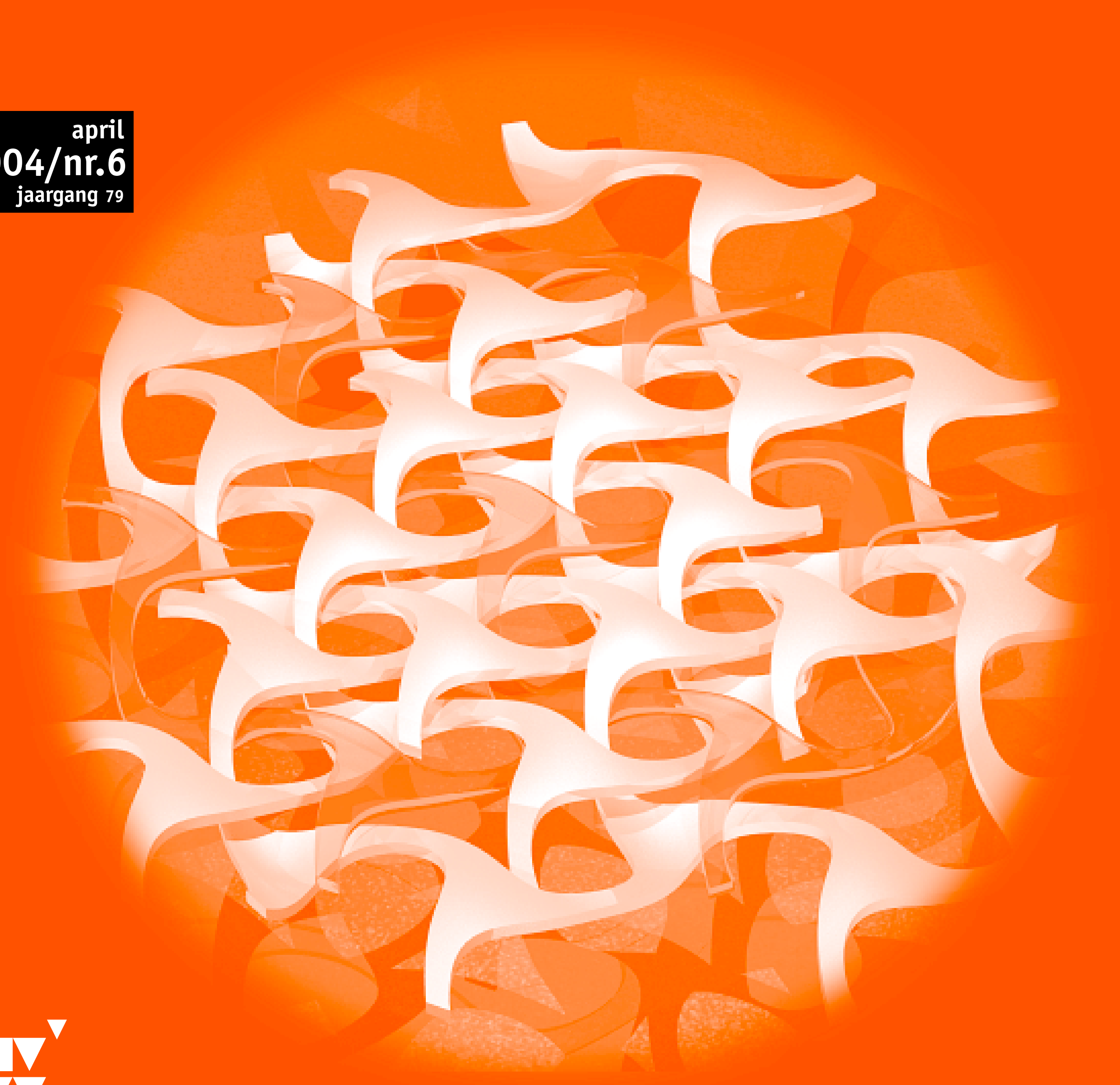
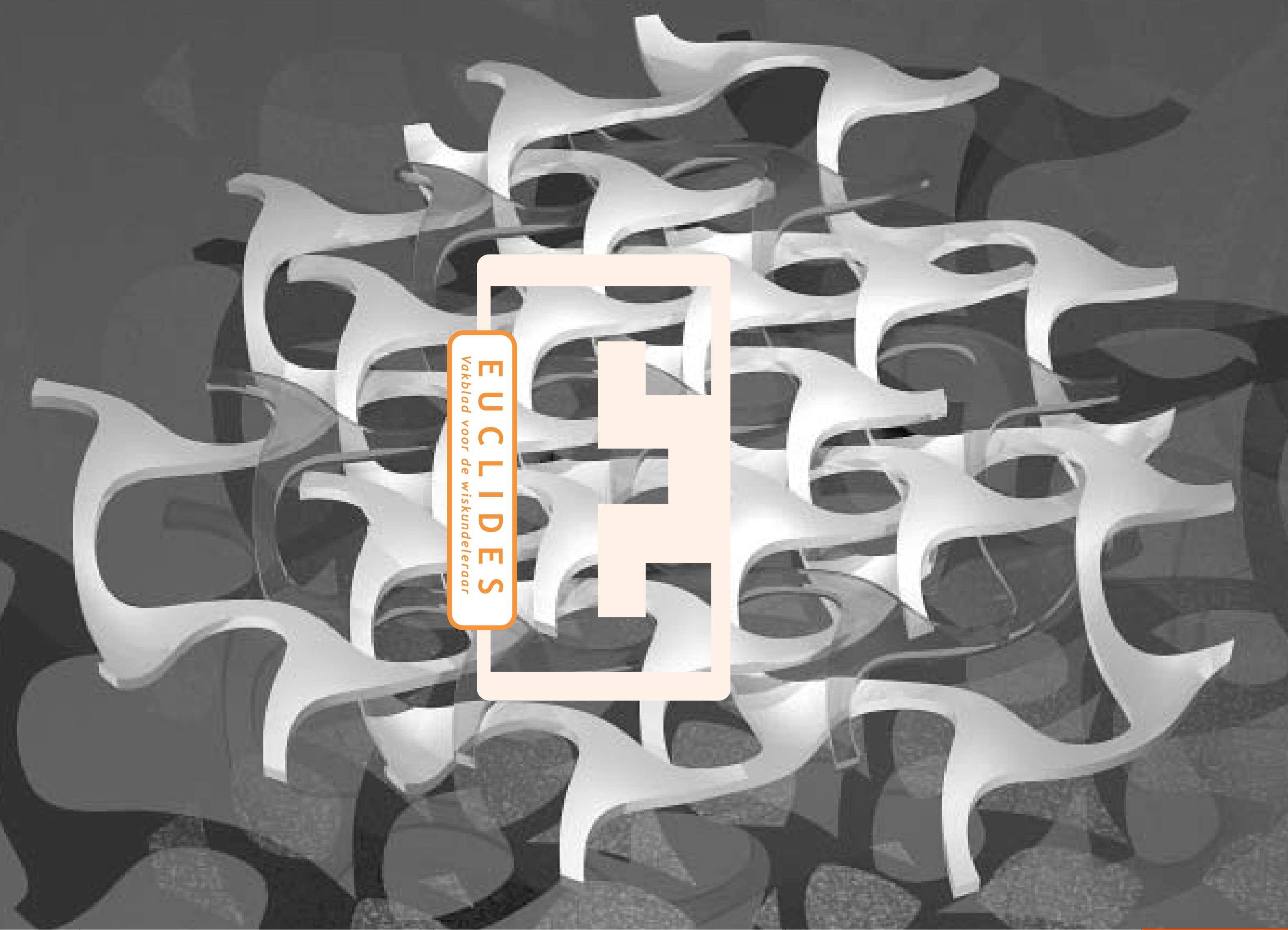
EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

Tangle
Breien
Rubrics
Examenbesprekingen

april
2004/nr.6
jaargang 79



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Rinus Roelofs, Hengelo
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 42,50
Studentleden: € 22,50
Gepensioneerden: € 27,50
Leden van de VVWL: € 27,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 27,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 47,50
Instituten en scholen: € 127,50
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Willem Maas
Molenveld 104, 2490 Balen, België
e-mail: w.maas@nvvw.nl
tel. vanuit Nederland: 003214814527
fax: 003214813753

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

6

april 2004 JAARGANG 79

INHOUD

253
Van de redactietafel
[Marja Bos]

254
Bos en Lepoeter
[Harm Jan Smid]

260
Wiskunde B-dag 2003
[Wilbert Geijs]

266
Breien en andere notatiezonden
[Ameling Algra]

269
40 jaar geleden
[Martinus van Hoorn]

270
Rubrics
[Lambrecht Spijkerboer, Patricia Straatman]

273
Verschenen

274
Re:cursief / Chebyshev-polynomen
[Rob Bosch]

276
Het belang van ijs eten
[Victor Thomasse]

278
Vakantiecursus 2003
[Gert de Kleuver]

280
Boekbespreking
[Klaske Blom]

282
Boekbespreking
[Ernst Lambeck]

284
Gesprekken met Sjaak (4)
[Jan van den Brink]

286
Aankondiging

287
Van de bestuurstafel
[Marian Kollenveld]

288
Examenbesprekingen 2004
[Conny Gaykema]

289
Nieuws van het Wereldwiskunde Fonds
[Ger Limpens]

290
Recreatie
[Frits Göbel]

292
Servicepagina

Aan dit nummer werkten verder mee:
Peter Boelens, Chris van der Heijden en Jan Meerhof.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

In dit nummer

Vorig jaar leidden de wijzigingen in de correctievoorschriften bij de vmbo-examens wiskunde tot veel discussie. Het weglaten van tussenstappen in berekeningen bleek niet te leiden tot puntenaftrek, en BB-kandidaten werden niet meer afgestraft voor notatiefouten zoals het 'breien'. Niet iedere docent was daar even gelukkig mee. Ameling Algra licht de CEVO-beslissingen toe.
Een ander lastig punt is de beoordeling van praktische opdrachten en andere leerlingproducten waarin algemene vaardigheden een rol spelen. Patricia Straatman en Lambrecht Spijkerboer beschrijven de 'rubric', een hulpmiddel dat niet alleen als beoordelingsinstrument bedoeld is, maar ook de *leerling* een duidelijk handvat biedt bij het werken aan de opdracht.
Op de Verenigingspagina's vindt u het jaarlijkse overzicht van tijden en locaties van de regionale examenbesprekingen.
En op de Bestuurstafel op bladzijde 287 ligt een bijdrage van NVvW-voorzitter Marian Kollenveld over onder meer de stand van zaken met betrekking tot de herinrichting van de Tweede Fase.
Maar er is nog veel meer te lezen in dit nummer.
Wilbert Geijs zag leerlingen spelen met elleboogjes, en doet verslag.
Victor Thomasse ontdekte dat de meisjes die, dwars door zijn uitleg heen, brutaalweg doorkletsten over ijs, een stuk slimmer waren dan je zo zou denken.
Harm Jan Smid plaatst de hedendaags-aandoende meetkundeboeken uit de 50er en 60er jaren van Bos en Lepoeter in een historische context van veranderend wiskundeonderwijs. Na een lange periode waarin 'frontaal' onderwijs domineerde, wilden zij de leerlingen weer de gelegenheid bieden tot zelfstandig werken. Om dit mogelijk te maken, kregen probleemaanpak en het leren bewijzen *expliciet* aandacht in hun boeken. Bos en Lepoeter zagen overigens ook nog steeds een belangrijke rol weggelegd voor klassikale momenten; zij hadden wel in de gaten dat met zelfwerkzaamheid alléén er niet altijd evenveel geleerd kan worden.

Zelfwerkzaamheid?

Immers, er zijn niet zoveel leerlingen die uit zichzelf stilstaan bij datgene wat er geleerd kan worden van de gemaakte opgaven. Als het ene na het andere sommetje snel en oppervlakkig wordt doorgewerkt, zonder iemand die dóórvraagt, zonder ingelaste reflectie, dan wordt er weinig diepgang bereikt. Veel gedaan, weinig geleerd...
Die broodnodige bezinning op de leerstof zul je als docent zelf moeten *organiseren* – bijvoorbeeld via doelgerichte werkvormen. Natúúrlijk moet de leerling ook regelmatig in z'n eentje aan de slag, natuurlijk is niet voor elke leerling eenzelfde aanpak even succesvol, maar een goedgeorganiseerde interactie met medeleerlingen en/of docent dwingt dóórdenken af, en kan aldus leiden tot meer diepgang en een betere verwerking van de leerstof.

Roelofs: 'Vier lagen'

Het omslagontwerp van Rinus Roelofs bestaat deze keer uit een verweven rooster van vier identieke lagen. De lagen zelf zijn ontwikkeld vanuit een regelmatige vlakverdeling. In plaats van de tegels zijn hier echter de tussenliggende lijnen (de voegen) gebruikt, waardoor de structuren met gaten zijn ontstaan.

www.wiskundeonderwijs.nl

Heeft u de 'Wiskundeonderwijs Webwijzer' al bekeken? Via deze nieuwe site, *www.wiskundeonderwijs.nl*, is informatie en materiaal op de diverse niet-commerciële wiskunde(onderwijs)-websites toegankelijker gemaakt voor zowel leerlingen als docenten. Een uitstekend initiatief!

Wim Bos

BOS EN LEPOETER

Of: De terugkeer der zelfwerkzaamheid

[Harm Jan Smid]

Inleiding

Het is een gemeenplaats om te zeggen dat het wiskundeonderwijs van nu totaal verschilt van het onderwijs van vijftig jaar geleden. Toch is dat niet echt vanzelfsprekend. Het (wiskunde)onderwijs rond 1950 verschilde helemaal niet zo sterk van dat van 1900. Waarom is er de afgelopen tientallen jaren dan wel zo veel veranderd?
In dit artikel wil ik iets laten zien van de beginfase van dat veranderingsproces. Dan moeten we terug naar de jaren vijftig van de vorige eeuw, toen alles zo op het oog nog bij het oude was. Toch waren er toen al ontwikkelingen gaande die, achteraf gezien, op die veranderingen vooruit liepen. Een van die ontwikkelingen was het succesverhaal van de wiskundeboeken van Wim Bos en Paul Lepoeter. Die boeken hebben allerlei interessante kenmerken, waarvan de belangrijkste misschien wel is, dat leerlingen er heel goed zelfstandig uit konden werken. Dat is nu vanzelfsprekend, maar toen iets nieuws. Die boeken pasten bovendien perfect bij het toen bestaande programma en werden op tientallen scholen, door 'gewone' leraren gebruikt. Ze vormden daardoor een brug tussen bevlogen onderwijsvernieuwers aan de ene kant en de gewone klassepraktijk aan de andere kant. Dit artikel geeft daarom niet alleen een aardig stukje geschiedenis van het wiskundeonderwijs, maar laat ook iets zien van de opkomst van een werkvorm die nu algemeen aanvaard is, maar dat lang niet altijd was.

Een stukje geschiedenis

Er zijn natuurlijk allerlei redenen aan te geven voor de veranderingen in het wiskundeonderwijs van de afgelopen decennia. De wiskunde is veranderd, vooral ook de rol van de wiskunde in de maatschappij, die maatschappij zelf is veranderd, en daarmee ook de leerlingen èn ook onze opvattingen over wat goed en slecht onderwijs is.
Er zijn echter ook motieven binnen het wiskunde-onderwijs zelf aan te geven voor al die grote veranderingen. Het wiskundeonderwijs van de jaren vijftig was het eindproduct van een ontwikkeling van ruim honderd jaar. Allerlei kenmerken van dat onderwijs waren daardoor tot het uiterste doorgedreven. Naast de verstarring in de leerstof was één van die kenmerken de dominante rol van de leraar, de geringe rol die het leerboek speelde, en daarmee samenhangend de beperkte mogelijkheden om leerlingen zelfstandig te laten werken.

Dat is zeker niet altijd zo geweest. Vóór de opkomst van het moderne onderwijs –die opkomst begint in de eerste helft van de negentiende eeuw– was het heel gewoon dat leerlingen zelfstandig werkten. Op vele zeventiende en achttiende-eeuwse tekeningen en schilderijen zijn klaslokalen te zien waarop leerlingen voor zich zelf bezig zijn - zij het soms wel met heel andere dingen dan de meester wenste! Strikt genomen is het woord 'klaslokaal' hier niet juist, want er was wel een lokaal, maar eigenlijk geen klas. Leerlingen van alle leeftijden zaten door elkaar heen in één grote ruimte. Ieder werkte voor zich zelf, en meldde zich alleen bij de meester om zijn werk te laten nazien. Klassikale uitleg was tot een minimum beperkt. Onderwijs bestond voor een belangrijk deel uit het leren nadoen van de voorbeelden uit het leerboek. Begrijpen van het hoe en waarom was niet nodig (zie figuur 1).

In de eerste helft van de negentiende eeuw veranderde dat. Onderwijs, ook wiskundeonderwijs, werd een instrument voor opvoeding en beschaving van kinderen. Leerlingen moesten niet meer alleen onbegrepen vaardigheden inoefenen, maar ook werkelijk begrijpen wat ze leerden. Het 'leerstof-jaarklassen'-systeem werd ingevoerd: kinderen van gelijke leeftijd worden bij elkaar geplaatst en werken een vooraf vastgesteld programma af. Het is een model dat al langer op de Latijnse scholen gebruikt werd, maar nu ook op de lagere scholen en de andere scholen voor voortgezet onderwijs werd ingevoerd. De grotere nadruk op het *begrijpen* van de stof door de leerlingen maakte een meer dominante rol van de onderwijzer bij de uitleg zo al niet noodzakelijk, dan toch wel voor de hand liggend. De invoering van het leerstof-jaarklassen-systeem maakte dat ook mogelijk. In het begin van de negentiende eeuw zie je nog wel pogingen om ook de uitleg via het boek te laten lopen, bijvoorbeeld door het boek in een dialoogvorm tussen leraar en leerling te schrijven. Maar dat soort vormen verdwenen vrij snel. In de loop van de negentiende en eerste helft van de twintigste eeuw werden de boeken steeds dunner en de rol van de leraar steeds belangrijker, zeker in het voortgezet onderwijs.

Een andere aanpak?

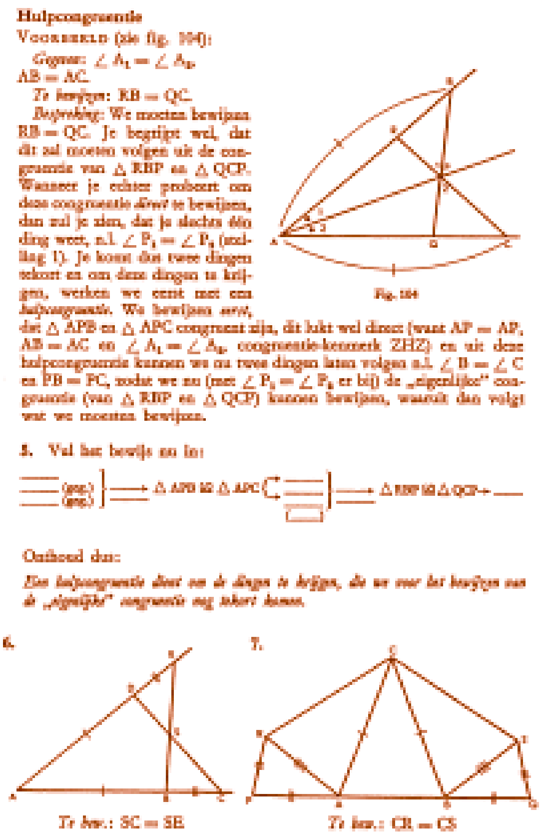
Natuurlijk voelde niet iedere docent zich daar even prettig bij. In Dalton- en Montessori-scholen werd het zelfstandig werken van leerlingen veel meer benadrukt. Maar wie op een 'gewone' school werkte, had met de toen veel gebruikte boeken een probleem als hij leerlingen meer zelfstandig wilde laten werken. Daar waren die boeken niet meer op geschreven. Achteraf kun je zeggen dat de door de leraar gedomineerde klassikale onderwijsvorm zó overheersend was geworden, dat het geen wonder is dat daar een reactie op kwam.
Een van die docenten die zich niet gelukkig voelde in dat systeem, was Paul Lepoeter, na de oorlog leraar wiskunde aan het Rijnlands Lyceum in Wassenaar. Al snel kreeg hij daar Wim Bos als collega, en samen ontwikkelden zij eigen leerboeken. Met die boeken, die een groot commercieel succes werden, was zelfstandig werken wèl mogelijk. Daarmee liep 'Bos&Lepoeter' vooruit op één van de ontwikkelingen die later, vanaf de jaren zeventig, het wiskundeonderwijs steeds meer zouden gaan bepalen. Op het symposium van de *Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs*[1] van 2003 is aandacht besteed aan die *Oude Meesters*, zoals Bos&Lepoeter, Van Hiele en Troelstra, die in de jaren vijftig voorop liepen met vernieuwingen. Voor dat

FIGUUR 1 Hoofdelijk onderwijs

symposium is Wim Bos door Fred Goffree uitgebreid geïnterviewd (Paul Lepoeter is jaren geleden overleden). Veel gegevens uit het vervolg zijn ontleend aan dat interview.
Een grappig toeval is dat Paul Lepoeter en Wim Bos elkaar als kleine jongetjes al kenden, maar na de lagere school het contact verloren tot ze elkaar weer als collega's op het Rijnlands Lyceum troffen. Lepoeter was in Indië geweest, had de oorlog in gevangenschap doorgebracht en was daar niet onbeschadigd uitgekomen. Hij wilde over die ervaringen nooit praten. Naar het oordeel van Bos was hij een zeer begaafde, maar gesloten en eenzame man. Hij voelde zich onzeker binnen het traditionele klassikale onderwijs, omdat hij naar zijn gevoel dan onvoldoende greep had op de resultaten van zijn leerlingen. Hij wilde dat zijn leerlingen voor zichzelf konden werken, zodat hij iedereen individueel kon begeleiden. Eigenlijk kon hij er niet tegen als er leerlingen in zijn klas zaten die de leerstof niet goed onder de knie kregen.
Toen Wim Bos op het Rijnlands ging werken, probeerde Lepoeter al materiaal voor zelfwerkzaamheid te ontwikkelen. Op aandrang van de rector ging Bos met hem samenwerken. Bos was een uitstekend leraar – alle oud-leerlingen van hem die ik gesproken heb, waren zeer lovend over hem – en kon ook als klassikaal docent prima uit de voeten. Maar Bos had al veel langer een pedagogisch/didactische belangstelling. Zo had hij bij zijn wiskundestudie als bijvak pedagogiek bij Kohnstamm gedaan en daarbij kennis gemaakt met het Montessori-onderwijs en de denk-psychologie van Selz. Otto Selz (1881-1943) was een Duitse leerpsycholoog die in 1939 – hij was joods – naar Nederland uitweek.[2] Hij beïnvloedde niet alleen Kohnstamm en via deze Bos, maar ook bijvoorbeeld A.D. de Groot en de Van Hieles. Selz bestudeerde de manier waarop mensen problemen – bijvoorbeeld wiskundige problemen – oplosten. Hij probeerde aan de hand van dat onderzoek algemene strategieën daarvoor te vinden. Door die te onderwijzen kon je, naar zijn overtuiging, kinderen leren problemen beter en sneller op te lossen. Selz was dus een van de eersten die zich bezig hield met wat nu systematische probleemaanpak heet.
Bos had tijd genoeg om zich hierin te verdiepen. Kort voor en tijdens de oorlog waren er alleen maar kleine baantjes te krijgen. Bovendien vond hij alleen maar wiskunde 'een beetje saai'. Zo vormden de totaal verschillende Bos en Lepoeter toch een goede combinatie om iets nieuws te proberen: Lepoeter vanuit zijn gedrevenheid om het onderwijs anders in te richten, en Bos vanuit zijn ruime pedagogisch/didactische kennis en belangstelling.

Leesbare boeken

De boeken die in de vijftiger jaren nog veel gebruikt werden, zoals Wijdenes, Alders, Van Dop en Van Haselen, Vredenduin, waren voor de meeste leerlingen, in de woorden van Bos, 'volslagen onleesbaar'. Voor een docent was het niet zo heel moeilijk zelf zo'n type leerboek te schrijven. De leerstof lag al decennia vast. Die moest je correct en compact samenvatten en daarnaast moest je als auteur voor een grote collectie opgaven zorgen. Veel didactische structuur, illustraties of andere bijzonderheden bevatte een boek uit die tijd niet. De productiekosten waren dan ook niet zo hoog. Vanuit die achtergrond valt te begrijpen dat er zoveel boeken op de markt konden verschijnen, door niet



Hulpcongruentie

VOORBEELD (zie fig. 104):

Gegeven: $\angle A_1 = \angle A_2$, $AB = AC$.

Te bewijzen: $RB = QC$.

Bespreking: We moeten bewijzen $RB = QC$. Je begrijpt wel, dat dit zal moeten volgen uit de congruentie van $\triangle RBP$ en $\triangle QCP$. Wanneer je echter probeert om deze congruentie *direct* te bewijzen, dan zul je zien, dat je slechts één ding weet, n.l. $\angle P_1 = \angle P_2$ (stelling 1). Je komt dus twee dingen tekort en om deze dingen te krijgen, werken we eerst met een *hulpcongruentie*. We bewijzen *eerst*, dat $\triangle APB$ en $\triangle APC$ congruent zijn, dit lukt wel direct (want $AP = AP$, $AB = AC$ en $\angle A_1 = \angle A_2$, congruentie-kenmerk ZHZ) en uit deze hulpcongruentie kunnen we nu twee dingen laten volgen n.l. $\angle B = \angle C$ en $PB = PC$, zodat we nu (met $\angle P_1 = \angle P_2$ er bij) de „eigenlijke" congruentie (van $\triangle RBP$ en $\triangle QCP$) kunnen bewijzen, waaruit dan volgt wat we moeten bewijzen.

Fig. 104

5. Vul het bewijs nu in:

___ (geg.) ___ (geg.) → $\triangle APB \cong \triangle APC$ → ___ → $\triangle RBP \cong \triangle QCP$ → ___

Onthoud dus:

Een hulpcongruentie dient om de dingen te krijgen, die we voor het bewijzen van de „eigenlijke" congruentie nog tekort komen.

6. Te bew.: $SC = SE$

7. Te bew.: $CR = CS$

FIGUUR 2 Wegwijzer in de meetkunde, 1, blz. 20

meer dan een of twee auteurs geschreven, met maar een heel beperkte afzet. Voor de auteurs en de tijdgenoten waren de verschillen tussen de diverse methodes ongetwijfeld duidelijk, maar achteraf valt toch vooral op hoe sterk al die boekjes op elkaar leken. Dat geldt zeker niet voor de boeken van Bos en Lepoeter. In de eerste plaats zijn ze wat dikker dan gebruikelijk. Dat moest ook wel, want ze bevatten natuurlijk meer uitleg en voorbeelden. Daarnaast bevatten ze meer illustraties, soms al echte foto's, en maken ze al gebruik van een steunkleur, rood, om bepaalde zaken een extra accent te geven. Wat de boekjes, en dan vooral de meetkundeboeken, echter vooral interessant maakt is dat er ook duidelijk een doordachte didactische structuur in zit. Een uitleg over die structuur is te vinden in de *Toelichting* die bij de methode verscheen, ook al iets bijzonders in die tijd. In die toelichting wordt onder andere uitgelegd waarom de auteurs een organisatievorm nodig vinden waarbij zelfwerkzaamheid een grote rol speelt. Ik citeer een stukje uit die toelichting.

'Wij hebben de indruk dat in het algemeen de gang van zaken is: de theorie wordt uitgelegd (en geleerd), een paar vraagstukken worden voorgemaakt en besproken, en tenslotte worden een aantal variaties op de gemaakte vraagstukken opgegeven. Dit laatste is dan eigenlijk de enige zgn. "zelfwerkzaamheid". Wij zijn van mening, dat op deze wijze
1. bepaalde individuele misverstanden en moeilijkheden niet op te heffen zijn,
2. leerlingen moeten wachten, die het allang begrepen hebben,
3. leerlingen iets op gaan schrijven wat zij nog niet door hebben,
4. een verkeerde werkinstelling (nl. overwegend reproductief) in de hand gewerkt wordt.

Wij achten het nodig dat het boek zodanig is samengesteld, dat
1. individuele hulp in ruime mate mogelijk is,
2. de leerlingen verder kunnen,
3. de controle, of iets begrepen is, geen zuivere reproducties vereist, maar door middel van opgaven gebeurt, waarbij dezelfde denkmoeilijkheden in gewijzigde vorm, overwonnen moeten worden.

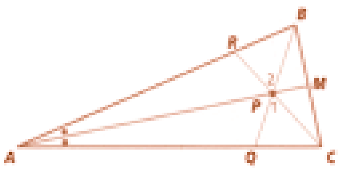
Deze overwegingen brachten ons er toe als criterium voor de mate van didactisch commentaar en ook voor de keuze van de opgaven te nemen: *de klas moet verder kunnen.*'

Een voorbeeld

Hoe dat nu in de boeken van Bos en Lepoeter in de praktijk werd gebracht, kan het beste aan een voorbeeld geïllustreerd worden. Ik laat een stukje uit *Wegwijzer in de meetkunde* zien, uit het eerste deel (zie figuur 2).
Het eerste wat opvalt is de informele toon en de glasheldere uitleg van wat het probleem is, en hoe je dat op kunt lossen. Je kunt je heel goed voorstellen dat leerlingen zo'n tekst zelf kunnen lezen en begrijpen. Maar er is nog veel meer interessants aan dit stukje. Het belangrijkste van die vlakke meetkunde uit de lagere klassen was, dat de leerlingen echte problemen leerden oplossen, soms *bewijsproblemen*, soms *constructieproblemen*. Bij die bewijsproblemen moest je vaak van congruente driehoeken gebruik maken. De traditionele boeken uit die tijd gaven geen enkele aanwijzing hoe je dat nu moest aanpakken. Het nieuwe

Voorbeeld

Driehoek ABC is een gelijkbenige driehoek met top A. Punt P ligt op de deellijn van $\angle A$. Lijn CP snijdt AB in R en lijn BP snijdt AC in Q.
Bewijs dat $|RB| = |QC|$



1 Verkennen

De gegevens zijn met kleur en symbolen in de tekening gezet. Er zijn veel driehoeken in de figuur, misschien zijn er wel congruente bij?

2 Analyseren

- Vooruitdenken

Uit de gegevens volgt meteen dat $\triangle APB \cong \triangle APC$ (ZHZ) en ook $\triangle AMB \cong \triangle AMC$ (ZHZ), maar bijvoorbeeld niet dat $\triangle RPB \cong \triangle QCP$. Ik weet nu wel van meerdere hoeken in de figuur dat ze gelijk zijn. Misschien valt de congruentie van twee andere driehoeken te bewijzen?

- Terugdenken

Ik moet bewijzen dat $|RB| = |QC|$. Deze zijden spelen een rol in $\triangle RBP$ en $\triangle QCP$, maar ook in $\triangle RBC$ en $\triangle QCB$. Met welk van deze paren kom ik verder?

- Plan maken

Uit het vooruitdenken weet ik dat $\triangle APB \cong \triangle APC$ dus $|PB| = |PC|$ en $\angle ABP = \angle ACP$. Verder is $\angle P_1 = \angle P_2$ (overstaande hoeken).
Dus $\triangle RBP \cong \triangle QCP$ (HZH). Dat is dus het geschikte paar driehoeken!

3 Bewijs geven

Nu nog het bewijs netjes opschrijven: zie opdracht 13.

FIGUUR 3 Moderne wiskunde, vwo bovenbouw Wiskunde B2, deel 1, blz. 23

van Bos&Lepoeter is dat aan de verschillende oplosmethodes en strategieën die je daarbij kunt gebruiken, expliciet aandacht wordt geschonken. Bos en Lepoeter schreven dan ook in de *Toelichting* dat al dat oefenmateriaal diende om een 'denkende probleem-aanpak te verkrijgen, waarbij verschillende oplosmethoden met inzicht gebruikt worden'. Die oplosmethodes worden expliciet onderwezen. Dit voorbeeld, de *Hulpcongruentie*, is een onderdeel van de strategie *Congruentie met een tussenschakel*. Deze strategie duikt ruim veertig jaar later weer op in het experimentele Profi-materiaal voor Voortgezette Meetkunde onder de term *Schakels*.[3] Nog frappanter is het verschijnen van hetzelfde voorbeeld in *Moderne wiskunde*. Ook hier wordt dit sommetje gebruikt om een strategie voor de aanpak van een bewijs te demonstreren (zie figuur 3).

Die aanpak, gebaseerd op de denkpsychologie van Selz, laat duidelijk de inbreng van Bos zien en is verwant aan wat nu SPA, Systematische Probleem Aanpak, heet. Die uitdrukking, voor het eerst gebruikt door Mettes en Pilot in hun proefschrift over het oplossen van problemen in de natuurkunde, is opgepakt door Anne van Streun en door hem verder ontwikkeld voor het wiskundeonderwijs. Door het werk van Van Streun is die aanpak weer in de schoolboeken voor de tweede fase terecht gekomen. Tussen Bos en Van Streun is dan ook een sterke didactische verwantschap te constateren, die door Van Streun in zijn proefschrift *Heuristisch wiskunde-onderwijs* duidelijk is aangegeven.

Een derde kenmerk van dit stukje is het schema waarin de leerlingen hun oplossingen moeten noteren. Zulke schema's werden door Bos&Lepoeter systematisch in de hele meetkundeleergang gebruikt en resulteerden niet alleen in netter en overzichtelijker werk, maar gaven de leerlingen ook houvast om de logische structuur van de oplossingsstrategie beter te doorzien. En ook dat komt terug in *Moderne wiskunde*. In de *Samenvatting* van hoofdstuk M1 uit hetzelfde deel staat ook een stukje onder de kop *Hoe schrijf je een bewijs op?* Zie figuur 4. Het is niet moeilijk hierin dezelfde structuur te ontdekken als onder punt 5 in het fragment uit Bos&Lepoeter.

In het 'Docentenboek vwo bovenbouw Wiskunde B2 deel 1' bij *Moderne wiskunde* wordt het verband met Bos&Lepoeter ook expliciet gelegd en wordt de 'beroemde schoolboekenserie' van deze auteurs als inspiratiebron genoemd. Treffend is het om daarbij te bedenken dat de voortgezette meetkunde bedoeld is voor 5-vwo, en dan ook nog alleen voor het N&T-profiel. Het voorbeeld uit Bos&Lepoeter was bedoeld voor alle eersteklassers die naar het middelbaar onderwijs gingen!

Niet bij zelfwerken alleen

Aan het zelfstandig laten werken van leerlingen zit een risico. Bos heeft dat heel goed beseft. Zoals hij nog in het interview zei: 'Een leerling kan natuurlijk heel goed een boekje helemaal doorgewerkt hebben en er toch niets van begrepen hebben'. Om dat te voorkomen heeft ook 'het klassikale', zoals Bos dat noemt, een functie. In de *Toelichting* worden als functies van het klassikale genoemd: de globale controle op het werk, het vastleggen van de verworven kennis, het nagaan of de tekst begrepen is en het uitlokken van discussies. Een goede afwisseling van zelfwerken met klassikale momenten is essentieel, maar ook in de klassepraktijk

Hoe schrijf je een bewijs op?
Bij het uitschrijven van een bewijs volg je het schema hiernaast. Je slotconclusie moet overeenkomen met wat te bewijzen was.

Bewijsschema
1 Gegeven
2 Te bewijzen
3 Bewijs

Voorbeeld (vervolg)
Gegeven: $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$
Te bewijzen: $AC \perp BD$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}|AD| = |BC| \text{ (gegeven)} \\ |AB| = |CD| \text{ (gegeven)}\end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ is een parallellogram [1]}$$

$$[1] \Rightarrow S \text{ is het midden van } AC \text{ en } BD \text{ [2]}$$

$$\left.\begin{array}{l}|BS| = |SD| \text{ ([2])} \\ |CD| = |BC| \text{ (gegeven)} \\ |CS| = |CS|\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BSC \cong \triangle DSC \text{ (ZZZ) [3]}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BSC = \angle DSC \text{ ([3])} \\ \angle BSC + \angle DSC = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle BSC = 90^\circ \text{ [4]}$$

$$[4] \Rightarrow AC \perp BD$$

FIGUUR 4 Moderne wiskunde, vwo bovenbouw Wiskunde B2, deel 1, blz. 29

van nu een lastig punt. Zoals een hedendaagse leerling die schoon genoeg had van al dat zelfstandig werken, eens tegen mij zei: 'Je zit je het hele uur de takke te werken en dan heb je nòg niks geleerd!' Zelfstandig werken is mooi, maar al evenmin alleen zaligmakend als uitsluitend klassikaal onderwijs. Bos had daar al vroeg oog voor.

Erkenning in de praktijk

De boeken van Bos en Lepoeter waren commercieel gezien een waagstuk, maar werden naar de maatstaven van die tijd een groot succes. Na de methode Alders waren het in de jaren vijftig en zestig de meest gebruikte boeken. Door een verschil van inzicht tussen Bos en Lepoeter onderling, en de komst van het nieuwe leerplan bij de mammoetwet, verdween de methode in de jaren zeventig van het toneel.
Het is opvallend dat het werk van Bos en Lepoeter in de didactische discussie nooit zoveel aandacht heeft gekregen. In het grote overzichtswerk van Wansink, *Didactische Oriëntatie*, worden Bos en Lepoeter precies één keer in een bijzinnetje genoemd. Van Hiele, eveneens auteur van een vernieuwende methode in die tijd, *Van A tot Z*, wordt daarentegen tientallen keren vermeld. Dat heeft er ongetwijfeld mee te maken dat Bos en Lepoeter wel een vernieuwende methode brachten, maar niet, zoals Van Hiele, nieuwe theoretische inzichten. Van Streun is een van de weinigen die in de jaren tachtig en negentig belangstelling voor het werk van Bos en Lepoeter behouden heeft en het belangrijk vernieuwende karakter daarvan doorzien heeft.
Maar ik heb niet de indruk dat Wim Bos daar erg onder geleden heeft. Op een vraag tijdens het interview over de kritiek die hun boeken in die tijd kregen, antwoordde Bos, dat ze daar niet zoveel belangstelling voor hadden. Ze verkochten immers toch wel, reageerde hij enigszins triomfantelijk. En over het waarom van dat succes had hij ook een duidelijke mening: met hun boeken was tenminste te werken, zowel voor leraar als leerling!
In het onderwijs van nu spreekt het vanzelf dat leerlingen zelf met hun boek aan de slag moeten kunnen en dat het boek een duidelijke didactische structuur moet bieden. Doordat Bos en Lepoeter al in de jaren vijftig en zestig lieten zien dat zoiets realiseerbaar was binnen een 'gewoon' programma en voor 'gewone' docenten, hebben ze een belangrijke rol gespeeld in de aanloop naar de grote omslag in ons wiskundeonderwijs van de jaren zeventig en tachtig.

Noten

[1] De HKRWO, een informele club van geïnteresseerden in de geschiedenis van het reken- en wiskundeonderwijs, houdt jaarlijks op een zaterdag in mei een symposium over historische aspecten van dat onderwijs. Inlichtingen bij Ed de Moor, e.demoor@fi.uu.nl
[2] Selz kwam in 1943 in Auschwitz om.
[3] 'Denken in cirkels en lijnen', Voortgezette Meetkunde, deel IIB, Freudenthal Instituut, 1998.

Over de auteur

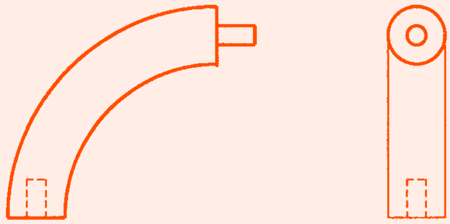
Harm Jan Smid (e-mailadres: H.J.Smid@ewi.tudelft.nl) is werkzaam aan de TU Delft en is daar vele jaren betrokken geweest bij de lerarenopleiding. Tegenwoordig ligt het zwaartepunt van zijn werk bij de organisatie en vormgeving van het wiskundeonderwijs ten behoeve van de ingenieursopleidingen van de TUD. Daarnaast gaat zijn interesse vooral uit naar de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.

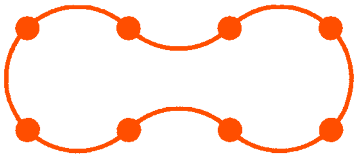
WISKUNDE B-DAG 2003

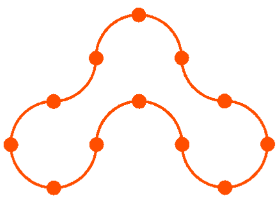
Spelen met elleboogjes

[Wilbert Geijs]

FIGUUR 1 Het speelgoed: de tangle oftewel het elleboogje
FIGUUR 2 Een wiskundige representatie van een vlak circuit met acht elleboogjes







FIGUUR 3 Een team buigt zich over de opdrachten
FIGUUR 4 Een 12-circuit, inclusief twee verschillende beschrijvingen (beginnend midden boven, met de wijzers van de klok mee)

Inleiding

Op vrijdag 28 november 2003 vond voor de vijfde keer de jaarlijkse Wiskunde B-dag plaats. Deze dag, de tegenhanger van de A-lympiade, is bedoeld voor wiskunde B-leerlingen van 5-havo, 5-vwo en 6-vwo. Ik loop deze dag mee op Christelijk College 'de Populier', een school in Den Haag. De Wiskunde B-dag is een landelijke, door het Freudenthal Instituut georganiseerde wedstrijd waaraan zo'n 140 scholen meedoen. Het gaat daarbij om ruim 5000 leerlingen, verdeeld over pakweg 1400 teams van drie of vier leerlingen. De leerlingen dienen de opdrachten in teamverband uit te voeren. Daarnaast moeten ze een verslag van de opdrachten te maken. Aan het eind van de dag is alles af.
Hoewel de Wiskunde B-dag eigenlijk een wedstrijd is, laten veel scholen dit wedstrijdelement varen. Op 'de Populier' wordt het verslag beoordeeld en telt het mee als praktische opdracht (PO). Daarbij speelt in het hele proces de samenwerking tussen de leerlingen een grote rol.

Wiskunde door de bocht

De titel van de opdracht van dit jaar was 'Wiskunde door de bocht'. Aan de hand van een aantal opdrachten moesten de leerlingen de mogelijkheden van een stukje speelgoed, een zogenaamde *Tangle* of 'elleboog' (zie figuur 1), wiskundig nader onderzoeken. De tangles komen uit de Verenigde Staten en zijn 1,5 inch groot. Een tangle heeft de vorm van een kwartcirkel. Met één klik kunnen ze worden geschakeld. Een gesloten schakeling van zulke elleboogjes (zonder begin- en eindpunt) wordt een *circuit* genoemd. Circuits kunnen gemaakt worden in het platte vlak, maar ook in de ruimte.
Om de wiskunde eenvoudig te houden wordt een vertaalslag gemaakt waarbij de dikte van de elleboogjes te verwaarlozen is, en waarbij de straal 1 is. Een vlak circuit met acht elleboogjes is te zien in figuur 2.
In de verbindingen zitten de kwartcirkels met hun eindpunten aan elkaar en hebben daar een gezamenlijke raaklijn.
Alle teams krijgen een setje van 18 ellebogen. Dit setje is bedoeld om daadwerkelijk constructies uit te voeren die het denken en redeneren over circuits in algemene zin (dus ook voor circuits van meer dan 18 elleboogjes) kunnen ondersteunen.

Welke vlakke *n*-circuits zijn mogelijk?

De eerste opdracht is misschien de eenvoudigste, maar ook de omvangrijkste. Bij deze opdracht wordt alleen gekeken naar n-circuits in het platte vlak. De meest eenvoudige is een 4-circuit: een cirkel. Onderzocht moet worden welke vlakke circuits mogelijk zijn voor $n = 8$, $n = 12$ en $n = 16$. Voordat dit laatste geval bekeken wordt, moet een handige beschrijvingswijze voor de circuits en een systematiek bij het zoeken naar alle mogelijkheden ontwikkeld worden. Daarna moeten de leerlingen ontdekken en beredeneren dat een vlak n-circuit alleen mogelijk is als n een viervoud is.

Voor de 33 deelnemende leerlingen van 'de Populier' levert het maken van een 8-circuit geen problemen op. Er is maar één mogelijkheid. Bij een circuit van 12 elleboogjes doen zich de eerste problemen voor. Alle mogelijkheden moeten worden gevonden. Veel leerlingen gaan driftig aan het experimenteren, zonder daarbij logisch te redeneren. Uiteindelijk vinden ze alle drie de mogelijkheden. Een deel van de leerlingen begint nu al met notities en tekeningen te maken voor het verslag. Dit is niet onverstandig, want in de praktijk blijkt het maken van het verslag veel tijd te kosten. De kop is er nu af en het echte werk gaat beginnen. Hoe beschrijf je een circuit op papier? Veel teams komen op de uitdrukkingen 'bol' en 'hol', overigens zonder daarbij die begrippen te definiëren. Omdat het circuit gesloten is, is er geen begin- en eindpunt. De keuze van het beginpunt en de beschrijvingsrichting worden niet als belangrijk beschouwd. In één team wordt ook de mogelijkheid van een beschrijving in hoeken bekeken. Een positieve bijdrage aan het sluiten van het circuit zou dan als +90° kunnen worden aangemerkt, een negatieve bijdrage als –90°. Deze groep kijkt echter naar de oriëntatie van de aansluitingen en komt er niet goed uit. Na enige discussie wordt gekozen voor de eenvoudiger 'bol'- en 'hol'-beschrijving. Dat is jammer, want naar later zal blijken kan met de hoekbeschrijving mooi worden geredeneerd.

Ook bij het zoeken naar mogelijke 16-circuits wordt er weer driftig geëxperimenteerd. De systematiek volgt later wel. De methode van trial and error levert al snel 5 of zelfs 6 mogelijke vlakke circuits op. Leerlingen denken nu dat ze alle mogelijkheden gevonden hebben. Bovendien verkeren ze in de veronderstelling dat het aantal mogelijke circuits een mooie rij is: bij 4 ellebogen 1 circuit, bij 8 ellebogen 1 circuit, bij 12 ellebogen 3 circuits, dus bij 16 ellebogen zullen het er dan wel 5 zijn (regelmaat: *plus 2*) of 6 (regelmaat: *maal 2*, die gezien de reeks 1 – 1 – 3 – 6 eigenlijk geen regelmaat is). Er blijkt echter nog een zevende circuit mogelijk. Veel teams hebben deze niet gevonden, omdat geen systematiek is gevonden of toegepast.

Een goede systematiek vinden is nog niet zo eenvoudig. Alle mogelijke verschijningsvormen van een 16-circuit moeten worden gevonden. Het is dan handig om terug te keren naar de 12-circuits. Hoe zijn die ontstaan?
Circuit 2 ontstaat uit circuit 1 door de gestippelde elleboogjes te spiegelen in lijn AB (zie figuur 5).
Circuit 3 ontstaat uit circuit 2 door de gestippelde elleboogjes te spiegelen in lijn CD. Passen we dit spiegelen toe op de 16-circuits, dan vinden we 7 mogelijkheden. Hierbij wordt opgemerkt dat spiegelbeelden niet als een ander circuit aangemerkt worden.

Het is geen sinecure om te verklaren dat je bij een oneven aantal elleboogjes nooit een vlak circuit kunt leggen. Leerlingen zeggen al snel: 'Het is toch logisch dat dat niet kan! Iets wat oneven is kan nooit sluiten in het platte vlak.'

Natuurlijk is dit geen plausibele verklaring. Of deze vraag succesvol kan worden opgelost is afhankelijk van de keuze die is gemaakt bij de beschrijving van circuits. Omdat 'bol' en 'hol' elkaar neutraliseren, moet voor een gesloten circuit gelden dat dit in globale zin beschreven wordt door bol + bol + $\frac{n-4}{2}$(bol + hol) + bol + bol. Hierbij is n een waarde waarvoor een vlak n-circuit mogelijk is. Als n oneven zou zijn, komt er uit de uitdrukking $\frac{n-4}{2}$ te allen tijde een gebroken getal. Dit is fysisch onmogelijk, dus een vlak n-circuit waarbij n oneven is, is niet mogelijk.
Een iets eenvoudiger redenering verloopt via de beschrijving met behulp van hoeken. Het blijkt dat een circuit pas gesloten is als de bijdrage van alle ellebogen opgeteld 360° is. In het geval van figuur 4 geldt dus: + 90° - 90° + 90° + 90° + 90° - 90° - 90° + 90°+ 90°+ 90° - 90° + 90° = 360°. Bijkomende voorwaarde is, dat 'begin' en 'eind' van het circuit ook nog op elkaar aansluiten. Een oneven aantal elleboogjes kan dus nooit een circuit vormen, immers de uitkomst daarvan is nooit 360°.

Op de vraag of een vlak 6-circuit mogelijk is, moeten de leerlingen een redenering opzetten die begint met drie elleboogjes. Logisch redeneren biedt ook hier uitkomst, maar hiervoor hebben de leerlingen helaas vaak niet het geduld. De klok tikt immers door en dat een 6-circuit niet mogelijk is, is door experimenteren met de elleboogjes al gebleken.
In figuur 7 is een mogelijke aanpak te zien. Een schakeling van drie elleboogjes wordt op een assenstelsel gelegd, gebruik makend van het feit dat de straal van de elleboogjes 1 is. Plaatsen we nu vanuit punt O drie geschakelde elleboogjes die aansluiten op de als eerste geplaatste elleboogjes, dan vinden we voor de eindcoördinaten van de derde elleboog de volgende mogelijkheden:
$(-3, 1)$, $(-3, 3)$, $(1, 1)$, $(1,3)$, $(-3,-1)$, $(-3,-3)$, $(1,-1)$ en $(1,-3)$.
De uiteinden sluiten nergens aan, dus een vlak 6-circuit is niet mogelijk. Een zelfde situatie doet zich voor bij 10-circuits, 14-circuits, enzovoort.

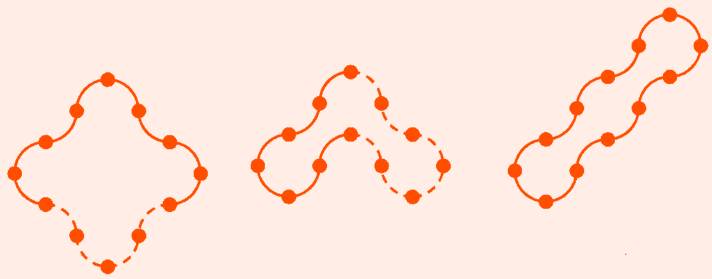
'Voor welke waarden van n is een vlak n-circuit mogelijk?', zo luidde de eerste algemene vraag van opdracht A. De meeste teams zijn er wel achter dat dit geldt als n een 4-voud is; maar om dit hard te maken, dat valt niet mee.

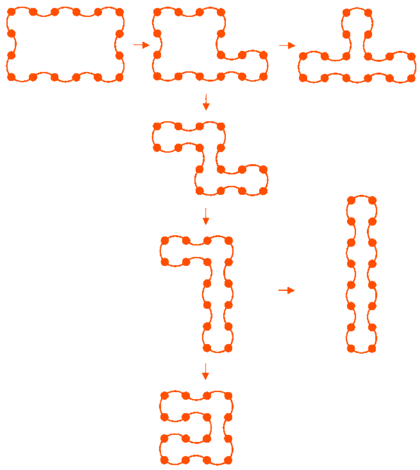
De oppervlakte van vlakke *n*-circuits

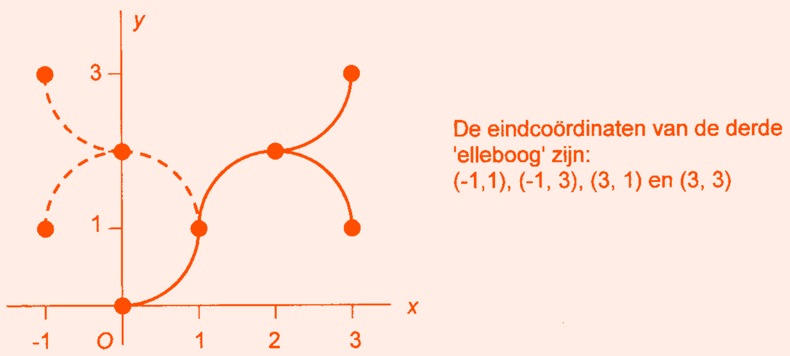
Ogenschijnlijk volgt nu een makkelijke afsluitende vraag. 'Welke oppervlaktes kunnen bij vlakke 12-, 16-, ..., n-circuits voorkomen?' Hiertoe moet eerst bewezen worden dat de omsloten oppervlakte van een 8-circuit gelijk is aan $\pi + 4$. Dit levert moeilijkheden op, omdat leerlingen slecht loskomen van 'horizontale' tekeningen; zie figuur 8.
Als de leerlingen eenmaal doorhebben hoe het moet, levert verdere oppervlaktebepaling geen problemen op. Veelal wordt volstaan met het tellen van het aantal geheel bedekte oppervlakte-eenheden, waarna het

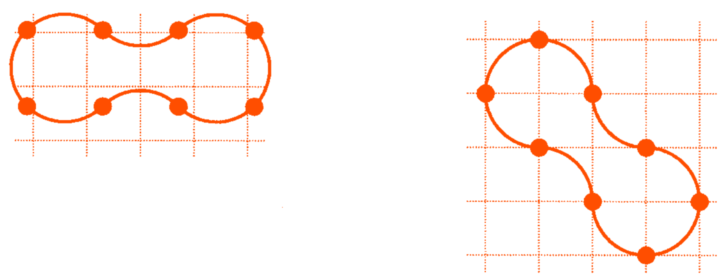
FIGUUR 5 De drie mogelijke 12-circuits

FIGUUR 6 De zeven mogelijke 16-circuits, ontstaan door de verschillende manieren van spiegelen









FIGUUR 7 Mogelijke eindpunten van drie geschakelde elleboogjes

FIGUUR 8 Een tekening 45° roteren maakt het probleem een stuk eenvoudiger!

'bochtenwerk' daarbij wordt opgeteld. Ook hier proberen de leerlingen weer naar logica te zoeken. Bij een 12-circuit zal de oppervlakte wel $\pi + 8$ zijn. Voor twee van de drie gevallen klopt dit inderdaad, maar bij de derde gaat het mis. De oppervlakte van deze figuur is $\pi + 16$. Een beperkt aantal teams is in de vaart der volkeren over dit probleem gestapt. Hun (verkeerde) conclusie luidt dan ook dat de oppervlakte van een n-circuit gelijk is aan $\pi + n - 4$. De meeste teams zien gelukkig wel dat er bij een n-circuit verschillende oppervlakten mogelijk zijn. In tegenstelling tot de minimale oppervlakte blijkt het voor de leerlingen wel moeilijk te zijn een algemene formule af te leiden die de maximale oppervlakte van een n-circuit geeft. De leerlingen zoeken het ook hier in concrete voorbeelden. Na n = 16 houdt het, gezien de toenemende tijdsdruk, op. Dat is jammer, want voor de deelnemende leerlingen moet dit probleem op te lossen zijn.

Voor een n-circuit is dus geen eenduidig antwoord te geven voor de oppervlakte, met uitzondering van n = 4 en n = 8. Onderzoek leert het volgende:

n	4	8	12	16	20	24
minimale oppervlakte	π	$\pi + 4$	$\pi + 8$	$\pi + 12$	$\pi + 16$	$\pi + 20$
maximale oppervlakte	π	$\pi + 4$	$\pi + 16$	$\pi + 28$	$\pi + 48$	$\pi + 68$

De oppervlakte is minimaal bij een zo lang en smal mogelijk circuit. Deze oppervlakte is eenvoudig vast te stellen: *minimale oppervlakte n-circuit* = $\pi + n - 4$

De oppervlakte is maximaal als het circuit zo veel mogelijk op een rechthoek lijkt waarvan de zijden in lengte zo weinig mogelijk van elkaar verschillen. Elke zijde moet bovendien uit een oneven aantal elleboogjes bestaan. Als $\frac{n}{4}$ oneven is, kunnen alle 4 de zijden uit $\frac{n}{4}$ elleboogjes bestaan. De oppervlakte is dan gelijk aan die van een vierkant met zijden $\frac{n}{4}\sqrt{2}$ plus de oppervlakte van vier 'maantjes', die samen een cirkeloppervlak met straal 1 minus het ingeschreven vierkantje kunnen vormen. De oppervlakte is dan:

$$\left(\tfrac{n}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \pi - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi + \tfrac{n^2}{8} - 2 \text{ met } \tfrac{n}{4} \text{ oneven.}$$

Als $\frac{n}{4}$ even is, vind je de maximale oppervlakte als je het ene tweetal tegenover elkaar liggende zijden laat bestaan uit elk $\frac{n}{4} + 1$ elleboogjes en het andere tweetal tegenover elkaar liggende zijden uit elk $\frac{n}{4} - 1$ elleboogjes. De oppervlakte is dan:

$$\left(\tfrac{n}{4} - 1\right) \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\tfrac{n}{4} + 1\right) \cdot \sqrt{2} + \pi - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi + \tfrac{n^2}{8} - 4$$

met $\frac{n}{4}$ even.

Welke tussenliggende waarden voor de oppervlakte van een n-circuit mogelijk zijn is in dit geval niet bekeken.

Inmiddels begint de tijd te dringen. Er moet met het verslag begonnen worden. De teams splitsen zich op.

Eén of twee leerlingen beginnen vast met het verslag, de andere leerlingen gaan verder met de overige opdrachten.

Een circuit met beperkte ruimte

Met de elleboogjes kunnen ook ruimtelijke constructies worden gevormd. In de ruimte heb je eindeloos veel constructiemogelijkheden. In dit gedeelte van de opdracht wordt een beperking aan de bewegingsruimte opgelegd. De elleboogjes liggen in de vlakken van een kubisch rooster, met de eindpunten van de elleboogjes steeds op de middens van de ribben van de kubussen van dat rooster.
Het blijkt dat er twee 6-circuits aan de gestelde eisen voldoen. Eén van deze 6-circuits is vrij beweegbaar, de andere is star. Ook 8- en 10-circuits zijn mogelijk binnen de gestelde eisen. De leerlingen zoeken het hierbij in de kwantiteit: hoe meer circuits ze vinden die aan de voorwaarden voldoen, hoe beter. Overigens is dit logisch, want de opdracht luidt: onderzoek welke 8- en 10-circuits voldoen aan de opgelegde beperking. De vreugde als er weer een nieuwe variant gevonden wordt, is dan ook groot. Duidelijk is te merken dat de leerlingen er plezier in hebben; de opdracht is vrijer van aard en in hun ogen ook minder moeilijk. Ook nu weer ontstaan de circuits veelal via trial and error.
Voor oneven n blijkt het niet mogelijk een n-circuit op een kubisch rooster te plaatsen. Uit deze bevindingen wordt door de meeste teams geconcludeerd dat voor even waarden van n een ruimtelijk circuit op een kubisch rooster mogelijk is, waarbij aangetekend dient te worden dat $n \geq 6$.

De vrije ruimte

Een apart geval in de vrije ruimte is $n = 5$; zie figuur 11. Bij het 'vasthouden' van elleboog CD kunnen de ellebogen AB en BC vrij draaien. Punt P (het snijpunt van de raaklijnen in B en C) blijft steeds op dezelfde plek liggen. Dit betekent dat punt B ten opzichte van punt P een cirkel beschrijft. Maar dat houdt dan ook weer in dat punt R (het snijpunt van de raaklijnen in A en B) een cirkel beschrijft ten opzichte van het punt P. Punt A beschrijft weer een cirkel ten opzichte van punt R. De beweging van punt A ten opzichte van punt P is dus een cirkelbeweging met straal $AR = 1$ op een cirkelbeweging met straal $PR = 2$. Punt A beweegt zich ten opzichte van punt P op het oppervlak van een bol met middelpunt P en straal AP.
Hierbij moet nog de opmerking gemaakt worden dat punt A niet op alle posities kan komen die op een afstand AP van P afliggen; A beweegt zich op een *gedeelte* van het boloppervlak. De afstand AP is gelijk aan $\sqrt{5}$, want $\triangle APR$ is een rechthoekige driehoek met $AR = 1$ en $PR = 2$. Met een zelfde redenering kan aangetoond worden dat de afstand tussen de punten F en Q ook steeds gelijk is aan $\sqrt{5}$.
De meeste leerlingen zijn zelfstandig uit dit probleem gekomen. Sommige groepjes hebben even een duwtje in de rug nodig: zoek eens uit wat er met het punt P gebeurt, als je aan de ellebogen AB en BC gaat draaien. Dit duwtje is meestal voldoende.

Eigen onderzoek

Als laatste onderdeel worden de leerlingen uitgedaagd, zelf problemen te formuleren en op te lossen. Er worden een aantal suggesties gedaan. De meeste teams waren echter opgelucht dat ze de eindstreep hadden gehaald en hebben zich daarom niet meer bezig gehouden met het formuleren en oplossen van eigen problemen. Op dit moment van de dag (tegen 15.00 uur; het verslag moet dringend af) is de animo daarvoor ook niet meer zo erg groot.

Ten slotte

Aan het eind van de dag is het tijd voor een terugblik. De meeste leerlingen waren enthousiast over de opdracht, ondanks het feit dat het een vermoeiende dag was. Het werken met concreet materiaal sprak aan. De opdrachten waren uitdagend en de antwoorden niet al te veel voor de hand liggend; je moest echt onderzoek doen en goed nadenken. Bovendien is het grote voordeel van deze praktische opdracht dat deze in één dag is afgerond.
Ook de docente is tevreden. De leerlingen hebben goed gewerkt. De inzet en samenwerking waren goed, iets wat bij andere praktische opdrachten lang niet altijd het geval is.

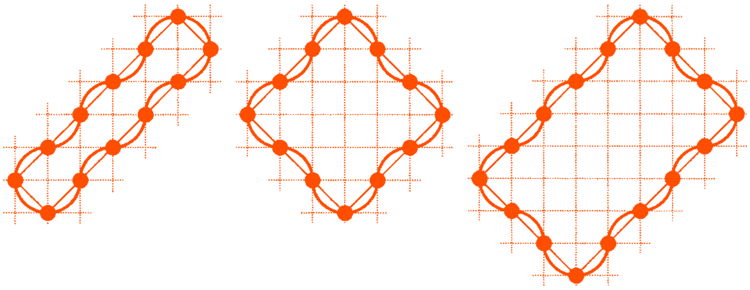
Conclusies en aanbevelingen

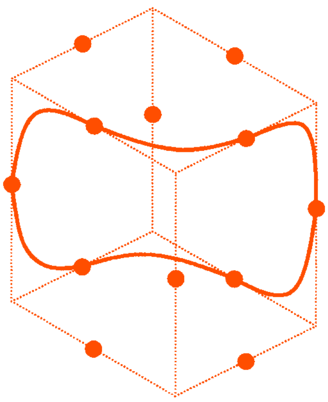
Tot slot wil ik proberen enkele conclusies en aanbevelingen te geven voor de Wiskunde B-dag. Deze aanbevelingen gelden zowel voor docenten als voor de organisatoren.

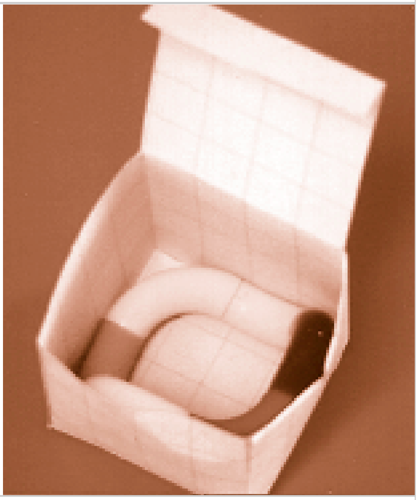
Algemeen kan geconcludeerd worden:
- Een praktische opdracht kan sterk motiveren.
- Het niveau van de opdracht is voldoende hoog. De leerling hoeft echter geen kei in wiskunde te zijn om de opdrachten toch tot een goed einde te brengen.
- Over een breed terrein worden kennis en begrip bij elkaar gebracht, waardoor geïntegreerde wiskundekennis wordt gestimuleerd.
- Het 'risico' dat gebruik gemaakt wordt van bestaande (internet)verslagen is tot een minimum beperkt.

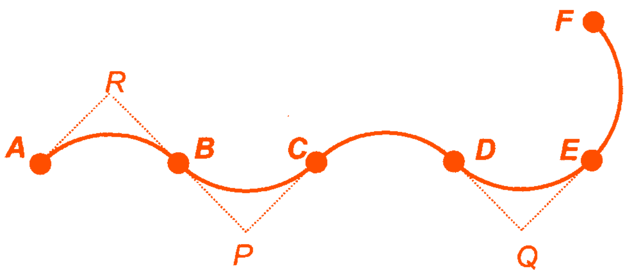
Voor de docenten:
- Probeer zelf te surveilleren. Als docent ken je je leerlingen en is het onderdeel 'samenwerken' goed te beoordelen. Dit is vooral belangrijk als dit project meetelt als Praktische Opdracht.
- Bereid leerlingen voor op de Wiskunde B-dag: wat is het, moet je goed zijn in wiskunde, lees eerst de opdracht door, verdeel de taken (hoe samenwerken), enz.
- Laat leerlingen bewust pauze houden, anders storten ze aan het eind van de middag in.
- Zorg voor voldoende PC's gedurende de gehele dag.
- Laat de leerlingen op tijd met het verslag beginnen en houd de tijd goed in de gaten.
- Om voortvarend te starten is het verstandig teams van te voren in te delen. Streef naar teams van vier personen; de leerlingen opereren vaak in groepjes van twee.

FIGUUR 9 De oppervlaktebepaling van *n*-circuits
FIGUUR 10 Een gesloten 6-circuit ‘op’ een rooster en een gesloten 6-circuit ‘in’ een rooster









FIGUUR 11 Een geval apart: $n = 5$
FIGUUR 12 Een goede voorbereiding is het halve werk. De laptop (van thuis meegenomen) voorkomt heen en weer geloop naar de computerruimte

Voor de organisatoren:
- Probeer ook vrijheid in te brengen in de eerste opdrachten. Aan de laatste opdracht komen de leerlingen nauwelijks toe en als ze er al aan toekomen, zijn ze niet meer gemotiveerd. De druk van het verslag is te groot.

Met dank aan mevrouw M. Kollenveld en de heer J. de Geus (beiden van ‘de Populier’) en aan mevrouw A. Verweij (TU Delft) voor het meelezen en het commentaar.

Internetbronnen

- *www.tangletoys.com is de website van de bedenker en leverancier van de ‘elleboogjes’.*
- *www.fi.uu.nl/wisbdag is de website van het Freudenthal Instituut met daarop opdrachten en verslagen over de Wiskunde B-dag.*

Literatuur

- *D. Dullens: De Wiskunde B-dag 2001, in: Nieuwe Wiskrant, jg 21 nr. 3 (maart 2002), pp. 4-7.*
- *A. Goddijn: 1 + 1 = 2 en hoe nu verder?, in: Nieuwe Wiskrant, jg 22 nr. 4 (juni 2003), pp. 11-16.*
- *D. de Haan: De eerste landelijke Wiskunde B-dag, in: Nieuwe Wiskrant, jg 20 nr. 4 (juni 2001), pp. 14-15.*
- *Team Lorentz Casimir Lyceum: De maan, straks een geval apart?, in: Nieuwe Wiskrant, jg 20 nr. 4 (juni 2001), pp. 16-18.*
- *C. Zaal: Tangle, in: Pythagoras, jg 43 nr. 4 (februari 2004), pp. 30-32*

Over de auteur

Wilbert Geijs (e-mailadres: b.g.geijs@hetnet.nl) is afgestudeerd werktuigbouwkundig ingenieur en volgt momenteel de eerstegraads lerarenopleiding wiskunde aan de TU Delft.

BREIEN EN ANDERE NOTATIEZONDEN

Kanttekeningen bij het correctievoorschrift vmbo 2003

[Ameling Algra]

Inleiding

'Kom eens mee', zegt mijn collega op samenzweerderige toon, en troont mij mee naar het lokaal dat zojuist is verlaten door de éminence grise in onze vaksectie en haar vwo-examenklas. 'Kijk eens!' Ik zie het al, bord niet uitgeveegd. Niet netjes natuurlijk. Maar daar gaat het niet om, het gaat om wat op het bord staat: MAX (4,10). 'Dat is FOUT, ik reken dat bij mijn leerlingen fout TOT EN MET het centraal examen. We moeten het er echt eens met haar over hebben. Dit KAN niet!'
Ik neem mij voor om na mijn lessen het bord steeds uit te vegen, en zeg mijn collega dat ik een driegesprek over de 'notatiezonde' onderaan mijn prioriteitenlijstje zal plaatsen.

Het CV bij het examen 2003: een wezenlijk aspect van wiskunde zoek?

Het correctievoorschrift bij het examen wiskunde vmbo 2003 riep in het veld vragen op, vooral bij KB en GL/TL. Docenten werden overvallen doordat op veel plaatsen eenheden en (delen van) de berekening tussen haakjes werden geplaatst (zie figuur 1). De kandidaat die berekening of eenheid weglaat, wordt volgens het correctievoorschrift niet gestraft. Bij het examen BB wordt bovendien expliciet vermeld dat notatiefouten niet tot aftrek leiden (mits zichtbaar een juiste berekeningswijze is toegepast; zie figuur 2).
Vragen en opmerkingen van docenten komen binnen op de CEVO-Examenlijn[1]. Op deze facetten van het correctievoorschrift gingen vragenstellers uitgebreid in. Men vroeg zich af of met het gewijzigde correctievoorschrift niet een wezenlijk onderdeel van het wiskundeonderwijs teloorgaat. Wezenlijk, zo beklemtoonden briefschrijvers, vooral voor de leerlingen in het vmbo.
Dat men zich bij het examen 2003 overvallen voelde, dat kan achteraf niet worden hersteld. Wel kunnen we achteraf reflecteren op de opgeworpen vragen. Hoe essentieel is het vermelden van eenheden, hoe belangrijk is een exacte notatie? Kan onderscheid gemaakt worden tussen leerproces en toets of examen, of mag dat per se niet? Een universele vraag, die speelt bij elk vak en elk schooltype. Vandaar het 'uitstapje' naar een havo-vwo-bovenbouwsituatie aan het begin van dit artikel. Nog even daarnaar terug.

Een grafiek is (g)een functie

Functie en grafiek, twee woorden voor hetzelfde - volgens mijn leerlingen. Een grafiek heeft een top, een functie heeft een maximum, maar 't is allemaal hetzelfde. Dus maximum (4,10).
Voor mij is een grafiek niet hetzelfde als een functie. En ik vind het belangrijk dat mijn leerlingen het onderscheid leren zien. Dus corrigeer ik hen als ze over max(4,10) spreken. Geef ik een schriftelijke overhoring op met expliciete aandacht voor de notatie van maximum en top. En straf daarin foute notaties rigoureus af. Ik vind het belangrijk dat leerlingen het

onderscheid weten te maken. Omdat zo'n structurering hen kan helpen bij het oplossen van wiskundige problemen. Maar: de notatie blijft niet méér en niet minder dan een hulpmiddel om problemen op te lossen. Anderhalf jaar later telt alleen de oplossingsstrategie, bij het examen staat er geen rode streep bij 'maximum (4,10)'.

Eenheden

Eenheden zijn van belang. Uit mijn jeugd herinner ik me het gewicht dat eenheden bij natuurkunde hadden. En het gemak dat je ervan had: aan het 'kloppen' van de eenheden links en rechts zie je dat de formule klopt. Dat geldt niet bij de vuistregels in de huidige wiskunde; een enkele natuurkundig geschoolde docent struikelde daarover in het BB-examen 2003. Maar dat terzijde. Zeker nu bij wiskunde de x en y door echte dingen zijn vervangen, moeten die echte dingen voortdurend benoemd worden: heb je het over het aantal schoenen of over de prijs per paar? Dat helpt leerlingen om hun werk te structureren, maakt dat ze weten waarmee ze bezig zijn, helpt ze bij het vinden van een oplossing. Heel goed dat de leraar er voortdurend naar vraagt. Niets op tegen ook om daarover feedback te geven die telt en gevoeld wordt. Maar: bij het vinden van een oplossingsstrategie *dient* het vragen naar de eenheid een doel, het *is* geen doel op zichzelf. Wie eenmaal het probleem (inclusief 'eenheden') helder heeft, zal de eenheden niet voortdurend vermelden - als hij tenminste niet gericht is op het scoren op punten maar op oplossen. Als in de opgave wordt gevraagd naar paren schoenen, dan is het voor de leerling zonneklaar dat hij met het antwoordgetal paren schoenen bedoelt. Hij zet er dus niet 'paren schoenen' achter. Doen wij ook niet als wij voor ons zelf iets proberen op te lossen. Moeten we het dan wel afstraffen op het examen?
De leerling vertoont het gewenste oplossingsgerichte gedrag, komt tot het goede resultaat en doet dat ook nog eens in zo min mogelijk woorden. Wat willen we nog meer?

Breien en andere notatiezonden

Dan het breien.
Voorbeeld: schrijf de berekening op bij $3 \times 8 + 2$.
De leerling noteert: $3 \times 8 = 24 + 2 = 26$.
Heel erg. Want 3 maal 8 is geen 26!
We maken het de leerlingen in onze notatie wel lastig: het gelijkteken is hier zowel vergelijkings- als bewerkingsteken. Lees '=' niet als '*is gelijk aan*' maar als '*wordt*' en het is ineens goed...
Maar los daarvan, 3 maal 8 is geen 26, dus wat hier staat is niet goed – niet goed opgeschreven bedoel ik. Correct opschrijven helpt enorm bij het zoeken naar een oplossing. Tussenstappen opschrijven bij een berekening ook. Het is dus verantwoord (om niet te

FIGUUR 1 Uit het Correctievoorschrift examen VMBO-GL en TL 2003
FIGUUR 2 Uit het Correctievoorschrift examen VMBO-BB 2003

Vraag	Antwoord	Scores
	SFEERLICHT	
1	**maximumscore 2**	
	60(°)	
2	**maximumscore 3**	
	• De oppervlakte van het grondvlak van het ronde gat is ($\pi \times 1{,}9^2 =$) 11,34... (cm^2)	2
	• De inhoud van het ronde gat is (1,2 × 11,34... =) 13,6 (cm^3)	1
3	**maximumscore 6**	
	• De hoogte van het grondvlak van het prisma met de stelling van Pythagoras berekenen: $\sqrt{10^2 - 5^2}$	2
	• De hoogte is 8,66... (cm)	1
	• De oppervlakte van het grondvlak van het prisma is ($\frac{1}{2} \times$ 8,66...× 10 =) 43,30... (cm^2)	1
	• De inhoud van het prisma is (2 × 43,30... =) 86,60... (cm^3)	1
	• De inhoud van een sfeerlichthouder is (86,60... — 13,6 =) 73 (cm^3)	1

3 VAKSPECIFIEKE REGELS

Voor dit centraal schriftelijk examen wiskunde BB kunnen maximaal 70 scorepunten worden behaald.

Als in een berekening een notatiefout is gemaakt en als gezien kan worden dat de kandidaat juist gerekend heeft, wordt hiervoor geen scorepunt afgetrokken.

zeggen noodzakelijk) dat de docent zijn leerlingen daarop wijst. Dat hij het afdwingt. Doordat hij het zelf consequent doet, doordat hij zijn leerlingen erop wijst, doordat hij leerlingen die zichtbaar structureren, daarvoor beloont.
Maar dat hoeft nog niet te betekenen dat die zichtbare structuur ook in het eindexamen moet worden beloond. Goede examenvraagstukken kan de leerling oplossen door – even kort door de bocht – gebruik te maken van zijn gezond verstand én van gereedschappen en technieken die hij in het voorafgaande onderwijs heeft geleerd. Inclusief het uitvoeren van de berekening, het intoetsen van de juiste toetsen van de rekenmachine dus. Het opschrijven van de ingetoetste berekening brengt de oplossing niet dichterbij. Als we willen dat onze leerlingen worden beoordeeld worden op het vermogen een vraagstuk goed op te lossen, dan moeten we soepel omgaan met het weglaten van tussenstappen – of van eenheden. Als we onze leerlingen vooral willen beoordelen op het vermogen (of de bereidheid) om alles precies zo te doen als wij willen, dan moeten we vooral elke tussenstap, elke eenheid van punten voorzien.

Correctievoorschrift

Zet het correctievoorschrift 2003 docenten niet op het verkeerde been? Als bij het examen berekeningen tussen haakjes staan, gaan docenten dan niet dit belangrijke aspect in hun lessen verwaarlozen?
Natuurlijk, het centraal examen hééft effect op het voorafgaande onderwijs. Het beoordeelt niet alleen leerlingen, het houdt ook de docent een spiegel voor. De mores bij het centraal examen beïnvloeden de mores in het voorafgaand onderwijs.
Maar nu even toegespitst op eenheden en tussenberekeningen. Misschien is er na het zien van het correctievoorschrift 2003 een enkele docent die besluit, ook in de les vanaf klas 1, niet meer op tussenberekeningen of eenheden te letten. De meeste docenten echter weten té goed dat je in de voorbereiding tusseneisen kunt en moet stellen, ook als die later niet meer expliciet aan de orde zijn. En zij hebben heel goed door dat het letten op regels, het eisen van tussenberekeningen, ook pedagogisch goed werkt: het geeft leerlingen houvast, motiveert tot leren. Een centraal examen kan tot op zekere hoogte docenten corrigeren – kan goede docenten wijzen op andere, belangrijke accenten. Maar het kan docenten niet opvoeden, het kan niet van slechte docenten goede maken. Die enkeling is een hopeloos geval, hoe het correctievoorschrift er ook uitziet.

Zoeken naar een evenwicht

Natuurlijk, dit is zwartwit gesteld. Het is goed dat leerlingen af en toe gevraagd wordt te 'vertellen' hoe ze aan een antwoord komen. Dat het louter vermelden van een antwoord (een getal) niet altijd voldoende is. Dat geldt ook voor het examen - in 2003, of 2004, of 2005. En in BB, KB, GL/TL, havo en vwo.
Maar aan de andere kant: als je consequent vooral let op elke *vermeld*e tussenstap, op elke eenheid, op elke afwijking van de officiële notatie, krijg je dan nog een score die gelijke tred houdt met het vermogen van de leerling om zijn wiskundige vaardigheid in te zetten bij het oplossen van problemen?
De correctievoorschriften bij het examen vmbo 2003 zoeken een evenwicht. De kandidaat moet laten zien hoe hij aan het antwoord komt. Maar niet elke tussenstap hoeft zichtbaar te zijn. Met, zoals uit de reacties bleek, voor docenten onvoldoende 'achtergrond'. Over de vraag waar het evenwicht ligt, wat wel en wat niet meer vermeld kan worden, daarover kun je van mening verschillen. In de praktijk zal het evenwicht moeten groeien – bij de makers, en bij de afnemers van het examen.

Noot

[1] De CEVO-Examenlijn is bedoeld voor het melden van fouten of onvolkomenheden in een examen of het bijbehorende correctie-voorschrift.
De CEVO-Examenlijn is als volgt te bereiken:
fax: 030-2843056, tel.: 030-2843055,
e-mail: via www.eindexamen.nl

Over de auteur

A. Algra (1952) was van 1974 tot 2000 werkzaam als wiskunde-docent en schoolleider in het voortgezet onderwijs. Thans is hij werkzaam bij de CEVO (Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo), onder meer als projectleider voor de vernieuwing van de examens in de basisberoepsgerichte leerweg. Zijn e-mailadres is a.algra@cevo.nl.

1373. Het trapezium ABCD is rechthoekig in A en B; AC = AD. Het snijpunt van de diagonalen is S. Bewijs, dat AB de cirkel (S, SC) raakt.

1374. Gegeven zijn de cirkel μ met middelpunt M, de lijn l, die μ niet snijdt, en het punt P, dat niet tot μ of l behoort.
Construeer de lijn door P, die μ in A en B snijdt zo, dat de som van de afstanden van A en B tot l een gegeven grootte s heeft.

1375. Gegeven zijn de cirkel μ met middelpunt M, het punt A op μ en de lijn l, die μ niet snijdt. De door M gaande loodlijn van l snijdt μ in P en S; P ligt verder van l dan S.

a. Construeer de cirkel γ, die μ in A uitwendig raakt en ook l raakt.

b. Bewijs, dat P, A en het raakpunt Q van γ en l collineair zijn.

c. Een door P gaande lijn raakt γ in T. Bepaal de verzameling van T bij veranderlijke A op μ.

1376. Het grondvlak van de piramide T–ABCD is een vierkant met zijde a; $\angle$ TAB = 60°, $\angle$ TAD = 90°, TA = TC.

a. Bewijs, dat TB loodrecht op het grondvlak staat.

b. Heeft de piramide een omgeschreven bol? Zo ja, druk dan de straal R in a uit.

c. Heeft de piramide een ingeschreven bol? Zo ja, druk dan de straal r in a uit.

1377. Het voorvlak ABFE van de kubus ABCD–EFGH is evenwijdig met het vlak van tekening. Op het verlengde van EH ligt het punt P zo, dat EH = HP is.
Construeer in de projectiefiguur het snijpunt van het vlak ABFE en de as van de rechte cirkelkegel, waarvan drie beschrijvenden langs PH, PD en PF vallen.

1378. Elk viervlak, waarvan de ribben uitsluitend de lengten a, $2a$ en $3a$ hebben, heeft juist één paar onderling loodrechte ribben. Bewijs dat.

Vraagstukken uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 51 (1963-1964). Deze vraagstukken waren afkomstig uit het herexamen 1961 voor de akte wiskunde l.o.

N.B. Bezitters van de akte l.o. waren bevoegd les te geven in het (m)ulo. Zie hiervoor het hoofdstuk van Klaske Blom in Honderd jaar wiskundeonderwijs (2000).

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

Rechte lijn maal rechte lijn geeft parabool?

Een Praktische Opdracht 'Productfuncties' (vwo-4)

Probleemstelling

We gaan in dit onderzoek verbanden tussen rechte lijnen en parabolen onderzoeken. Deze lijken misschien niets met elkaar te maken te hebben, maar dat is toch wel zo.
Bekijk maar eens de twee rechte lijnen bij

$$f(x) = x + 3 \text{ en } g(x) = -\tfrac{1}{2}x + 2 .$$

Als je f en g met elkaar vermenigvuldigt en je laat de grafiek van

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

tekenen, dan zul je zien dat dit een parabool is. (Denk aan je TI-83: $Y_3 = Y_1 * Y_2$)

Materiaal

Voor dit onderzoek heb je nodig:
- pen, potlood, kladpapier,
- grafische rekenmachine om snel grafieken van functies te tekenen,
- je wiskundekennis.

Stappenplan

Het onderzoek van de bovenstaande probleemstelling bestaat uit drie delen:

A. Probleem verkennen

Onderzoeksvraag 1: Lijn maal lijn geeft parabool?
Hierboven staan twee functies vermeld.
Onderzoek of het product van de twee bijbehorende lijnen een parabool is en verklaar dit met behulp van een berekening.
Probeer ook nog eens een paar andere lijnen. Welke conclusie trek je?

Onderzoeksvraag 2: Welke samenhang is er tussen de nulpunten?
Als je goed naar bovenstaand voorbeeld kijkt, zie je dat de nulpunten van de parabool samenvallen met de nulpunten van de rechte lijnen.
Onderzoek of dat toeval is, of dat dat in andere gevallen ook zo is. Probeer daarna een algemene verklaring voor dit verschijnsel te geven of aan te geven waarom het niet altijd zo is. Welke conclusie trek je?

B. Eigen onderzoek

Onderzoeksvraag 3: Lijn maal parabool geeft …?
Onderzoeksvraag 4: Parabool gedeeld door lijn geeft …?

Onderzoek de twee vragen en neem bij elke vraag in je verslag op:
1. de onderzoeksvraag,
2. één of meerdere voorbeelden,
3. één of meerdere tekeningen,
4. berekeningen en wiskundige verklaringen,
5. een conclusie.

C. Vervolgonderzoek

Onderzoeksvraag 5: Is elke parabool te schrijven als lijn maal lijn?
Je hebt nu gezien dat je een parabool krijgt wanneer je twee lijnen met elkaar vermenigvuldigt en je hebt onderzocht wat die lijnen met die parabool te maken hebben.
Onderzoek in de verdieping of je bij elke parabool twee bijbehorende lijnen, die je met elkaar vermenigvuldigt kunt vinden. Geef hierbij ook weer voorbeelden, verklaringen en conclusies.

Rubric bij opdracht 'Productfuncties'

	Kan beter	Voldoende	Goed	Uitstekend	Weging
Probleemstelling (een echt probleem heeft veel kanten, voor goed onderzoek is het nodig het probleem duidelijk af te bakenen)	De probleemstelling is niet/onduidelijk omschreven.	Je neemt de probleemstelling over uit de beschrijving van de praktische opdracht.	Je formuleert de probleemstelling in een paar algemene zinnen.	Op basis van het verkennen van het probleem formuleer je het probleem in een paar heldere volzinnen.	5 %
Probleem verkennen (A) (welke factoren spelen een rol, hangen die van elkaar af, welke resultaten leveren concrete berekeningen op?)	Je onderzoekt de twee gegeven vraagstellingen met een voorbeeld en trekt hieruit een (verkeerde/ geen) conclusie.	Je onderzoekt de twee gegeven vraagstellingen met enkele voorbeelden en tekeningen en trekt daaruit een conclusie (waar, niet waar, waar als...).	Je onderzoekt de vraagstellingen met een reeks voorbeelden die systematisch gekozen zijn, en geeft een volledige conclusie.	... en je geeft vanuit een analyse van algemene formules van lijn en parabool een algemeen geldende wiskundige verklaring.	15 %
Plan maken (B) (vanuit experimenteren met een aantal voorbeeldfuncties: Onderzoeksvragen opstellen)	De onderzoeksvragen zijn niet/onduidelijk omschreven.	Je geeft de twee onderzoeksvragen.	Je geeft twee onderzoeksvragen waarbij je ook al aangeeft welk vermoeden je hebt over de uitkomst.	... en je geeft ook nog andere onderzoeksvragen en vermoedens die bij je opkomen, in samenhang met de gegeven vragen.	20 %
Plan uitvoeren (B) (vermoedens verder onderzoeken, door voorbeelden van diverse functies, zoek ook naar uitzonderingen)	Je onderzoekt de twee vraagstellingen met een voorbeeld.	Je onderzoekt de twee vraagstellingen met enkele voorbeelden, tekeningen en berekeningen.	Je onderzoekt de vraagstellingen met een reeks voorbeelden die systematisch gekozen zijn.	... en je geeft vanuit een analyse van algemene formules van lijn en parabool een algemeen geldende wiskundige verklaring.	20 %
Conclusies trekken (B) (Wat heb je nu ontdekt, wat geldt bij welke aannames, welke uitzonderingen, ...)	Er is geen / een verkeerde conclusie getrokken.	Je trekt conclusies (waar, niet waar, waar als...).	Je geeft volledige conclusies.	... en je trekt ook conclusies over de manier waarop je het onderzocht hebt.	10 %
Verdieping (C) (vervolgonderzoek met dezelfde stappen als hiervoor)	Je onderzoekt de gegeven vraagstelling met een voorbeeld en trekt geen / een verkeerde conclusie.	Je onderzoekt de gegeven vraagstelling met enkele voorbeelden en tekeningen en trekt daaruit een conclusie.	Je onderzoekt de vraagstelling met een reeks voorbeelden die systematisch gekozen zijn en geeft een heldere wiskundige verklaring en volledige conclusie.	... en je geeft vanuit een analyse van algemene formules van lijn en parabool een algemeen geldende wiskundige verklaring en conclusie.	15 %
Presentatie	Het is een slordig werkstuk waarin het onderzoek niet duidelijk wordt omschreven.	Het werkstuk bevat een weergave van het voorwerk, het onderzoek, de complexe opdracht en de uitwerking hiervan. En het ziet er goed verzorgd uit.	... en het is overzichtelijk ingedeeld. De vragen van de complexe opdracht zijn helder geformuleerd. De taal is correct. De tekstverwerking en de lay-out is overzichtelijk.	... en het is een leesbaar stuk voor medeleerlingen die de opdracht niet gedaan hebben.	10 %
Planning	Verslag te laat.			Verslag op tijd.	5%

RUBRICS

Een hulpmiddel bij het beoordelen van praktische opdrachten

[Lambrecht Spijkerboer en Patricia Straatman]

Vooraf

Bij de start van de Tweede fase waren de plannen eerst zo dat de praktische opdrachten voor 60% het cijfer voor wiskunde zouden bepalen. Al rap werd dit percentage naar beneden bijgesteld. De schrik zat er al vroeg in dat de praktische opdrachten het wiskundecijfer onevenredig zouden beïnvloeden op andere dan *wiskundige* kennis en vaardigheden. Veel vrees werd ingegeven door het feit dat er nog weinig ervaring was met het beoordelen van algemene vaardigheden zoals onderzoek doen, presenteren, samenwerken, formuleren en jezelf beoordelen. Inmiddels is veel meer ervaring opgedaan met praktische opdrachten als manier om sommige onderdelen van de leerstof mee af te sluiten. In 2002-2003 heeft het APS met verschillende docenten samengewerkt om te komen tot een beter hanteerbaar beoordelingsmodel voor praktische opdrachten. Dit heeft geleid tot de ontwikkeling en gebruik van het beoordelingsinstrument Rubric.

Beoordelen van praktische opdrachten

Praktische opdrachten worden op diverse manieren ingezet. Leerlingen krijgen een gesloten of een open opdracht, soms met beperkte vrije onderwerpskeuze. Bijna alle praktische opdrachten eindigen in het maken van een verslag dat wordt beoordeeld door één docent. De manier van beoordelen is verschillend. Er zijn docenten die ‘stapeltjes’ maken. Zij geven veelal een 6, 7 of 8. Een 9 wordt alleen gegeven als het zeer uitmuntend is en een 10 wordt nooit gegeven. Andere docenten lezen al de leerlingenwerken nauwkeurig door en verdelen punten voor de opzet, lay-out, inhoud, enzovoort. De beoordelingscriteria worden soms vooraf kenbaar gemaakt aan de leerlingen. Meestal is de beoordeling erg subjectief.
Docenten en leerlingen ervaren het werken aan een praktische opdracht als leuk, maar over het algemeen geven de docenten toe dat het begeleiden van leerlingen veel tijd kost en dat de resultaten helaas vaak tegenvallen.

Bij praktische opdrachten wordt naast de wiskundige inhoud vaak ook een flink beroep gedaan op *algemene vaardigheden*. Bij het beoordelen van vaardigheden is het voor de docent van belang dat hij duidelijk kan aangeven wat hij wel en niet van de leerling verwacht. Welk gedrag is onder de maat, wat is beginner-gedrag, wat is voldoende en wat doet een leerling die de vaardigheid echt goed onder de knie heeft? Heeft de docent hier heldere beelden bij en weet hij dit over te brengen aan de leerlingen, dan zijn de leerlingen beter in staat om het gewenste gedrag ook werkelijk aan te leren. Het aanleren en beoordelen van vaardigheden zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden.

Vaardigheden beoordelen gaat anders dan kennis boordelen. Bij vaardigheden is goed of fout minder helder te definiëren. Het is telkens de vraag wat je als docent echt onder de maat vindt, en wat voldoende of goed is. Het beoordelen van vaardigheden is wellicht subjectiever dan het beoordelen van kennis. Deze subjectiviteit kan verminderd worden door precies te omschrijven wat je als docent verwacht. Dat wordt in een Rubric omschreven.

Wat is een Rubric?

Een Rubric is een beoordelingstabel met criteria in de linkerkolom en waarderingscategorieën ernaast. Met de criteria geeft de docent aan op welke elementen specifiek gelet wordt bij de beoordeling van een opdracht. Elke waarderingscategorie omvat per criterium een beschrijving op basis waarvan de beoordeling plaatsvindt.

Een voorbeeld van een Rubric ziet u op pagina 270.[2]
In dit voorbeeld is elk criterium beschreven in vier categorieën: 'kan beter', voldoende, goed en uitstekend. Het aantal criteria en het aantal categorieën zijn natuurlijk variabel. Dit is afhankelijk van de opdracht waarbij de Rubric hoort en van de docent die de Rubric maakt.
Behalve als model voor de docent om een opdracht te beoordelen, kan een Rubric ook worden gebruikt als zelfevaluatiemodel voor de leerling.

Zelfevaluatiemodel

Wanneer de docent, gelijktijdig met de opdracht, de bijbehorende Rubric aan de leerling geeft, kan de leerling aan de hand van deze Rubric zelfstandig controleren of hij of zij voldoet aan de verwachtingen en eisen van de docent. De Rubric biedt op deze wijze voor de leerling duidelijkheid en structuur. Dit alles leidt tot verbetering van de kwaliteit van het leerling-werk en tot meer zelfstandigheid!
Een extra en bijzonder interessante mogelijkheid is, de Rubric door de leerling te laten gebruiken om zijn of haar werk daadwerkelijk zelf te beoordelen. Deze beoordeling wordt dan gelijktijdig met de opdracht ingeleverd. Het geeft de docent inzicht in de motivatie van de leerling en de wijze waarop de leerling met een Rubric om gaat.

Beoordelingsmodel

Wanneer het leerling-werk is ingeleverd, kan de docent dit nakijken aan de hand van de bijbehorende Rubric. Per criterium kan namelijk precies worden aangeven in welke kolom het leerling-werk thuishoort. Wanneer een puntenverdeling bij de Rubric is gemaakt, kan vervolgens het cijfer worden bepaald. De punten-verdeling kan op verschillende manieren worden vastgesteld.

Een voorbeeld.
Zet de waarderingen 4, 6, 8 en 10 boven de kolommen en bepaal aan de hand daarvan het eindcijfer volgens het gewogen gemiddelde. Gebruik hierbij de vooraf vastgestelde percentages bij de criteria.

Veel docenten kennen het probleem dat een gelijksoortige opdracht door de ene collega hoger of lager wordt beoordeeld dan door de andere. Het beoordelen op een gestructureerde manier met Rubrics, zorgt ervoor dat docenten gelijke criteria en waarderingsnormen gebruiken. Het komt de kwaliteit van de beoordeling ten goede, en dat is winst voor docenten èn leerlingen.

Gebruik

Een Rubric kan worden gebruikt bij elk soort opdracht - of het nu gaat om een practicum, een poster, een praktische opdracht of een profielwerkstuk. Een Rubric geeft goede criteria om een werkstuk zo objectief mogelijk te beoordelen, werkt tijdbesparend en creëert daardoor ruimte voor eventueel meer van dit soort activiteiten. Een goede Rubric is meerdere malen, bij verschillende opdrachten, te gebruiken. De tijds-investering voor het ontwerpen van een Rubric wordt daarmee al snel terugverdiend.

Rubrics benutten bij het aanleren van vaardigheden

Het *aanleren* van een vaardigheid is meer dan die vaardigheid gewoon een paar keer laten doen. Voordat de leerlingen worden *beoordeeld*, moeten ze de gelegenheid krijgen deze vaardigheid regelmatig te oefenen, met voldoende sturing. Hierbij is een Rubric een goed hulpmiddel om een dergelijke vaardigheid steeds beter onder de knie te krijgen. Zo kan de leerling vanuit het beginner-gedrag steeds verder opschuiven naar het expertgedrag, zoals in de Rubric omschreven.

Zelf een Rubric ontwerpen

Er zijn diverse (meest Amerikaanse) websites[1] die u kunnen helpen bij het ontwerpen van een Rubric aan de hand van zelf gekozen criteria.
U kiest dan voor een onderwerp, bijvoorbeeld 'mondelinge presentatie', waarna u kunt kiezen uit een aantal bijpassende criteria. De Rubric wordt dan, in vier categorieën, automatisch ingevuld. U hebt daarbij de mogelijkheid om de teksten naar eigen inzicht aan te passen.
U kunt natuurlijk ook zelf een Rubric ontwerpen. Begin dan met het bepalen van de criteria. Let daarbij op het aantal: niet teveel! Het geheel moet overzichtelijk blijven. Ga uit van minimaal vijf en maximaal twaalf criteria. In de meeste gevallen werkt een aantal van vier categorieën het prettigst.
Per criterium dient u een omschrijving bij de categorieën te maken. Begin bij de categorie 'uitstekend', vervolgens de categorie 'kan beter' (of 'onvoldoende' o.i.d.) en daarna de tussenliggende categorieën.
Probeer de Rubric zó in te vullen dat het een leesbaar geheel is voor de leerlingen; zij moeten er uiteindelijk ook mee werken. Zorg ervoor dat de Rubric op één pagina past, zodat het een overzichtelijk schema wordt. Een teveel aan tekst schrikt de leerlingen af!
Nadat een opdracht voor de eerste keer met een Rubric is uitgevoerd zult u merken dat het nakijken van het leerlingenwerk u beter in staat stelt het beginner-gedrag te omschrijven. Het is verstandig dit in samenwerking met collega's te doen. Samen een Rubric ontwerpen bij een (bestaande) praktische opdracht maakt dat je intensief over de vaardigheid en het beoordelen ervan nadenkt, waardoor het mes aan twee kanten snijdt.

De docent:
- krijgt beter inzicht in de vaardigheid en wat hij daarbij van de leerling verwacht;
- kan de leerlingen de vaardigheid ook beter aanleren;
- heeft meer houvast bij het beoordelen van (het product van) de vaardigheid, waardoor hij objectiever beoordeelt.

De leerling:
- weet beter wat er van hem verwacht wordt;
- leert de vaardigheid beter;
- levert een hogere kwaliteit.

Afstudeeronderzoek

In het kader van het didactisch afstudeeronderzoek voor de eerstegraads lerarenopleiding wiskunde aan de Fontys Lerarenopleiding Tilburg hebben zes studenten onderzoek gedaan naar het gebruik van Rubrics.
Het onderzoeksproject is zeer geslaagd. Het gebruik van Rubrics is inmiddels uitgebreid tot allerlei opdrachten in de onderbouw en de Tweede Fase, zoals GWA's, het zelfstandig bestuderen van leerstof en het presenteren daarvan.
De leerlingen nemen een opdracht waarbij een Rubric wordt aangeboden erg serieus. Dat is aan de resultaten te zien. Ze besteden meer aandacht aan de juiste verwerking van de inhoudelijke aspecten, die ook daadwerkelijk zijn verbeterd. Leerlingen geven aan met behulp van de Rubric concreter bezig te kunnen zijn aan de opdracht, ze vinden het prettig duidelijkheid te hebben over de beoordeling. Zestig procent van de leerlingen is ervan overtuigd de opdracht beter te hebben gemaakt dan wanneer ze geen Rubric hadden gekregen. Tevens zijn ze het eens met de eind-beoordeling aan de hand van de gebruikte Rubric.

Tot slot

In het kader van het APS-project 'Beoordelingsvaardigheden' zijn Rubrics ontworpen voor meerdere vakken bij verschillende opdrachten en ook voor een profielwerkstuk. Deze zullen worden gepresenteerd op de Rubrics-conferentie d.d. 20 april 2004 (informatie bij APS).

Noten

[1] - http://rubistar.4teachers.org/
- http://teach-nology.com/web_tools/rubrics/
- www.beoform.nt.bvenet.nl/keuzemenu.html
[2] Het uitgewerkte voorbeeld 'Productfuncties' komt oorspronkelijk uit Moderne wiskunde vwo A1B1 deel 1 en werd aangepast en aangevuld met Rubrics door Ton Konings (APS) in het kader van een project 'Beoordelen van praktische opdrachten in de 2e fase'.

Over de auteurs

Lambrecht Spijkerboer (e-mail: l.spijkerboer@aps.nl) is werkzaam als onderwijskundig medewerker van APS-wiskunde.
Patricia Straatman (e-mail: patricia@lucky.demon.nl) is werkzaam als wiskundedocente op het Maurick College in Vught. Zij geeft voornamelijk les in de tweede fase.

Verschenen / Wiskunde met TI-83 Plus SE Auteur: Jan Van Poppel

Uitgever: Garant Uitgevers nv, Antwerpen/Apeldoorn
ISBN 90 441 1531 6 Prijs: € 7,50 / 112 pagina's

Over het boek

Dit boek is bestemd voor onderwijs en voor zelfstudie, in eerste instantie voor het Vlaamse onderwijs. Maar het is zeker ook bruikbaar in het Nederlandse.

Uit de inhoud

Rekenen in het basisscherm - Rekenen met breuken en met reële variabelen - Getalnotatie en nauwkeurigheid - Driehoeksmeting - Vergelijkingen - Basisvaardigheden in het lijstenscherm – Constante, eerste en tweede graadsfuncties - Ongelijkheden en stelsels van ongelijkheden van de eerste graad met één of twee onbekenden - Vergelijking van een rechte - Beschrijvende statistiek - Vectoren - Transformaties van het vlak - Simuleren van kansexperimenten - Elementaire functies - Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen - Deelbaarheid - Ontbinden - Rijen - Analytische meetkunde - Meetkundige applicaties - Lijsten groeperen, degroeperen, oproepen en doorgeven.

Chebyshev-polynomen

[Rob Bosch]

Enige tijd geleden heb ik Renate, een vwo-6 leerlinge, geholpen met de volgende opgave.

Bepaal de maximale verticale afstand tussen de grafieken van $f(x) = x$ en $g(x) = x^2$ waarbij $0 \le x \le 1$.

Nadat we de opgave samen hadden opgelost en tevens de maximale horizontale afstand tussen de grafieken hadden berekend, vroeg Renate mij welke variaties op deze opgave op een proefwerk gevraagd zouden kunnen worden. Als mogelijke variatie gaf ik de volgende opgave.

Gegeven de functie $f(x) = x^2$ met $0 \le x \le 1$. Voor welke lineaire functie $g(x) = ax + b$ is de maximale verticale afstand tussen de grafieken van f en g minimaal?

Alhoewel ik aangaf dat deze opgave op het aanstaande proefwerk niet te verwachten was, wilde Renate, niet gerustgesteld door mijn overtuiging, toch wel even het antwoord zien.
Naar de grafieken kijkend kwamen we er samen achter, dat de maximale verticale afstand in ieder geval ook in de beide eindpunten bereikt moest worden. Zo niet, dan schuiven we de lijn evenwijdig naar boven of beneden. Of anders geformuleerd: de verschilfunctie, met als grafiek een parabool, heeft op [0, 1] immers een inwendig extreem en twee randextremen. Als deze niet alle drie gelijk zijn, kunnen we de parabool naar beneden of naar boven schuiven, waardoor de absolute waarde van het extreem kleiner wordt.
Uit deze observatie volgt dat $-b = 1 - a - b$ waaruit we $a = 1$ vinden. Met behulp van differentiëren vinden we dat de maximale afstand op $\langle 0, 1\rangle$ optreedt bij $x = \frac{1}{2}$. De maximale afstand is dan $\frac{1}{4} + b$. Gelijkstellen van deze afstand met de afstanden in de eindpunten geeft $-b = \frac{1}{4} + b$ en dus $b = -\frac{1}{8}$. De gevraagde lijn is $y = x - \frac{1}{8}$ met een bijbehorende maximale afstand van $\frac{1}{8}$.

Nu even iets anders. Kan de lezer de grafieken tekenen van de ‘goniometrische’ functies
$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, $n \ge 0$, $x \in [-1, 1]$?
Voor $n = 0$ en $n = 1$ zal dat wel lukken, want
$T_0 = \cos 0 = 0$
$T_1 = \cos(\arccos x) = x$

De functie $T_2(x) = \cos(2 \arccos x)$ lijkt al een stuk lastiger. Maar met de formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ voor de dubbele hoek vinden we

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$$

De lezer kan door gebruik te maken van de gonioformules voor $\cos(3x)$ en $\cos(4x)$ nagaan dat $T_3(x)$ en $T_4(x)$ ook niet zo moeilijk zijn als ze er uit zien (zie figuur 1).
Uit de ‘bekende’ gonioformules

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

volgt dat
$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos(x)\cos(y)$$

Kiezen we in de laatste uitdrukking $x = n \cdot \arccos x$ en $y = \arccos x$, dan vinden we

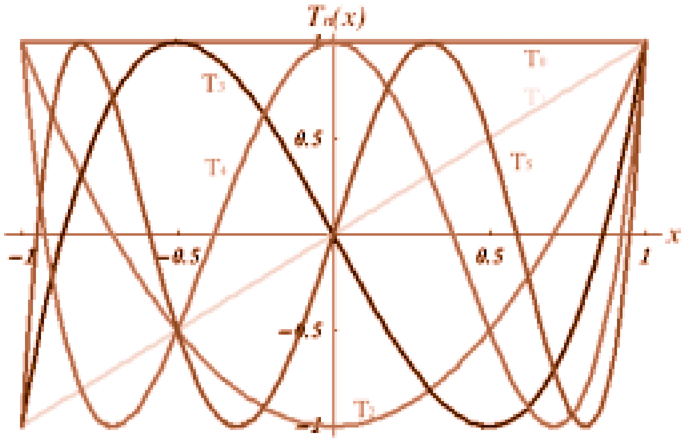
$$\cos((n + 1) \cdot \arccos x) + \cos((n - 1) \cdot \arccos x) = 2\cos(n \cdot \arccos x) \cdot \cos(\arccos x)$$

of anders gezegd:
$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

De functies T_n voldoen dus aan de recursie

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \ge 1 \qquad (1)$$
$$T_0(x) = 1 \qquad (2)$$
$$T_1(x) = x \qquad (3)$$

Met deze recursie vinden we eenvoudig:
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
We zien dat T_n een n-degraads polynoom met leidende coëfficiënt 2^{n-1} is. De polynomen T_n heten Chebyshev-polynomen, naar de Russische wiskundige P.L. Chebyshev (1821-1894).
De Chebyshev-polynomen hebben een aantal aardige eigenschappen. Zo gaat men gemakkelijk na dat het polynoom T_n op $[-1, 1]$ $n + 1$ extremen heeft (inclusief randextremen), die alternerend $+1$ en -1 zijn.



FIGUUR 1

P.L. Chebyshev

Deze eigenschap maakt de polynomen erg nuttig in de approximatietheorie. Als bijvoorbeeld een polynoom benaderd wordt met een polynoom van lagere graad, dan is de verschilfunctie weer een polynoom op bijvoorbeeld $[-1, 1]$. De extremen van dat polynoom moeten in absolute waarde gelijk zijn. Is dit niet het geval, dan schuiven we de verschilfunctie weer naar boven of beneden, waardoor de absolute waarde van het extreem daalt.
Zo geldt bijvoorbeeld de volgende stelling.

Als p een polynoom is van graad $n + 1$ met domein $[-1, 1]$, dan is de beste polynoombenadering van p, van graad n of kleiner, gelijk aan $p(x) - cT_{n+1}(x)$, waarbij c zo gekozen wordt dat er een polynoom van graad n of kleiner verkregen wordt.

Onder 'beste benadering' wordt hier verstaan een benadering, waarbij de maximale verticale afstand tussen de grafieken minimaal is.
Het derdegraads polynoom $p(x) = 8x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ wordt op [-1, 1] het best benaderd door

$$8x^3 + 2x^2 - 4x + 1 - 2(4x^3 - 3x) = 2x^2 + 2x + 1$$

Door geschikte transformaties kan men bovenstaande stelling uitbreiden tot ieder eindig interval.
Als we een polynoombenadering zoeken op het interval $[0, 1]$, passen we de transformatie $2x - 1$ toe die $[0, 1]$ afbeeldt op $[-1, 1]$.
De beste lineaire benadering van $f(x) = x^2$ op $[0, 1]$ is nu

$$x^2 - cT_2(2x - 1) = x^2 - c(8x^2 - 8x + 1)$$

waarbij c weer zo gekozen wordt dat de kwadratische term wegvalt. De beste lineaire benadering is dus

$$x^2 - \frac{1}{8}(8x^2 - 8x + 1) = x - \frac{1}{8}$$

Zo had ik het Renate dus ook kunnen vertellen.

Literatuur

C.F. Gerald, P.O. Wheatley: Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley, 1983.

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.

HET BELANG VAN IJS ETEN

[Victor Thomasse]

Ruimtelijk inzicht?

Toen ik 's avonds op de lerarenopleiding achter in het lokaal aanschoof, gebeurde er vooraan een klein wonder. De docent vakdidactiek hield een vuistgrote tetraëder omhoog die in zijn geheel strak was verpakt in papier. Nou ja, afgezien dan van een klein spleetje waar je nog net één ribbe door kon zien (zie figuur 1). Of hij dat viervlak er nu uit kon halen zonder het papier te scheuren, was de vraag. Maar dat lukte natuurlijk nooit! Zeker niet gezien die twee scherpe punten die aan de andere kant loodrecht op de nauwe opening stonden. Ik stak mijn vinger op om aan te geven dat ik het niet voor mogelijk hield, en keek intussen om me heen. Met mij dacht ongeveer de helft van de studenten dat het niet kon. Maar dat betekende dus ook dat de helft dacht dat het wèl mogelijk was, ondanks alle wiskundige scholing. En dat deed weer het ergste vrezen voor de kwaliteit van de stereometrische vakken: waarom zagen ze niet dat dit uitgesloten was?!

Maar het kon dus wèl.

De docent pakte aan de kant tegenover de spleet de tetraëder tussen duim en wijsvinger vast, en jawel hoor... langzaam duwde hij de driedimensionale vorm door de nauwe opening. Als een kameel die alle aardse last afwerpt en door het oog van een naald kruipt (zie figuur 2 en 3). Wat overbleef was het omhulsel en de kale piramide.

Uitproberen en begrijpen

In de trein naar huis wist ik: dit móest ik de volgende les aan de brugklassers laten zien. We zouden net beginnen aan een hoofdstuk over ruimtefiguren, dus dit was de perfecte smaakmaker. Zouden zij ook denken dat het niet kon? Een probleem was dat ik het niet alleen moest demonstreren, maar ook nog kunnen uitleggen. Waarom paste die hele tetraëder nou door zo'n kleine opening? Zelf begreep ik de uitleg van de docent over hoeken en ribben maar half. Natuurlijk, na een avondje worstelen met wat trigonometrie zou ik er wel uitkomen, maar ik zocht een eenvoudiger verklaring.

Thuisgekomen direct karton gepakt, er gelijkzijdige driehoekjes uit gesneden en een A4-tje omgewerkt tot een passend jasje. En ja hoor, het werkte weer. De opening begon als spleet ter grootte van een ribbe, maar werd een rechthoek zodra de tetraëder er uit geschoven werd (zie figuur 4). Halverwege kreeg het even de vorm van een vierkant en daarna weer van een rechthoek. De opening eindigde zoals die begon: als een ribbe, maar nu aan de andere kant. En al die tijd paste het viervlak er precies door. Nu ik het zag begreep ik het. Ik duwde de tetraëder weer voor een derde door het gat en trok met potlood een streep over de vier vlakken, op de plaats van de opening.

Het is mijn eigen zelfgemaakte tetraëder, dus ik mag hem ook weer stuk maken. Ik snij het plakband los, vouw hem open en kijk naar de streep. Hij loopt over de driehoekjes in een rechte lijn die steeds even lang blijft (zie figuur 5 en 6). Het is eigenlijk heel logisch: de spleet begint twee ribben lang en dat is steeds precies de lengte van de 'streep' die over de vier vlakken beweegt. De 'buitenste tetraëder', het jasje, heeft immers (vrijwel) dezelfde grootte en een constante omtrek. Dit moest ik kunnen uitleggen aan de brugklas waar ik les aan gaf.

In de les

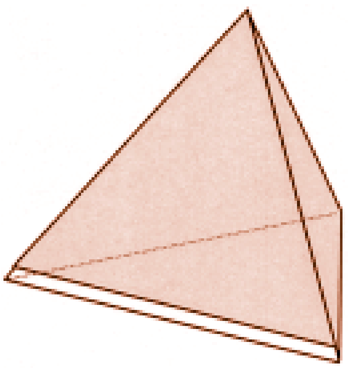
De klas werd snel luidruchtig. Iemand riep dat hij wel door de spleet móest kunnen, want hij was er tenslotte ook door naar binnen gegaan. Dit pareerde ik door – naar waarheid – te zeggen dat ik het papier er eerst met plakband omheen gedaan had en vervolgens pas de opening had gemaakt. Ook raadde ik ze aan niet automatisch te concluderen, dat het wel zou kunnen omdat ik het anders niet zou laten zien. Ik hield een tweede, losse verpakking omhoog: 'Kijk, nog een jasje, misschien heb ik er niet voor niets meer bij me, voor als ze stukgaan bijvoorbeeld.' De klas aarzelde en keek nog eens goed. Maar ruim de helft van de leerlingen dacht toch dat het mogelijk was en stak de vinger op. Als een goochelaar trok ik aan mijn mouwen: *nothing in my sleeves*! Ik duwde het viervlak naar buiten en tekende daarna de uitslag van de figuur op het bord. Ik hield de losse verpakking er naast en besprak de lijn die schuin omhoog bewoog. De klas luisterde nu – op twee meisjes na die nota bene, al was het nog ochtend, over ijsjes aan het praten waren... Stil, de meester was aan het woord!

Of mijn uitleg goed overkwam weet ik niet. Eén meisje bleef sceptisch: waar bleven die twee punten aan het einde dan? Maar een ander vulde mijn uitleg aan. 'Wat er aan de ene kant afging', zei ze, 'komt er natuurlijk

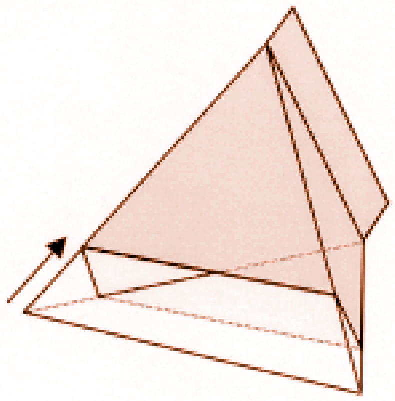
aan de andere kant weer bij.'
Ik biechtte op dat ze het beter deden dan ik en mijn medestudenten. Het streelde hun ego, maar het geweten van één van de meisjes speelde op. Na de les kwam ze bij me. 'Er zijn ook van die ijsjes, meneer.' Toen kwam de viervlakkige aap uit de mouw geschoven: er zijn ijsjes in de vorm van een tetraëder die je zó uit de verpakking duwt. Ze dacht dat ze 'joekels' heten. 'Die zijn erg lekker.'

Over de auteur

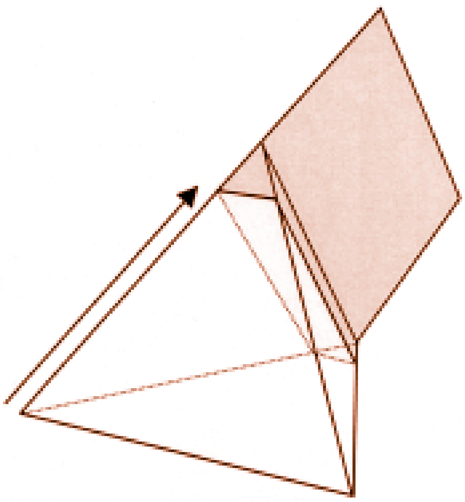
Victor Thomasse (e-mailadres: v.thomasse@chello.nl) haalde zijn bevoegdheid Nederlands al in 1983, maar is daarna vooral in het bedrijfsleven actief geweest. Sinds kort werkt hij weer in het onderwijs en volgt de lerarenopleiding wiskunde.



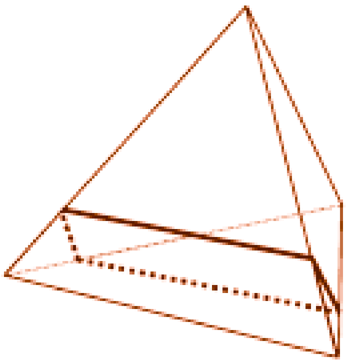
FIGUUR 1



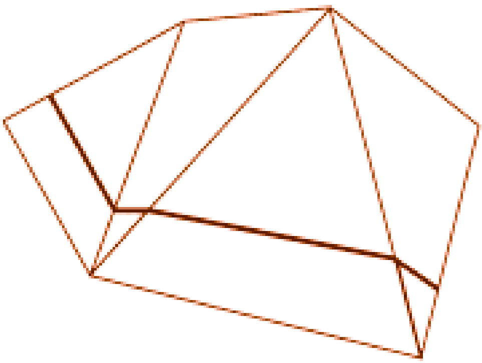
FIGUUR 2



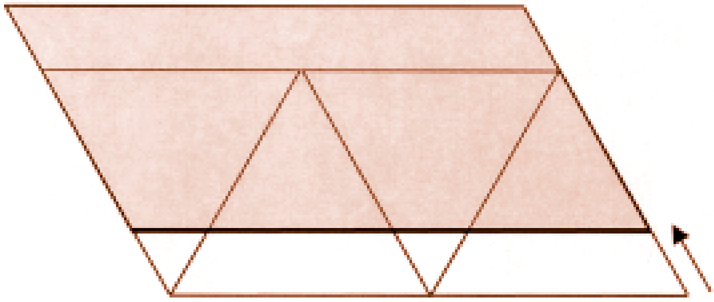
FIGUUR 3



FIGUUR 4



FIGUUR 5



FIGUUR 6

VAKANTIECURSUS 2003

Vooruitblikken op die van 2004 door een terugblik op die van 2003

[Gert de Kleuver]

Thema: dagelijks leven

De jaarlijkse Vakantiecursus is een initiatief van de NVvW, en wordt al sinds 1946 georganiseerd – zowel te Amsterdam op het CWI als te Eindhoven aan de Technische Universiteit.
In 2003 was het thema van deze cursus 'Wiskunde in het dagelijks leven'. De organisatie is nog steeds in de goede handen van onder andere Jan van de Craats en medewerkers van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), Miente Bakker, Wilmy van Ojik en Minnie Middelberg. Verder dient opgemerkt te worden dat het CWI en de TU Eindhoven zaalruimten beschikbaar stellen.
In 2003 kwam het mij beter uit om naar Eindhoven te gaan. Hier was ik alweer enkele jaren geleden voor het laatst geweest. De locatie is prettig en goed bereikbaar met het openbaar vervoer. Jammer vond ik wel dat er geen boekwinkel aanwezig was zoals we die kennen in Amsterdam. Hopelijk kan dat wel worden gerealiseerd in 2004.

De volgende sprekers waren uitgenodigd:
- R. Bosch, met als onderwerp *Politieke macht en onmacht;*
- G.B. Huitema, *Nieuwe generatie telecommunicatietechnieken en –diensten;*
- H.J. van Zuylen, *Routekeuzegedrag en verkeersmanagement;*
- W.A. Timmer, *Mannen in snelle pakken – de weerstand van schaatsers;*
- E. van Zwet, *Statistische analyse van snelwegverkeer;*
- V. Rottschäfer, *Wiskunde voor de rozenkweker;*
- P.J.G. Teunissen, *GPS en wiskunde;*
- M.F.M. Nuyens en R. Planqué, *De wiskunde achter de eurodiffusie*.

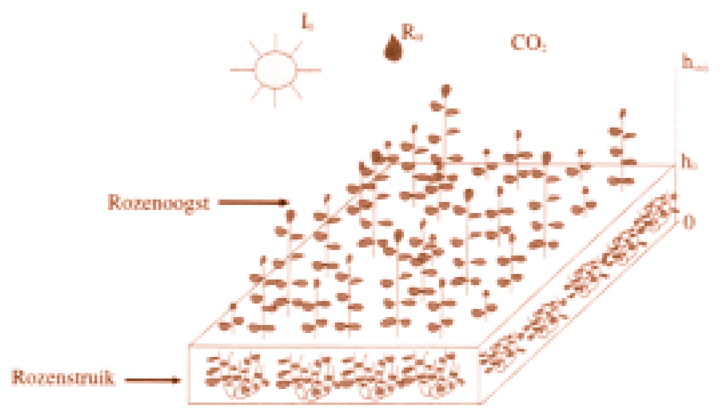
Zoals in voorgaande jaren gebruikelijk wil ik één lezing verder uitwerken. In het *Nieuw Archief voor Wiskunde* (het blad van het Koninklijk Wiskundig Genootschap) wordt in de lopende jaargang ook iedere keer een lezing van de Vakantiecursus geplaatst. De teksten van de voordrachten zijn nogmaals door te lezen in de syllabus die iedere deelnemer aan het begin van de tweedaagse uitgereikt krijgt.

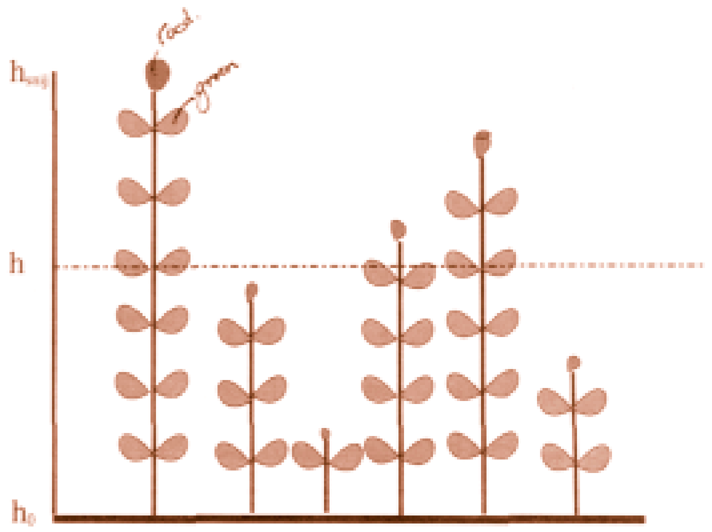
Rozen

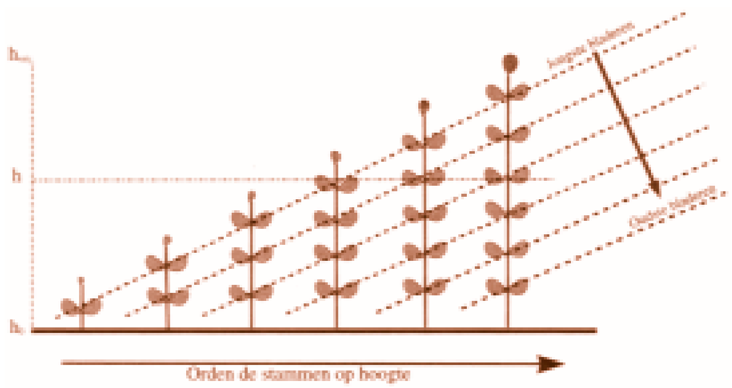
Deze keer was ik erg onder indruk van de lezing van mw. dr. Vivi Rottschäfer over wiskunde voor de rozenkweker. Zij gaf aan dat dit onderwerp afkomstig was uit een studieweek van de Studiegroep Wiskunde in de Industrie - jaarlijks houdt een groep wiskundigen zich binnen dit kader een week bezig met een aanzet tot de oplossing van enkele problemen die door de industrie zijn opgeworpen.
Vanuit deze groep zijn al verschillende malen lezingen gehouden tijdens een vakantiecursus; denk bijvoorbeeld aan de lezing van J. Molenaar (TU Eindhoven en UT) tijdens de Vakantiecursus 2000, 'Wiskunde werkt', over het wikkelen van schutbladen van sigaren. Het aardige is dat het onderwerp 'eurodiffusie' ook afkomstig was van deze zelfde werkgroep.

Probleemstelling:
Kan het kweken van rozen dusdanig gemodelleerd worden dat de productie geoptimaliseerd wordt bij beperkte kosten?
Het gaat hier onder andere om de instelling van de klimaatcomputer zodat een maximale productie bereikt wordt. Zoals een ieder waarschijnlijk wel weet, groeien rozen door assimilatie van CO_2. Dit proces, fotosynthese, vindt plaats in de bladeren. Een constant intern klimaat blijkt niet voldoende om maximale groei te bewerkstelligen, want plotselinge veranderingen in het weer (buiten de kas) en in de seizoenen hebben invloed op de temperatuur en andere condities in de kas.
Er is een lokaal model opgesteld voor de snelheid van fotosynthese van één enkel blad met een bepaalde leeftijd afhankelijk van de temperatuur T_a, de luchtvochtigheid R_H en de concentratie CO_2 in de kas C_a en van de hoeveelheid licht die op een blad valt. Nu blijkt dat de snelheid van fotosynthese P per eenheid bladoppervlakte geschreven kan worden als een vergelijking van de vorm $P = f(P, a, T_a, R_H, C_a, I)$ waarbij a de leeftijd van het blad is en I de hoeveelheid licht die erop valt. De functie f is niet-lineair, f is niet expliciet bekend. Voor verdere informatie over deze functie werd verwezen naar een

FIGUUR 1 Een schets van een geïdealiseerde kas
FIGUUR 2 Een schets van de kas op een bepaald tijdstip







FIGUUR 3 Situatie met een constante groeisnelheid ter vereenvoudiging van de leeftijdsdichtheidsverdeling

verslag van dit experiment in *Proceedings 42nd Eur. Study Group Ind.*, pp. 59-76, 2002.
Met behulp van dit model werd een poging gewaagd om een globaal model van een kas op te stellen. Hiervoor moesten de nodige veronderstellingen worden aangenomen. Deze veronderstellingen moesten representatief zijn voor de groei van rozen. Dit leverde een ideaal model kas op (zie figuur 1) met allereerst de volgende twee aannames:
1. De rozenoogst, bovenin, die bestaat uit één of meer rozenstammen die afgesneden worden – de uiteindelijke rozenproductie.
2. De rozenstruik, onderop, die de stammen ondersteunt en niet geoogst of afgesneden wordt.
De struik heeft een constante hoogte h_0 en bevat bladeren die CO_2 assimileren en dus bijdragen aan de totale hoeveelheid energie die wordt geproduceerd in de planten. De rozenstammen groeien verticaal uit de rozenstruik en worden geplukt op het moment dat zij de hoogte h_{snij} hebben bereikt. Op dat moment worden de rozen afgesneden op hoogte h_0 zodat ze allemaal dezelfde hoogte hebben.
Om het model verder te verfijnen moesten er nog enkele aannames worden gemaakt. Deze staan alle beschreven in de syllabus. Mevrouw Rottschäfer verstond de kunst om de nodige functies dusdanig toe te lichten en te gebruiken dat het globale model zeer acceptabel werd. Zo kwamen voorbij de stamdichtheidsfunctie $d(h,t)$, de groeisnelheid $v = v(t, d)$, netto fotosynthese-snelheid P_{net}, en de massafunctie $M(t)$ met de nodige evenredigheids-constanten. Gelukkig werd een en ander zeer goed verduidelijkt met illustraties - zie figuur 2 en 3.

De duur van het SWI-project was te kort om direct-toepasbare resultaten op te leveren. Een student heeft thans een schatting gegeven van de verschillende constanten, zodat het nu in principe met behulp van het model mogelijk moet zijn om de rozenproductie te maximaliseren. Na een bezoek aan een rozenkas bleken wel enkele aanpassingen in het model noodzakelijk, maar mevrouw Rottschäfer heeft er nog steeds vertrouwen in dat het model flexibel genoeg is om de nodige aanpassingen te kunnen ondergaan.

Vakantiecursus 2004

Het thema voor de eerstvolgende Vakantiecursus is *Structuur in schoonheid*, in Amsterdam op 27 en 28 augustus 2004 en in Eindhoven op 3 en 4 september 2004.
Aanmelden en verdere informatie:
http://www.cwi.nl/events/2004/VC2004/

Over de auteur

Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@wanadoo.nl) is docent aan het Ichthus College te Veenendaal en redactielid van Euclides.

BOEKBESPREKING
GRONDBEGINSELEN DER REKENKUNDE

Inleiding: Danny Beckers en Harm Jan Smid
Uitgever: Uitgeverij Verloren, Hilversum (2003) isbn 90 6550 744 2
prijs: € 16,00 184 blz.

[Klaske Blom]

Een rekenboek uit 1828, uitgegeven door het wiskundig genootschap 'Mathesis Scientiarum Genitrix' te Leiden.
Uitgebracht in deel 1 van de serie 'Rekenmeesters'.

Historische reeks

In september 2003 verscheen het eerste deel van de serie '*Rekenmeesters*'. Deze historische reeks, onder redactie van Danny Beckers, Marjolein Kool en Harm Jan Smid, zal gaan bestaan uit een aantal facsimile-uitgaven van Nederlands belangrijkste oude lesboeken op het gebied van reken/wiskundeonderwijs. Elk deeltje van de serie wordt voorzien van een inleiding die het boek in een cultuur- en onderwijshistorische context plaatst.
In het voorwoord lezen we: 'De inleiding en de reproductie van de authentieke historische bron maken elk boekje uit de serie bijzonder geschikt voor gebruik in het hedendaagse onderwijs.' Dit maakt nieuwsgierig; helaas doen Beckers en Smid geen didactische suggesties. Wel verzorgden ze hierover een workshop tijdens de studiedag van de NVvW op 15 november jl. Het zou m.i. een welkome aanvulling op de serie zijn als er van hun hand nog een publicatie verschijnt waarin ze een aanzet geven voor de onderwijs-mogelijkheden met de '*Rekenmeesters*'.

Waarom juist dit boekje

Deel 1 van de serie *Rekenmeesters* is een facsimile van het rekenboek *Grondbeginselen der Rekenkunde*, voorafgegaan door een zeer uitgebreide inleiding van zo'n 60 pagina's waarin het rekenboekje in zijn historische, maatschappelijke en wiskundige context geplaatst wordt. De reproductie die we in dit eerste deel vinden, is het tweede deel van het rekenboek dat in het begin van de negentiende gebruikt werd aan de school van het wiskundig genootschap 'Mathesis Scientiarum Genitrix' te Leiden. Het doel van dit genootschap was om kennis van de wiskunde te verspreiden en dit deed men met name door onderwijs te geven aan de kinderen van de leden van het genootschap en aan een aantal bekwame leerlingen van het plaatselijk weeshuis. De auteurs kozen dit deeltje vanwege zijn representativiteit voor het wiskundeonderwijs in die tijd. Omdat ook op dat moment het metrieke stelsel werd ingevoerd in Nederland, is dit boekje daarmee een bijzonder tijdsdocument.

Religie en vaderlandsliefde

In hoofdstuk 2, *Het nieuwe Nederland*, lezen we dat religie nadrukkelijk aanwezig was in het onderwijs en dus ook in het wiskundeonderwijs. Om dit te onderstrepen maakten de schoolboekenschrijvers bijvoorbeeld wiskundeopgaven waarin bijbelkennis verwerkt was, zoals bijvoorbeeld:
Hoe groot was het aantal der Israëlieten in de woestijn, het tweede jaar na hunne uittocht uit Egypte, als Mozes bevond: in de stam van Ruben 46500, in die van Simeon 59300, in die van Gad 45640, in (...), en in die van Naphtali 53400 zielen?
Ook vaderlandsliefde werd in het wiskundeonderwijs aangemoedigd, getuige de volgende opgave:
De grondlegger der Nederlandsche vrijheid, Willem de Eerste, Prins van Oranje, werd geboren te Dillenburg, in het jaar 1533, en werd door Balthasar Gerard, in

1584, moorddadig te Delft omgebragt; in welk eenen ouderdom verloor die vader des vaderlands zijn dierbaar leven?

Vrijheid en abstractie

In hoofdstuk 3 vinden we achtergrondinformatie over het onderwijssysteem in de 18de en 19de eeuw. Leuk is het om te lezen dat er aan de 18de-eeuwse universiteit geen examens werden afgenomen, omdat dat niet paste bij de idee dat studenten zich in alle vrijheid konden verdiepen in de aanwezige kennis. Door het Verlichtingsdenken in de 18de eeuw werd er steeds meer nadruk gelegd op zuivere, abstracte wiskunde in het onderwijs ten koste van bijvoorbeeld boekhouden en landmeten. In hoofdstuk 4 wordt uiteengezet welke weerslag dit had op de leerboeken en didactische stromingen. In hoofdstuk 5 komt de invoering van het metrieke stelsel aan de orde.

GRONDBEGINSELEN

DER

REKENKUNDE.

OVER DE GEBROKENS IN HET ALGEMEEN.

§. 1. Men verstaat door eene Breuk, of een gebroken, een gedeelte eener aangenomene eenheid.

§. 2. Daar (vergelijk §. 9. Bladz. 34. *Eerste Stukje*) de Breuken beschouwd kunnen worden, als uit overschotten van deelingen ontstaan of voortgekomen te zijn, wordt eene Breuk, met getalmerken geschreven wordende, door eene Divisie uitgedrukt, waarvan de Deeler aanwijst, in hoevele gelijke deelen het geheel verondersteld wordt gedeeld te zijn, terwijl het Deeltal aantoont, hoevele van die gelijke deelen in het gebroken voorhanden zijn. Aldus zegt de Breuk $\frac{7}{8}$, dat het geheel in 8 gelyke deelen is ingedeeld, en dat 'er 7 van die gelijke deelen voorhanden zijn.

§. 3. Daar, bij een gebroken, de Deeler de grootheid of waarde van elk deel, waarin de eenheid gedeeld is, bepaalt, en dezelve dus als het ware den naam aan het gebroken geeft, wordt dezelve den *Noemer* geheeten; en daar het Deeltal de hoeveelheid dier voorhanden zijnde deelen aanwijst of telt, noemt men hetzelve den *Teller*. Aldus is in $\frac{7}{8}$, 8 *de Noemer* en 7 *de Teller*.

§. 4. Men kan de Breuken onderscheiden in *Ei-*

II. A *gen-*

Grondbeginselen van de rekenkunde

Vanaf het zesde hoofdstuk wordt de blik meer in detail gericht op de totstandkoming van de *Grondbeginselen van de rekenkunde*. De invoering van het metrieke stelsel was een van de ontwikkelingen die ertoe leidden dat er een nieuw wiskundeboekje geschreven werd voor het onderwijs aan de school van het Leidse 'Mathesis'. Daarnaast was men van mening dat het in gebruik zijnde boekje van Van Campen aan vernieuwing toe was, o.a. vanwege een steeds groter belang dat gehecht werd aan de vormende waarde van wiskundeonderwijs. In het hoofdstuk *Naar een nieuwe methode* gaan Beckers en Smid uitvoerig in op deze ontwikkelingen.

In het laatste hoofdstuk voorafgaand aan de brontekst beschrijven de auteurs kenmerkende aspecten van *Grondbeginselen van de rekenkunde*: theorie in lange volzinnen, toepassingsgerichte opgaven op tal van gebieden waarmee leerlingen het nut van wiskunde konden zien, geschreven voor gebruik in een klassikale situatie, een opmerkelijke voorkeur voor extreem grote getallen, opgaven gericht op inzicht in de stof.

Een opvallend aspect vond ik het streven om zoveel mogelijk verschillende beroepen te verwerken in de opgaven vanwege de universele toepasbaarheid; op blz. 88 e.v. van de facsimile vond ik na een snelle blik een winkelier, een timmermansknecht, een bode, een straatmaker, een landman, een leidekker, een landheer, een grossier, een slijter, een wijnkooper, een fabrikeur, een koopman, een zilver- en een goudsmid!

Het is prettig om een leidraad aangereikt te krijgen bij de bestudering van het oude rekenboek uit 1828, en in dat kader is het laatste hoofdstuk een mooie start voor een eigen verdieping in deze bron.

Nawoord

Eerlijk is eerlijk, tijdens het bestuderen van het rekenboekje miste ik de broze papieren, de breekbare kaft die ik voorzichtig op een kussen moet leggen tijdens het lezen, het ontzag, opgeroepen door een 'tweehonderd-jaar-oud-ding', en niet in de laatste plaats de muffe geur van een oud boek. Er gaat niets boven een authentiek exemplaar. Maar, gegeven de dreiging van het tot stof vergaan en de ontoegankelijkheid van oude boeken is het een fantastisch alternatief om de inhoud van een oud rekenboek zo te bewaren en beschikbaar te stellen aan een groot publiek.

Over de recensent

Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) werkt als wiskunde-docente op het Hooghe Landt in Amersfoort. Zij is tevens redacteur van Euclides.

BOEKBESPREKING

CHAOSTHEORIE – HET EINDE VAN DE VOORSPELBAARHEID

Auteurs: Henk Broer, Jan van de Craats en Ferdinand Verhulst

Uitgever: Epsilon Uitgaven, nr. 35, Utrecht (2003, tweede druk)

isbn 90 5041 081 2 prijs: € 15,00

[Ernst Lambeck]

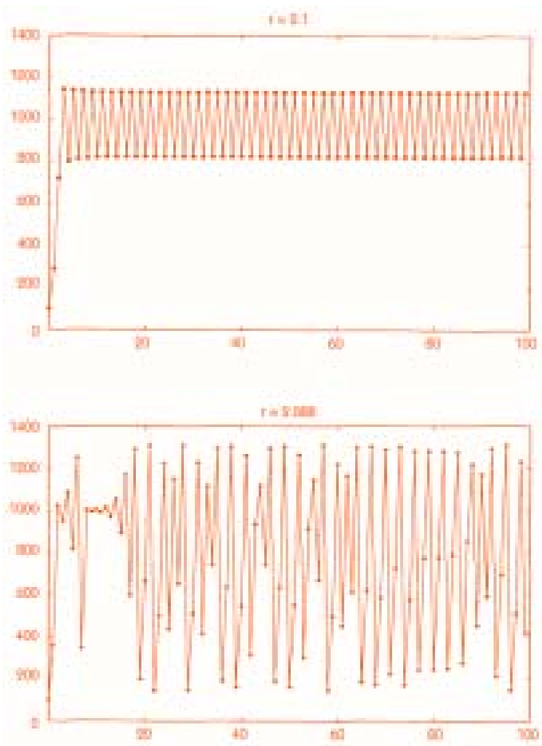
Voorspelbaar?

Ieder jaar bezoeken duizenden mensen Franeker. Niet het beroemde Elfstedenbruggetje is de grote trekpleister van dit Friese stadje, het planetarium van Eise Eisinga komt die eer toe. In 1774 begon de wolkammer met het bouwen van een model van ons zonnestelsel aan het plafond van zijn woonkamer.
De aanleiding is een prachtverhaal. Op 8 mei 1774 stonden de maan, Mercurius, Venus, Mars en Jupiter op één lijn aan de hemel. Dit leidde tot grote paniek onder de bevolking, die meende dat de wereld zou vergaan. Eise wist wel beter – hij was van jongs af geboeid door de sterrenkunde – en kwam op het idee een planetarium te bouwen om zijn tijdgenoten duidelijk te maken wat er nou precies aan de hand was.
Het is zeker de moeite waard om het planetarium eens te bezoeken. Ongetwijfeld wordt u dan getroffen door het feit dat de stand van de diverse hemellichamen nog steeds correct wordt weergegeven. Ons zonnestelsel lijkt dus wel een uurwerk!
Maar is dat wel zo? Kunnen we werkelijk de positie van de diverse hemellichamen voor elk toekomstig tijdstip voorspellen? In de tijd van Eise Eisinga, tweede helft 18^{e} eeuw, was men die overtuiging toegedaan. Laplace, een tijdgenoot van Eise, was ervan overtuigd dat we de beweging van alle objecten, groot of klein, in één formule kunnen vatten als we eenmaal alle krachten in de natuur zouden kennen en de onderlinge posities van alle dingen waaruit de natuur bestaat.

Chaotisch gedrag

Een onderzoek van Poincaré, ongeveer een eeuw later, maakte duidelijk dat dit deterministisch wereldbeeld niet geheel correct kon zijn.
Poincaré bestudeerde de bewegingen van drie lichamen die elkaar onderling aantrekken. Men kan bijvoorbeeld denken aan het stelsel zon, aarde en maan. Hij bewees dat er in deze situatie niet genoeg behoudswetten zijn om de bewegingen volledig te beschrijven. De oplossingen kunnen zich wild en grillig gedragen: chaos!

FIGUUR 1



Chaos komt overigens ook voor in eenvoudige modellen. Neem bijvoorbeeld logistische groei. Vwo-leerlingen met wiskunde A1,2 in hun pakket leren dat de formule voor dit type groei de volgende vorm heeft:

$$p_{n+1} = p_n + r \cdot p_n\left(1 - \frac{p_n}{E}\right).$$

Hierin is p_n de populatiegrootte na n jaar, E de evenwichtstoestand en r de groeifactor. Als we r klein nemen (bijvoorbeeld r = 0,1), dan krijgen we de gebruikelijke S-vormige grafiek die onze leerlingen ook voorgeschoteld krijgen. Maar wat onze leerlingen niet zien: als we r flink wat groter nemen, dan gebeuren er vreemde dingen (zie figuur 1).

In het bovenste plaatje van figuur 1 ziet u de resultaten bij $r = 2{,}1$, er onder bij $r = 2{,}888$, uitgaande van $E = 1000$ en $p_0 = 100$. In het eerste geval ontstaat op den duur een periodieke schommeling tussen de twee waarden 1128,6 en 823,7. Het tweede geval ontaardt in chaos.

Een boek over chaos

Het hier te bespreken boek valt eigenlijk in drie delen uiteen. In de eerste hoofdstukken worden de achtergronden van de chaostheorie in een historisch perspectief neergezet en komen voorbeelden van dynamische systemen zonder chaos aan de orde. Eise Eisinga en Poincaré komen hierin aan bod, maar ook is er aandacht voor bijvoorbeeld slingeringen en resonanties. Het middengedeelte van het boek beschrijft wat er zoal te beleven valt op het gebied van chaos. In dit gedeelte kunt u het voorbeeld van logistische groei aantreffen, maar ook een chaotische slinger, de Mandelbrotverzameling, Julia-fractals en vreemde attractoren. Het is moeilijk om precies te formuleren wat men onder een vreemde attractor verstaat: een strikte definitie van het begrip is er nog steeds niet. Maar al lezende in het boek krijgt men wel een goed idee wat men er onder zou kunnen verstaan.

FIGUUR 2

De vlinder van Lorenz

Een mooi voorbeeld van zo'n *vreemde attractor* is de zogenaamde Lorenz-attractor; zie figuur 2. Weersvoorspellingen voor de langere termijn zijn meestal onbetrouwbaar: kleine verstoringen in de atmosfeer kunnen grote gevolgen hebben. De wiskundige en meteoroloog Edward Lorenz wist dit beeldend te formuleren in de titel van een voordracht die hij in 1972 hield, 'Voorspelbaarheid: kan de beweging van een vlindervleugel in Brazilië een tornado in Texas veroorzaken?' Lorenz was tot zijn inzichten gekomen via computersimulaties met een sterk vereenvoudigd weermodel dat twaalf variabelen telde. Later ontdekte hij dat je een soortgelijk gedrag kunt krijgen bij een model met slechts drie variabelen. Als je die variabelen ziet als coördinaten van een punt in de ruimte, dan kun je de ontwikkeling van het systeem in beeld brengen door de baan van dat punt te tekenen. Figuur 2 toont het resultaat. De baan lijkt nota bene een vlinder! Het bestaat uit twee 'vleugels' en het punt loopt nu eens over de ene vleugel, dan weer over de andere. Regelmaat is er niet, het aantal omlopen vóórdat wordt overgestoken vertoont een grillig en onvoorspelbaar patroon. Duidelijk is dat twee punten die vlak bij elkaar vertrekken eerst tamelijk gelijk oplopen, maar al snel verder uit elkaar gaan en na enige tijd volslagen verschillende wegen volgen.

Toepassingen

In het laatste gedeelte van het boek laten de auteurs zien dat je chaos in de meest uiteenlopende toepassingsgebieden tegenkomt: in mechanische trillingen (een schip bij hevige golfslag, trillingen in de wiel-as van een treinstel, trillingen bij het boren in de aardkorst), in mengprocessen van verontreinigingsdeeltjes in de Waddenzee, in de biologie en de geneeskunde (insectenpopulaties, verspreiding van kinderziektes, hartslag, hersenactiviteit, dyslexie).

Inspirerend

Al met al geeft het boek een mooi overzicht van ideeën en toepassingen van de chaostheorie. In ruim 140 pagina's wordt veel van stal gehaald. Dit betekent uiteraard dat men nergens diep op kan ingaan; veel formules kom je ook niet tegen. Ik heb dat echter niet als een nadeel ervaren: voor iemand die meer wil weten staan er achter in het boek veel verwijzingen naar literatuur op dit gebied. Het is eerder een voordeel: het boek kan daardoor mijns inziens inspirerend zijn voor docenten en leerlingen.
Ik ben er dusdanig van onder de indruk geraakt dat ik er dolgraag mijn leerlingen iets van wil laten zien.
Kortom: een aanrader!

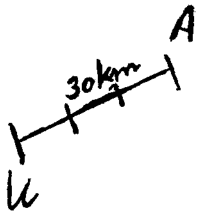
Noot

De eerste druk van dit boek verscheen in 1995 als gezamenlijke uitgave van Aramith Uitgevers Bloemendaal en Epsilon Uitgaven Utrecht onder de titel 'Het einde van de voorspelbaarheid?'

Over de recensent

Ernst Lambeck (e-mailadres: ernstwl@westbrabant.net) is als docent wiskunde werkzaam aan het Newmancollege te Breda. Daarnaast is hij voorzitter van de opgavencommissie van de Kangoeroe.

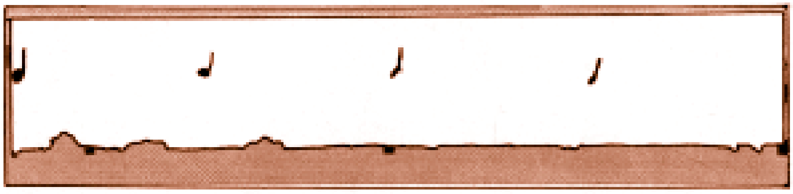
FIGUUR 1



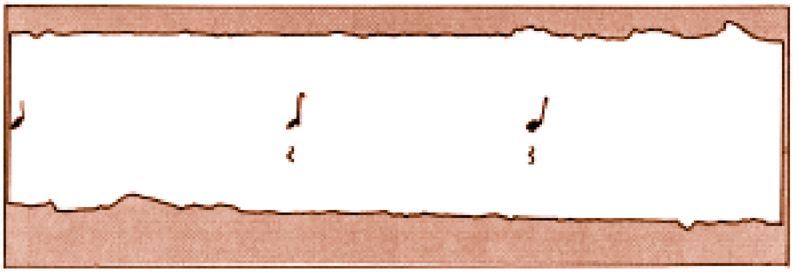
FIGUUR 2

FIGUUR 3

FIGUUR 4



FIGUUR 5



FIGUUR 6

GESPREKKEN MET SJAAK

De auteur, onderzoeker aan het Freudenthal Instituut, voert regelmatig gesprekken met schoonmaker Sjaak over wiskundige onderwerpen. Aflevering 4.

[Jan van den Brink]

Muzieknoten

Elke dag reis ik van Amsterdam naar mijn werk, naar Utrecht. Een afstand van circa 30 kilometer. Maar op het werk 'bewijs' ik Sjaak, onze schoonmaker, dat geen van ons beiden ooit aanwezig kan zijn op z'n werk. U kent het wel, het probleem van de haas die de schildpad nooit inhaalt, omdat je 'de afstand van huis (H) tot je werk (W) blijvend kan halveren'. En ik teken dit op papier; zie figuur 1. Sjaak, een man van 43 met alleen een blo-opleiding, begrijpt zonder verdere uitleg direct de clou. Sterker nog, hij vindt het maar een flauwe grap. 'Je hebt ook halve noten, kwart noten, achtste noten, enzovoort, enzovoort.' In zijn vrije tijd drumt Sjaak veel. Ik ben verrast: hij heeft mijn limiet-probleem van machten van twee aan zijn muzieknoten opgehangen! Zomaar *vanuit zichzelf*. Het viel me al eerder op: het lijkt wel een algemene leerhouding van hem. Ik heb hem tenminste nooit gevraagd om nieuwe kennis te koppelen aan dat wat hij al wist. Maar, hoe belangrijk die houding ook is, soms gaat het 'koppelen' mis.

Alles in tweeën?

We kijken in de atlas: Amsterdam–Utrecht, ongeveer 30 km. Sjaak ziet het dorp Schalkwijk liggen, 10 km vanaf Utrecht: 'Daar ben ik geboren.'
Ik vraag hoeveel keer de afstand Schalkwijk–Utrecht op die van Utrecht-Amsterdam gaat. Sjaak kijkt naar de kaart en zegt: 'Drie keer.' Mooi.
'Utrecht–Amsterdam is 30 km. Hoeveel is dan Schalkwijk–Utrecht?' Sjaaks antwoord is 15.
Halveert Sjaak wéér met zijn muzieknoten mee? Het lukt hem niet om 30 door 3 te delen! Ik probeer het met een tekening; zie figuur 2. Sjaak schat nu: 7 km. Als schatting beschouwd niet zo gek, maar als toepasbare kennis van de tafel van 3?
Sjaak halveert in principe *alles*, vrees ik plotseling. Hij kent de tafel van 2 als een 'notenzang' op zijn duimpje, maar past dit bezit blindelings toe als algemeen geldend principe. De tafel van 3 kent hij niet.
De schrik slaat me om het hart bij de gedachte dat, als je de tafels niet kent, bijvoorbeeld die van 3, je ook niet op het idee komt dat een verdeling in drieën met *andere* getallen gepaard gaat dan een verdeling in tweeën. Je kent die andere tafels immers niet. Maar dat zal toch niet waar zijn, stel ik mezelf gerust. Er bestaan toch ook 'driekwartsmaten' voor drummer Sjaak?

Muziekles

Sjaak vertelt graag over zijn muziekleven: 'Kan ik ook eens iets terug doen voor alles wat jij mij leerde.' Hij heeft gevoel voor drama.
Elke woensdagavond oefent hij in een band van vijf musici. 'Heel professioneel. We treden ook op voor geld.' Hij kan, als het moet, 200 slagen per minuut halen over zijn *hi-hat* (een standaard met bekken), *bass* (grote trom) en *snare drum* (een trommel met snaren eronder). En hij geeft een felle roffel over mijn bureaublad als demonstratie. Dan tekent hij acht achtste noten (zie figuur 3), telt ze voor me: 'Ee, né, twee, jé, drie, jé, vier, ré. Het is de helft van de helft van de helft. In principe zijn het helftjes. Net als jouw probleem over dat ik niet op mijn werk kan zijn, weet je nog?'

Een conflict

Ik zie mijn kans schoon en dek de laatste twee noten af. Er blijven 6 achtsten zichtbaar. Een *wals* (zie figuur 4).
Sjaak: 'Nee, drie vierden bestaan niet.'
Ik ben verbijsterd.
Sjaak: 'In principe zijn het helftjes.'
'Maar je kan dit toch tikken?' Sjaak: 'Ja, het is een walsritme.' Hij doet het voor. Drie vierden bestaan wel, maar hij bedoelt blijkbaar iets anders. Vier derden, misschien?
'Je kan een maat toch ook in drieën delen?', stel ik voor. Sjaak beweert luid: 'Maar dat kan helemaal niet. Dan word je voor gek verklaard. In principe is het steeds de helft van de helft van de helft. Hoe zit het dan met breuken in de wiskunde?'
Ik scheur twee stroken papier af van gelijke lengte. Verdeel de ene in vieren, de andere in drie stukken en teken er noten op.
Van figuur 5 zegt Sjaak: 'Dat zijn 4 kwartsnoten.' Akkoord.
Bij de tweede strook (zie figuur 6) verklaar ik: 'Drie derde noten.'
'Maar die bestaan niet', grinnikt Sjaak en schudt meewarig het hoofd over zoveel domheid. 'Het gaat om halven. Je moet tellen: éé, né, twee, jé, drie, jé, vier, ré.'

3/4, maat of breuk?

Het zit Sjaak hoog dat we zo'n conflict hebben, maar hij laat het er niet bij zitten.
De volgende dag neemt hij 'zijn muziekboek' mee, leest voor uit de theorie en dat brengt de oplossing.
'Een 4/4 maatsoort betekent dat er vier tellen in een maat zitten. Het onderste cijfer zegt, dat de *tel* een kwartnoot is en (daar staat het!) voor de tel kunnen ook andere soorten noten worden genomen: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16.' Daarnaast zijn er verschillende soorten maten (tweedelige, driedelige) die het aantal tellen in een maat weergeven. 3/4 bijvoorbeeld, is een verdeling van de maat (lees: strook) in drieën. We ontdekken beiden dat niet de soort *noot*, maar de soort *maat* nog het meest overeenkomt met breuken uit het rekenboek: 3/4 met de breuk 1/3.

Dagelijks rekenen

De tafel van 2 – okee, die kent hij. Die van 3 niet. Het lukt hem ook niet om de tafel van 10 toe te passen bij 30 km. Blijkbaar is niet alles uit het rekenboek later van nut. Hoe beheerst Sjaak eigenlijk het 'dagelijkse rekenen'? Heeft hij daar middelen en trucs voor? Zit daar voor ons opnieuw muziek in?

Wordt vervolgd!

Over de auteur

Dr. Jan van den Brink (e-mailadres: janvdb@fi.uu.nl) was onderwijzer, studeerde wiskunde, en is werkzaam als ontwerper/onderzoeker van reken- en wiskundeonderwijs aan 4- tot 18-jarigen aan het Freudenthal Instituut. Zijn belangstelling gaat vooral uit naar wiskunde die ontdekt of uitgevonden wordt door lerenden, en naar het ontwerpen en onderzoeken van daarbij passend onderwijs.

Aankondiging / Wiskunde-tentoonstelling in Leiden

Waar, wanneer, wat?

In *Museum Boerhaave* te Leiden is *van 26 maart tot en met 26 september 2004* de tentoonstelling ‘Goochelen met getallen’ te zien, een tentoonstelling voor jong en oud met als thema’s: getallen in de natuur, inhouds- en lengtematen, astronomie, landmeetkunde, zeevaartkunde, architectuur, mechanica, statistiek en kansberekening.
Te zien is dat wiskunde het leven van de mens een stuk aangenamer maakt. Wiskunde is immers overal!

Wat is er te zien?

De voorwerpen in *Goochelen met getallen* laten de vele toepassingen van de wiskunde zien, uiteenlopend van bijvoorbeeld de astronomie en de zeevaart tot aan de architectuur. Een greep uit de voorwerpen: de voorloper van onze computer uit ca. 1830 (de differentiemachine van Babbage), een schitterende verzameling 19de-eeuwse rekenmachines, bijzondere land- en zeekaarten, planetaria, de voorloper van onze staatsloten en een 4000 jaar oud Babylonisch kleitablet met een wel heel oude rekensom.

Wat is er te doen?

Ook zijn er zo’n 20 demonstratieve spellen om de wereld achter de getallen te kunnen beleven. Heeft jouw lichaam de ideale wiskundige verhoudingen? Ooit een kegel omhóóg zien rollen? Op je vingers tot tienduizend geteld? En hoe zit het eigenlijk met de wiskunde van de gokkast?

Catalogus

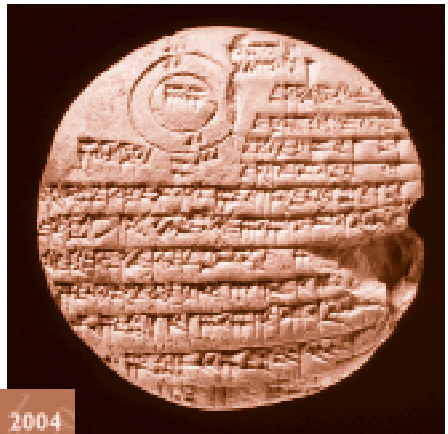
Bij de tentoonstelling verschijnt een catalogus die de ontwikkelingen in de westerse wiskunde behandelt en dan vooral de reken- en meetkunde, de wiskunde van het voortgezet onderwijs. De catalogus telt 48 pagina’s en kost € 7,00.

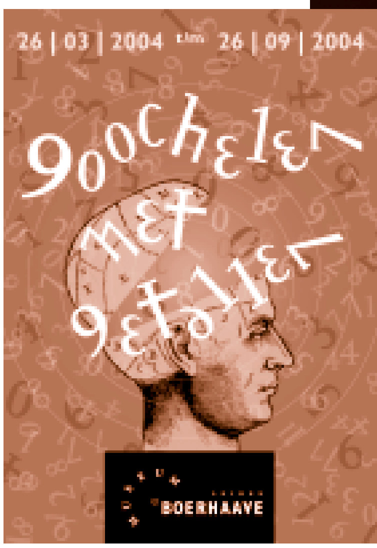
Schoolprogramma

Het niveau van de tentoonstelling is gemaakt op het niveau van 4 havo/vwo, maar speciaal voor de basisvorming is een werkblad ontwikkeld waarmee de tentoonstelling eveneens goed bezocht kan worden. Voor groepen vanaf 10 personen is de prijs inclusief een drankje € 2,50 p.p. (vooraf reserveren).

Nadere informatie

Openingstijden: op dinsdag t/m zaterdag van 10.00 tot 17.00 uur, op zon- en feestdagen van 12.00 tot 17.00 uur; in de meivakantie ook geopend op maandag 3 mei. Het museum ligt op 10 minuten loopafstand van het NS-station Leiden Centraal.
Toegangsprijs: volwassenen € 5, t/m 18 jaar € 2,50.
Overigens, in samenwerking met de Stichting Kangoeroe heeft iedere deelnemer aan de ‘Kangoeroe’ van 19 maart jl. (ca. 65000 deelnemers in Nederland en Vlaanderen) een gratis toegangskaartje ontvangen,
Website: *www.museumboerhaave.nl*
Telefoon: 071-5214224, e-mailadres
presentatie@museumboerhaave.nl





Copyrights en bronnen

Van boven naar beneden:
– Uit het boek Margarita philosophica van Georg Reisch en Oronce Fine (editie Basel, 1535)
– Bruikleen Rijksmuseum van Oudheden, Leiden
– Museum Boerhaave, Leiden

Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Examenbesprekingen

Traditiegetrouw organiseert uw NVvW ook dit jaar weer centrale en regionale examenbesprekingen. Een overzicht vindt u elders in dit blad.
Deze besprekingen hebben als doel een eenduidige normering van de examens te bevorderen, en daarmee het overleg tussen eerste en tweede corrector te vereenvoudigen.
Op de regionale bijeenkomsten ontmoeten collega's elkaar om het examen te bespreken en van gedachten te wisselen over de wijze van beoordeling van het werk van de kandidaten. Door die gesprekken ontstaat er ook een zekere 'mores', een consensus over wat goed normeren is, die met name voor collega's met minder examenervaring heel instructief kan zijn.

Van de regionale examenbijeenkomsten wordt een verslag gemaakt. Dit verslag wordt gebruikt voor het examennummer van Euclides, maar dient ook als informatie voor de bepaling van de normeringsterm.
Het is dus om meerdere redenen van belang dat de regionale examenbesprekingen goed bezocht worden. Als service aan de leden die de besprekingen niet bij konden wonen, wordt na enige tijd een (summier) verslag van de centrale bijeenkomsten in Utrecht op de website gezet. Op de dag na een examen is er namelijk een bespreking in Utrecht, waarbij alle regionale gespreksleiders aanwezig zijn. Op deze vergadering wordt het examen besproken en worden zo mogelijk centrale afspraken gemaakt over zaken als de beoordeling van veelgemaakte fouten, verfijningen van de normering en alternatieve oplossingsmethoden, dit ter voorbereiding op de regionale bespreking de dag daarna.

Tweede fase

Afgelopen februari is de Tweede Kamer zonder groot vertoon van enthousiasme in hoofdlijnen akkoord gegaan met de plannen van de minister. In een kamerbreed gedragen motie (motie Hamer c.s.; zie *www.tweedefase-loket.nl*) zijn alsnog een aantal wezenlijke vragen en beslispunten over omvang, aantal en samenhang van de diverse profielvakken doorgeschoven naar de nieuw in te stellen profielcommissies. Specifiek voor wiskunde zijn dat de vragen over de wiskunde in vwo-CM, en of de wiskunde in de voorstellen wel voldoende is voor een bètastudie.
Ook de invulling van het nieuwe bètavak is naar de commissie verwezen.
Vlak voor de vergadering van de Kamer heeft het 'Voorzittersoverleg Wiskunde'[1] nog een stevige brief naar de Kamer gestuurd waarin op niet mis te verstane wijze de zorg over wiskunde naar voren is gebracht. De brief staat op de NVvW-site.

Inmiddels is er voor het eerst (!) overleg geweest met een vertegenwoordiger van de Besturenraad, onder meer naar aanleiding van een enquête vlak voor het debat waarin de aangesloten schoolleiders enerzijds vrij massaal vonden dat er niet meer uren voor wiskunde moesten komen (er stond (toevallig?) niet bij ten opzichte van welke situatie, dus misschien vonden wij het ook wel), maar tegelijk van mening waren dat het in de Tweede fase niet makkelijker hoefde te worden. En al eerder hadden we ons niet bepaald gesteund gevoeld door deze club.
In dat gesprek bleek men toch wat positiever over bèta gestemd dan eerdere reacties uit die kring deden vermoeden. Het nieuwe bètavak werd inmiddels warm verwelkomd, in tegenstelling tot een jaar geleden toen het nog als onbespreekbaar werd afgewezen. Praten, en vooral blijven praten, helpt dus. Helpt *iets*, want vooralsnog was ook voor hen, net als voor de minister, keuzevrijheid belangrijker dan een adequate vooropleiding.

Hoe verder?

Voor wiskunde worden de acht bestaande programma's vervangen door vijf nieuwe. Het bestuur heeft de havo/vwo-werkgroep om advies gevraagd over de mogelijke inhoud van de vijf nieuwe wiskundevakken in de profielen. Zo kunnen we als beroepsgroep zelf proberen het initiatief te nemen voor haalbare en zinnige wiskunde voor onze leerlingen.

In het vakdossier wiskunde 2003 van de SLO kunt u onder meer nog eens terug lezen wat er het afgelopen jaar allemaal is gebeurd.

Tot slot

- De jaarvergadering zal dit jaar niet samenvallen met de intocht van Sinterklaas (een voorbeeld van daadkrachtig besturen).
- Een volgende keer schijf ik over enkele nog op tafel liggende zaken, zoals: de pr-commissie, de Zebra's, de basisvorming, de bekwaamheidseisen, missiewerk in decanenland, plannen voor een algebraconferentie naar aanleiding van een SLO-veldaanvraag, plannen voor een didactiekconferentie.

Noot

[1] Dit 'Voorzittersoverleg' wordt gevormd door de voorzitters van de Kamer Wiskunde van de VSNU, het Koninklijk Wiskundig Genootschap, de Akademie Raad voor de Wiskunde (ARW), de Nederlandse Onderwijs Commissie voor de Wiskunde (NOCW), de Advies Commissie Wiskunde (ACW-GB-E/NWO), het Overleg Onderzoekscholen Wiskunde (OOW) en de NVvW.

Examenbesprekingen 2004

[Conny Gaykema]

Zoals gebruikelijk organiseert de NVvW ook dit jaar weer een aantal examenbesprekingen.
Hieronder staan de data, plaatsen en voorzitters van deze regionale besprekingen. Het telefoonnummer van de school en van de voorzitter staat tussen haakjes.

VMBO TGK

woensdag 2 juni 2004
15.00-17.00u

ALKMAAR
OSG Willem Blaeu,
Robonsbosweg 11
(072-5122477)
mw. C.E. Gaykema (020-6131802)

BURGUM
CSG Liudger,
Tj.H. Haismastraat 1
(0511-460260)
mw. G. Tack Althof (058-2572388)

GRONINGEN
Noorderpoort College,
Van Schendelstraat 1
(050-5297329)
dhr. J. Rijnaard (050-5254709)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad,
Valenciadreef 15
(010-4552511)
NS Alexanderpolder
dhr. W. de Jager, (0180-683829)

ZEIST
KSG De Breul,
Arnhemsebovenweg 98
(030-6915604)
dhr. B. Nieuwenhuis (0345-558355)

ZWOLLE
Thorbecke SG,
Dr. C.A. van Heesweg 1
(038-4564540)
dhr. R. Kronenberg (038-4210044)

HAVO-A12

vrijdag 28 mei 2004
16.00-18.00u

HAVO-B1/B12

maandag 7 juni 2004
15.30-18.00u

AMERSFOORT
S.G. Guido de Brès,
Paladijnenweg 251
(033-4792900)
A: dhr. F. v.d. Heuvel (030-2730898)
B: dhr. F.W. Zwagers (033-4752341)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert,
De Cuserstraat 3
(020-6423902)
CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51
A: dhr. S.T. Min (0229-237756)
B: dhr. H.G.J. Rozenhart
(072-5716448)

‘s-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum,
Colijnplein 9
(070-3687670)
A: dhr. J.P.C. van der Meer
B: dhr. C.D. Hendriks (0174-620131)

GRONINGEN
Röling College,
Melisseweg 2
(050-5474141)
A: dhr. L. Tolboom (050-3146093)
B: mw. H. Lüder (0516-432889)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad,
Valenciadreef 15
(010-4552511)
NS Alexanderpolder
A: dhr. R.E. Houweling (0180-315302)
B: mw. A.E.L. de Jongh Swemer
(010-4138432)

ROZENDAAL (bij Velp)
Het Rhedens,
Kleiberglaan 1
(026-3646845)
A: dhr. L.H. Rietveld (055-5419287)
B: dhr. A.W.M. Tromp (026-3254829)

ZWOLLE
Van der Capellen SG,
Lassuslaan 230
(038-4225202)
A: dhr. Ph. Thijsse (0315-342436)
B: dhr. J. Alderliesten (0527-201665)

VWO-A1/A12

donderdag 3 juni 2004
15.30-18.00u

VWO-B1/B12

donderdag 27 mei 2004
15.30-18.00u

AMERSFOORT
SG Guido de Brès,
Paladijnenweg 251
(033-4792900)
A: dhr. F. O. van Leeuwe
(0341-492843)
B: dhr. A.B. v.d. Roest (0318-543167)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert,
De Cuserstraat 3
(020-6423902)

Nieuws van het Wereldwiskunde Fonds [Ger Limpens]

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Afscheid Hans Wisbrun

Zoals op de laatste jaarvergadering al gemeld, heeft de werkgroep van het WwF afscheid genomen van oprichter/voorzitter Hans Wisbrun. Na 10 jaar enthousiasmerend en adequaat voorzitterschap (nogmaals dank daarvoor) vond Hans het tijd de voorzittershamer door te geven aan (nu voormalig) secretaris Gerben van Lent. Het secretariaat van het WwF is tegenwoordig in handen van Wim Kuipers. Verder is de werkgroep verrijkt met de medewerking van Christian Bokhove die de taak van veilingmeester van het WWW van Hans Wisbrun overgenomen heeft.

Nieuwe aanvragen

De WwF-projectronde voor 2004 is op dit moment van start gegaan. Op de NVvW-site treft u uitgebreidere informatie over de criteria die bij het toekennen van projectgelden gehanteerd worden.
Bent u betrokken bij zo'n project of kent u iemand die dat is, dan kunt u een aanvraag indienen bij de secretaris van het Wereldwiskunde Fonds: Wim Kuipers, Waalstraat 8, 8052 AE Hattem (tel. 038–4447017; e-mailadres: *w.kuipers@nvvw.nl*).
U kunt de aanvraag het beste eerst even met hem doorspreken.
Aanvragen moeten steeds vóór 15 mei binnen zijn.

Werkgroeplidmaatschap

Verenigingsleden die geïnteresseerd zijn in het werkgroeplidmaatschap, kunnen eveneens met onze secretaris contact opnemen.
Zie ook de werkgroeppagina's op de NVvW-site.

Boekenveiling

Wat betreft het WWW, het WereldWiskundeWeb, kan gemeld worden dat er naar gestreefd wordt nog dit kalenderjaar een volgende ronde te organiseren, waarbij ook de mogelijkheid geboden zal worden zelf boeken aan te bieden. Nader bericht daarover volgt nog te zijner tijd.

CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51
A: dhr. R. Stolwijk (072-5325551)
B: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)

's-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum,
Colijnplein 9
(070-3687670)
A: dhr. J. Remijn (070-3684525)
B: dhr. R.J. Klinkenberg
(070-3559938)

GRONINGEN
Röling College,
Melisseweg 2
(050-5474141)
A: dhr. W.H.V. de Goede
(050-5013342)
B: mw. O. Eringa (050-5474141)

's-HERTOGENBOSCH
Ds. Pierson College,
G. ter Borchstraat 1
(073-6442929)
NS Den Bosch-OOST
A: vervalt; geen gespreksleider
B: dhr. H.J. Kruisselbrink
(073-5216386)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad,
Valenciadreef 15
(010-4552511)
NS Alexanderpolder
A: dhr. D.A.J. Klingens
(0180-514485)
B: dhr. B.L.G.P. Hillebrand
(0180-515210)

ROZENDAAL (bij Velp)
Het Rhedens,
Kleiberglaan 1
(026-3646845)
A: dhr. J.P. Scholten (053-4768791)
B: dhr. A.T. Sterk (055-3666466)

ZWOLLE
Van der Capellen SG,
Lassuslaan 230
(038-422520)
A: dhr. A. Ebbers (0341-252202)
B: dhr. H. Schutjes (0529-427306)

Puzzel 796 - Afstandelijke kwesties

De regelmatige n-hoek heeft de eigenschap dat de $\frac{1}{2}n(n-1)$ afstanden tussen hoekpunten slechts $\frac{1}{2}n$ verschillende waarden aannemen als n even is. Als n oneven is, is dat aantal nog iets kleiner, namelijk $\frac{1}{2}(n-1)$.
Samengevat: Er zijn $[\frac{1}{2}n]$ verschillende waarden voor de onderlinge afstanden van de hoekpunten van een regelmatige n-hoek, waarbij $[x]$ het grootste gehele getal is dat niet groter is dan x.
De regelmatige n-hoek is niet de enige constellatie met slechts $[\frac{1}{2}n]$ verschillende afstanden tussen de punten.

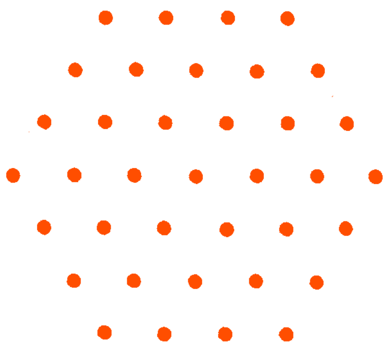
Opgave 1
Bepaal alle constellaties van vier punten in het platte vlak met precies twee verschillende afstanden tussen de punten.

Opgave 2
Bepaal alle constellaties van vijf punten in de ruimte met precies twee verschillende afstanden tussen de punten.

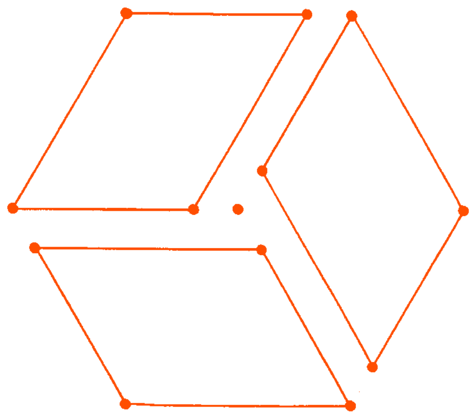
In plaats van te streven naar zo weinig mogelijk verschillende afstanden kun je ook proberen één bepaalde afstand een zo groot mogelijke frequentie te geven, dus zonder te letten op het aantal verschillende afstanden. Om het niet al te moeilijk te maken, keren we terug naar dimensie 2.

Opgave 3
Bepaal een constellatie van 15 punten in het platte vlak met zo vaak mogelijk de afstand 1 tussen de punten.

FIGUUR 1



FIGUUR 2



De vraag rijst natuurlijk of de grens $[\frac{1}{2}n]$ scherp is. Dat is niet het geval. Zie figuur 1 met 37 punten in de vorm van een zeshoek. Het aantal verschillende afstanden is hier 15. Een grotere zeshoek van dit type bestaat uit $n = 3k(k+1)+1$ punten (zie figuur 2), waartussen $\frac{1}{3}n + o(n)$ verschillende afstanden bestaan.
Het zou me niet verbazen als de factor $\frac{1}{3}$ nog lager kan.

Voor de volgende opgave gaan we de ruimte in.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 5 mei 2004.

Veel plezier!

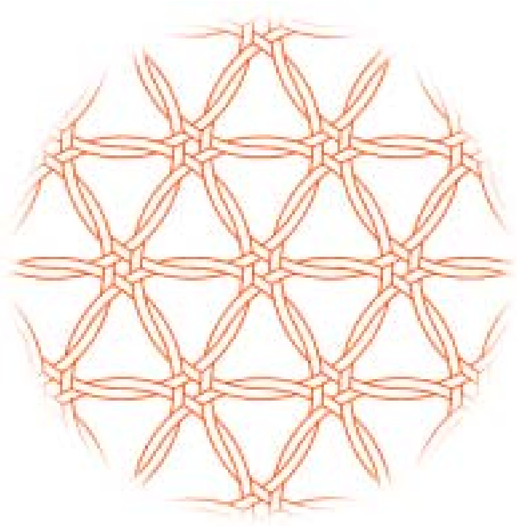
Oplossing 'Borromeaanse variaties'

Er kwamen acht oplossingen binnen, namelijk van T. Afman, D. Buijs, W. Doyer, E. van Kervel, J. Meerhof, L.H. van den Raadt, L. de Rooij en A. Verheul. Al deze oplossingen zijn correct met dien verstande dat een enkeling $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ schrijft als $2/3\sqrt{3}$. Volgens 'Meneer Van Dale Wacht Op Antwoord' is dat niet hetzelfde: vermenigvuldigen gaat vóór delen. (In computers worden soms andere regels toegepast; bijvoorbeeld in Universal Basic hangt de prioriteit er van af of je een maalteken wel of niet weglaat. Brrr!) Om misverstanden uit te sluiten, schrijf ik liever $2\sqrt{3}/3$. De redactie, die over een betere tekstverwerker beschikt, verandert dit in $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

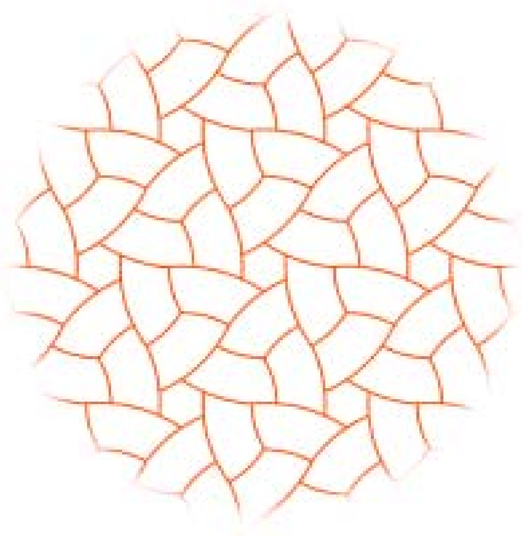
Overigens gaat optellen niet voor aftrekken: $7 - 2 + 3 = 8$ en niet 2. Daarom is er wel eens een ander ezelsbruggetje voorgesteld: 'Men vaart de Waal op en af.' De bedoeling is natuurlijk om aan te geven dat optellen en aftrekken gelijke prioriteit hebben. Ik leerde dit in 1960 bij een cursus ALGOL 60, maar ik weet niet of het ingang heeft gevonden.

Bij de oplossingen springt die van Wobien Doyer er uit. Zij onderzocht ook andere ringenstelsels; zie de figuren. Van het stelsel met de dikke ringen constateerde zij de merkwaardige eigenschap dat de uitbreiding naar buiten toe pas tot stilstand komt als niet-kruisende ringen elkaar overlappen, zij het dat de overlap zeer klein is.
Zij bewees ook: ieder cirkelstelsel (dat aan enkele redelijke eisen voldoet) is zodanig te 'vlechten' dat de cirkels om en om steeds boven en onder de kruisende cirkels lopen!

FIGUUR 3



FIGUUR 4



De ladder

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
T. Afman 180,
D. Buijs 159,
L. de Rooij 120,
A. Verheul 119,
T. Kool 96,
P. Stuut 81,
J. Meerhof 80,
L.H. van den Raadt 80.

De complete ladderstand is te vinden op de website van de NVvW:
www.nvvw.nl/euclladder.html

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in de lopende jaargang.
Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
7	26 mei 2004	30 maart 2004
8	24 juni 2004	11 mei 2004

Examens
dinsdag 25 mei – vwo B1/B12
woensdag 26 mei – vmbo BB, havo A12
vrijdag 28 mei – vmbo TGK
dinsdag 1 juni – vwo A1/A12
donderdag 3 juni – havo B1/B12

Examenbesprekingen
vmbo TGK – woensdag 2 juni
havo A12 – vrijdag 28 mei
havo B1/B12 – maandag 7 juni
vwo A1/A12 – donderdag 3 juni
vwo B1/B12 – donderdag 27 mei
Zie pagina 288 in dit nummer.

Tot en met 26 september, Leiden
Tentoonstelling ‘Goochelen met getallen’
Organisatie Museum Boerhaave
Zie pagina 286 in dit nummer.

16 en 17 april
Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres
Organisatie KWG en BWG

donderdag 22 april
4e Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs
Zie pagina 125 in Euclides 79-3.

vrijdag 14 mei
Leve de wiskunde! Open dag voor docenten
Organisatie Korteweg de Vries Instituut

vrijdag 14 mei
Nascholingsdag over algebraïsche topologie
Organisatie Universiteit Leiden

zaterdag 15 mei
10e HKRWO-Symposium
Organisatie Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
Zie pagina 201 in Euclides 79-4.

vrijdag 28 mei
Panama voorjaarsdag / NVORWO-jaarvergadering
Organisatie FI en NVORWO

9 juni t/m 11 juni
Onderwijs Research Dagen 2004
Organisatie Universiteit Utrecht

1 en 2 juli, Oostende (België)
12e congres van de VVWL
Organisatie VVWL

27 en 28 augustus, Amsterdam
3 en 4 september, Eindhoven
Vakantiecursus 2004
Organisatie CWI
Zie ook pagina 278 in dit nummer.

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto’s, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW
(http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html