

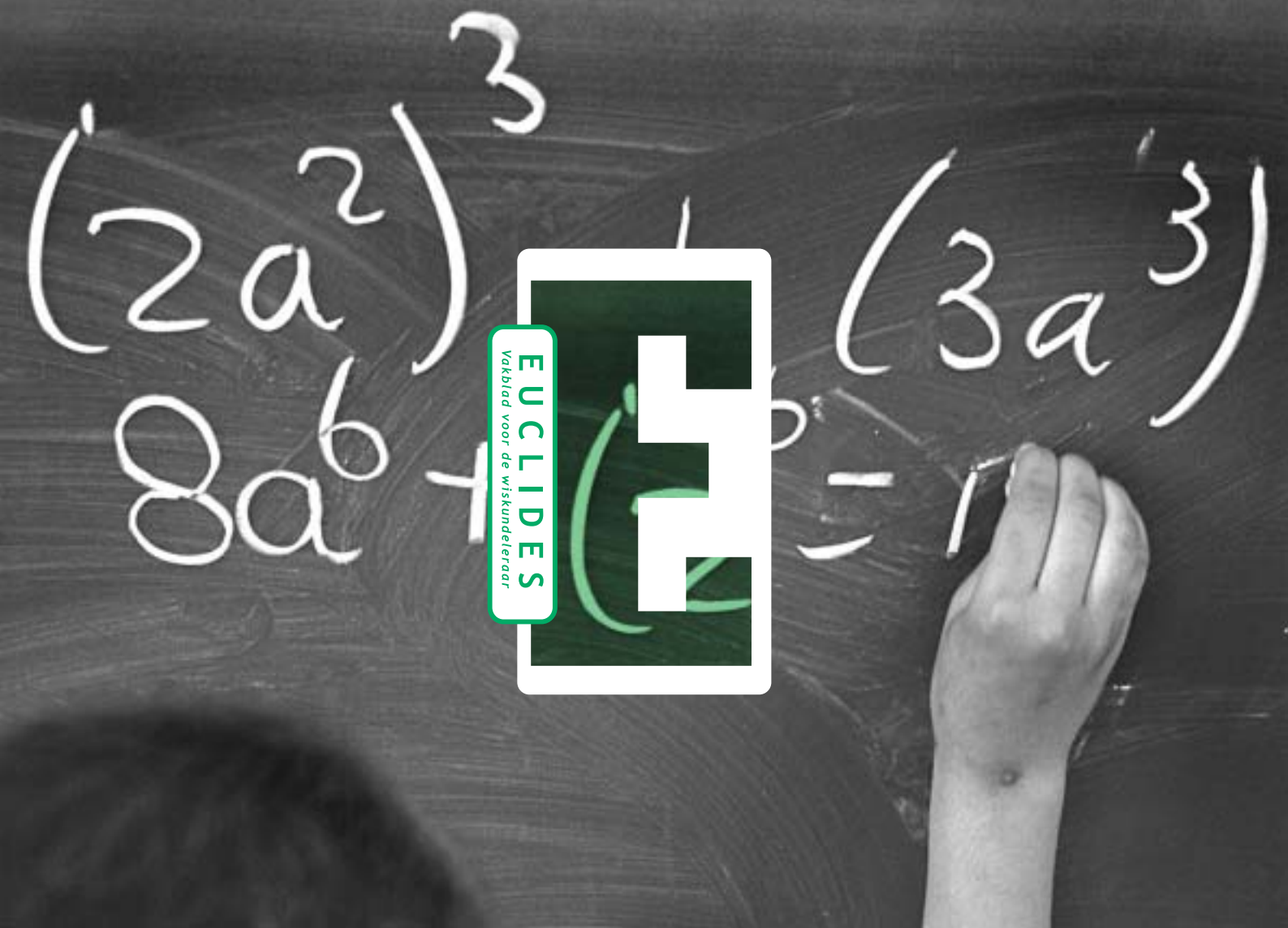
EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

december
2002/nr.3
jaargang 78

OVER ZEBRA'S EN KANGOEROES



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom
Marja Bos, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Elzeline de Lange
Jos Tolboom

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren

www.nvw.nl



Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattum
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bommel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie verenigingsjaar 2002-2003

Leden: € 40,00
Gepensioneerden: € 25,00
Studentleden: € 20,00
Leden van de VWW: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgend nummer.
Voor personen: € 45,00 per jaar
Voor instituten en scholen: € 120,00 per jaar
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Opzeggingen vóór 1 juli.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 15,00.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

3

december 2002 JAARGANG 78

085	Van de redactietafel [Marja Bos]
086	De Tweede fase en het zebrablok [Rob van Oord]
090	Boekbesprekingen
093	40 jaar geleden [Martinus van Hoorn]
094	Kangoeroe: een kijkje achter de schermen [Ernst Lambeck]
097	Kangoeroe 2003 [Leon van den Broek]
098	'De leraar had het wel heel erg druk...' [Paul Drijvers, e.a.]
106	't Denken bevorderen [Anne van Streun]
108	Hoe Karin de les verstoorde [Joop van Dormolen]
111	Wiskunde in vazen [Rob Bosch]
112	Wiskunde in mbo en hbo verzwakt? [Thomas van der Elzen]
114	Een gemiste kans? [Dick Klingens]
115	Klassiek?
115	Verschenen
116	Boekbespreking
118	Aankondigingen
122	Recreatie [Frits Göbel]
124	Servicepagina

Aan dit nummer werkten verder mee:
Peter Boonstra, Jan Smit en Klaas-Jan Wieringa.

Van de redactietafel [Marja Bos]

Zebra's en kangoeroes

Dit nummer van Euclides handelt voor een aanzienlijk deel over een tweetal interessante exoten: de zebra en de kangoeroe. Beide beestjes wijken nogal af van wat we in onze reguliere dagelijkse lessen tegenkomen, en allebei zijn ze aantrekkelijk genoeg om minstens eenmaal per jaar eens stevig 'bij de kop te pakken'.

De 'Zebra' (het keuzeonderwerp in de examenprogramma's vwo wiskunde A12, B1 en B12) geeft leerlingen de gelegenheid zich eens nader te verdiepen in een zelfgekozen onderwerp. Organisatorisch stelde dit nieuwe fenomeen u misschien voor allerlei problemen, maar Rob van Oord weet ze aardig voor u op te lossen! Aansluitend vindt u bovendien een drietal recensies van Zebra-boekjes uit de NVvW/Epsilon-reeks.

De Kangoeroe is een jaarlijkse internationale wiskundewedstrijd voor leerlingen in basis- en voortgezet onderwijs. Plezier van het meedoen staat voorop; doel is te laten zien dat wiskunde leuk en uitdagend kan zijn, voor ieder op zijn eigen niveau. Ernst Lambeck laat u zien, hoe de opgaven tot stand komen.

Computeralgebra

De komende tijd zal in Euclides regelmatig aandacht besteed worden aan algebraonderwijs en computeralgebra, met al z'n kansen en mogelijkheden, z'n haken en ogen. In dit nummer vindt u een interessant en leerzaam verslag over het project 'Algebraonderzoek in een digitale leeromgeving', geschreven door Paul Drijvers, Peter Boon en Willem Hoekstra.

Zorgen

Nog steeds is niet duidelijk, welke gevolgen voor wiskunde de herinrichting van de Tweede fase met zich mee zal brengen. Er lijkt echter alle reden tot zorg.

Verdwijnt de verdieping voor de N&T-leerling? Of wordt die straks 'naar keuze' in module-vorm aangeboden, modules die waarschijnlijk alleen de grote en/of rijkere schoolgemeenschappen in vooral de dichtbevolkte delen van het land zich kunnen permitteren?

Maar ook de huidige situatie is in veel gevallen verre van ideaal. Op diverse scholen grijpen wiskundedocenten bij gebrek aan contacttijd soms ten einde raad naar hoorcollege-achtige onderwijsmethoden of juist naar eindeloze lessenseries van individuele zelfwerkzaamheid (zonder enige reflectie, en daarmee vluchtig en zonder veel diepgang), een werkvorm die helaas maar al te vaak verward wordt met het concept 'zelfstandig leren'. En dat, terwijl die zo belangrijke variatie in werkvormen destijds juist in *wiskundelessen* in redelijke mate aanwezig was...

Enquête

Een zekere ondergrens voor de contacttijd lijkt wel degelijk een noodzakelijke voorwaarde voor succes. (Daarnaast moet uiteraard kritisch gekeken worden naar de *kwaliteit* van de invulling van die tijd, de 'actieve leertijd'.)

Zoals u weet ijvert de Vereniging al langere tijd voor een reële toedeling van contacttijd voor wiskunde. Sinds afgelopen zomer staat er op de NVvW-webste (www.nvbw.nl) een on-line enquête waarop u de recente examenresultaten van het eerste tijdvak en het aantal contacturen voor de havo/vwo op uw eigen school kunt invullen.

Mocht u de enquête nog niet ingevuld hebben: het bestuur roept u op, dit op korte termijn alsnog te doen!

Actualiteit

Ook in de werkgroep 'Actualiteiten' geleid door Anne van Streun op de NVvW-studiedag van 16 november jl. werd door de aanwezigen grote zorg geuit met betrekking tot het wiskundeonderwijs. Voorzitter Marian Kollenveld van de Vereniging meldt dat het bestuur die zorg deelt, en uiteraard zal dóórgaan met de nodige activiteiten om al deze problemen te lijf te gaan.

Wiskundeonderwijs in mbo en hbo lijkt hier en daar eveneens in de knel te komen. Thomas van den Elsen doet verslag.

Wij hopen op betere tijden.

DE TWEEDE FASE EN HET ZEBRABLOK

Vragen en mogelijke antwoorden met betrekking tot het zebrablok

[Rob van Oord]



Inleiding

Een van de nieuwe aspecten van de examenprogramma's wiskunde vwo van de tweede fase is domein Ga = Fb: *Keuze-onderwerpen* [1; p.3, 5, 18]. Het is kennelijk zo nieuw dat in de brochure abusievelijk over Domein [1, p.5] in plaats van Domein gesproken wordt. *Dit domein bevat een of meer keuze-onderwerpen. De onderwerpen worden gekozen door de school. De onderwerpen kunnen, indien de school daarvoor kiest, voor elke kandidaat verschillend zijn. De totale studielast van de keuze-onderwerpen is 40 uur* [1; p.17, 30].

Het domein is opgenomen in de vwo-programma's van wiskunde A12 (Ga) en van wiskunde B1 en B12 (Fb). Daar sta je dan als school. Van de leerlingen wordt verwacht dat ze 40 sluw werken aan keuze-onderwerpen. Gelukkig hebben de NVvW en enkele uitgeverijen gezorgd voor materiaal met keuzeonderwerpen. Zo wordt er door Epsilon Uitgaven in samenwerking met de NVvW een aantal deeltjes uitgegeven in de zogenoemde Zebra-reeks. Ook bij Wolters-Noordhoff en EPN zijn enkele boekjes verschenen met een keuze-onderwerp.

Historie van de zebra

Het idee voor de invulling van deze 'zebrablokken', die in de oorspronkelijke profielprogramma's van de tweede fase zwartgestreept waren aangegeven, komt van Jan Breeman, een helaas te vroeg overleden collega uit mijn sectie. Hij was lid van de commissie die de wiskunde in de tweede fase gestalte moest geven. Na het invullen van de studielast bij de gemeenschappelijke onderwerpen en de leerstof voor het centraal examen bleven er in het schema nog (zwartgestreepte) blokken niet-ingevulde studielast over. Jan kwam toen met het voorstel hierin een keuze-onderwerp te plaatsen. Als voorbereiding op studie en beroep zouden de leerlingen zich moeten verdiepen in een stukje wiskunde gericht op de

speciale belangstelling van de individuele leerling. Toen we nog samen lesgaven op de voormalige Samenwerkingsschool voor havo/atheneum in Waddinxveen, hadden Jan en ik al aan een soortgelijk idee gewerkt. Voor de leerlingen van 4-atheneum maakten we in 1984-1985 om beurten kleine boekjes over kleine onderwerpen. Daarin kwamen onderwerpen aan de orde als financiële rekenkunde (economie), lineair programmeren (wiskunde A), genetica (biologie), groei (anw), tellen en meten (natuur- en scheikunde). Omdat onze school 4 uur wiskunde had voor 4-atheneum, konden we tijd inruimen om leerlingen zelfstandig deze onderwerpen te laten doornemen. In dit geval waren de boekjes meer gericht op de wiskunde in andere vakken dan op keuze van studie en beroep, waarvoor het keuze-onderwerp in de tweede fase is ingevoerd. Mijn ervaring is dat de leerlingen er altijd met veel plezier aan gewerkt hebben. Het boekje Lineair Programmeren gebruikten we tot 2000 nog als inleiding op dit onderwerp bij wiskunde A12.

Op het verzoek vanuit de Vereniging je aan te melden als mede-auteur van een boekje in de Zebra-reeks heb ik dan ook meteen gereageerd. Het duurde echter nog anderhalf jaar voordat ik gekoppeld werd aan Hans Melissen, hoofddocent aan de TU Delft, om samen een boekje te gaan schrijven. Een goed jaar later zag ons werk het licht: nummer 11 in de Zebra-reeks, *'Schuiven met auto's, munten en bollen'*. Op de Nationale Wiskunde Dagen van 1 en 2 februari 2002 lag het ter tafel.

Vragen

Er zijn enkele vragen en problemen bij het domein Keuze-onderwerpen waarmee ik geconfronteerd werd toen ik van dit nieuwe fenomeen hoorde.

1. Waar, in welke jaarlaag, moet ik het zebrablok in de planning plaatsen?
2. Voor hoeveel procent moet het in het PTA worden opgenomen?

3. Mogen leerlingen een zebraboekje bij hun profielwerkstuk gebruiken?
 4. Kan een zebraboekje als Praktische Opdracht gegeven worden?
 5. Vind ik het belangrijk dat de leerlingen zelf een onderwerp bestuderen zonder dat er in de les uitleg over gegeven wordt?
 6. Moet de hele klas hetzelfde boekje doen, of kunnen keuzes gemaakt worden uit een beperkt aanbod?
 7. Moet ik zelf alle boekjes hebben doorgewerkt voordat ik ze aan de leerlingen aanbied?
 8. Moet ik leerlingen helpen als ze met vragen komen over een boekje dat ik zelf niet ken?
 9. Zouden ze met vragen komen?
 10. Welke vaardigheden (domein Ag) moeten de leerlingen hiermee krijgen?
 11. Hoe toets ik de geleerde vaardigheden?
 12. Zouden de leerlingen het leuk, interessant, de moeite waard vinden?
 13. Vonden de leerlingen het zinvol (achteraf bekeken) om op deze manier wiskunde te bedrijven?
 14. Is het toegestaan (verantwoord) als ik helemaal geen zebraboekje doe?
 15. Krijgen de leerlingen werkelijk meer belangstelling voor wiskunde of wiskundige studierichtingen?
 16. Waar vind ik informatie over al deze problemen en vragen?
- Ik zal proberen mijn ervaring met al deze problemen en vragen te beschrijven.

Welke positie heb ik zelf?

Ik ben 28 jaar docent wiskunde aan dezelfde middelbare school in Waddinxveen. Ik verzorg de laatste jaren o.a. alle lessen wiskunde B voor klas 4 t/m 6 van het vwo.

Regelmatig geef ik ook les aan klas (1 t/m) 3, en zo kan ik meedenken aan een optimale voorbereiding van de derdeklassers op hun profielkeuze en op wat ze in de bovenbouw kunnen verwachten aan wiskunde. Ik werk op een school waar de schoolleiding ervan doordrongen is dat wiskunde voor veel leerlingen een moeilijk vak is, een vak waar de leerlingen gebaat zijn met voldoende tijd voor uitleg van de leerstof. Toch geniet het vak bij de collega's weinig aanzien. We zijn een school waar de culturele vorming hoog in het vaandel staat. Teken en handvaardigheid worden veelvuldig gekozen als examenvak. De leerlingen zijn niet bijster gemotiveerd om mee te doen aan allerlei wiskundewedstrijden. Hierin is vanuit de vaksectie ook geen traditie opgebouwd.

De eerste problemen

Vier jaar geleden - onze school startte dat jaar met de tweede fase - hield ik me vooral bezig met het opstellen van de werkwijzers voor de vierde klas. Ik had wel korte praktische opdrachten gepland, als voorbereiding op de Praktische Opdracht in de vijfde klas die als dossiertoets meetelt. Toen kwam de vijfde klas. Ik schoof het probleem van het zebrablok voor me uit. Inmiddels had ik al een aantal van de verschenen zebraboekjes doorgenomen. Ook was ik als

mede-auteur druk doende om zelf een boekje in de Zebra-reeks te schrijven. Mijn overtuiging dat het belangrijk is dat leerlingen kennismaken met een stuk wiskunde dat niet wordt uitgelegd maar dat ze zichzelf eigen moeten maken, was mijn grootste drijfveer om het zebrablok gestalte te geven in de leerstofplanning. Ik denk dat er twee vaardigheden centraal staan in deze visie: de informativaardigheid om artikelen (in dit geval een boekje) met wiskundige presentaties, redeneringen en/of berekeningen kritisch te analyseren, en de informativaardigheid om voorbeelden te kunnen noemen van het gebruik van wiskunde in andere vakgebieden, beroepen of kunst [1, p.21-22].

Ik denk dat de zebraboekjes uitermate geschikt zijn om deze vaardigheden te oefenen. Ze zijn immers voor leerlingen geschreven met medewerking van docenten die weten op welk niveau de stof kan worden aangeboden. Maar wat moest ik doen om de leerlingen aan het werk te krijgen?

Aanvankelijk dacht ik dat de boekjes uit zichzelf motiverend genoeg moesten zijn om ze zonder toetsing op te nemen in de planning. Maar mijn pappenheimers kennende zou dit op een fiasco uitlopen. Ze werken tenslotte vooral voor een cijfer. Omdat ik mijn PTA al had ingeleverd, lag hier een serieus probleem.

Enkele vragen beantwoord

Door de hierboven omschreven situatie werden enkele vragen vanzelf beantwoord en enkele problemen automatisch opgelost.

Ik heb de keuze-onderwerpen in de zesde klas geplaatst (antwoord op vraag 1). Gezien het niveau van sommige boekjes lijkt het me niet verstandig om het zebrablok in de vijfde klas te plaatsen. Ook als kennismaking met een andere manier van studeren lijkt een plaats dichterbij de echte studie beter. Om niet te veel in de knel te komen met andere vakken heb ik de leerlingen het doornemen van het boekje in de maanden december en januari opgelegd. Sommigen wilden het graag voor de kerstvakantie afronden, anderen stelden het liever nog even uit. Ik heb het zebrablok uitdrukkelijk *niet* als praktische opdracht opgenomen in het PTA. Om de leerlingen niet te veel onder druk te zetten en hen vooral te laten proeven van de gekozen onderwerpen, besloot ik het keuze-onderwerp voor 2% mee te laten tellen in het schoolexamen; dit cursusjaar voor 5% (vraag 2). Er kwamen twee leerlingen bij me die het boekje *Kattenaids en Statistiek* (nummer 1 uit de Zebra-reeks) wilden gebruiken bij hun profielwerkstuk. Dat leek me een uitstekend idee (vraag 3). Ik heb er wel bij gezegd dat de studielast van ongeveer 40 uur dan bovenop die van het profielwerkstuk moest komen. Aan de hand van hun logboek kon ik controleren of dit ook gedaan is.

Wat ik belangrijk vind

Zoals ik al eerder schreef, vind ik het belangrijk dat leerlingen kennismaken met een stuk leerstof waarin ze geen les krijgen; het is een goede voorbereiding op hun vervolgstudie. Ik kan me voorstellen dat er

Tijdschema Zebra Atheneum

Klas 5	mei	gastles door een docent van een universiteit
Klas 6	september	keuze van het onderwerp (boekje) individueel uitdelen van de instructie logboek gereed maken
	december/januari	presentatie aan de klas individueel inleveren van de uitwerking van de gekozen extra opdracht cijfer vaststellen (mede door klasgenoten)

FIGUUR 1

collega's zijn die het keuze-onderwerp gekoppeld hebben aan een Praktische Opdracht (vraag 4). Toch vind ik het karakter van een keuze-onderwerp, dat vooral wordt ingegeven door de individuele belangstelling van de leerling, wezenlijk anders dan het karakter van een Praktische Opdracht. Bij de praktische opdracht krijgt de leerling een opdracht van de docent, waaraan meestal in groepsverband (met 2 tot 3 leerlingen) gewerkt wordt. Daarbij ligt de nadruk op het resultaat van de opdracht en spelen samenwerkingsvaardigheden een grote rol.

Zoals gezegd vind ik het erg belangrijk dat leerlingen zelfstandig een stuk leerstof kunnen doornemen (vraag 5). Dan moet het ook iets zijn waar ze meer over willen weten. Dus mogen ze zelf kiezen welk boekje ze gaan bestuderen (vraag 6). Een aantal boekjes heb ik (uit belangstelling) zelf al doorgenomen; ik heb alle boekjes in elk geval doorgekeken, maar ik beheers zeker niet alle aangeboden leerstof. Ik vind het dan ook spannender als de leerlingen er echt zelf uit moeten zien te komen. Ik vind overigens niet dat ik de inhoud van een boekje zelf hoeft te kennen alvorens het een leerling ter keuze aan te bieden (vraag 7). Nu kan ik zelfs wat van mijn leerlingen leren als ze hun bevindingen presenteren. Ik zal ze niet altijd kunnen helpen met de inhoud, wel met de aanpak (vraag 8). Omdat ik bij het aankondigen van het keuze-onderwerp mijn leerlingen heb verteld dat ik niet alle boekjes heb kunnen bestuderen en dat het me leuk lijkt eens wat van hen te leren over een bepaald onderwerp, zijn er ook geen vragen geweest over de inhoud (vraag 9).

De organisatie

In de vijfde klas krijgen de leerlingen een gastles van een wiskundige van een universiteit. Ik kondig daarbij aan dat elke leerling in de zesde klas een boekje moet kiezen over een onderwerp dat hem of haar persoonlijk aanspreekt (zie figuur 1).

In het begin van de zesde klas leg ik een stapel met o.a. boekjes uit de Zebra-reeks neer en geef ze een lijst

met mogelijke onderwerpen (boekjes). Binnen een week moeten ze een onderwerp kiezen. Dan bestel ik de boekjes voor hen. Ik geef hun een stencil met wat er precies van hen verwacht wordt bij het bestuderen van het onderwerp. Dit komt neer op 20 uur studielast (moet eigenlijk 40 zijn) die ze volledig buiten de lessen om moeten invullen (zie figuur 2). Ik raad ze aan om er een weekend voor uit te trekken en dan in één keer het onderwerp uit het boekje te bestuderen. Dit heb ik zelf ook gedaan bij de boekjes die ik heb doorgenomen.

Het is wel een individuele opdracht, dus er wordt niet in groepjes aan gewerkt en er is een individuele afsluiting.

Omdat het maken van een verslag een tijdrovende kwestie is, heb ik besloten om de leerlingen aan elkaar de inhoud van het boekje en een of twee van de extra opdrachten uit het boekje met de door hen gevonden oplossingen te laten presenteren (vraag 11). Door deze aanpak kunnen de leerlingen oefenen in verschillende algemene vaardigheden, zoals (Ag 1) vakliteratuur kritisch analyseren, (Ag 2) informatie verwerven via ICT (bij enkele boekjes hoort een website), enzovoorts. Ook zit in sommige boekjes de mogelijkheid (Ag 24) van oriëntatie op studie en beroep (vraag 10).

Aanvankelijk wilde ik de leerlingen hun presentatie laten houden buiten lestijd, in de aula, voor hun klasgenoten en mogelijke belangstellenden. Na overleg (te weinig tijd en roosterruimte) werd besloten de presentaties in de les te houden, voor de hele klas. Met maximaal 10 minuten per presentatie kwam ik uit op 4 weken (dit jaar 5). De leerlingen moesten intekenen op de mogelijke data, voor of na de kerstvakantie. Dit was geen probleem, want een aantal (ijverige) leerlingen wilde graag zo snel mogelijk dit onderdeel afronden.

Deze procedure leidde er toe dat de leerlingen niet voor elkaar wilden onderdoen, en omdat de eersten die aan bod kwamen duidelijk de zaken goed hadden doorgenomen en voorbereid, 'moest' iedereen die later aan de beurt kwam ook wel goed zijn best doen.

Zebraboekje: 20 slu

Wat moet je doen bij het onderdeel **Zebraboekje**?

- ☐ Houd een logboek bij.
 - Maak een kolom met de datum.
 - Maak een kolom met werkzaamheden.
 - Maak een kolom met aantal minuten per keer dat je er aan werkt.
[Je kunt dit doen achterin het schrift waarin je de opgaven maakt]
- ☐ Schaf een schrift aan.
- ☐ Lees de inleiding.
- ☐ Maak een planning aan de hand van de inhoud.
- ☐ Besteed 12 tot 15 slu aan het doorwerken van het boekje.
- ☐ Maak de opgaven waarvan de antwoorden achter in het boekje staan, in het schrift.
- ☐ Kies een opdracht uit waaraan je verder gaat werken.
- ☐ Besteed 2 tot 6 slu aan het uitwerken van deze opdracht.
- ☐ Bereid in 2 uur de presentatie voor van maximaal 10 minuten.
 - Vertel in hoofdlijnen waarover het boekje gaat.
 - Vertel welke opdracht uit het boekje je hebt gekozen en waarom.
 - Vertel in het kort wat je met deze opdracht hebt gevonden.
[Je kunt ook het resultaat laten zien en dit toelichten]
- ☐ Het is handig als je bij het doorwerken meteen rekening houdt met de presentatie.
- ☐ Maak korte aantekeningen over wat je in je presentatie kunt gebruiken.

FIGUUR 2

Uit de manier waarop de presentaties werden gegeven bleek al gauw dat ze het zebrablok serieus hadden genomen. Uit de reacties kreeg ik de indruk dat de meeste leerlingen het een waardevol studie-onderdeel vonden.

Interessante wiskunde die ze zelf moesten onderzoeken (vraag 12): ze kwamen zelf met suggesties toen bleek dat deel 3 uit de Zebra-reeks, 'Schatten, hoe doe je dat?', door meerdere leerlingen gekozen was. Vier maal dezelfde presentatie leek hen niet boeiend. In overleg verdeelden de leerlingen de verschillende hoofdstukken over de presentaties. Ze wilden geen slecht figuur slaan bij de anderen (vraag 13).

De eerlijkheid gebiedt mij een kritische noot te plaatsen. Bij de laatste vier leerlingen kreeg ik de indruk dat er toch wat weinig extra gedaan was. Dit heb ik ondervangen door dit cursusjaar naast de mondelinge presentatie een schriftelijke weerslag te vragen van de oplossingen die ze voor de extra opgaven hebben gevonden. De weging is van 2% naar 5% gegaan.

De beoordeling

Omdat bij de door mij gekozen opzet van het zebrablok de presentatie een grote rol speelt (begrijpen de medeleerlingen waar het over gaat?), mocht de klas als geheel een voorstel doen voor het cijfer. Zelf had ik ook een cijfer in gedachten, en motiveerde dit met voorbeelden uit het gehouden betoog. Natuurlijk was het voor hen van eigenbelang om niet te laag te cijferen. Omdat ik kon vaststellen dat de meeste leerlingen ruim voldoende tijd hadden uitgetrokken om het onderwerp te bestuderen en de presentatie voor te bereiden, was dit voor mij geen probleem. Mijn belangrijkste doel was immers dat mijn leerlingen het leuk zouden vinden, zich zonder hulp een stukje wiskunde eigen te hebben gemaakt en dat ook nog aan medeleerlingen te hebben uiteengezet. Ik ben niet ontevreden over het resultaat, zeker gezien het drukke programma dat ze ernaast moesten afwerken.

De laatste vragen beantwoord

Ik denk dat er collega's zijn die het zebrablok (nog) niet hebben laten doen het afgelopen jaar. Ik heb daar begrip voor. Maar ik zal geen slapende honden wakker maken als ik zeg dat de inspectie in de toekomst in het PTA zoekt naar dit onderdeel van het examenprogramma en er een kritische vraag over gaat stellen (vraag 14).

Ik vind een keuze-onderwerp van 40 slu wel erg veel en houd het (voorlopig) op 20.

Er zijn op scholen ook inventieve collega's die het zebrablok gekoppeld hebben aan een Praktische Opdracht. In dit artikel heb ik geprobeerd duidelijk te maken dat dit niet de bedoeling is van het zebrablok. Of de leerlingen daadwerkelijk meer belangstelling krijgen voor B-vakken? De tijd zal het leren. Ik vind dat wij als wiskundeleraren wel degelijk medeverantwoordelijk zijn voor het 'werven' van meer B-studenten. Al was het maar om in de toekomst een nieuwe generatie bevlogen opvolgers te krijgen (vraag 15).

Ik heb nog weinig plaatsen kunnen vinden waar ik antwoord heb gekregen op vragen die het zebrablok betreffen. Ik hoop dat dit artikel er een van is geworden (vraag 16).

Noot

[1] Examenprogramma's profielen vwo/havo, OC en W, 388868/Cfi 88060/1200, mei 1998

Illustratie op pagina 86

Jeannette van der Kleij

Over de auteur

Rob van Oord (e-mailadres: van.oord@wxs.nl) is sinds 1974 docent aan het Coenecoop College te Waddinxveen. Hij is mede-auteur van boekje nummer 11 uit de Zebra-reeks: 'Schuiven met auto's, munten en bollen'.

Boekbespreking / Fractals, meetkundige figuren in eindeloze herhaling (Zebra 10)

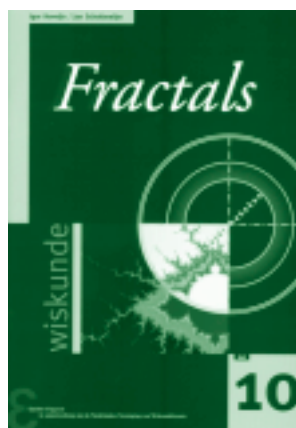
Auteurs: Igor Hoveijn en Jan Scholtmeijer Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2001)

isbn 90-5041-068-5 [Jan Donkers]

Weer zo'n mooi boekje in de Zebra-reeks. Maar, om meteen met de deur in huis te vallen, het lijkt me alleen geschikt voor de betere wiskundeleerling in 5- of 6-vwo.

De meeste leerlingen zullen wel eens van fractals hebben gehoord en er enkele voorbeelden van hebben gezien. In ieder geval kunnen ze nu ook kennismaken met de wiskundige behandeling van dit spannende onderwerp. Een boek met vele definities, stellingen en bewijzen en dat zal voor veel leerlingen wel even wennen zijn, denk ik. In nauwelijks 50 bladzijden zijn de auteurs er naar mijn mening op een voortreffelijke wijze in geslaagd een aantal voor de leerling geheel nieuwe maar vooral ook wiskundig lastige begrippen over het voetlicht te brengen, gelardeerd met vele voorbeelden en vooral veel opgaven. Na een korte inleiding waarin het begrip fractal wordt geïntroduceerd, volgt in hoofdstuk 2 een uitvoerige behandeling van de drie standaard voorbeelden, te weten het Peano-eiland, het Sierpinski-vierkant en de Cantor-verzameling.

De kern van het boek is zonder twijfel hoofdstuk 3: de fractale dimensie. Het is niet mis wat de leerling hier voorgeschoteld krijgt. 'Een geruststelling op zijn tijd kan geen kwaad', zullen de auteurs hebben gedacht, immers we vinden op bladzijde 35: 'Deze definitie van dimensie lijkt ingewikkeld, maar het zal later blijken dat dat meevalt.' Gelukkig maar, de dimensiedefinitie laat zich heel goed toepassen op de drie standaardvoorbeelden. In de hoofdstukken 2 en 3 spelen de opgaven een essentiële rol. Er zijn in totaal 93 opgaven waarvan er 15 gemerkt zijn met een sterretje, net zoals enkele paragrafen. Die zijn wat moeilijker of er wordt wat dieper op de stof ingegaan. In de nabeschuiving vinden we enkele historische opmerkingen en literatuurverwijzingen. Het slothoofdstuk bestaat uit de beschrijving van 13 projecten, passend bij de verschillende hoofdstukken en van een verschillende moeilijkheidsgraad en omvang. De leerling moet dan onder andere kunnen omgaan met volledige inductie, limiet, aftelbaar en overaftelbaar oneindige verzamelingen, overdekking en kleinste overdekking en dimensie. Zelfs voor de goede leerling zal de hulp van de docent hier onontbeerlijk zijn. Docenten, bereidt u dus voor op lastige vragen, maar wees gerust, het loont de moeite.



Over de recensent

Jan Donkers (e-mailadres: j.g.m.donkers@tue.nl) was tot 2001 docent didactiek van de wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Boekbespreking / Schuiven met auto's, munten en bollen (Zebra 11)

Auteurs: Hans Melissen en Rob van Oord Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2001)

isbn 90 5041 073 1 [Hans Daale]

Laat de zebra maar schuiven

Laatst was ik weer eens bij de Makro, op zo'n ontzaglijk groot parkeerterrein om alle koopjesjagers een laadplaats te geven. Je ziet dat iedereen gewoon door elkaar rijdt om zo dicht mogelijk bij de ingang van het gebouw te komen in verband met de sjouwafstand. Wat je dan intrigeert is, hoe de ontwerper van zo'n terrein die parkeerplaatsen heeft ingedeeld. Mogelijk gewoon op het blote oog - of heeft hij er een wiskundig model op losgelaten? Wellicht speelden ruimte en geld geen rol, want alle lijnen leken me gewoon recht-toe-recht-aan op het asfalt gekalkt. In de Zebrareeks wordt in deel 11 een aanzet tot zo'n model gegeven, waarbij het gaat om een zo efficiënt mogelijke indeling van een parkeerterrein. Ook in het centrum van grote steden is zo iets een zinvolle insteek, bijvoorbeeld bij het plannen van een groot kantoorgebouw; mogelijk zal daarbij een groep leerlingen met de kennis uit het boekje 'Schuiven met auto's, munten en bollen' meer dan welkom zijn. Welke docent heeft contacten met planologen om deze dienst aan te bieden?

Deel 11 is vooral uitdagend geworden omdat daarin een aardige brug wordt geslagen tussen praktische zaken en de daarbij behorende wiskundige onderbouwing. Toch niet zo eenvoudig als op de achterflap wordt aangegeven: '... optimale wiskunde, die je al te lijf kan als je gewapend bent met de stelling van Pythagoras, een paar munten en een dosis gezond verstand.' De leerling moet, naar mijn mening, daarnaast ook beschikken over stevige wiskundige vaardigheden en inzicht. Bepaalde stappen in de redeneringen vergen duidelijk een fors doorzettingsvermogen.

De schrijvers zijn in staat te laten zien dat wiskunde geen droog vak is. Zo wordt in het hoofdstuk 'Kanonskogels stapelen' min of meer achteloos bij het vaststellen van het aantal benodigde kogels de formule afgeleid voor de som van de eerste n kwadraten, zodat de lezer kennismaat met de creativiteit die vaak nodig is bij het oplossen van wiskundige vraagstukken. Ook aardig is dat een aantal aangekaarte problemen al van oudsher bekend is, maar dat juist recentelijk de benodigde bewijzen zijn geleverd. Dat lijkt een



uitdaging te zijn aan leerlingen die graag als wiskundige beroemd willen worden: er zijn nog genoeg zaken om onderzocht te worden!

Alles bij elkaar dus een leuk boekje. De onderwerpen lenen zich prima voor behandeling in een groepje, bijvoorbeeld binnen een project. Maar dan zijn de leerlingen wel veel langer bezig dan de 20 uur die door de auteurs als studielast wordt opgegeven. En dat lijkt me nou helemaal niet erg.

Over de recensent

Hans Daale (e-mailadres: daale-zwol@planet.nl) is redacteur van *Euclides* en werkzaam bij de HES te Amsterdam.

Boekbespreking / Spelen met gehelen (Zebra 12)

Auteurs: Ruud Jeurissen en Leon van den Broek Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2002)

isbn 90 5041 072 3 [Klaske Blom]

Dit boekje is verschenen als twaalfde deel in de zebra-reeks, een serie boekjes naar het idee van Jan Breeman om vwo-leerlingen kennis te laten maken met interessante onderwerpen die buiten het standaard-curriculum vallen. De inhoud van *Spelen met gehelen* behelst onderwerpen uit de algebra en getaltheorie: GGD, KGV en priemgetallen.

De auteurs stellen met nadruk in de inleiding dat ze leerlingen zelf dingen willen laten ontdekken en bewijzen. Het gaat ze niet alleen om het bijbrengen en kunnen toepassen van wiskunde, maar vooral ook om leerlingen te laten ervaren hoe men in de wiskunde werkt en bestaande kennis uitbreidt. Dit betekent dat het zelf bewijzen veel aandacht krijgt in dit boekje. In de inleiding staat verder dat de auteurs zich richten op leerlingen met wiskunde B; mijn indruk is dat het nog specifiek geschreven is voor leerlingen met wiskunde B12 omdat het begrijpen en zelf geven van bewijzen zo centraal staat. Bovendien zijn de taal en notatie in het boekje nogal wiskundig van aard en misschien ontoegankelijk voor leerlingen die geen ondergrond hebben in het leren redeneren en bewijzen.

Het boekje bevat 11 hoofdstukken met aan het eind van elk hoofdstuk een korte samenvatting van de inhoud. De eerste twee hoofdstukken hebben een intuïtief en verkennend karakter. Vanaf hoofdstuk 3 neemt de wiskundige strengheid toe en vinden we veel definities, lemma's, stellingen en bewijzen. In elk hoofdstuk staan opgaven (het hele boekje bevat 62 opgaven) waarmee leerlingen de aangeboden theorie moeten oefenen om zich deze eigen te maken. De antwoorden op deze opgaven staan achterin het boekje. Verder vinden leerlingen opdrachten met een meer open karakter die de mogelijkheid bieden om de stof verder te doordenken en de theorie uit te breiden. Het is de bedoeling dat uit deze opdrachten een keus gemaakt wordt. In hoofdstuk 12 staan nog 14 extra (veelal bewijs-)opdrachten.

De auteurs beschrijven in de inleiding de samenhang tussen de verschillende hoofdstukken en laten zien hoe een beperking tot een deelprogramma (ongeveer 20 sluis) mogelijk is door bijvoorbeeld alleen de hoofdstukken over de GGD, of alleen over het KGV, te nemen. De laatste hoofdstukken 9, 10 en 11, over het algoritme van Euclides om de GGD van twee getallen te bepalen en over priemgetallen, staan los van elkaar en kunnen apart worden bestudeerd. Ze zijn als 'toetjes' toegevoegd; citaat: *'... hoofdstuk 11 (priemgetallen) heeft slechts zijdelings met de rest te maken; de verleiding dit intrigerende onderwerp toch toe te voegen was echter te groot.'*

Via de baan van biljartballen maken leerlingen op een leuke manier kennis met gemene veelvouden van positieve gehele getallen. In eerste instantie volgen ze hun



eigen intuïtie bij de veelvoudproblemen, vervolgens maken ze in de opgaven kennis met een systematischer tel-aanpak en worden dan geleid naar een meetkundige oplossing met spiegelingen. Vanaf hoofdstuk 3 worden leerlingen ingeleid in de opbouw van het getaltheoretisch wiskundig bouwwerk op de manier zoals

ik me die herinner uit mijn eigen studieboeken: streng, formeel, stapje voor stapje voortschrijdend. Een kleine uitzondering op deze strengheid maken de auteurs met hun introductie van het begrip 'hark' als benaming voor een hoofdideaal. Even doet het me denken aan de zelfverzonnen taal in het boek *De telduivel*. Het woord 'hark' voegt echter daadwerkelijk iets toe aan een beter begrip van een hoofdideaal omdat de vorm van een hark gebruikt wordt om de opbouw van deze verzameling uit te leggen.

Ondanks de formele benadering proberen de auteurs de fascinatie van leerlingen voor de getaltheorie te voeden. Ze doen dit o.a. door realistische opgaven als: *'Op 1 januari 2002 verving de euro de Nederlandse gulden. Daarbij gold: 1 euro = 2,20371 gulden. Zoek het zo klein mogelijke aantal guldens dat bij omwisseling precies een geheel aantal euro's oplevert.'* Maar ook door een direct aansprekende schrijfstijl; citaat: *'Is het bijvoorbeeld denkbaar dat $19 \times 193 \times 32299 = 23 \times 4349131$ (al die getallen zijn priem)?'* En niet in de laatste plaats door de 'toetjes', het algoritme van Euclides en de priemgetallen. In het nieuwe curriculum voor de tweede fase van het vwo is gekozen voor herinvoering van de meetkunde als omgeving voor wiskundig redeneren en bewijzen. Voor al die docenten die dit besluit betreurden en liever het gebied van de getaltheorie hadden gebruikt om hun leerlingen kennis te laten maken met redeneren en bewijzen, zal dit boekje een welkome aanvulling op het curriculum zijn. Het materiaal uit *Spelen met gehelen* biedt daarnaast een kijkje in de universitaire keuken van een wiskundestudie; het is mogelijk dat het daarom afschrikt en te moeilijk is. Voor leerlingen die geïnteresseerd zijn in wiskunde en die uitdaging zoeken is het een rijke bron.

Over de recensent

Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) is redacteur van *Euclides* en werkzaam aan het Meridiaan College, vestiging het Hooghe Landt, in Amersfoort.

P. WIJDENES 90 JAAR.

Op 22 december 1962 wordt de nestor van de Nederlandse wiskundeleraren, P. Wijdenes, negentig jaar, een heuglijk feit, dat we in ons tijdschrift niet onopgemerkt voorbij kunnen laten gaan in verband met de nauwe relaties die de jubilaris aan Wimecos en en Euclides binden. We wensen hem van harte geluk met deze bijzondere dag en spreken de wens uit, dat deze strijdbare figuur nog tal van jaren over de vitaliteit zal mogen beschikken, die hij tot op zo hoge leeftijd heeft mogen behouden en die hij tot op heden ononderbroken aan de verheffing van het peil van het wiskunde-onderwijs in Nederland dienstbaar heeft weten te maken.

In 1913 richtte Wijdenes samen met H. G. A. Verkaart het „Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde” op. Het zou spoedig de „Vriend der Wiskunde” verdringen; van dit tot in de eerste jaren van de 20e eeuw populaire tijdschrift verscheen in 1914 de 29e en laatste jaargang. Terwijl echter de Vriend der Wiskunde zich uitsluitend had bewogen op het niveau van de akte wiskunde-L.O. hield het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde van meet af aan niet alleen rekening met deze categorie van abonnees maar tevens met die van hen die zich voorbereidden voor de akte Wiskunde-M.O., die certijds bekend stond als K 1. De redacteurs wisten zich van de medewerking van tal van bewaarde wiskundigen te verzekeren, waardoor de verschijning van het nieuwe tijdschrift een onmiskenbare niveauverhoging betekende in vergelijking met zijn voorganger. Talloze leraren in de wiskunde in Nederland hebben hun vaardigheid in het oplossen van vraagstukken mede te danken aan de bekende series van ongeveer 16 vraagstukken die regelmatig in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde werden opgenomen. Dat dit tijdschrift zich 50 jaar lang onbedreigd heeft kunnen handhaven, pleit voor zijn hoge kwaliteiten.

Met J. H. Schogt nam Wijdenes in de twintiger jaren een ander belangrijk initiatief. Hij gaf een „didactisch bijvoegsel” uit op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, en hieruit zou enige jaren later „Euclides” ontstaan. De naam die dit eerste Nederlandse tijdschrift gewijd aan de didactiek der exacte vakken kreeg, verradt ons iets over het didactische klimaat van een kwart eeuw geleden. Toen was er een tendens naar Euclides toe, zoals bijvoorbeeld ook blijkt uit de verschijning van Schogt's befaamde leerboek, thans beweegt zich de ontwikkeling van de schoolmeetkunde eer van Euclides af. De 37 jaargangen van „Euclides” blijven een onschatbare informatiebron voor allen die zich voor de ontwikkeling van de didactiek der wiskunde in Nederland in de twintigste eeuw interesseren.

Gedeelten van een artikel in Euclides, jaargang 38 (1962-1963)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

KANGOEROE: EEN KIJKJE ACHTER DE SCHERMEN

Op vrijdag 21 maart vindt Kangoeroe 2003 plaats. Hoe komen de opgaven voor deze wedstrijd eigenlijk tot stand?

[Ernst Lambeck]

Inleiding

■ Een cruiseschip pikt midden op de oceaan 30 mensen op van een reddingsboot. Vlak voordat deze mensen werden opgepikt was er genoeg proviand aan boord voor alle opvarenden voor 60 dagen, maar direct daarna was die zelfde proviand nog maar genoeg voor 50 dagen. Hoeveel mensen waren er eerst aan boord? Herkent u de opgave? En deze dan:

■ Op het verjaardagsfeestje van Wendy zijn er voor ieder kind zes glaasjes fris. Onverwacht komen er ook nog drie nichtjes van Wendy binnen. Nu zijn er nog vijf glaasjes fris voor ieder kind. Hoeveel kinderen waren er op het feestje voordat de nichtjes binnenkwamen?

Inderdaad, die laatste is een opgave uit de Kangoeroe 2002. Eigenlijk is het dezelfde opgave. De eerste versie is de vertaling van de opgave zoals die oorspronkelijk was aangeboden. De tweede versie is de opgave zoals die uiteindelijk aan onze leerlingen werd voorgelegd. Waarom werd deze opgave zo verbouwd, wie beslisten dat deze verbouwing wenselijk was? We bieden u een kijkje achter de schermen bij het maken van de opgavensets voor de Kangoeroe Wiskundewedstrijd.

De context met het cruiseschip kan voor allochtone leerlingen een negatieve bijklank hebben. Het doet teveel denken aan bootvluchtelingen, aldus het oordeel van de opgavencommissie. Het probleem op zich vond men wel aardig, dus werd gezocht naar een andere context, die voor leerlingen toch herkenbaar kon zijn. Het karakter van de opgave, het opeens moeten delen van een bepaalde voorraad met meer mensen, moest uiteraard ook blijven. Het verjaardagsfeestje van Wendy voldeed aan deze eisen, alhoewel zes glaasjes fris wellicht wat veel voor een kind is.

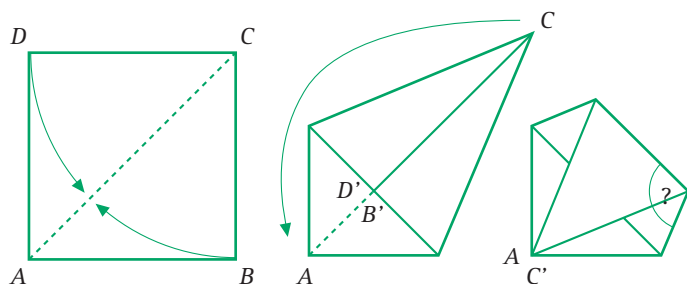
De opgavencommissie

Ieder jaar worden in oktober of november tijdens een internationaal congres van de 26 deelnemende Europese landen (met in totaal 2 200 000 deelnemende leerlingen, in Nederland ca. 35 000) de opgaven voor de wedstrijd gekozen. Internationaal kent men vijf categorieën, Ecolier (9- en 10-jarigen), Benjamin

(11-12), Cadet (13-14), Junior (15-16) en Student (17-18). Voor elk van deze vijf categorieën worden uit de 30 ingezonden opgaven er 30 gekozen. Nederland doet alleen mee met Cadet (bij ons de brug- en tweede klas), omdat het curriculum van klas 3 t/m 5 teveel afwijkt van dat in de andere landen. De andere twee versies worden uit Cadet afgeleid, waarbij zoveel mogelijk opgaven uit de internationale opgavenset voor Junior en Student worden gebruikt. In dit artikel kijken we met name naar de totstandkoming van de definitieve opgavenset voor de brug- en tweede-klassers. In Nederland is dit de taak van de opgavencommissie. Deze werd in 1996 opgericht door wijlen Aegle Hoekstra, die tot aan zijn dood voorzitter was van de commissie. De andere commissieleden van het eerste uur, Corno Botermans, Jacques Haubrich, Marianne Lambriex en Hans Mulders, waren in 2002 nog steeds actief. Sinds 2000 is ook de auteur van dit artikel lid van de commissie. Alle commissieleden zijn of waren werkzaam in het middelbaar onderwijs. Zij worden in hun werk bijgestaan door Jan Donkers en Leon van den Broek.

Nadat het congres de 30 opgaven voor Cadet heeft geselecteerd, worden deze door de voorzitter van de commissie allereerst naar het Nederlands vertaald. Vervolgens gaat de commissie vlak voor en tijdens de kerstvakantie in enkele bijeenkomsten de opgaven beoordelen op niveau, duidelijkheid van de vraagstelling, verbetering van de keuze van de alternatieve antwoorden, vaststelling van de volgorde der opgaven, etc. Het gebeurt dan wel eens dat besloten wordt enkele opgaven te vervangen. Helaas is dit onvermijdelijk, daar in de diverse landen de curricula niet geheel eensluidend zijn. Wat betreft de antwoordmogelijkheden houdt de commissie zich nadrukkelijk aan de afspraak dat deze altijd van klein naar groot worden genoemd, zodat hiermee nooit en te nimmer antwoorden verraden worden.

Na de kerstvakantie wordt nog enkele malen per e-mail gecorrespondeerd over de opgaven. Als de commissie zich uiteindelijk kan vinden in de redactie en illustraties van de 30 opgaven, dan worden nog enige universitair wiskundigen geraadpleegd.



FIGUUR 1

In de inleiding heeft u reeds een voorbeeld gezien hoe een gekozen opgave werd aangepast en de reden waarom. Hieronder volgen nog wat voorbeelden. Allereerst worden enkele internationaal gekozen opgaven beschreven die door de Nederlandse opgavencommissie niet zijn overgenomen. Daarna volgen een paar opgaven waar door de commissie flink aan is gesleuteld. U ziet dan de eerste vertaling, mogelijk een of meerdere tussenproducten en tenslotte het uiteindelijke product. Ik geef telkens zoveel mogelijk aan wat de motivering is geweest.

Vervangen opgaven

■ Als $a : b = 9 : 4$ en $b : c = 5 : 3$, dan is $(a - b) : (b - c) = ?$

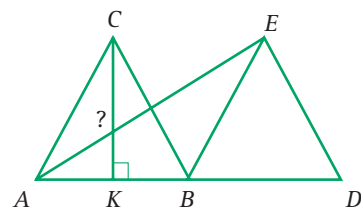
Het gebruik van variabelen is bij opgaven voor de klassen 1 en 2 niet wenselijk. De opgave is wel aan te passen, maar een voor leerlingen natuurlijke en herkenbare context was niet te vinden. Het is vrij eenvoudig om $a : b$ te vervangen door het aantal knikkers dat Anton heeft staat tot het aantal dat Bianca heeft als $9 : 4$, etc., maar de verhouding tussen de verschillen is dan geen natuurlijke vraag.

■ Stel een positief geheel getal n is deelbaar door 21 en door 9. Door hoeveel positieve getallen is n minstens deelbaar?

Ook hier is de variabele vrij eenvoudig te omzeilen, maar het begrip deelbaar is bij veel leerlingen niet bekend.

■ Ineke heeft van een vierkant papiertje een vijfhoek gevouwen. Allereerst zijn de hoekpunten B en D op de diagonaal AC gevouwen. Van de figuur die daarmee is gemaakt wordt C op A gevouwen. Hoe groot is de hoek met het vraagteken? Zie figuur 1.

Een leuke opgave, maar naar alle waarschijnlijkheid veel te moeilijk voor onze leerlingen uit klas 1 en 2. Veel meer dan het feit dat in een driehoek de hoeken samen 180° zijn, en de kenmerken van gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken hebben de leerlingen als de Kangoerowedstrijd wordt gehouden op het gebied van hoeken berekenen nog niet gehad. Toch was de commissie van mening dat een opgave waarin een



FIGUUR 2

hoek moest worden berekend in de opgavenset thuis hoorde. Uit de internationaal ingediende opgaven werd het volgende, eenvoudiger, alternatief gekozen. De driehoeken ABC en BDE zijn gelijkzijdig. B is het midden van AD en CK staat loodrecht op AB . Hoe groot is de hoek met het vraagteken? Zie figuur 2. Deze opgave bleek inderdaad te doen, maar was toch niet te eenvoudig: ongeveer 1 op de 3 leerlingen wist deze opgave goed op te lossen.

Alle opgaven en uitwerkingen kunt u vinden op de website van Kangoeroe (www.sci.kun.nl/math/kangoeroe); de vervangen opgaven uiteraard niet. Voor de liefhebbers de juiste antwoorden van die opgaven: $25:8$, 6 en $112,5^\circ$.

Gewijzigde opgaven

■ Drie kinderen eten samen 17 toffees. André eet er meer dan ieder van de andere kinderen. Hoeveel toffees eet André minstens?

Elke mogelijkheid tot verwarring moet worden uitgesloten. Hoewel het niet echt waarschijnlijk is, zouden leerlingen toch kunnen denken dat André niet een van de drie kinderen is. Dus krijgen de drie kinderen namen:

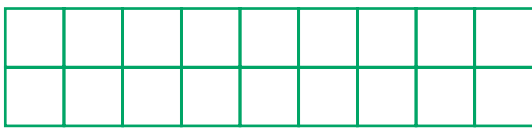
André, Bianca en Carla eten samen 17 toffees. André eet er meer dan ieder van de andere kinderen. Hoeveel toffees eet André minstens?

Vaak is er geworsteld met woorden als minstens, hoogstens, minimaal, maximaal, enz. Uiteindelijk is gekozen voor een duidelijke formulering door gebruik te maken van woordgroepen als het kleinste aantal en de grootste uitkomst.

André, Bianca en Carla eten samen 17 toffees. André eet er meer dan ieder van de andere kinderen. Wat is het kleinste aantal toffees dat André gegeten kan hebben?

■ Op 1 juli komt de zon in Londen op om 04:53u en gaat onder om 21:25u. De middag in Londen begint precies halverwege deze periode. Hoe laat begint de middag in Londen?

De middag begint toch altijd om 12:00u? Daarom de volgende formulering.



FIGUUR 3

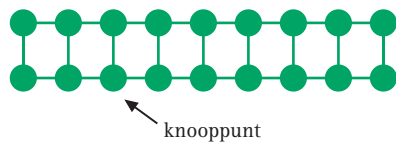
Op 1 juli komt de zon in Londen op om 04:53u en gaat onder om 21:25u. Precies halverwege deze periode staat de zon op haar hoogste punt. Hoe laat is dat?

■ Op een aantal vakjes in **figuur 3** worden kwartjes gelegd. Voor ieder vakje geldt: óf er ligt een kwartje in, óf het ligt naast een ander vakje met een kwartje erin. Hoeveel kwartjes liggen er minstens in de figuur? Op de dag van de Kangoeroewedstrijd was het kwartje voltooid verleden tijd. Veel belangrijker nog: is naast elkaar liggen van vakjes alleen horizontaal of ook verticaal? Dit heeft geleid tot de volgende wijzigingen. Je moet op een aantal van de knooppunten van **figuur 4** muntjes leggen. Als je op een knooppunt geen muntje legt, dan moet je op minstens één van de buurpunten een muntje leggen. Wat is het kleinste aantal muntjes waarmee je dat kunt klaarspelen?

■ Bij een spelletje worden driehoeken gebruikt. Op elk hoekpunt staat een getal van 1 t/m 5 geschreven. Het laagste nummer van de driehoek staat altijd bovenaan. Hoeveel verschillende driehoeken zijn er mogelijk? Een illustratie maakt deze opgave een stuk helderder. Mogelijk ontstaan er bij bovenstaande versie misverstanden over de getallen onderin: moeten deze echt groter zijn? Door een voorbeeld in de illustratie te plaatsen worden de misverstanden direct weggenomen. Marianne schrijft in alle drie de hoeken van de driehoek in **figuur 5** een van de getallen 1, 2, 3, 4 of 5. Geen van de getallen links en rechts is kleiner dan het getal bovenin. Hoeveel verschillende resultaten kan zij krijgen?

■ Peter maakt een rij getallen. Hij begint met 1, schrijft daarna een tweede getal op. Elk volgend getal krijgt hij door alle tot dan gemaakte getallen op te tellen. Hij stopt als hij het getal 1000 krijgt. De rij moet zo lang mogelijk zijn. Welk getal moet hij als tweede getal opschrijven?

Uiteraard is het de bedoeling dat 1000 in de rij moet voorkomen. Maar dat staat er niet. Verder hebben veel leerlingen de neiging nogal slordig te lezen, waarvan verderop nog een mooi voorbeeld. Daarom hebben we in latere versies het woord 'tweede' onderstreept. Met



FIGUUR 4

nog enkele andere verhelderingen geeft dit de volgende opgave.

Peter maakt een rij positieve gehele getallen. Hij begint met 1 en schrijft daarna een tweede getal op. Elk volgend getal krijgt hij door alle tot dan gemaakte getallen op te tellen. 1000 zit ook in de rij. Wat is het kleinste getal dat hij als tweede kan hebben opgeschreven?

■ In een pakhuis leven veel muizen. Van deze muizen is 25% wit en 75% zwart. Van de witte muizen heeft 50% blauwe ogen, van de zwarte heeft 20% blauwe ogen. Van alle muizen hebben er 99 blauwe ogen. Hoeveel muizen zitten er in het pakhuis?

Minstens één opgave in de Kangoeroewedstrijd moet over kangoeroes gaan. Dus werden de muizen kangoeroes:

In een reservaat leven veel vrouwtjeskangoeroes. Van deze vrouwtjeskangoeroes is 25% lichtbruin en 75% donkerbruin. Van de lichtbruine heeft 50% een jong, van de donkerbruine heeft 20% een jong. Van alle vrouwtjeskangoeroes hebben er 99 een jong. Hoeveel vrouwtjeskangoeroes leven er in het reservaat?

Tenslotte

De opgavencommissie wikt en weegt de geselecteerde opgaven. In het voorgaande heeft u slechts een glimp van het werk gezien. Iedere opgave wordt meerdere keren zorgvuldig gescreend. Daarbij wordt ook de moeilijkheid ingeschat opdat de opgaven van een gemakkelijk begin naar een moeilijk einde worden gesorteerd. Idealiter zouden de percentages goede oplossingen dan ook een dalende rij moeten zijn. Toch stellen de leerlingen ons nog regelmatig voor verrassingen. Een mooi voorbeeld is de volgende opgave.

■ Jan leest iedere dag precies 23 bladzijden. Hij begint vandaag aan een boek van 2002 bladzijden. Hoeveel dagen heeft hij nodig om het boek helemaal te lezen en hoeveel bladzijden leest hij op de laatste dag van een nieuw boek?

De achterliggende vermenigvuldiging, $23 \times 87 = 2001$, werd vermoedelijk door 71,2% van de leerlingen uit klas 1 en 2 gevonden. Toch had maar 22,04% van de



FIGUUR 5

leerlingen het juiste antwoord: 88 dagen en 22 bladzijden van het nieuwe boek. De andere 49,16% meende dat het alternatief '87 dagen en 1 bladzijde van het nieuwe boek' het juiste was. Dit was de 10e opgave van de versie voor de brugklas en klas 2, maar eindigde qua score als 21e. Vermoedelijke oorzaak: onzorgvuldig lezen ...

In 2003

Op vrijdag 21 maart vindt Kangoeroe 2003 plaats. U doet toch ook (weer) mee?

Over de auteur

Ernst Lambeck (e-mailadres: ernstwl@westbrabant.net) is als docent wiskunde werkzaam aan het Newmancollege te Breda. Sinds twee jaar is hij voorzitter van de opgavencommissie van de Kangoeroe. Tevens is hij bestuurslid van de Stichting Wiskunde Kangoeroe.

KANGOEROE 2003

[Leon van den Broek]

Er zijn twee belangrijke wijzigingen ten opzichte van vorige jaren.

Tijdpad

Er is een duidelijk tijdpad met zes *controlemomenten* voor de scholen en vier voor de organisatie van Kangoeroe:

vóór	van	aan	betreft
8 jan	KUN	school	mailing met inschrijfformulier
7 feb	school	KUN	inschrijving
7 feb	KUN	school	eventuele reminder inschrijving
10 feb	Citogroep	school	factuur
4 mrt	school	Citogroep	betaling
8 mrt	Citogroep	school	opgaven en antwoordbladen
vrijdag 21 maart 2003: Kangoeroe-wedstrijd			
28 mrt	school	Citogroep	antwoordbladen
28 apr	Citogroep	school	uitslag en prijzen
18 mei	school	KUN	opgave abonnementen
28 mei	KUN	school	verslag Kangoeroe

Als er iets misgaat, is voor de scholen duidelijk wie aangesproken moet worden: KUN of Citogroep.

KUN - Willy van de Sluis, telefoon: 024-3652985 of e-mail: kangoeroe@sci.kun.nl

Citogroep - Klantenservice, telefoon: 026-3521111 of e-mail: kangoeroe@Citogroep.nl

De drie versies

Er komen drie duidelijk *verschillende* versies:

- 1 voor groep 7 en 8 van de basisschool en voor klas 1 en 2 vmbo;
- 2 voor klas 1 en 2 havo/vwo en voor klas 3 en 4 vmbo;
- 3 voor klas 3, 4 en 5 havo/vwo.

Over Kangoeroe

Meer informatie over de Kangoeroewedstrijd is te vinden op www.sci.kun.nl/math/kangoeroe.

Nadere inlichtingen kunt u verkrijgen bij Leon van den Broek, Katholieke Universiteit Nijmegen, telefoon: 024-3652296, e-mail: kangoeroe@sci.kun.nl

'DE LERAAR HAD HET WEL HEEL ERG DRUK...'

Ervaringen uit het Adlo-project

[Paul Drijvers, Peter Boon, Willem Hoekstra]

Inleiding

Hoewel veel wiskundeleraars positief staan tegenover het gebruik van ICT in hun les, blijken er in praktijk toch veel factoren van technische en praktische aard te zijn die de stap naar het computerlokaal (te) groot maken. Een van de manieren om te zorgen dat van uitstel geen afstel komt, is als docent deel te nemen aan een experiment. Dat is een duidelijke stok achter de deur, die voorkomt dat de goede voornemens in schoonheid sterven. In dit artikel staat een viertal docenten centraal, die in zo'n project zijn gestapt, in drie van de vier gevallen zelfs ongehinderd door veel voorkennis of praktijkervaring. Dat zoiets een onderneming is die veel energie vraagt, blijkt uit een opmerking van een leerling na afloop: 'De leraar had het wel heel erg druk!'

In dit artikel wordt eerst het project *Algebraonderzoek in een digitale leeromgeving* globaal beschreven. Bij wijze van voorbeeld wordt dan een van de opdrachten voor de leerlingen geschetst. Daarna komen de docenten aan het woord, die na twee jaar terugkijken op hun ervaringen. Vervolgens reageren ook enkele leerlingen op het experiment. We besluiten het artikel met enkele conclusies.

Wat is het Adlo-project?

Het project *Algebraonderzoek in een digitale leeromgeving*, kortweg Adlo, is een ICT-ontwikkelproject (Senter projectnummer I000080) dat gedurende de schooljaren 2000–2001 en 2001–2002 is uitgevoerd door het Oosterlicht College in Nieuwegein, het Almende College in Silvolde en het Freudenthal Instituut in Utrecht. Het doel van Adlo is ervaring op te doen met met *digitale leeromgevingen* in de wiskundeles. Zoals eerder in Euclides beschreven (zie [1]) verstaan we onder een digitale leeromgeving voor wiskunde hier een omgeving die mogelijkheden voor tekstverwerking combineert met wiskundige capaciteiten voor het tekenen van grafieken en voor

algebraïsch rekenwerk. Een geïntegreerd geheel dus van tekstverwerker, grafische rekenmachine en computeralgebra software. (Overigens wordt de term 'digitale leeromgeving' ook anders opgevat; dan wordt vaak bedoeld op webgebaseerde systemen zoals Blackboard.) In zo'n omgeving kan lesmateriaal worden gemaakt door de docent, dat de leerlingen kunnen doorwerken. Ook kan de omgeving worden gebruikt voor het maken van werkstukken en praktische opdrachten.

Meer specifiek is het doel van Adlo om na te gaan in hoeverre digitale 'vullingen' kunnen worden ontworpen die bijdragen aan het algebraïsch inzicht van leerlingen van vwo-4. Daartoe is gezamenlijk een aantal opdrachten ontwikkeld, die aan de leerlingen worden aangeboden in Scientific Notebook (op het Almende College) of in TI-Interactive (op het Oosterlicht College). Deze opdrachten zijn in de klas uitgetest. De deelnemende klassen hadden daarvoor een vijftiental extra wiskundelessen in het schooljaar. De lessen zijn geobserveerd en tijdens vergaderingen geëvalueerd. Dat leidde dan tot bijstellingen van de opdrachten. U kunt de opdrachten, evenals andere informatie uit het project, vinden op de website van Adlo (www.fi.uu.nl/adlo). De ervaringen van een van de betrokken docenten kunt u lezen in het artikel van Van de Giessen (zie [2]).

Een voorbeeld uit het lesmateriaal

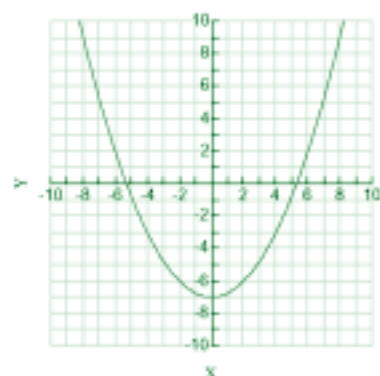
Er is door de deelnemers van Adlo veel gediscussieerd over de vraag wat voor soort opdrachten kunnen bijdragen aan de doelen die we voor ogen hadden. Korte gesloten opdrachten die geïsoleerde algebraïsche vaardigheden toetsen, zijn ongeschikt: de algebraïsche vaardigheden worden door de digitale omgeving overgenomen, waardoor er voor de leerlingen slechts een oefening in de bediening van het programma zou overblijven. Voor een kennismaking met het programma zijn dergelijke opdrachten natuurlijk wel geschikt.

De schuivende parabool

Opdracht

Hieronder zie je de grafiek van de functie f die gedefinieerd is door

$$\text{define } f(x) = \frac{x^2}{4} - 7$$



Deze opdracht draait nu om de vragen *A* en *B* hieronder.

Stel dat de 4 in de formule gaat veranderen, en dat het getal op die plaats langzaam kleiner wordt.

- A. Wat gebeurt er dan met de parabool?
En met de snijpunten met de x-as?*

Stel op de plaats van de 4 staat een ander getal, zeg c , zodat de twee snijpunten met de x -as precies 6 eenheden uit elkaar liggen.

- B. Hoe groot is c dan?
Hoe kun je zeker weten dat je exact de goede c -waarde hebt?*

Daar kun je nu aan beginnen. Open daarvoor het [werkschrift](#). Aan het einde van deze opdracht staat nog een bonusopgave.

Als je geen idee hebt hoe je het kunt aanpakken, kun je eerst aan de onderstaande opgaven werken. Die brengen je hopelijk op ideeën die je bij de hooftopdracht kunt gebruiken. Bij elk van de opgaven kun je ook het antwoordbestand openen. Dat bevat het antwoord en ook een tip voor de eigenlijke opdracht.

1. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de oorspronkelijke parabool met de x -as.

Voor het antwoord van deze opgave en een tip klik [hier](#).

2. Vervang het getal 4 door een andere waarde en bereken de exacte coördinaten van de snijpunten met de x -as in dat geval.

Voor het antwoord van deze opgave en een tip klik [hier](#).

Open het [schuifbestand](#) waarmee je de waarde van het getal op de plaats van de 4 systematisch kunt veranderen.

3. Voor welke waarden van c is er geen snijpunt met de x -as?

Bonusopgave:

Voor welke waarde van c liggen de twee snijpunten met de x -as 1000000 van elkaar? Laat de parabool in dat geval tekenen.

Gezocht is dus naar problemen die wat complexer zijn en waarbij de oplossingsstrategie niet triviaal is, en ook niet per se eenduidig. We streven naar onderzoeksopdrachten waarbij het vinden van de oplossingsstrategie de voornaamste taak voor de leerling is, terwijl het (algebraïsche) rekenwerk kan worden overgelaten aan het programma. In combinatie met de mogelijkheden voor het tekenen en manipuleren van grafieken zou het programma kunnen functioneren als een digitale experimenteermgeving die helpt bij het zoeken naar een juiste strategie.

Het aanbieden van opdrachten met een dergelijk onderzoeks karakter werd als ideaal wel onderschreven, maar kritische kanttekeningen waren er ook:

- Als leerlingen geen idee hebben hoe ze het probleem moeten aanpakken, wat doe je dan? Is het mogelijk om tips toe te voegen die leerlingen op weg helpen? Te veel sturing brengt het onderzoeks karakter wellicht om zeep.
- Hebben leerlingen in klas 4-vwo überhaupt genoeg bagage om strategieën te bedenken waarbij algebraïsche vaardigheden worden gebruikt?
- Bij een serieuze onderzoeksopdracht waarin algebraïsche vaardigheden een rol spelen, zal het begrip parameter al snel naar voren komen. Kun je verwachten dat leerlingen een dergelijke opdracht kunnen uitvoeren zonder een gedegen behandeling van het begrip parameter vooraf?

Uiteindelijk hebben we gekozen voor een serie opdrachten waarin het onderzoeks karakter een belangrijke plaats heeft. Door middel van tips en extra (inleidende) opdrachten hoopten we een vangnet te maken voor leerlingen die er niet mee uit de voeten zouden kunnen.

In **figuur 1 (p. 99)** staat de opdracht 'De schuivende parabool' die we met bovenstaande kanttekeningen in het achterhoofd hebben gemaakt. Misschien is de opgave niet zo open als men van een echte onderzoeksopdracht zou verwachten. Ze werd dan ook gebruikt als opstap naar opdrachten waarbij dat onderzoeks karakter sterker naar voren komt. In eerste instantie wordt de leerling uitgenodigd tot een empirische benadering. Wat gebeurt er met de grafiek, wanneer verschillende getalswaarden op de plaats van 4 worden ingevuld? En met de twee snijpunten van de grafiek met de x -as en met de onderlinge afstand van die twee snijpunten? We hopen dat de leerling zo gaat beseffen dat deze grafische aanpak nooit meer oplevert dan benaderende oplossingen, en zich realiseert dat de exacte plaats van de snijpunten wordt verkregen door de vergelijking $f(x) = 0$ op te lossen.

In de klas verliep deze eerste fase vrij soepel. Veel leerlingen kwamen via de grafiek uit op een benadering van $c = 1,3$. Enigszins teleurstellend was, dat een grote groep leerlingen op dit punt het probleem als opgelost beschouwde, ondanks de extra reflectievraag: 'Hoe kun je zeker weten dat je exact de goede c -waarde hebt?'

Na doorvragen van de docent kwam dan toch het besef naar boven dat de oplossing van $f(x) = 0$ de plaats van de snijpunten met de x -as bepaalt. Het scherm hieronder

$$\text{define } f(x) = \frac{x^2}{1.3} - 7$$

$$\text{solve } (f(x)=0,x)$$

$$x = 3.01662 \text{ or } x = -3.01662$$

laat zien dat 1,3 in elk geval niet het exacte antwoord is.

Een andere tegenvaller was dat veel leerlingen bovenstaande solve-optie van het programma om vergelijkingen op te lossen niet meer paraat hadden. Het introductiepracticum was blijkbaar alweer weggezakt.

De volgende fase, waarin de waarde van c exact bepaald moet worden, is natuurlijk het lastigste onderdeel. We hoopten erop dat leerlingen de vergelijking $f_c(x) = 0$ zouden gaan oplossen voor een willekeurige waarde van c :

$$\text{define } f(x) = \frac{x^2}{c} - 7$$

$$\text{solve } (f(x)=0,x)$$

$$x = -\sqrt{7 \cdot c} \text{ and } c \geq 0 \text{ or } x = \sqrt{7 \cdot c} \text{ and } c \geq 0$$

Dan zouden ze vervolgens c kunnen bepalen, wetende dat $x = 3$ en $x = -3$ de oplossingen moeten zijn:

$$\text{solve } (\sqrt{7 \cdot c} = 3, c)$$

$$c = \frac{9}{7}$$

Hoewel in het schuifbestand bij hulpopgave 3 een expliciete suggestie stond om de vergelijking $f_c(x) = 0$ algemeen op te lossen, waren er nauwelijks leerlingen die deze weg volgden. De leerlingen die dit (vaak op aandringen van de docent) wel deden, wisten vervolgens meestal geen raad met de uitdrukkingen in c die als oplossingen verschenen.

Toch waren er verschillende leerlingen die wel op een andere wijze tot een correcte oplossing kwamen. Twee meisjes deden bijvoorbeeld het volgende:

$$\text{solve } \left(\frac{3^2}{x} - 7 = 0, x \right)$$

$$x = \frac{9}{7}$$

Daarbij hadden ze de volgende redenering: 'De snijpunten vind je met behulp van $f(x) = 0$. Ik vul voor x het getal 3 in, want het snijpunt heeft als x -coördinaat 3. Het getal in de noemer weet ik niet, dus dat noem ik x . Dat los ik dan op.' Ondanks de wat verwarrende rolwisseling van de variabele x wisten deze leerlingen hun algebrakennis samen met de



computeralgebra op een juiste manier te gebruiken om het probleem op te lossen.

Het effect van de hulpopgaven 1, 2 en 3, bedoeld om leerlingen op het juiste spoor te zetten, viel eigenlijk nogal tegen. Voor dat kleine zetje in de goede richting, vaak in de vorm van een reflectievraag, bleek de aanwezigheid van een docent hard nodig. Standaardtips zijn dan blijkbaar toch niet voldoende.

Ervaringen van docenten

Drie van de vier deelnemende docenten hadden bij de start van het project niet veel ervaring met het gebruik van ICT in de klas. Nu, na twee jaar experimenteren, is het een goed moment om hen wat vragen te stellen. Jill van der Kuip, Job Bozon (staand op de foto van links naar rechts; zie figuur 2), Carel van de Giessen en Ton Erich (zittend op de foto van links naar rechts) geven de antwoorden.

Wat was de voornaamste succeservaring in dit project?

Carel: Het was zeer nuttig om te ervaren dat leerlingen in vwo-4 duidelijk nog niet klaar zijn voor computeralgebra. Met computeralgebra kom je heel snel op een vrij hoog abstractieniveau. Daar is vwo-4 nog niet aan toe. Dat is volgens mij ook de reden dat vooral de goede leerling computeralgebra als een black box ziet waar hij niks van leert.

Jill: De grootste succeservaring was voor mij denk ik om op een andere manier met wiskunde bezig te zijn. Het is een aangename afwisseling op een gewone wiskundeles en het vraagt een andere denkstrategie van leerlingen, wat de meesten wel uitdagend vonden. Dit was meer een gevolg van de open vraagstelling dan van het programma zelf. De opdrachten waren zo geformuleerd dat leerlingen niet meteen wisten wat ze moesten doen. Bijvoorbeeld de opdracht waarin ze een grafiek zien en er gevraagd wordt de functie erbij te

geven. Het was een vijfdegraads polynoom en het was de bedoeling dat ze met behulp van de nulpunten en de kennis over ontbinden in factoren de formule zouden traceren. Meestal beginnen ze eerst wat te proberen: grafieken plotten en kijken of het er op lijkt, maar ze zien al snel dat dit niet de manier is. Als ze dan nog geen idee hebben, kunnen ze de hints openen, maar ook daar wordt niet gezegd hoe ze het moeten oplossen. Er wordt dan bijvoorbeeld gevraagd of ze een formule voor een gegeven parabool kunnen produceren. In het wiskundeboek daarentegen worden leerlingen nogal snel bij het handje genomen en worden kleinere stapjes genomen.

Job: Het met leerlingen werken aan wiskundige en interessante problemen waarvoor in de gewone lessen geen tijd is en vooral het feit dat de leerlingen over het algemeen enthousiast tot zeer enthousiast bleven ('stukken beter dan een gewone les'). Verder vond ik het zeer leuk om te zien dat enkele leerlingen die in de gewone les nauwelijks meekomen, nu de kans kregen hun goede kant te laten zien. Ik vermoed dat dat het gevolg is van de wetenschap dat zij goed overweg kunnen met computers en daarmee durven te experimenteren. Dat geeft hun zelfvertrouwen. In de gewone les missen zij dat vertrouwen.

Kun je een voorbeeld geven, waarbij een leerling iets inziet waarbij je dacht: hé, dat zou anders misschien niet zijn gebeurd?

Carel: Een enkeling begon bij het berekenen van differentiequotienten de limietsituatie bij h naar 0 aan te voelen, terwijl dat aan de meesten niet besteed is. Over het algemeen zijn de leerlingen erg betrokken en een enkeling loopt al op wiskundige zaken vooruit.

Jill: Van een aantal leerlingen was ik zeer verbaasd te zien dat ze bijna het beeldscherm in werden gezogen, terwijl ze tijdens wiskundelessen niet zo'n bevlogenheid toonden. Je ziet overigens ook het omgekeerde.

Ton: Een voorbeeld is dat een leerling bereid is om een gedane berekening, na aanwijzing van jouw kant, nogmaals uit te voeren. Dit omdat de handeling weinig tijd en/of moeite kost, daar het pakket de wiskundige handeling verricht. Ik heb dit bijvoorbeeld meegemaakt in de opdracht waarin ze veelvuldig gebruik maken van 'solve' en 'factor' en zo het verband leren ontdekken tussen de nulpunten van de functie en de factoren van de ontbinding en verbaasd zijn dat zij het ook nog snappen.

En wat was de grootste tegenvaller van het project?

Carel: De grootste tegenvaller was voor mij dat de software (Scientific Notebook) hoewel enerzijds voorzien van een goede interface anderzijds vreemde dingen produceerde en vreemde wiskundige trekjes vertoonde. Dat plaatste je regelmatig voor ongewenste situaties alhoewel de leerlingen daar niet moeilijk over deden.

Jill: Sommige opdrachten waren echt te moeilijk. Daardoor was ik geneigd om de leerlingen meer te sturen dan ik me in eerste instantie had voorgenomen.

Job: Ik zou niet zozeer willen spreken van tegenvaller als wel van het grootste probleem. Dat was voor mij het feit dat ik me veel meer heb moeten bezig houden met de hardware dan mij lief was, zowel binnen de Adlo-lessen als daarbuiten.

Ton: De grootste tegenvaller van het project is onze overschatting van het wiskundig vermogen van de leerlingen. Zij kunnen niet het abstractieniveau aan dat opties van het algebrapakket gebruiken, zoals 'solve', vragen. Leerlingen vinden het niet logisch dat je bij 'solve' (in TI-Interactive) moet opgeven naar welke variabele je oplost. Leerlingen gaan bijvoorbeeld oplossen naar de parameter in plaats van naar de variabele.

Wat beschouw je als de leerwinst voor de leerling? Wat voegt het werken met de digitale wiskunde omgeving toe aan de 'gewone' les met bord, pen en papier?

Carel: Leerwinst vind ik dat de scheiding van grafische representatie en algebraïsche representatie het denken bevorderde en er ook toe leidde dat leerling algebra als noodzakelijk hebben ervaren, al zal geen leerling dat zo onder woorden brengen.

Jill: De leerwinst voor de leerlingen is volgens mij dat ze kennis hebben gemaakt met een algebrapakket. Ze zien hoe zo'n programma werkt en wat je er wel of niet mee kan. Je laat eigenlijk zien dat er naast een tekstverwerkingsprogramma, een spreadsheet-programma en internet nog veel meer is. Een voordeel op de gewone les met pen, papier en grafische rekenmachine is dat je meer kan op de computer. Je kan vergelijkingen oplossen, die door hen nog vrij lastig op te lossen zijn met pen en papier. Antwoorden met een parameter geven weer nieuwe stof tot nadenken en dat daagt ze uit om dieper over de materie na te denken, maar dit was wel moeilijk voor de meeste leerlingen.

Job: Leerwinst voor de leerlingen is het inzicht dat er heel andere, verrassende wiskunde is dan hetgeen ze in de lessen zien, dat er meerdere manieren zijn om tot een oplossing te komen en dat er meerdere hulpmiddelen ingezet kunnen. Of er een hoger wiskundig inzicht wordt verkregen, waag ik te betwijfelen.

Ton: Je hoopt op een beter inzicht in de wiskunde; of dit werkelijkheid wordt, heb ik nog niet kunnen vaststellen. De koppeling met de gangbare lesstof was te zwak. Ideaal zou zijn als je een Adlo-opdracht inbedt in het normale lesprogramma zodat je in een gewone les met behulp van de beamer en pc het werken met de computer terugkoppelt. Als de leerlingen een aantal lessen bezig zijn geweest met de computer, kan een reflectieles achteraf veel kwartjes doen vallen, is mijn ervaring. Maar we hadden misschien betere resultaten kunnen boeken als we de lessen in vwo-5 hadden uitgevoerd in plaats van vwo-4.

Tegen welke obstakels loopt een leerling aan die een computeralgebra-omgeving als TI-Interactive of Scientific Notebook gebruikt bij wiskunde?

Carel: Computervaardigheden vormen geen enkele hobbel, wiskundige wel. De algebraroutine is bijvoorbeeld te weinig ontwikkeld. Leerlingen hebben

nog geen structureel beeld en blijven tegen vormen aankijken.

Jill: De leerlingen moeten leren werken met het programma. Mijn leerlingen hadden relatief vroeg in het jaar het introductiepracticum gedaan. Maar ze waren toch veel vergeten toen we later in het jaar verder wilden. Dus er moet niet veel tijd zitten tussen de introductie en het vervolg. Leerlingen hebben tegenwoordig voldoende computerkennis om aan de slag te kunnen, maar de wiskundige competenties dwarsboonden de voortgang. Sommige leerlingen wisten bijvoorbeeld niet meer dat je met het gelijkstellen van functies snijpunten kan uitrekenen! Je kunt als docent veel problemen ondervangen door klassikaal een aantal zaken door te spreken.

Job: De zwarte doos die het programma voor veel leerlingen toch blijft en hun gebrekkige voorkennis uit de basisvorming, zijn duidelijk obstakels. Het vertalen

'je hoopt op een beter inzicht in de wiskunde'

van het in woorden gestelde probleem naar een wiskundig probleem en andersom, van een wiskundige oplossing naar de context, bleek erg lastig te zijn. De leerlingen hebben nauwelijks vaardigheden ontwikkeld met betrekking tot het 'spelen' met formules. Denk bijvoorbeeld aan het niet herkennen van de abc-formule in de vorm zoals TI-Interactive die geeft. Voor leerlingen uit vwo-5 zou dit wat dat betreft een geschikter project zijn geweest.

Ton: De grootste hobbel waar leerlingen tegenaan lopen is dat de algebratool voor hen een black-box lijkt. Ze gebruiken 'solve', 'factor', etc. maar ze kunnen de uitkomsten niet interpreteren. Deze hobbel strijk je glad als je tevoren een duidelijke instructie geeft. Verband leggen met het boek, waarin ze ook oplossen en factoriseren, is ook zeer op zijn plaats. Dan is een leerling veel beter in staat om een antwoord te geven op de vraag: 'Wat doe je eigenlijk als je in TI-Interactive het commando solve ($f(x) = 0, x$) uitvoert?'

Heeft het project je stijl van werken in een computerles veranderd?

Jill: Mijn stijl van werken in de computerles is niet echt veranderd. Misschien dat ik meer let op de hints die ik weggeef. Wat zeg je wel en wat zeg je niet. Verder niet echt invloed op de gewone lessen.

Job: Ik had tot vorig jaar nooit een computerles

gegeven. Mijn stijl van werken in een computerles is dus niet (of juist enorm?) veranderd. Wel is het zo dat dit project mijn angst voor dergelijke lessen heeft weggenomen. Ik heb niet het idee dat mijn rol in de computerles nou zoveel anders is dan in een gewone les, afgezien van de rol van troubleshooter als computers niet naar behoren functioneren.

Ton: Jazeker, dit jaar heb ik ervaren dat een inleiding vooraf het succes van een computeropdracht positief beïnvloedt. Ik heb de voorkennis van de leerlingen in het eerste jaar schromelijk overschat. Ook een tussentijds reflectiemoment kan, ondanks dat het veel tijd kost, veel rendement opleveren. Ik denk niet dat ik een andere rol heb aangenomen; de leerlingen waren in het algemeen heel positief en enthousiast bezig. Nu ben ik de normale les veel eerder geneigd om de beamer of transview in te zetten, ook bijvoorbeeld in klas 1 en 2.

Welke tip zou je een collega mee willen geven die een soortgelijke activiteit wil starten het komende schooljaar?

Carel: Goed nadenken en voorbereiden, de lange lijn in ogenschouw nemen. Nadenken wat je wilt, anders is het risico erg groot van wat gepruts in de marge. Ook moet je de leerlingen duidelijk kunnen maken wat ze eraan hebben.

Jill: Eerst zelf goed met het programma leren werken. Dan zoveel mogelijk materiaal en informatie opzoeken zodat je zelf niet verzandt in het bedenken van leuke lesjes. Begin altijd met een intro-practicum en zorg dat

en zorg voor een degelijke inleiding zodat ze op hetzelfde beginniveau zitten. Herhaal hierbij alle nodige computervaardigheden en leg waar mogelijk een link met de normale wiskunde op het bord. Het is niet gemakkelijk om leerlingen een onderzoekshouding aan te leren; stilstaan bij een antwoord of terugkijken naar wat er gedaan is doen ze niet vanzelf. Je kunt dit stimuleren met reflectievragen of door een klassikaal reflectiemoment in te bouwen. Dit laatste wordt wel lastiger naarmate de leerlingen verder uit elkaar lopen. Dan kan je een snelle groep vragen hun resultaten te demonstreren.

Zijn er nog andere dingen die je kwijt wilt, als je terugkijkt op het project?

Job: Ik vond het erg leuk dat er wiskunde buiten het boekje werd bedreven. Het is de motivatie van leerlingen ten goede gekomen. Al met al heb ik absoluut geen spijt aan dit project te hebben deelgenomen. Ik heb er veel van geleerd.

Reacties van leerlingen

Na deze terugblik van de docenten laten we ook enkele leerlingen aan het woord. Hieronder enkele fragmenten uit interviews die na de experimenten met hen zijn gehouden. Op sommige punten voegen we wat commentaar in.

Wat vond je het grootste verschil met een gewone les?

Thijs: Ik vond met de computer leuker.

Maria: Je bent zelfstandiger bezig. Er wordt niet alleen maar verteld en ga dan maar maken. Je bent meer zelf aan het uitzoeken.

Commentaar achteraf: Daarin lijkt de opzet dus geslaagd te zijn.

Heb je het gevoel dat je anders met wiskunde bezig bent geweest?

Lara: Ik denk heel anders. Je bent meer met de computer bezig en je bent niet echt met wiskunde bezig. Je moet het nu in de praktijk brengen, je moet er zelf gewoon achterkomen. In een boek blader je gewoon terug hoe het moet en doe je dat. Nu moet je het sneller gewoon weten. Meestal leer ik het pas achteraf voor de repetitie. Nu moest je het meteen van het begin af al weten.

Janneke: Ja heel anders, je bent totaal niet klassikaal bezig. Je moet er zelf mee aan de slag. Het ging nu ook helemaal niet om hoe je dingen berekent maar meer om de uitkomsten. In de les leer je toch vaak hoe je dingen moet uitrekenen maar dat doet de computer nu voor je.

Commentaar achteraf: We denken dat Lara bedoelt dat je een oplossingsstrategie moet hebben voor je aan het werk kunt in de computeralgebra-omgeving.

Wat heb je er van geleerd?

Yvan: Van de functies en de grafieken bij elkaar zoeken en onderzoeken heb ik veel geleerd. Die kennis heb ik ook meteen bij andere vakken een beetje kunnen gebruiken, dus dat was wel handig. Je bent

‘je kan veel dingen sneller zien, ontdekken’

de vervolgoopdrachten een beetje aansluiten op het gewone lesprogramma, zodat je daaraan kan refereren. Er moet verder een beamer op school zijn zodat je je leerlingen demonstraties kan geven.

Job: Zorg voor een goed functionerende werkomgeving en dus een goed contact met systeembeheer. Bereid je terdege voor, dus ook de opdrachten op een leerlingcomputer uitwerken. Een goede inleiding is het halve werk, een goede reflectie tussendoor werkt ook uitstekend. Wees zeer flexibel en stressbestendig met name in de richting van de computers. In een korte tijd een aantal lessen achter elkaar werkt beter dan een langere periode één les in de week.

Ton: Schat het niveau van de leerlingen vooral laag in

steeds zelf bezig met kleine onderzoekjes naar de vorm en veranderingen van een grafiek. In de les moet je dat allemaal met je grafische rekenmachine doen en dat gaat veel langzamer. Dan lukt het je vaak niet om iets helemaal uit te zoeken en dat is jammer. Nu weet ik meer van de functies en grafieken die bij elkaar horen en hun veranderingen.

Thijs: Het visuele, dat je als je een getal verandert meteen ziet hoe de grafiek verandert. Je kan veel sneller dingen zien, ontdekken. Zeg maar, als je eerst zou moeten tekenen en dan weer tekenen ...

Mart: Je kon ook meer uitrekenen. Zo met twee variabelen, ik zou niet weten hoe ik dat zonder computer zou moeten aanpakken.

Hebben jullie verschil gezien in het gedrag van jullie docenten?

Yvan: Ja, hij hield zich meer afzijdig en hielp alleen als je dat nodig had. Af en toe gaven ze wat toelichting of controleerden we wat opdrachten. Normaal praat de leraar meer en begeleidt hij ons meer door de les heen. Nu moesten we het allemaal nog zelfstandiger gaan doen.

Janneke: Ummm... nou, hij was wel heel erg druk. Hij moest iedereen apart dingen uitleggen. Je moest soms een beetje lang op je beurt wachten, op zich natuurlijk niet erg maar je schiet dan niet erg op.

Nog een tip voor volgend jaar?

Yvan: Ja, gebruik deze programmaatjes in de lessen wiskunde, maar niet té vaak. Ik vind dat het voor de afwisseling moet zijn. Na een paar hoofdstukken op de computer behandeld te hebben had ik zoiets van: 'Alweer! Kunnen we nu niet gewoon weer in het boek gaan werken?' Het begon bij mij te vervelen, na al die hoofdstukken op de computer. De eerste paar lessen vond ik trouwens wel heel erg leuk, omdat het iets nieuws was.

Lara: Als ik klaar ben, ga ik eigenlijk meteen door naar de volgende som. Ik kijk dan niet: wat staat er eigenlijk. Dat zou eigenlijk een som moeten zijn. Nu heb ik zoiets van: snel er doorheen en klaar.

Commentaar achteraf: We denken dat Lara bedoelt dat je door de opgaven gedwongen zou moeten worden om na te denken over wat je hebt gevonden. Het inbouwen van reflectievragen is een van de kwesties waaraan in vervolgonderzoek aandacht wordt besteed.

Conclusies

Terugkijkend op het project vinden alle deelnemers het een boeiende en leerzame ervaring. We kunnen voorzichtig de volgende conclusies formuleren.

- De pakketten Scientific Notebook en TI-Interactive zijn krachtige omgevingen om lesmateriaal in te ontwikkelen en bieden veel mogelijkheden voor de leerlingen.
- De leerlingen vinden het werken in deze omgevingen leuk en interessant, zeker als afwisseling op de gewone les.
- Het vraagt tijd van de leerling om met het pakket vertrouwd te raken en de mogelijkheden te leren

benutten. Als het pakket daarna te incidenteel wordt gebruikt, zakt die kennis weg. Het verdient dus aanbeveling om de routine in het gebruik op te bouwen en te onderhouden.

- Een goede aansluiting van computerpracticum bij de reguliere lesstof en bij het boek draagt bij aan het leereffect.

- Leerlingen moeten worden aangezet om na te denken over de resultaten die ze in de digitale omgeving hebben gevonden. Reflectie moet door de docent worden bewerkstelligd, bijvoorbeeld door middel van klassengesprekken en demonstraties van leerlingen, of door het stellen van goede vragen.

- Het gebruik van computeralgebra in vwo-4 heeft niet tot een duidelijke verbetering van het algebraïsch inzicht van de leerlingen geleid. Dat is ook niet zo eenvoudig te realiseren, en mogelijk komt computer-algebra in vwo-4 te vroeg, omdat de leerlingen nog voldoende algebraïsche basis missen. Of zou het juist helpen als leerlingen al eerder met computeralgebra vertrouwd zouden worden?

- Voor de docent riep het lesgeven met computer-algebra de vraag op wat het belang is van het uitvoeren van algebraïsche technieken met de hand. In praktische zin vroeg het experiment de nodige energie en voorbereiding. Een goede infrastructuur en adequate ondersteuning zijn voorwaarde voor een efficiënte uitvoering.

Zoals gezegd zijn dit slechts voorlopige en ietwat speculatieve conclusies. We hopen dat ze toch richting geven aan vervolprojecten, of zinvol kunnen zijn voor docenten die zich ook op het experimentele pad gaan begeven.

Noten

[1] P. Drijvers: *Computeralgebra in een digitale leeromgeving wiskunde*, Euclides 76(6), pp.240–244 (2001).

[2] C. van de Giessen: *Computeralgebra in vwo-4: verslag van een experiment*, Nieuwe Wiskrant 22(1), pp.25–29 (2002).

Over de auteurs

Paul Drijvers (e-mail: p.drijvers@fi.uu.nl) is verbonden aan het Freudenthal Instituut waar hij het gebruik van computeralgebra in het voortgezet onderwijs onderzoekt. Daarnaast verzorgt hij bij het APS professionaliseringscursussen over het gebruik van ICT in de wiskundeles.

Peter Boon (e-mail: postbus@pbjboon.demon.nl) werkt bij het Freudenthal Instituut als ICT-onderwijsontwikkelaar en ontwerpt educatieve software binnen diverse projecten.

Willem Hoekstra (e-mail: w.hoekstra@fi.uu.nl) is docent wiskunde op JSG Maimonides in Amsterdam. Daarnaast verzorgt hij bij het APS professionaliseringscursussen over het gebruik van ICT in de wiskundeles en doet hij als Leraar in Onderzoek van NWO onderzoek naar wiskundige reflectie in een digitale leeromgeving.



De nieuwe CAS (Computer Algebra System) rekenmachine voor het hoger en universitair onderwijs.

- 2.7 MB archiefgeheugen (3 keer zoveel als de TI-92 Plus)
- Modern design en een display met hoge resolutie
- Icoon-gestuurd bureaublad en interne klok
- QWERTY-toetsenbord, Pull Down-menu's en functietoetsen
- Pretty Print voor perfecte weergave van symbolische uitdrukkingen
- Upgrademogelijkheden via computerconnectie
- Differentiaalvergelijkingen
- Roteerbare 3D-grafieken
- Statistische analyses met 1 of 2 variabelen en 8 regressiemodellen
- Matrixrekening
- Programmeermogelijkheden voor nieuwe functies
- Tal van Flash-applicaties voorgeladen – o.a. een interactieve meetkunde-applicatie

Telefoonnummer van onze Customer Service Afdeling is: 020 - 58 29 490

Texas Instruments behoudt zich het recht voor producten, specificaties, diensten en programma's te wijzigen.
©2002 Texas Instruments

Bij de Gamma

Angst voor wiskunde

[Anne van Streun]

't **DENKEN**
BEVORDEREN

Bij de kassa

Het is oudejaarsdag, tien jaar geleden. De regen valt met bakken naar beneden. Door een gaatje in de muur van onze kelder stroomt water binnen. Niet te stoppen. Buiten blijkt een regenpijp totaal vergaan, zodat het water uit de dakgoot onder het huis loopt. Snel naar de Gamma voor 3 meter regenpijp.

De standaardmaat bij de Gamma is 4 meter, maar gelukkig staat er ook een stuk regenpijp van 3 meter lengte. Nog net voor sluitingstijd kom ik bij de kassa. *'Dit stuk is 3 meter lang. De prijs is f 19 voor een regenpijp van 4 meter lengte.'*

Een meisje van begin twintig bedient de kassa. Zij grijpt naar de rekenmachine, zo'n machientje dat werkt op lichtcellen. Het is een donkere dag, dus het apparaatje doet het niet. Lichte paniek. Mijn kelder stroomt vol, dus ik sla het zelfontdekkend leren maar over.

'We hebben die rekenmachine niet nodig. Kijk, de prijs van 4 meter is f 19. Maak er maar f 20 van. Dan kost 1 meter f 5 en 3 meter f 15. Alstublieft, 15 gulden.'

Verbijsterd kijkt het meisje mij aan met een blik van: U denkt toch niet dat ik zelf ga rekenen?

'Jannie, mag ik jouw rekenmachine even lenen?'

Jannie komt er bij staan, want er is toch geen klant meer te bekennen. Ook haar machine werkt niet. Een goed didacticus onderdrukt zijn haast en begint geduldig opnieuw.

'Kijk, de prijs van 4 meter regenpijp is f 19. Dat rond ik voor het gemak maar af naar boven, f 20. Goed voor de Gamma. Ik deel die f 20 door 4 van die 4 meter. Dat geeft een prijs van f 5 per meter. Ik heb hier een stuk van 3 meter. Dat wordt dan f 15. Alstublieft.'

Twee paar blauwe ogen kijken mij in paniek en ongeloof aan. Die man denkt toch niet dat wij die berekening kunnen volgen? Rekenen, daar hebben wij gelukkig al lang mee afgerekend. En daar zijn wij al op afgerekend.

De twee meisjes zeggen verder niets en gaan in beraad naar achteren. Zij komen met een heel dik prijzenboek tevoorschijn en vinden na enige tijd de prijs per meter van dit type regenpijp. Inderdaad, f 5.

Angst

Dit voorval heb ik in de voorlichting over de invoering van de basisvorming wiskunde voorgelegd aan verschillende groepen wiskundeleraren. De meest voorkomende reacties waren:

- 'Zie je wel, ze kunnen niet meer rekenen.'
- 'Dat komt van het gebruik van de rekenmachine. Ze kunnen niks meer.'

Mijn gedachten gingen op die oudejaarsavond en nog vele jaren daarna een heel andere kant op. Die grote angstogen van beide meisjes had ik eerder gezien. Zo'n tien jaar heb ik statistiek onderwezen aan de parttime-opleiding voor pedagogiek M0-A in Leeuwarden. In die jaren werd dat onderwijs op zaterdag gegeven. Elk jaar startte ik met drie groepen van ongeveer 30 volwassenen, werkzaam als kleuterleidsters, maatschappelijk werkers of leerkrachten van de basisschool. Een mooie studie met veel filosofie, pedagogiek, psychologie en onderwijskunde. En dat ene vak statistiek, direct al op de eerste zaterdag. Daar heb ik diezelfde angstogen gezien: 'Statistiek, wiskunde, daar heb ik nooit iets van begrepen.'

De eerste lesuren begon ik daarom altijd met het meten van de angst in de groep voor het vak wiskunde. Wij ontwierpen een meetschaal en turfden. Mijn waarneming klopte, meer dan de helft van die groep zag als een berg tegen de wiskunde op en was bij voorbaat verlamd.

Overall in de wereld is die angst voor het vak wiskunde signaleerd. Wat een opbrengst van zoveel jaar onderwijs in het rekenen en de wiskunde!

Wiskundeonderwijs leidt bij veel leerlingen tot een gebrek aan zelfvertrouwen, tot een houding van niet-

denken, er niet aan willen of durven beginnen. Het is geen wonder dat in heel veel landen de inhoud van het wiskundeonderwijs voor iedereen drastisch aan het veranderen is. Net als in Nederland met de basisvorming.

En dat niet meer kunnen rekenen dan? Of die rekenmachine? Hoe wilt u de prijs berekenen met die rekenmachine? Of zonder? Toch niet door f 19 te delen door 4, enzovoort? Zo worden de prijzen vast niet berekend. Het gaat natuurlijk niet om het kunnen rekenen, want $20 : 4$ of 3×5 was en is het probleem niet. Het gaat om het durven vertrouwen op je eigen denken, om het denken zelf. Kan het onderwijs aan zo'n attitude bijdragen? Of negatief geformuleerd: Wat is onderwijs waard, dat niet aan zo'n attitude bijdraagt?

Wat doe je er als docent aan?

Op een studiemorgen van onze universitaire lerarenopleiding spraken de vakdidactici van de talen hun collega's van de wiskunde en natuurkunde aan op de didactiek van hun vakken. 'Wij begrepen het niet en zijn weggevlucht voor jullie vakken. Waarom hebben jullie niet meer aandacht voor leerlingen die het (nog) niet begrijpen?' Als ik de internationale literatuur overzie, dan heeft dat (kunnen) *begrijpen* er inderdaad veel mee te maken. Die studenten pedagogiek verwoordden het als volgt: 'We begrepen het niet,

maar redden ons een tijdje met het onbegrepen uit het hoofd leren. Op den duur liepen we vast en haalden alles door elkaar.' Deze volwassenen hadden klassiek wiskundeonderwijs 'genoten', zonder contexten en toepassingen. Het begrijpen van abstracte begrippen en methoden gaat natuurlijk via het laten werken aan concrete voorbeelden en herkenbare contexten.

In die statistiekcursus voor pedagogiekstudenten ging ik daar heel ver in: kansexperimenten en weddenschappen, uiteindelijk uitlopend op het toetsen van hypothesen met fouten van de eerste soort en de tweede soort. Voor dat laatste gebruikte ik plastic bussen met een doorschijnende dop, ooit ontworpen voor een IOWO-cursus rond het ontstaan van het bekende boek van Nijdam. Ik stopte bijvoorbeeld 7 zwarte en 3 witte kralen in alle bussen en liet de studenten een steekproef trekken door de bus op de kop te houden. Wat is je conclusie over de inhoud van de bus (de populatie) na 25 keer een kraal 'trekken'? Alle fundamentele begrippen komen bij dergelijke experimenten als vanzelf in de onderlinge discussie naar voren.

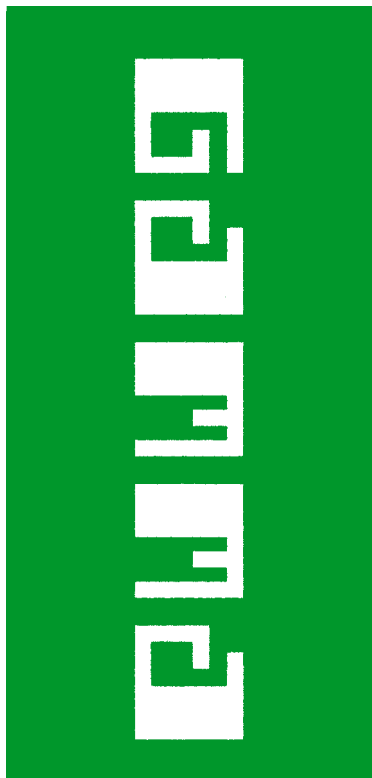
Voor veel studenten werkte dat practicum, maar er bleef een groep die de onderliggende redenering van het type 'Als ik dit resultaat in de steekproef aantref, dan kan de populatie de volgende inhoud hebben: ...' niet zelf kon leveren. Ook dat is bekend. Sommige kinderen en volwassenen bereiken het stadium van formeel denken 'Als ..., dan ...' nooit. Een docent kan veel bereiken door het heen en weer switchen van concreet naar abstract, maar niet alle wiskundige of natuurwetenschappelijke begrippen en methoden zijn voor iedereen te begrijpen.

Een passend leerplan

De inhoud van de wiskunde in de basisvorming is natuurlijk veel geschikter voor de gehele populatie leerlingen, vanaf de caissières bij de Gamma tot de universitaire talendidactici, dan het klassieke wiskundeonderwijs met veel nadruk op algebraïsche technieken. In het statistiekproject over de gemiddelde leerling (zie de CBS-website: www.cbs.nl) bleek wiskunde in de eerste twee leerjaren het populairste theorievak, maar uit het internationaal vergelijkend onderzoek TIMSS blijkt geen invloed van de basisvorming op de gemiddelde houding ten opzichte van het schoolvak wiskunde. Zijn er wellicht ook leerlingen voor wie de wiskunde in de basisvorming juist te weinig uitdaging biedt? Is er meer differentiatie tussen leerlingen van verschillende aanleg gewenst?

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@math.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundendidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.



$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

HOE KARIN DE LES VERSTOORDE: LEREN VAN LEERLINGEN

Meestal leren leerlingen van een leraar, maar er zijn situaties waarbij de leraar van de leerling leert. Over zo'n gebeurtenis gaat dit verhaal [1].

[Joop van Dormolen]

De beginsituatie

Het gebeurde tijdens een wiskundeles in de brugklas van een havo/vwo-scholengemeenschap. Ik was didactiekdocent en zat als zodanig achter in de klas samen met een van mijn studenten van een lerarenopleiding. De les werd gegeven door zijn mentor; laten we hem Wilbur noemen [2]. De episode vond plaats eind september of begin oktober, eind 70er jaren. Wilbur, een eerstegraads leraar, had zo'n 15 à 20 jaar leservaring. Zijn leerlingen mochten hem graag en hadden vertrouwen in zijn onderwijskwaliteiten. Er was afgesproken dat de les geanalyseerd zou worden in een nabespreking.

Het onderwerp van de les

De les ging over regels in de algebra, met name de commutatieve wetten $a + b = b + a$ en $a \times b = b \times a$, en de distributieve wet $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. In de voorafgaande weken hadden de leerlingen geleerd te werken met variabelen in de algebra, zoals het substitueren van getallen voor letters en het intuïtief oplossen, d.w.z. zonder een formeel algoritme, van heel eenvoudige vergelijkingen.

De gebeurtenis

Ik geef een beknopte samenvatting van wat Wilbur deed. Hij had erop gewezen dat het voor de uitkomst niet uitmaakt of je 3 bij 2 optelt of 2 bij 3. Dat geldt niet alleen voor de getallen 2 en 3, maar voor ieder paar getallen. Dat feit kun je uitdrukken in de regel $a + b = b + a$, waarbij a en b staan voor elk getal dat je maar bedenken kunt. Dit is niet alleen het geval voor optellen. Bij vermenigvuldigen hebben we een soortgelijke regel: 3×2 betekent $2 + 2 + 2$ en 2×3 betekent $3 + 3$. In beide gevallen komt er hetzelfde uit. Dit is zo voor elk paar getallen, zodat we kunnen zeggen: $a \times b = b \times a$ waarbij a en b staan voor elk getal wat je maar bedenken kunt.

De meeste tijd was Wilbur aan het woord, met vlotte en coöperatieve respons van de leerlingen op zijn vragen. Daarna begon Wilbur met voorbeelden van de distributieve wet. Nadat hij er met de klas enige tijd aan bezig was, stak een van de leerlingen, laten we haar Karin noemen, haar vinger op. Wilbur gaf haar direct het woord, denkend dat ze wilde reageren op zijn uitleg.

Ze zei: 'Twee maal drie is zes, want twee maal drie is één plus één plus één ... (hier pauzeerde ze even) plus één plus één plus één. En drie maal twee is ook zes, want één plus één ... (korte pauze) plus één plus één ... (korte pauze) plus één plus één. In beide gevallen heb je even veel énen.' Terwijl ze sprak, bewoog ze haar vinger in de lucht alsof ze schreef wat ze zei. Wilbur wees haar interventie op een vriendelijke manier af met zoiets als: 'Ja, dat is zo, maar dat hebben we al gedaan. We zijn nu met wat anders bezig.' En hij ging verder met de distributieve wet.

Wat heb ik van Karin geleerd?

Omdat ik niet de zorg had voor een soepel verloop van de les, kon ik rustig nadenken over wat Karin had

gezegd, en ik besloot dat in te brengen als een van de onderwerpen in de nabespreking. Tijdens die nabespreking zei Wilbur dat hij een beetje geïrriteerd was, omdat Karin de les verstoorde door iets te berde te brengen wat op dat moment niet in bespreking was. Daar kwam nog bij dat hij Karin beoordeelde als een van de zwakkere leerlingen, en daarom had hij aangenomen dat ze het besprokene gewoon wat langzaam had begrepen. Nadat we even over Karins opmerking hadden gepraat, zei hij dat het hem speet dat hij haar zo had behandeld, omdat hij begon te vermoeden dat zij juist goed had begrepen wat de commutatieve wet betekende - veel meer dan een formele aanvaarding van een regel.

Karin liet zien dat ze echt verbaasd was. Haar verbazing was niet dat je het verschijnsel kunt verklaren met de algemene regel, maar dat je de algemene regel kunt verklaren met het verschijnsel. Lange tijd, als leraar in de klas en als didactiekdocent in discussies met aanstaande leraren en met leraren in functie, had ik het gevoel dat het onmogelijk is jonge leerlingen te leren dat de commutatieve en distributieve wet essentiële basisregels van wiskunde zijn. Voor de meesten van hen zijn dat vanzelfsprekendheden, en door er zoveel misbaar over te maken liet ik alleen maar zien dat wiskunde iets is om eenvoudige zaken ingewikkeld te maken. Pas als we veel verder zijn in het begrijpen waar (zuivere) wiskunde over gaat, zien we in dat, logisch gezien, (zuivere) wiskunde van de grond af opgebouwd moet worden en dat we daartoe een stelsel van axioma's moeten formuleren waarvan de commutatieve en distributieve wetten deel uitmaken.

Nu zijn die axioma's niet zomaar pure verzinsels. Ze zijn gebaseerd op praktische ervaringen. Met andere woorden: de commutatieve en distributieve wetten zijn niet *verklaringen* (of rechtvaardigingen) van verschijnselen, zoals Wilbur en ik en veel andere leraren (in de tijd waarin dit verhaal speelt) trachtten te onderwijzen, maar *formaliseringen* (of rationaliseringen) van die verschijnselen. Ik denk dat dit is wat Karin voelde, al zal ze zich dat vermoedelijk niet zo expliciet hebben gerealiseerd.

Als Wilbur zich hiervan tijdens de les bewust was geweest, had hij zeker anders gereageerd. Zo'n leraar was hij wel. In elk geval hebben we dit in de nabespreking van Karin geleerd.

Ik laat nu de commutatieve wet voor vermenigvuldiging voor wat zij is. En ook zal het vervolg niet gaan over *wat* ik van Karin leerde.

De gebeurtenis bracht me aan het denken over de vragen:

- hoe kan iemand van zijn leerlingen leren, en:
- wat zijn *gunstige factoren* daarvoor.

Dezelfde taal, verschillende betekenissen

Eerst iets over de eerste vraag. Er zijn allerlei manieren om daarop te reflecteren (Van Dormolen, [9]). Ik heb op deze plaats gekozen voor een aanpak die ik vond in

een artikel (Klaassen en Lijnse, [6]) van twee ex-collega's in de didactiek van de natuurkunde. Zij beschrijven een situatie waarin het een leraar niet lukt een leerling te overtuigen van de verklaring van een zeker natuurkundig verschijnsel. Ze geven vijf verschillende gezichtspunten om zo'n probleem aan te pakken, waarvan op deze plaats alleen het vijfde relevant is [3].

Klaassen en Lijnse betogen dat leerling en leraar weliswaar dezelfde taal gebruiken, maar dat ze diezelfde taal op verschillende manieren gebruiken en er verschillende betekenissen aan geven.

In navolging van hun visie kunnen we zeggen dat Karin en Wilbur dezelfde taal spraken. Beiden spraken ze over het feit dat 2 maal 3 dezelfde uitkomst geeft als 3 maal 2. Daar waren ze het over eens, maar elk gaf er een andere betekenis aan: Karin beschouwde het als verschijnsel waaruit de algemene regel afgeleid kan worden, terwijl Wilbur het verschijnsel gebruikte als voorbeeld om de algemene regel uit te leggen. Ten tijde van Karins interventie had Wilbur dit verschil niet in de gaten. Hij dacht dat Karin wat langzaam van begrip was en wees op een vriendelijke manier haar interventie af als niet ter zake doende.

Factoren voor het leren door een leraar van een leerling

Nu naar mijn tweede vraag: wat zijn gunstige factoren om als leraar van je leerlingen te leren? Een van de factoren is natuurlijk de *vaardigheid en kennis* van de leraar. Wilbur was een ervaren leraar die het begrip ordeprobleem al jaren niet in zijn woordenboek had staan. Als hij op het bewuste moment meer geweten had over het verschil tussen voorbeelden als verklaring en voorbeelden als instap voor generaliseren, en over het verschil tussen dezelfde taal spreken en betekenis aan die taal geven, had hij wellicht meer adequaat kunnen reageren.

Een andere factor is de *situatie* waarin de leraar verkeert. Ik had gemakkelijk praten. Ik was in een vrije situatie waarbij ik me niet behoefde te bekommeren over de voortgang van de les. Ik had alle tijd om over Karins gedrag na te denken. Ik herinner me dat ik in het nagesprek nauwelijks wist wat er na haar interventie was gebeurd. Wilbur bevond zich in een geheel andere situatie, die hem verhinderde te doen wat ik wel kon.

Een derde factor is de *werkvorm*. De werkvorm die Wilbur gekozen had was niet de meest ideale om eigen vindingen van leerlingen op te roepen. Toch gebeurde dat bij Karin. Als Wilbur in de gaten gehad had wat Karin bedoelde, had hij ook deze werkvorm wel kunnen gebruiken om andere leerlingen op de hoogte te brengen van haar inbreng.

Zeker één van de allerbelangrijkste factoren is tot slot de *bereidheid* van de leraar om af te wijken van zijn eigen plan en gedachtenstroom, teneinde in te gaan op wat zijn leerlingen te berde brengen - en daarmee de bereidheid om als leraar van je leerlingen te leren. Wilbur had die bereidheid zeker, zoals blijkt uit zijn uitlatingen in het nagesprek.

Kennis en vaardigheid, de situatie, de werkvorm en bereidheid - vier factoren die het leren kunnen beïnvloeden. Niet alleen het 'normale' leren door de leerling van de leraar, maar ook het leren door de leraar van de leerling. Vier factoren waar aan gewerkt kan worden.

Op wat voor manier eraan gewerkt kan worden, daar hoeft ik nu niet op in te gaan. Daar is al heel veel over gepraat en geschreven.

Noten

[1] Dit is een vertaalde bewerking van mijn schriftelijk aandeel in een panelpresentatie op de 26ste conferentie van de International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), 20-25 juli 2002 in Norwich, Engeland (zie [7]).

[2] De namen van de personen in dit verhaal zijn veranderd.

[3] Het eerste standpunt is, dat de leerling iets niet begreep en zich dus maar moet verbeteren. Het tweede is, dat er sprake is van een misvatting die de leraar moet helpen te veranderen. Het derde gezichtspunt is, dat hier geen sprake is van een misvatting (in het Engels: misconception), maar van een vóór-begrip (Engels: preconception). De leraar moet de leerling confronteren met het conflict tussen het vóór-begrip en het 'ware' begrip. De vierde visie ziet de leerling en de leraar in twee verschillende werelden leven. Pas als de leraar de leerling naar de 'ware' wereld kan overhalen, kan aan begripsvorming worden gewerkt.

Literatuur

[4] H. Freudenthal: *Weeding and sowing*, Reidel Publishing Company (Dordrecht, 1978).

[5] D.W. Johnson, F.P. Johnson: *Joining together - Group theory and group skills*, Allyn and Bacon (Boston, 1997).

[6] C.W.J.M. Klaassen, P.L. Lijnse: *Interpreting students' and teachers' discourse in science classes - An underestimated problem?* In: *Journal of research in science teaching*, vol. 33, no. 2, pp. 115-134 (1996).

[7] J.F. Matos, S. Groves, J. van Dormolen, R. Zan: *Learning from learners*. In: A. Cockburn: *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2002).

[8] J. van Dormolen: *Textual analysis*. In: B. Christiansen (et al.): *Perspectives on mathematics education*, Reidel Publishing Company (Dordrecht, 1986).

[9] J. van Dormolen: *Reflecteren in en buiten de klas*, Utrecht, APS (Utrecht, 2000).

Over de auteur

Joop van Dormolen (e-mailadres: joop@tx.technion.ac.il) was wiskundeleraar en lerarenopleider. Hij is sinds 1968 betrokken geweest bij de veranderingen in het wiskundeonderwijs in Nederland en is (mede)auteur van verschillende wiskundemethoden. Sinds zijn pensioen woont hij in Israël waar hij van tijd tot tijd mee kan werken aan onderwijsvernieuwingen. Hij is Executive Secretary van de International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME, <http://igpme.tripod.com/>).



Witte ballen, zwarte ballen

[Rob Bosch]

Een vaas is gevuld met 5 witte en 4 zwarte balletjes. We trekken de balletjes een voor een uit de vaas. Hoe groot is de kans dat het aantal getrokken witte balletjes steeds groter is dan het aantal getrokken zwarte balletjes?

Een mogelijke volgorde van de trekking is



De bovenstaande volgorde kunnen we opschrijven als een rijtje 01102 waarin de getallen achtereenvolgens het aantal zwarte balletjes voorstelt tussen de 1e en 2e witte bal, de 2e en 3e witte bal, enz. Het laatste getal is het aantal zwarte ballen na de 5e en laatste witte bal. Zo corresponderen de rijtjes 01111 en 20110 met de volgorden



en



Welke rijtjes van 5 getallen leiden tot een trekking waarbij het aantal witte ballen steeds groter is dan het aantal zwarte ballen? Het eerste getal moet uiteraard gelijk zijn aan 0. De som van de eerste twee getallen geeft het aantal zwarte ballen aan tot de derde witte bal. Deze som moet dus kleiner zijn dan 2. De som van de eerste drie getallen geeft het aantal zwarte ballen tot de 4e witte bal. Deze som moet kleiner zijn dan 3, enz.

Kortom, een rijtje $b_1b_2b_3b_4b_5$ met som 4 geeft een goede volgorde als de som van de eerste k getallen kleiner is dan k .

De gevraagde kans is nu gelijk aan de kans dat de eerste bal wit is waarna we uit alle rijtjes van 5 getallen met som 4 een rijtje moeten trekken dat aan de bovenstaande eis voldoet. In de vorige aflevering van deze rubriek (zie [1]) hebben we laten zien dat de kans op zo'n rijtje onafhankelijk is van de verdeling van de getallen en bovendien gelijk is aan $\frac{1}{5}$. Derhalve is de gevraagde kans gelijk aan $\frac{5}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{9}$.

In het algemeen geldt:

Als een vaas gevuld is met a witte en b zwarte balletjes ($a > b$), dan is de kans dat in een trekking zonder terugleggen het aantal witte balletjes steeds groter is dan het aantal zwarte balletjes, gelijk aan

$$\frac{a-b}{a+b}$$

We trekken eerst een witte bal met kans $\frac{a}{a+b}$, en vervolgens moeten we uit de rijtjes van a getallen met som b een rijtje kiezen waarbij de som van eerste k getallen kleiner is dan k . Ook in [1] hebben we laten zien dat deze kans gelijk is aan $1 - \frac{b}{a}$. De gevraagde kans is dus gelijk aan

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a} = \frac{a-b}{a+b}$$

De lezer herkent het bovenstaande wellicht als de Ballot Theorem van Bertrand. De formulering hiervan is:

In een verkiezing krijgt kandidaat A a stemmen en kandidaat B b stemmen ($a > b$). De kans dat tijdens het tellen van de stemmen kandidaat A steeds voorligt op kandidaat B , is gelijk aan $\frac{a-b}{a+b}$.

Literatuur

[1] Rob Bosch: *Wiskunde in vazen – Vaas met genummerde balletjes*, Euclides 78-2, p. 063 (2002).

[2] W.A. Whitworth: *Choice and Chance*, Cambridge (1886), New York (1959; herdruk van de 5e editie).

VOORBEELD 9.1

Gegeven:

Een handgedreven lier heeft een slinger met een arm van 350 mm. De tandwielen zijn vanaf de drijvende as $z_1 = 19$, $z_2 = 76$, $z_3 = 21$ en $z_4 = 96$. De trommel is glad en heeft een middellijn van 240 mm. De kabeldikte is 10 mm. Het rendement van elke as is 0,9. Zie verder fig. 9.13.

Gevraagd:

- a Wanneer we op de slinger een kracht van 250 N uitoefenen, bereken dan de grootte van de last.

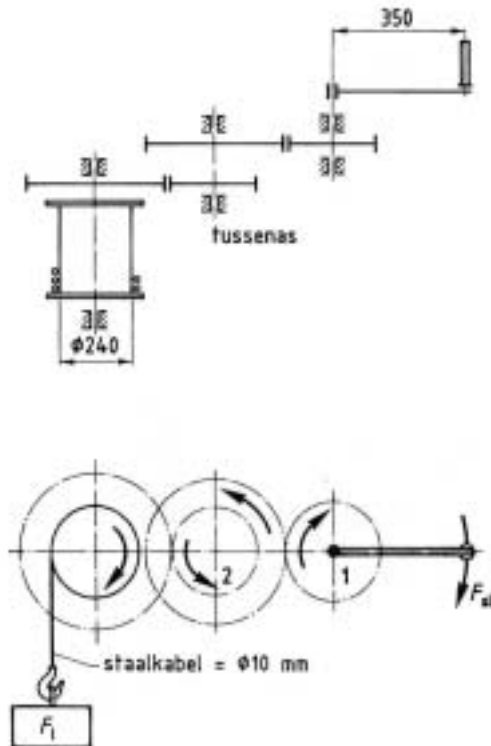


Fig. 9.13

Oplossing:

$$a. M_1 = M \cdot i \cdot \eta_{li} \rightarrow F_1 \cdot r = F_{sl} \cdot l_{sl} \cdot i \cdot \eta_{li}$$

$$F_1 \cdot \frac{d}{2} = F_{sl} \cdot l_{sl} \cdot \left(\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \right) \cdot \eta_{li}$$

$$F_1 \times \left(\frac{240 \text{ mm} + 10 \text{ mm}}{2} \right) = 250 \text{ N} \times 350 \text{ mm} \times \left(\frac{76}{19} \times \frac{96}{2} \right) \times 0,9^3$$

$$F_1 = 9331 \text{ N}$$

WISKUNDE IN MBO EN HBO VERZWAKT?

De auteur van deze bijdrage deed in Euclides 77-6 een oproep in zijn stuk 'Mbo-wiskundedocenten met rug tegen de muur. Hbo zegt:

Wiskunde gewenst, maar niet verplicht!'

De binnengekomen reacties stelden hem niet gerust.

[Thomas van den Elsen]

Reacties

Op bovengenoemd artikel heb ik zo'n 25 reacties mogen ontvangen, waarvoor mijn hartelijke dank. Veel nieuws bevatten deze reacties echter helaas niet. De meeste hadden een emotionele ondertoon en bevestigden slechts wat er reeds in het artikel stond. Wel moet me van het hart dat er slechts weinig collega's uit het BVE-veld hebben gereageerd. Dit kan twee redenen hebben: er zijn nog weinig collega's uit het mbo aangesloten bij de NVvW en/of er heerst een zekere gelatenheid onder de collega's.

Berichten uit TWINFO

Graag wil ik nog naar twee berichten verwijzen uit het blad TWINFO, een nieuwsbrief voor ROC's waarin allerlei zaken aan bod komen die te maken hebben met wiskunde en natuurkunde op mbo-niveau. Het betreft de nieuwsbrief van mei 2002 [1].

In één van de artikelen haalt de heer René van Gils, voorzitter van de Landelijke Examen Commissie, nog eens aan welke veranderingen hebben plaatsgevonden in het mbo. Als de bijdrage van wiskunde en natuurkunde in het ontwikkelen van het logisch denken en redeneren niet aangetoond kan worden, dan zal men het nut en de noodzaak van deze vakken niet inzien. Wiskunde en natuurkunde zullen zodanig geïntegreerd moeten worden in andere vakken - bijvoorbeeld constructieleer - dat de meerwaarde van deze vakken ervaren wordt als onmisbaar. Het budget benodigd om deze vakken te blijven geven moet geen discussiepunt meer zijn, maar moet door alle partijen (lees markt/bedrijfsleven) als bittere noodzaak worden gezien om bij te blijven in de technologische ontwikkeling van deze tijd. Tevens geeft Van Gils de waarde aan van de nieuwe programma's die momenteel worden gebruikt, waarbij veel aandacht wordt geschonken aan vaardigheden, context (technisch en maatschappelijk), toepasbaarheid en ict-aspecten via o.a. de grafische rekenmachine. Allemaal zaken die in het nieuwe competentiegerichte onderwijs een hoofdrol gaan vervullen. Het nieuwe KwaliteitsCentrum Examinering (KCE) gaat er voor zorgen dat deze zaken meetbaar worden en vervolgens ook gemeten worden.

In dezelfde nieuwsbrief schrijft de heer F. Heezemans, TWIN-auteur natuurkunde, over een onderzoek dat hij gehouden heeft onder doorstromers naar het hbo. Het artikel draagt de titel 'Doorstroom wis- en natuurkunde niet meer nodig ... zeggen ze!' Het blijkt dat studenten die het doorstroomprogramma hbo hebben gevolgd op het ROC, bovengemiddeld scoren in het hbo, vergeleken met havo-studenten en met mbo-studenten zonder doorstroompakket. Het probleemoplossend vermogen van deze eerste groep staat hoog aangeschreven. Ze kunnen veel beter zelfstandig werken en gaan problemen niet uit de weg.

Wiskunde en techniek; een voorbeeld

Terug naar de praktijk in het mbo. Waarom is het vak wiskunde toch zo belangrijk in de techniek? Een korte

blik in een technisch leerboek is voldoende. De afgebeelde voorbeeldopgave komt uit een theorieboek over constructieleer voor de afdeling werktuigbouwkunde [2]. Het is tweede klas lesstof. Voor elke andere afdeling in de techniek zijn soortgelijke voorbeelden te geven. Deze opgave is slechts een voorbeeld uit het grote assortiment opgaven waarmee een toekomstig werktuigbouwkundige te maken krijgt. Het wemelt van de formules; daarmee goed kunnen omgaan is van essentieel belang.

Positieve ontwikkelingen

De wiskunde zoals die nu wordt aangeboden, is afdelingsafhankelijk en wil ondersteuning bieden voor elke specifieke richting. Dit is een positieve ontwikkeling vergeleken met jaren geleden toen studenten regelmatig vroegen: 'Waar hebben we dit nu ooit voor nodig?' Studenten zien veel meer het nut van het vak wiskunde. Het gebruik van de grafische rekenmachine heeft voor een deel het rekenwerk overgenomen, maar dan nog moet een student weten waar hij mee bezig is. Vaak komen er in het hbo allerlei softwareprogramma's bij die weer een stapje verder gaan dan de grafische rekenmachine. Toch blijkt een zekere wiskundige basis mijns inziens onontbeerlijk voor het met succes volgen van een hbo-opleiding (techniek); het niveau van mbo tweede klas schiet beslist tekort. Om de doorlopende leerlijn vast te houden zou wiskunde - zeker voor degenen die naar het hbo gaan - ook in het derde en vierde leerjaar op het rooster moeten staan.

Tot slot

Misschien kan de nieuwe voorzitter van de BVE-Raad, mevrouw M. Vliegthart, een steentje bijdragen. Zij wil zich onder andere gaan bezighouden met het versterken van de beroepskolom vmbo-mbo-hbo en met de positie van het mbo daarbinnen. Wellicht krijgen de exacte vakken dus weer wat meer aandacht.

Noten

[1] TWINFO is een nieuwsblad voor gebruikers van de methode TWIN wis- en natuurkunde en wordt uitgegeven door uitgeverij ThiemeMeulenhoff.

[2] Het voorbeeld komt uit 'Constructies S4 werktuigbouwkunde' van C. Zegveld, J. Ouwehand e.a. (Nijgh & Van Ditmar Educatief, 1998, eerste druk).

Over de auteur

Thomas van den Elsen (e-mailadres: t.vd.elsen@roc-teraa.nl) is veldadviseur wiskunde SLO en docent wiskunde en werktuigbouwkunde aan het ROC Ter AA te Helmond.

EEN GEMISTE KANS?

[Dick Klingens]



Hoe vaak moet je (gemiddeld) met een dobbelsteen werpen totdat de 6 valt?

Het antwoord op die vraag is eenvoudig te formuleren. Zij X het aantal ogen bij een worp met een dobbelsteen. Dan is $P(X=6) = \frac{1}{6}$, met als 'woordelijke' betekenis: één van de zes keren valt de zes. Het antwoord op de vraag is dus 'gewoon' zes keer.

In de bovenbouw wordt de vraag mogelijk op een andere manier beantwoord. We (en ook de leerboeken) vertellen onze leerlingen immers, dat ze voor de berekening van de verwachtingswaarde van een stochast een kansverdeling moeten maken.

Zij nu dan X de stochast die het aantal keren (k) telt dat moet worden geworpen totdat de 6 valt.

Voor de bedoelde kansverdeling vinden we dan:

k	1	2	3	...	p	...
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$(\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6}$	...	$(\frac{5}{6})^{p-1} \cdot \frac{1}{6}$	...

Helaas, we krijgen een 'oneindige' kansverdeling. Maar toch. We gaan met de definitie van de verwachtingswaarde E gewoon aan de slag.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + p \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{6} + \dots \quad (1)$$

Tja, hoe bereken je zo'n som? Het is geen rekenkundige reeks en ook geen meetkundige (het rechterlid van (1) is een *reken-meetkundige* reeks).

Dat de reeks convergeert, is duidelijk uit het eerder gegeven antwoord. Er moet 6 uitkomen.

Voor A1 en A12 (vwo) laten we de convergentie gewoon voor wat het is (voor B1 en B12 ook?) door te kijken naar de verwachtingswaarde van de stochast $Y = 6X$.

k	6	12	18	...	$6p$	...
$P(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$(\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6}$	...	$(\frac{5}{6})^{p-1} \cdot \frac{1}{6}$	...

met

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(6X) = 6E(X) = \\ 6 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 18 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6p \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{6} + \dots = \\ 1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots + p \left(\frac{5}{6}\right)^{p-1} + (p+1) \left(\frac{5}{6}\right)^p + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

en vervolgens berekenen we ook maar

$$\frac{5}{6}E(Y) = E\left(\frac{5}{6}Y\right) = \frac{5}{6} + 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots + p \left(\frac{5}{6}\right)^p \quad (3)$$

Aftrekking van de beide oneindige reeksen (2) en (3)

– we lieten de convergentie immers – geeft dan:

$$\frac{1}{6}E(Y) = 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^p + \dots \quad (4)$$

En het rechterlid van (4) is een meetkundige reeks, waarvan de som zonder meer door B-ers en met wat toelichting – toch wel iets meer dan 'de formule ervan staat op de Formulekaart' – door A-ers berekend kan worden:

$$\frac{1}{6}E(Y) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 6, \text{ zodat } E(Y) = 36.$$

Uit $Y = 6X$ volgt dan eenvoudig $E(X) = 6$.

Is het een gemiste kans als we iets dergelijks *niet* in onze vwo-klassen behandelen?

Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) is verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van Euclides.

KLASSIEK?

Mag ik Frans doen tijdens wiskunde?

Ja, bereken: $2 \int_0^{\sqrt{F}} \text{einde}$

Logisch toch?

ALS $\lim_{x \downarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$

DAN $\lim_{x \downarrow 5} \frac{1}{x-5} = 5$

Verschenen / Atlas van een veelvlak, een reis door het onbekende in drie dimensies, deel 1

Auteur: Ultmar Jongen Uitgever: P.J.M. Jongen, Postbus 1264, 5602 BG Eindhoven

Prijs: € 12,00, inclusief CD-rom (eerste druk)

Uit het voorwoord: 'Nieuwe vakgebieden ontstaan. Daar waar voorheen afzonderlijke disciplines bestonden zijn vakgebieden gekomen die zich in het grensgebied begeven van bestaande vakgebieden. Enkele voorbeelden hiervan zijn: 'beeldende visualisatie', 'biotechnologie', 'humanistische godsgeleerdheid', 'milieutechniek' en 'techniek & maatschappij'. In het jongste verleden blijkt dat in de wetenschap geometrische vormen en de herkenning daarvan met moderne scantechieken, zoals die in de fysica en de scheikunde gebruikt worden, meer en meer een rol gaan spelen. Onder de juiste laboratoriumomstandigheden verbinden atomen zich tot symmetrische vormen, en wellicht is dit nog maar

het begin van een nieuwe tak van wetenschap. Ook in de vormgeving van onze gebouwde omgeving blijkt inzicht in en beheersing van geometrie een welkome aanvulling te zijn van de stof die op HAVO en VWO behandeld wordt. Getracht wordt zoveel mogelijk aan te sluiten bij het voortgezet onderwijs. Dit boek tracht tevens te voorzien in een leemte binnen het gebied van de wiskunde. Daar waar anderen dit onderwerp uitputtend behandeld hebben zal worden volstaan met een summiere opsomming, waar nodig zal een meer diepgaande behandeling van de ruimtelijke meetkunde gepresenteerd worden. Behalve in de breedte zal ook intensief in de diepte gezocht worden naar samenhang en wetmatigheden.'

Boekbespreking / L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde

Auteur: Dirk van Dalen Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2001)

isbn 90 5041 061 8 [Lambèr Royakkers]

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) was één van de grootste, en eigenzinnigste, wiskundigen die Nederland heeft gekend – en naar wie zelfs een krater op de maan vernoemd is (zie [1]). Hij was zijn tijd ver vooruit betreffende zijn wiskundige en filosofische ideeën, zeker op het gebied van de grondslagen der wiskunde.

Het is buiten kijf dat het hier om een belangrijk stuk wiskundige geschiedschrijving gaat, en het is daarom terecht dat NWO het Brouwer-project onder leiding van Dirk van Dalen heeft gesteund. Resultaten van het project zijn de prachtige biografie *L.E.J. Brouwer, 1881–1966* door Dirk van Dalen uit 2001 (zie ook [2]) en de minstens zo indrukwekkende Engelse variant waarvan het eerste deel *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L.E.J. Brouwer* in 1999 is uitgebracht.

Naast deze twee lijvige werken heeft Dirk van Dalen het boek *L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde* uitgebracht bestaande uit Brouwers proefschrift en aanverwante zaken, zoals de correspondentie met zijn promotor, afgewezen fragmenten, opposities en recensies. Zonder dat er expliciet melding van wordt gemaakt, is dit feitelijk een herziene uitgave van het boek *L.E.J. Brouwer: over de grondslagen der wiskunde* uit 1981 onder redactie van Dirk van Dalen, echter nu zonder vermelding van ‘onder redactie van’, wat mij op het verkeerde been zette. Toegevoegd aan de herziene versie zijn twee hoofdstukken, het hoofdstuk ‘Aangaande de Dissertatie’ met de opposities van Mannoury en Korteweg, de laudatio van Korteweg en Brouwers toelichting aan J. de Vries, en het hoofdstuk ‘Intuitionisme en Formalisme’ dat de inaugurale rede bevat van Brouwer uit 1912.

De reden voor Dirk van Dalen om het proefschrift van Brouwer nogmaals te publiceren geeft hij in het voorwoord: ‘Sinds de herpublicatie van het proefschrift in 1981 is een aantal documenten opgedoken die voor de dissertatie van belang zijn. In de eerste plaats Brouwers eigen aantekeningen voor de dissertatie en eveneens Brouwers werkexemplaar van het



proefschrift.’ De aantekeningen worden te zijner tijd uitgegeven. Dit boek bevat alleen de correcties en toevoegingen van zijn werkexemplaar. Wat hiervan nu precies het belang is, daar ben ik niet achtergekomen. De correcties zijn redactioneel van aard: ze bevatten voornamelijk taalkundige verbeteringen en toevoegingen van passages die de tekst iets verduidelijken. De meerwaarde is nihil, en zeker niet interessant voor leraren en *algemeen* geïnteresseerden waarvoor het boek is bedoeld. Wat storend is, is de zeer onrustige weergave in het boek van het proefschrift van Brouwer: het gebruik van allerlei verschillende voetnoten, het gebruik van verschillende tekens in de tekst om de lezer te laten zien hoe correcties zijn aangebracht, etc. Enkele correcties zijn direct in de tekst opgenomen en weer andere zijn in voetnoten aangegeven. Verder is de spelling van de tekst aangepast, echter niet volledig want ‘een volledige “modernisering” zou het karakter al te zeer geweld aangedaan hebben.’ Waarom Van Dalen dan toch behoefte heeft gevoeld om bijvoorbeeld dubbele klinkers in de tekst te elimineren, ontgaat mij eveneens. Naar mijn mening was het beter geweest om of het oorspronkelijke proefschrift in het boek op te nemen, zoals hij heeft gedaan in 1981, of het werkexemplaar (dat waarschijnlijk uit de laatste drukproeven bestaat voor een herziene uitgave na de Eerste Wereldoorlog) op te nemen met een begeleidend

OVER DE GRONDSLAGEN □ DER WISKUNDE □ ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR
IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE UNI-
VERSITEIT VAN AMSTERDAM, OP GEZAG VAN
DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. J. ROTGANS,
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEES-
KUNDE, IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP
DINSDAG 19 FEBRUARI 1907 DES NAMIDDAGS
TE 3 URE IN DE AULA DER UNIVERSITEIT
DOOR LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER,
□ GEBOREN TE OVERSCHIE □

hoofdstuk waarin de verschillen worden aangegeven
tussen Brouwers proefschrift en zijn werkexemplaar.

Omdat het proefschrift van Brouwer in het Nederlands
geschreven was, waren er nauwelijks recensies van
buitenlandse experts. Toch bestaat er een recensie van
het proefschrift van Brouwer in het *Jahrbuch über die
Fortschritte in der Mathematik* door Barrau. Helaas is
deze recensie niet door Dirk van Dalen opgenomen,
omdat 'de lezer uit diens recensie niet veel kon
opmaken'. Dit is nu juist ter beoordeling aan de lezer
en niet aan Dirk van Dalen. Zeker uit geschiedkundig
oogpunt en voor de volledigheid is het een gemis dat
deze recensie niet in het boek is opgenomen, naast de
twee (Nederlandstalige) recensies van Mannoury.

Storend zijn de vele spellingsfouten, grammaticale
fouten en het ontbreken van punten en komma's. Ook
aan de opmaak schort het één en ander. Bij de
hoofdstukindeling is iets compleet misgegaan. Na
hoofdstuk 3 is het volgende hoofdstuk genummerd als
hoofdstuk 6. De genummerde paragraaf '0.1 Oneindige
rijen' verdient ook geen schoonheidsprijs als ook de
bijbehorende kopteksten.

Kortom, het boek brengt weinig nieuws onder de zon.
Misschien was dit ook niet echt de bedoeling, maar is
het voor de volledigheid opnieuw uitgegeven ter wille
van het Brouwer-project dat – zoals gezegd – een

belangrijk stuk wiskundige geschiedschrijving is.
Misschien was het verstandig geweest om naast de
correcties in het werkexemplaar direct ook de
aantekeningenschriftjes mee te nemen in het boek om de
relevantie te vergroten. Ik ben benieuwd of we van de
aantekeningenschriftjes van Brouwer wel iets wijzer
kunnen worden.

Wel, en dat moet toch even gezegd worden, wacht ik
met spanning op deel 2 van de Engelstalige biografie
van Brouwer door Dirk van Dalen.

Noten

[1] Website:

www.math.uri.edu/~kulenm/mth381pr/fixedpoint/brouwer.html

[2] Jan van Maanen: *Brouwer tegen de wi(sku)nd(e)molens*, *Euclides*
78 (2), pp.56-59 (2002)

Over de recensent

Lambèr Royakkers (e-mailadres: L.M.M.Royakkers@tm.tue.nl) is als
universitair docent werkzaam bij de Sectie Filosofie en Ethiek van de
Techniek, Faculteit Technologie Management, Technische Universiteit
Eindhoven.

Aankondiging / Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

Al vele jaren organiseert het Wiskundig Genootschap (WG) op een van de eerste zaterdagen in het nieuwe kalenderjaar zijn Wintersymposium. Dit symposium is in eerste instantie bedoeld voor docenten uit het voortgezet onderwijs, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom.

Het doel van het symposium is het contact tussen leraren enerzijds en wiskundigen uit de academische wereld en het bedrijfsleven anderzijds te onderhouden en te verstevigen. In een drietal voordrachten belichten ervaren sprekers facetten van een gekozen thema.

Plaats en thema

Het symposium op zaterdag 11 januari 2003 zal worden gehouden in het J. van Oldenbarnevelt Gymnasium, Thorbeckeplein 1, Amersfoort.

Het thema van het symposium is:

Wiskunde in techniek - welke rol speelt wiskunde in diverse technische toepassingen?

Aanmelding

Deelname aan het symposium is gratis. Aanmelding en verdere informatie op de website van het WG www.wiskgenoot.nl/wintersymposium.html.

Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch, wordt verzocht vóór 25 december 2002 een bedrag van € 8,00 over te maken op gironummer 3762917 t.n.v. H. Bakker te Marum.

Voor verdere inlichtingen kunt u bellen met (050) 363 39 35 (overdag) of (0594) 64 16 36 ('s avonds) of e-mailen naar h.bakker@cs.rug.nl.

Programma

09.30-10.00u: Ontvangst met koffie en thee

10.00-11.00u: De kracht van dimensie-analyse (J. Molenaar, TUE/UT)

De spreker laat zien dat op grond van de fysische dimensies die in een 'model' voorkomen, kan worden bepaald dat sommige conclusies wel en andere niet uit het model kunnen worden afgeleid. Bijvoorbeeld: kan uit de baan van een regendrappel op het raam van een trein de snelheid van de trein worden afgeleid? De dimensie-analyse zal een krachtig hulpmiddel blijken, die zonder rekenwerk antwoord kan geven op bovenstaande vraag.

11.00-11.15u: Pauze

11.15-12.15u: Surfen met plaatjes (P.J. Oonincx, KIM)
Een modern probleem: kunnen we een zoekmachine op internet een plaatje van een voorwerp aanbieden, waarna de machine informatie over dit voorwerp opzoekt? De tweede spreker schetst welke modellen en technieken gebruikt kunnen worden om dit in bepaalde omstandigheden daadwerkelijk te realiseren.

12.15-13.30u: Pauze, waarin men deel kan nemen aan een gezamenlijke lunch

13.30-14.30u: Turbulentie, golfballetjes en discrete afgeleiden (R.W.C.P. Verstappen, RuG)
In de afsluitende lezing leren we dat de putjes in een golfbal er niet alleen zijn om de speler meer grip te geven als hij het balletje wil oppakken, maar dat het alles te maken heeft met turbulentie. Een aantal technieken die nodig zijn bij het numeriek benaderen van turbulentie, zullen worden uitgelegd.



RuG

Aankondiging / Studiedag

Rijksuniversiteit Groningen

Het OWI van de RuG organiseert op
dinsdag 17 december 2002
 een studiedag voor leraren wiskunde en informatica
 met als thema:

Ons wiskundeonderwijs: nu en in de toekomst

Omdat de studiedag van vorig jaar een doorslaand succes bleek te zijn, organiseert het Opleidingsinstituut voor Wiskunde en Informatica (OWI) van de Rijksuniversiteit Groningen dit jaar weer een studiedag voor leraren wiskunde, nu met bovengenoemd thema. Wij willen graag de zeer grote opkomst van vorig jaar op zijn minst evenaren en zullen dan ook zorgen voor nog beter programma. In elk geval hebben inmiddels hun medewerking aan de plenaire gedeeltes toegezegd:

Prof. dr. Jan de Lange, hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut van de UU
 Prof. dr. Anne van Streun, hoogleraar bètadidactiek aan de RuG

Voorts zijn er natuurlijk workshops, een lunch en aan het einde van de dag een borrel.
 U neemt bovendien materiaal mee terug en dat is meer dan alleen een nascholingscertificaat!

Aan deelname zijn geen kosten verbonden.

Inlichtingen: Martha Witterholt, e-mail:
m.g.witterholt@oprit.rug.nl,
 telefoon: (050) 363 39 39 of (050) 363 71 34
 Website: www.math.rug.nl/didactiek/doc_dag.html

Aankondiging / Wiskunde Scholen Prijs

Ook als u zelf denkt dat u niets bijzonders doet op school, kan uw school in aanmerking komen voor het winnen van de Wiskunde Scholen Prijs. Deze prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden.

Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen meedingen naar deze prijs. Er zijn drie categorieën waarin een school een prijs kan winnen:

- basisvorming (klas 1 en 2),
- bovenbouw vmbo (klas 3 en 4),
- havo/vwo (de klassen 3 t/m 6).

Wat valt er te winnen?

Scholen die meedoen dingen mee naar de hoofdprijs van € 2000,00. Daarnaast is er voor elke categorie een eerste prijs van € 1000,00 te winnen.

Doel van deze prijs is om goede initiatieven binnen wiskundeonderwijs zichtbaar te maken voor iedereen. Door met uw goede ideeën naar buiten te treden bewijst u dus ook uw collega's een dienst.

Eind november is naar alle scholen een folder gestuurd met nadere informatie over de Wiskunde Scholen Prijs.

- Heeft uw school belangstelling om mee te doen, stuur dan het antwoordkaartje in dat bij de folder zit. In de tweede helft van januari ontvangt u dan nadere informatie.

- U kunt zich ook aanmelden via www.fi.uu.nl/wiskids. Kies daar Scholenprijs.

Informatie

Heleen Verhage (e-mailadres: h.verhage@fi.uu.nl)
 Freudenthal Instituut
 Postbus 9432, 3500 GK Utrecht
 telefoon 030 2611611, fax 030 2660430



Doelen van WisKids zijn: enthousiasme voor wiskunde bevorderen bij jongeren,

het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, en belangstelling bevorderen voor de exacte vakken. WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO). Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO. Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door het ministerie van OC&W, de Stichting Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro.

Meer informatie: www.fi.uu.nl/wiskids of per e-mail: wiskids@fi.uu.nl

Aankondiging / Wiskunde Olympiade 17 januari 2003

[Fred Bosman]



Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is in 2003 aan haar 42e jaargang toe. Graag roep ik alle wiskunde-docenten in Nederland op om hun leerlingen te stimuleren aan deze landelijke wedstrijd mee te doen. De Wiskunde Olympiade is niet alleen bedoeld voor 'bollebozen' met een wiskundeknobbel maar voor elke leerling die geïnteresseerd is in problemen van wiskundige aard waarin de uitdagende en aantrekkelijke kanten van de wiskunde aan de orde komen.

Geef s.v.p. uw leerlingen informatie over het bestaan van de Wiskunde Olympiade. Probeer hen enthousiast te maken en aan te sporen om mee te doen. Als u daarvoor (extra) posters en folders nodig hebt, laat mij dat dan weten.

U kunt uw school aanmelden door mij een briefje te sturen, te mailen of te faxen. U fungeert dan als wedstrijdleider voor uw school. De hoeveelheid werk daaraan verbonden is klein en bestaat uit het op school organiseren van *de eerste ronde*. Die vindt dit schooljaar plaats op vrijdag 17 januari 2003.

Uw *aanmelding vooraf* stel ik zeer op prijs, ook als uw school al jaren gewend is om mee te doen. Elk jaar weer blijkt dat er schoolnamen en/of adressen zijn veranderd, of dat docenten/contactpersonen van elkaar

denken dat de school reeds is aangemeld. Het scheelt een hoop werk en tijd als mijn bestand van namen en adressen zo actueel mogelijk blijft, want post die is gericht aan scholen waar de naam van een docent op staat, komt vaker op zijn bestemming.

Het organiseren van de eerste ronde houdt in dat u ervoor zorgt dat op 17 januari 2003 de deelnemende leerlingen de opgaven op school kunnen maken. Na afloop stuurt u de resultaten daarvan op. De correctie is eenvoudig en gebeurt met behulp van een standaardformulier. Verder fungeert u als aanspreekpunt voor de school. De opgaven en de formulieren worden in de eerste week van januari 2003 naar de wedstrijdleiders van alle aangemelde scholen verstuurd.

Bij voorbaat dank voor uw medewerking!

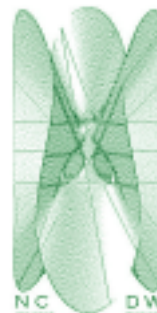
Over de auteur

Fred Bosman (e-mailadres: fred.bosman@citogroep.nl) is secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, p/a Citogroep, postbus 1034, 6801 MG Arnhem; tel. 026-3521294; fax 026-3521356.

Nijmeegs Colloquium over de Didactiek van Wiskunde

Het wiskundeonderwijs heeft vele doelen. Het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs op de middelbare school vervult een aantal van deze doelen ook in internationaal perspectief bijzonder goed.

Er is echter één doel waarin het Nederlandse wiskundeonderwijs niet meer naar behoren voorziet. Ondanks uitstekende beroepsperspectieven laten de studentenaantallen voor wiskunde aan universiteiten en HBO's zien, dat wij er niet meer in slagen jonge mensen zo enthousiast te maken dat zij een deel van hun leven aan wiskunde willen besteden. Een keuze die wij zelf wel ooit hebben gemaakt. Ook al betreft dit maar een klein aantal mensen, toch heeft dit ernstige gevolgen voor alle soorten van wiskundeonderwijs, het bedrijfsleven en vele andere gebieden waar wiskundigen werken en zelfs voor onze cultuur in het algemeen.



Waarmee ontvlammen wij het wiskundige vuur bij de komende generatie ?

Om antwoorden op deze vraag te vinden organiseert het *Instituut voor Leraar en School* aan de Katholieke Universiteit Nijmegen in 2003 een reeks van zes lezingen met workshops op de vrijdagmiddagen (15 –18 uur) 14 februari, 28 februari, 14 maart, 28 maart, 11 april en 25 april. Deze reeks is bedoeld voor wiskundeleraren (als nascholing) en alle anderen die zich bezighouden met de didactiek van wiskunde.

De volgende sprekers hebben toegezegd: prof. dr. **H.P. Barendregt** (KUN), dr. **L. van den Broek** en dr. **A. van den Hombergh** (Ratio, Wageningse Methode), StD **C.P. Fitting** (Geschwister Scholl Gesamtschule Moers, D), drs. **A. Goddijn** (Freudenthal Instituut), prof. dr. **T.J. de Jong** (Universität Mainz, D), drs. **D.A.J. Klingens** (Krimpenerwaard College, eindredacteur Euclides).

De lezingen sluiten inhoudelijk ook aan bij het gedeelte over didactiek van wiskunde op het Nederlands Mathematisch Congres 2003. Voor meer informatie en inschrijving: www.ils.kun.nl/NCDW

Wilt u:

- Onderwijsverbetering gecombineerd met werkdrukvermindering?
- Ook eens proefwerken, behorende bij een andere methode, inzien?
- Uitgeteste toetsen gebruiken?
- Schoolexamens van andere collega's bekijken?
- CSE's in WORD-formaat downloaden?
- 24 uur per dag de beschikking hebben over meer dan 1000 toetsen?
- Bij problemen met software, GR, e.d. deskundigen raadplegen?
- Advies krijgen bij andere problemen?
- Uitwerkingen bij bestaande toetsen?
- Uitgewerkte Praktische Opdrachten afdrukken?
- Ontwikkeld lesmateriaal en/of files bij wiskundesoftware downloaden?



Surf dan naar **www.wisbase.com**

Download het inschrijfformulier en meldt u aan als deelnemer.

Instapvoorwaarde: inleveren van 3 originele toetsen.

Inlichtingen: info@wisbase.com

Secretariaat: J. Brasserstraat 26

4333 MB Middelburg

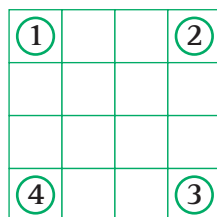
Puzzel 3 - Bananenschillen

Dit keer een gezellige kerstpuzzel voor de hele familie.

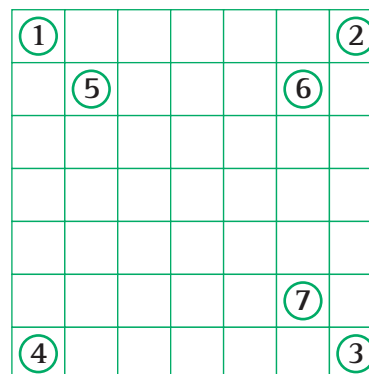
In **figuur 1** ziet u een vierkant bord van 4×4 velden met in ieder hoekveld een pion. De

bedoeling is om één pion naar het middelste veld te brengen. De spelregels zijn dezelfde, maar nu is er geen 'railing' om het bord. Dus als pion 5 naar links gaat schuiven, glijdt hij van het bord af! Ook bij zetten als 5A, 7L en 6R gaat er een pion verloren.

FIGUUR 1



FIGUUR 2



bedoeling is om de pionnen naar de middelste vier velden te schuiven. Er mag alleen in horizontale en verticale richting worden geschoven. Een pion die in beweging is gezet, schuift door totdat hij wordt gestuit door de rand of door een andere pion. (Als u wel eens een slapstick-film hebt gezien, is de titel van deze aflevering nu wel duidelijk).

Opgave 1

Schuif de pionnen in zo weinig mogelijk zetten naar de middelste vier velden.

Ik verzoek de inzenders de zetten te noteren met het nummer van de pion, gevolgd door de richting waarin hij wordt verschoven. (L = naar links, R = naar rechts, V = naar voor, A = naar achter.)

Een voorbeeld: na de vier zetten 3A 1VR 4R staan de pionnen in de rechterkolom.

Wiskundigen hebben zich ook gebogen over de analoge opgave voor het vierkant van $n \times n$ (n even). Het blijkt dat het aantal zetten bij optimale strategie slechts lineair toeneemt met n . Wie dit moeilijk kan bevatten, bedenke dat de lengte van de zetten ook toeneemt met n .

Hiroshi Yamamoto bedacht een andere variant op opgave 1; zie **figuur 2**. Er zijn nu zeven pionnen op een bord van 7 bij 7 velden. De

Opgave 2

Schuif een pion naar keuze naar het middelste veld.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen voor goede oplossingen. De deadline is deze keer 6 januari 2003. Veel succes.

Oplossing 'De voetballers'

Vraag 1 kan het best worden beantwoord door eerst na te gaan welke toernooitabellen mogelijk zijn. In principe kan dit door 'puzzelen'.

De vier inzenders van een correcte oplossing gingen allen op deze manier te werk, waarbij kan worden aangetekend dat L. de Rooij het antwoord nog met een QBasic-programma verifieerde. Ik heb gebruik gemaakt van een tabel van gerichte grafen op vier punten zoals die staat in het boek 'Graph Theory' van Frank Harary (uitgegeven in 1968 door Addison-Wesley, herdrukt in 1971). Het blijkt dan dat er 42 verschillende toernooitabellen zijn. Als we voor ieder van deze 42 gevallen het toernooiresultaat bepalen, vinden we 40 verschillende; 6443 en 7441 komen dubbel voor. Het antwoord op vraag 1 is dus: 40. Onderverdeeld naar g , het aantal gelijke spelen, zijn het de volgende rijtjes:

L. van den Brom merkt terecht op: 'Het lijkt mij dat vraag 2 niet geheel juist is gesteld. Dat zal moeten zijn op permutatie der ploegen na.'

Inderdaad, als het toernooiresultaat bijvoorbeeld 7540 is, zullen we voor een reconstructie willen weten welke ploeg 7 punten behaalde, enz. Gelukkig hebben alle inzenders mijn bedoeling kunnen reconstrueren!

H. Verdonk, L. de Rooij, P. Stuut en L. van den Brom hebben ieder 20 punten verdiend; de inzending van Th. Buurman is 1 punt waard.

$g = 6$: 3333

$g = 5$: 5332

$g = 4$: 7322, 5531, 5522, 5432

$g = 3$: 9222, 7521, 7431, 7422, 6522, 5550, 5541, 5532, 5442, 4443

$g = 2$: 9421, 7711, 7621, 7540, 7531, 7441, 7432, 6541, 6442, 5443, 4444

$g = 1$: 9611, 9440, 9431, 7730, 7640, 7631, 7433, 6641, 6443

$g = 0$: 9630, 9333, 6660, 6633

Uit het voorgaande volgt meteen dat het antwoord op vraag 2 'neen' is.

Maar nog afgezien van de twee hierboven genoemde zijn er 13 andere niet-reconstrueerbare gevallen.

Bijvoorbeeld. In het geval 5442 hebben de ploegen met vier punten niet gelijk gespeeld tegen elkaar, maar wie nu van wie heeft gewonnen, is uit het toernooiresultaat niet te achterhalen.

In totaal zijn er niet meer dan 25 reconstrueerbare gevallen.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundeleraars toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.

Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
4	23 januari 2003	3 december 2002
5	27 februari 2003	14 januari 2003
6	17 april 2003	4 maart 2003
7	26 mei 2003	1 april 2003
8	26 juni 2003	13 mei 2003

dinsdag 17 december 2002

Lerarendag: 'Ons wiskundeonderwijs, nu en in de toekomst'

Organisatie RuG

Zie ook p.119 in dit nummer

woensdag 18 december 2002

Studiedag 'Maken van de website van de wiskundesectie'

Organisatie APS

donderdag 9 januari 2003

1e Reehorstconferentie wiskunde

Organisatie APS

Zie ook p.041 in Euclides 78-1

zaterdag 11 januari 2003

Wintersymposium, Amersfoort

Organisatie Wiskundig Genootschap

Zie ook p.118 in dit nummer

vrijdag 17 januari 2003

1e ronde Wiskunde Olympiade

Organisatie Stichting NWO

Zie ook p.120 in dit nummer

vr. 31 januari en za. 1 februari 2003

Nationale Wiskunde Dagen, Noordwijkerhout

Organisatie Freudenthal Instituut

woensdag 5 februari 2003

Nationale Leermiddelen Dagen Wiskunde

Organisatie LOTS Consultancy

vrijdag 14 februari 2003 (eerste dag)

Nijmeegs Colloquium Didactiek van Wiskunde

Organisatie ILS/KUN, Nijmegen

Zie ook p.121 in dit nummer

do. 20 maart en vr. 21 maart 2003

Nationale Rekendagen, Noordwijkerhout

Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 21 maart 2003

Kangoeroe-wedstrijd

Organisatie KUN, Nijmegen

Zie ook p.97 in dit nummer

donderdag 24 april 2003

3e Conferentie ICT in de wiskundeles

Organisatie APS

Zie ook p.041 in Euclides 78-1

do. 1 mei en vr. 2 mei 2003

Nederlands Mathematisch Congres 2003

Organisatie KUN, Nijmegen

zaterdag 17 mei 2003

Symposium IX, Utrecht

Organisatie HKRWO

Voor internet-adressen zie de Agenda op de website van de NVvW:

www.nvww.nl/Agenda2.html

Publicaties van de

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehele
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk

* Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* Wisforta - wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* Honderd jaar Wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW.

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (<http://www.nvww.nl/lustrumboek2.html>).



MEER DAN
SOMMEN MAKEN,
OP WEG NAAR
ZELFSTANDIG LEREN!



PASCAL

WISKUNDE VOOR DE BASISVORMING, LEERWEGEN EN TWEEDE FASE

- ▶ De combinatie van informatieboek en werkschriften geeft zelfstandig leren structuur en houvast
- ▶ Het werkschrift van de leerling is leermiddel en naslagwerk, dus geen apart schrift meer nodig
- ▶ Verschillende routes door de stof mogelijk, u kunt kiezen uit drie typen opdrachten
- ▶ Bij elk informatieboek horen werkschriften op twee niveau's

meer info

www.pascal-online.nl _ pascal@thiememeulenhoff.nl _ (0575) 59 49 94

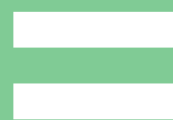
thiememeulenhoff



Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen

Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55
E-mail: netwerk@wolters.nl
www.netwerk.wolters.nl

Netwerk



een
glasheldere
formule



NIEUW!

**Kennismaken met
de 3^e editie?**

Neem dan contact op met onze
voorlichter Sandra Kooijstra
en reserveer alvast
beoordelingsexemplaren.

**Wolters
Noordhoff**