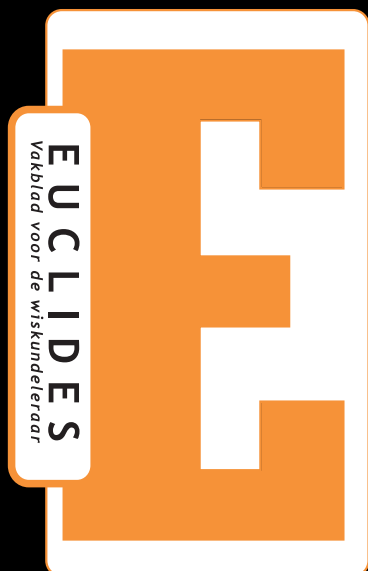




Pierre van Hiele

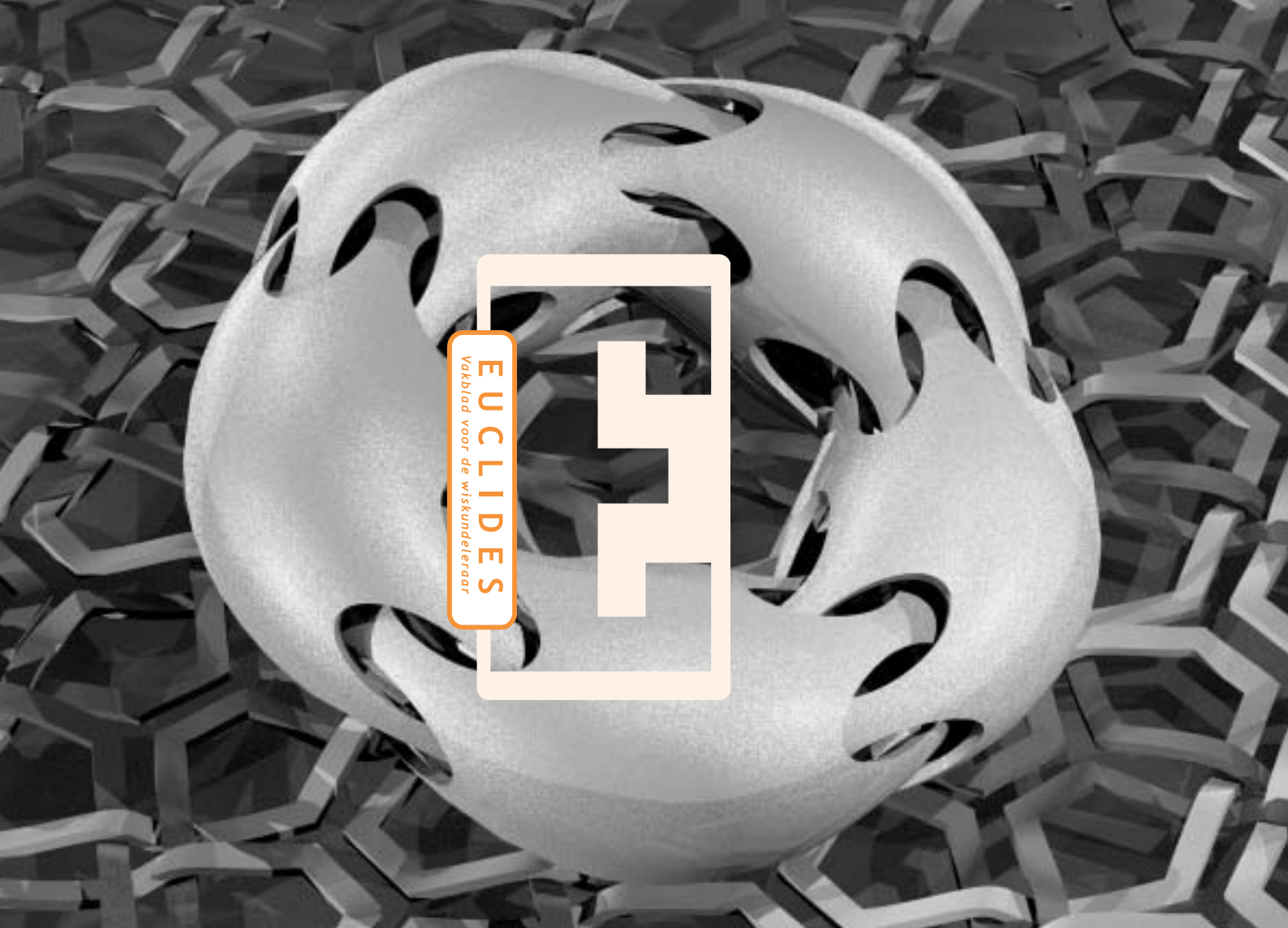
Transformatiemeetkunde

Authentieke contexten

Reflectie

mei
2004/nr.7
jaargang 79





EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraren

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom
Marja Bos, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Elzeline de Lange
Jos Tolboom

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvww.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren

www.nvww.nl



Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvww.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvww.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bommel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Rinus Roelofs, Hengelo
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 42,50
Studentleden: € 22,50
Gepensioneerden: € 27,50
Leden van de VWW: € 27,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 27,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 47,50
Instituten en scholen: € 127,50
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 VR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

7

mei 2004 JAARGANG 79

293	Van de redactietafel [Marja Bos]
294	Pierre van Hiele 95 jaar [Harrie Broekman]
295	Transformatiemeetkunde [Wim Groen]
300	40 jaar geleden [Martinus van Hoorn]
302	Wiskunde, zes maanden op zicht [Jan van Maanen]
305	Re:cursief / Zeno's onderhandelings- resultaat [Rob Bosch]
306	Na griepmeting nog meer onderzoek via internet [Carl Koppeschaar]
308	Authentieke contexten in het vmbo [Monica Wijers, Vincent Jonker, Sieb Kemme]
314	Reflectie in de klas [Gerrit Roorda]
318	Lineair programmeren met Geocadabra [Bob Bakker]
321	Klassikaal [Dick Klingens]
321	Aankondiging
322	Wiskundige aspecten van rooster- problemen [Roy Willemen]
324	Wiskunde-sluit-aan [Hans Daale]
327	Bèta-plus of bèta-min [Swier Garst]
327	Aankondiging
328	Gesprekken met Sjaak (5) [Jan van den Brink]
330	Recreatie [Frits Göbel]
332	Servicepagina
Aan dit nummer werkten verder mee: Peter Boelens, Chris van der Heijden en Klaas-Jan Wieringa.	

Van de redactietafel [Marja Bos]

Voorkant

Het object op de voorkant van dit meinummer is getiteld 'Doubleskin Torus'. Ontwerper Rinus Roelofs meldt hierover: 'De figuur bestaat uit een doorlopende band. Wanneer je een rondwandeling zou maken beginnend op één van de vijf bolle gedeeltes, zou je merken dat je tweemaal rond moet lopen om weer op het beginpunt terug te keren.'

We rekenen op u!

De redactie is van plan volgend jaar een special uit te brengen over het thema 'rekenen'. Inmiddels hebben we al wat mensen rechtstreeks uitgenodigd om over een specifiek aspect van dit thema het een en ander op papier te zetten, maar uiteraard zijn we ook geïnteresseerd in spontane bijdragen. Als u een aardig idee heeft voor een 'reken-artikel', neemt u dan (in verband met de planning en de spreiding van onderwerpen) op korte termijn contact met ons op: redactie-euclides@nvvw.nl. Conceptbijdragen voor deze rekenspecial kunnen overigens nog worden ingediend tot 1 september a.s.

Vakmanschap is meesterschap

Hopelijk zie ik spoken, maar ik maak me wel eens zorgen over een sluipende afbrokkeling van de expertise van de wiskundedocent en van de 'ambachtelijke' aspecten van ons dagelijks werk. Ik maak me bovendien zorgen over de wijze waarop we ons dat als beroepsgroep *laten* overkomen – onder invloed van veranderde omstandigheden, de tijdsdruk, en misschien ook wel eens uit gemakzucht.

Er ligt volgens mij namelijk een groot gevaar op de loer. We hebben het allemaal druk, de gemiddelde schooldag is (of lijkt alleen maar?) langer geworden door een toenemend aantal vergaderingen en administratieve klusjes, en daardoor verschuiven de lesvoorbereiding en andere gelegenheden tot bezinning op je eigen aanpak vaak naar de avonduren. En dan is daar, heel comfortabel natuurlijk, allerlei ondersteunend materiaal, bijvoorbeeld in de vorm van antwoordenboekjes, proefwerkbundels, goed-gestructureerde leerboeken...

Nadenken over lange leerlijnen? Over belangrijke leerdoelen? Op grond daarvan zelf een toets ontwerpen? Niet meer zo nodig; alles is immers kant-en-klaar aanwezig. Dat bespaart toch een hoop tijd? Jazeker. En soms is dat harde noodzaak - en dus heel praktisch. Maar als die situatie *structureel* zou worden (en daar ben ik een beetje bang voor), dan is het ook heel *jammer*, en zeker niet bevorderlijk voor onderhoud en ontwikkeling van de eigen vakdidactische expertise. Juist het feit dat uitgevers op tijdgebrek van de docent hebben ingespeeld, kan leiden tot verlies aan deskundigheid bij degene die toch eigenlijk de expert zou moeten zijn: de docent! Vóórdat je het weet heb je je in de rol laten (!) drukken van eenvoudiger *uitvoerder* van andermans ideeën, van één-op-één begeleider bij losse 'moeilijke sommetjes', terwijl je toch eigenlijk professioneel *vormgever* van je eigen wiskundeonderwijs zou moeten zijn. Welke werkvormen zet ik morgen in? Waarom juist die? Wat voor opdrachten voeg ik toe aan het materiaal waarover de leerlingen beschikken? Wat laat ik weg – en waarom eigenlijk? Hoe laat ik m'n leerlingen zich oriënteren op een nieuw begrip, een andere vaardigheid – en waarom op die manier?

Waar ik voor pleit is dat er tijd vrijkomt en tijd genomen wordt voor reflectie op vragen als: 'Hoe organiseer ik het leren van de leerling, hoe geef ik m'n wiskundeonderwijs vorm?' En dat 'ik' mag dan natuurlijk – graag zelfs! - ook 'wij' zijn, de hele wiskundesectie bijvoorbeeld, zolang de docent maar weloverwogen *zelf blijft nadenken*.

Zie ik spoken? Ik hoop het.

PIERRE VAN HIELE 95 JAAR

[Harrie Broekman]

In het grote jubileumboek *Honderd jaar wiskunde-onderwijs* uit 2000 schreef de op 4 mei 1909 geboren Pierre van Hiele een bijdrage met als titel 'De illusie van het streng redeneren'. In die titel is veel te herkennen van het werk waar deze wiskundeleraar, didactisch onderzoeker en auteur van leerboeken nog steeds mee bezig is: nadenken over het hoe, maar vooral ook het waarom van wiskundeonderwijs. Welke wiskunde voor welke leerlingen, hoe gaat eigenlijk dat leren van wiskunde, hoe kan ik de leerling helpen om van het ene niveau van denken/redeneren naar een volgend te komen? Allemaal vragen waarin hij zich door de jaren heen met succes verdiept heeft. Vele artikelen van zijn hand verschenen onder andere in vele jaargangen van *Euclides*, zoals vooral die in de jaren vijftig en zestig, maar ook daarna. Ook zijn proefschrift *De problematiek van het inzicht* (1957), zijn nog steeds op veel verplichte literatuurlijsten staande Amerikaanse boek *Structure and Insight* (1986), en niet te vergeten het boek *Struktuur* (1981), worden nog veelvuldig geraadpleegd.

Wat maakt dat het werk van Van Hiele nog steeds van grote invloed is op veel onderzoekers, didactici en leerboekauteurs, is waarschijnlijk zijn uitgangspunt dat didactiek niet bedoeld is om het de leerlingen gemakkelijker te maken, maar om ze met eigen inspanningen tot inzicht te brengen.

De volgende citaten uit werk van Pierre zelf en van anderen spreken voor zich, en maken eveneens duidelijk dat wij kunnen zeggen: proficiat met je verjaardag, bedankt voor alles wat je voor het wiskundeonderwijs gedaan hebt.

'Noodzakelijk is, dat men de kinderen liefde voor de wiskunde bijbrengt. Daarin kan men slagen, als men hen eerst de vreugde van het maken van mooie dingen met behulp van wiskunde laat beleven en hen er dan gaandeweg toe brengt ook de beknoptheid en duidelijkheid van de wiskundige bewijsvoering te waarderen.' (PvH, *Euclides*, jrg. 30, p. 253.)

Over het onderwijzen van negatieve getallen kon Freudenthal zich nogal eens druk maken, maar op een internationale conferentie zwaaide hij Van Hiele lof toe voor het doorzien waarom het gebruik van pijltjes langs de getallenlijn niet werkte:

'Het is zo'n prachtig idee, waardoor men zich afvraagt waarom het toch niet werkt. P.M. van Hiele was de eerste die er een reden voor aangaf, een reden die zo simpel is dat men zich afvraagt waarom niemand anders er opgekomen is: dimensie één is het minst geschikt om vectoren de kans te geven die ze verdienen. In Van Hieles nieuwste aanpak verschijnen negatieve getallen in een tweedimensionale opzet.' (Freudenthal tijdens het ICM-congres 1983.)



'Met zijn niveautheorie heeft Van Hiele structuur in het menselijk denken aangebracht door de drie niveaus te onderscheiden. Op het laagst niveau, het *visuele niveau* genoemd, gaat het om het waarnemen van de elementen van een structuur. (...) Rooster- of ruitjespapier is op het visuele niveau een blanco vel papier met horizontale en verticale lijnen op onderling gelijke afstand. Op het erop volgende niveau gaat het om de aard van de structuur. Op dit, door Van Hiele het *beschrijvende niveau* genoemd, gaat het bij roosterpapier om zaken als de samenstellende vierkanten, waarvoor geldt dat ze even groot zijn; dat ze even grote zijden en even grote (rechte) hoeken hebben; dat ze samengevoegd kunnen worden tot grotere, onderling weer even grote vierkanten of tot andere figuren. (...) Het derde, door Van Hiele het *theoretische niveau* genoemd, is het niveau waarop door mensen gesloten systemen geconstrueerd worden om het relatiernet van het beschrijvende niveau in een theorie onder te brengen. Voor het platte vlak, op het visuele niveau door roosterpapier gerepresenteerd, kan dat gedaan worden door middel van de tweedimensionale Euclidische vectorruimte.' (Bert Zwaneveld, 1999, *Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs*, p. 132/133.)

Pierre van Hiele heeft door zijn niveau-indeling in het wiskundig denken de discussie mogelijk gemaakt, en zelfs opgeroepen, over de vraag of in bepaalde situaties niet gekozen kan/moet worden voor een snel/compact voorstadium voor het abstracte. Ook nu is die discussie nog gaande mede door het bekende fenomeen van de grotere hanteerbaarheid voor sommige leerlingen van de abstracte structuren in wiskunde-B. Die leerlingen prefereren dit dan ook boven de concrete voorbeelden uit wiskunde-A.

Pierre, gefeliciteerd, en we hopen allemaal nog veel van je te leren.

Over de auteur

Harrie Broekman (e-mailadres: H.G.B.Broekman@phys.uu.nl) was gedurende vele jaren met veel plezier bezig met het werk van Pierre van Hiele, als leraar en later als lerarenopleider en vakdidacticus.

TRANSFORMATIEMEETKUNDE

Een aanloop naar het meetkundeprogramma van 1968

[Wim Groen]

FIGUUR 1 Rudolf Troelstra. Geboren te Heerenveen in 1917. Wiskundeleraar in Sneek van 1949 tot 1956 en in Hilversum van 1956 tot 1971. Vanaf 1971 tot aan zijn pensionering in 1980 docent vakdidactiek wiskunde aan de Vrije Universiteit in Amsterdam. (Mede)auteur van verschillende leerboeken. Had onder andere grote invloed op de methode *Moderne wiskunde* (in de jaren 1968 tot ca. 1985).

Inleiding

Op 17 mei 2003 werd in Utrecht door de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO) een symposium gehouden met als titel 'Oude Meesters'. Doel van het symposium was, de betekenis van het didactische werk van een aantal meer of minder bekende wiskundeleraars van de twintigste eeuw (Bos, Van Hiele, Nieland en Troelstra) weer eens in het licht te zetten.

Het hier volgende artikel probeert een beeld te geven van een project rond de didactiek en de opzet van de meetkunde dat omstreeks 1960 in Hilversum is uitgevoerd en waarin Rudolf Troelstra een belangrijke rol speelde.

Voorgeschiedenis

In de jaren dertig, veertig en vijftig van de vorige eeuw speelde in de discussies over de didactiek en de inhoud van het wiskundeonderwijs de meetkunde altijd een belangrijke rol^[1]. De meeste meetkundeboekjes hadden in die tijd een nogal formele opzet, die kinderen direct vanaf het begin van de eerste klas confronteerde met de kenmerken van een deductief systeem. Voor veel leerlingen was de meetkunde in de eerste klas een struikelblok.

Het is dan ook niet vreemd dat het ministerie van onderwijs in de jaren vijftig een subsidie beschikbaar stelde aan de Pedagogische Centra voor het ontwikkelen van een stel objectieve toetsen waarmee je zou kunnen vaststellen of leerlingen inzicht in de meetkunde hadden ontwikkeld.

Het ontwikkelteam dat de toetsen produceerde, stond onder leiding van prof A.D. de Groot (leerpsycholoog aan de Gemeentelijke Universiteit van Amsterdam), het product bestond uit een serie prestatietests en een drietal attitudetests^[2]. De totstandkoming van deze meetinstrumenten staat bekend als *Meetkundeproject I*. Toen dit project zijn voltooiing naderde, ontstond het plan de nieuwe meetinstrumenten te gebruiken in een didactisch researchproject. Een van de leden van de ontwikkelgroep was de voormalige rector van het



Christelijk Lyceum in Hilversum, dr. H. Turkstra. Hij meende dat een aantal leraren van zijn vroegere school misschien wel bereid was aan zo'n didactisch experiment mee te werken.

Meetkundeproject II

Zo kwam het dat in 1958 enkele wiskundeleraars (R. Troelstra, A.N. Habermann, A.J. de Groot en J. Bulens) van het Christelijk Lyceum in Hilversum van prof. A.D. de Groot het verzoek kregen mee te werken aan een didactisch researchproject. Doel van dit zogenoemde *Meetkundeproject II* was twee behandelingswijzen van dezelfde meetkundeleerstof met elkaar te vergelijken door gebruik te maken van de meetinstrumenten die in Meetkundeproject I waren ontwikkeld.

Van de genoemde leraren was Troelstra (zie figuur 1) al enige tijd bezig te experimenteren met een alternatieve aanpak van het meetkundeonderwijs in de eerste klas. De anderen werkten volgens het traditionele leerboek voor de vlakke meetkunde dat op de school in gebruik was^[3]. In de traditionele opzet van het meetkundeprogramma in die tijd kregen de leerlingen tijdens de eerste drie leerjaren van hbs en gymnasium vlakke meetkunde volgens een deductieve opzet in de geest van Euclides. Er waren natuurlijk per

methode verschillen, maar meestal begon men in de eerste klas met de congruentiegevallen van de driehoek of de stellingen over de gelijkheid van hoeken bij twee evenwijdige lijnen die door een derde worden gesneden (F-hoeken en Z-hoeken). Het ging erom zo snel mogelijk gereedschap aan te dragen waarmee je berekeningen kon uitvoeren of bewijzen kon leveren. Het meetkundeprogramma van de eerste klas eindigde met de stellingen en eigenschappen van de verschillende soorten vierhoeken.

Om een idee te krijgen: de volgende opgave zou een leerling toen aan het eind van klas 1 moeten hebben kunnen maken:

Gegeven: van vierhoek $ABCD$ is $AB \parallel CD$ en $AB = CD$.

Te bewijzen: $ABCD$ is een parallellogram.

Je moest dan weten dat in een parallellogram volgens de definitie de overstaande zijden evenwijdig zijn en dat je dus moest bewijzen dat ook $BC \parallel DA$.

Door als hulplijn de diagonaal AC te trekken kun je de congruentie van de driehoeken ABC en CDA bewijzen (congruentiegeval ZHZ) en daaruit volgt de gelijkheid van de F-hoeken bij BC en DA , zodat je kunt concluderen dat ook $BC \parallel DA$.

Troelstra vond de bestaande opbouw te weinig motiverend. Hij liet de leerlingen vooral in het begin veel tekenen en construeren. Hij merkte op dat daardoor de motivatie voor meetkunde toenam. Er waren natuurlijk wel vaker pogingen gedaan het inleidende meetkundeonderwijs anders op te zetten^[4], maar erg succesvol waren die niet geweest. Al in het tweede decennium van de twintigste eeuw schreven auteurs als Wolda en Reindersma leerboeken die van het principe 'leren door doen' uitgingen en die we nu rekenen tot de zogenoemde empirische stroming, maar zij slaagden er niet in landelijke navolging te krijgen.

Achteraf kun je zeggen dat Troelstra in eerste instantie in zijn eigen klassen (naar zijn zeggen zonder het te beseffen) aansloot bij die empirische stroming.

Andere argumenten

Met de start van Meetkundeproject II is het leraren-kwartet van het Christelijk Lyceum te Hilversum zijn ideeën gaan onderbouwen met literatuur en systematisch gaan werken aan een alternatieve opzet van de meetkunde voor de onderbouw. Enerzijds wilden ze daarbij het leren door doen in de praktijk brengen, anderzijds wilden ze geen concessies doen aan de wiskundige strengheid. Omdat Troelstra al bezig was geweest met constructies en spiegelingen als uitgangspunt, zochten ze aansluiting bij de ideeën van de Duitse wiskundige Felix Klein (1849–1925), die had aanbevolen de meetkunde op te bouwen met behulp van transformaties. Ze zijn toen ook gaan kijken op enkele Duitse scholen, omdat ze vermoedden dat daar iets te vinden was dat overeenkwam met de richting die ze zelf ook wilden inslaan. Van hun Duitse ervaringen hebben ze wel enig profijt gehad (ze hebben bijvoorbeeld dankbaar gebruik gemaakt van de

Duitse behandeling van evenwijdige lijnen), maar toch konden ze maar weinig direct gebruiken, omdat de opzet van het Duitse programma en de stijl van de schoolboeken sterk verschilden met wat in Nederland werd gewenst.

Ze hebben toen op eigen kracht een leergang *Bewegingsmeetkunde* ontworpen, die goed aansloot bij het bestaande Nederlandse meetkundeprogramma en die ze met ingang van 1960 gedurende twee jaar in stencilvorm op school hebben gebruikt. Daarna is die leergang omgewerkt tot de driedelige serie *Transformatiemeetkunde*, die bij de uitgeverij J.B. Wolters te Groningen in boekvorm verscheen (zie [figuur 2](#)).

In het voorjaar van 2003 had ik enkele gesprekken met mijn vroegere collega en leermeester Troelstra over zijn herinneringen aan het werk aan de transformatiemeetkunde. Een paar flarden uit die gesprekken:

'Ik ben al in Sneek begonnen met een alternatieve aanpak voor de meetkunde in klas 1. Ik merkte dat de kinderen het leuk vonden te tekenen met passer en liniaal. Doen vonden ze leuker dan redeneren. Ik liet ze daarom veel tekenen en construeren. De vlieger was ineens een belangrijke figuur, want die treedt bij constructies nogal eens op. Ik liet ze figuren spiegelen en ontdekken dat tweemaal spiegelen (in snijdende assen) een rotatie werd. Mijn voornaamste motief was steeds dat de kinderen enthousiast bezig waren met de meetkunde. Gebruikte wel een klassiek boekje, maar daar hield ik me niet zo aan. Ik gebruikte geen gestencild materiaal, maar improviseerde dat gewoon in de klas. (...)

Later merkte ik dat er over de ideeën die ik in de klas probeerde te realiseren ook literatuur was. Maar in eerste instantie bedacht ik die dingen zelf. (...)

In Hilversum ging ik eerst op de ingeslagen weg voort: bij een klassieke methode in de klas wat alternatieven gebruiken. Mijn voornaamste doel was steeds: de motivatie van de kinderen.'

Opvallend is dat wat in Troelstra's eigen klassen begon als een alternatieve, speelse aanpak, bedoeld om leerlingen door activiteiten enthousiaster te maken, tijdens en na afloop van het project werd gemotiveerd met geheel andere argumenten.

Op de jaarvergadering in 1963 van de vereniging Liwenagel (deze naam staat voor: 'Leraren In Wiskunde En Natuurkunde Aan Gymnasia En Lycea'; het was een van de voorlopers van de NVvW) houdt Troelstra een voordracht^[5] over het project *Transformatiemeetkunde*.

Hij noemt daarin twee aspecten van het groeiende onbehagen over de sterk door Euclides beïnvloede aanpak van het aanvankelijke meetkundeonderwijs.

1. Het is de vraag of het leren van meetkunde op traditionele wijze wel van belang is voor de verdere



FIGUUR 2 De omslag van deel 1 uit 'Transformatiemeetkunde'

KLAS 1

Congruentietransformaties

Inleiding
Lijnen en hoeken
Constructies
De spiegeling
Spiegel-symmetrische figuren
Evenwijdige lijnen
Draaiing of rotatie
Verschuiving of translatie
Congruentie
Driehoeken
Constructies van figuren

KLAS 2

Gelijkvormigheid en oppervlakte

De middenparallel
Vermenigvuldiging
Verhoudingen en evenredigheden
Gelijkvormige figuren
De oppervlakte van figuren
Goniometrie
De stelling van Pythagoras en toepassingen daarvan

KLAS 3

Het samenstellen van transformaties en het begrip groep

Verzamelingen
De cirkel
De omgeschreven cirkel
De raaklijn; de ingeschreven cirkel
De oppervlakte en de omtrek van een cirkel
Het samenstellen van transformaties
Groepen van transformaties

FIGUUR 3 De hoofdstukindeling van de boekjes

wiskundige ontwikkeling van de leerling. De veelheid van maniertjes, hulplijnen en kunstgrepen past niet meer zo bij de moderne manier van wiskunde-beoefening.

2. De indruk bestaat dat leerlingen met de traditionele aanpak van de meetkunde steeds meer moeite krijgen. Dat zou te maken kunnen hebben met de toename van de schoolbevolking, maar, zo vervolgt hij zijn betoog, *'Het is trouwens wel zeer de vraag in hoeverre het gros van de leerlingen vroeger de meetkunde heeft begrepen. Het is denkbaar dat men vroeger eerder dan thans genoegzaam met een kennen van algoritmen zonder werkelijk inzicht. Bij het steeds ingewikkelder worden van de maatschappij moeten wij er echter voor zorgen onze leerlingen niet te belasten met onbegrepen weetjes; alleen goed verwerkte kennis is van waarde. Reeds is er allerlei gedaan om in de onbevredigende toestand verbetering te brengen. Men begint thans de meetkunde veelal met een intuïtieve inleiding, men verschuift de omkering van stellingen naar een later stadium, allerlei vervelende kwesties worden geschrapt, soms spreekt men niet meer over axioma's, enz. De meeste van deze punten zijn inderdaad verbeteringen, maar ik kan mij heel goed voorstellen, dat dit alles op een leraar van de oude stempel de indruk maakt van afbraak. Het is ook waar dat veel van wat de methode van Euclides voor de kenner zo aantrekkelijk maakt, namelijk de logische draad die door het betoog loopt, verloren gaat. Het is daarom zaak uit te zien naar een methode die voor dit verlies iets anders in de plaats stelt....'*

(Red.: zie pag. 300 van dit nummer voor een uitgebreider fragment uit Troelstra's voordracht.) Vervolgens verwijst hij naar Felix Klein en diens ideeën over *Bewegungsgeometrie* of *Abbildungs-geometrie* en het gebruik van transformaties.

In deze voordracht gebruikt Troelstra dus als argumenten voor het introduceren van de transformatie-meetkunde vooral de gewenste moderne manier van wiskundebeoefening en de grotere toegankelijkheid van de leerstof, zonder concessies te doen aan de wiskundige strengheid.

Als je nu met hem spreekt, krijg je de indruk dat zijn aanvankelijke bedoelingen van andere aard waren. Hij wijst erop dat de eerste versie van de alternatieve

aanpak, de gestencilde vorm, veel minder formeel was dan de later door Wolters uitgegeven boekversie. Dat formele is er, zo vertelt hij nu, in gekomen omdat collega's die niet aan het experiment meewerkten de aanvankelijke opzet niet exact genoeg vonden.

Inzoomen op deel 1

In **figuur 3** staan de hoofdstuktitels van het programma 'Transformatiemeetkunde' voor de eerste drie klassen. Laten we om een beeld te krijgen even inzoomen op deel 1. In de hoofdstukken 1, 2 en 3 worden de gereedschappen op een informele manier ontwikkeld. Je leert er wat symmetrie is, hoe je constructies kunt uitvoeren en ook hoe je eenvoudige hoekberekeningen kunt uitvoeren.

Je vindt hier opgaven als:

Wat voor soort hoek vormen de wijzers van de klok als de klok staat op:

8 uur, 6 uur, half 8, 2 uur, half zes?

Bereken hoeveel graden deze hoeken bevatten.

(Zie **figuur 4**)

In de figuur is hoek $A_1 = 28^\circ 38'$.

Hoek $B_2 = 2 \cdot$ hoek A_1

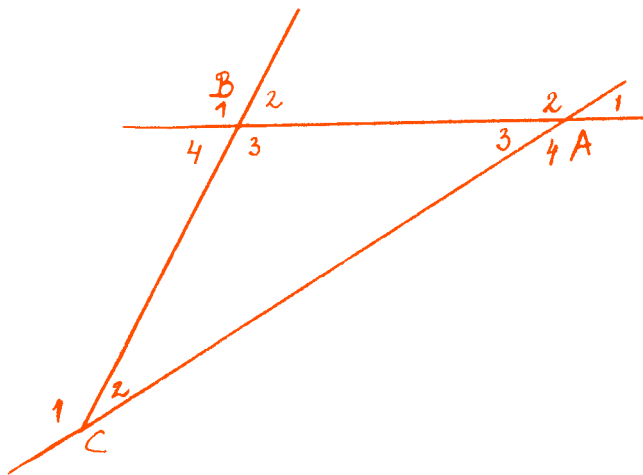
Hoek C_1 = het supplement van hoek A_1 .

Bereken de overige hoeken van de figuur.

Heel precies worden in de hoofdstukken 4 en 5 de eigenschappen van de lijnspiegeling en de spiegel-symmetrische figuren behandeld. We zijn dan ongeveer op de helft van het boek.

Pas in hoofdstuk 6 komen we *evenwijdigheid van lijnen* tegen. In zijn voordracht in Driebergen zegt Troelstra: *'De theorie van de evenwijdige lijnen heeft ons veel tijd gekost; we wilden namelijk graag met wat origineels voor de dag komen. Maar ondanks alle pogingen hebben we niets kunnen vinden dat even goed voldoet als de manier van Fladt^[6], die prachtig in het geheel van onze opzet past en didactisch zo voortreffelijk is: men noemt twee lijnen evenwijdig als ze een gemeenschappelijke loodlijn hebben.'*

Het voert te ver de gehele opzet van de evenwijdigheid zoals die in deel 1 van de Transformatiemeetkunde is te vinden, hier uit de doeken te gaan doen. Het zit



FIGUUR 4

allemaal uiterst vernuftig in elkaar. Het volgende voorbeeld (zie figuur 5) laat zien hoe precies de opbouw was en hoe alle stappen netjes pasten in het bouwwerk van definities en stellingen.

Gegeven: $a \parallel b$; de snijlijn l .

Te bewijzen: hoek P_1 = hoek Q_3 .

Bewijs:

Trek de gemeenschappelijke loodlijnen PE en QF .

Dan is $PFQE$ een rechthoek met de diagonalen PQ en EF .

Deze rechthoek heeft twee symmetrieassen, p en q .

Spiegel in p ; je ziet hoek P_1 = hoek F_1 .

Spiegel in q ; je ziet hoek F_1 = hoek Q_3 .

Conclusie: hoek P_1 = hoek Q_3 .

Zoals gezegd; we zijn hier ongeveer halverwege deel 1.

Pas helemaal aan het eind vinden we de congruentiegevallen van de driehoek. En dan niet, zoals gebruikelijk was, als een soort axioma's, maar netjes verklaard en bewezen in de gekozen opbouw.

De resultaten van meetkundeproject II

In de cursus 1959–1960 werden de eerste klassen van het Christelijk Lyceum in Hilversum op allerlei manieren geobserveerd en gemeten met de instrumenten uit Meetkundeproject I en met andere, reeds bestaande, instrumenten zoals IQ-tests. Ze kregen de meetkunde volgens de klassieke aanpak.

In de cursus 1960–1961 kregen de nieuwe eerste klassen dezelfde behandeling nadat ze de transformatie-meetkunde hadden gekregen.

In het rapport van De Groot (dat enige jaren later in boekvorm verscheen), kunt u de resultaten vinden en uitvoerige bespiegelingen daarover^[7]. Opvallend is dat, ondanks het feit dat voor Troelstra de motivatie van de leerlingen voor de meetkunde een belangrijke drijfveer was, in de nieuwe opzet de scores voor de voorkeur voor meetkunde ten opzichte van de andere schoolvakken niet hoger zijn geworden.

Ook opvallend zijn twee conclusies van De Groot:

1. In de klassieke situatie was er een sterke positieve correlatie tussen de rapportcijfers voor meetkunde en de beide meetkunde-attitudetests. In de experimentele

situatie was die correlatie veel minder positief: bij de bewegingsmeetkunde hoefde je niet meer goed te zijn om het vak leuk te vinden, of andersom: je hoefde niet meer slecht te zijn in meetkunde om het vak vervelend te vinden.

Voor de IQ-scores geldt iets dergelijks: in de klassieke situatie was er een positieve correlatie tussen IQ en meetkundevoorkeur. In de experimentele situatie was die correlatie zelfs negatief. De intellectuele uitdaging voor de goeden was blijkbaar sterk verminderd. Daarom concludeert De Groot: *Het onderwijs in de bewegingsmeetkunde slaagde er beter in zwakke leerlingen mee te nemen en te interesseren, maar minder goed om de goede leerlingen intellectueel te stimuleren.*^[8]

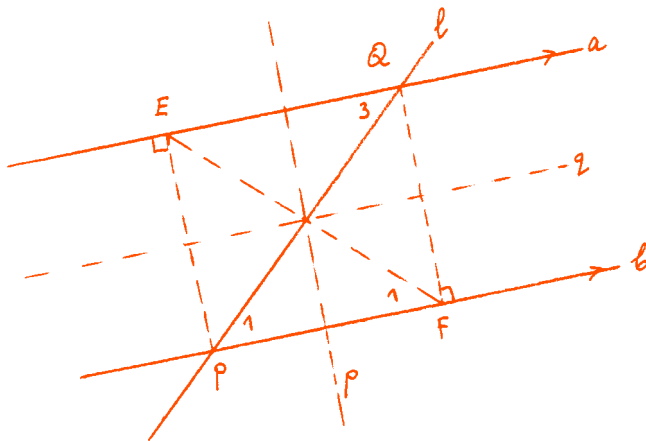
2. Een andere conclusie van De Groot volgt uit de analyse van de scores op onderdelen van de kennistest. Ze luidt: *Het onderwijs in de bewegingsmeetkunde geeft minder specifieke training, maar de leerlingen die dit onderwijs hebben gehad, leveren betere prestaties in ongewone opgaven die met zelf kijken, denken en proberen moeten worden opgelost.*^[9]

Of dit een voordeel of een nadeel is van de bewegingsmeetkunde, laat De Groot in het midden. Hij merkt op dat in goed onderwijs fundamentele training (in algemene heuristische denkvaardigheden) en specifieke training (oefenen in een bepaald onderwerp) beide moeten zijn ingebouwd en vervolgt met: *'...geven de totale bevindingen bij dit onderzoek misschien aanleiding tot een waarschuwing aan meetkunde-vernieuwers in het algemeen en aan de leraren van het Christelijk Lyceum in het bijzonder, namelijk om de betekenis van de specifieke training niet te onderschatten ten gunste van de inzicht-ideologie.*^[10]

Ten slotte: het Christelijk Lyceum in Hilversum heeft tot aan het nieuwe programma van 1968 steeds de transformatiemeetkunde in de onderbouw gehandhaafd.

De rol van Freudenthal en de invloed van de transformatiemeetkunde op het programma van 1968

De experimenten voor het nieuwe onderbouw-programma van 1968 gingen in 1965 van start. De



FIGUUR 5

Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) greep daarbij terug op de bewegingsmeetkunde uit Hilversum, omdat, zo zei de commissie: ‘...men unaniem de behoefte gevoelde aan een onderbouwmeetkunde, die naar doel en methode bepaald wordt door het begrip afbeelding... (en omdat dit transformatimeetkunde-experiment) haar doelstellingen op verheugende wijze benaderde.’ Freudenthal, die zich voor de CMLW met de onderbouw ging bemoeien, schreef voor het nieuwe onderbouwprogramma een doelstellingsnota, waarin onder andere staat:

(a) Een intuïtieve inleiding wordt vereist, waarbij het kind doende moet leren, door tekenen, vouwen, plaveien, modellen maken.

(b) Het kind moet leren een wetenschapsgebied mathematisch te ordenen; d.w.z. niet het geven van een axiomastelsel staat voor, maar een monotoon toenemen der exactheid met het voortschrijden der cursus.

(c) Niet verzamelingsleer of logica zelf moeten onderwezen worden, maar de taal die zij spreken in het wiskundeonderwijs.

(d) Het meetkundeonderwijs in de onderbouw wordt in relatie gebracht met het onderwijs in de bovenbouw, i.c. de lineaire algebra.

Anderzijds wordt de Kleinse lijn gevolgd: meetkunde is een onderzoek van het vlak (de ruimte) naar invarianties onder afbeeldingen van het vlak (de ruimte) op zichzelf.

Je kunt je niet aan de indruk onttrekken dat Freudenthal dit heeft geschreven met de teksten van de Hilversumse bewegingsmeetkunde in gedachten. Troelstra heeft mij voorjaar 2003 verteld dat Freudenthal enthousiast was over de eerste versie van de bewegingsmeetkunde, maar het bijzonder jammer vond dat de transformatimeetkunde die later in boekvorm verscheen, onder invloed van sommige leraren veel meer geformaliseerd was.

Voor het meetkunde-experiment onderbouw van de CMLW werd materiaal gemaakt waarvan Troelstra medeauteur was. Uiteraard lijkt het sterk op het Hilversumse materiaal. Ook de meetkunde in het onderbouwprogramma van 1968 was opgezet met transformaties. Het is niet gewaagd op te merken dat wat aan het eind van de jaren vijftig in Hilversum

begon, model stond voor wat tien jaar later landelijk werd ingevoerd. In die zin was dit experiment als de vleugelslag van de vlinder die uiteindelijk een weersomslag bewerkt. De stap van Euclides naar Felix Klein is in Hilversum gezet, maar de eerste aanzet van die stap is te vinden in de klas van een beginnende wiskundeleraar in Sneek.

Noot

Dit artikel is een bewerking van een voordracht, gehouden tijdens het HKRWO-symposium op 17 mei 2003.

Verwijzingen

[1] Zie bijvoorbeeld: E.W.A. de Moor: Van vormleer naar realistische meetkunde; Utrecht CD β press 1999; ISBN 90-73346-40-1; pag. 255 e.v.

[2] De tests zijn te vinden in: Prof. A.D. de Groot: Bewegingsmeetkunde; Wolters-Noordhoff, 1968, pag. 108 e.v.

[3] Dr H. Turkstra en S.J. Geursen: Kern der vlakke meetkunde.

[4] E.W.A. de Moor: o.c. pag. 234 e.v.

[5] Driebergen 30 augustus 1963; zie Euclides 39, pag. 138–149. Zie ook ‘40 jaar geleden’ in dit nummer, pag. 300–301 (red.).

[6] Fladt, Kraft & Dreetz: Mathematisches Unterrichtswerk; Verlag Moritz Diesterweg, 1955.

[7] De Groot c.s.: Bewegingsmeetkunde (WN 1968), pag. 79.

[8] De Groot c.s.: o.c., pag. 92.

[9] De Groot c.s.: o.c., pag. 94.

[10] De Groot c.s.: o.c., pag. 95.

Over de auteur

Wim Groen (1940) was wiskundeleraar in Amsterdam en Hilversum, daarnaast (tot 2003) ook vakdidacticus wiskunde aan de VU te Amsterdam, aanvankelijk als assistent van Troelstra. Wim Groen was ook (mede)auteur van verschillende wiskundemethoden en van de opgavenbundels van de NVvW. Zijn e-mailadres is wegroen@zonnet.nl.

TRANSFORMATIEMEETKUNDE IN DE LAGERE KLASSEN VAN HET V.H.M.O.

door

R. TROELSTRA

Hilversum

Eeuwenlang is aan de schoolmeetkunde de naam van Euclides onlosmakelijk verbonden geweest. Zo sterk is deze band, dat men in Engels sprekende landen het vak meetkunde dikwijls kortweg aanduidt met „Euclid”. Dit is ook te begrijpen: de *Elementen van Euclides* vormen immers een van de grootste prestaties van de menselijke geest in de klassieke oudheid. De schoolboekjes voor meetkunde, die wij in onze jeugd gebruikten waren dan ook in het algemeen bewerkingen van deze *Elementen*. Bewerkingen, immers ieder die zich met de *Elementen van Euclides* heeft beziggehouden weet, dat ze in hun oorspronkelijke vorm te moeilijk zijn voor kinderen van twaalf jaar. Maar toch was de gang van zaken in de genoemde schoolboeken, die ik als traditioneel zal aanduiden, die van Euclides. Vele generaties hebben op deze wijze meetkunde geleerd en lang heeft men dit als volkomen bevredigend aanvaard. Toch was reeds tegen het einde van de vorige eeuw een zeker onbehagen merkbaar, een onbehagen dat sindsdien steeds sterker is geworden. Zonder dit verschijnsel te willen analyseren, wil ik toch op twee aspecten wijzen:

Ten eerste. De tegenwoordige wiskundige methodes zijn geheel anders dan die van de Grieken. Om in de schoolwiskunde te blijven: vergelijk de eenheid van methode in de analytische meetkunde met de veelheid van maniertjes, hulplijntjes en kunstgrepen bij Euclides. Men vraagt zich daarom af, of het leren van meetkunde op traditionele wijze wel van belang is voor de verdere wiskundige ontwikkeling van de leerling.

Ten tweede. Men krijgt wel eens de indruk, dat leerlingen van de lagere klassen met de traditionele meetkunde steeds meer moeite krijgen. Mocht die indruk juist zijn, dan zal het feit dat de bevolking van de middelbare school zo sterk is toegenomen hieraan wel niet vreemd zijn. Het is trouwens wel zeer de vraag in hoeverre het gros van de leerlingen vroeger de meetkunde heeft begrepen. Het is denkbaar, dat men vroeger eerder dan thans genoegzaam met een kennen van de algoritmen zonder werkelijk inzicht. Bij het steeds ingewikkelder worden van de maatschappij moeten wij er echter voor zorgen, onze leerlingen niet te belasten met onbegrepen weetjes; alleen goed verwerkte kennis is van waarde.

Reeds is er allerlei gedaan om in de onbevredigende toestand verbetering te brengen. Men begint thans de meetkunde veelal met een intuïtieve inleiding, men verschuift de omkering van stellingen naar een later stadium, allerlei vervelende kwesties worden geschrapt, soms spreekt men niet meer over axioma's, enz. De meeste van deze punten zijn inderdaad verbeteringen, maar ik kan mij heel goed voorstellen, dat dit alles op een leraar van de oude stempel de indruk maakt van afbraak. Het is ook waar, dat veel van wat de methode van Euclides voor de kenner zo aantrekkelijk maakt, namelijk de logische draad die door het betoog loopt, verloren gaat.

Het is daarom zaak uit te zien naar een methode die voor dit verlies iets anders in de plaats stelt. Zo'n methode is er. In allerlei landen is men reeds bezig het meetkunde-onderwijs op nieuwe leest te schoeien door gebruik te maken van transformaties. Dit is een gedachte die voor het eerst geheel is uitgewerkt door Felix Klein (1849—1926), maar die pas langzamerhand in de schoolmeetkunde gaat doordringen. Onder andere in Duitsland is men thans doende onder namen als „Bewegungsgeometrie” en „Abbildungsgeometrie” deze nieuwe methode op school in te voeren.

In 1958 zijn we met een groepje van vier leraren aan het Chr. Lyceum te Hilversum begonnen, van deze ontwikkeling een studie te maken. De aandrang hiertoe ging uit van het „*Meetkunde-Project II*” van Prof. Dr. A. D. de Groot van de Universiteit van Amsterdam. Ik zal op dit project hier nu niet ingaan, er zal trouwens binnen afzienbare tijd een uitvoerig verslag van verschijnen. In het kort begon onze studie met een kennisnemen van de literatuur, het bijwonen van enige lessen aan Duitse scholen en het confronteren van de opgedane ervaringen met ideeën die wij onszelf reeds in vroegere jaren hadden gevormd. Hoewel wij van onze Duitse ervaringen zeer veel hebben geleerd, konden we toch maar weinig direct gebruiken. Vooral de Duitse schoolboeken zijn heel anders van opzet dan wij zijn gewend en ook dan wij zouden wensen.

Wat ons voor ogen stond was een behandeling van de in ons land gebruikelijke leerstof vlakke meetkunde geheel gegrond op transformaties, die we toen nog als bewegingen opvatten.

Gedeelte van een voordracht door R. Troelstra, waarvan de tekst werd opgenomen in Euclides, jaargang 39 (1963-1964).

WISKUNDE, ZES MAANDEN OP ZICHT

Bespreking van een wiskundetentoonstelling

[Jan van Maanen]

Inleiding

Onder de noemer 'Goochelen met getallen' heeft het Leidse Museum Boerhaave tot en met 26 september in twee zalen een tentoonstelling gewijd aan de wiskunde. Raakt het museum de kern? Wat heeft het te bieden? En aan wie?

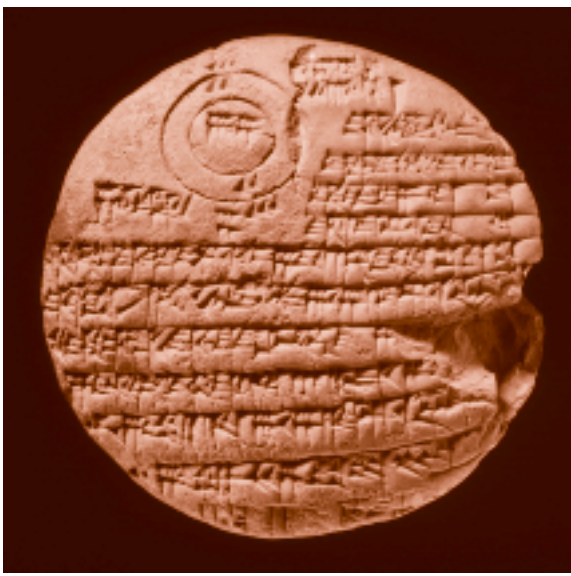
Een rondwandeling

Museum Boerhaave is gehuisvest in het voormalige St. Caeciliaklooster, dat in 1414 gesticht werd. Van 1598 tot 1600 werd het verbouwd tot stedelijk pest- en dolhuis. De naamgever van het museum gaf er rond 1720 zijn medische lessen. Na een grondige restauratie in combinatie met nieuwbouw kreeg het in 1991 zijn huidige functie. Onze wandeling speelt zich namelijk niet af in een anoniem zalencentrum, we lopen door een gebouw met karakter. Het is getekend door de tand des tijds maar heeft het geknaag glansrijk doorstaan. Oude steentjes en houten balken versterken het effect van de voorwerpen die het herbergt, waarvan het gereconstrueerde Leidse anatomische theater direct opvalt. Je loopt er langs op weg naar de tentoonstellingszalen. Diverse geraamten van mens en dier bevolken de etages. Ze informeren de toeschouwer over de anatomie van de gewervelden en tegelijkertijd wijzen ze op de vergankelijkheid van het leven.

Zinspeling is ook de kracht van de eerste blikvanger van de door Bart Grob samengestelde tentoonstelling. Dit is een verbeelding van de wiskunde gemaakt in 1783 ter gelegenheid van het eerste lustrum van het oorspronkelijk Amsterdams, later Nederlands en sinds kort Koninklijk Wiskundig Genootschap. Het is een maquette die qua formaat goed op een modelspoorbaan zou passen, en die laat zien hoe het WG in 1783 de wiskunde zag. De wiskundige meet en bouwt, niet alleen mooie gevels maar ook zuilen en piramiden. Globes op de voorgrond en een schip op de achtergrond symboliseren de band met astronomie en navigatie. En de wiskundige doet duidelijk geen 'nattevingerwerk', want centraal in het tafereel staat een stapeltje boeken.

De twee langgerekte zalen zijn volgens een zelfde principe ingericht. De historische objecten zijn in vier thema's gerangschikt (cijfers en getallen, maten en meten, praktisch rekenen, mechanisch rekenen) die elk een van de lange wanden in beslag nemen. In de lengteas van de zaal staan op vrolijke rode tafels negentien doe-dingen (spellen, experimenten, demonstratiemodellen) die aansluiten bij het thema waarvan de geschiedenis langs de wand te zien is. Zo wordt een vitrine met de oudste wiskundige documenten die we kennen (een Babylonische kleitablet over de omtrek van een stad, een tekst op een Egyptische papyrus, en inscripties in steen in Romeinse cijfers) ondersteund door een spel over rekenen met Romeinse cijfers. Elke rode tafel biedt een korte schriftelijke instructie (1. Hoe werkt het? 2. Historische achtergrond. 3. Wat kun je er mee?). En ook al stelt het museum nadrukkelijk: 'Er wordt geen wiskunde gegeven, c.q. uitgelegd in de tentoonstelling', het effect van de rode tafels is wel dat de bezoeker langer stilstaat bij de objecten. Soms is dat heel effectief, bijvoorbeeld bij het demonstratiemodel van de staffelwals, het – letterlijk – cruciale onderdeel bij vroege mechanische rekenmachines. Je kijkt daarna met andere ogen naar de knoppen en zwengels op alle apparaten uit de negentiende en twintigste eeuw. Pronkstuk in dit thema 'mechanisch rekenen' is een onderdeel van de Differential Engine van Charles Babbage, afkomstig uit het Science Museum in Oxford.

De kopse kanten van de zalen maken het ruimtelijke beeld van de tentoonstelling compleet. Daar bevinden zich blikvangers: het monumentale doek 'De mathematicus' van Jan Lievens, tijdgenoot en vriend van Rembrandt, een grote opmeting door Jan Pietersz Dou van de Binnenwegse polder (1635), een anoniem portret van Leidse rederijker en loterij-nar Pieter Cornelisz van der Mersch (ca. 1625), en een opstelling voor hydrodynamische proeven, hoewel dat laatste er wat droogjes bij stond en een model met water vast meer blikken had gevangen.



FIGUUR 1 Kleitablet, Irak, 2500-1800 v. Chr.
(foto: Rijksmuseum van Oudheden, Leiden)



FIGUUR 2 Hollandse cirkel, Hendrik Sneewins,
Leiden, ca. 1650

Bij de keuze van de objecten is het steeds de bedoeling geweest om de binding met de praktijk in beeld te brengen. Een mooi en niet erg bekend portret van de jonge Gauss is gekoppeld aan het normaal verdeeld zijn van allerlei biologische stochasten. Bepaal dus ook aan de rode tafel uw longinhoud (mondstukje kan na blazen vervangen worden) en verbaas u over de volgende vitrine, die over extreme menselijke afmetingen gaat. In 1749 overleed in Haarlem de Finse reus Daniel Cajanus, die omgerekend meer dan 2 meter 60 lang moet zijn geweest. Haarlem had toen nog geen basketbalweek. In de andere zaal manifesteert de wiskunde zich in natuurkundige proeven, onder meer in achttiende-eeuwse demonstratiemodellen in de vitrines, maar ook op de rode tafels in experimenten die je zelf kunt doen (de omhoog rollende dubbele kegel van 's Gravesande en een demonstratie dat de cycloïde een snellere glijbaan tussen twee punten is dan de rechte lijn die die punten verbindt). Tijdens de opening van de tentoonstelling waren er verbaasde blikken bij diegenen die hiermee voor het eerst geconfronteerd werden, en een glimlach van herkenning bij de anderen. Ook landmeten en navigatie hebben hun plaats, met mooie apparatuur en kaarten, en met een demonstratie van het hoekmeetinstrument van Dou, de 'Hollandse cirkel'.

Ondersteunende materialen

Boerhaave pakt stevig uit met ondersteunende materialen. Ten eerste is er een door Anton Wiechmann geschreven boekje. Omdat het naast een doorlopend verhaal over de ontwikkeling van de wiskunde ook een overzicht bevat van de getoonde voorwerpen, is het tegelijk de catalogus van de tentoonstelling. Het heet niet voor niets *Goochelen met getallen - Een geschiedenis*. Verder zijn er *Suggesties voor klasbezoek t.b.v. docenten basisvorming*. Dit document, waarin een werkblad is opgenomen, staat op de website (http://www.museumboerhaave.nl/frame_nl.html). De website zelf geeft een goede inleiding op het

museum en op de praktische kanten van een bezoek. Ook is er mooi beeldmateriaal over de tentoonstelling te vinden. Tenslotte is er een bouw pakketje van de 'brug van Leonardo da Vinci', een constructie van 18 losse latjes, die zonder touw of lijm bijna 90 cm overspant (2 euro). Er zit als 'bijsluiter' een bouw instructie bij, die ook op de website te vinden is.

De catalogus geeft aan de hand van verschillende voorwerpen uit de tentoonstelling een chronologische dwarsdoorsnede van de elementaire en praktische wiskunde, beginnend in de oudheid en eindigend bij de automatisering in de twintigste eeuw, met veel aandacht voor de situatie in de Nederlanden. Een aantal wiskundige onderwerpen is in aparte kaders uitgelicht, zoals bijvoorbeeld 'De stelling van Pythagoras', 'Een geschiedenis van pi' en 'Logaritmen, rekenlinialen en rekenschijven', onderwerpen die ook in de tentoonstelling aan bod komen. Vooral aan de cultuurhistorische achtergronden besteedt de catalogus veel aandacht. Zo is het verrassend om te lezen over de verbinding van de vitrines over 'Gokken en loterijen' met de tentoonstellingsruimte zelf. In 1596 organiseerde Jan van Hout in Leiden een grootse loterij om het leegstaande Caeciliaklooster tot gasthuis te kunnen verbouwen. In twee van de toen ingerichte ziekenzalen is nu de tentoonstelling te zien.

De *Suggesties voor klasbezoek* bevatten tips voor de docent ter voorbereiding van een bezoek (4 pagina's) en tevens een werkblad (6 pagina's) aan de hand waarvan leerlingen de historische voorwerpen kunnen bekijken. Het werkblad heeft als doel om 'leerlingen van de basisvorming – 12 t/m 14 jarigen – spelenderwijs in contact te brengen met enkele historische toepassingen van de wiskunde', terwijl even verderop staat dat het niveau van de teksten en voorwerppresentatie in de tentoonstelling 4-havo/vwo is. Wie een bezoek met een klas overweegt doet er goed aan, zich deze beperking van het werkblad te realiseren.



FIGUUR 3 Allegorie van de meetkunde (uit: Gregor Reisch en Oronce Fine, *Margarita philosophica*, editie Basel, 1535)

Balans

Er is zeer veel moois te zien en er zijn interessante dingen te doen. Maar er zijn ook zaken die om méér vragen, of die zelfs onjuist zijn. Laat ik een paar voorbeelden noemen. Op een rode tafel zijn vier slingerproefjes met balletjes aan een touwtje die een cirkelbaan doorlopen. Twee van de vier slingers hebben verschillende lengte maar je geeft ze dezelfde uitwijking. Duidelijk is te zien dat de kortste slinger het snelst heen en weer gaat. Het andere paar slingers heeft dezelfde lengte maar je geeft ze verschillende uitwijkingen. De begeleidende tekst zegt dat de slingertijd alleen van de slingerlengte afhangt en niet van de uitwijking. Doe je de proef, dan verwacht je dat de slingers even snel gaan. Maar dat lijkt niet zo te zijn. Vreemd is dat niet, want Huygens bewees in 1659 dat de bewering onjuist is. Alleen als het balletje een cycloïde beschrijft, is de slingertijd onafhankelijk van de uitwijking. Voor een leerling uit 4-havo is dat te moeilijk, maar hij of zij ziet gewoon dat de bewering onjuist is. Dat vraagt dus naar meer, en dat meer ontbreekt. Dat is jammer, want er is op dit moment in het voortgezet onderwijs een doelgroep aan wie iets meer wiskundige diepgang zeer besteed zou zijn, namelijk de groep die in de bovenbouw van havo en vwo voor praktische opdrachten en profielwerkstukken zelf op onderzoek uitgaat. De tentoonstelling heeft ze ook nu veel te bieden, maar met meer aanknopingspunten was het effect aanzienlijk groter geweest. Was er maar wat meer inbreng vanuit de wiskunde geweest, dat gevoel kwam sterk naar voren. De catalogus is heel mooi, rijk geïllustreerd en informatief, maar ook daar mis je de wiskundige inbreng. Want $\sqrt{2}$ is geen irrationeel (maar een irrationaal) getal, het oorspronkelijke grafmonument voor Van Ceulen is weliswaar al heel lang zoek, maar een reconstructie is op 5 juli 2000 door onze kroonprins in de Leidse Pieterskerk onthuld en aldaar te aanschouwen, en het is echt heel onpraktisch om het symbool x binnen vijftien regels zowel voor een variabele als voor het maalteken te gebruiken.



FIGUUR 4 Simon Stevin (1548-1620)

De weegschaal slaat naar de positieve kant door. Want waar zie je nu een wiskundig kleitablet en papyrus naast elkaar, met vlak daarna beroemde boeken als *Vanden Circkel* (met Van Ceulens benadering van π op de titelpagina), de *Thiende* van Simon Stevin en het rekenboek van Willem Bartjens, het prachtige doek van Lievens, de tekendoos (of -kist) van Van Swinden. En zoveel rode tafels!

Praktische gegevens

Museum Boerhaave, Lange St. Agnietenstraat 19, 2312 WC Leiden, tel. 071-5214224.

Website: www.museumboerhaave.nl/frame_nl.html (kies [actueel] voor de *Suggesties* en voor de *Bijsluiter*).

De tentoonstelling duurt tot en met 26 september. Open: dinsdag t/m zaterdag 10.00-17.00, zon- en feestdagen 12.00-17.00.

Toegang: volwassenen 5,00 euro; t/m 18 jaar, CJP, 65+ en groepen vanaf 10 personen 2,50 euro p.p. Groepsbezoek is in verband met de spellen gelimiteerd tot 36 leerlingen tegelijk. Afspraken via Francisca Parmentier (071-5214224, doorkiesnummer 602). Binnen het museum kan tegelijkertijd een andere groep de vaste collectie bekijken, eventueel met een rondleiding (45 minuten). Tevens is er een video van 20 minuten over de geschiedenis van de natuurwetenschappen.

Catalogus: *Goochelen met getallen. Een geschiedenis*. Leiden: Museum Boerhaave, 2004. Mededeling 304, 48 pag.; ISBN 90 6292 147 7; prijs 7 euro.

Over de auteur

Jan van Maanen (e-mailadres: maanen@math.rug.nl) is als wiskunde-didacticus verbonden aan de Rijksuniversiteit Groningen. Zijn onderzoeksinteresse ligt vooral bij de geschiedenis van de wiskunde en de integratie daarvan in het wiskundeonderwijs.



Zeno van Elea (490-425)

Zeno's onderhandelings- resultaat

[Rob Bosch]

Mijn huis staat te koop voor 310.000 euro. De makelaar kwam een paar weken geleden langs met de mededeling dat er een bod was uitgebracht van 270.000 euro. Hoewel ik wel bereid was iets te zakken, vond ik 40.000 euro een te groot verschil. Het verschil delen leek mij een goede optie. Mijn tegenbod werd dus 290.000 euro. De tegenpartij stelde daarna voor het overgebleven verschil te delen en bood nu 280.000 euro waarop ik 285.000 euro voorstelde. De onderhandelingen gingen zo nog een tijdje door. Voor hoeveel werd het huis uiteindelijk verkocht?

Laat $z(n)$ de prijs zijn van het n -de bod in deze Zeno-onderhandeling^[1]. De vraagprijs is $z(0)=310.000$ en het eerste bod $z(1) = 270.000$.

Het n -de bod $z(n)$ is nu het gemiddelde van de twee daaraan voorafgaande biedingen $z(n-1)$ en $z(n-2)$, zodat we de volgende recursie krijgen:

$$z(n) = \frac{z(n-1) + z(n-2)}{2}, \quad n \geq 2$$

Deze tweede orde homogene recursie kan uiteraard met de algemene theorie van karakteristieke vergelijkingen worden opgelost. Maar ook zonder kennis van deze theorie kunnen we een oplossing vinden. De observatie dat het verschil in iedere ronde gehalveerd wordt, levert een elementaire oplossing.

Als $v(n)$ het verschil is tussen het n -de en het $(n-1)$ -ste bod, dan vinden we:

$$\begin{aligned} v(n+1) &= z(n+1) - z(n) = \\ &= (-\tfrac{1}{2})(z(n) - z(n-1)) = (-\tfrac{1}{2})v(n), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

De rij $v(n)$ is dus de meetkundige rij:

$$v(1), (-\tfrac{1}{2})v(1), (-\tfrac{1}{2})^2v(1), (-\tfrac{1}{2})^3v(1), \dots$$

Voor $v(n)$ geldt

$$v(n) = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}v(1), \quad n \geq 1$$

waaruit volgt dat

$$z(n) - z(n-1) = v(n) = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}v(1), \quad n \geq 1$$

en dus

$$\begin{aligned} z(n) &= z(n-1) + (-\tfrac{1}{2})^{n-1}v(1) \\ &= z(n-2) + (-\tfrac{1}{2})^{n-2}v(1) + (-\tfrac{1}{2})^{n-1}v(1) \end{aligned}$$

Verder uitschrijven levert

$$\begin{aligned} z(n) &= z(0) + (-\tfrac{1}{2})^{n-1}v(1) + (-\tfrac{1}{2})^{n-2}v(1) + \dots + (-\tfrac{1}{2})^0v(1) \\ &= z(0) + v(1)((-\tfrac{1}{2})^{n-1} + (-\tfrac{1}{2})^{n-2} + \dots + 1) \end{aligned}$$

De sommatie van de meetkundige rij geeft

$$\begin{aligned} z(n) &= z(0) + v(1) \left(\frac{1 - (-\tfrac{1}{2})^n}{1 - (-\tfrac{1}{2})} \right) \\ &= z(0) + \tfrac{2}{3}v(1)(1 - (-\tfrac{1}{2})^n) \end{aligned}$$

Vervangen we $v(1)$ door $z(1) - z(0)$, dan volgt

$$z(n) = \frac{2z(1) + z(0)}{3} - \frac{2}{3}(z(1) - z(0)) \left(\frac{-1}{2} \right)^n \quad (*)$$

Voor $z(4)$, mijn tweede tegenbod, vinden we met (*):

$$\frac{855\,000}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{40\,000}{16} = 285\,000$$

$$\text{Uit (*) volgt dat: } \lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = \frac{2z(1) + z(0)}{3}$$

zodat de uiteindelijke verkoopprijs, afgerond op euro's, 283.333 euro wordt.

Variaties op de bovenstaande onderhandelings-procedure vinden we door bijvoorbeeld aan te nemen dat de verkoper slechts bereid is een kwart van het verschil in te leveren terwijl de koper vasthoudt aan het delen van het verschil. De lezer kan zelf nagaan tot welk resultaat deze procedure op den duur leidt.

Overigens, de onderhandelingen duurden me toch wat te lang, zodat ik besloten heb mijn huis maar uit de verkoop te halen.

Noot

[1] *Paradox van Zeno: Achilles en de Schildpad*

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.

NA GRIEPMETING NOG MEER ONDERZOEK VIA INTERNET

Kennislink, een waardevolle website voor scholieren

[Carl Koppeschaar]

Inleiding

Afgelopen winter vond de 'Grote Griepmeting' plaats: een uniek project waarbij scholieren en algemeen publiek via internet konden doorgeven of ze gezond waren of verschijnselen van griep of verkoudheid hadden. De griepmeting was zo succesvol dat de initiatiefnemers nu nog meer publieksmetingen via internet organiseren.

Kennislink

Kennislink (www.kennislink.nl) is een project van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen om de belangstelling voor wetenschap en techniek te bevorderen. De website richt zich met name op middelbare scholieren, omdat die voor praktische opdrachten en profielwerkstukken zelfstandig moeten zoeken naar informatie. Kennislink is een unieke database met zeer betrouwbare informatie. Bovendien volgt de website de actualiteit en probeert ze via vakoverstijgende themadossiers en speciale projecten de nieuwsgierigheid te prikkelen. Nieuwsgierigheid is de bron én het resultaat van alle kennis. Vandaar ook het motto: 'Kennislink maakt nieuwsgierig!'

Internet is als medium interactief: er is communicatie en uitwisseling van gegevens tussen partijen mogelijk. Vorig jaar startte Kennislink met live webcasts van bijzondere hemelverschijnselen. De overgang van Mercurius voor de zon op 7 mei, de totale maansverduistering van 16 mei en de gedeeltelijke zonsverduistering van 31 mei trokken bijna een half miljoen bezoekers. Velen waren zo enthousiast dat ze ook hun eigen waarnemingen en digitale foto's instuurden. Hieruit ontstond het idee voor het uitvoeren van een nog veel verder gaande publieksmeting. Daarbij zou elke deelnemer zelf meten en zich daarbij 'wetenschappelijk onderzoeker' kunnen wanen.

Wiskunde achter de griep

Uit het idee voor een publieksmeting kwam de Grote Griepmeting naar voren. Iedereen weet namelijk zelf wel of hij gezond of ziek is. Het eigenaardige is dat de Grote Griepmeting niet eens op medisch-biologische gronden was gebaseerd. Het was de wiskunde die in de meting de grootste uitdaging zag. Mark Peletier en Bob Planqué van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) hielden zich al bezig met een publieksmeting (Eurodiffusie), Sander van Noort en Jacco Wallinga van het Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu (RIVM)

met het verbeteren van modellen voor de verspreiding van het griepvirus. Zij waren zeer geïnteresseerd in de gegevens die het project zou opleveren. De eerste drie werden de zeer actieve webmasters van de nieuwe website (www.grotegriepmeting.nl). Kennislink nam de redactie, PR, communicatie en organisatie op zich; andere partijen ontfermden zich over nieuwsbrieven, lesmodules en onderwijsmiddelen. De farmaceutische industrie werd later bereid gevonden het project te financieren.

Om een zo groot mogelijk deel van de bevolking te bereiken, werd ingezet op alle niveaus. Voor de eerste groepen van de basisschool werden tekenwedstrijden georganiseerd. De hoogste groepen werd gevraagd klassikaal hun metingen door te geven. Vmbo-scholieren maakten voorlichtingsmateriaal en video's voor risicogroepen. De onderbouw van havo/vwo ontwierp pictogrammen. De natuurprofielen in de bovenbouw hielden zich bezig met statistiek en het bedenken van een wiskundig model voor epidemieën. De cultuurprofielen schreven aanbevelingen aan de ministers van OCW of EZ om te komen tot meer onderzoek of om hen te wijzen op de sociaal-economische gevolgen van griep. Ruim 300 schoolklassen deden aan de wedstrijden en/of metingen mee.

Nieuwe publieksmetingen

Gebaseerd op het succes van de Grote Griepmeting organiseren Kennislink en Stichting Het Nationale Experiment nog meer publieksmetingen via internet. Medio april vond een jongerenhoortest plaats. Het Leids Universitair Medisch Centrum (LUMC), de Nationale Hoortstichting en Kennislink werkten toen nauw samen in www.oorcheck.nl, waarbij beginnende gehoorschade bij jongeren als gevolg van frequent discotheekbezoek werd gemeten. Via de luidsprekers van de pc moesten daarbij bepaalde woorden worden herkend temidden van een steeds groter wordende ruis.

8 juni: Venus voor de zon!

Op 8 juni gaan scholieren in Nederland en Zuid-Afrika aan de hand van een Venusovertgang de afstand meten van de aarde tot de zon. Dat Venus als een grote zwarte stip voor de zon langs trekt, is een uniek natuurverschijnsel. De laatste keer dat dit plaatsvond was in 1882. Niemand die nu leeft heeft dit natuurverschijnsel gezien. In 1677 realiseerde de Engelse

sterrenkundige Edmond Halley zich dat met een Venus-overgang de afstand van de aarde tot de zon kan worden bepaald. Nodig daarvoor zijn waarnemingen vanaf twee ver uit elkaar liggende plaatsen op het aardoppervlak. Net als bij een geodetische meting wordt triangulatie gebruikt. Door het verschil in gezichtshoek ('parallax') trekt Venus vanaf het noordelijk halfrond gezien langs een andere koorde over de zonneschijf dan gezien vanaf het zuidelijk halfrond. Uit deze parallactische verschuiving kan tenslotte de

'zonsparallax' worden uitgerekend: de maat voor de afstand van de aarde tot de zon.

In de tijd van Halley was het waarnemen van een Venusovergang de enige manier om de ons omringende ruimte op te meten. De afstand van de aarde tot de zon heet niet voor niets de Astronomische Eenheid. Hij dient ook voor het bepalen van de overige afstanden in ons zonnestelsel en is de basis voor het meten van de parallax van nabije sterren. De eerstvolgende keren dat overgangen van Venus plaatsvonden, in 1761 en 1769, vonden dan ook grote expedities plaats. Zo reisde de Britse kapitein James Cook in opdracht van de Royal Society af naar de Stille Zuidzee om van daaruit metingen te verrichten. Zijn waarnemingen konden worden gecombineerd met die van sterrenkundige expedities naar Siberië, de Filipijnen, Mexico en Madagaskar.

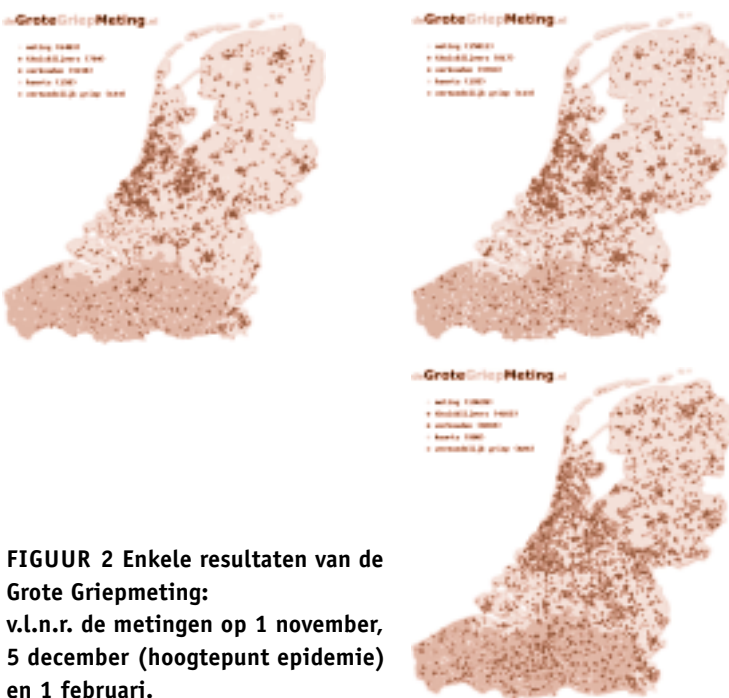
Virtuele expeditie

Anno 2004 is de afstand van de aarde tot de zon tot op de meter nauwkeurig bekend. Tegenwoordig gebeurt dat aan de hand van radarmetingen van de planeet Mars en van langs de aarde scherpende planetoïden. De astronomie heeft dus geen nieuwe expedities voor deze Venusovergang nodig. Maar met behulp van internet kunnen scholieren over de hele wereld deelnemen aan een 'virtuele expeditie' en hun waarnemingen combineren. Kennislink opent daarom in samenwerking met de Nederlandse Onderzoekschool voor Astronomie (NOVA), het European Southern Observatory (ESO) en vele andere deelnemende partijen de website www.venusvoordezoon.nl. Als het weer meewerkt kan daarop 'on line' een berekening van de afstand van de aarde tot de zon plaatsvinden. Op de website worden ook live webcasts getoond vanuit diverse sterrenwachten over de wereld. Zelfs als het bewolkt mocht zijn, zijn er dus altijd beelden van de Venusovergang te zien! En natuurlijk geeft de website inzicht in de theorie en de achtergrond van de berekeningen. Op die manier krijgen de bezoekers ook weer wat van de wiskunde mee!

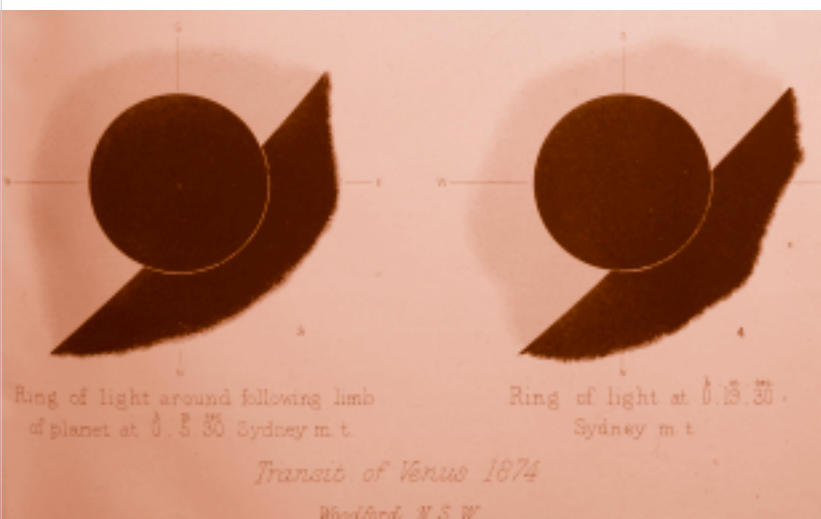
Over de auteur

Carl Koppeschaar (e-mailadres: carl.koppeschaar@kennislink.nl) is hoofdredacteur van Kennislink en een van de oprichters van Stichting Het Nationale Experiment. Koppeschaar bekwam zich in de wetenschapsjournalistiek en educatie tijdens zijn studie sterrenkunde en natuurkunde met wiskunde. Hij is auteur van studieboeken op het gebied van telecommunicatie, schreef talloze populair-wetenschappelijke artikelen voor dagbladen en populair-wetenschappelijke maandbladen en publiceerde een imaginaire reisgids naar de maan (*Moon Handbook: A 21st-Century Travel Guide*, Nederlandstalig 'De Maan' als 100ste uitgave in de Dominicusreeks). Via zijn Nederlands/Engelstalige website Astronet (www.astronet.nl) populariseert hij ook in internationaal verband de sterrenkunde en natuurwetenschappen. Als erkenning voor zijn bijdragen werd in 2000 door de Internationale Astronomische Unie een 6 km grote planetoïde in ons zonnestelsel naar hem genoemd. Die cirkelt tussen de banen van Mars en Jupiter en draagt de naam (7973) Koppeschaar.

FIGUUR 1 Kennislink heeft een vakpagina wiskunde



FIGUUR 2 Enkele resultaten van de Grote Griepmeting: v.l.n.r. de metingen op 1 november, 5 december (hoogtepunt epidemie) en 1 februari.



FIGUUR 3 Als Venus de zon verlaat, is een dunne ring licht rond het silhouet van de planeet te zien. Dit wordt veroorzaakt door zonlicht dat door de dikke atmosfeer van Venus wordt afgebogen.

AUTHENTIEKE CONTEXTEN IN HET VMBO

Verslag van een onderzoek

[Monica Wijers, Vincent Jonker, Sieb Kemme]

Inleiding

In opdracht van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) is in 2002/2003 onderzocht of de wiskundemethoden voor het vmbo geschikt zijn voor authentiek leren.

In dit artikel bespreken we kort de opzet van het deel van het onderzoek dat betrekking had op de methoden-analyse en enkele conclusies en aanbevelingen daaruit. Voor een uitvoerige bespreking van het hele onderzoek en de resultaten verwijzen we naar het onderzoeksverslag 'Authentieke contexten in wiskundemethoden in het VMBO'^[5].

Authentiek leren in het vmbo

Leerlingen in de beroepsgerichte leerwegen in het vmbo hebben vaak problemen met de algemeen vormende (avo) vakken. De leerlingen leven op school als het ware in twee werelden: aan de ene kant zijn er de beroepsgerichte vakken die veelal in het praktijk-lokaal worden gegeven. Leerlingen zijn daar praktisch bezig. Aan de andere kant zijn er de avo-vakken als typische 'schoolvakken'. Daar zitten de leerlingen in een klaslokaal en wordt met name gewerkt aan schoolse taken.

De verbinding tussen de beroepsgerichte en de avo-vakken is in diverse opzichten zwak: verschillende docenten, verschillende locaties, niet samenhangende vakinhouden en verschillende didactiek.

Er is een beweging in het vmbo naar meer authentiek onderwijs, vooral in de praktijkvakken. Dit houdt in dat leerlingen werken aan authentieke leertaken die gericht zijn op hun leefwereld en die ook relevant zijn voor

buitenschoolse situaties, in het bijzonder die van het toekomstig beroep. De taken zijn complex en open, en hebben vaak kenmerken van projecten: ze bevatten een echt op te lossen probleem waarbij leerlingen bijvoorbeeld informatie verzamelen, onderzoek uitvoeren, een product maken, een eigen aanpak kiezen en deze verantwoorden.

Voor diverse sectoren en afdelingen wordt bij de beroepsgerichte vakken gewerkt met wat we hier in het algemeen *bedrijfssimulaties* zullen noemen. Daarbij wordt in de praktijkruimten een bedrijfssituatie nagebootst: denk aan een restaurant bij de afdeling Consumptief. Leerlingen hebben hierin rollen en taken met de bijbehorende verantwoordelijkheden. Op deze manier wordt authentiek leren gerealiseerd. Dit gebeurt echter meestal alleen bij de praktijkvakken, zonder dat er relatie wordt gelegd met de avo-vakken.

Het vak wiskunde is een van de avo-vakken. Het is een vak dat veel mogelijkheden lijkt te bieden om authentiek te worden ingevuld - zeker als wiskunde wordt gezien als vak dat je moet 'doen' en als er, bijvoorbeeld via contextgebruik, verbinding met de werkelijkheid van de leerlingen wordt gelegd. Door een authentieke invulling van de wiskunde krijgt het vak voor leerlingen duidelijk betekenis, raken zij meer gemotiveerd, ontwikkelen zij meer begrip en worden ze beter voorbereid op het kunnen toepassen van het geleerde. Voor de leerlingen in de beroepsgerichte leerwegen van het vmbo zal authentiek wiskunde-onderwijs dan ook zeker moeten inhouden dat er voldoende sectorale inkleuring is; dit levert een verbinding tussen de praktijkvakken en de wiskunde.

Onderzoeksvraag

De vraag kan gesteld worden of het huidige wiskunde-onderwijs op het vmbo wel aansluit bij de nieuwste ontwikkelingen in het vmbo en de recente inzichten in het belang van authentiek onderwijs. Krijgen de leerlingen daar de wiskunde die ze echt nodig hebben en derhalve verdienen? Sluiten de gebruikte wiskundemethoden aan bij de beleavingswereld van de leerlingen? Wordt er uitgegaan van betekenisvolle leertaken? In hoeverre bieden bestaande methoden deze leerlingen de gelegenheid tot actieve participatie? Kort samengevat luidt de vraag: zijn de bestaande wiskundemethoden die gebruikt worden in de basis-beroepsgerichte en kaderberoepsgerichte leerwegen van het vmbo, bruikbaar in verband met authentiek leren en wat is daarvoor eventueel nog extra nodig?

In opdracht van de NVvW is deze vraag door het Freudenthal Instituut in een 'Kortlopend Onderwijs-onderzoek' onderzocht.

Aanpak

Om deze vraag te beantwoorden is allereerst een onderzoeksinstrument ontwikkeld waarmee de wiskundemethoden beoordeeld konden worden op de mate waarin ze bijdragen of kunnen bijdragen aan het realiseren van authentiek wiskundeonderwijs. Daartoe zijn vanuit de onderzoeksvraag door de groep onderzoekers vijf kenmerken geformuleerd waaraan opdrachten en paragrafen moeten voldoen om geschikt te zijn voor authentiek leren.

De kenmerken worden hieronder beschreven en toegelicht aan de hand van een voorbeeldopgave.

1. Herkenbaarheid

Is de context herkenbaar of voorstelbaar voor de leerlingen?

De context 'erwtensoepp maken' uit de opgave in **figuur 1** is herkenbaar en voorstelbaar voor de meeste leerlingen. Voor leerlingen uit een andere cultuur kan dat mogelijk wat minder het geval zijn. We denken toch dat zelfs leerlingen die nog nooit erwtensoepp hebben gegeten of ervan hebben gehoord, zich deze context wel kunnen voorstellen. De 'authentieke' presentatie draagt daaraan bij. Op dit kenmerk scoort deze opgave dus 'hoog'.

2. Relatie met het dagelijks leven

Heeft de context zoals die in de opgave een rol speelt te maken met het dagelijks leven van de leerlingen?

Dit kenmerk ligt dicht tegen het vorige aan, maar er is toch een duidelijk onderscheid. Gekeken is naar de 'echtheid' of 'authenticiteit' van de opgave in de buitenschoolse context. Komt de leerling ooit zoiets tegen? Maakt hij/zij het mee? Zo zal de context 'aardbeving' voorstelbaar zijn voor de meeste leerlingen. Voor leerlingen in Nederland is de kans dat ze er ooit een meemaken klein en dus is ook de relatie van deze context met het dagelijks leven van de

meeste leerlingen zwak. Bij dit kenmerk is ook gelet op de 'authenticiteit' van de formulering van de opgave. Ook op dit kenmerk scoort de opgave uit **figuur 1** hoog. We kunnen daarbij wel de kanttekening plaatsen dat de opgave hier waarschijnlijk lager zou zijn gescoord, als de opgave minder 'echt' was gepresenteerd. Als de benodigdheden niet zo duidelijk uit het kookboek er hadden bijgestaan, maar als slechts een aantal ingrediënten in de tekst was genoemd, was de relatie met het dagelijks leven minder duidelijk geweest.

3. Relatie met beroep

Heeft de opgave te maken met een mogelijk toekomstig beroep van de leerlingen?

Omdat vmbo-leerlingen nog niet direct opgeleid worden voor een beroep, maar voor vervolgoopleidingen in een bepaalde sector, is bij het scoren ook gekeken of een opgave een relatie heeft met de sector waarin de leerling het onderwijs volgt. Deze sectoren zijn: Zorg en Welzijn, Economie, Techniek, Landbouw.

Op dit kenmerk scoort de erwtensoeppopgave uit **figuur 1** hoog, immers het interpreteren, gebruiken en omrekenen van recepten maakt onderdeel uit van de sector Zorg en Welzijn en van de afdeling Consumptief van de sector Economie.

4. Vanzelfsprekendheid

Volgt de gestelde vraag vanzelfsprekend als probleem uit de context?

De in de opdracht van **figuur 1** gestelde vraag volgt inderdaad als vanzelfsprekend probleem uit de context. Dit valt het eenvoudigst in te zien door de laatste zin uit de opgave (waarin de vraag wordt gesteld) weg te laten. Als je dan de overblijvende tekst leest, is een van de vragen die op een natuurlijke manier opkomt: hoeveel heeft ze nu van de genoemde ingrediënten nodig? Dat er in de gestelde vraag niet naar de hoeveelheid van elk ingrediënt wordt gevraagd, doet daar niets aan af. Ook op dit kenmerk is de score hoog.

5. Problem solving

Lost de leerling op een zelf te bepalen eigen wijze een echt probleem op als hij/zij de opgave(n) maakt?

Dit kenmerk hangt samen met het vorige. Het bevat de impliciete aanname dat er sprake is van een echt probleem, ofwel dat de opdracht door de leerling als echt probleem wordt ervaren: immers zonder probleem is er geen sprake van 'problem solving'. Bij de opdracht in **figuur 1** wordt geen aanpak voorgeschreven. Er wordt een echt en voorstelbaar probleem gesteld dat de leerling met een eigen aanpak mag oplossen. Ook op dit kenmerk is de score voor deze opgave dus hoog. Hoe veel verschillende aanpakken er zijn, is daarbij op opgavenniveau van ondergeschikt belang. Het is natuurlijk wel zo dat als alle opgaven waarbij geen aanpak wordt voorgeschreven slechts één aanpak

- 10 Inez wil voor zes personen erwtensoep maken. In haar kookboek vindt ze in een recept de benodigdheden voor vier personen.
- Hoeveel gram spliterwten, schouderkarbonades, knolselderij, prei en winterpeen heeft zij nodig?

Erwtensoep voor 4 personen
 300 g spliterwten
 400 g schouderkarbonades
 3 kruidenbouillontabletten
 200 g knolselderij + het blad
 2 aardappels
 2 uien
 200 g prei
 300 g winterpeen
 2 laurierblaadjes

- 13 Gerard en Marianne gaan naar de disco. Voordat ze weggaan, haalt Marianne twee pizza's uit de diepvriezer en zet ze in de magnetron.
- In de tabellen zie je hoe de temperatuur van de pizza's stijgt.

Pizza 1:

tijd (min.)	0	1	2	3	4
temp. (°C)	-18	-14	-8	-3	0

Pizza 2:

tijd (min.)	0	1	2	3	4
temp. (°C)	-18	-12	-6	0	6

Bij welke tabel is er een lineair verband?

FIGUUR 1

FIGUUR 2

toelaten, er van echt 'probleem oplossen' geen sprake is. Er zijn daarom niet alleen losse opgaven gescoord, maar ook paragrafen. Hierdoor kan dit aspect aandacht krijgen.

Met dit instrument zijn eerst afzonderlijk alle opgaven uit de 'kernen' of 'basisstof' van de meest gangbare wiskundemethoden^[1] voor klas 3 en 4 van de beroeps-gerichte leerwegen in het vmbo gescoord op elk van de bovengenoemde kenmerken. Dit gebeurde op een 3-puntsschaal:

0 = niet aanwezig; 1 = twijfel; 2 = aanwezig.

Deze scores zijn vervolgens per paragraaf samengevat op een 5-puntsschaal.

Per paragraaf is daarnaast apart gescoord in welke mate de context de wiskunde ondersteunt^[2] en wat de potentie is van de paragraaf met betrekking tot authentiek onderwijs. Het scoringsinstrument is digitaal en is gemaakt in de vorm van een database.

Ter verheldering geven we hier nog een voorbeeld van een opgave die minder hoog scoort op een aantal van de kenmerken (zie figuur 2).

Deze opgave gaat over het opwarmen van pizza's in de magnetron. Die context is herkenbaar voor leerlingen. Herkenbaarheid krijgt score 2.

Op relatie met dagelijks leven scoort deze opdracht slecht. De presentatie van de temperatuur van de pizza's in tabellen komt in de werkelijkheid in deze situatie niet voor. Het lijkt daarnaast ook niet erg waarschijnlijk dat de pizza's zo verschillend opwarmen.

Relatie met dagelijks leven krijgt score 0.

Of deze context een relatie heeft met de sector of het beroep, is twijfelachtig. Net als de erwtensoepopdracht speelt deze opdracht zich af op het gebied van koken en kan dus de relatie met Consumptief en Zorg en Welzijn worden gelegd. Mede door de presentatie van de opgave is deze relatie minder overtuigend. Relatie met beroep krijgt score 1.

Als we bij deze opgave de vraag weer even weglaten en de tekst nog eens doorlezen, is het niet waarschijnlijk dat de gestelde vraag 'bij welke tabel is

er een lineair verband' vanzelf naar voren komt, en zeker niet als 'echt probleem'. De vraag is bijvoorbeeld al niet in termen van de context gesteld. Op vanzelfsprekendheid scoort deze opdracht 0.

Tenslotte bespreken we de score op 'problem solving'. Er is zoals aangegeven geen sprake van een binnen de context gesteld probleem dat moet worden opgelost, maar er wordt bij de tabellen een wiskundige vraag gesteld. Het is de vraag of de leerlingen deze vraag als een probleem ervaren, wel kan de vraag op verschillende manieren worden aangepakt. Om deze reden kan de vraag het voordeel van de twijfel krijgen en scoort op dit kenmerk een 1.

Resultaten

De scores zijn op paragraafniveau bekeken en geanalyseerd. We zien de paragraaf als eenheid, omdat opgaven uit één paragraaf over dezelfde stof gaan en paragrafen ook in lestijd vaak een eenheid vormen. Het opgavenniveau is te gedetailleerd voor het krijgen van een overzicht.

We geven hier slechts een globale samenvatting van de resultaten, waarbij alleen de uiterste scoringswaarden zijn meegenomen: namelijk score 0 ('komt niet voor') en score 4 ('is duidelijk aanwezig').

- Herkenbaarheid

Hierop zijn de scores relatief het hoogst, al scoort maar een kleine 20% van de paragrafen in de methoden hierop een 4, anderzijds scoort maar een kleine 10% van de paragrafen hierop een 0. Er zijn relatief kleine verschillen tussen de methoden op dit kenmerk. Die verschillen kunnen samenhangen met het meer of minder veelvuldig gebruik van foto's als illustraties en de mate waarin langer bij dezelfde context wordt stilgestaan. Er is echter geen onderzoek gedaan naar de oorzaken voor de verschillen.

Paragrafen uit de domeinen rekenen, meten en schatten en statistiek scoren wat hoger dan die uit de algebra en meetkunde.

- Dagelijks leven

Het scorepatroon op dit kenmerk is vergelijkbaar met dat op 'herkenbaarheid'. Dit is niet verbazend gezien de

- 27 In Landgraaf is een groot popconcert. Daarvoor is een podium gebouwd. Het podium is alleen van de voorkant te zien. Hieronder zie je het bovenaanzicht op schaal 1 : 500.

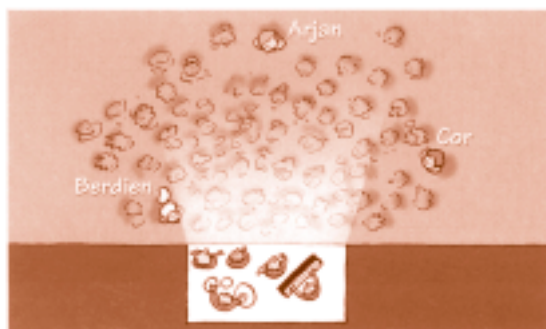


Fig. 4.26

- a Cor staat schuin voor het podium. Teken de kijklijnen van Cor naar het podium.
b Kleur het stuk podium dat hij kan zien blauw.
c Hoeveel muzikanten kan Cor zien?

FIGUUR 3

eerder beschreven verwantschap van de kenmerken. Wel liggen de scores hier lager dan op herkenbaarheid: slechts zo'n 10% van de paragrafen scoort een 4, bij herkenbaarheid was dit bijna 20%.

- Relatie met beroep/sectorale inkleuring

Sectorale inkleuring komt in de paragrafen met basisstof amper voor. Slechts zo'n 5% van de paragrafen scoort een 4, en zo'n 45% scoort een 0. Dit is niet verwonderlijk, immers de wiskundeboeken en ook de centraal schriftelijke examens zijn voor alle leerlingen, ongeacht hun sector, hetzelfde.

- Vanzelfsprekendheid en 'problem solving'

We bekijken deze kenmerken samen. Samen bepalen deze kenmerken of een leerling betekenisvol kan handelen bij het werken aan de opgaven uit een paragraaf. De scores hangen naar verwachting samen, omdat, als er geen probleem is gesteld, er ook geen sprake kan zijn van 'problem solving'.

Het kan wel zijn dat er wél een probleem wordt gesteld in de opgave, maar dat dat niet vanzelfsprekend uit de context volgt. Als dit probleem door de leerlingen als echt probleem wordt ervaren én als het op verschillende manieren kan worden opgelost, kan de score op vanzelfsprekendheid laag en op 'problem solving' hoog zijn. Dit doet zich gezien de scores echter zelden voor.

De scores op deze beide kenmerken zijn uitermate laag: op vanzelfsprekendheid scoort zo'n 5% een 4, op 'problem solving' nog minder.

Tijdens de analyse op opgavenniveau is opgevallen, dat de overgrote meerderheid van de opgaven in het boek bestaat uit deelvragen. Dat betekent dat er veel aanloopvragen zijn, die niet vanzelfsprekend door de context worden opgeroepen en dan ook niet als betekenisvol probleem zijn gesteld. Het zijn vaak opdrachten die een bepaalde handeling vragen - denk aan 'teken de grafiek', 'vul de tabel in', 'teken de kijklijnen'. Deze opdrachten zijn meestal bedoeld om de leerling op het goede spoor te zetten als ze individueel werken, en ze te sturen naar een bepaalde aanpak van het in de laatste deelvraag gestelde probleem (als dat

er al is, want vaak ontbreekt het). Daarmee is dan ook de vrijheid een eigen aanpak te kiezen en echt een probleem op te lossen verdwenen. Zie de opdracht in **figuur 3**.

Na deze misschien wat somber stemmende opsomming van lage scores is het hoopgevend te constateren dat ruim 20% van de paragrafen van het deel dat laag scoort, wel hoog scoort (een '4') op het kenmerk potentie. Dit betekent dat zo'n paragraaf met enige ingrepen geschikter is te maken voor gebruik bij authentiek onderwijs.

Een paragraaf over *plaatsbepalen* waarin het aflezen van plattegronden en het beschrijven van routes centraal staat, kan bijvoorbeeld worden vervangen door een authentieke leertaak zoals:

- Maak met behulp van deze plattegrond een routebeschrijving van school naar je stageadres voor je docent. Geef ook de reistijd.
- Voor de open dag van onze school worden de leerlingen van alle basisscholen in de buurt uitgenodigd. Maak met behulp van deze plattegrond een routebeschrijving van basisschool ... naar onze school.

Een paragraaf over het omgaan met *verhoudingstabellen* kan geheel worden geplaatst in de context van recepten. Dit kan bijvoorbeeld zijn het maken van een maaltijd voor de klas op kamp, het plannen van maaltijden in het schoolrestaurant bij de afdeling Consumptief of het maken van beton bij de afdeling Bouw. In een dergelijke context komen dezelfde soorten 'wiskundige' activiteiten voor die nu ook in de betreffende paragrafen staan maar dan op een meer authentieke manier.

Een paragraaf over *meten en maten* kan gekoppeld worden aan de meetinstrumenten in een praktijklokaal en zo zijn er meer voorbeelden te bedenken.

Tenslotte willen we bij deze resultaten nogmaals benadrukken dat uitsluitend naar de basisstof is gekeken. Dat betekent dat dus alle GWA's, praktische opdrachten en opdrachten rond sectororiëntatie niet in

deze bespreking zijn meegenomen. Het zal duidelijk zijn dat de meeste van dit type taken bij uitstek geschikt zijn of zijn te maken voor authentiek leren. Verder merken we op dat er alleen is gekeken naar de opgaven in de boeken en dus niet naar het onderwijs dat docenten er in de klas mee maken. Dit kan heel anders zijn!

Opvallende zaken

In deze paragraaf bespreken we een aantal opvallende aspecten van authentiek leren zoals we die tegenkwamen in ons onderzoek van de methodes. We beschrijven een aantal valkuilen en mogelijkheden. Bij valkuilen *denk* je dat er sprake is van een authentieke leertaak, maar *is* dat *niet* zo. Soms zien we mogelijkheden om de valkuilen te vermijden. Naast deze mogelijkheden zijn hiervoor bij het kenmerk potentie, ook een aantal mogelijkheden beschreven om paragrafen meer geschikt te maken voor authentiek leren.

Valkuil - Quasi-contexten

Veel opdrachten uit de wiskundemethoden zijn gevat in een 'realistische' context. Dat geldt zeker voor het niveau van de basis- en kaderberoepsgerichte leerwegen. Een aantal van die contexten is zelfs duidelijk ontleend aan een praktijkvak. Toch is daarmee niet automatisch voldaan aan de eis van echtheid van een authentieke leertaak.

Een voorbeeld daarvan hebben we gezien in **figuur 2** bij de opdracht over pizza's in de magnetron. De context is weliswaar voorstelbaar, maar de gegevens zijn niet op een 'authentieke' in het dagelijks leven voorkomende manier gepresenteerd en er is geen probleem gesteld in termen van de context, maar alleen een vraag in termen van wiskunde. Het is dus deels een kwestie van taalgebruik. Juist door de gekozen vraagstelling valt de opdracht door de mand. Het gaat helemaal niet over een echt probleem, het gaat over het aflezen en interpreteren van tabellen. De context is dan slechts verpakking, het is een quasi-context.

Valkuil - Veel verschillende contexten in één paragraaf

Paragrafen zijn leereenheden van één of twee lessen rondom een specifiek onderwerp. De opdrachten van een paragraaf staan in een didactische volgorde, afgewisseld met korte stukjes theorie. Om voldoende diepgang, transfer en abstractie te bereiken wordt vaak gekozen voor een grote variatie in contexten van de opdrachten. Een begrijpelijke opzet, die echter ten koste gaat van de authenticiteit. De contexten hebben zo'n korte levensduur dat ze functioneren als verschillende verpakkingen van hetzelfde wiskundige 'kunstje'. De authentieke relatie tussen wiskunde en realiteit kan daarbij nauwelijks aan bod komen.

Valkuil - Nagemaakte wiskunde

De formule voor de oppervlakte van een cirkel is een degelijke oeroude formule die veel gebruikt wordt: het

is een échte formule. Een formule voor het huren van een fiets is een nagemaakte formule. Geen fietsverhuurder zal ooit het tarief berekenen met behulp van deze formule. Geen leerling zal ooit het eindbedrag van de verhuurder controleren door de formule terug te rekenen. Geen fietsverhuurder en geen leerling zal het in zijn hoofd halen een grafiek te tekenen bij het geldende tarief.

Regelmatig wordt in de methodes de suggestie gewekt alsof dat wel het geval is. Geen leerling die daar in trapt, al zullen ze de opgaven vaak braaf tot een goed einde weten te brengen.

Mogelijkheid - Zorgvuldig formuleren

Hoe moet het dan wel met die formules? Het leren werken met lineaire verbanden in een context staat immers op het programma. Het is hier een kwestie van zorgvuldig formuleren. De formules voor de fietsentarieven zijn geen middel om die tarieven uit te rekenen, maar een manier om die tarieven in beeld te brengen, om overzicht te krijgen en om verschillende tarieven op een handige wijze met elkaar te kunnen vergelijken. Een correcte formulering is dus: 'Bij deze situatie past de formule...' of: 'Je kunt deze situatie goed in beeld brengen met de grafiek...' Voor leerlingen wordt het daar niet gemakkelijker van. De formulering creëert een afstand tussen realiteit en werkelijkheid waarmee de abstractiegraad toeneemt. Maar de wiskunde wint hierbij aan geloofwaardigheid en wordt in ieder geval op een authentieke wijze gebruikt.

Mogelijkheid - Contextloos en toch authentiek

Soms geldt: 'Liever naakt dan namaak', liever naakte wiskunde dan nagemaakte wiskunde. Een puzzel-opdracht met tovervierkanten, een kruiswoordraadsel met rekenopdrachten, een computerprogramma over het raden van de juiste grootte van een hoek, het zijn allemaal voorbeelden van wiskundige contexten met authentieke potenties. Een leerling die betrokken is bij een dergelijke taak, die misschien houdt van puzzelen, die gegrepen wordt door het probleem en daarbij een eigen aanpak ontwikkelt, kennis construeert en mogelijk ook nog samenwerkt, die leerling leert op dat moment op een authentieke manier wiskunde.

Mogelijkheid - Duidelijkheid over de rol van wiskunde

Meer duidelijkheid over de rol van wiskunde in de realiteit verhoogt de echtheid van de wiskunde en daarmee haar authenticiteit. We denken daarbij aan:

- wiskunde als beschrijving van de realiteit door middel van grafieken, tabellen en formules (de fietsenverhuur);
- wiskunde als beschrijving van de realiteit door middel van meetkunde (uitslagen, aanzichten);
- wiskunde als beschrijving van de realiteit door middel van het systematisch verwerken en weergeven van gegevens (diagrammen, grafieken, tabellen, grafen);
- wiskunde als middel om iets uit te rekenen (verhoudingstabellen, de oppervlakte van de cirkel);

- wiskunde om problemen op te lossen (verhoudingstabellen, kijkmeetkunde). In al deze situaties heeft wiskunde een duidelijke rol. Daaraan ontleent ze haar zin en dus haar authenticiteit. Dit laten zien aan leerlingen verhoogt de geloofwaardigheid van het vak. Door de strakke voorstructurering van veel opdrachten raakt dit aspect ondergesneeuwd. Leerlingen zijn niet bezig met wiskunde als middel om een doel te bereiken of om een probleem op te lossen, maar met het oplossen van een som om het oplossen daarvan. De laatste deelvraag van een opdracht bevat vaak de kern van die opdracht. Deze vraag neemt echter zo op het oog een gelijkwaardige positie in tussen de andere deelvragen. Daardoor raakt deze kern vaak verloren in het rijtje van deelvaardigheden van de opdracht. Een leerling ziet het verschil niet tussen het belang van vraag a en vraag e. Door deze kernvraag vóóraf aan de orde te stellen, of in een nabespreking meer accent te geven, realiseren leerlingen zich wellicht dat wiskunde er niet alleen is om sommen te kunnen maken.

Mogelijkheid - Wiskundige activiteiten in de klas

Werken aan een duidelijk omschreven taak, waarin iedere leerling een eigen actieve inbreng kan hebben, wordt door veel vmbo-leerlingen op zich al als een authentiek leermoment ervaren. Voorbeelden zijn: het verzamelen van gegevens over de leerlingen in de klas, experimenteren met kijklijnen (wie zie je wel en wie zie je niet), het samen spelen van een rekenspel. Sommige opdrachten in de schoolmethodes zijn met een kleine ingreep in deze zin actief te maken. Dat geldt met name voor meetkunde en gegevensverwerking/statistiek. Maar ook bij rekenen kunt u vrij gemakkelijk een actievere werkvorm bedenken. Zoals bijvoorbeeld het opzetten van een competitie in de klas bij het flippo-spel. Zelfs bij algebra zijn actievere, betekenisvollere werkvormen mogelijk. Zo kunnen leerlingen een grote collectie grafieken of tabellen ordenen, en uitleggen waarom ze die zo ingedeeld hebben. Dit zijn allemaal voorbeelden van authentieke betekenisvolle activiteiten. Het wel of niet authentiek zijn van de context waarin die activiteiten zich afspelen, lijkt dan van minder belang dan de 'authenticiteit' van de activiteiten zelf.

Mogelijkheid - De computer inzetten

Leerlingen kunnen het werken met computerprogramma's als authentiek leermoment ervaren. *Mercurius* is een oeroud programma uit het DOS-tijdperk waarmee leerlingen limonade-inkoop en -verkoop als beheerder van een limonadekraampje konden simuleren. Er wordt in het programma stevig gerekend, onder andere door het bijhouden van de eigen boekhouding. Ook moet er af en toe een strategische beslissing worden genomen over de inkoop van de flessen limonadesiroop. Docenten en leerlingen reageerden stevast enthousiast op het programma. Aan het eind van zo'n computerles met *Mercurius* kwam een leerling speciaal nog even naar de docent met de mededeling: 'Leuk meester, en je leert

er ook nog wat van.' Deze leerling heeft het werken met het programma duidelijk als een authentiek leermoment ervaren. Kleine overzichtelijke computerprogramma's met een eenvoudige schermgestuurde bedieningsstructuur en een speelse opzet bieden al snel de mogelijkheden voor een actieve les met een eigen inbreng van leerlingen. Het beschikbaar komen van applets op het internet heeft de toegankelijkheid van deze computerprogramma's natuurlijk sterk vergroot.

Tot slot

Alles overziend kunnen we stellen dat uit dit onderzoek blijkt dat de huidige wiskundemethoden nog niet optimaal in te zetten zijn voor authentiek leren. Wel is er *potentie* dat te doen. Dat betekent dat er nog werk te doen is, voor u als docent, voor uitgevers, voor het Freudenthal Instituut en alle anderen die de leerlingen in het vmbo het best passende wiskunde-onderwijs gunnen.

Noten

[1] Bekeken zijn de betreffende delen van de methoden: *Getal en Ruimte*, *Moderne wiskunde* en *Netwerk*.

[2] In dit artikel gaan we niet in op de scores betrekking hebbend op de mate waarin de context de wiskunde ondersteunt.

Literatuur

[3] L. Bransford, A. Brown, R. Cocking: *How people learn. Brain, mind, experience and school. Expanded edition. National Academy Press, Washington (2000)*, p. 374.

[4] S. Kemme: *WINST voor het vmbo*. In: *Nieuwe Wiskrant*, jg. 21/1 (2001), pp. 19-21.

[5] S. Kemme, M. Wijers, V. Jonker: *Authentieke contexten in wiskundemethoden in het VMBO*. Freudenthal instituut, Onderwijskunde, Universiteit Utrecht (2003), p. 60. (Zie ook www.fi.uu.nl/vmbo)

[6] E.C. Roelofs, A.A.M. Houtveen: *Didactiek van authentiek leren in de basisvorming*. In: *Pedagogische Studiën*, jg. 76 (1999), pp. 237-257.

[7] J.M.M. van der Sanden e.a.: *Praktijksimulaties in het vernieuwend vmbo. Bouwstenen voor de integratie van praktijk en theorie*. Giethoorn ten Brink, Meppel (2003).

Over de auteurs

- Monica Wijers (e-mailadres: m.wijers@fi.uu.nl), Freudenthal Instituut, onder andere werkzaam in het project 'Winst voor het vmbo'.

- Vincent Jonker (e-mailadres: v.jonker@fi.uu.nl), Freudenthal Instituut, onder andere werkzaam in het project 'RekenNet' en het project 'Winst voor het vmbo'.

- Sieb Kemme (e-mailadres: daedalus@educadbv.nl), Daedalus, voor leerplanontwikkeling en leerplanadviezen.

REFLECTIE IN DE KLAS

[Gerrit Roorda]

Inleiding

Op mijn Zip-disk staan 168 documenten waarin de term reflectie voorkomt. Daar kwam ik achter toen ik het document dat u nu leest niet kon terugvinden, en het met een zoekopdracht opspoorde. De meeste documenten gaan over reflectie op eigen handelen door aanstaande leraren, iets waarmee ik als docent van de lerarenopleiding vaak te maken heb. Maar er zijn er ook een aantal die gaan over reflectie bij het vak wiskunde.

Het begrip reflectie duikt tegenwoordig op allerlei plaatsen op. Met de komst van de Tweede fase verschenen in sommige wiskundemethoden reflectie-vragen, herkenbaar aan een uitroepteken of door het opschrift: *Reflectie* (zie figuur 1). Het maken van deze vragen kan leerlingen helpen om terug te kijken en na te denken over onderwerpen die ze in een hoofdstuk hebben geleerd. Maar daarvoor zijn ook andere middelen te bedenken.

In dit artikel ga ik in op reflectie in de wiskundeles en middelen die reflectie kunnen stimuleren.

Wat is reflectie?

Inmiddels is het woord al tien keer gevallen. Hoog tijd om vast te leggen wat ik er mee bedoel.

Reflecteren betekent spiegelen. Je kijkt in de spiegel, in dit geval niet naar je hoofd, maar naar zaken die zich in je hoofd afspelen, je eigen kennis en ervaringen. Van Dormolen zegt in zijn boekje *Reflecteren in en buiten de klas*^[1]: 'Reflecteren is een middel om inzicht te krijgen in ons eigen gedrag en onze eigen gevoelens.' En ik zou daar aan willen toevoegen: '... en onze eigen kennis.'

Er wordt wel onderscheid gemaakt tussen reflectie-op-jezelf en reflectie-op-het-onderwerp. (Zie hiervoor ook [1].)

Bij reflectie-op-jezelf gaat het steeds om terugkijken op je eigen gedrag, op de manier waarop je met een opdracht of een onderwerp bezig geweest bent. Daarbij horen opmerkingen als: *Ik moet eerst de theorie goed lezen voor ik aan de opdrachten begin. Ik kan beter eerst een opdracht zelf maken voor ik ga overleggen met mijn buurman.*

Bij reflectie-op-het-onderwerp gaat het om het terugkijken op of het nadenken over een onderwerp. Daarbij stelt iemand zich vragen als: *Wat weet ik nu eigenlijk van dit onderwerp? Op welke manieren kan ik dit soort opdrachten oplossen? Wat heeft dit met de vorige paragraaf te maken?*

Ik gebruik het begrip reflectie in beide betekenissen: nadenken over leerstof waarmee je bezig bent of die je geleerd hebt, maar ook het terugkijken op de manier waarop je geleerd hebt.

Reflectie: waarom?

Ik denk aan Karla, een ideale leerling die bezig is met het maken van een opdracht uit het boek. *Karla leest de opdracht tweemaal door en denkt even na wat ze van het onderwerp weet. Ze maakt eerst een schets en denkt: Heb ik in de vorige paragraaf niet ook zoiets moeten doen? Ze bladert even terug. Ja het lijkt erop, maar deze situatie zit toch iets anders in elkaar. Karla kijkt nog eens naar de theorie en denkt dat ze het volgens methode X moet oplossen. Karla begint te rekenen. Na enige tijd stopt ze en pakt de rekenmachine om een grafiek te plotten. Kan dit eigenlijk wel kloppen? Ja het klopt. Dit gaat goed. Karla rekent door en vindt een antwoord. Even kijken wat de vraag ook nog maar weer is. 'O ja, ik moet nog omrekenen naar kilometers per uur. Ja dit kan kloppen; 115 km/uur voor een auto, dat lijkt me redelijk. Nog even in de uitwerkingenmap kijken: Hé, het*

– **Reflectievragen**, waarin je nog eens terugkijkt naar of moet nadenken over de afgesloten paragraaf. Het is de bedoeling dat je bij het zelfstandig leren steeds vaker een houding aanneemt van ‘nog-maals nadenken over de stof en de gevolgde aanpak’.

Reflectie

- 20** Er zijn verschillende soorten van stijgen en dalen. In figuur 3.27 zie je dat
- de overgang van afnemend stijgend naar toenemend stijgend vloeiend kan verlopen
 - de overgang van afnemend stijgend naar afnemend dalend een knik oplevert.
- Geef alle situaties waarin twee soorten van stijgen en dalen alleen met een knik in elkaar kunnen overgaan. Licht toe met schetsjes.

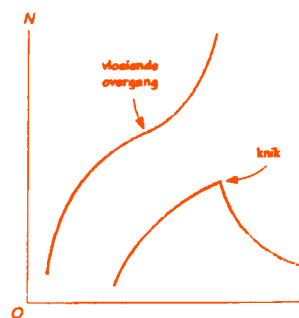


Fig. 3.27

19 Geef vier verschillende manieren waarop je de oplossing van de vergelijking $(x - 3)^2 = 1$ kunt vinden.

FIGUUR 1 Uit: *Getal en Ruimte CM/EM 1, havo 4*

FIGUUR 2 Uit: *Moderne wiskunde vwo A1/B1, deel 1*

antwoord is wel goed, maar ze doen het anders. O, ze plotten eerst de grafiek... Volgende keer kan ik toch het beste gelijk een grafiek plotten, denkt Karla.

Deze Karla bestaat niet, het verhaal is zelf bedacht.

Wel is uit onderzoek bekend dat goede ‘leerders’ en experts zich onderscheiden doordat ze zich beter oriënteren, regelmatig kijken of ze op de goede weg zijn, terugkijken op de gebruikte aanpak en bijvoorbeeld zelf toetsen of ze een onderwerp begrepen hebben. Allemaal vaardigheden die vallen onder de term metacognitie. Reflecteren is zo’n metacognitieve vaardigheid.

In de praktijk gebruiken leerlingen deze metacognitieve vaardigheden soms wel, maar vaak ook niet. Een heel aantal leerlingen werkt opdrachten uit het boek door zonder na te denken over wat ze eigenlijk aan het doen zijn, of wat ze van een opgave kunnen leren. Misschien wordt dit ook gestimuleerd door studiewijzers waarin je de nummertjes van de opdrachten kunt doorstrepen als de opdracht klaar is. Uit onderzoek blijkt dus dat goede ‘leerders’ meer metacognitieve vaardigheden, waaronder reflectie, inzetten bij het oplossen van problemen, of het maken van opdrachten (zie daarvoor bijvoorbeeld ook [2]) en dat je leerlingen zulke vaardigheden kunt aanleren. Het lijkt me daarom de moeite waard om erover na te denken hoe je leerlingen dergelijke vaardigheden kunt onderwijzen.

Middelen om reflectie te stimuleren

Hoe kun je leerlingen leren om op zichzelf of op een onderwerp te reflecteren? Welke middelen heb je als docent tot je beschikking om reflectie te stimuleren? In de inleiding noemde ik al de reflectievragen die in een aantal wiskundemethoden voorkomen. Voor mij was dat een aanleiding om me in het onderwerp reflectie te verdiepen.

Vandaar dat ik als eerste op het middel ‘reflectievragen’ wil ingaan. Maar ook andere middelen worden kort beschreven.

Reflectievragen

In *Getal en Ruimte* en *Moderne wiskunde* komen opdrachten voor die gelabeld zijn als reflectievraag. Reflectievragen hebben een ander karakter dan andere opdrachten in het boek. Het gaat er steeds om dat een leerling gaat nadenken over een stuk theorie of over zijn methode om een bepaald soort problemen op te lossen. Niet alle reflectievragen in de genoemde wiskundemethoden zijn in mijn ogen geslaagd. Maar er zijn zeker reflectievragen die goed als kapstok kunnen dienen voor een gesprek met de klas. Leerlingen vinden het toch vaak moeilijk om uit de rijen opgaven de kern te halen. De docent speelt op dit punt een belangrijke rol. In de voorbeelden hieronder noem ik vragen die in een onderwijsleergesprek bij zo’n reflectievraag aan de orde kunnen komen.

In **figuur 2** staat een reflectievraag uit *Moderne wiskunde*.

Mogelijke vragen die met de klas besproken worden, zijn:

- Welke oplossingsmethoden zijn er ook al weer voor zo’n vergelijking?
- Welke oplossingsmethode heeft je voorkeur?
- Wat leer je van deze opgave over het oplossen van tweedegraads vergelijkingen? (Bijvoorbeeld: eerst goed nadenken over de verschillende methoden voor je begint te rekenen.)
- Welke van de genoemde methoden werken alleen bij tweedegraads vergelijkingen?
- Bedenk een voorbeeld van een tweedegraads vergelijking die volgens jou makkelijk is op te lossen via een bepaalde methode. Laat je buurvrouw hem oplossen, en bespreek de methode.

- 8** Wat kun je zeggen van het toenamendiagram als de oorspronkelijke grafiek
- a een lijn is
 - b een parabool is
 - c bij een exponentieel verband hoort
 - d bij een wortelverband hoort?

Doorvragen kan ook leiden tot een ander niveau van het reflecteren.

Leraar: Wat heb je hiervoor gedaan?

Leerling: Hiervoor heb ik opgave 5 gemaakt.

Leraar: Hoe heb je die opgave opgelost?

Leerling: Ik heb de grafiek van de functie getekend.

Leraar: Waarom hielp dat de opgave op te lossen?

Leerling: Omdat ik direct kon zien waar de functie groter dan 9 is.

Leraar: Brengt je dat op een idee om de opgave waar je nu aan bezig bent op te lossen?

Leerling: Dit is eigenlijk hetzelfde, maar alleen met een andere functie en andere getallen.

Leraar: Wat heb je nu geleerd over het oplossen van problemen?

Leerling: Als je niet verder kunt, kijk dan hoe je het eerder hebt gedaan.

FIGUUR 3 Uit: *Getal en Ruimte NG/NT, deel 1*

FIGUUR 4 Uit: *Reflecteren in en buiten de klas*

(zie [1])

In **figuur 3** staat een voorbeeld uit *Getal en Ruimte NG/NT1*.

Vragen die je kunt stellen:

- Teken enkele lijnen en het bijbehorende toenamendiagram. Wat hebben deze toename-diagrammen gemeenschappelijk? Waarin verschillen ze?

- Doe hetzelfde bij een parabool. Maakt het uit of een dalparabool boven de x -as ligt of snijpunten met de x -as heeft?

Leerlingen moeten bij het beantwoorden van deze vragen opnieuw nadenken over lijnen (stijgend, dalend, constant), dal- en bergparabool, exponentiële toe- of afname en de bijbehorende toenamendiagrammen.

Doorvragen

Als ik lessen observeer van studenten die de lerarenopleiding doen, merk ik dat zij een natuurlijke neiging hebben om vragen van leerlingen te beantwoorden. Een leerling zegt: 'Ik snap opgave 5 niet', en de LIO legt vervolgens de betreffende opgave uit. Juist in deze één-op-één-situaties kun je leerlingen door het stellen van goede vragen stimuleren om te reflecteren.

In **figuur 4** staat een voorbeeld van het verloop van een gesprekje met een leerling, waarbij de docent probeert de leerling over zijn manier van oplossen te laten nadenken.

Samenvatten

In **figuur 5** staat een opdracht uit het verwerkingsboek van de methode *Pascal* bij een hoofdstuk over de verwerking van statistische gegevens. De leerlingen moeten zelf een samenvatting van de leerstof maken. Samenvatten is een krachtig hulpmiddel voor reflectie. De leerling moet op een rij zetten waar het hoofdstuk

over ging, wat de kernbegrippen waren, welke aanpakken er zijn beschreven.

Een leuke anekdote in dit verband.

Een familielid van mij mocht voor een bepaalde toets op een blaadje van 3 cm bij 3 cm alles opschrijven wat hij voor de toets van belang achtte. Gevolg was dat hij een avond lang met een potlood (0,2 mm) zoveel mogelijk relevante informatie op het blaadje probeerde te proppen. Hij had haast een vergrootglas nodig om het te lezen. Tijdens de toets bleek hij het blaadje niet meer nodig te hebben.

In sommige methoden worden samenvattingen gegeven. Maar het maken van een samenvatting of een overzicht over een gedeelte van de leerstof is een zinvolle activiteit om leerlingen te laten reflecteren op een onderwerp.

(Toets)vragen bedenken

In dezelfde **figuur 5** is de laatste vraag: Verzin zelf een opgave...

Ook zo'n opdracht kan aanleiding zijn tot reflectie op het onderwerp. Wanneer een leerling een goede toetsvraag bedenkt, weet hij ook wat belangrijke punten in het hoofdstuk zijn. Ook kun je vragen laten bedenken waarvan het antwoord al gegeven is:

- Je hebt 7 verschillende cd's. Bedenk opdrachten met

als antwoord 7^4 , $7!$, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ en $\binom{7}{4}$.

- Bedenk een stelsel van twee lineaire vergelijkingen dat geen oplossingen heeft.

- Bedenk een functie met domein $\mathbb{R}$ en bereik $[0, \rightarrow)$.

Afsluiting

Hierboven worden vier middelen genoemd om reflectie te stimuleren. De lijst kan langer gemaakt worden. In het al eerder genoemde boekje van Van Dormolen staan meer suggesties. Maar ook in het boek *Actief*

Samenvatten

Je zou na het doorwerken van de vorige paragrafen van dit hoofdstuk nu de leerstof in hoofdstuk S3 van het informatieboek moeten beheersen.

- Loop met de kennen/kunnen lijst nog eens door de theorie heen.
 - Maak een samenvatting waarin alle belangrijke diagrammen en begrippen voorkomen.
 - Verzin zelf een opgave waarin veel van die begrippen voorkomen met behulp van het materiaal uit de krant.
- Wellicht is dat voor je leraar een geschikte opgave voor een toets.

FIGUUR 5 Uit: Pascal NG en NT, verwerkingsboek (2e druk)

leren van Ebbens^[3] of op sites die gaan over het leren van leerlingen^[4] worden suggesties gedaan voor activiteiten op dit gebied.

Er zijn veel aanwijzingen waaruit je kunt concluderen dat systematische en expliciete aandacht voor metacognitieve vaardigheden, zoals reflectie, positief bijdraagt aan het leren van de leerlingen. Daarbij dient wel opgemerkt te worden, dat een voorwaarde is dat leerlingen op dit punt ook iets *willen* leren. De houding van de leerling is belangrijk. Die houding is soms niet aanwezig. Ook de houding van de docent is belangrijk. Een docent moet goed bedenken waar de leerlingen op moeten reflecteren. Welke verbanden wil je op een bepaald moment verhelderen? Wil je met de klas in gesprek over de verschillende aanpakken bij een probleem of verschillende technieken om dezelfde opgave op te lossen? Wil je een leerling of een klas laten reflecteren op een stukje kennis, op aanpak of op verbanden en structuren?

Daarbij spelen *werkvormen* ook een belangrijke rol. Stimuleer je reflectie alleen in persoonlijk contact met leerlingen, wanneer je een leerling *individueel helpt*, dan stel je vragen als: Hoe heb je dit probleem aangepakt? Wat staat er in de theorie? Wat heb je geleerd van deze som?

Je kunt ook kiezen voor een *onderwijsleergesprek* aan het eind van een hoofdstuk of een paragraaf of bij een reflectievraag uit de methode.

Of kies je bijvoorbeeld voor een vorm van *samen-werkend leren*, door bijvoorbeeld eerst door een groepje toetsvragen te laten maken die vervolgens door een andere groep moeten worden gemaakt, en door een derde groep worden nagekeken met een correctiemodel van de eerste groep?

Het doel van dit artikel is uiteindelijk om u te laten reflecteren op de eigen onderwijspraktijk. Misschien

onderstreept het werkvormen en werkwijzen die u al lang gebruikt, misschien geeft het een aanzet om iets nieuws uit te proberen in de klas.

Literatuur

-
- [1] J. van Dormolen: *Reflecteren in en buiten de klas*, Utrecht, 2000 (verkrijgbaar via het APS).
 - [2] A. van Streun: *Het denken bevorderen, oratie RuG*, 2001 (te vinden op de website www.fwn.rug.nl/betaplus/leestafel/VanStreunOratie.pdf).
 - [3] S. Ebbens en S. Ettekoen: *Actief leren*, Groningen, 2000.
 - [4] Zie bijvoorbeeld de website www.leren.nl/rubriek/persoonlijke_vaardigheden/leren_leren/

Over de auteur

Gerrit Roorda (e-mailadres: g.roorda@math.rug.nl) is lerarenopleider en docent wiskundendidactiek aan de universitaire lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen.

LINEAIR PROGRAMMEREN MET GEOCADABRA

Computerondersteund optimaliseren in 5-vwo

[Bob Bakker]

Een stukje geschiedenis

Bij het lineair programmeren in 5-vwo leek het mij goed de klas met een computerprogramma te laten werken. In mijn archief vond ik nog het DOS-programma *Linprog*. Dit programma uit 1989 startte zowaar nog op onder Windows XP. Bij het bekijken van dit programma wist ik ineens weer waarom ik het destijds niet meer gebruikt heb: stug in gebruik en zeer beperkt in mogelijkheden (zie [figuur 1](#)).

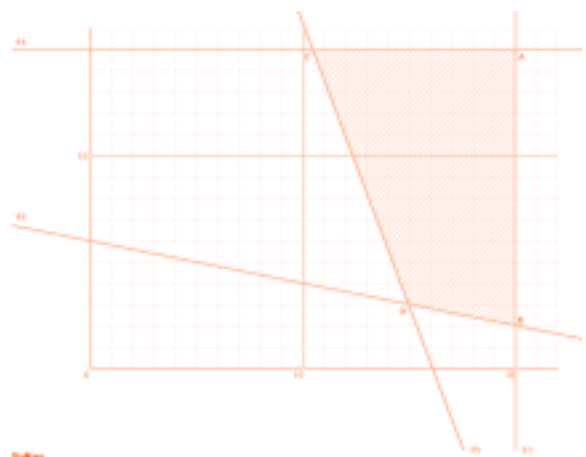
Enige jaren geleden heeft onze school ook het programma *ORStat* aangeschaft. Dit programma werkt onder Windows. Bij complexere problemen doet dit programma precies wat je er van verwacht: het maximum of minimum van de doelfunctie bepalen. Toch was ik niet echt enthousiast toen ik er vorig jaar in mijn klas een keer mee gewerkt had. Het was voor de leerlingen niet echt spannend. Je voert de beperkende voorwaarden in, brengt de doelfunctie aan, drukt op de knop en het minimum/maximum staat in beeld. Het hoe, wat en waarom komt niet echt uit de verf. Toch heeft dit programma zeker z'n waarde, maar daarover later meer.

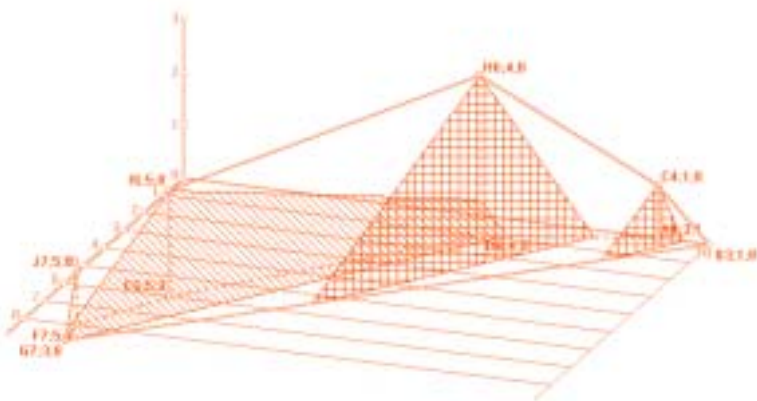
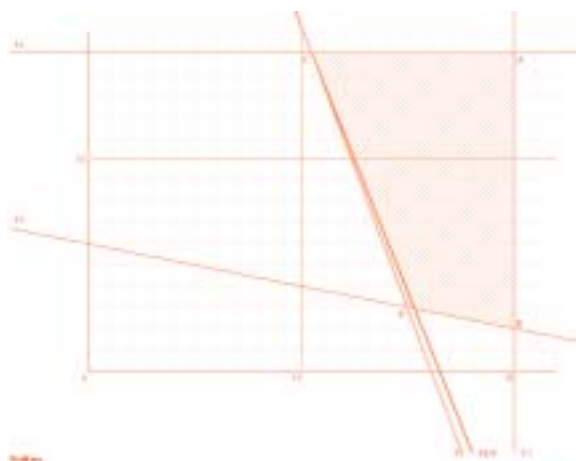
Dit jaar besloot ik naast de theorie uit het boek het programma *Geocadabra* van Ton Lecluse te gebruiken. De door hem ontwikkelde programma's zijn al vele jaren bij ons op school in gebruik. Het begon met de DOS-programma's *2D* en *3D*. In de loop der jaren breidde het geheel zich uit en het werkte voortaan onder Windows. Via de titel *Meetkunde 3D* kwam het uitgebreide pakket in 1999 bij Visiria op de markt onder de titel *Geocadabra*^[1]. De nieuwe naam was meer dan nodig. Het is namelijk een veelzijdig programma. Behalve uitgebreide mogelijkheden in de twee- en driedimensionale meetkunde zijn er ook grafieken mee te tekenen, die vervolgens weer te analyseren zijn. En kansrekening kan er ook mee. Eén van de mogelijkheden in de module '2de fase' is *Lineair Programmeren*. Als docent ben ik om meerdere redenen blij met dit programma. In dit artikel zijn enkele ervaringen met dit onderwerp uitgewerkt.

De praktijk

Op de cd-rom waarop het programma geleverd wordt, staat een hele voorraad lesbrieven. Ook voor lineair

FIGUUR 1, 2, 3





ORSTAT Linear Programming van Windows, 1ste Versie, 1ste Editie

Minimale kosten = 0.0000, max = 0.0000, min = 0.0000, max = 0.0000, min = 0.0000, max = 0.0000, min = 0.0000, max = 0.0000

Deel van de kosten = 0.0000

Naam	Waarde	Minimale kosten
x	0.0000	0.0000
y	0.0000	0.0000
z	0.0000	0.0000
u	0.0000	0.0000
v	0.0000	0.0000
w	0.0000	0.0000

Naam	Waarde	Minimale kosten
1	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000

programmeren zijn er twee voorhanden, één voor twee en één voor drie variabelen. Deze lesbrieven worden als WORD-bestand aangeleverd. Gelukkig maar, want ook uit de lesbrieven blijkt dat het programma zich steeds verder ontwikkelt. Ze moesten dus wel worden aangepast, maar als basis is dit materiaal goed te gebruiken.

De eerste LP-lesbrief betreft het lineair programmeren met twee variabelen. De aangereikte introductieopgave is een oude examenopgave (Via Mare – WA 1997 I – opgave 3). In deze opgave krijgt rederij *Via Mare* de opdracht een aantal passagiers en een hoeveelheid vracht te vervoeren. Hiervoor staan twee schepen (de *Aringa* en de *Belana*) ter beschikking, elk met een bepaalde capaciteit. De *Aringa* vaart x keer heen en weer en de *Belana* y keer.

In vraag 10 moeten de leerlingen de voorwaarden opstellen. In vraag 11 moeten zij aantonen dat deze voorwaarden te herleiden zijn tot $8x + 3y \geq 129$ en $x + 5y \geq 30$. Vraag 12 geeft de opdracht het toegestane gebied te tekenen. In vraag 13 moet worden aangetoond dat, als de opdracht met zo laag mogelijke kosten wordt uitgevoerd, de passagiers- en de vrachtcapaciteit telkens volledig benut worden. Vraag 14 is wat lastiger. Het aantal passagiers daalt van 258 naar 240 - bepaal met zo laag mogelijke kosten het aantal vaarten x en y .

Het programma zelf vergt enige bestudering, mede door de vele mogelijkheden. Het werkt beslist niet vanzelf. De instructie is echter via de lesbrieven voldoende duidelijk om er goed mee uit de voeten te kunnen. Via een voorbeeldopgave verkennen de leerlingen het programma en dat gaat vrijwel probleemloos.

Het grote voordeel boven *ORStat* is dat alles wat leerlingen aanbrengen in beeld komt. In **figuur 2** staat het venster waarin het model wordt ingevoerd. *Geocadabra* rekt het model door en genereert de werktekening; zie **figuur 3**. Naast de tekening verschijnt het werkvenster, **figuur 4**, waarmee de tekening verder te onderzoeken is.

Steeds geldt: je ziet wat je doet. De grenslijnen kunnen in elke kleur getekend worden. Het toegestane gebied wordt k(l)eurig aangegeven. De informatie bij de hoekpunten is in te stellen. De iso-lijnen zijn te tekenen op de manier die je zelf wilt, en via één muisklik wordt de 'minimale iso-lijn' getekend. Het is ook duidelijk waarom in dat punt het minimum van de doelfunctie bereikt wordt.

Uit de introductieopgave blijkt nog een groot voordeel van *Geocadabra* boven *ORStat*. In vraag 14 wordt gevraagd een minimum uit te rekenen. Het venijn van de vraag zit in de - niet expliciet genoemde - voorwaarde dat x en y geheeltallig moeten zijn. Dit minimum is dus alleen te bepalen met roosterpunten binnen het toegestane gebied. Door de kandidaatpunten aan te klikken worden de doelwaarden in beeld gebracht; zie **figuur 5**. De kleinste daarvan kiezen is een peulenschil. In *ORStat* is dit niet mogelijk.

Echt anders is het werken met drie variabelen. Zelf een figuur tekenen is voor A-leerlingen eigenlijk uitgesloten. De kennis die de leerlingen in *Geocadabra* hebben opgedaan met twee variabelen, is simpel uit te breiden tot drie variabelen. Ook nu tekent het programma snel de bijbehorende figuur, waarin de leerlingen goed kunnen zien aan welke voorwaarden de hoekpunten van het doelgebied voldoen. Het tekenen van een iso-vlak en de bepaling van de maximale iso-waarde gaan net zo simpel als in het platte vlak. Ook nu geldt: je brengt het niet alleen maar áán, je *ziet* ook wat er gebeurt (figuur 6). De iso-lijn kun je schuiven of kantelen, en hierbij wordt de verandering in de waarde van de doelfunctie zichtbaar. Dit geldt in het ruimtelijke geval ook voor het iso-vlak.

Reacties van leerlingen

Voor het werken met het programma *Geocadabra* had ik twee lesbrieven^[3] gemaakt. De eerste betrof het lineair programmeren met twee variabelen. Deze les is gegeven op het moment dat de leerlingen al een stuk theorie in het boek achter de rug hadden. Ze hadden dus al snijpunten leren bepalen en wisten wat een doellijn is. De tweede lesbrieft, met het ruimtelijk lineair programmeren, kregen ze mee naar huis. Deze moest zelfstandig bestudeerd worden. Omdat ik in de klas altijd een computer ter beschikking heb, was het in de lessen nog wel mogelijk hierover vragen te stellen.

De meeste leerlingen waren enthousiast. Hier en daar moesten ze even op weg geholpen worden, maar de computertoets die erop volgde, leverde grotendeels (zeer ruime) voldoende op.

Een enquête onder 15 aanwezige leerlingen gaf de volgende resultaten:

- Wat vond je van het programma in het algemeen? Gemiddeld cijfer: 7,1.
- Wat vond je van de gebruiksvriendelijkheid van het programma? Gemiddeld cijfer: 7,1.
- Wat vond je van de lesbrieft bij het programma? Gemiddeld cijfer 6,7.

Deze cijfers kwamen naar voren vóórdat de leerlingen hun toetscijfers terugkregen. Gezien het beperkte aantal leerlingen geven de enquête-uitkomsten natuurlijk slechts een indicatie.

Ik heb de leerlingen ook naar de *meerwaarde* van het computergebruik ten opzichte van het boek gevraagd. Hieruit kwam naar voren dat ze het prettig vonden dat een fout gemakkelijk is te verbeteren, en dat ze minder tijd kwijt waren om een vraagstuk op te lossen. Als nadeel werd genoemd dat *Geocadabra* niet op het centraal schriftelijk eindexamen gebruikt kan worden om LP-problemen op te lossen. Een leerling vond het niet prettig dat het programma hem niet aanleerde de coördinaten van de snijpunten algebraïsch te berekenen. Een opmerking die aangeeft dat het programma dus wel goed *naast* het boek, maar niet *in plaats van* het boek gebruikt kan worden.

De leerlingen hebben tijdens de 'gewone' lessen (uit het boek) de mogelijkheid de grafische rekenmachine te

gebruiken. Een leerling vermeldde dat zij het prettig vond dat in *Geocadabra* de vergelijkingen niet eerst in de standaardvorm $Y1 = \dots$ herleid hoefden te worden. Ik vind het belangrijk dat leerlingen ook in de wiskundeles met computers leren omgaan. Soms kunnen ze thuis oefenen, zoals met *Excel*. Soms kan dat niet, omdat de uitgever dit niet toestaat. Een leerling gaf (spontaan) aan dat het prettig was dat met *Geocadabra thuis* geoefend kon worden, in plaats van alleen op school.

Slotopmerkingen

In het begin van mijn artikel gaf ik al aan dat *ORStat* ondanks de mindere visualisatie best waardevol kan zijn.

Een voordeel van *ORStat* is dat dit programma meer variabelen aan kan. In de eindexamens wordt echter met maximaal twee variabelen gewerkt, een noodzakelijke voorwaarde is dit dus niet. Aan de andere kant natuurlijk best leuk om verder onderzoek te plegen. Daarbij is ook aardig dat je niet met x , y en z hoeft te werken, maar bijvoorbeeld met *spaar*, *oblig*, *aand1*, *aand2*, enzovoorts (zie ook figuur 7).

Voor een uitvoeriger verslag van *ORStat* verwijs ik graag naar een artikel van Jos Tolboom^[4], waarin ook de module 'Lineair Programmeren' besproken wordt.

Dit kalenderjaar komt er nog een groot voordeel voor *Geocadabra* bij. De leerlingen kunnen thuis oefenen, want het programma is nu met alle functionaliteit gratis beschikbaar. Voor verdere informatie zie [1] en [2]. Wat mijzelf betreft: als ik volgend jaar weer les geef aan 5-vwo, is deze aanpak een herhaling waard!

Noten

[1] www.geocadabra.nl, de website waar de software kan worden gedownload.

[2] www.planet.nl/~leclu012, de website van de auteur van *Geocadabra*.

[3] Mijn lesbrieven stel ik graag ter beschikking aan liefhebbers. Stuur een e-mail aan j.p.bakker@pascalcollege.nl

[4] Jos Tolboom: *ORStat2000-VWO nader bekeken*, deel 2, in: *Euclides*, jaargang 77 (8), juni 2002.

Over de auteur

Bob Bakker (e-mailadres: j.p.bakker@pascalcollege.nl) is docent wiskunde aan het Pascal College te Zaandam.

KLASSIKAAL De afgeleide van $\ln x$

[Dick Klingens]

- 15 Hiernaast staan de grafieken van de functies $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln x$.
Punt $A(\ln 4, 4)$ ligt op de grafiek van f en punt $B(4, \ln 4)$ ligt op de grafiek van g .
- Bereken de helling in het punt A .
 - Hoe groot is dan de helling in het punt B ?
 - Punt $C(16, \ln 16)$ ligt op de grafiek van g . Bereken de helling in punt C .
 - Op de volgende bladzijde staat de afgeleide van f . Klopt dat met de door jou gevonden hellingen in opdracht b en c?



FIGUUR 1

In Moderne wiskunde B1 deel 4, en wellicht ook in andere methodes, wordt de afgeleide van de functie $g(x) = \ln x$ behandeld door g op te vatten als inverse van de functie $f(x) = e^x$ (zie figuur 1; p. 170 in [1]). Er wordt daarbij dan gekeken naar het verband tussen de afgeleide van beide functies, zeg het verband tussen de richtingscoëfficiënten van de raaklijn in het punt (x_0, y_0) van g en in het punt (y_0, x_0) van f . Daar is natuurlijk niets op tegen. Zeker, de herhaling van een stukje leerstof over inverse functies kan in dit verband geen kwaad.

Maar natuurlijk kan het ook anders (én volledig, dus niet opgehangen aan twee voorbeelden), en dan herhalen we ook...

De leerlingen zijn op dit moment bekend met:

$$f(x) = e^x \text{ en } f'(x) = e^x$$

en met de *definitieformule* van de logaritme:

$$a^{\log b} = b \quad (1)$$

Voor $a = e$ en $b = x$ gaat (1) over in:

$$e^{\ln x} = x \quad (2)$$

We beschouwen nu de functie $h(x) = e^{\ln x}$ (met $x > 0$). Toepassing van de kettingregel geeft bij differentiëren van deze functie:

$$h'(x) = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)' \quad (3)$$

En uit het rechter lid van (2) volgt:

$$h'(x) = 1 \quad (4)$$

Combinatie van (3) en (4) geeft dan onmiddellijk:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Noot

[1] M. Bos e.a.: *Moderne wiskunde vwo bovenbouw wiskunde B1 deel 4*, 7e editie (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1999).

Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) is verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is ook eindredacteur van *Euclides*.

Aankondiging / Nationale Wiskunde Dagen 2005

Op vrijdag 4 en zaterdag 5 februari 2005 worden de Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congresscentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Kosten per persoon: €335,00 bij overnachting op een tweepersoons kamer en €365,00 bij overnachting op een eenpersoons kamer.

Begin september wordt de programmaproject met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Meer informatie over de NWD is nu al te vinden op <http://www.fi.uu.nl/nwd>

Inlichtingen:

Ank van der Heiden, telefoon: 030 2635555 of e-mail: nwd@fi.uu.nl

WISKUNDIGE ASPECTEN VAN ROOSTERPROBLEMEN

Roy Willemen promoveerde in 2002 op het proefschrift 'School timetable construction: algorithms and complexity'.

Een samenvatting.

[Roy Willemen]

De favoriete zomervakantiepuzzel van wiskundeleraren

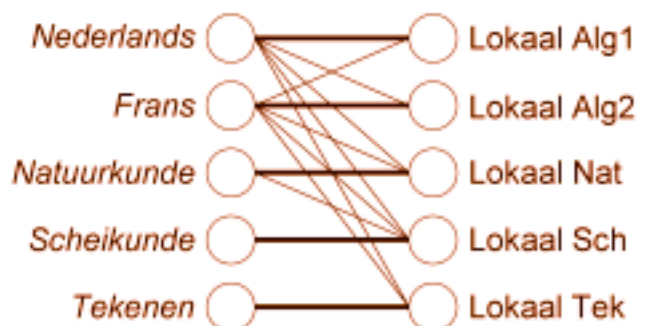
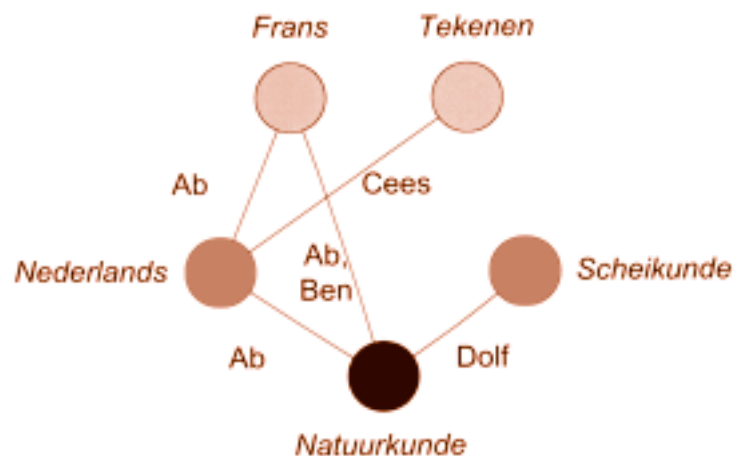
De zomervakantie is voor velen op middelbare scholen het rustigste moment van het schooljaar. Dat geldt voor leerlingen en docenten, maar niet voor de roosterplanner! In de warmste weken van het jaar sluit hij, vaak de wiskundedocent, zich op in zijn domein: de roosterkamer. Met de snelste schoolcomputer, een stapel uitdraaien van het schooladministratiesysteem en een berg *Post-Its* met wensen bij de hand werkt hij aan zijn grote vijf-sterren-vakantiepuzzel. De opdracht is helder: het bepalen van een rooster zonder conflicten dat zo goed mogelijk rekening houdt met ieders wensen. De deadline is keihard: het geboekte vliegtuig voor zijn eigen zomervakantie wacht niet op hem.

De tijd waarin de conrector nog met papier en potlood een rooster kon maken ligt ver achter ons. Roosterplanning op middelbare scholen is de laatste decennia steeds lastiger geworden. Kleine scholen van een paar honderd leerlingen zijn samengegaan in grote scholengemeenschappen van duizend of meer leerlingen, die onderwijs volgen in verschillende schoolsoorten. Grote houten planborden, waarop met verschillende soorten gekleurde steentjes lessen worden weergegeven, zijn nodig om de planner het overzicht over het probleem te laten behouden. Ook het toenemende aantal van en diversiteit aan randvoorwaarden hebben het construeren van een acceptabel rooster complexer gemaakt. Roosterplanners van nu moeten rekening houden met lokalen op verschillende locaties, docenten die part-time aanstellingen hebben en lessen die door leerlingen van verschillende niveaus gevolgd worden. Recent hebben ook de invoering van de nieuwe tweede fase (meer verplichte vakken voor bovenbouwleerlingen) en het studiehuis (steeds meer contacturen vervangen door begeleide zelfstudie-uren) de roosterplanners voor nieuwe uitdagingen gesteld.

Modellen voor roosterproblemen

Net zo interessant als het construeren van een acceptabel rooster is het modelleren en analyseren van roosterproblemen. Een model dat *alle* kenmerken

FOTO Roy Willemen



FIGUUR 1 Een graafkleuringsmodel voor roosterplanning
FIGUUR 2 Een bipartiet koppelingsmodel voor roosterplanning

van roosterproblemen op middelbare scholen omvat is nog nooit gedefinieerd. Allereerst is het lastig om alle eisen en wensen goed te modelleren. Een eis als 'elke leerling heeft ten hoogste één les tegelijkertijd' kan nog wel eenduidig als randvoorwaarde geformuleerd worden. Het definiëren van een klassenverband is een stuk lastiger. Daarnaast is het moeilijk om aan te geven hoe verschillende wensen tegen elkaar afgewogen moeten worden. Want welk rooster is beter: een rooster met een gelijkmatige klasgrootte waarin één docent twee tussenuren heeft of een rooster waarin geen enkele docent een tussenuur heeft maar waarin klas A vijf leerlingen meer heeft dan klas B?

Modellen voor roosterproblemen beperken zich vaak tot één of enkele aspecten van het praktische probleem. Een veel voorkomend model is het *graaf-kleuringsprobleem*. Dit modelleert het toewijzen van lessen aan lesuren als voor leerlingen bekend is welke lessen zij moeten volgen. Elke les correspondeert met een punt in de graaf, twee lessen die door de dezelfde leerling gevolgd moeten worden zijn verbonden door middel van een kant. Het kleuren van punten in de graaf komt dan overeen met het toewijzen van lessen aan lesuren (zie figuur 1). Meestal is het aantal kleuren, het aantal lesuren, gegeven. Het is dan de bedoeling om de punten van de graaf zó te kleuren dat iedere kant twee verschillend gekleurde eindpunten heeft.

Ook *bipartiete koppelingsproblemen*, het bepalen van zo groot mogelijke koppelingen in tweeledige grafen, maken vaak onderdeel uit van roosterproblemen. Toewijzingsproblemen waarin twee verschillende entiteiten gekoppeld moeten worden, kunnen op deze manier gemodelleerd worden. Een voorbeeld is het vinden van een geschikte lokaaltoewijzing als sommige lokalen vakspecifiek zijn (zie figuur 2).

Theoretische complexiteit

Naast het modelleren is ook het construeren van een acceptabel rooster lastig. Er is namelijk op dit moment geen software verkrijgbaar waarmee elke roosterplanner met slechts één muisklik snel een acceptabel rooster kan construeren. Dit kan verklaard worden door de theoretische complexiteit van roosterproblemen. Hierin wordt grofweg onderscheid gemaakt tussen 'makkelijke' en 'lastige' planningsproblemen. Makkelijke problemen, zoals het bipartiete koppelingsprobleem, zijn populair gezegd praktisch (of snel) oplosbaar. Voor lastige problemen is nog nooit een manier (algoritme) gevonden waarmee in alle gevallen snel een optimale oplossing gevonden kan worden. Helaas behoren graafkleuringsproblemen, de kern van veel roosterproblemen, tot deze categorie. Vrijwel alle door de praktijk gestelde randvoorwaarden, zoals de aanwezigheid van blokken en de wens om klassen van gelijke grootte te hebben, blijken roosterproblemen theoretisch lastig te maken.

Praktische oplosbaarheid

Toch lukt het roosterplanners elk jaar weer een rooster te construeren, onder andere door decompositie van het grote probleem. Uit ervaring weten zij wat de knelpunten zijn en pakken zij deze als eerste aan. Vaak wordt met het clusteren van vakken in havo-4 en vwo-5 begonnen. Daarmee wordt al in een vroeg stadium bepaald welke vakken gelijktijdig gegeven zullen worden.

Daarnaast hebben roosterplanners ondersteuning gekregen in de vorm van softwareapplicaties. De basis van deze applicaties is een elektronisch planbord dat automatisch controleert of het rooster aan de belangrijkste randvoorwaarden voldoet. Ook bevatten veel applicaties automaten waarmee planners snel een goede oplossing voor hun deelproblemen kunnen construeren. Deze automaten maken gebruik van *heuristieken*, dat wil zeggen: algoritmen die geen enkele garantie geven voor het vinden van een optimale oplossing. Er zijn *constructieve heuristieken* die zoveel mogelijk niet-geclusterde lessen in het rooster proberen te plaatsen. Ook voor het verfraaien van het rooster, zoals het reduceren van het aantal tussenuren, worden heuristieken ingezet. Door middel van *lokale zoekmethoden* wordt een geconstrueerd rooster stapsgewijs aangepast. In elke stap wordt een klein aantal lessen, meestal slechts één, aan andere lesuren toegewezen zodat het aantal tussenuren afneemt. Uiteindelijk wordt op deze manier een rooster met zo weinig mogelijk tussenuren gevonden. De huidige aanpak, waarin elk leerjaar van de bovenbouw apart wordt bekeken, dateert van de tijd waarin geen enkele roosterplanner een PC tot zijn beschikking had. Het is daarom interessant om na te gaan of met de huidige supersnelle computers de bovenbouw als geheel gepland kan worden. In mijn promotieonderzoek heb ik aangetoond dat zo'n integrale aanpak kans van slagen heeft. Zeker als de sterktes van slimme constructieve heuristieken en lokale zoekmethoden worden gecombineerd!

Literatuur

R.J. Willemen: *School timetable construction: algorithms and complexity*. Eindhoven, Technische Universiteit Eindhoven (IPA dissertation series; 2002-05), 145 p., ISBN 90 386 1011 4.

Van de redactie

Dit artikel is met toestemming overgenomen uit STAtOR, jaargang 4 nummer 1 (april 2003). STAtOR is een uitgave van de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research (VVS).
Website: <http://www.vvs-or.nl>.

Over de auteur

Roy Willemen (e-mailadres: willemen@cqm.nl) voerde zijn onderzoek uit in samenwerking met prof.dr. Emile Aarts, prof.dr. Jan Karel Lenstra en dr.ir. Huub ten Eikelder van de Faculteit Wiskunde & Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Hij is thans werkzaam als consultant bij het adviesbureau CQM in Eindhoven.

WISKUNDE-SLUIT-AAN

Een overzicht

[Hans Daale]

Inleiding

De onderwijswereld is weer eens behoorlijk in beweging, niet alleen binnen de stelsels als zodanig, maar ook als het gaat om de diverse leerroutes ten opzichte van elkaar. Waar de afgelopen tien jaar van alles is geprobeerd om binnen het onderwijsveld afspraken met elkaar te maken over de noodzakelijke afstemming, lijkt het erop dat iedereen opnieuw aan de slag kan gaan. Juist wiskunde, dat ook op zichzelf als vak ter discussie staat binnen het pedagogisch-didactisch geweld aan 'competentie-gericht onderwijs', 'projectmatig bezig zijn' en 'leren-leren', zal een vernieuwde positie binnen de diverse soorten onderwijs moeten gaan verdienen. Dat wordt geen simpel proces. Daarom wil ik hier een oproep doen voor een goed gecoördineerde aandacht voor alle schakels in ons onderwijssysteem, dus waar leerlingen een overstap moeten maken, en waarbij wiskunde en alle bijbehorende vaardigheden een waardige plaats moeten hebben.

Commissies

Om de ernst van alle dynamiek zo zichtbaar mogelijk te maken wordt in dit artikel een aantal zaken beschreven waarmee men zoal bezig is. Bij die bewegingen gaat het niet altijd om het streven naar inhoudelijke en concrete verbeteringen, maar vaak ook om de consequenties van een specifiek soort strategisch handelen van bepaalde belanghebbende groeperingen. Het is juist daarom van groot belang op korte termijn gezamenlijk alle dynamiek in beeld te brengen en met de betrokken partijen binnen een heldere structuur met elkaar inhoudelijk in gesprek te gaan en vooral te blijven ten aanzien van hanteerbare kaders voor afstemming en samenwerking. Zo komen er twee belangrijke nieuwe commissies voor de havo/vwo-profielen, één voor 'maatschappij' en één voor 'natuur'. De eerste commissie kan gaan kijken naar de gewenste inhoud van wiskunde-A en (belangrijk voor het vervolgonderwijs) wiskunde-AB op het snijvlak van E&M en N&G. De andere commissie mag N&G en N&T nader onder de loep gaan nemen en dient te onderzoeken of er behoefte bestaat aan een nieuw 'bètavak', op termijn onder te brengen in N&T. Dit alles brengt natuurlijk een 'horizontaal' overleg op gang binnen het voortgezet onderwijs, om alle vakken binnen een bepaald profiel op elkaar af te stemmen. Maar er is ook een 'verticaal' overleg nodig waarbij dit wordingsproces rond zo'n nieuw vak en de rest van de profielen tevens plaatsvindt binnen het 'ketendenken', in samenspraak en afstemming met het hoger onderwijs. Dat die sector in twee componenten

uiteenvalt - hbo en wo - is overigens wel lastig, maar daarvoor kan met enige goede wil wel een werkbare constructie worden bedacht.

Keten-dynamiek

Met deze commissies zijn we er dus absoluut nog niet. Boven, onder, links en rechts van de schakel vo-ho gebeurt binnen een keten van overgangen ook nog van alles. Daar heb je simpelweg rekening mee te houden, want alles hangt in meer of mindere mate met elkaar samen. In ieder geval dient men ernaar te kijken en in te schatten wat de mogelijke consequenties zijn van veranderingen, waar dan ook. Kortom, de aanschaf (door OC&W?) van een helikopter met een groep inhoudelijke wiskundigen met een *overall view* op dit soort zaken, zou reuze handig zijn.

Maar ook een relativerende waarschuwing lijkt hier op zijn plaats. Een te nadrukkelijk streven naar afstemming kan ons gaan opbreken. Eenmaal in de fase aangekomen dat over en weer overeenstemming is bereikt, moeten er tegelijkertijd afspraken worden gemaakt over het onderhoud ervan. Afstemming schept namelijk verplichtingen om elkaar blijvend te informeren, samen veranderingen door te voeren en in voorkomend geval in goede harmonie afscheid van elkaar te nemen als ieders verplichtingen niet meer aan elkaar kunnen worden gekoppeld. Dus geen afstemming zonder een stringente procedure voor toekomstige aanpassingen.

Dynamische voorbeelden

Bij onderstaande zaken neem ik het hbo als uitvalbasis, al was het maar omdat ik daarin zelf werkzaam ben. Van daaruit valt al genoeg te zeggen over de lappen-deken aan onderwijsroutes en doorstroomarrangementen die we in de loop der jaren hebben gecreëerd.

Havo/vwo

Het havo/vwo mag zich gaan opmaken voor een nieuwe profielinvulling en bijbehorende structuur-aanpassingen, maar dient in de tussentijd nog gewoon aan de slag te zijn met de huidige aanpak, met alle onduidelijkheden van dien over de concrete status en invullingen van allerlei aanpassingen. Maar het aardige is natuurlijk dat de komende periode kan worden gebruikt om afspraken met elkaar te maken over de nieuwe onderwerpen en de aanpak daarvoor. Maar hebben we wel tijd voor elkaar? In de afgelopen jaren is mij gebleken dat alle docenten en functionarissen in het havo/vwo-veld de handen meer dan vol hebben aan de verzorging van het studiehuis en

het permanent bijstellen van vakken. Dat er dus geen ruimte is om ook nog eens intensief met het hbo en wo te gaan overleggen, is zonder meer begrijpelijk – tenzij er een zeer sterke prikkel is om daar energie in te stoppen. Maar de perfecte prikkel heb ik in mijn functie (en ik mag best zelf initiatieven in die richting nemen) nog niet kunnen ontdekken. Het is dus geen verwijt – alleen een constatering, ondanks alle goede bedoelingen en toezeggingen van rectoren en profielcoördinatoren. Laten we overigens nog maar even niets zeggen over plannen om te komen tot vraaggestuurde vo-opleidingen en het afschaffen van examens ten faveure van hogeschool-assessments. Dat zijn experimentele vergezichten waarvoor hopelijk veel ontwikkeltijd wordt uitgetrokken, want anders...

Mbo

Het mbo is een verhaal apart. Daarom hier kort wat zaken die zonder meer aandacht behoeven en verder in een volgend nummer apart zullen worden uitgewerkt. Zo waren er vroeger landelijke examens (iedereen wist wat er werd gevraagd) en mochten de hogescholen nog tot voor kort toelatingseisen stellen voor hun opleidingen – en wiskunde zat daar vaak bij, zonder discussie over het legitieme karakter daarvan. Nu is alles zo'n beetje vrij, mede als gevolg van het feit dat het mbo dubbelkwalificerend dient te zijn als voor-opleiding voor zowel de arbeidsmarkt als het hbo. Er zijn toentertijd wel zogeheten hbo-doorstroom-deelkwalificaties voor het mbo opgesteld, maar vanwege de onduidelijke positie ervan hebben ze zich geen echte bruikbare plek verworven. Veel economie- en techniekleerlingen kiezen niet voor de 'lastige' doorstroomdeelkwalificatie. Bovendien zagen en zien veel ROC's geen brood in het aanbieden van die onderdelen vanwege de te kleine groepen, waardoor vervolgens hogescholen zich genoodzaakt zagen om een specifiek doorstroomprogramma te gaan ontwikkelen met ROC's en daarvan de (meeste) kosten voor haar rekening te nemen.

Maar ook dat is en blijft een wankel evenwicht. Uit eigen (familie)ervaring is mij bekend dat twee jaar geleden bij een technische hbo-opleiding in het midden des lands van de 65 instromende mbo'ers er slechts 15 extra wiskunde in het laatste mbo-jaar hadden gevolgd. En daarom moesten twee volle klassen aan de slag met het wiskunde-nul-boek, met allerlei basisstof waarvan je vroeger als hbo-docent mocht veronderstellen dat een mbo'er er gemakkelijk mee kon gaan goochelen. Want waarom zou anders iemand techniek studeren en naar het hbo gaan? En die tijd voor het inhalen van de wiskunde-achterstand gaat weer ten koste van andere vakken. En dan moeten die onderwerpen ook nog eens erg snel worden gedaan... met alle gevolgen van dien.

Vmbo en havo-4

Een andere, wellicht wat minder bekende en niet zo opvallende aansluiting, is die vanuit het vmbo naar havo-4. Moest je op de mavo wiskunde hebben gedaan omdat in elk havo-profiel een vorm van wiskunde

voorkomt, nu is die verplichting een tijdje geleden afgeschaft. De reden daarvoor was dat er voldoende havo-scholen zijn die een soort opvangprogramma hebben ingesteld aan het begin van havo-4. Dat was op zichzelf geen problemen, gezien de zeer sterk teruglopende groep met dergelijke doorstromers en de sterke motivatie om die lastige weg te gaan volgen. Maar je hebt dus wel een bepaald type leerling nodig om de achterstanden met wiskunde en mogelijk andere vakken (denk aan de talen) te kunnen wegwerken. Maar nu trekt in bepaalde regio's de doorstroom weer aan omdat men niet naar het mbo i.c. een ROC wil vanwege de sfeer en aanpak aldaar. Dat lijkt een non-reden, maar bepaalde gevoelens laten zich niet sturen. De vraag is vervolgens gerechtvaardigd of deze keuze wel verstandig is, maar intussen wordt er een stevig beroep op de havo-scholen gedaan om de aansluiting te stroomlijnen. In de wetenschap dat het de tweede fase van het havo niet veel speling in de tijd biedt, zal de druk op alle partijen erg groot zijn.

Basisvorming en Tweede fase

Een steeds belangrijker wordende schakel is die tussen tweede fase van het havo/vwo en de basisvorming (of moet je weer 'onderbouw' zeggen?). Nu liggen er ook plannen op tafel voor de 'vernieuwde basisvorming' waarover een speciale taakgroep in juli 2004 met haar eindrapport komt. Met enig optimisme kan worden gesteld dat er mogelijkheden zijn om via maatwerk-programma's te komen tot een niveauverhoging, al is dit sterk afhankelijk van de gekozen insteek vanuit de school zelf.

Toch valt te constateren dat er een soort waterscheiding bestaat tussen de docenten die in de eerste klassen lesgeven en degenen die de leerlingen naar het eindexamen mogen brengen. De verantwoordelijkheden liggen daarbij gescheiden, hetgeen kan inhouden dat in havo-4 – om het grootste knelpunt te noemen – eerst nog een groot aantal basisvaardigheden de revue dient te passeren alvorens aan het echte werk kan worden begonnen. Dat het examen ruim een jaar later al voor de deur (van de hogeschool) staat, legt een welhaast ondraaglijke druk op de schouders van de betrokken docenten.

Hbo en wo

Dan komen we (uiteindelijk) ook nog eens aan de andere kant van de aansluiting terecht, oftewel bij het hbo en wo. Uit de media kan iedereen genoeg informatie putten over de grote vernieuwingsslag die het hoger onderwijs aan het doormaken is. Hogescholen en universiteiten zijn aan de ene kant daartoe gedwongen door de wetgeving, maar aan de andere kant is er sprake van een stevige drang in de richting van zelfstandig vormgegeven vernieuwingen vanwege de slag om de student. Ieder voor zich is men in volle vaart bezig met zaken als de verbreding van de bacheloropleidingen, de structurering van leerlijnen middels majors en minors, de formulering van einddoelen op basis van brede competenties en het afstemmen van hbo-bachelors op wo-masters.

Dit zijn allemaal zaken waarbij helaas toch voor een belangrijk deel de 'verplichting' om voort te bouwen op hetgeen in het secundair onderwijs gebeurt, uit het oog dreigt te worden verloren. De goede regio's niet te na gesproken, wordt veelal getracht een vernieuwingsslag te maken zonder te bezien wat de gevolgen zijn voor de gemiddelde instromende student. De gevolgen zullen ongetwijfeld over enige tijd zichtbaar worden. In een volgend artikel (dit stuk lijkt wel de start van een reeks te gaan worden) zal hierop nader worden ingegaan, met meer uitgewerkte voorbeelden.

Mbo en pabo

Een specifieke doorstroom zien we overigens vanuit het mbo naar de pabo, een route die steeds meer wordt gebruikt en leidt tot de (gewenste) sterke groei van het aantal pabo-studenten. Het mbo kent echter een gewilde mbo-vooropleiding in de zorg en welzijn die op niveau 3 is gepositioneerd. De hoeveelheid wiskunde binnen die opleiding is op één hand te tellen en dat leidt voor veel instromers in de pabo - via een aanvullend traject - tot een te lastige opgave. Ook weer uit eigen familie-ervaring heb ik dat mogen constateren, ondanks alle goede wil die zij toonde in combinatie met een sterke motivatie. De betrokken pabo had gelukkig om kwalitatieve redenen besloten dat het onderdeel rekenen toch maar wel aan het eind van de propedeuse moet zijn behaald in plaats van helemaal aan het eind van de opleiding - dus meerdere toetsen en herkansingen mochten niet baten. Jammer voor een best competent iemand, helaas niet geschikt voor 'juf'. Maar wellicht wel voor een functie als leraarondersteuner bij bepaalde onderdelen van de basisschool (en dus niet bij 'rekenen'!).

Deze lijst kan best gemakkelijk worden aangevuld met meerdere breekpunten binnen ons stelsel. Zo eisen veel economische masters bij universiteiten nog immer simpelweg een voldoende voor hun eigen verplichte wiskundetoets. Het is in ieder geval duidelijk dat we niet kunnen spreken van een situatie waarbij 'alles vanzelf wel goed komt'. Natuurlijk, de individuele leerling zal heus, net als nu, zijn of haar weg weten te vinden, maar op macroniveau mag toch wel worden gesproken van een onsamenvattend geheel. Daarbij valt niemand individueel op microniveau erg veel te verwijten, maar 'de rek is er uit' als het gaat om de mogelijkheden om te komen tot een bevredigende afstemming over en weer.

Toelatingseisen

Het is wellicht goed om toch ook nog even kort in te gaan op een zaak die in de eerste jaren van de nieuwe tweedefasedoorstroom veel kwaad bloed in het voortgezet onderwijs heeft gezet, nl. de beweging binnen het hoger onderwijs om de begineisen gaandeweg steeds verder te versoepelen. Vooral het wetenschappelijk onderwijs - maar ook delen van het hbo - krijgt ervan langs bij veel schooldecanen (en wiskundedocenten). Was in het begin nog het profiel N&T zonder meer noodzakelijk voor een technische studie, vervolgens kwam men met de maatregel om ook N&G als voorbereidend profiel toe te staan. Vanwege

allerlei nieuwe soorten technische opleidingen, veelal gemixt met richtingen in de gezondheidszorg, was dit nog wel te verklaren en te aanvaarden.

Maar dat vervolgens vanwege het verminderde aantal techniekstudenten het management van diverse instellingen ging roepen dat allerlei deficiënties ook nog in de propedeuse zouden kunnen worden gerepareerd, schoot de decanen danig in het verkeerde keelgat - met veel wiskundedocenten in hun slipstream. 'Is al die kennis met de bijgevoegde vaardigheden dan niet nodig voor de andere propedeusevakken?', viel al gauw te horen.

Breed onderzoek nodig

Een integrale herbezinning op het vak wiskunde, binnen het geheel van bètavakken en allerlei andere belangrijke vaardigheden, lijkt me van groot belang. In al z'n verschijningsvormen binnen de diverse onderdelen van het onderwijssysteem is wiskunde als vak niet iets dat kan worden afgedaan als 'noodzakelijk kwaad' en mag het dus niet worden gezien als een hobby van een groep sterk betrokken personen. Wiskunde is een kapstok waaraan je veel zaken kwijt kunt, en moet worden gezien als een onderwijs-instrument dat op veel manieren een bijdrage kan leveren aan de kennis- en competentie-ontwikkeling van iedereen binnen onze samenleving. Diezelfde samenleving verdient een goed onderzoek naar de afspraken die over en weer bij een overgang binnen het onderwijsstelsel nodig zijn om een leerling/student in een volgende fase van de 'loopbaan' de maximale slaagkans te bieden. Als het ministerie van OC&W het goed wil doen, laat men dan kiezen voor een inhoudelijke commissie die de positie van 'wiskunde' integraal van basisschool tot universiteit onder de loep kan nemen. Dus niet alleen de havo/vwo-profielen bij de kop pakken, want vooral de doorstroom mbo-hbo is duidelijk aan erosie onderhevig. Dat betekent afstemming over de diverse wetten heen, met respect voor elkaars positie en eigen verantwoordelijkheden. Maar ook afstemming die de belangen van koepel-organisaties overstijgt omdat het belang van het individu i.c. de leerling/student voorop staat.

De wiskundewerkgroep HOVO, voortgekomen uit een eerder artikel in Euclides (oktober 2003) over de aansluiting op het hoger onderwijs ho, zal over enige tijd een rapportje uitbrengen, waarin dit soort zaken zal worden meegenomen.

Input van de kant van de lezer via e-mail wordt nog steeds op prijs gesteld!

Over de auteur

Hans Daale (e-mailadres: daale-zwol@planet.nl) is redacteur van Euclides. Hij is werkzaam bij de HES Amsterdam in het afdelingsmanagement voor de financiële opleidingen zoals AC, BE en FSM. Tevens is hij betrokken bij het LICA (Landelijk Informatie- en expertiseCentrum Aansluiting vo-hbo).

BÈTA-PLUS OF BÈTA-MIN

Keuzes aan de school: kans of risico

[Swier Garst]

Op het 75-jarig jubileum van de NVvW sprak de minister over een terugtrekkende overheid. Blijkbaar waren ze het op het ministerie zat om al die circulaire te versturen. Vrijheid voor de scholen.

Vier jaar verder wordt duidelijk wat dat betekent. De basisvorming nieuwe stijl wordt er één waarbij scholen kunnen kiezen voor hun eigen didactische model. De Taakgroep Vernieuwde Basisvorming noemde haar rapport van maart 2003 dan ook: *'Basisvorming: keuzes aan de school'*.

De keuzevrijheid beperkt zich niet tot de basisvorming. Een andere vorm van vrijheid is de ontwikkeling van het FunctieWaarderingsSysteem (FUWASYS). De eerste stap die de school daarin moet maken is het formuleren van de 'missie' van de school. Veel is mogelijk. Een greep: topsportschool, tweetalig onderwijs, veel leerlingen een diploma of een zo hoog mogelijk niveau? Of een school met extra aandacht voor bèta?

Waarom niet? Meedoen aan allerlei mooie activiteiten als Olympiades en Kangoeroes is dan niet genoeg. Extra bèta betekent dan extra bèta voor alle vakken! Niet alleen het wiskundecurriculum het zware denkwerk laten opknappen.

Maar vrijheid van kiezen heeft gevolgen. Hoe ziet het schoolboek eruit? Past de serie bij de 'missie'? Of gaan we lespakketjes uitwisselen zoals de jeugd via internet aan zijn muziek komt? Is WisBase, de database van wiskundeproefwerken, daar het eerste voorbeeld van?

Vrijheid is mooi. Maar als er keuzes gemaakt worden, moet je zorgen dat je erbij bent. Wil je bèta-plus, dan moet je veel bestuurlijk werk binnen je school verzetten. Bèta-min komt vanzelf. Laat dat maar aan de politiek over.

Over de auteur

Swier Garst (e-mailadres: garst@planet.nl) is leraar wiskunde aan de RSG Goeree en Overflakkee te Middelharnis.

Aankondiging / Wiskundeonderwijs - Cross the border

Op 17 en 18 juni 2004 organiseert het Freudenthal Instituut in samenwerking met de universiteit van Duisburg-Essen een workshop voor Nederlandse en Duitse wiskundedocenten. Centraal in deze workshop staan twee videoregistraties van wiskundelessen, één uit Duitsland en één uit Nederland. Het bekijken en analyseren van deze videoregistraties zal aanleiding zijn om de verschillen in onderwijscultuur in kaart te brengen.

Het belooft een inspirerende confrontatie van twee onderwijsculturen te worden!

De workshop vindt plaats in Hotel Via Stenden in Kempen (omgeving Venlo; zie www.hotel-viastenden.de).

Aanvang 17 juni om 17:00 uur

Einde 18 juni om 17:00 uur

Aan deelname, overnachting en maaltijden zijn geen kosten verbonden.

U kunt zich aanmelden via www.uni-duisburg.de/FB11/DIDAKTIK/victa/

Voor nadere informatie kunt u zich wenden tot Paul Drijvers (e-mailadres: p.drijvers@fi.uu.nl).

GESPREKKEN MET SJAAK

De auteur, onderzoeker aan het Freudenthal Instituut, voerde regelmatig gesprekken met schoonmaker Sjaak over wiskundige onderwerpen. Aflevering 5, de laatste van deze serie. [Jan van den Brink]



FIGUUR 1

'Na mijn schooltijd'

Sjaak, nu 43 jaar, belandde na zijn BLO-school (zeg maar na zijn school voor 'speciaal onderwijs') in een autobedrijf. 'Puntjes bijstellen, olie verversen, lakwerk poetsen. Op een dag kreeg ik zelfs een extra maand loon. Maar werd wel meteen ontslagen. Ik was te langzaam. Toen de bouw in als timmerman. Ja, ik heb die truc nog geleerd om met drie latten een rechte hoek te maken. Maar ik ben hem nu ook weer kwijt. Zo'n jaar of twintig zit ik nu in het schoonmaakvak en werk onder begeleiding hier op het instituut. Iedereen doet hier aan wiskunde. Ik eigenlijk ook. Man, ik wis wat af!', lacht Sjaak, 'Maar wat is dat eigenlijk: wiskunde?' Ik vraag: 'Hoe handig kan jij de vloer dweilen? Waar begin je? Waar stop je? Welk spul werkt vlotjes? Ik noem maar wat punten.' Sjaak kijkt ervan op: 'Is dat wiskunde? Daar denk ik nou nooit aan, als ik de wc-pot lap.' Hij heeft blijkbaar niets aan enige reflectie. Het werkt maar verstorend op de uitvoering, versnipperd de aandacht, laat afstand nemen van het feitelijke schoonmaken. Maar ligt er dan niets tussen reflectie en handeling, vraag ik me af. Sjaak streeft een zekere 'handigheid' na, oefent elke dag om soepel en snel de pot of vloer schoon te krijgen, zonder erbij na te denken. 'Handigheid' nestelt in het schoonmaken zelf en vliegt niet boven het handelen uit, zoals reflectie. 'Schoonmaken gaat me beter af dan bijvoorbeeld schrijven of rekenen. Maar ik maak wel leuke gedichtjes', aldus Sjaak, 'met sinterklaas. Dan mag je fouten maken. Foutloos rekenen lukt me ook al niet.' Op de computer kun je je schrijffouten verbeteren, weet hij. Maar hoe voorkomt Sjaak zijn fouten in het rekenen van alledag?

Kortingen

'Een treinkaartje. Prijs 15 euro, maar wel met 40% korting. Is 10 euro genoeg voor zo'n kaartje met korting?' Ik vertel Sjaak over een film waarin die vraag aan voorbijgangers wordt gesteld. Hij herhaalt de getallen: 'Procenten, zeg je?' en haalt de schouders op. 'Op de film', vertel ik, 'zegt een man: 40% korting? Dan wordt de prijs iets meer dan de helft.' Sjaak veert op: 'Ja, maar dat is toch geen rekenen? Hij schàt maar zo'n beetje. Je moest het toch uitrekenen?' 'Maar zo deed hij het', verdedig ik de filmster. 'Zo kan ik het ook', zegt Sjaak verontwaardigd, 'de helft van vijftien. Dat is 12 en een half.' Hij rekent sterk op 't gehoor.

Hoort 'vijf' van 15 als eerste en neemt alleen daarvan de helft. Maar hij twijfelt: 'Of is het soms 2 en een half?' 'Nee, jij doet van die 15 alleen maar de helft van 5.' Sjaak corrigeert direct: 'Dan is het 7 en een half. Je hebt genoeg aan 10 euro voor dat kaartje.' En losjes voegt hij er aan toe: '8 euro is ook genoeg.' Maar dat is net een brug te ver. Het kaartje kostte niet de helft, maar 60% van €15, en dat is €9.

De volgende dag komt Sjaak op het onderwerp terug: 'Heb je dat gezien? Bij C&A hebben ze Vlaggetjesdag, uitverkoop. Met kortingen op de ramen. Er staat hoeveel je moet betalen en hoeveel korting je krijgt. Gewoon in euro's. Hoef je zelf niet meer te rekenen.'

'Zet getallen naar je hand'

Op een topografische kaart met roostercellen van 1 km bij 1 km (zie figuur 1) spelen we wat met coördinaten en afstanden. We geven elkaar aardige opdrachten, die echter door het rekenen soms worden gestoord. Sjaak bedenkt voor mij: 'Wat is de afstand Utrecht-Amersfoort?' Moeilijke opdracht, want Amersfoort staat niet op de kaart! In de legenda lees ik dat de x -coördinaat van Amersfoort '155 km' is. Dat schept een opening. Sjaak ziet me zwoegen en geeft me, bij wijze van hint, een (x,y) -positie op: '139 km bij 456 km. Daar kom je een leuk dingetje tegen.'

Op de rand van de kaart staat het antwoord: 'Amersfoort 17 km'. Maar is dat zo, wil ik nu weten. Is het vanaf hier (op $x = 139$ km) tot Amersfoort ($x = 155$ km) wel 17 km? Sjaak: 'Je moet doortellen.' Maar hoever? De opgave $155 - 139$ is door hem niet te doen. 'Maak van die 139 eens 140.' ($155 - 140$.) Sjaak reageert direct: 'Dan is het 15 km tot 155. Maar het moet 139 zijn, dus nog 16 km.' In één keer ratelt Sjaak door. Het is net of dat ene zetje de doorslag geeft. Had hij dat zelf niet kunnen vinden? We praten daarna verder over kronkelwegen en 'hemelsbreed', want 16 km is nog geen 17 km, en ontdekken dat in het eigenlijke onderwerp (de afstand Utrecht-Amersfoort) ook 'rek' zit, net als bij het soepele rekenen met ronde getallen. Dat soort rekenen kwam al eerder ter sprake. In onze gesprekken over de plaatselijke tijd van New York ('6 uur vroeger dan hier'; aflevering 1) stelt Sjaak: 'Zeg even dat het hier (hij kijkt op zijn horloge) 5 over 11 is. Dan is het in New York ...', maar het valt niet mee om 6 uren terug te tellen. Ik vroeg: 'Waarom niet gewoon: het is hier 12 uur? Dat

reken toch gemakkelijker!’ Sjaak: ‘Ja, dat is niet eens zo gek: 12 uur hier ... dan slapen ze daar.’

De ‘echte’ wereld doet zich soms erg exact in getallen aan ons voor, terwijl juist het rekenen voor Sjaak een stroef vak is. Hij kent het alleen als technisch cijferen, maar kan wel worden bewogen om ronde getallen te gebruiken om daarmee de situatie naar zijn hand te zetten en om het onderwerp waarom het ging, in de gaten te blijven houden. Bovendien kan dit ‘handige schatten’ zijn rekenen veraangename. ‘t Is een klein pleidooi om ‘schattend en handig rekenen’ in het speciaal onderwijs te beklemtonen. Maar Sjaak heeft nog meer pijlen op zijn boog, wat rekenen betreft. Als

een cowboy is hij omhangen met rekentuig....

Rekentuig

5 euro's. Hoeveel gulden is dat?

Het is nog in de tijd dat we heen en weer moesten springen tussen guldens en euro's.

‘Ik neem altijd het dubbele van

het aantal euro's’, zeg ik.

‘En ik dit’, reageert Sjaak en diept geheimzinnig een card op uit zijn zak. Het is een hologram. Een pracht ding (zie figuur 2). Als je de card kantelt, veranderen de guldens in euro's en omgekeerd. 2,20 NLG wordt 1 € en 220,4 NLG wordt 100 €. Ik toon Sjaak dat mijn ‘verdubbelingsregel’ ook op zijn card geldt en dat die voor 1 euro of voor 100 euro's hetzelfde oplevert. Sjaak: ‘Maar wel met wat meer cijfertjes voor de komma.’ ‘Gebruik je wel eens een *rekenmachine*?’, informeer ik. ‘Voor het grote werk neem ik wel eens een *calculator*’, geeft Sjaak toe, ‘maar voor het gewone werk heb ik dit ...’ en dit keer trekt hij met gepast bravoure zijn mobieltje en drukt op wat knoppen. Er zit een rekenmachine op! Sjaak heeft een *rekenmobieltje*.

Hoe zou het onderwijs moeten zijn?

Je kunt je afvragen wat er van onze leerlingen uit het speciaal onderwijs of praktijkonderwijs terechtkomt, nadat ze de school hebben verlaten. En hoe het genoten onderwijs eruit zag, gezien door de ogen van hen die het als leerling hebben gevolgd. De gesprekken met Sjaak geven over beide kwesties geen statistische, maar wel een kwalitatieve indruk.

Met inventieve rekenmiddelen werd op school getracht hem het traditionele cijferen bij te brengen. Gezien de gesprekken met Sjaak heeft dat weinig zoden aan de dijk gezet. Hij redt zich op andere manieren. Het is daarom zeer de vraag of je leerlingen wel een dienst bewijst met een liefderijke pedagogisch aanpak om het rekenen tot in de kleinste stapjes uit te walsen. Leidt het niet tot een ‘debilisering’ van het rekenen en de wiskunde?

Sjaak heeft, zoals veel leerlingen in het speciaal onderwijs, unieke vaardigheden en interesses: hij is professioneel drummer, gek op instrumenten en op onderwerpen uit de wiskundige natuur- en aardrijkskunde (zon, maan, plaatselijke tijd, enzovoorts). Misschien kan het (wiskunde)onderwijs daarop aansluiten? De leerling zou toch ook een stem

moeten hebben in wat hij of zij zelf wil verwerven. Wiskunde met zijn talloze oplossingsstrategieën biedt daartoe bij uitstek een gelegenheid.

Maar hoe kom je tegemoet aan al die individuele verschillen?

Vraag het Sjaak!

Denkend aan school spreekt hij met groot genoegen over de vele films: ‘Elke dag een natuurfilm. Heerlijk.’ Daarnaast zijn hem ‘*de apparaten*’ bijgebleven: het filmapparaat, de tv, het fototoestel, de ‘calculator’. Ze roepen bij Sjaak een soort ‘transfer’ wakker: handelingen op een bekend apparaat geven aanwijzingen voor het gebruik van een nog onbekende ‘black box’, zoals de computer, zijn mobieltje, de gps. Praktisch en handig, die kennis, die zich steeds verder uitbreidt over verschillende instrumenten.

Een ander interessant gebied voor het onderwijs vormen de *hobby's van leerlingen*. In een hobby, Sjaak drumde al op jonge leeftijd, is altijd wel een mathematisch tintje te vinden en kan de onderwijsgevende de professorsmuts opzetten en de leerling, baas over zijn onderwerp, aan de tand voelen. Natuurlijk, Sjaak vond het niet leuk dat ik kritiek op ‘zijn’ muziek had; maar samen ontdekten we wel dat bijvoorbeeld de 3/4-maat meer overeenstemt met de rekenbreuk 1/3, dan met de breuk 3/4 (aflevering 4). Onze discussie leidde, zowel bij hem als bij mij, tot een nieuw inzicht in breuken. Over deze grootse thema's, zoals ‘muziek en wiskunde’, kunnen onze leerlingen bijvoorbeeld een voordracht houden die niet voor de poes is. Voor de leraar wiskunde is het echter geen gemakkelijke taak. Hij of zij kan demonstreren dat ook een leraar soms moeizaam moet zoeken bij vraagstukken. Bij het ene hobbythema lukt dat beter dan bij het andere. Maar met zo'n toepassingsgerichte vakhouding doe je als onderwijsgevende recht aan de leerling en aan het vak.

Sjaak en ik moesten samen maar eens op zoek gaan naar toepassingsgerichte wiskunde voor schoonmakers: welke vraagstukken ontmoeten ze? Welke wiskunde steekt daarin? Maar ik twijfel. Wordt het wel gewaardeerd, een wiskundige reflectie op werk dat je doet? Neemt dat niet teveel tijd? Het gaat immers om snel en handig een wc-pot schoon te maken, zonder erbij na te denken. Hoe het ook zij, een week later geeft Sjaak me een hand ten afscheid. Hij is ontslagen. Te vaak nagedacht?

Noot

De andere vier afleveringen van de serie ‘Gesprekken met Sjaak’ zijn te vinden in de nummers 2, 3, 5 en 6 van deze jaargang.

Over de auteur

Dr. Jan van den Brink (e-mailadres: janvdb@fi.uu.nl) was onderwijzer, studeerde wiskunde, en is werkzaam als ontwerper/onderzoeker van reken- en wiskundeonderwijs aan 4- tot 18-jarigen aan het Freudenthal instituut. Zijn belangstelling gaat vooral uit naar wiskunde die ontdekt of uitgevonden wordt door lerenden, en naar het ontwerpen en onderzoeken van daarbij passend onderwijs.

FIGUUR 2



Puzzel 797 - Twee telproblemen

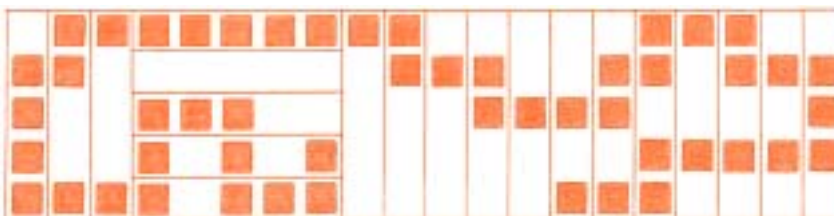
Een rechthoek van 3×6 kan op vier manieren worden bedekt of betegeld met zes reepjes van 1×3 (zie figuur 1). Bedekkingen die door een draaiing in elkaar kunnen overgaan, worden blijkbaar niet als verschillend geteld. Het is de bedoeling dat u deze wijze van tellen ook in de opgaven toepast.

Deze puzzel is bedacht door de Amerikaanse ontwerper Scott Kim. Een oplossing ziet u in figuur 2.

FIGUUR 1



FIGUUR 2



Opgave 1

Bepaal het aantal bedekkingen van een rechthoek van 5×20 met 20 reepjes van 1×5 . Het gevraagde aantal kan worden bepaald zonder alle gevallen na te gaan, in het bijzonder: zonder een computer te gebruiken. Het kan zelfs op twee totaal verschillende manieren.

De tweede opgave lijkt sterk op de eerste, maar bevat een kleine complicatie.

Opgave 2

Bepaal het aantal bedekkingen van een rechthoek van 4×20 met 20 reepjes van 1×4 .

Met 20 reepjes van 1×5 is overigens een aardige puzzel te maken. Eerst worden de reepjes in vijf vierkante cellen verdeeld. Vervolgens worden deze cellen gekleurd en wel met twee kleuren, zeg oranje en wit, één kleur per cel. Het blijkt dat er precies 20 verschillende mogelijkheden zijn, waarbij twee kleuringen die door een draaiing van een stukje in elkaar kunnen overgaan als gelijk worden beschouwd. De bedoeling is om met de stukjes een rechthoek van 5×20 te betegelen zó dat de oranje cellen een doorlopende sliert vormen.

Oplossingen van de twee opgaven kunt u mailen naar a.gobel@wrs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.

Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.

De deadline is 1 juli 2004.

Veel plezier!

Oplossing 'Leefruimte voor de pentomino's'

De kleinst mogelijke rechthoek meet 11 bij 16; de kleinste oppervlakte is dus 176 eenheden. Dit minimum werd gevonden door zeven inzenders: D. Buijs, J. Verbakel, T. Afman, T. Notenboom, A. Verheul, W. Doyer en L. de Rooij. Twee inzenders kwamen tot 180 en één tot 182. In **figuur 3** zien we een optimale oplossing.

Het puzzelen gaat het handigst als je de pentomino's van een rand voorziet; **zie figuur 4** voor de F-pentomino en de vergrote versie. (Deze dikkerds doen me denken aan de dansers van het ballet 'Groosland'.) Met de vergrote stukjes kun je dan 'gewoon' puzzelen. Vijf inzenders pasten deze truc toe.

De ladder

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

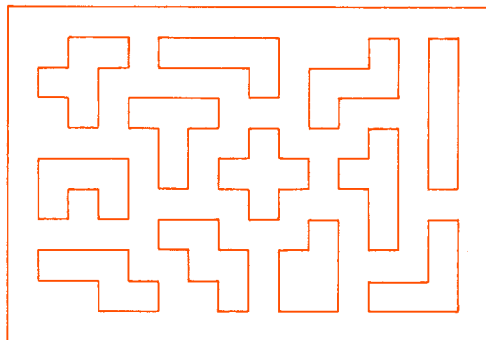
T. Afman 200,
D. Buijs 179,
L. de Rooij 140,
A. Verheul 139,
J. Meerhof 99,
L. van den Raadt 98,
T. Kool 96.

De complete ladderstand is te vinden op de website van de NVvW:

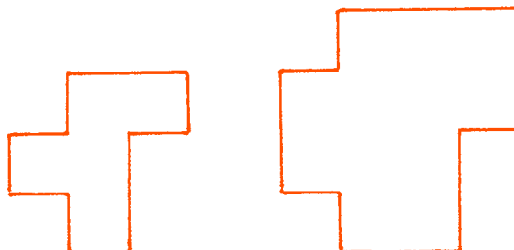
www.nvww.nl/euclladder.html

Die stand is de laatste waarin ook de behaalde punten zijn opgenomen van mensen die vijf keer achter elkaar niets inzonden.

FIGUUR 3



FIGUUR 4



Wobien Doyer stuurde drie oplossingen in. Zij vond eerst een oplossing met de hand en schakelde later de computer in om zekerheid te hebben dat 176 het minimum is, en ook met de hoop het aantal oplossingen te bepalen. Dat laatste is haar niet gelukt. Maar de 10 oplossingen die ik heb gezien (inclusief de mijne), zijn allemaal verschillend! Dit doet vermoeden dat er wellicht honderden oplossingen zijn.

Laatste nieuws: Wobien heeft haar programma versneld en vond in één nacht 5895 oplossingen! Zij schat het totale aantal op meer dan 20000.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundel-
docenten toegankelijke en interessante
bijeenkomsten worden opgenomen.

Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo
spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofd-
redacteur. Hieronder treft u de verschijnings-
data aan van Euclides in de lopende jaargang.
Achter de verschijningsdata is de deadline voor
het inzenden van mededelingen vermeld.

Doorgeven kan ook via e-mail:

redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
8	24 juni 2004	11 mei 2004

Examens

dinsdag 25 mei – vwo B1/B12

woensdag 26 mei – vmbo BB, havo A12

vrijdag 28 mei – vmbo TGK

dinsdag 1 juni – vwo A1/A12

donderdag 3 juni – havo B1/B12

Examenbesprekingen

vmbo TGK – woensdag 2 juni

havo A12 – vrijdag 28 mei

havo B1/B12 – maandag 7 juni

vwo A1/A12 – donderdag 3 juni

vwo B1/B12 – donderdag 27 mei

Zie pagina 288 in Euclides 79-6.

Tot en met 26 september, Leiden

Tentoonstelling 'Goochelen met getallen'

Organisatie Museum Boerhaave

Zie pagina 302 in dit nummer.

vrijdag 28 mei

Panama voorjaarsdag /

NVORWO-jaarvergadering

Organisatie FI en NVORWO

9 juni t/m 11 juni

Onderwijs Research Dagen 2004

Organisatie Universiteit Utrecht

1 en 2 juli, Oostende (België)

12e congres van de VVWL

Organisatie VVWL

19 en 20 augustus, Oostende (België)

T³ Europe Symposium

Organisatie T³-Vlaanderen

27 en 28 augustus, Amsterdam

3 en 4 september, Eindhoven

Vakantiecursus 2004

Organisatie CWI

Zie ook pagina 278 in Euclides 79-6.

zaterdag 6 november

Jaarvergadering/studiedag 2004

Organisatie NVvW

vrijdag 26 november

Wiskunde A-lympiade / Wiskunde B-dag

Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook

www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie

www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie

www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek

2. Perspectief, hoe moet je dat zien?

3. Schatten, hoe doe je dat?

4. De Gulden Snede

5. Poisson, de Pruisen en de Lotto

6. Pi

7. De laatste stelling van Fermat

8. Verkiezingen, een web van paradoxen

9. De Veelzijdigheid van Bollen

10. Fractals

11. Schuiven met auto's, munten en bollen

12. Spelen met gehelen

13. Wiskunde in de Islam

14. Grafen in de praktijk

15. De juiste toon

16. Chaos en orde

17. Christiaan Huygens

* Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides

(voor zover voorradig) kunnen besteld worden
bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* Wisforta - wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten

havo en vwo, de tabellen van de binomiale en
de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* Honderd jaar Wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW.

Het boek is met een bestelformulier te bestellen
op de website van de NVvW

(<http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html>).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:

www.nvvw.nl/Publicaties2.html

[Rienk Vermij, Hanne van Dijk en Carolien Reus]

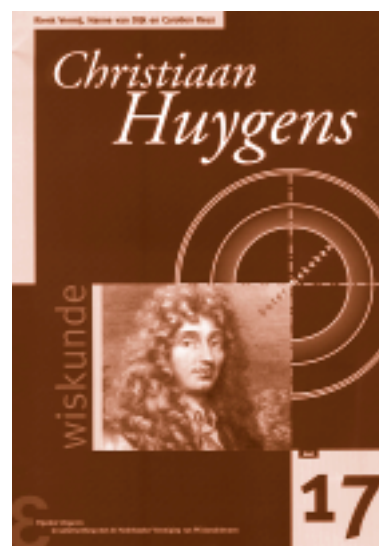
Zebra 17

Christiaan Huygens

Christiaan Huygens (1629-1695), zoon van de bekende dichter en staatsman Constantijn Huygens, werd in het midden van de 17e eeuw beschouwd als Europa's grootste wiskundige en natuurwetenschapper. Hij was een geniale onderzoeker die zich zowel met de theorie als de praktijk bezighield. Zo bedacht hij de verklaring voor de ringen van Saturnus en formuleerde het golfkarakter van het licht; ook was hij lenzenslijper en vond hij de slingerklok uit. Doordat hij wiskundig redeneren en natuurkundig inzicht combineerde, was hij een van de eerste moderne geleerden.

Deze tekst geeft inzicht in zijn leven en werk, de opdrachten zijn door zijn werk geïnspireerd.

ISBN 90 5041 082 0



Prijs voor leden van de NVvW: € 8,00 (incl. verzendkosten); bestellingen via

girorekening 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven, Utrecht.

Prijs voor leden van de NVvW op bijeenkomsten: € 6,00.

Prijs voor niet-leden: € 8,00 (in de betere boekhandel).

Zie ook: www.epsilon-uitgaven.nl



Epsilon Uitgaven

in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Wilt u:

- Onderwijsverbetering gecombineerd met werkdrukvermindering?
- Ook eens proefwerken, behorende bij een andere methode, inzien?
- Uitgeteste toetsen gebruiken?
- Schoolexamens van andere collega's bekijken?
- CSE's in WORD-formaat downloaden?
- 24 uur per dag de beschikking hebben over meer dan 1000 toetsen?
- Bij problemen met software, GR, e.d. deskundigen raadplegen?
- Advies krijgen bij andere problemen?
- Uitwerkingen bij bestaande toetsen en verschillende Zebra-deeltjes?
- Uitgewerkte Praktische Opdrachten afdrukken?
- Ontwikkeld lesmateriaal en/of files bij wiskundesoftware downloaden?
- Met onze Losse Opgaven Pagina's verantwoorde toetsen samenstellen?



WisBase

Surf dan naar **www.wisbase.com**

Download het inschrijfformulier en meldt u aan als deelnemer.

Instapvoorwaarde: inleveren van 3 originele toetsen.

Inlichtingen:
Secretariaat:

info@wisbase.com
J. Brasserstraat 26
4333 MB Middelburg

**‘Wilt u meewerken aan
hoogwaardige leermiddelen voor
het vak wiskunde?’**

Auteur Wiskunde m/v

Wolters-Noordhoff BV ontwikkelt uitgaven voor het onderwijs. Het is een inspirerend en boeiend bedrijf met een rijke historie en een open oog voor de toekomst. Creatief ondernemerschap en constructief teamwork bepalen het werkklimaat.

Er werken circa 500 mensen bij Wolters-Noordhoff. Het bedrijf is gevestigd in Groningen en Houten en bestaat uit een aantal units en een relatief kleine staf. De business units houden zich bezig met de ontwikkeling en de marketing van producten. Zij worden daarbij ondersteund door de service units.

Wolters-Noordhoff is onderdeel van Wolters Kluwer. Wolters Kluwer richt haar activiteiten op het uitgeven van informatie voor de overheid, bedrijven, instellingen, scholen en individuele beroepsbeoefenaren in een groot aantal vakgebieden. In Nederland werken circa 4000 personeelsleden voor de verschillende bedrijven en werkmaatschappijen.

Wolters-Noordhoff heeft een grote traditie in het ontwikkelen van leermiddelen voor het wiskunde onderwijs. De methoden *Moderne wiskunde* en *Netwerk* omvatten een rijk assortiment van leermiddelen bestaande uit leer-, werk- en antwoordenboeken, proefwerkbundels en ICT. Voor het ontwikkelen van de nieuwe edities van zowel *Moderne wiskunde* en *Netwerk* is Wolters-Noordhoff op zoek naar auteurs.

omschrijving

Als auteur ontwikkelt u kwalitatief hoogwaardige leermiddelen voor het vak wiskunde. In samenwerking met andere auteurs wordt er meegewerkt aan de vernieuwing van de betreffende methode. Deze vernieuwing bestaat uit de herziening van de bestaande materiaal en het ontwikkelen van educatieve software.

profiel

U bent werkzaam (geweest) in het Voortgezet Onderwijs in het vak wiskunde.
U heeft ervaring met het ontwikkelen van leermiddelen en u bent bereid zich hierin verder te specialiseren.
U kunt op basis van een concept leermiddelen ontwikkelen en bent in staat om commentaren van collega-auteurs te verwerken. Ook kunt u op gedetailleerd niveau commentaar leveren op het werk van andere auteurs. U bent bereid om maandelijks te overleggen met collega-auteurs op een centrale plaats in het land.

aanbod

Wij bieden u de mogelijkheid om in een inspirerend team van auteurs te werken aan toekomstgerichte materialen voor het onderwijs. We bieden u een auteurscursus en begeleiding. De vergoeding vindt plaats op royalty-basis.

aanmelding

U kunt uw interesse kenbaar maken door een cv met beknopte motivatie te sturen aan Wolters-Noordhoff BV, t.a.v. Dieuwke Rosema, Postbus 58, 9700 MB Groningen. E-mail d.rosema@wolters.nl

Wolters-Noordhoff ... ervaring met toekomst