is ervan overtuigd dat het beter kan. Het is vaak niet mogelijk om voordrachten voor het hele publiek begrijpelijk te laten zijn, zeggen sommigen. Mark Peletier: 'Een voordracht is geen college. Mensen verwachten dat je in een voordracht nieuwe dingen laat zien. Het is niet mogelijk om iedereen alles te laten begrijpen. Promovendi hebben soms gewoon



Henk Barendregt



Frans Oort



Eduard Looijenga

niet genoeg ervaring.' Eduard Looijenga: 'De ervaring leert dat de voordrachten die helemaal te volgen zijn, in het algemeen niet de interessantste zijn. Je moet als toehoorder niet verlangen dat je een colloquiumvoordracht woord voor woord begrijpt. Het is al heel mooi als je één nieuw idee hoort.' Van voordrachten die je niet begrijpt, kun je toch veel leren, zeggen enkelen. Frans Oort: 'Veel voordrachten worden slecht gegeven, dat ben ik met Klaas Landsman eens. Maar hij onderschat de osmose. Ik heb een jaar lang in Parijs gestudeerd. Wat daar gebeurde, ging ver boven mijn pet. Toch heb ik er ontzettend veel geleerd. Bijvoorbeeld wat

de moeilijke zaken zijn in een vakgebied en welke dingen vanzelf spreken.’

Tenslotte zeggen sommige geïnterviewden het niet onprettig te vinden om bij een voordracht te zitten die ze niet kunnen volgen: eindelijk de kans om ongestoord aan je eigen onderzoek te denken, eindelijk rust.

Ook colleges zijn niet altijd voor iedereen begrijpelijk. Vrijwel alle geïnterviewden hebben herinneringen aan colleges die voor hen te abstract waren of teveel stof bevatten. Rainer Kaenders: ‘In het eerste studiejaar snapte ik al na drie weken de colleges niet meer. Men zei dat dat normaal was en dat je maanden lang hard moest werken. Als je tegen de kerst weer wat begreep, zat je goed. Je moest leren door osmose.’ Svetlana Borovkova, universitair docent in de kansrekening en statistiek aan de Technische Universiteit Delft: ‘De colleges tijdens de masterclass aan de Universiteit Utrecht gingen grotendeels aan mij voorbij. Ik had slechts een vaag intuïtief gevoel bij de stof.’

Hoe komt het dat colleges onbegrijpelijk zijn? Docenten gaan te snel of veronderstellen een te hoog beginniveau, zeggen sommige geïnterviewden. Docenten beginnen zonder inleiding of motivatie. Klaas Landsman: ‘In het tweede jaar miste ik bij het vak topologie een historische of andere motivatie. Ik zie nog voor me hoe de docent in het eerste college zonder enige uitleg axioma’s op het bord schreef.’ Ook ontbreekt het aan goede presentatievaardigheden. Simone van Neerven: ‘Sommige professoren stonden met hun rug naar de klas toe uit te leggen. Aan het einde van de zin gingen ze steeds zachter gingen praten. Ik was dan helemaal ‘los’, had totaal geen connectie met wat zo iemand vertelde.’

Andere thema’s

In deze twee artikelen zijn vier van de zeven thema’s uit mijn afstudeeronderzoek besproken, die elk een bepaalde kant belichten van de beleving van wiskunde. In mijn scriptie bespreek ik nog drie andere thema’s:

- Is wiskunde zinvol, of is het abstracte onzin?
- Wiskunde, doe je dat alleen of samen?
- Het conflict tussen verstand en gevoel.

Conclusie

Mijn persoonlijke worsteling met wiskunde was niet uniek. De geïnterviewden worstelden zelfs met nagenoeg dezelfde thema’s: de moeilijkheid van het vak, de ‘onmaatschappelijkheid’, de eenzaamheid, de cultuur onder wiskundestudenten en -docenten. Jammer dat daar niet méér over wordt gepraat. Ik hoop dat mijn afstudeeronderzoek en dit artikel ertoe mogen bijdragen dat het een gespreksonderwerp wordt, vooral tussen docenten en leerlingen die vastlopen zoals mij aanvankelijk is overkomen.

Met dank aan Chris Zaal.

Epiloog

De resultaten van Eveliens afstudeeronderzoek hebben haar eigen lesgeven beïnvloed. Aan Euclides-redacteur Klaske Blom vertelt ze hoe:

‘Wiskunde moet een context hebben voor een leerling of student, anders wordt het luchtفيتserij. Ik bedoel dat nieuwe wiskunde aan moet sluiten op natuurlijke vragen. Dit kunnen praktische vragen zijn, zoals: “Hoe kun je de resultaten van een bepaalde steekproef op een verstandige manier interpreteren?”, maar ook meer theoretische vragen: “Hoe zou ons getallenstelsel eruit zien als er wél een getal is dat in het kwadraat gelijk is aan -1 ?”

Op de universiteit heb ik hele cursussen gevolgd over abstracte objecten waarvan ik geen enkel voorbeeld kende. Het sloot niet aan bij wat ik wilde weten. Dat was vervelend en vervreemdend. Wiskunde was niet meer van mij. Als docent nu doe ik mijn best een context aan te reiken aan mijn studenten, bij elk nieuw onderwerp. Ik probeer ook te beginnen bij het meest eenvoudige begin. Ik bespreek wat de relevantie is van een nieuw onderwerp, op welk moment in de geschiedenis het zich voor het eerst aandiende, in welk perspectief het gezien moet worden, waar het naar toe gaat en welke betekenis het heeft. Voor zover ik dat zelf weet natuurlijk. Zie hier het belang om zelf ver boven de stof te staan. Sommige stof blijft voor studenten uit de lucht vallen. Volgens mij helpt het om dat te benoemen. De meeste leerlingen hebben in de brugklas affiniteit met wiskunde; het gaat mis op het moment dat we leerlingen te lang zonder heldere motivatie moeilijke dingen laten doen en ze niet de ervaring krijgen dat er licht komt in de duisternis. Dan gooien we als docenten ons vak in een bodemloze put.’

Noot

De volledige scriptie is te downloaden via www.math.uu.nl/people/vorst/links.html.

Bronnen

-
- [1] Susan H. Picker, John S. Berry: Investigating pupils’ images of mathematicians. In: Educational Studies in Mathematics, nummer 43, pp. 65-94. Kluwer Academic Publishers (2001).
 - [2] Janelle L. Wilson, Carmen M. Latterell: Nerds? Or nuts? Pop culture portrayals of mathematicians. In: A Review of General Semantics. ETC (zomer 2001).
 - [3] Vereniging van Universiteiten (VSNU): Onderwijsvisie wiskunde. Utrecht (2002).
 - [4] Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen: De toekomst van het wiskunde-onderzoek in Nederland. Amsterdam: Verkenningen (1999).
 - [5] Klaas Landsman: Hoe geef ik een wiskundige voordracht? In: Nieuw Archief voor Wiskunde, 5e serie, deel 2, nummer 4 (december 2001), pp. 351-355.

Over de auteur

Evelien Bus (e-mailadres: evelien.bus@hvu.nl) is sinds 2003 docent aan de lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Utrecht.

Twee tentamenopgaven

[Rob Bosch]

Het tentamen

In een tentamen analyse heb ik enige tijd geleden de volgende opgave opgenomen.

Op $[0, 9]$ is gegeven de functie $f(x) = \sqrt{x}$. Voor welke c , met $0 \leq c \leq 9$, is de oppervlakte van het gebied G tussen de raaklijn in het punt $C(c, f(c))$, de grafiek van f en de lijnen $x = 0$ en $x = 9$ minimaal? Zie figuur 1.

We stellen eerst de vergelijking van de raaklijn op. De algemene vergelijking daarvan is:

$$y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$$

Voor de gegeven functie wordt dit:

$$y = \sqrt{c} + \frac{1}{2\sqrt{c}}(x - c)$$

De functie $f(x) = \sqrt{x}$ is concaaf (d.w.z. $f''(x) < 0$) en dus ligt de raaklijn overal boven de grafiek van f . De oppervlakte $G(c)$ van het gevraagde gebied is derhalve:

$$G(c) = \int_0^9 \left(\sqrt{c} + \frac{1}{2\sqrt{c}}(x - c) - \sqrt{x} \right) dx$$

Integreren naar x geeft:

$$G(c) = \left[x\sqrt{c} + \frac{1}{4\sqrt{c}}(x - c)^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^9$$

waaruit volgt:

$$G(c) = 9\sqrt{c} + \frac{(9-c)^2}{4\sqrt{c}} - 18 - \frac{c^2}{4\sqrt{c}} = \frac{9}{2}\sqrt{c} + \frac{81}{4\sqrt{c}} - 18$$

Het minimum van de functie $G(c)$ vinden we uiteraard door te differentiëren naar c :

$$G'(c) = \frac{9}{4\sqrt{c}} - \frac{81}{8c\sqrt{c}}$$

Gelijkstellen aan 0 geeft $\frac{81}{8c\sqrt{c}} = \frac{9}{4\sqrt{c}}$, waaruit volgt dat $c = 4\frac{1}{2}$.

Uit het tekenoverzicht van $G'(c)$ zien we dat we inderdaad met een minimum te maken hebben.

Tijdens de bespreking van het tentamen merkte een student op dat het punt $c = 4\frac{1}{2}$ het midden is van het interval $[0, 9]$. Is dit toeval of niet? Daar had ik nog niet bij stilgestaan. Om dit te onderzoeken moeten we de zaak wat algemener aanpakken, dat wil zeggen we nemen het interval $[0, a]$ en kopiëren de bovenstaande berekeningswijze.

De integraal levert in dit geval:

$$G(c) = \left[x\sqrt{c} + \frac{1}{4\sqrt{c}}(x - c)^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^a$$

hetgeen na invullen van de grenzen en vereenvoudiging de volgende uitdrukking geeft:

$$G(c) = \frac{1}{2}a\sqrt{c} + \frac{a^2}{4\sqrt{c}} - \frac{2}{3}a\sqrt{a}$$

Differentiëren geeft nu $G'(c) = \frac{a}{4\sqrt{c}} - \frac{1}{8c\sqrt{c}}$, en gelijk-

stellen aan 0 levert dan $\frac{a}{4\sqrt{c}} = \frac{1}{8c\sqrt{c}}$ met $c = \frac{1}{2}a$.

Opmerkelijk, het punt c is voor elk interval het midden van dat interval. Een aardige ontdekking die je niet direct ziet aankomen.

Het hertentamen

Bij het hertentamen heb ik een soortgelijke opgave voorgelegd. De opgave luidde nu:

Op $[1, a]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{x}$. Voor welke c , met $1 \leq c \leq a$, is de oppervlakte van het gebied G tussen de raaklijn in het punt $C(c, f(c))$, de grafiek van f en de lijnen $x = 1$ en $x = a$ minimaal? Zie figuur 2.

In de oorspronkelijke opgave was $a = 8$, maar we pakken het hier maar meteen wat algemener aan.

De vergelijking van de raaklijn is:

$$y = \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}(x - c)$$

De functie $f(x) = \frac{1}{x}$ is convex (d.w.z. $f''(x) > 0$) en dus ligt de raaklijn overal onder de grafiek van f . De oppervlakte $G(c)$ van het gevraagde gebied is:

$$G(c) = \int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}(x - c) \right) dx$$

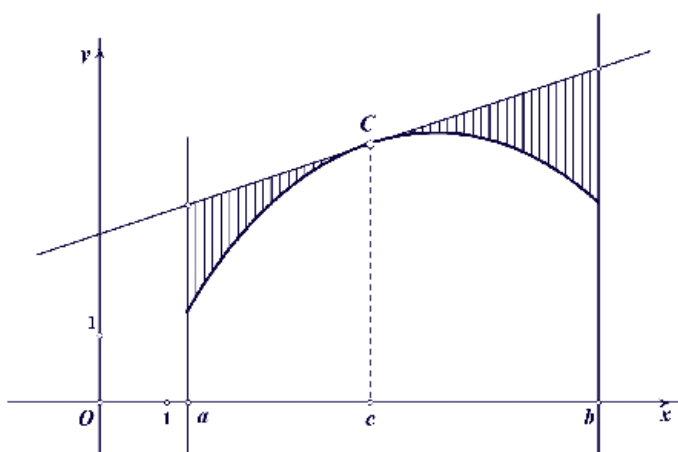
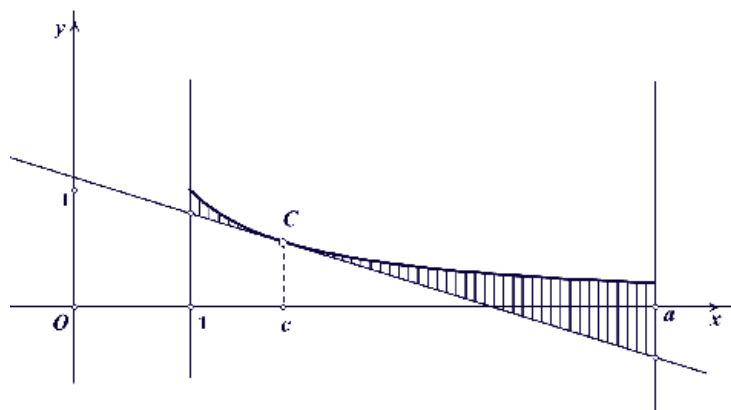
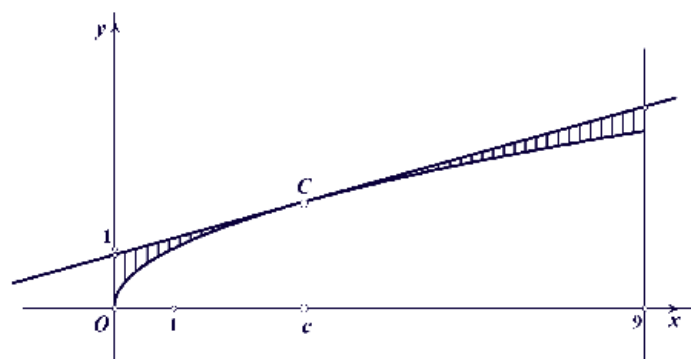
Deze integraal geeft:

$$G(c) = \left[\ln x - \frac{1}{c}x + \frac{1}{2c^2}(x - c)^2 \right]_1^a$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} G(c) &= \ln a - \frac{a}{c} + \frac{(a-c)^2}{2c^2} + \frac{1}{c} - \frac{(1-c)^2}{2c^2} \\ &= \ln a + \frac{a^2 - 1}{2c^2} - \frac{2(a-1)}{c} \end{aligned}$$

Het minimum van de functie $G(c)$ vinden we weer door te differentiëren:



FIGUUR 1,2 en 3

$$G'(c) = -\frac{a^2-1}{c^3} + \frac{2(a-1)}{c^2}$$

Gelijkstellen aan 0 geeft $\frac{a^2-1}{c^3} = \frac{2(a-1)}{c^2}$ of

$$\frac{1}{c}(a+1)(a-1) = 2(a-1), \text{ waaruit volgt } c = \frac{1}{2}(a+1).$$

Uit het tekenoverzicht van $G'(c)$ lezen we af dat we ook hier met een minimum te maken hebben.

Algemeen geldig?

Een student merkt na het hertentamen op dat het antwoord gelijk is aan het antwoord van de oorspronkelijke tentamenopgave, want het punt $c = \frac{1}{2}(a+1)$ is weer het midden van het gegeven interval $[1, a]$. En inderdaad, dat is zo. Het begint er op te lijken dat het gevraagde punt c altijd het midden van het interval is, *onafhankelijk* van de gegeven functie!

Om hier duidelijkheid over te krijgen moeten we *nog* algemener te werk gaan; kortom, we hebben een bewijs nodig.

Stelling. Zij f een differentieerbare functie op het interval $[a, b]$ zodat $f''(x) < 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Zij G het gebied begrensd door de raaklijn in het punt $C(c, f(c))$, met $c \in [a, b]$, de grafiek van f en de lijnen $x = a$ en $x = b$. Dan geldt:

De oppervlakte van G is minimaal voor $c = \frac{1}{2}(a+b)$.

Zie figuur 3.

Bewijs. De raaklijn in $C(c, f(c))$ wordt gegeven door:

$$y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$$

Voor de oppervlakte $G(c)$ van G geldt:

$$G(c) = \int_a^b (f(c) + f'(c) \cdot (x - c) - f(x)) dx$$

Omdat de grenzen onafhankelijk zijn van c , mogen we onder het integraalteken naar c differentiëren:

$$\begin{aligned} G'(c) &= \int_a^b (f'(c) + f''(c) \cdot (x - c) - f'(c)) dx \\ &= \int_a^b f''(c) \cdot (x - c) dx \end{aligned}$$

Integreren naar x geeft:

$$\begin{aligned} G'(c) &= \left[\frac{1}{2} f''(c) \cdot (x - c)^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} f''(c) \cdot (b - c)^2 - \frac{1}{2} f''(c) \cdot (a - c)^2 \end{aligned}$$

Gelijkstellen aan 0 geeft

$$\frac{1}{2} f''(c) \cdot (a - c)^2 = \frac{1}{2} f''(c) \cdot (b - c)^2 \text{ of } (a - c)^2 = (b - c)^2.$$

Omdat $a \neq b$ volgt nu $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Voor de tweede afgeleide naar c geldt:

$$\begin{aligned} G''(c) &= \frac{1}{2} f'''(c) \cdot (b - c)^2 - f''(c) \cdot (b - c) \\ &\quad - \frac{1}{2} f'''(c) \cdot (a - c)^2 + f''(c) \cdot (a - c) \end{aligned}$$

Samennemen van de termen met de tweede en derde afgeleide geeft:

$$\begin{aligned} G''(c) &= \frac{1}{2} f'''(c) \cdot \left[(b - c)^2 - (a - c)^2 \right] + f''(c) \cdot (a - c) - f''(c) \cdot (b - c) \\ &= \frac{1}{2} f'''(c) \cdot (b - a)(b + a - 2c) + f''(c) \cdot (a - b) \end{aligned}$$

Voor $c = \frac{1}{2}(a + b)$ valt de term met de derde afgeleide weg en blijft over: $G''(\frac{1}{2}(a + b)) = f''(\frac{1}{2}(a + b)) \cdot (a - b)$

Vanwege de vooronderstelling $f''(x) < 0$ en $a - b < 0$ geldt dus $G''(\frac{1}{2}(a + b)) > 0$, zodat we inderdaad een minimum hebben.

Het bewijs is gegeven voor concave functies. Voor convexe functies verloopt het bewijs analoog.

In het bewijs hebben we onder het integraalteken gedifferentieerd; daarmee zouden we de berekening van de twee opgaven kunnen vereenvoudigen. Daar deze techniek op het vwo niet aan de orde is, heb ik dat bij de opgaven maar niet gedaan.

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is redacteur van Euclides en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

EN HOE NU VERDER...

Versterking van de wiskunde van binnenuit

[Roel van Asselt]

Samenvatting

Jarenlange verschraling van de profielvakken wiskunde begint zijn tol te eisen. Pogingen tot nu toe om de wiskundediscipline aantrekkelijk te houden door grote variaties in onderwerpen en voorbeelden van de toepasbaarheid van wiskunde (contexten) hebben niet geholpen om het imago van wiskunde voor grote groepen leerlingen te verbeteren: breedheid en verschraling verdragen elkaar niet. Maar zijn die breedheid en de bewijsdwang van het nut van de wiskunde eigenlijk wel nodig? Ligt de kracht van de wiskunde niet in de wiskunde zelf? Wat zijn vanuit dat perspectief de mogelijkheden (nog) om de aantrekkelijkheid van de wiskunde onder leerlingen te vergroten bij de herziening van de wiskundeprogramma's vanaf 2007? Een van de conclusies is: zorg er in ieder geval voor dat datgene wat nog wel wordt onderwezen, ook echt begrepen en beheerst wordt.

Aanleiding

Dinsdag 1 februari jl. organiseerde het ministerie van OCenW een expertmeeting over de nadere invulling van de vakken wiskunde voor het havo en het vwo vanaf 2007. Een bezinning op de inhoud was noodzakelijk in verband met de rigoureuze vermindering van het aantal beschikbare sluis voor de profielvakken wiskunde. Tevens werd naar opinies gevraagd over de te ontwikkelen inhoud na 2007 van mogelijk aanvullende vakken voortgezette wiskunde, het vak wiskunde-C en de inbreng vanuit de wiskundediscipline in het nieuwe bètavak. In het tweede deel van de dag werd gediscussieerd over de wijze waarop wiskunde (weer) een aantrekkelijke discipline kan worden voor vo-leerlingen en ho-studenten.

Het was een goede bijeenkomst. We werden het 's morgens, tandenknarsend, eens over de nog resterende inhouden van de zeer verschaalde wiskundeprogramma's in de profielen. Er lag een helder voorstel van de NVvW waarover zakelijk van gedachten kon worden gewisseld; op een aantal beslispunten na kon men zich vinden in de voorstellen.

Passie

Voor mij zat het belang van de meeting, mede met het oog op de doorstroom naar de vervolgoopleidingen, in het middagdeel. De centrale vraag was: 'Hoe maken we het wiskundeonderwijs weer aantrekkelijk', vanuit het perspectief van de kiezende leerling (profielkeuze) en de kiezende student (bèta- of technische studie). Op deze vraag dienen we als collectief van wiskundigen en docenten vanaf nu met extra energie een antwoord te geven.

Naast het Manifest (bijgesloten in Euclides 80-3, 2004) dat al een aantal zeer bruikbare procesmatige aspecten en didactische ambities in beeld brengt, denk ik dat ook vanuit *de wiskundeprogramma's zelf* de power moet komen om het imago van de discipline te verbeteren. Kort gezegd: het eigene, het intrigerende van wiskunde zou terug moeten keren in de programma's; het vak moet weer meer passie krijgen. Een passie die verdreven lijkt door de introducties van te veel, voor leerlingen weinig betekenisvolle contexten, te veel oppervlakkigheid in de huidige programma's en de struikelpartijen van wel-gemotiveerde leerlingen over iedere breuk en ieder min-teken.

Mogelijkheden

In het kort liggen mijns inziens binnen de omstandigheden van het schoolvak wiskunde op dit moment de volgende mogelijkheden, onderscheiden in pedagogisch-didactische aspecten en programmatische aspecten.

Pedagogisch-didactische mogelijkheden

- Ontwikkel bij de leerlingen meer algebraïsche vaardigheden en formulevaardigheden, met als doel om met meer zelfvertrouwen en met meer gebruiksgemak de wiskunde en haar toepassingen te kunnen beoefenen. Ook de ontwikkeling van ICT-vaardigheden wordt in de tweede fase en in vervolgstudies geremd omdat leerlingen over onvoldoende algebraïsche vaardigheden beschikken, bijvoorbeeld bij het inbrengen en uitlezen van formules. De oefentijd voor algebraïsche vaardigheden is er nu niet (meer) in de tweede fase vanwege de stelselmatige verschraling van het aantal

slu's. Die oefentijd zal dan ook grotendeels in de basisvorming gevonden moeten worden en moeten worden onderhouden in de tweede fase. Laten we die extra geoefendheid nu niet meteen afdoen als 'sometjescultuur'; wat is daar zo erg aan? Iedere conservatoriumstudent zal ons kunnen uitleggen dat oefenen en nog eens oefenen het enige is dat zelfvertrouwen en progressie in de speel- en interpretatievaardigheden brengt; zelfs: hoe groter het talent hoe meer oefening vereist is.

- Richt het onderwijs zo in, dat in de vraagstukken die moeten worden opgelost de leerling eigen oplossingsroutes moet bedenken (desnoods complexe patronen moet herkennen). Wie de huidige CE-wiskundevraagstukken analyseert, bemerkt dat leerlingen oplossingsroutes moeten volgen van (a) tot en met (f) die ze zelf nooit zouden hebben kunnen bedenken; hun creativiteit is voorgeprogrammeerd. Dat maakt de leerling afhankelijk en maakt de wiskundediscipline spanningsloos.

- Zorg ervoor dat leerlingen juist in de wiskunde het verschil leren tussen *herkennen* en *kennen*; met *kennen* is dan bedoeld het echt begrijpen en eigen maken van begrippen (wiskunde is als 'wisconst' altijd de 'leer der zekerheden' geweest; zuiverheid van redeneren en eenduidige begrippenkaders vervullen daarin een cruciale rol). Juist voor jongvolwassenen is het van belang te weten wanneer ze iets echt begrijpen: ze leggen daarin de basis voor een juiste leerbeleving en een attitude voor effectief levenslang leren.

Programmatistische mogelijkheden

- Ban iedere vorm van oppervlakkigheid en vluchtigheid uit. Liever een aantal paragrafen of eindtermen minder; ook met wat minder leerstof wordt de essentie en de betekenis van de discipline wel duidelijk, te meer als de stof meer diepgaand kan worden bestudeerd en begrepen. Voorkom het imago van wiskunde als een discipline die enigszins richtingloos van het ene onderwerp naar het andere meandert.
- Gebruik als context zoveel mogelijk de leergebieden uit de andere profielvakken van de leerling of uit programmaonderdelen van vervolgopleidingen. Die brede inzetbaarheid van de wiskunde in zaken die voor leerlingen betekenis hebben (namelijk de andere leertaken uit het profiel of de vervolgopleiding) geeft de wiskunde het overtuigend imago van een 'universele' wetenschap en communicatie-instrument. Sluit daarbij aan op 'majeure' meeslepende contexten zoals overbevolking, klimaatverandering, cultuurverschillen en bewezen betekenisvolle contexten uit ANW. Vermijd het gebruik van alleen huis-, tuin- en keukencontexten.
- Heroverweeg de inzet van de grafische rekenmachine (GRM) zó, dat de sterke afhankelijkheid van dat (prachtige) middel de eigen creativiteit van de leerling niet in de weg gaat zitten. Vaak merken we dat leerlingen en studenten de rekenmachines voor verkeerde opdrachten gebruiken

of alles willen narekenen vanwege het gebrek aan zelfvertrouwen. Bedenk dat de GRM door collega-docenten uit andere vakken als een typische artefact van wiskundigen wordt gezien. Overigens, buiten het secundair onderwijs wordt de GRM niet gebruikt, ook niet door beroepsbeoefenaren. In het hoger onderwijs wordt de GRM in het technisch en economisch onderwijs nauwelijks gebruikt; het gaat daar vooral om de inzet van ICT bij de verwerving en distributie van informatie, tekstverwerking, applicatiegebruik en computeralgebra - hoewel dat laatste nooit echt is doorgebroken, noch in de wiskunde noch in de meer beroepsgerichte vakken.

- Betrek de wiskunde nadrukkelijk bij het nieuwe bètavak; het is voor de positie van het school- en profielvak van belang er bij te zijn, en het creëert rijke en relevante contexten.

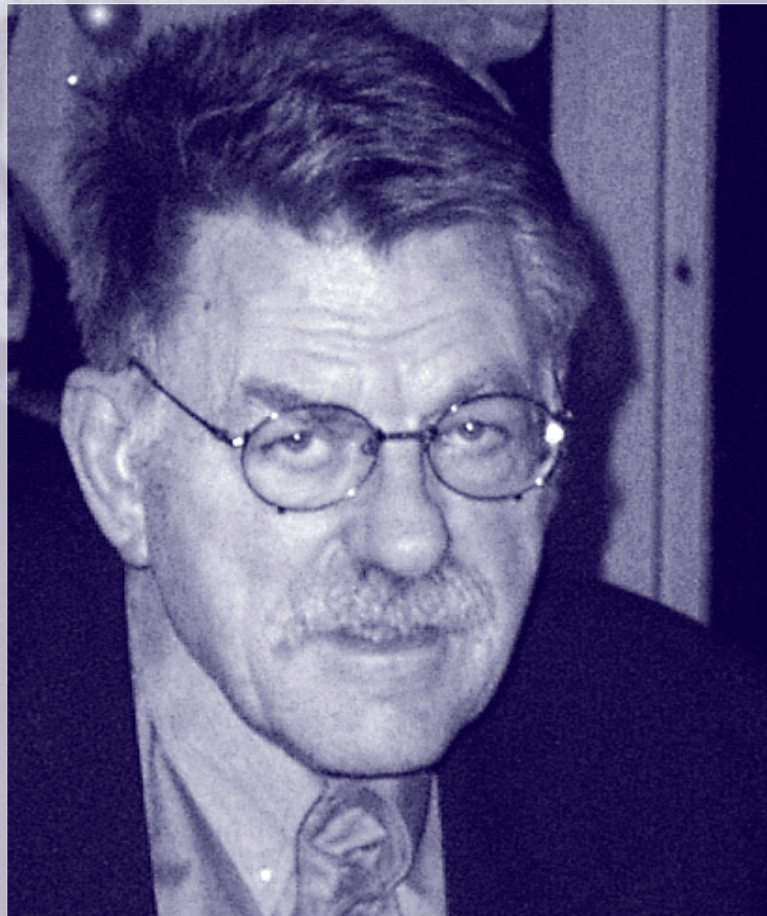
Beheersingsniveau en vervolgopleidingen

Er zijn in het vervolgonderwijs (ook onder studenten) grote zorgen over de reductie van de inhoud van het wiskundeprogramma. Voor de aansluiting op het hoger onderwijs geldt onder deze omstandigheid des te meer dat datgene wat nog wél in de programma's aan de orde komt ook daadwerkelijk wordt begrepen en beheerst. Dat komt de bruikbaarheid (en dus het imago) van wiskunde ten goede. Gekoppeld aan vaardigheden in probleemoplossen, modelvorming en beheersing van algebraïsche vaardigheden zal het imago van wiskunde ook in vervolgopleidingen versterkt kunnen worden. In ieder geval zouden enormiteiten die studenten nu soms laten zien (zie de beschrijving van Rob Bosch in Euclides 80-4, januari 2005) niet meer voor mogen komen; dat draagt zeker niet bij aan versterking van het imago van wiskunde in het vervolgonderwijs, maar ook niet in de tweede fase.

In een recent uitgebreid onderzoek naar de ervaringen van eerstejaars studenten van de Universiteit van Twente met het vak Wiskunde hebben studenten interessante en behartenswaardige opmerkingen geplaatst over de wiskunde-aansluiting en over de inhoud van de wo- en vwo-programma's en didactiek. Het zou goed zijn om in een van de volgende nummers van Euclides de studenten eens aan het woord te laten en er inspiratie uit te halen om de afkalving van het schoolvak wiskunde te stoppen, en om wat meer overzichtelijk maatwerk te leveren voor de vervolgopleidingen.

Over de auteur

Roel van Asselt (e-mailadres: r.v.asselt@wxs.nl) is lector Instroommanagement en Aansluiting bij Saxion Hogescholen.



INSPIRATIE UIT OUDEMOLEN

Verslag van een bezoek aan en interview met Gerrit Krol
[Klaske Blom en Frank van den Heuvel]

Kennismaking

'Ik had het niet gek gevonden als het me gelukt was om over water te lopen. Ik vond wel dat Jezus een concurrent aan mij had. De praktijk wees uit dat het niet ging, wat me eigenlijk wel verbaasde. Maar mijn superieure droompjes verdwijnen ook weer snel hoor en ik ben realist genoeg om de waarheid in het dagelijks leven te onderkennen. Dan moet ook ik, net als iedereen, laarzen aan trekken om droge voeten te houden.' Alzo sprak Gerrit Krol uit Oudemolen.

Op bezoek bij Gerrit Krol vanwege de verschijning van zijn nieuwste boek, *Rondo Veneziano*, genoten we bijzonder van zijn gastvrijheid en die van zijn vrouw Janna en werden we buitengewoon geboeid en vrolijk door zijn ideeën. *Rondo Veneziano* is tot stand gekomen na een verblijf van twee maanden in Venetië, waar Krol en zijn vrouw Janna een appartement midden in de stad bewoonden. 'Gewone boodschappen met gewone wijn, dat was drie bruggen. Maar een beetje lekkere boodschappen met hele lekkere wijn dat was vijf bruggen.' Krol won in 2001 de P.C. Hooftprijs en heeft het bijbehorende geldbedrag besteed aan een verblijf in Venetië om onderzoek te doen ten behoeve van zijn laatste boek. 'Venetië, een prachtplek voor verliefde stellen, maar ook eentje die in druilerig weer gemedend moet worden door depressieve mensen', aldus Janna. Zij heeft geprobeerd Gerrit over te halen om het wiskundegedeelte in de roman in te korten om daarmee het romangedeelte drie keer zo dik te kunnen maken; met al het prachtmateriaal wat ze in Venetië verzameld hadden kon dat best in haar ogen. Krol wilde echter geen reisverslag schrijven, maar bleek gevoelig voor Janna's opvattingen: in de romantische verhaallijn over Vicky en Pipper neemt hij de lezer meer bij de hand dan hij zelf geneigd zou zijn om te doen; hij houdt zelf van grote gedachtesprongen om te voorkomen dat de verveling toeslaat.

In onderstaand artikel schetsen we u een portret van deze inspirerende man. En ervan uitgaande dat u ook weet dat een roman fictie is, citeren we ter illustratie fragmenten uit zijn boek *Rondo Veneziano*. Laat u niet verleiden om de gelijkenis te zoeken tussen Gerrit Krol en de genoemde romanfiguren.

De auteur over zijn boek

'*Rondo Veneziano* gaat over een wiskundige en over het vermoeden van Riemann, het moeilijkste vraagstuk dat er is. Ik heb heel lang op mijn tenen moeten staan om het allemaal te begrijpen en toen ik het eenmaal in romanvorm had achtergelaten, is de stof weer snel weggezakt. Maar ik heb er vreselijk veel plezier aan beleefd om het me een beetje voor te stellen, samen met mijn broer. In mijn boek is er van hetgeen we bestudeerd hebben niet zoveel overgebleven omdat het niet naar de wiskundige kant moet overhellen. Boeken met wiskunde erin zijn immers notoir onverkoopbaar. Ik wilde wel een neerslag van onze heroïsche strijd met het vermoeden van Riemann in het boek verwerken. De

bevlogenheid van iemand die van de theorie van de priemgetallen houdt. Het begint natuurlijk heel poëtisch. Pipers priemgetallen, dat zijn de sterren in de lucht.'

'Als je wilt schrijven over priemgetallen, is het beter een boek poëtisch te beginnen dan direct de wiskundige invalshoek te kiezen; dat zou literair gezien een valse start zijn. Pipper, de hoofdpersoon in het boek, is een beetje een oplichter, hij wekt de suggestie dat hij het Vermoeden van Riemann doorgrond heeft en een heus tegenvoorbeeld gevonden heeft.'

Uit *Rondo Veneziano*, p. 52:

(...) De Zëtafunctie heeft zich ontwikkeld tot een van de krachtigste hulpmiddelen in de wiskunde. Maar vat op Riemanns probleem heeft ze niet en dat is onbegrijpelijk. Hoe kan het dat een druppel helder water zoveel donkere gangen bevat?

Dit, in een notendop, was het avontuur waaraan ik mij had overgeleverd, de laatste maand in Göttingen. Ik volgde de colleges trouw, maar de inspiratie kreeg ik van de sterren. Ik zag 's avonds, en 's nachts, voor mijn tentje op de Hohe Reese gezeten, in elke ster een priemgetal.

Zoals bijna elke student heb ik nog een poging gedaan het Vermoeden te bewijzen. Ik haalde daarvoor de gammafunctie van stal: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots$, de algemene faculteitsfunctie, maar dan in het imaginaire vlak. (...)

Ik schreef het allemaal op in de vorm van een scriptie. Niet erg gebruikelijk, maar dan zou Nohl zich mij, hoopte ik, langer herinneren – 'die student uit Holland'. Omdat ik er met hem over praten wou, ging ik nog even bij hem langs. Hij was er wel, maar 'even' weg. Ik heb een kwartier zitten wachten, in de werkkamer van de professor. Rondgekeken. Hij leek mij met tien dingen tegelijk bezig...

En dan nu het delict.

Op het bureau ligt een stapeltje doctoraalbullens, voorzover ik dat kan zien. (...)

'De poort aan het eind van de roman is een soort monument, het markeert het moment waarop de rechte lijn van nulpunten (van de Zëtafunctie) even met een zigzag onderbroken wordt en dan weer verder gaat de eeuwigheid in. Daarmee is dat ene tegenvoorbeeld gevonden waarmee het vermoeden van Riemann ontkracht is. Het is natuurlijk fantasie, maar in één van de boeken ben ik het als plaatje tegengekomen, nadat ik het zelf bedacht had; dus dat vond ik tamelijk knap van mezelf. Het is toevallig dat het samen valt met het grote getal van Skewes. Ik hoop dat het duidelijk genoeg beschreven is voor enige lezer die niets van wiskunde weet.'

Uit *Rondo Veneziano*, p. 254:

Onze snelheid neemt af op het moment dat we vanaf de horizon een grote witte poort op ons af zien komen...

We stoppen, want boven de poort staat geschreven:

HET GETAL VAN SKEWES

We zetten de auto in de schaduw en stappen uit.
Er heerst een aangename temperatuur.
De zee in de diepte zorgt voor een eigen golfslag.
Boven onze hoofden, in de onmetelijk blauwe lucht – een schuifdak.
Het loket aan de binnenkant van de poort is gesloten.
Achter glas hangt de volgende annonce:

WELKOM

U bevindt zich zeer ver van de aarde:

$10^{10^{34}}$ km

Geniet van de rust en het fenomenale uitzicht.
Vergeet niet een foto te nemen van het Getal van
Skewes.
Goede reis!

‘Hoe zijn wij hier zo vlug gekomen,’ vroeg Vicky, nog steeds verbaasd.

‘We hebben grote stukken overgeslagen,’ antwoordde ik.
‘In een mathematische ruimte kan dat.’

Toen zag ik voor elk van de poten van de poort een oranje nulpunt liggen. Twee nulpunten dus. Hun verbindingslijn stond loodrecht op de middellijn. Derhalve lagen ze zelf ter zijde van de middellijn.

In uw boek zitten meer aanzetten tot wiskundige thema's, er is bijvoorbeeld een hoofdstuk waarin Pipper door een rijke Italiaanse dame wordt verleid om een succesvolle strategie voor het spelen met een kansautomaat te doordenken; het lukt hem nog ook!?

‘Ja, dat vinden mensen nou leuk. Iedereen heeft wel eens aan zo'n ding gestaan en zich afgevraagd wat de sleutel is tot succes. Een paar vrienden van mij geloven wat ik geschreven heb; er gaat zo'n overtuigingskracht van uit dat ze het stiekem geprobeerd hebben. Je staat versteld van wat mensen fantaseren over de mogelijkheid om zo'n machine te beïnvloeden. Ik ken iemand die altijd bezig is met die automaten, en die denkt dat er iemand is die haar bespiedt, daarom loopt ze heel onverschillig, mikt zo onopvallend mogelijk een muntje in de machine omdat ze de machine ziet als iemand die het beter weet.’

Uit *Rondo Veneziano*, p. 74:

Al die tijd speelde ze door. (...) Maar het grappige was – doordat zij een systeem volgde, was het systeem dat de machine volgde zichtbaar. Foutje van de programmeur. Ze kon er

op inspelen door nu en dan van haar systeem af te wijken. Zij speelde 7/9/7/9/7/9 enzovoort. Ik adviseerde haar op onregelmatige plaatsen die 7 en 9 om te draaien: 7/9/9/7/7/9/7/9/7/9/7/9 – daarmee krijg je de machine in de strop. Hij spartelt nog wel, maar jouw kansen nemen toe bij elke tegensparteling. Ook voor de speler is er geen weg terug, mits hij zich aan het systeem houdt. Dan komt alles op zijn pootjes terecht. De precisie die nodig is om op de maan te landen is niet groter dan de precisie waarmee in een loterij de eerste prijs wordt toegekend.

Het gesprek met Gerrit Krol brengt ons nu bij de beleving van wiskunde door niet-wiskundigen en bij de veroorzaker van leed en trauma's: ons wiskundeonderwijs. Veel volwassenen blijken slechte herinneringen te hebben aan de wiskundelessen van vroeger, maar voelen zich niet gehinderd door enige gêne over hun slechte prestaties op ons vakgebied. Sterker nog, veel mensen lijken te koketteren met hun wiskundig onvermogen. Hebt u een idee over de mogelijke oorzaken?

‘Ik heb ooit een lang verhaal geschreven over alfa's en bèta's en over de koketterie van mensen die niets van wiskunde weten. De verklaring lijkt mij te liggen in het feit dat wiskunde een doe-vak is: op school doe je eigenlijk hetzelfde als wat Euclides heeft gedaan; een stelling die al eeuwen geleden bewezen is, laten we leerlingen weer bewijzen. Je doet hem gewoon na, het blijft nog steeds dezelfde stelling. Met het lezen van gedichten is dat totaal anders: dat is eenmaal geschreven en interpreteer je; maar je gaat niemand op school vragen om ook zo'n gedicht te schrijven. Zeggen en schrijven zijn de functies waar het om gaat in ons leven. In bepaalde kringen is het mode om te zeggen dat je geen verstand hebt van wiskunde, zoals ander mensen zich er op voor laten staan dat ze nooit een boek lezen. Er zijn nou eenmaal veel dingen die mensen niet kunnen. Er is niets waarbij er geen mensen zijn die er afstand van nemen: je hebt mensen die niet van wiskunde houden; er zijn mensen die geen varkensvlees lusten; er zijn mensen die geen ei kunnen koken, überhaupt niet kunnen koken; er zijn mensen die niet van voetballen houden, in bepaalde kringen staat dat ook heel goed; er zijn mensen die nooit tv kijken; er zijn mannen die niet van meisjes houden; er is niemand die zegt geen gevoel voor humor te hebben; ik heb nooit iemand ontmoet die zich er op laat voorstaan dat hij geen gevoel voor humor heeft, gek hè?

En je had ook leerlingen op school die wilden geen opstel schrijven, terwijl ik het juist zo leuk vond. Dan werd de opdracht afgezwakt en moesten we een korter stuk schrijven, waar ik dan weer niets aan vond. Ik paste niet erg op die school. Maar ik kan wel altijd zeggen dat ik gymnasium gedaan heb, en

wiskunde gestudeerd heb. Niemand vraagt ooit of je het ook afgemaakt hebt, dus dan lijkt het echt of...'

Doen wij als docenten iets mis? U heeft wel eens gesuggereerd dat het lezen van klassiekers het ontstaan van trauma's over het wiskundeonderwijs zou kunnen voorkomen.

'In het literatuuronderwijs lezen we Goethe en andere grootheden van de geest; we pretenderen niet dat we ook zulke gedichten zouden kunnen schrijven, maar we lezen ze wel. We nemen geen genoegen met tweederangs schrijvers. Terwijl we met wiskunde het wel zelf willen doen, we doen Euclides na, maar ons vermogen om te begrijpen wat Euler en Gauss en Riemann heeft bewogen is niet erg groot. Het is slechts weinigen van ons gegeven dat ook te doen. Maar ik had op de middelbare school wel iets meer willen weten van de biografische gegevens van deze mensen om de smaak te pakken te krijgen. Het blijkt dat vooral de levens van 19de eeuwse wiskundigen buitengewoon de moeite waard zijn om kennis van te nemen. Ik had wel graag een meer literaire benadering van de wiskunde gehad op school; een som helemaal doorwerken is niet zo romantisch. Een wiskundestudie heeft ook soms iets van een rechtenstudie, allebei gestuurd door formaliteiten. Dat is ook heel goed, maar je wilt wel eens iets lezen wat niet gelukt is en dan via een andere weg weer wel. Zelf ben ik altijd geïnteresseerd geweest in de filosofische kant van de wiskunde. De een gelooft in wiskunde omdat hij in God gelooft, de ander gelooft in God omdat hij in de wiskunde gelooft. Dat is een interessant scala van wezenlijke dingen.'

Een prachtig gedeelte uit *Rondo Veneziano*, p. 128, de boom der kennis:

Pythagoras dan leerde Anaximander en zij beiden leerden Eudoxus en Empedocles. Deze leerde Aristoteles, die na Jezus Christus de tweede hoeksteen werd van onze beschaving. En Aristoteles leerde Theophrastus, Strato en Archimedes. En Archimedes leerde Eratosthenes, Apollonius en later Galilei en Stevin. Archimedes leerde van Plato, en deze van Euclides. (...)

Euler, Wallis en Leibniz, zij leerden Gauss. Leibniz en Fresnel leerden van Huygens. Wallis van Newton. Gauss leerde Hamilton, Fourier en Poincaré. Kummer leerde van Hamilton en Kronecker. Fourier leerde Shimura. En Shimura leerde Wiles. En Wiles leerde van Fermat, die leerde van Diophantes.

Lobatsjefski, Bolyai, Riemann, zij leerden Euclides.

En Abel en Galois, de jongsten van het heelal, leerden Gauss.

In Rondo Veneziano heeft Pipper gedroomd dat hij het scharnierpunt van de wereld is.

'Ja, ik vind het een mooi beeld; ik ben wel meer mensen tegengekomen die dat hebben. En ik heb het

zelf gehad bij het programmeren. Ik heb ooit wel een paar maanden het gevoel gehad dat ik aan het front werkte van de wetenschap. Toen had ik het gevoel, hier zit ik op het scharnier; als ik nu die ene kant op ga, gaat de wereld die kant op. Ga ik rechts, gaat de wereld rechts. We beleefden zichtbare glorie toen bleek dat we de Amerikanen de baas waren en we mijlen ver vóór lagen.'

We leggen u tot slot nog een citaat voor uit uw boek: 'Ontmaskerd worden als oplichter is minder erg dan herkend worden als schrijver.'

'Ja, dat is een mooie zin hè? Toen ik hem schreef dacht ik, wat betekent dit nou? Het gebeurt wel vaker dat je, net als een schilder met een mooie vlek op het doek, je afvraagt laat ik hem staan? En als hij er per ongeluk gekomen is, bepaalt hij dan vanaf nu het hele schilderij? Als je een meevaller hebt dat je zo'n elegante formulering op papier krijgt, en het detoneert niet, dan vult hij zich met wat men er van vindt, ik zelf vooraan. Het boek brengt de zinnen voort. De betekenis van sommige zinnen moet zijn vorm krijgen omdat het boek gelezen wordt. Je moet elke zin toetsen op kracht en aanvallen. En als het dan toch eigenlijk onzin is, of niet vol te houden, als je hem kan ontmaskeren als een los zinnetje, dan gaat hij er wel uit. Maar als het mij lukt, als eerste lezer, deze raadselachtige spelonk te vullen met licht waardoor de zin betekenis krijgt, dan laat ik hem staan. Dan worden de voorafgaande zinnen een beetje bijgevijsd; en misschien is het dan ook lonend om het vervolg vorm te geven.

In dit kader denk ik vaak aan Nietzsche die schreef: "Al wat ik schrijf zijn toppen van een hooggebergte. Wie mij volgen wil, moet groot zijn en sterk gegroeid."

Als we bijna weg gaan, vertelt Gerrit Krol zichtbaar grinnikend nog een mooie anekdote die typerend is voor zijn gevoel voor humor. Op een dag zei zijn vrouw Janna tegen hem: 'Ellen en ik hebben besloten om papa's baard te laten staan.'

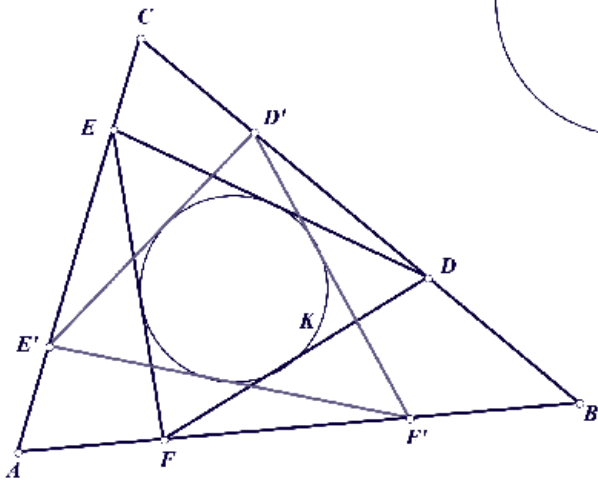
Lichtvoetig en vrolijk geworden door de hartelijkheid van de ontmoeting reden we huiswaarts, geïnspireerd en met voldoende stof tot nadenken van Oudemolen tot Venetië. Helaas hoefden we maar tot Utrecht. Met oprechte dank aan Gerrit Krol voor ons gesprek.

Gerrit Krol: *Rondo Veneziano*. Amsterdam: Em. Querido's Uitgeverij BV (2004). ISBN 90 214 7018 7; prijs € 16,95

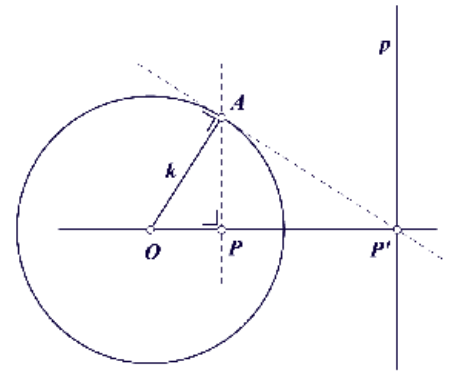
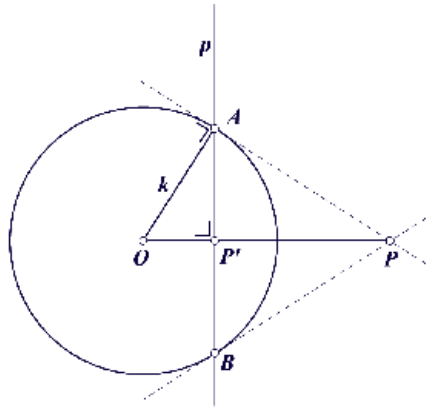
Over de auteurs

Frank van den Heuvel (e-mailadres: f.vd.heuvel@hccnet.nl) is wiskundeleraar aan het Meridiaan College Amersfoort, vestiging 't Hooghe Landt.

Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) is wiskundeleraar aan het Meridiaan College Amersfoort, vestiging 't Hooghe Landt, en redacteur van *Euclides*.



FIGUUR 1

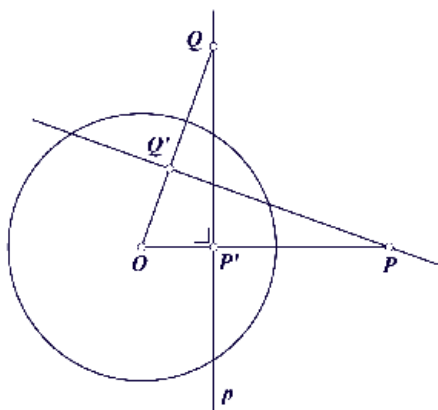


FIGUUR 2

ZOEK DE DRIEHOEK, EEN VERVOLG

[Dick Klingens]





FIGUUR 3

De probleemstelling

In een vorig nummer van *Euclides* legde Ton Lecluse de lezers een constructieprobleem voor in zijn artikel 'Zoek de driehoek' (zie [1], pp. 302-303). Het probleem luidde:

Gegeven is driehoek ABC met D op BC, E op CA, F op AB. K is de ingeschreven cirkel (incirkel) van driehoek DEF. Zie figuur 1.

Toon aan dat er in het algemeen een tweede driehoek D'E'F' (D' op BC, ...) is waarvan K eveneens de incirkel is. En construeer deze driehoek (indien mogelijk).

Voordat we een oplossing van het probleem laten zien, behandelen we een klein stukje – niet al te ingewikkelde – meetkunde, waarvan hieronder bij de analyse van het probleem gebruik gemaakt wordt.

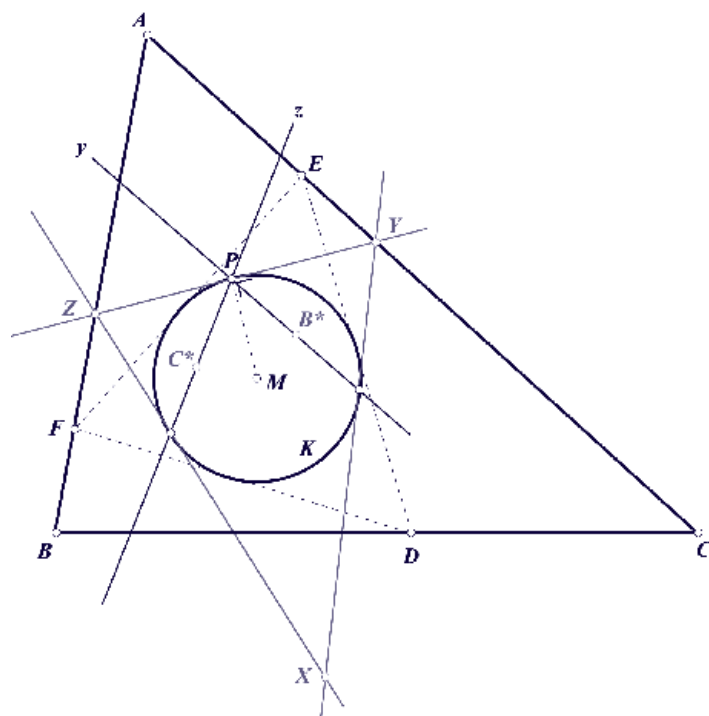
Pooltheorie

Wanneer we uit een punt P buiten een cirkel K (met middelpunt O en straal k) de beide raaklijnen aan die cirkel tekenen (zie figuur 2, links), dan wordt de verbindinglijn AB van de raakpunten de *poollijn* van P (ten opzichte van de cirkel) genoemd. Het punt P heet dan de *pool* van de poollijn.

Zij P' het snijpunt van de lijn OP en die poollijn, aangegeven met p , dan is eenvoudig (met gelijkvormigheid van de driehoeken OAP en $OP'A$) te bewijzen, dat $OP \cdot OP' = k^2$.

De punten P en P' worden wel ten opzichte van de cirkel *toegevoegde punten* genoemd.

Als het punt P binnen de cirkel ligt, dan zijn er geen raaklijnen uit P aan die cirkel. Echter, de poollijn van



FIGUUR 4

P definiëren we in dit geval door gebruik te maken van de relatie $OP \cdot OP' = k^2$ (zie figuur 2, rechts): we bepalen dan eerst het punt P' op OP . De poollijn van P is dan de loodlijn in P' op OP .

Stelling 1. *Ligt Q op de poollijn van P ten opzichte van een cirkel, dan ligt P op de poollijn van Q .*

Zijn P , P' en Q , Q' toegevoegde punten en is p de poollijn van P , waarop het punt Q gelegen is. We willen nu aantonen, dat de lijn PQ' de poollijn is van het punt Q (zie figuur 3); met andere woorden: OQ en PQ' moeten loodrecht op elkaar staan.

We weten nu dat $OP \cdot OP' = k^2$ en $OQ \cdot OQ' = k^2$, waaruit volgt dat $OP : OQ = OQ' : OP'$. De driehoeken OPQ' en OQP' zijn dus gelijkvormig (zhz; ze hebben immers hoek O gemeenschappelijk). Dus geldt:

$$\angle OP'Q = \angle OQ'P = 90^\circ$$

□

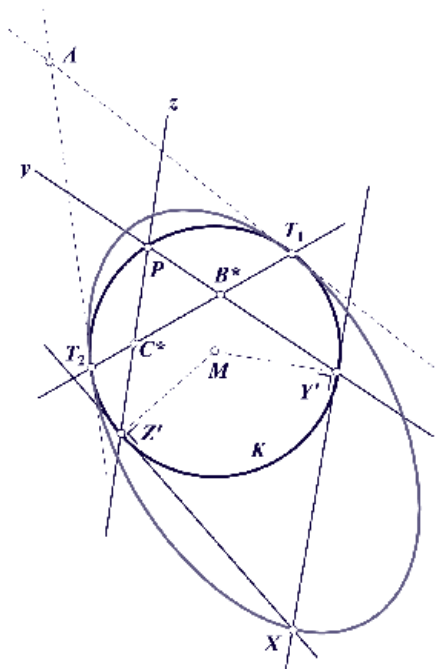
Analyse

We gaan uit van de eerste methode waarmee Lecluse het probleem benaderde (zie figuur 4).

We kiezen op de zijden BC , CA , AB van een gegeven driehoek ABC opvolgend de punten D , E , F die de hoekpunten zijn van een driehoek, waarvan we de incirkel aangeven met K .

Op K kiezen we dan een variabel punt P , met in dat punt de raaklijn aan K die de zijden CA , AB snijdt in de punten Y , Z . De 'tweede' raaklijnen uit Y en Z aan K snijden elkaar in het punt X .

Als P over K loopt, doorloopt het punt X vast en zeker een kromme (die overigens ook door het punt D gaat; de lezer ziet gemakkelijk in waarom).



FIGUUR 5

Wat de exacte vorm is van de meetkundige plaats van het punt X laten we nog even in het midden. We kijken eerst naar de poollijnen y en z van Y en Z ten opzichte van de cirkel K . Het punt Y (Z), de pool van y (z), ligt op de lijn CA (AB). Uit stelling 1 volgt dan dat de pool B^* (C^*) van CA (AB) op de lijn y (z) ligt. Zodat, als P de cirkel K doorloopt, de lijnen y en z opvolgend door de vaste punten B^* en C^* gaan.

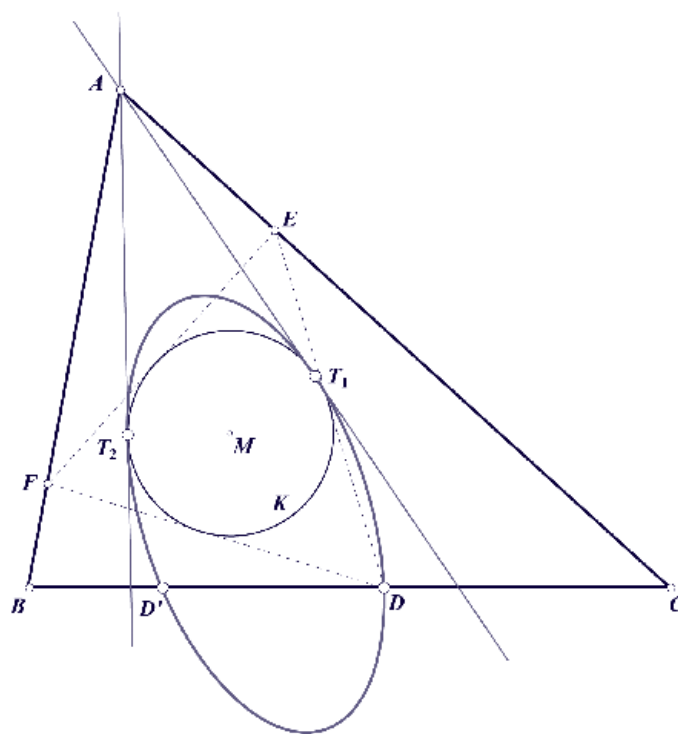
De meetkundige plaats van het punt X

We kijken nu (in figuur 5) alleen naar een vaste cirkel K en twee vaste punten B^* en C^* ; we kiezen die punten binnen de cirkel, maar noodzakelijk is dat niet. Op K kiezen we een variabel punt P en tekenen de lijnen PB^* en PC^* die K , behalve in P , ook snijden in opvolgend de punten Y' en Z' . De raaklijnen in Y' en Z' aan K snijden elkaar in het punt X . De meetkundige plaats van het punt X , bij het over K lopende punt P , is eveneens in figuur 5 getekend. Die meetkundige plaats lijkt in dit geval wel sterk op een ellips. En dat is ook zo! Er geldt namelijk:

Stelling 2. Gegeven een cirkel K en de (vaste) punten B^* en C^* . Voor ieder punt P op K geldt: het snijpunt X van de raaklijnen in de 'tweede' snijpunten van PB^* en PC^* met K ligt op een kegelsnede.

Het bewijs van stelling 2 waarbij K een kegelsnede is, kan binnen de projectieve meetkunde worden gegeven. Voor een bewijs kan de lezer terecht in [3, pp. 139-140].

De lijn B^*C^* snijdt K in de punten T_1 en T_2 . De



FIGUUR 6

lezer ga na, dat als P samenvalt met T_1 , het punt X samenvalt met T_2 , en dat als P samenvalt met T_2 , het punt X samenvalt met T_1 . De kegelsnede raakt dus in T_1 en T_2 aan K .

Gevolg. In figuur 4 zijn B^* en C^* de polen van de lijnen CA en AB .

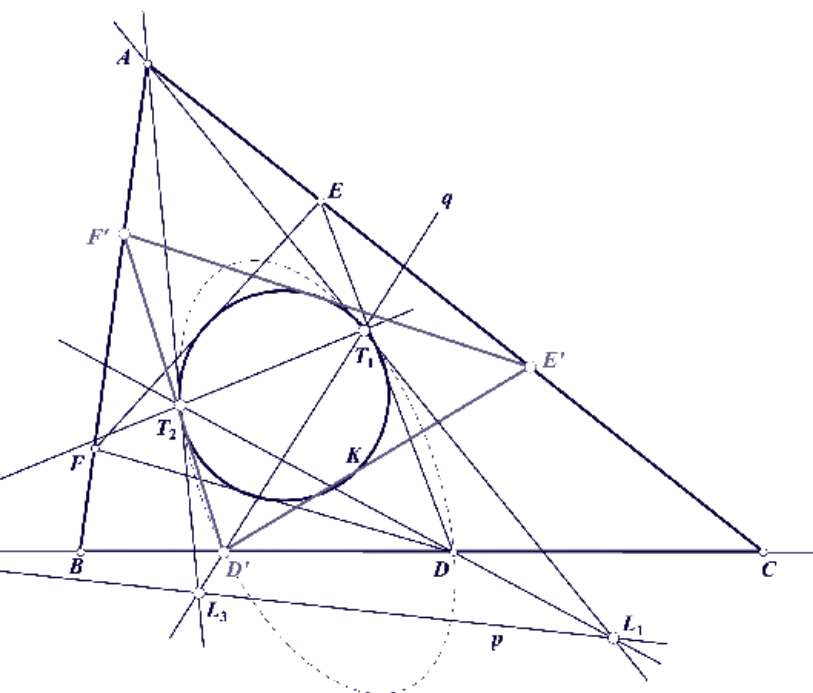
Volgens stelling 1 is B^*C^* dan de poollijn van het hoekpunt A van driehoek ABC . T_1 en T_2 zijn dus de raakpunten van de raaklijnen uit A aan K en aan de kegelsnede.

Voor meer informatie over een veralgemenisering van het 'probleem van Lecluse' wordt verwezen naar een artikel van Aad Goddijn en Floor van Lamoen dat mogelijk zal verschijnen in het elektronisch tijdschrift *Forum Geometricorum* (zie [2]).

Constructie

Uit de theorie der kegelsneden is bekend dat een kegelsnede (o.a.) bepaald is door drie punten en de raaklijnen in twee daarvan. En dit is precies de situatie die we aantreffen in figuur 6: de drie punten zijn T_1 , T_2 , D en de raaklijnen zijn AT_1 , AT_2 . En op basis van diezelfde theorie kunnen we, zelfs met liniaal alleen, het tweede snijpunt D' van de lijn DB ($\equiv BC$) en die kegelsnede construeren, namelijk met behulp van de stelling van Pascal:

Stelling 3 (Pascal). Van een in een kegelsnede ingeschreven zeshoek zijn de snijpunten van de overstaande zijden collineair.



FIGUUR 7

Een bewijs van stelling 3 kan onder meer worden gevonden in [3, pp. 115-116] en [4; alleen voor een zeshoek ingeschreven in een cirkel].

In **figuur 7** staat de ‘bijzondere’ zeshoek $T_1T_1T_2T_2DD'$. Volgens stelling 3 zijn dan de punten L_1, L_2, L_3 , met ^[5] $T_1T_1 \cap T_2D = L_1$, $T_1T_2 \cap DD' = L_2$ en $T_2T_2 \cap D'T_1 = L_3$, collineair.

De verbindingslijnen T_1T_1 en T_2T_2 moeten daarbij worden opgevat als de raaklijnen aan de kegelsnede in de punten T_1 en T_2 .

We construeren nu achtereenvolgens de punten L_1, L_2 , de lijn $L_1L_2 \equiv p$, $p \cap T_2T_2 = L_3$, de lijn $L_3T_1 \equiv q$, en tenslotte $q \cap BC = D'$.

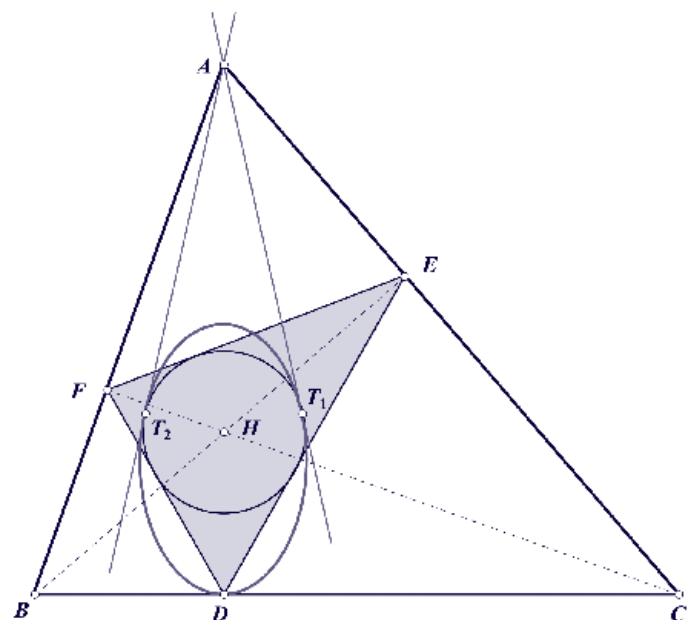
En dan is het niet moeilijk meer de door Lecluse gezochte driehoek $D'E'F'$ te tekenen. $\square$

Bijzondere gevallen

Het blijkt dat sommige driehoeken DEF geen tweede driehoek toelaten (ook een leerling van Ton Lecluse heeft dat opgemerkt; zie weer [1]).

Een voorbeeld daarvan staat in **figuur 8**, de voetpuntdriehoek van de hoogtelijnen. Er kan bewezen worden dat dit altijd geldt voor zogenoemde Ceva-driehoeken; dat zijn driehoeken DEF waarvan de verbindingslijnen met de ‘overeenkomstige’ hoekpunten van driehoek ABC door één punt gaan (zie in **figuur 9** het punt P).

Uit **figuur 9** wordt tevens duidelijk dat ook hyperbolen een rol kunnen spelen bij het probleem. De punten D en F liggen nu weliswaar op de verlengden van de zijden CB en AB , maar ook als de



FIGUUR 8

cirkel K geheel binnen driehoek ABC ligt, kunnen hyperbolen optreden als meetkundige plaats.

Bij een bijzondere ligging van driehoek ABC ten opzichte van de incirkel van driehoek DEF zijn er zelfs oneindig veel oplossingen (zie **figuur 10**). In dat geval is ABC een zogenoemde *pooldriehoek* van K : de zijden BC, CA, AB zijn poollijnen van A, B, C ten opzichte van K .

Classificatie

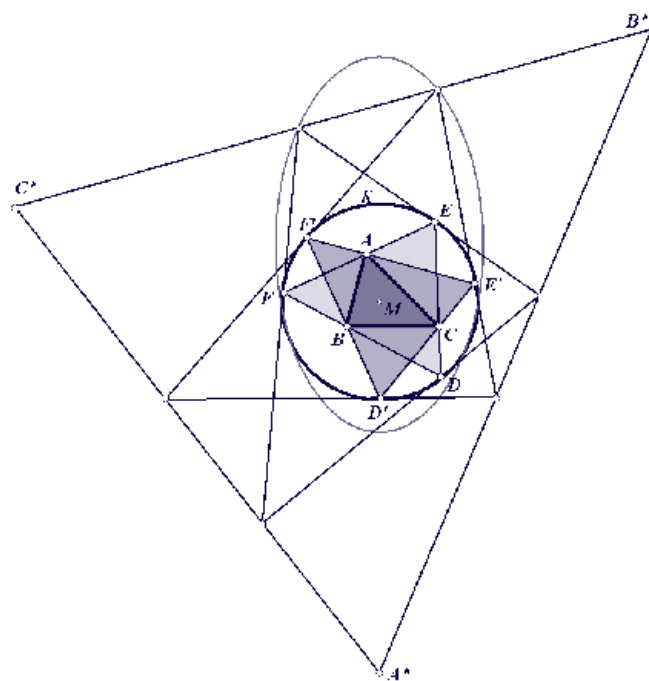
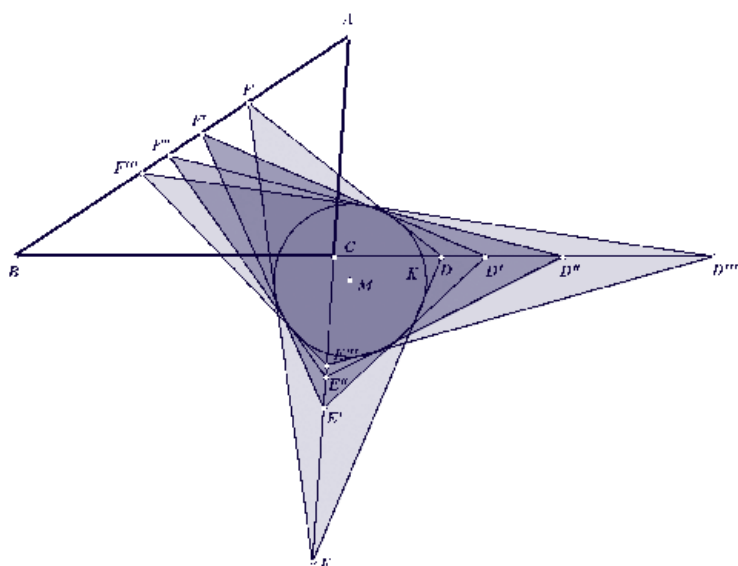
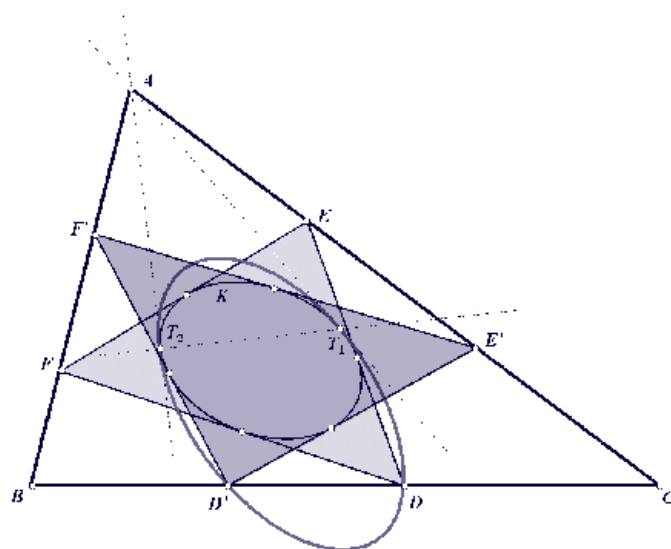
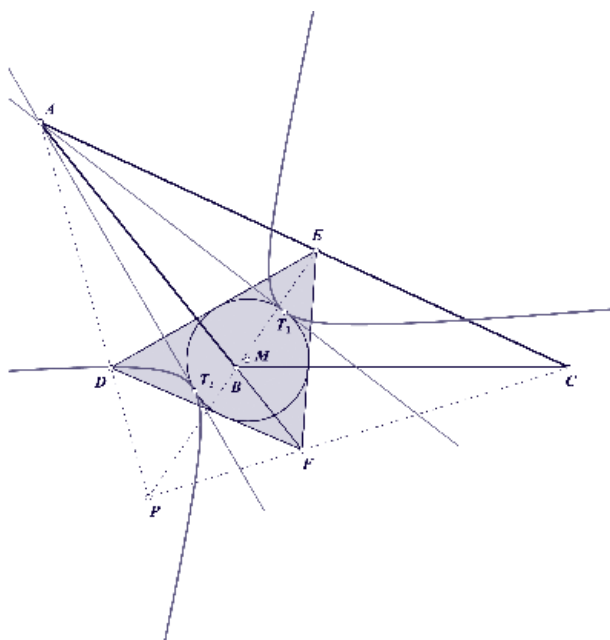
Goddijn en Van Lamoen geven in [2], naast bewijzen voor de juistheid van enkele hierboven niet bewezen zaken, een volledige classificatie van het probleem: aantal oplossingen, onder welke voorwaarden, ..., waarbij zij uitgaan van een driehoek ABC en een willekeurige *kegelsnede* K (dus zonder vooraf een driehoek DEF vast te leggen); zie **figuur 11**.

In [2] zullen zij wellicht ook ingaan op het *duale* ‘Lecluse-probleem’:

Gegeven zijn een driehoek ABC en een driehoek DEF waarvan DE door C , EF door A en FD door B gaat. K is de omschreven cirkel (kegelsnede) van driehoek DEF .

Toon aan dat er een tweede driehoek $D'E'F'$ is waarvan de zijden opvolgend door A, B, C gaan en waarvan K eveneens de omschreven cirkel (kegelsnede) is.

De oplossing van het duale probleem (voor een cirkel) is, samen met het oorspronkelijke probleem,



FIGUUR 9, 10

FIGUUR 11, 12

weergegeven in figuur 12. Uit die figuur moge de samenhang tussen beide problemen (en de oplossing daarvan) de lezer duidelijk worden.

Dank

De auteur dankt Aad Goddijn en Floor van Lamoen voor hun fundamentele bijdrage aan de oplossing van het 'probleem van Lecluse', en voor het feit dat hij kennis heeft mogen nemen van de (tussen)resultaten van hun onderzoek naar die oplossing. Aad en Floor hebben zich niet alleen willen verdiepen in het probleem, maar hebben het ook in een algemeen kader geplaatst en opgelost.

Aad was zo welwillend een eerdere versie van bovenstaand artikel van commentaar te voorzien.

Noten

- [1] Ton Lecluse: *Zoek de driehoek*. In: *Euclides* 80 (5), maart 2005.
- [2] Aad Goddijn, Floor van Lamoen: *Triangle-conic porism* (werktitel). Mogelijk te verschijnen in: *Forum Geometricorum* (<http://forumgeom.fau.edu/>).
- [3] Martin Kindt: *Lessen in Projectieve Meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (1996).
- [4] Dick Klingens: *De stelling van Pascal voor cirkels*. Op: www.pandd.demon.nl/pascal.htm.
- [5] Met $AB \cap CD = P$ bedoelen we het snijpunt P van de lijnen AB en CD .

Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.nl) is eindredacteur van *Euclides* en is verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.

THOMASSE, THE RHINOCEROS SLAYER

[Victor Thomasse]

Het is nu al de zoveelste keer dat ze zeggen dat de noemer boven de teller staat, dus ik heb iets nodig om ze het te laten onthouden.

Jaren terug was de reclame ervoor 's avonds op televisie te zien en sprak men erover: de *MegaMemory Training* van Kevin Trudeau. Een vriendin van me heeft het boek toen besteld en was zo enthousiast dat ik ook een exemplaar aanschafte. Wat er in stond herinner ik me - o ironie! - niet meer zo goed, maar wel dat je zaken in je geheugen kunt printen door een combinatie van twee zaken. Ten eerste *vivid animation*. Maak een levendige scène in je hoofd die gaat over wat je wilt onthouden. Ten tweede moet dit tafereel zo ongebruikelijk mogelijk zijn. Het moet nergens in passen, zodat je geheugen het niet veilig tussen soortgelijke zaken kan verstoppen.

Ik ga voor het bord staan en teken een dode neushoorn. 'De N van Neushoorn ligt dus onderaan!', zeg ik. 'Wat zit er dan bovenop?' Een theezakje

en een toekan komen voorbij totdat Bram roept: 'Meneer Thomasse!' Dus ik teken op de neushoorn een lang smal mannetje met een brilletje, rimpels en in zijn hand een grote geodriehoek zoals je die in wiskundelokalen vindt. Het ziet er niet uit maar het lijkt uitstekend. Met rood krijt voeg ik wat bloed toe en begin voor de ogen van de verbaasde leerlingen een schaduwgevecht met een denkbeeldige neushoorn die uiteraard het onderspit moet delven.

'Thomasse staat nu bovenop de neushoorn, dus de T staat boven de N. En nou nooit meer vergeten!'

Over de auteur

Victor Thomasse (e-mailadres: v.thomasse@chello.nl) haalde zijn bevoegdheid Nederlands al in 1983, maar is daarna vooral in het bedrijfsleven actief geweest. Sinds ruim een jaar werkt hij weer in het onderwijs; hij heeft intussen de eerstegraads opleiding wiskunde afgerond. Momenteel volgt hij de lerarenopleiding natuurkunde.

advertentie

Vierkant voor Wiskunde zomerkampen

Puzzels, problemen en spelletjes

Jaarlijks organiseert de stichting Vierkant voor Wiskunde zomerkampen voor kinderen die graag uitgedaagd worden door wiskundige spelen en puzzels. In kleine groepjes, onder begeleiding van wiskundigen, doen de kinderen onderzoek. Ze maken kennis met boeiende wiskundige fenomenen en ontdekken stellingen. Er is aandacht voor creativiteit en samenwerking. Er wordt bijvoorbeeld een winnende strategie voor een nieuw spel bedacht en er worden wiskundige kunstwerken gebouwd.

In 2005 zijn er drie kampen met elk maximaal 42 deelnemers

kamp A 1-5 augustus voor basisscholieren groep 6 - 8

kamp B 8-12 augustus voor leerlingen van klas 1 en 2

kamp C 15-19 augustus voor leerlingen van klas 3 en hoger

Lokatie Lunteren, op de Veluwe

Informatie en aanmeldingsformulieren:

info@vierkantvoorwiskunde.nl

Niels Bohrweg 1

2333 CA Leiden

www.vierkantvoorwiskunde.nl

071-5277129



wiskundig onderzoek

Kippen

Vier kippen leggen in vier dagen vier eieren. Hoeveel eieren leggen tien kippen in tien dagen?

puzzels



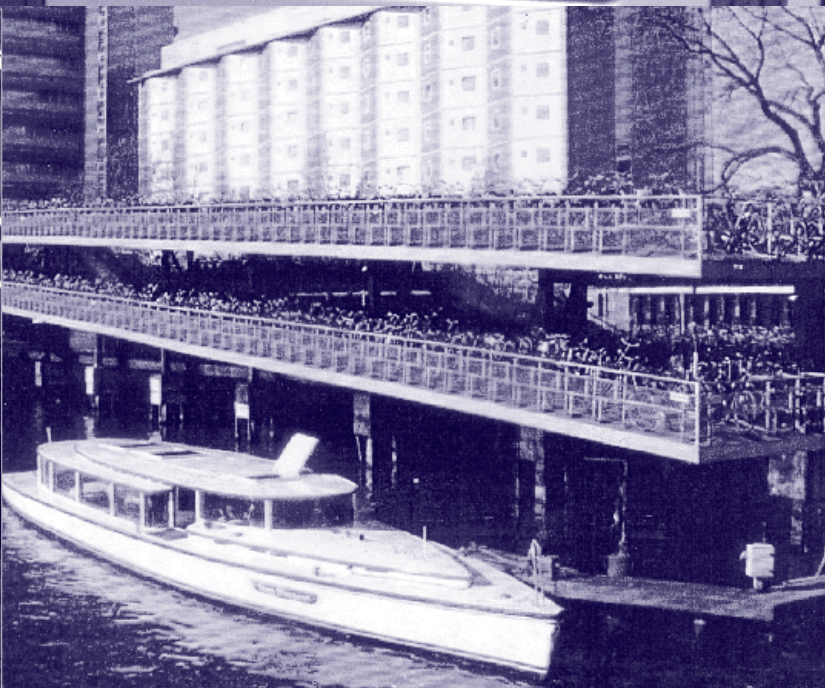
spel

WISKUNDEWANDELINGEN ONTWERPEN

[Lambrecht Spijkerboer]



FIGUUR 1 Vuilnisbak
FIGUUR 2 Fietsenstalling Amsterdam



Boekje

Enige tijd geleden is bij het APS een boekje van mijn hand verschenen over het ontwerpen van wiskundewandelingen[1]. Daarmee zijn wiskundedocenten aan de slag gegaan. De ervaringen met dit soort wandelingen zijn zo positief dat het gerechtvaardigd lijkt om nog meer wiskundedocenten aan te zetten tot het ontwerpen van een wiskundewandeling rondom de eigen school. Inspireren is dan ook de bedoeling van dit artikel.

Realistische situaties

Realistische situaties zijn een bron voor wiskundige vraagstellingen aan de hand waarvan je wiskunde kunt ontdekken, leren of toepassen. Het is goed als die realistische situaties zo echt mogelijk zijn. Bij wiskundewandelingen lopen leerlingen in groepjes langs een aantal van dit soort situaties en beantwoorden daarover vragen.

Hé, een vuilnisbak. Zie figuur 1. Deze zie je tegenwoordig veel op en rond NS-stations. Dat ziet er mooi uit, welke wiskunde zie je erin? De bodem is een vierkant, toch...? Op de bovenkant staan twee driehoeken en twee trapezia. Ze hebben gemeenschappelijke zijden. Is de bovenste derde zijde even lang als de zijden van de driehoeken? Hoe zou je dat zonder geodriehoek eigenlijk kunnen meten? Eén zo'n driehoek vormt samen met een trapezium een vijfhoek. Is die regelmatig? Is de bovenkant van de vuilnisbak dan misschien een deel van een dodecaëder? Hoe zit dat eigenlijk? Weten ze bij NS wel welke prachtige wiskunde in de vuilnisbak verstopt is?

Even verderop komen we een fietsenstalling tegen. Zie figuur 2. Dat roept weer andere vragen op:

- Hoeveel fietsen kunnen hier gestald worden?
- Hoe hoog mag de boot zijn om er onderdoor te kunnen varen?

Wie een beetje om zich heen kijkt, ontdekt al snel: de wiskunde ligt op straat. Je ziet dat er in de wereld om ons heen veel realistische contexten zijn die een wiskundige vraagstelling uitlokken. Bij wiskundewandelingen gaat het erom de realiteit als bron te nemen en met leuke, verrassende vragen die contexten te onderzoeken. Dat kan op verschillend niveau. Op straat zie je echt waar je wiskunde voor nodig hebt of in ieder geval waar je wiskunde goed voor kunt gebruiken. Het ontwerpen van een wiskundewandeling is een creatief proces omdat het uitnodigt wiskunde direct aan de realiteit te koppelen.

Contexten

Gewoonlijk worden contexten in de klas gepresenteerd door het boek. Met een zo goed mogelijke beschrijving wordt de context verduidelijkt, eventueel met een wiskundige schets

- 3 Volgens rijksvoorschriften moeten openbare gebouwen toegankelijk zijn voor rolstoelgebruikers. Van een gebouw is de ingang 50 cm boven de grond. De hellingshoek van de oprit is 3° . Zie figuur 7.4.



Fig. 7.4 Voor veel rolstoelgebruikers is een helling met een hellingshoek van 3° al behoorlijk steil.

- a Bereken AB en de lengte van de oprit van A tot C .
b Volgens de rijksvoorschriften mag het hellingspercentage maximaal $8,3\%$ zijn. Het hellingsgetal mag dus niet meer dan $0,083$ zijn. Voldoet de helling in figuur 7.4 aan dit voorschrift?



FIGUUR 3 Uit Getal & Ruimte deel 3H2 (versie 2000)

erbij. Soms worden tekeningen toegevoegd om de verbeelding van de echte situatie te verhogen. Dat kan ook met een foto (zie figuur 3). Het boek leidt de leerling via een aantal vragen in een vaste volgorde naar de eigenlijke probleemstelling: Voldoet deze rolstoelhelling aan de wettelijke norm? *Buiten op straat* zijn deze vragen in een dergelijke vaste volgorde helemaal niet meer zo vanzelfsprekend. Wanneer je bij de ingang van het station een kleine helling ziet (zie figuur 4), naast de trap, roept de vraag of deze helling voldoet aan de wettelijke norm voor de steilheid van rolstoelhellingen veel verschillende vragen op: Hoe meet je zo'n hoek? Welke maten zijn hier eigenlijk relevant? Hoe kan ik hier een rechthoekige driehoek terug vinden? Wat heb ik aan mijn geodriehoek? Deze vragen roepen zichzelf op en worden in een volgorde beantwoord die de leerling zelf kiest. Hier doen leerlingen *onderzoek aan* een realistische situatie in plaats van een *opdracht over* zo'n situatie.

Leerlingen worden bij een wiskundewandeling uitgedaagd tot dit soort probleemoplossend denken. Het lopen van een wiskundewandeling is leuk, nuttig en leerzaam. Het kan voor docenten en leerlingen op verschillende manieren uitdagend zijn.

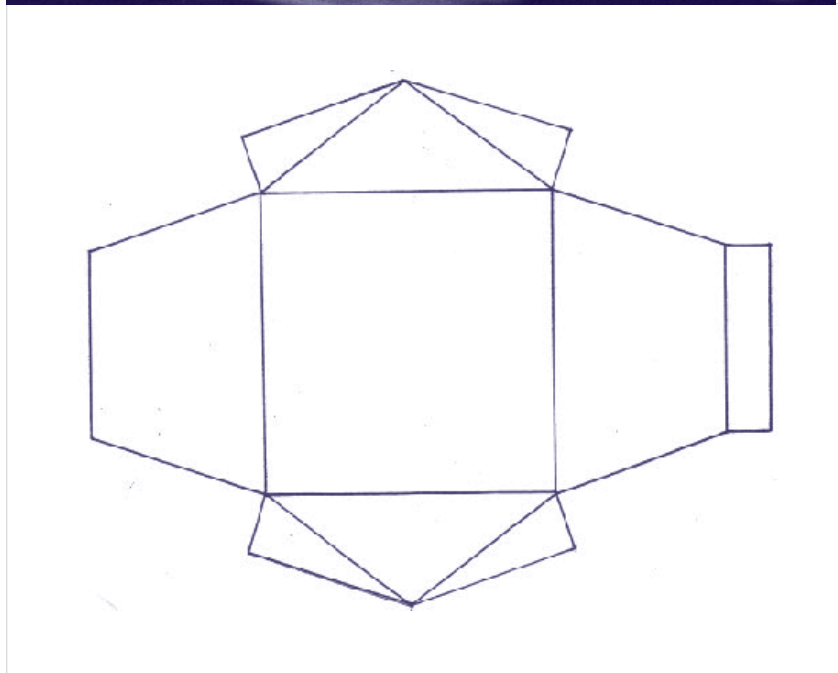
Wat voor soort vragen?

Soms is de relevantie van bepaalde vragen binnen een wiskundewandeling evident, maar ook zien we bij realistische contexten soms vragen waarbij de wiskunde er 'met de haren bij gesleept is'. Dan lijken de vragen meer op wat er in het wiskundeboek staat. Juist in wiskundewandelingen zijn vragen te bedenken waarvan de relevantie zichtbaar is. Bij het ontwerpen van die vragen moet de leidraad zijn, of de leerlingen zich zouden kunnen voorstellen dat er iemand is waarvoor een dergelijke vraag van belang is. In figuur 5 wordt gevraagd naar het plakoppervlak. Dat is een vraag die op deze manier ook in een wiskundeboek zou kunnen voorkomen, bij het hoofdstuk over oppervlakten bij ruimtelijke figuren. Voor wie is deze vraag van belang? Veel interessanter is eigenlijk, waarom er hier twee zuilen naast elkaar staan. Zou het niet gemakkelijker (goedkoper?) zijn om één grotere zuil neer te zetten met hetzelfde plakoppervlak als deze twee zuilen samen? De vraag hoe groot zo'n zuil dan zou worden is een relevante onderzoeksvraag, die bij deze realistische situatie past. Juist bij wiskundewandelingen kunnen vragen worden gesteld met een onderzoekskarakter.

Bij vragen ten behoeve van een wiskundewandeling kunnen we twee typen onderscheiden.

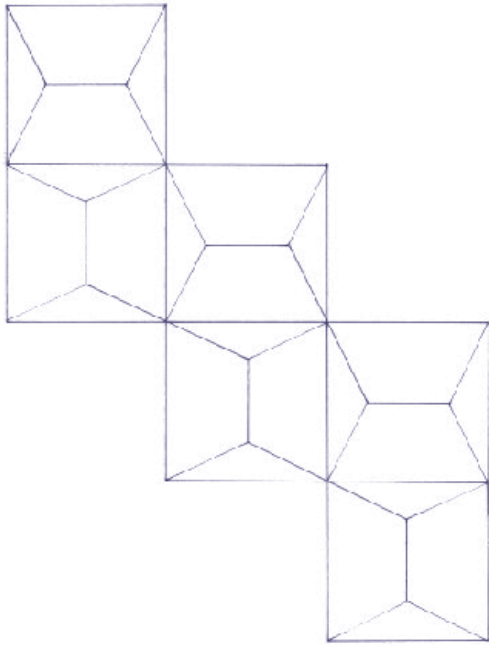
- Ten eerste: opdrachten die tijdens de wandeling direct uit te voeren zijn, vragen die direct te beantwoorden zijn. Bijvoorbeeld de vraag over het plakoppervlak bij de reclamezuil. Om een goede schatting te kunnen maken, kan gebruik gemaakt worden van standaardmaten: een stoeptegels is 30×30 cm, een volwassene is ongeveer 1,80 meter

FIGUUR 4 Ingang station Hoorn, met rolstoelhelling
FIGUUR 5 Reclamezuil Amsterdam
(‘Bereken de plak-oppervlakte van de reclamezuil’)



FIGUUR 6 Uitslag

FIGUUR 7 Zes vierkanten



lang, een verdieping is ongeveer 2,50 meter hoog. Leerlingen kunnen dit probleempje meteen oplossen aan de hand van bekende maten en met behulp van hun ervaring met schattend rekenen.

- Ten tweede zijn er vragen die leiden tot het verzamelen van gegevens, waarop later in de les kan worden teruggekomen. Bijvoorbeeld:

De HEMA is een bekende winkel met veel filialen. Per dag komen er dan ook veel bezoekers. Je moet een schatting maken van het aantal bezoekers per week. Tel gedurende drie minuten hoeveel mensen de winkel in en uit gaan. Turf het aantal bezoekers bij één ingang. Hoeveel ingangen heeft dit filiaal? Bereken daarmee het aantal bezoekers per week.

Dit kan aanleiding zijn voor berekeningen van gemiddelden, modus en mediaan, later in de klas. En het is vooral aanleiding voor een gesprek over de (on)zin van statistiek. Wat weten we nu precies over het aantal bezoekers per week bij deze HEMA-vestiging? Hoe nauwkeurig is ons antwoord? Voor wie is zo'n onderzoek relevant? Enzovoort.

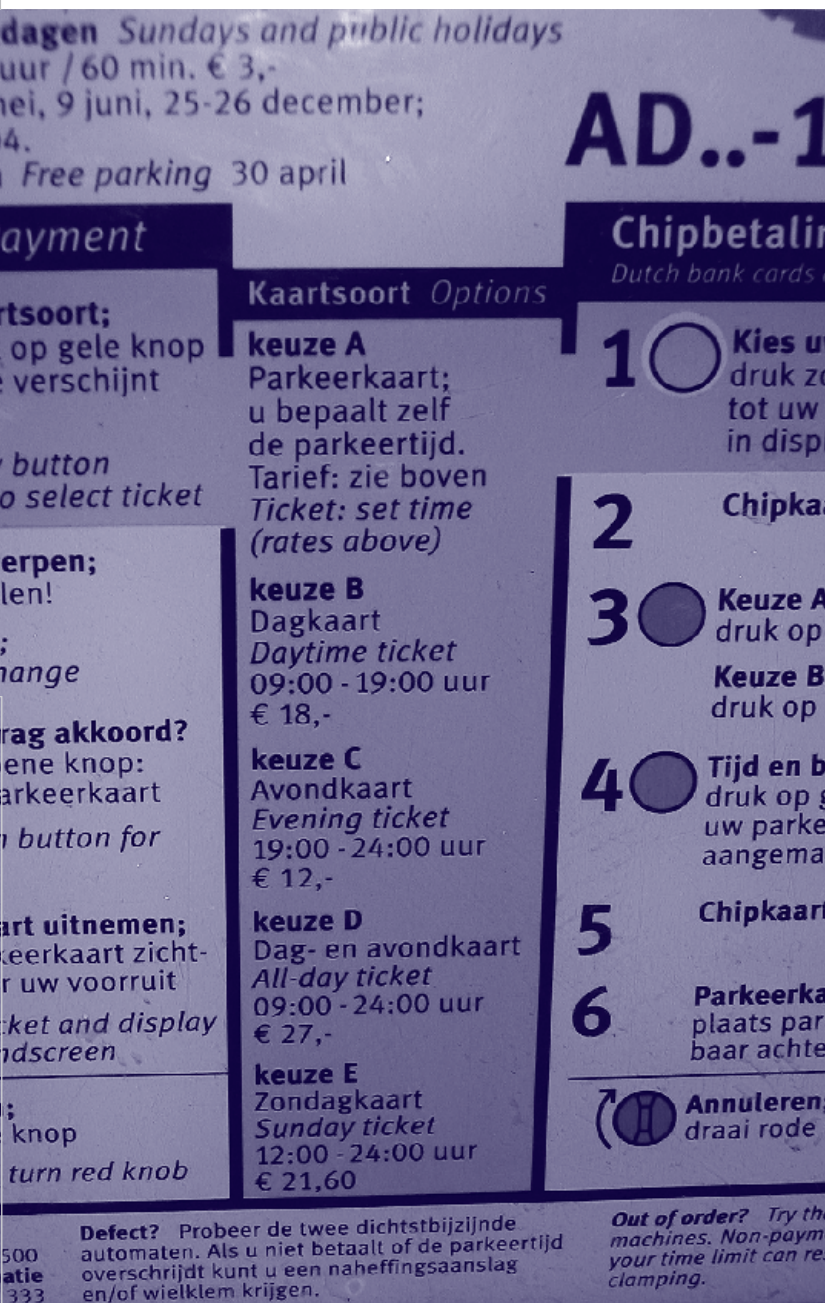
Het is ook mogelijk dat de context wordt gebruikt om nog veel meer wiskundige activiteiten te ontwikkelen in de klas, zoals met de opdracht 'Uitslag' hieronder. Dat kan bijvoorbeeld gedaan worden in een onderwijsleergesprek of door middel van een klassikale presentatie nadat eerst in groepjes is gewerkt aan de (samenwerkings)opdracht over deze figuur.

- Zie figuur 6. Bekijk deze uitslag nauwkeurig. Kun je zonder te meten zeggen hoeveel verschillende lengtes er in deze figuur voorkomen? (Plakrandjes niet meegerekend.)
- Knip de figuur uit en plak deze in elkaar. Komt de vorm je bekend voor?
- Het trapezium heeft drie zijden die even lang zijn als twee zijden van de driehoek. Moeten de driehoek en het trapezium dan samen een regelmatige vijfhoek vormen? Hoe kun je dat zeker weten?
- Wanneer je zes van deze vormen aan elkaar plakt, zoals aangegeven in figuur 7, kan deze naar binnen gevouwen worden tot een kubus!
- Wat levert het naar buiten vouwen op? Had je dat verwacht?

Bij wiskundewandelingen gaat het erom, te ontdekken dat wiskunde te gebruiken is in uiteenlopende situaties. Dat leidt tot vragen van verschillend niveau en met diverse bedoelingen. In het oog gehouden moet worden dat juist op straat de mogelijkheid voor echte, reële, relevante onderzoeksvragen goed kan worden benut.

Leerstoflijnen

In het verleden zijn al meerdere wiskundewandelingen ontworpen, waarvan die in Amsterdam



FIGUUR 8 Parkeermeter Amsterdam

(van Hans Wisbrun) het bekendst geworden is. Het was een geïntegreerde wiskundige activiteit avant la lettre. Wanneer verschillende wiskundewandelingen worden vergeleken, blijkt dat vragen over meetkunde verreweg het meest voorkomen. Aanzichten, vormen, afstanden, kijklijnen, het ligt allemaal erg voor de hand. Ook rekenvragen zijn gemakkelijk te vinden. Schatten: hoeveel, hoe groot, hoe vaak, wanneer,... Voor statistiek is het handig om gegevens tijdens de wandeling te verzamelen en dan later in de klas te gebruiken voor verwerking in diagrammen, tabellen, grafieken, enzovoorts. Algebravragen zijn op straat lastig te doen. Die komen in wiskundewandelingen slechts sporadisch voor. Wel kan een context in een wiskundewandeling gemakkelijk benut worden voor algebraïsche vragen later in de klas, waardoor de context verder wordt geëxploiteerd en leidt tot wiskundige vervolgactiviteiten. Zie bijvoorbeeld onderstaand voorbeeld en [figuur 8](#).

- Welk tarief is per kwartier het goedkoopst als je de maximale tijdsduur benut?
- Maak een grafiek van het verband tussen prijs en parkeertijd voor alle tarieven.

Praktijkervaringen

Verschiedende wiskundewandelingen zijn gebundeld in het boekje 'Wiskundewandelingen ontwerpen'^[1]. Bij sommige wandelingen is er een duidelijke niveau-aanduiding, bijvoorbeeld vmbo-t klas 3 of havo/vwo klas 2. Voor de meeste wandelingen geldt echter dat ze geschikt zijn voor klas 1-3. Niveauverschillen zullen niet zozeer blijken uit de moeilijkheid van de vragen, maar veel meer uit de manier waarop de problemen kunnen worden opgelost. Hoe lang mag zo'n wandeling duren? Hoe organiseer je het zó, dat niet iedereen in een grote sliert achter elkaar aansjokt? Hoe ga je om met de beoordeling van de wandeling? Wordt naast wiskundige correctheid ook de samenwerking beoordeeld? Wat doe je met leerlingen die de wandeling niet hebben kunnen meelopen? Op basis van praktijkervaringen zijn een aantal praktische tips opgenomen in het boekje. Voor het bewerken van gegevens later in de klas is het verstandig twee versies te maken: een invulboekje voor onderweg waarbij het alleen gaat om gegevensverzameling en enkele korte vragen en een tweede versie met uitgebreidere vragen voor verwerking van de gegevens later in de klas. Wanneer het regent blijkt een plastic mapje van grote waarde. Hoewel de leerlingen soms onbegeleid door de stad lopen, zijn de ervaringen positief; docenten en leerlingen vinden het gewoon leuk om te doen. Leerlingen ontdekken in hun eigen omgeving/ woonplaats waar ze wiskunde kunnen herkennen en gebruiken. Dat is dichtbij hun eigen beleavingswereld. Omdat het om contexten gaat die de leerlingen wellicht ook in hun vrije tijd tegenkomen, ligt het voor de hand dat zij daaraan wiskundige handelingen, principes en regels koppelen, waardoor

deze beter verankerd raken in hun geheugen. Daarom kunnen wiskundewandelingen een goede aanvulling zijn op de lessen.

In het boekje zijn wandelingen opgenomen in Alkmaar, Arnhem, Gouda, Hoorn, Middelburg, Naarden en Weert. Het kan interessant zijn om deze wandelingen zelf te lopen, maar de verschillende wandelingen zijn primair opgenomen als inspiratiebron - voor het ontwerpen van een wiskundewandeling rondom de eigen school, en om deze vervolgens met de leerlingen te lopen.

Naschrift

Ethel Krans, wiskundedocente aan de Rientjes Mavo te Maarssen, heeft een wiskundewandeling voor de werkweek in Londen ontworpen. Een prachtige wandeling, die zeker de moeite waard is om ook als voorbeeld in te zien. Er is een schaduwwandeling in Amsterdam bij gemaakt met ongeveer dezelfde vragen, voor de leerlingen die er in Londen niet bij waren. Deze wandelingen zijn op te vragen bij krans@rientjesmavo.nl.

Noot

[1] Lambrecht Spijkerboer: *Wiskundewandelingen ontwerpen*. APS-publicaties, ISBN 90-6607-362-4, prijs € 19,50. Zie www.aps.nl; ook te bestellen bij verzendhuis Boom, tel. 0522-237555, e-mail: bdc@boom.nl.

Over de auteur

Lambrecht Spijkerboer (e-mailadres: l.spijkerboer@aps.nl) is werkzaam bij APS en onder andere betrokken bij de onderwijskundige ondersteuning van wiskundedocenten.

FIGUUR 1

	A	B	C	D	E
	Omtrk	Halve omtrk	Lengte	Breedte	Oppervlakte
2	20	10	1	9	9
3			2	8	16
4			3	7	21
5			4	6	24
6			5	5	25
7			6	4	24
8			7	3	21
9			8	2	16
10			9	1	9

Inleiding

In het zich snel vernieuwende vmbo wordt, zonder lesrooster in een vorm van team-teaching, steeds meer probleemgestuurd onderwijs gemaakt waarbij de begeleidende vakleraren proberen hun eigen vak een plaats te geven. Tijdens de studiedag van onze Vereniging in november 2004 waren voorbeelden te zien. Zo integreert Slash21 wiskunde met kunstzinnige vorming. Moeilijk, maar wel heel uitdagend.

In het vorige stukje^[1], over de taal van de wiskunde, heb ik voorgesteld in het vmbo geen algebra meer te doen. Ik heb niet bedoeld dat er niets aan formules wordt gedaan, maar het manipuleren ermee kan wat mij betreft achterwege blijven. De vraag is: wat dan wel en hoe dan wel? Hier een idee daarvoor.

Gecijferdheid voorop

Als uitgangspunt kies ik dat voor leerlingen in de onderbouw van het vmbo gecijferdheid voorop staat. Denk aan het maken, gebruiken en interpreteren van tabellen en grafieken, aan het werken met procenten, verhoudingen en lineaire verbanden. PISA 2003 laat zien dat Nederland het op dit punt niet slecht doet. Technische mensen moeten overigens meer kunnen. Het gaat vooral om het kunnen lezen van eenvoudige formules met daarbij een tabel of een grafiek. In de praktijk komt dit neer op het werken met een computerprogramma waarin veel wiskundige kennis is voorgeprogrammeerd. Volgens mij is dit heel goed en heel inzichtelijk te leren met behulp van een spreadsheet. Het idee hieronder is geen beschrijving van een stukje wiskundeonderwijs. Die concrete uitwerking kan door leraren gedaan worden die eens iets anders willen dan hun boek volgen. De summieri uitwerking hier maakt overigens duidelijk dat het werken met formules in een concrete situatie alles met modelleren van die situatie te maken heeft.

Spreadsheet

De vraag is welke rechthoek met een omtrek van 20 (meter, bijvoorbeeld), de grootste oppervlakte heeft. Zie figuur 1, op pag. 344. In cel A2 staat de omtrek en in cel B2 wordt de halve omtrek uitgerekend, dat is natuurlijk de som van de lengte en de breedte. Dit is overigens de belangrijkste denkstap. In cel C2 staat een mogelijke lengte en daaronder zijn andere mogelijke lengten gegenereerd. Tussenvallende waarden kunnen natuurlijk ook gegenereerd worden. In de cellen van kolom D wordt de bijbehorende breedte uitgerekend. En tenslotte wordt in de cellen van kolom E de oppervlakte berekend. En meteen is te zien dat de rechthoek met lengte en breedte 5, dus een vierkant, de grootste oppervlakte heeft. Voor de aardigheid is ook de grafiek gemaakt van de oppervlakte afhankelijk van de lengte (zie figuur 2). Formules treden op waar bewerkingen op cellen worden uitgevoerd:

- $B2 = A2/2$;
- de inhoud van de cellen C3 tot en met C10 via de formule $C3 = C2 + 1$, enzovoorts; met kopiëren en plakken;
- $D2 = B2 - C2$; door de \$-tekens is B2 een constante in plaats van een variabele geworden;
- de inhoud van de cellen D3 tot en met D10 via de formule $D3 = B2 - C3$, enzovoorts (eigenlijk door cel D2 te kopiëren en in de cellen D3 tot en met D10 te plakken);
- $E2 = C2 * D2$;
- de inhoud van de cellen E3 tot en met E10 via de formule $E3 = C3 * D3$, enzovoorts (eigenlijk door cel E2 te kopiëren en in de cellen E3 tot en met E10 te plakken).

Van hieruit moet de stap naar de formules $L + B = 10$ en $O = L \cdot (10 - L)$ te zetten zijn, althans voor de leerlingen van de theoretische leerweg bij het huidige examenprogramma. Voor het overgrote deel van de vmbo-leerlingen kunnen we volstaan met het werken met de spreadsheet om daarmee het lezen van formules te leren en vervolgens het werken met die formules weer aan de computer over te laten.

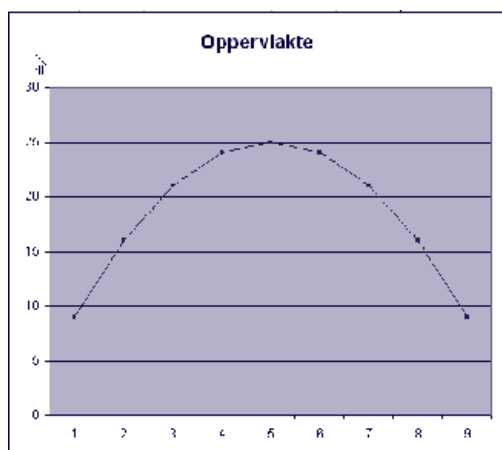
Noot

[1] Zie Euclides 80(5), maart 2005, pag. 283.

Over de auteur

Bert Zwaneveld (e-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl) is hoogleraar 'professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit Nederland. Hij was wiskundeleraar, en redactievoorzitter en hoofdredacteur van Euclides.

FIGUUR 2



Verenigingsnieuws Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

Stand van zaken wiskunde 2007 (half maart 2005)

Na diverse overleggronden is door de NVvW het onderstaande hak- en breekvoorstel gedaan. Ons belangrijkste uitgangspunt hierbij was een haalbaar programma te maken, in tijd en in niveau. Dit voorstel is op 1 februari besproken tijdens een conferentie met een breed samengestelde deelnemerslijst, uit onderwijs (wo/hbo/vo), CEVO/CITO/SLO en beleid (OCW/Deltapunt). De voorstellen werden in het algemeen overgenomen, met twee kanttekeningen.

- Bij vwo wiskunde-A (EM/NG) was er de suggestie om het onderwerp grafen en matrices te laten vervallen en die tijd aan de analyse toe te voegen. We hebben dit in het discussieforum op de website voorgelegd om de mening van de leden te peilen.
- Voor vwo wiskunde-B (NG/NT) kwam ter vergadering een alternatief om de meetkunde uit ons voorstel te vervangen door de voortgezette analyse uit nu wiskunde-B12. Dat oogt wellicht aantrekkelijk voor vervolgoopleidingen, maar we vinden het toch ongewenst als je kijkt naar de gevolgen voor het onderwijs. Je krijgt dan een programma met alleen analyse. Het beeld dat een B-leerling dan van wiskunde krijgt, doet geen recht aan de gelukkig veel bredere werkelijkheid van het vak, en het is zeer de vraag of die eenzijdige nadruk de motivatie zal verhogen (voor leraar en leerling). Daarbij moeten onderdelen die door de vakontwikkelgroep bewust vanwege hun abstractieniveau in het NT-profieldeel zijn geplaatst dan door de volle breedte van de B-leerlingen worden gedaan. Alle reden dus om te twifelen aan de haalbaarheid in de beperkt beschikbare tijd, ons belangrijkste uitgangspunt.

Verdere procedure

De voorstellen voor de afgeslankte programma's worden voorgelegd aan hbo en wo met als belangrijkste vraag: is dit acceptabel als vooropleiding? (we hopen dat het antwoord soms een tomeloos 'nee' zal zijn), en aan docenten met de vraag: is dit haalbaar in de tijd die je nog rest? (we hopen dat het antwoord daarop 'ja' zal zijn, anders hebben we het niet goed gedaan met z'n allen.) Vervolgens worden de dan vastgestelde programma's weer netjes beschreven in eindtermen. Tevens zal dan de verdeling worden gemaakt in CSE- en SE-stof, waarbij 60% van de stof in het centraal examen wordt getoetst (bij natuurkunde is dat overigens na

de nodige discussie uiteindelijk 75% geworden), en de rest aan de school wordt overgelaten. Dit resultaat wordt wederom voorgelegd aan het veld, zodat u wederom uw commentaar kunt geven.

Uitwerking

Hieronder volgt een nadere uitwerking van de mogelijke wiskundeprogramma's havo/vwo vanaf 2007, gebaseerd op de uitgangspunten en overwegingen van de reactie van de NVvW op de discussienota d.d. november 2004.

We gaan uit van vakken met een helder gezicht. De NG-leerling kiest zelf voor A of voor B.

De NT-leerling kan méér wiskunde in het profiel kiezen. Voor de havo-leerling is dat wiskunde-A.

De vakken A en B zijn voor zover mogelijk disjunct gemaakt.

Voor de vwo-leerling noemen we die uitbreiding bij voorkeur Voortgezette Wiskunde. De vakken A en B zijn hier niet disjunct en ook niet goed disjunct te maken. De analyse-onderwerpen van A en B zijn deels gelijk, maar worden bij A op een andere, minder abstracte manier aangeboden. Ze zijn dus voor de NT-leerling met wiskunde-B minder relevant c.q. al gedaan. De NT-leerling die dit extra wiskundevak kiest in het profiel, krijgt daarom als verbreding een deel van de tijd het ook voor B-leerlingen relevante A-onderwerp kansrekening/statistiek, wat daardoor voor de school heel voordelig is. Het resterende deel van het programma kan als verdieping een eigen B-invulling krijgen. Zo is er voor de leerling een heel vak met doorstroomrelevantie, met organisatorisch voor de school slechts voor een half vak meerkosten.

Uitgaande van de oorspronkelijke programma's komen we tot onderstaand overzicht. Hierbij is voor praktische opdrachten/onderzoekjes/ict per jaar 30 uur ingeruimd, onder de naam 'PO e.d.' Het is een rekenmodel; uiteraard vinden deze activiteiten plaats binnen de genoemde onderwerpen.

Havo A voor EM/NG - Beschikbaar 320 slu

B: Veranderingen	40
C: Tellen en kansen	40
D: Statistiek	40
E: Verbanden	40
F: Toegepaste analyse	40
G: Binomiale verdeling	60
PO e.d.	60
Dus kans/stat=140, tgf=120.	

Geschrapt worden:

71, 72 bundels van grafieken en 3-dimensionale grafieken
73 t/m 76 differentiëren
77 t/m 81 toepassingen bij differentiëren

Havo B voor NG/NT - Beschikbaar 320 slu

B: Veranderingen 40
D: Ruimtemeetkunde 1 60
E: Toegepaste analyse 1 120
H: Toegepaste analyse 2 40
PO e.d. 60

Dus analyse=200, meetkunde=60.

Een heel eenzijdig programma; misschien kan er ook meetkunde binnen een analysecontext worden verwerkt.

Geschrapt worden:

12 t/m 19 telproblemen
20 t/m 25 kansen
74 t/m 75 rekenen met kansen
76 t/m 79 binomiale verdeling
80 t/m 84 normale verdeling
85 t/m 94 ruimtemeetkunde 2
99 t/m 101 periodieke functies
103 optimaliseren met goniometrische functies
104 t/m 107 exponenten en logaritmen

102 wordt: afgeleide van $\sin ax$ en $\cos bx$, en toegevoegd aan subdomein 'afgeleide functies 2'

Vwo A voor EM/NG - Beschikbaar 520 slu

Bg: Functies en grafieken 80
Cg: Discrete analyse 40
Eg: Combinatoriek en kans 100
Ba: Differentiaalrekening met toepassingen 80*
krap?
Ea: Grafen en matrices 40
Fa: Statistiek en kansrekening 80
Ga: Keuzeonderwerp 40
PO e.d. 60

Dus analyse=160, discreet=80, kans=200.

Geschrapt worden:

26 t/m 28 rijen
29 t/m 35 ruimtelijke objecten
42 t/m 46 lineair programmeren
85 t/m 89 optimaliseren in economische context
90 t/m 100 discrete dynamische modellen
101 t/m 108 lineair programmeren

Vwo B voor NG/NT - Beschikbaar 520 slu

Bg: Functies en grafieken 80
Cg: Discrete analyse 40
Bb: Differentiaal- en integraalrekening 140*
is dit genoeg?
Db: Goniometrische functies 40*
is dit genoeg?

Gb: Voortgezette meetkunde, incl. eindterm 145 (beter: Bewijzen) 120
Fb: Keuzeonderwerp 40
PO e.d. 60
Dus analyse=260, discreet=40, meetkunde=120.

Geschrapt worden:

26 t/m 28 rijen
29 t/m 35 ruimtelijke objecten
36 t/m 41 berekeningen
47 t/m 55 combinatoriek
56 t/m 63 kansen
64 t/m 70 rekenen met kansen
71 t/m 76 speciale discrete verdelingen
99 t/m 102 modelleren
103 t/m 106 differentiaalvergelijkingen
* ergens schrappen in 107 t/m 117
118 t/m 119 standaardafwijking
120 t/m 125 normale verdeling
126 en 127 toetsen van hypothesen
136 t/m 139 afstanden en grenzen
140 t/m 144 analytische meetkunde
146 t/m 153 meetkundige plaatsen en kegelsneden
154 t/m 159 rijen
160 t/m 166 convergentie
167 t/m 169 sommeerbare rijen
170 t/m 172 irrationale getallen
173 t/m 175 limieten en functies

145 verplaatsen naar domein Bewijzen

Vwo NT Voortgezette wiskunde - Beschikbaar 520 slu / 480

Na overlap statistiek en kansrekening blijft er nog ca. 240 in te vullen over. Hier zijn we nog niet verder dan suggesties, namelijk:

(1)
Modelleren 80
- Discrete dynamische modellen
- Continue dynamische modellen
Analytische meetkunde 80
- Beginselen van de analytische meetkunde (140-144)
- Meetkundige plaatsen en kegelsneden (145-153)
Voortgezette analyse 80
- Alle subdomeinen (154-175)
Opmerking/vraag: Alle domeinen zitten (te?) vol.
Als we graag wat meer ruimte voor onderzoek e.d. willen, dus liever een blok onderzoeksproject/zebra van 80 uur, dan moet er een blok uit. *Wat kan er uit?*

(2) alternatief

Modelleren 80
- Discrete dynamische modellen
- Continue dynamische modellen
Ruimtemeetkunde 80
Keuze: zebra/onderzoek in samenwerking met het wo 80

(3) alternatief

Modelleren	120
- Discrete dynamische modellen	
- Continue dynamische modellen	
Analytische meetkunde	40
- Beginselen van de analytische meetkunde	
	(140-144)
Functies van meer variabelen	80
<i>Opmerking/vraag:</i> wat is het meest aantrekkelijke en haalbare programma?	

Vwo C voor CM - Beschikbaar 480 slu

Hieronder staat het huidige programma, een beetje 'opgeplust'. Daar moet iets beters voor gevonden kunnen worden, meer toegesneden op het profiel, maar dat vraagt een commissie met meer tijd.

Bg: Functies en grafieken	80
Cg: Discrete analyse	40
Eg: Combinatoriek en kans	100
Ea: Grafen en matrices	40
Fa: Statistiek en kansrekening	120
Keuzeonderwerp	40
PO e.d.	60

Tenslotte

... is het wel nuttig op te merken:

- dit is het kleinste wiskundeprogramma van na de oorlog;
- geen aandacht voor de geschiedenis van de wiskunde;
- geen aandacht voor culturele/maatschappelijke aspecten van de wiskunde;
- geen aandacht voor ontwikkelingen in de wiskunde van de laatste 200 jaar;
- geen aandacht voor een beroepsperspectief;
- geen mogelijkheid om andere dan profielwiskunde te kiezen (wordt niet meer genoemd);
- geen aandacht voor samenhang met of afstemming op andere vakken.

Oftewel: is dit een aantrekkelijk actueel programma?!

Examenbesprekingen 2005

[Grada Fokkens en Conny Gaykema]

VMBO TKG

maandag 30 mei 2005
15.00-18.00u

ALKMAAR

OSG Willem Blaeu,
Robonsbosweg 11 (072-5122477)
mw. C.E. Gaykema (020-6131802)

BURGUM

CSG Liudger,
Tj.H. Haismastraat 1 (0511-460260)
mw. G. Tack Althof (058-2572388)

GRONINGEN

Noorderpoort College,
Van Schendelstraat 1 (050-5297329)
dhr. J. Rijnaard (050-5254709)

ROTTERDAM

Geref. Sg. Randstad,
Valenciadreef 15 (010-4552511) ^[1]
NS Alexanderpolder
dhr. W. de Jager (0184-683829)

ZEIST

KSG De Breul,
Arnhemsebovenweg 98
(030-6915604)
dhr. B. Nieuwenhuis (0345-558355)

ZWOLLE

Thorbecke SG,
Dr. C.A. van Heesweg 1
(038-4564540)
dhr. R. Kronenberg (038-4210044)

HAVO-A12

maandag 6 juni 2005
16.00-18.00u

HAVO-B1/B12

maandag 30 mei 2005
15.30-18.00u

AMERSFOORT

SG Guido de Brès,
Paladijnenweg 251 (033-4792900)
A: dhr. A.B. v.d. Roest
(0318-543167)
B: dhr. F. v.d. Heuvel (030-2730898)

AMSTERDAM

CSG Buitenveldert,
De Cuserstraat 3 (020-6423902)

CS tram 5; CS en

Amstel sneltram 51

A: mw. G.W. Fokkens

(020-6438447)

B: dhr. H.G.J. Rozenhart

(072-5716448)

regio Arnhem: ROZENDAAL

Het Rhedens, Kleiberglaan 1

(026-3646845)

A: dhr. Ph. Thijsse (0315-342436)

B: dhr. A.W.M. Tromp

(026-3254829)

's-GRAVENHAGE

Hofstad Lyceum,

Colijnplein 9 (070-3687670)

A: dhr. J.P.C. van der Meer

B: geen bijeenkomst

GRONINGEN

Röling College,

Melisseweg 2 (050-5474141)

A: dhr. I.P. Osinga (0596-571780)

B: mw. H. Lüder (0516-432889)

ROTTERDAM

Geref. Sg. Randstad,

Valenciadreef 15 (010-4552511) ^[1]

NS Alexanderpolder

A: dhr. B.L.G.P. Hillebrand

(0180-515210)

B: mw. A.E.L. de Jongh Swemer

(010-4138432)

ZWOLLE

Van der Capellen SG,

Lassuslaan 230 (038-4225202)

A: dhr. J. Alderliesten

(0527-201665)

B: dhr. J.P. Scholten (053-4768791)

VWO-A1/A12

vrijdag 27 mei 2005

15.30-18.00u

VWO-B1/B12

donderdag 2 juni 2005

15.30-18.00u

AMERSFOORT

SG Guido de Brès,

Paladijnenweg 251 (033-4792900)

A: dhr. F.O. van Leeuwe

(0341-492843)

B: dhr. F.W. Zwagers (033-4752341)

AMSTERDAM

CSG Buitenveldert,

De Cuserstraat 3 (020-6423902)

CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51

A: dhr. R. Stolwijk

(072-5325551)

B: dhr. S.T. Min (0229-237756)

regio Arnhem: ROZENDAAL

Het Rhedens,

Kleiberglaan 1 (026-3646845)

A: dhr. L.H. Rietveld (055-5419287)

B: dhr. A.T. Sterk (055-3666466)

's-GRAVENHAGE

Hofstad Lyceum,

Colijnplein 9 (070-3687670)

A: dhr. J. Remijn (070-3684525)

B: dhr. R.J. Klinkenberg

(070-3559938)

GRONINGEN

Röling College, Melisseweg 2

(050-5474141)

A: dhr. L. Tolboom (050-3146093)

B: dhr. W.H.V. de Goede

(050-5013342)

's-HERTOGENBOSCH

Ds. Pierson College,

G. ter Borchstraat 1 (073-6442929)

NS Den Bosch-OOST

A: geen bijeenkomst

B: dhr. H.J. Kruisselbrink

(073-5216386)

ROTTERDAM

Geref. Sg. Randstad,

Valenciadreef 15 (010-4552511) ^[1]

NS Alexanderpolder

A: dhr. D.A.J. Klingens

(0180-514485)

B: dhr. C. Rijke (078-6194286)

ZWOLLE

Van der Capellen SG,

Lassuslaan 230 (038-4225202)

A: dhr. A. Ebberts (0341-252202)

B: dhr. H. Schutjes (0529-427306)

Noot

[1] Parkeren op het parkeerterrein Almeria-erf 8 is toegestaan.

Aankondiging / Hbo-conferentie

Op 27 april 2005 vindt plaats de conferentie '*Kritisch (leren) werken bij wiskunde en in de praktijk*', onder auspiciën van de NVvW-werkgroep hbo.

Locatie: Hogeschool Domstad te Utrecht

Tijd: 13:00 tot 17:00 uur

De NVvW heeft in 2000 een nota uitgebracht waarin gewezen wordt op de huidige ingenieurspraktijk met velerlei moderne ICT-hulpmiddelen en op de veranderde vooropleidingen waarin meer aandacht is voor praktische wiskunde ten koste van training in het rekenen met formules.

Deze conferentie beoogt de huidige situatie en nieuwe mogelijkheden in onderwijs en in de beroepspraktijk in beeld te brengen.

Ervaringsdeskundigen uit het technisch beroepenveld, het hbo en de vooropleidingen zullen hun werkwijzen, gericht op het kritisch leren werken met wiskunde, aan de hand van voorbeelden uit de praktijk in een serie korte presentaties toelichten.

Informatie, inschrijving

Voor inschrijving en nadere informatie zie www.nhl.nl/~kamminga/conferentiehbo.

Puzzel 806 De driehoek van Pascal

De bekende driehoek van Pascal heeft allerlei interessante eigenschappen. Een heel leuke vind ik:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

Hij doet me denken aan een goocheltruc waarbij een of ander voorwerp wordt ingepakt en vervolgens in mootjes wordt gehakt of verbrand of iets van dien aard, waarna het voorwerp weer onbeschadigd tevoorschijn komt!

In de opgaven van deze keer gaan we de getallen in de driehoek van Pascal reduceren, eerst modulo 2. Iedere rij van enen en nullen is nu op te vatten als een binair getal.

Bijvoorbeeld de rij 1, 5, 10, 10, 5, 1 is na reductie modulo 2 gelijk aan 1, 1, 0, 0, 1, 1 en het bijbehorende binaire getal is 110011. Als we dat weer omzetten naar tientallig, komen we uit op 51. Bij rij 5 behoort dan het getal 51. (De bovenste rij van de driehoek, die slechts uit één 1 bestaat, noem ik de nulde rij).

Laat $f(n)$ het getal zijn dat op deze wijze bij de n -de rij behoort. Dank zij de mooie recursieve structuur van de gereduceerde driehoek zijn de functiewaarden van f nu redelijk snel uit te rekenen.

Opgave 1

Bepaal een (recursieve) formule voor $f(n)$ en pas deze toe om $f(30)$ te bepalen.

Ook modulo 3 en voor grotere priemmoduli heeft de driehoek een fraaie structuur, al komt die pas verderop tevoorschijn. Dat belet ons niet om nu 10 als modulus te kiezen. Het bovenste puntje van de resulterende driehoek ziet u in **figuur 1**. Ergens in de tiende rij kunt u het getal 2005 zien staan. Dit 'boompje' heb ik gebruikt voor een nieuwjaarskaart aan enkele wiskundig getinte relaties. Het getal 2005 was rood, de rest groen.

Onvermijdelijk rijst de vraag: 'Komen alle natuurlijke getallen op deze manier voor in de aldus gereduceerde driehoek van Pascal? Hij is tenslotte groot genoeg.' Het antwoord is ontkennend.

Opgave 2

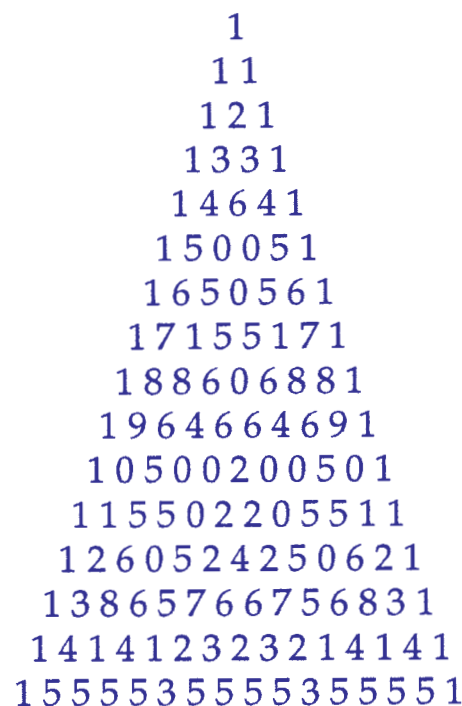
Bepaal een getal dat, op de hierboven beschreven wijze, niet voorkomt in de driehoek van Pascal modulo 10.

Twee kanttekeningen. Ten eerste is het de bedoeling dat u binnen de rij blijft. Dus, om het getal 11121 te maken mag u niet de rijen 1 en 2 aan elkaar plakken. Ten tweede: ik weet niet wat het *kleinste* getal is dat niet voorkomt; dat wordt dus ook niet gevraagd. Maar ik houd me aanbevolen, ook voor een scherpe ondergrens!

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Per goede oplossing zijn weer maximaal 20 punten te verdienen voor de ladder.

De deadline is 7 mei 2005.

Veel plezier!



FIGUUR 1

Oplossing 'Er waren eens zes getallen'

Deze opgaven gaven nogal wat moeilijkheden: van de 13 inzendingen waren er slechts 6 geheel foutloos, namelijk die van D. Buijs, W. Doyer, H.J. Brascamp, T. Notenboom, A. Verheul en L. de Rooij.

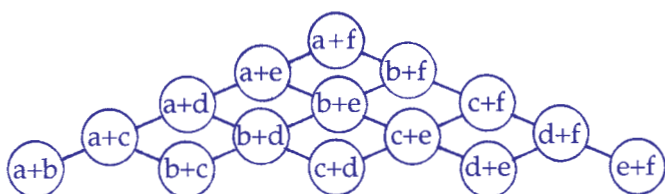
Opgave 1

Deze opgave hoorde ik een paar jaar geleden van Zsafia Ruttkay. Ook in het boek *Unsolved Problems in Number Theory* van R.K. Guy wordt het probleem genoemd. (Het woord 'unsolved' slaat niet op onze opgave!)

De oplossing voor $n = 6$ verloopt als volgt. $a + b$, $a + c$, $d + f$ en $e + f$ zijn onmiddellijk bekend. Zie ook figuur 2. De som s van de zes gezochte getallen is een vijfde van de som der dubbelsommen. Dan zijn ook $b + e$, $c + d$, $b + d$ en $c + e$ te bepalen en daarna $a + f (= s - (b + e) - (c + d))$. Er zijn nu nog zes dubbelsommen over. Drie ervan zijn kleiner dan $b + e$, namelijk $a + d$, $a + e$ en $b + c$. De som van deze drie is $2a + (b + d) + (c + e)$, dus nu is a bekend. De rest is eenvoudig.

Menige inzender miste de laatste stap en ronde af met een splitsing in twee gevallen. In een voorbeeld blijkt dan een van de twee af te vallen. Maar de eenduidigheid in het algemene geval blijft nu duister, waarmee dus ook geen reconstructie voor dat algemene geval is gevonden. Je kunt alleen dan van reconstructie spreken als er precies één uitkomst is!

Twee van de inzenders gingen er van uit dat de getallen geheel moeten zijn, maar dat is niet gegeven.



FIGUUR 2

Opgave 2

Opgave 2 werd door alle inzenders goed opgelost. Een voorbeeld: bij de rij dubbelsommen 8, 10, 12, 14, 16, 18 behoort zowel de rij 2, 6, 8, 10 als de rij 3, 5, 7, 11: reconstructie niet mogelijk. Jan Meerhof gaf als zijn 'favoriete tegenvoorbeeld' twee rijen waarin o.a. $\sqrt{2}$ en π voorkomen! Met een eenvoudige constructie kun je laten zien: als reconstructie van n getallen niet mogelijk is, dan ook niet van $2n$ getallen.

Opgave 3

Het antwoord is 1111. Ik vond dit wel een aardig sommetje, ten eerste omdat er zo'n mooi getal uitkomt en ten tweede omdat het antwoord verrassend klein is.

Er zijn twee oplossingsmethoden; je kunt de machten onderscheiden naar de exponent of naar het grondtal. De eerste methode is verreweg het handigst, ook omdat je alleen priemexponenten hoeft mee te nemen. Er zijn 1000 kwadraten en 100 derde machten waarvan er 10 afvallen. (Dat schiet goed op!) Voor de vijfde machten kan het grondtal niet groter dan 15 zijn, en de grondtallen 1, 4, 8 en 9 vallen af, dus: 11 vijfde machten. Enzovoort. Ik heb bewondering voor de mensen die het op de tweede manier deden en toch het goede antwoord vonden. Lieke de Rooij deed het op beide manieren en ook nog met de computer. Ton Kool liet de computer het aantal machten tot en met k -miljoen bepalen voor $k = 1, 2, \dots, 20$. Voor $k = 14$ zijn er 4000, ook een getal dat niet moeilijk te onthouden is!

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit.

L. de Rooij 272
L. van den Raadt 221
J. Meerhof 190
W. Doyer 182
T. Kool 179
W. van den Camp 119

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (redactie-euclides@nvvw.nl).

Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html).

nr	verschijnt	deadline
7	26 mei 2005	5 april 2005
8	23 juni 2005	10 mei 2005

woensdag 27 april, Utrecht
Conferentie 'Kritisch (leren) werken bij wiskunde en in de praktijk'
Organisatie NVvW-werkgroep hbo

Examens

wo. 25 mei (13:30-16:30u) - HAVO B1/B12
wo. 25 mei (13:30-16:30u) - VWO A1/A12
do. 26 mei (13:30-15:30u) - VMBO KB
do. 26 mei (13:30-15:30u) - VMBO GLT
di. 31 mei (11:30-13:00u) - VMBO BB
di. 31 mei (13:30-16:30u) - VWO B1/B12
do. 2 juni (13:30-16:30u) - HAVO A12

Examenbesprekingen

vr. 27 mei (15:30-18:00) - VWO A1/A12
ma. 30 mei (15:00-18:00u) - VMBO TGK
ma. 30 mei (15:30-18:00u) - HAVO B1/B12
do. 2 juni (15:30-18:00u) - VWO B1/B12
ma. 6 juni (16:00-18:00u) - HAVO A12

vrijdag 20 mei, Rotterdam
Panama/NVORWO Voorjaarsdag 2005
Organisatie (oa.) FI

vr. 20 t/m zo. 22 mei, Gent (B)
BeNeLuxFra Conference in Mathematics
Organisatie (oa.) KWG

zaterdag 28 mei, Utrecht
Symposium XI: Kansen en verwachtingen
Organisatie HKRWO

vr. 26 en za. 27 augustus, Eindhoven
vr. 2 en za. 3 september, Amsterdam
Vakantiecursus 2005
Organisatie CWI

do. 15 t/m za. 17 september, Utrecht
Symposium Freudenthal 100
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

NIEUW

Prijs voor leden van de NVvW: € 8,00 (incl. verzendkosten);
bestellingen via girorekening 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven, Utrecht.
Prijs voor leden van de NVvW op bijeenkomsten: € 7,00.
Prijs voor niet-leden: € 9,00 (in de betere boekhandel).

Zie ook: www.epsilon-uitgaven.nl

[Ab van der Roest / Martin Kindt]

Zebra 20

Babylonische Wiskunde

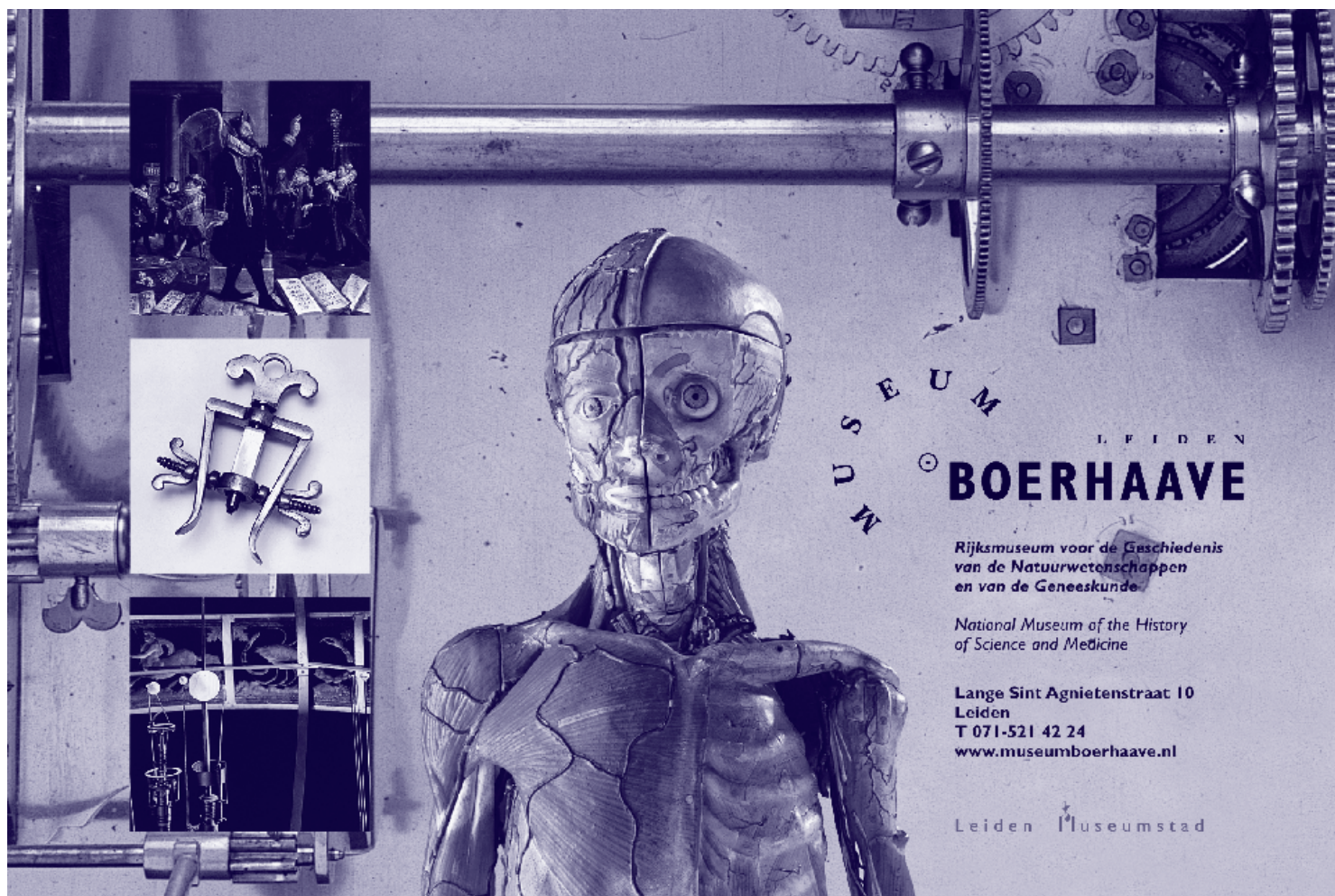
Al duizenden jaren voor onze jaartelling waren verschillende volkeren met wiskunde bezig. Het ging daarbij meestal om praktische toepassingen zoals landmeetkunde en sterrenkunde. De Babyloniërs deden echter zelfs al aan wiskunde om de wiskunde. In deze Zebra komen verschillende aspecten van de Babylonische wiskunde aan bod, zoals rekenen, algebra en meetkunde. Daarbij wordt vaak uitgegaan van originele teksten op kleitabletten in spijkerschrift. Een beroemd tablet dat aan de orde komt is Plimpton 322, waarop een serie raadselachtige getallen staat. De vele opgaven maken dit boekje een wiskundige en historische ontdekkingsstocht.

ISBN 90 5041 090 1



Epsilon uitgaven

in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



MUSEUM
LEIDEN

BOERHAAVE

Rijksmuseum voor de Geschiedenis
van de Natuurwetenschappen
en van de Geneeskunde

National Museum of the History
of Science and Medicine

Lange Sint Agnietenstraat 10
Leiden
T 071-521 42 24
www.museumboerhaave.nl

Leiden Museumstad

Nieuw bij Moderne wiskunde 8 Werkboek Algebra plus

Werkboek
Algebra plus



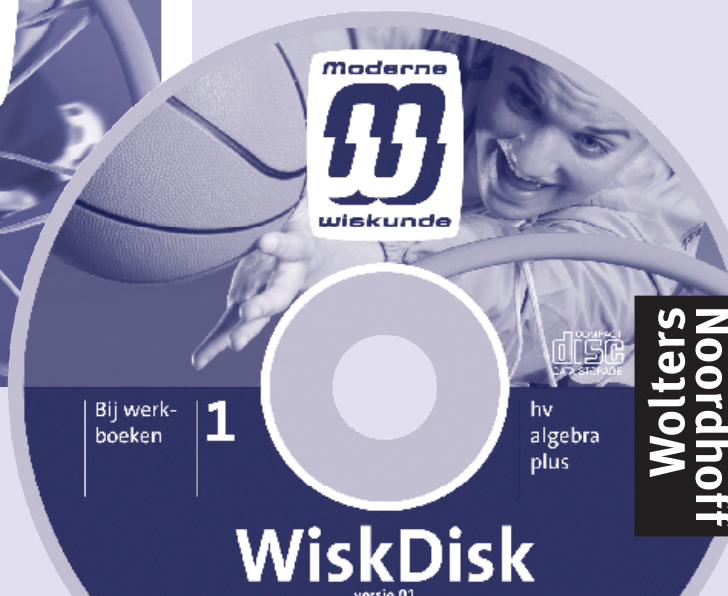
1

Deel
A

havo vwo



- **voor havo/vwo**
(1 havo/vwo nu verkrijgbaar,
2 havo/vwo en 2 vwo in 2005,
delen 3 in 2006)
- **meer oefening van technische
en algebraïsche vaardigheden**
- **complexe opdrachten**
- **hoofdstukoverstijgende
oefeningen**
- **extra opdrachten met de
computer**



**Wolters
Noordhoff**

Nieuwsgierig?

Vraag beoordelingsexemplaren aan
bij Klantenservice Wolters-Noordhoff
Voortgezet Onderwijs T (050) 522 67 76
of e-mail: vo@wolters.nl.

Neem ook een kijkje op de site:
www.modernewiskunde.wolters.nl

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen