



EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

oktober
2002/nr.2
jaargang 78

A.M. KOLDIJK
L.E.J. BROUWER
A.D.M. PEEREBOOM



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom
Marja Bos, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Elzeline de Lange
Jos Tolboom

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren

www.nvbw.nl



Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattum
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bommel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie verenigingsjaar 2002-2003

Leden: € 40,00
Gepensioneerden: € 25,00
Studentleden: € 20,00
Leden van de VWW: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgend nummer.
Voor personen: € 45,00 per jaar
Voor instituten en scholen: € 120,00 per jaar
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Opzeggingen vóór 1 juli.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 15,00.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

2

oktober 2002 JAARGANG 78

045	Van de redactietafel [Marja Bos]
046	Interview met Albert Koldijk [Martinus van Hoorn]
051	Elke leerling een computer [Jos Tolboom, Annelies Wijnbergen]
056	Brouwer tegen de wi(skun)d(e)molens [Jan van Maanen]
060	Sinus en cosinus, één functionaalvergelijking? [A.G. van Asch, F. van der Blij]
063	Wiskunde in vazen [Rob Bosch]
064	Interview met Daniëlle Peereboom [Henk Staal]
067	40 jaar geleden [Martinus van Hoorn]
068	Boekbespreking
069	Boekbespreking
071	Boekbespreking
072	Feitenvel Soedan 1999-2000 [Hans Wisbrun / WwF]
073	Feitenvel Kenia 2000-2001 [Ger Limpens / WwF]
074	WisKids: Vierkant wiskundeclubs [Maurice Alberts, Wim Berkelmans]
076	Notulen van de ledenvergadering van 17 november 2001 [Wim Kuipers]
077	Verslag van het verenigingsjaar 2001- 2002 [Wim Kuipers]
079	Inhoud van de 77e jaargang 2001/2002
082	Recreatie [Frits Göbel]
[084]	Servicepagina

Aan dit nummer werkten verder mee:
Klaas-Jan Wieringa en Sam de Zoete.

Van de redactietafel [Marja Bos]

Creatieve oplossingen bij weinig tijd

De studiedag van de Vereniging op 16 november a.s. te Nieuwegein is gewijd aan het thema 'Creatieve oplossingen bij weinig tijd'. Dat thema zal u ongetwijfeld aanspreken! Weinig tijd is immers iets waar in het wiskundeonderwijs nogal eens over gemopperd wordt, daarnaast zijn we als wiskundigen vaak (en met succes overigens!) op zoek naar oplossingen, en tot slot komt de associatie met creativiteit voor onze beroepsgroep ook niet geheel uit de lucht vallen...

Kortom, het wordt ongetwijfeld een interessante bijeenkomst waar we elkaar niet alleen tijdbesparende tips kunnen aanreiken, maar waar hopelijk ook het plezier in het dagelijkse werk weer eens aanstekelijk kan werken. Want het gehaaste gevoel dat ons werk 'in de klas' soms overschaduwde, kan leiden tot een werkwijze waarbij we onze leerlingen alleen nog maar snel, vluchtig, zeer doelmatig en zo mager (saai?) mogelijk door het examenprogramma heen duwen. Een begrijpelijke werkwijze, maar wel een die niet erg bijdraagt aan veel 'werkplezier' – niet aan plezier in ons eigen werk, maar minstens zo belangrijk: niet aan plezier van onze leerlingen/studenten in onze lessen en in het vak wiskunde! Hebt u zich al aangemeld voor deze studiedag? Dat kan nog tot 2 november. Zie voor nadere informatie en voor de beschrijving van de diverse werkgroepen het vorige nummer van Euclides of de website.

Wiskunde PersDienst

Kort geleden is de Wiskunde PersDienst (WPD) opgericht, een initiatief van de NVvW, het Wiskundig Genootschap (WG) en de wiskundewebmasters (zie <http://www.wiskgenoot.nl/wpd/>). Deze website met wiskundenieuws wordt verzorgd door het WG en het Centrum voor Wiskunde en Informatica.

Citaat: 'De Wiskunde PersDienst streeft ernaar een verzamelpunt te zijn voor journalistieke informatie van en over wiskunde en wiskundigen.' De WPD richt zich op uiteenlopende doelgroepen: middelbare scholieren, studenten, didactici, academici, en het algemene publiek.

U kunt zich via genoemde website gratis aanmelden voor automatische e-mailtoezending van nieuwe berichten.

Mededeling

In de Bottema-special (januari 2002) is geopperd een CD-rom uit te brengen met de bekende 'Verscheidenheden' van Bottema. Uiteindelijk was er toch wat te weinig belangstelling voor; we moeten daarom helaas afzien van de productie van zo'n CD-rom.

Leden

Lid worden van een vakvereniging als de NVvW, is dat de moeite waard? Ik vind van wel. Op landelijk niveau ervaringen uitwisselen, samen nadenken over allerlei complexe aspecten van het wiskundeonderwijs, op de hoogte blijven van actuele ontwikkelingen, je mening vormen óók buiten de specifieke en wellicht geïsoleerde situatie van je eigen school of instituut – dat geeft je een bredere en tegelijkertijd diepgaandere blik op allerlei relevante zaken.

Leden, je hebt ze in soorten en maten, jong en oud, ... In dit nummer vindt u een interview met ons langst zittende lid: Albert Koldijk, inmiddels 60(!) jaar lang lid van de NVvW en bovendien gedurende 14 jaar (1959-1973) redactiesecretaris (eindredacteur) van Euclides. Met hem blikken we terug op een lange periode die in vele opzichten sterk verschilt van de huidige, maar die daarmee soms ook verrassende overeenkomsten vertoont. Blijft u ook 60 jaar lid?

INTERVIEW MET ALBERT KOLDIJK

‘We legden onze karabijnen alvast in de trein en gingen nog even in de stad wat eten.’

[Martinus van Hoorn]

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
Drs. H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	P. WIJDENES, Amsterdam.

Aanleiding

Nevenstaand citaat heeft betrekking op 8 mei 1940. Albert Koldijk was gemobiliseerd. Hij reisde van Leiden met zijn uitrusting naar de Grebbelinie bij Veenendaal. In Amsterdam moest er worden overgestapt. Met uitrusting door de stad lopen was niet praktisch. Zodoende legden hij en zijn reisgenoten hun spullen in de reeds klaarstaande trein.

Dit is één van de vele wederwaardigheden uit het leven van Albert Koldijk, die leraar was te Hoogezand en Sappemeer, docent didactiek aan de Rijks Universiteit Groningen, hoofddocent aan de Nieuwe Leraren-opleiding Ubbo Emmius, en van 1959 tot 1973 redactiesecretaris van *Euclides*.

In 2002 bedankte hij als lid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars, omdat hij door zijn slechter wordende gezichtsvermogen Euclides niet meer kon lezen. Hij was 60 jaar lid, en daarmee het langst zittende lid van de vereniging.

Hij vertelde met zichtbaar genoeg hoe hij al in de zesde klas van de lagere school het rode potlood hanteerde, hoe hij bij Wansink te logeren kwam, hoe hij goed voorbereid kon beginnen als redactiesecretaris van *Euclides*, hoe hij in Buffalo (VS) een socratische les gaf, en hoe hij plotseling – van de ene week op de andere – docent didactiek werd. En nog veel meer.

Amsterdam, Hilversum en Utrecht

Albert Koldijk werd in 1917 geboren in Amsterdam. Zijn vader was meubelmaker. Het gezin verhuisde in 1927 naar Hilversum vanwege de astma van zijn moeder.

Het hoofd der school zag dat hij alle sommen best kon doen en vroeg hem mee te helpen met het corrigeren van het werk van de andere leerlingen. Op aandrang van het hoofd deed hij toelatingsexamen voor de gemeentelijke hbs te Hilversum. In 1934 behaalde hij het diploma hbs-B en ging hij in Utrecht wiskunde studeren. Hij bleef thuis wonen en reisde met de bus naar Utrecht.

‘Ik kreeg een Rijksbeurs van 600 gulden per jaar die in drie termijnen werd betaald, maar toen ik de cheque voor de eerste 200 gulden wilde afhalen vroeg men mij om 100 gulden bij te betalen. Het collegegeld was namelijk 300 gulden.’ Zijn ouders moesten bijspringen. Koldijk deed zijn doctoraal examen op 2 december 1940 en was meteen werkloos. Om ervaring op te doen vroeg hij toestemming om op zijn oude school te hospiteren. Dat mocht; hij werd hospitant bij Van Dop. Van Dop had samen met Van Haselen verscheidene schoolboeken geschreven. Wijdenes smaalde hierover: ‘Van Hop en Van Daselen! Kent u mijn boek? Mijn boek is gegarandeerd foutloos!’

‘Reeds tijdens het eerste hospiteeruur kwam de directeur binnen, zei dat er een leraar ziek was en dat ik het tweede uur diens les moest overnemen.’ Later werd de directeur door de Duitsers gegijzeld, waardoor de waarnemend directeur, een wiskundige, moest inspringen, en Koldijk kon beginnen aan zijn eerste echte (inval-)baan. Dat duurde tot de paasvakantie,

toen de directeur terugkwam. Daarna werd hij weer hospitant.

Hoogezand, Sappemeer en Hoogezand-Sappemeer

Koldijk solliciteerde door het hele land, zo ook te Hoogezand, waar 10 wekelijkse lessen vacant waren. Er waren 28 bevoegde sollicitanten. Koldijk werd uitgekozen vanwege zijn goede referenties uit Hilversum. Zo begon hij in 1941 aan de gemeentelijke hbs te Hoogezand. Deze hbs was ontstaan uit een particuliere school, het instituut Hommes, dat in 1938 overgedragen was aan de gemeente Hoogezand. Koldijk kreeg 100 gulden per maand, waarvan 75 gulden nodig was als kostgeld.

De baan in Hoogezand was tijdelijk, en in de zomer van 1942 was Koldijk bij zijn ouders in Hilversum. Daar werd hij tweemaal benaderd door NSB'ers, die belangstelling voor hun beweging veronderstelden, maar hij wees hen af. Dit kostte hem bijna een nieuwe aanstelling in Hoogezand, waar wederom lessen vacant waren. De nieuwe (NSB-)burgemeester van Hoogezand had vernomen van de afwijzingen in Hilversum en wilde Koldijk niet opnieuw benoemen. Directeur Marring – een wiskundige – wist te bewerkstelligen dat hij toch benoemd werd. En toen directeur Marring ziek werd, kon hij meer uren krijgen.

Maar er werd een NSB-directeur benoemd, Marring kwam terug als leraar, en Koldijk zat weer zonder baan. Hij had echter al een goede reputatie opgebouwd, en werd uitgenodigd door de directeurs van andere hbs'en. Zo begon Koldijk aan de Rijks hbs'en te Groningen en Sappemeer. Hij pendelde tussen de scholen per fiets.

Koldijk: ‘Op een keer kreeg ik onderweg een lekke band. Ik kon meerijden met een paard en wagen, maar zo zou ik nooit om half twee in Sappemeer kunnen zijn. Gelukkig kon ik van fiets ruilen met een slager die zijn fiets ook op de wagen had gelegd, maar die geen lekke band had.’

In 1949 werden de gemeenten Hoogezand en Sappemeer samengevoegd. Daarom werd de Rijks hbs te Sappemeer in 1951 simpelweg opgeheven. Koldijk had al eerder weer lessen aan de hbs te Hoogezand gekregen, waar hij in 1947 ook onder-directeur was geworden. Na 1951 trok de gemeentelijke hbs van Hoogezand-Sappemeer in het gebouw van de voormalige Rijks hbs te Sappemeer. Het werd een bloeiende school, met leerlingen uit Hoogezand en Sappemeer en omgeving, en met ook zo'n 100 ‘tuten’, leerlingen vanuit het instituut Hommes.

Voorzitter van de Probleembond

Koldijks grote hobby was het schaakprobleem. Hij bezat het standaardwerk *Het schaakprobleem* van H. Weenink uit 1921. Al in 1936 publiceerde hij in het tijdschrift van de Nederlandse Schaakbond. Later verzorgde hij de jaarboeken van de Probleembond. In 1948 verscheen Koldijks *Themaboek* over schaakproblemen, in coproductie met de Eindhovense wiskundeleraar F.W. Nanning, die nu al enkele jaren

geleden is overleden. Het boek werd als gevolg van versleten matrijzen – het was oorlog – slecht uitgevoerd; het kostte f4,00 plus f0,14 voor de portokosten. Er was om de uitgave te bekostigen een fonds gevormd uit de inleggelden; toen er 1000 exemplaren waren verkocht, waren de kosten gedekt. Nog jarenlang werd Koldijks *Themaboek* gebruikt. ‘C’est une bible’, hoorde hij eens zeggen op een Europees congres van schaakproblemisten. Koldijk was voorzitter van de Probleembond geworden en bezocht steevast de Europese congressen. Hij organiseerde ook de Nederlandse, en zelfs vijf keer de Belgische oplosdagen.

Was probleemschaken nu zo’n bijzondere activiteit? De Bruijn – hoogleraar in Eindhoven – zei: ‘... het componeren van een probleem is een vorm van wiskunde’. Gerretsen – hoogleraar in Groningen – stak er echter de draak mee. Ook Freudenthal nam het niet serieus. Koldijk stuurde een exemplaar van het probleem-tijdschrift naar De Bruijn, die daarop terugschreef: ‘Het is nog meer wiskunde dan ik dacht. En wist u dat Freudenthal vroeger ook schaakproblemen componeerde?’

Wansink, Euclides

In 1942 logeerde Koldijk een week bij Wansink in Arnhem. Dat kwam zo. Wansink had een pleegzoon, een zekere Keller, een jongere broer van de dammer. Keller zat nog op school bij Wansink toen hij wees werd. Verdere familie was niet nabij. Wansink nam Keller in huis opdat hij in Arnhem zijn hbs-opleiding kon afmaken. Maar Keller bleef bij de Wansinks, ook toen hij in Utrecht ging studeren. Daar werd hij een studiegenoot van Koldijk, en zo kon het gebeuren dat hij Koldijk uitnodigde te komen logeren.

Tijdens die week corrigeerde Koldijk de drukproeven van een algebraboek van Wansink. Na het bezoek aan Wansink werd Koldijk lid van de vereniging Wimecos, de voorloper van de NVvW. Dat was dit jaar dus 60 jaar geleden. Hij bezocht geregeld de bijeenkomsten van Wimecos. Na de oorlog was hij ook actief in de – informele – groep wiskundeleraren die in het noorden bijeenkwam. Landelijke bijeenkomsten waren toen moeilijker te organiseren.

In het voorjaar van 1959 belde Wansink Koldijk met het verzoek de correctie van een nummer van *Euclides* te doen. De redactiesecretaris H.W. Lenstra was ziek geworden en het laatste nummer van de jaargang lag er nog. Koldijk werd vervolgens de opvolger van Lenstra. Hij schreef naar de uitgever, Noordhoff, hoe hij het wilde hebben. Daar keek Noordhoff van op en prompt nodigde hij Koldijk uit om langs te komen. ‘Hoe weet u dat allemaal?’ Koldijk kon bogen op zijn ervaring met de schaakboeken.

Hij heeft het redactiesecretariaat uiteindelijk 14 jaar vervuld. Er waren 10 nummers per jaar, elk met 32 (later 40) pagina’s, die moesten worden opgemaakt, de auteurs moesten een drukproef krijgen (kopieerapparaten waren er nog niet, er werd een zetsel gemaakt, en een gering aantal proeven werd gedrukt). Alles met strikte deadlines, 140 nummers lang. Eigenlijk dus 141 nummers. Niet één keer ging het mis.

In oktober 1973 verscheen een dankwoord van de redactie, geschreven door G. Krooshof:

‘Inmiddels ligt 1 september 1973 al weer achter ons. Ruim veertien jaar lang was het als vanzelfsprekend dat met grote regelmaat tien nummers van *Euclides* per jaar verschenen. Maar dat betekende voor Koldijk 140 nummers lang een voortdurende zorg: correspondentie met auteurs en uitgever, zorg voor het op tijd zijn van drukproeven en opmaak van het blad, het maken van het jaarlijkse register en nog zoveel dingen “die geen naam hebben”.

De uitgever, inmiddels Wolters-Noordhoff bv, sloot zich hierbij aan:

‘Als uitgever hebben wij in Koldijk de ideale contactpersoon gehad, met veel begrip voor bij de productie van een tijdschrift optredende technische problemen. En zeker bij een blad als *Euclides* met zettechnisch soms ingewikkelde kopij worden de corrector de problemen niet altijd bespaard! Zonder de punctuele en nauwlettende zorg van een redactiesecretaris is het regelmatig verschijnen van goed verzorgde afleveringen van een periodiek onmogelijk.’

Het contact met Wansink resulteerde tevens in het schrijven van een hoofdstuk over het algebraonderwijs in deel III van Wansinks *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren*. Koldijk komt hierin naar voren als de man van de degelijke opbouw, van het goede leraarschap dat hij zelf jarenlang uitgeoefend had. Een opstelling die Wansink bij uitstek apprecieerde.

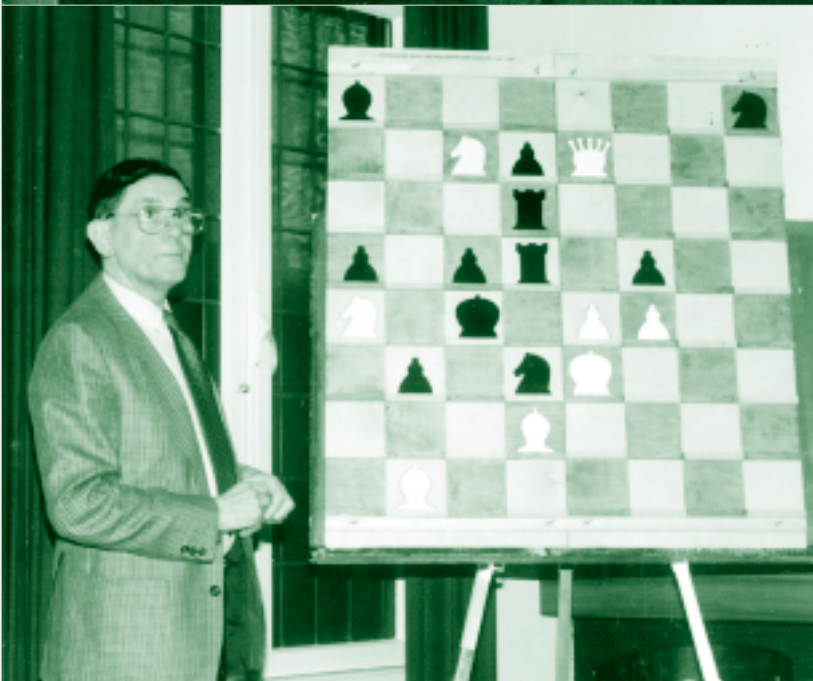
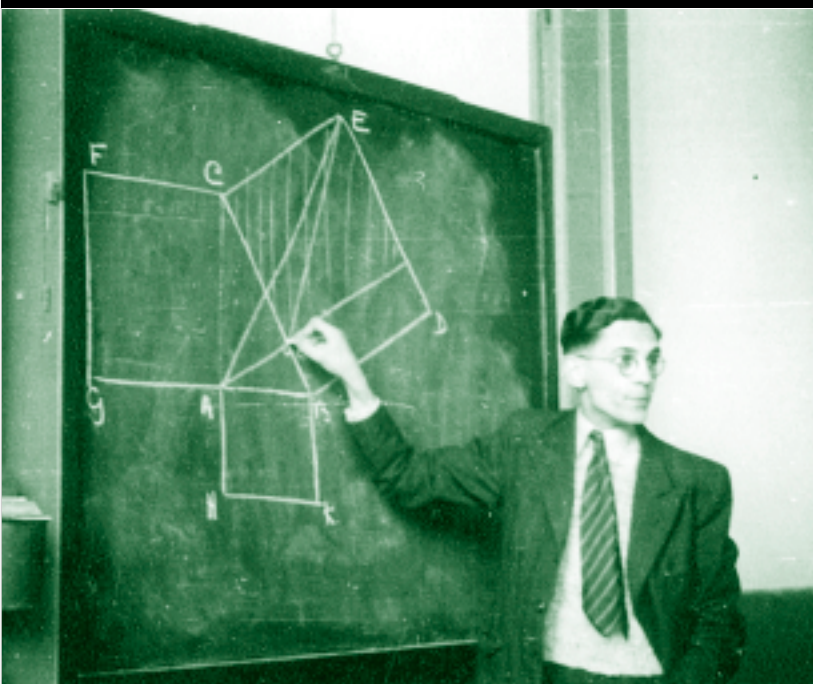
Commissie examenopgaven

Koldijk stelde ook examenopgaven op. Dat ging zo: de inspecteur verzocht de directeur van de school leraar X te vragen vijf examenopgaven in te zenden, voor een compleet examen. Die werden dan beoordeeld door een commissie, bestaande uit een vakinspecteur en een aantal leraren. De commissie stelde het examen op. Later werd Koldijk zelf lid van zo’n commissie. Hij zegt: ‘Je schrok als je de ingezonden opgaven bekeek. Sommige waren veel te moeilijk, andere waren gegapt uit een Frans examen.’

Eén keer ontdekte hij een fout in een examenopgave. Er moest staan 2^y, maar er stond alleen een 2. Koldijk kende de opgave. Direct nadat hij de envelop had geopend belde hij naar de inspecteur, die belde weer de vakinspecteur, en binnen een kwartier waren alle hbs’en gebeld om de fout te verbeteren. Bij latere controle bleek dat de y uit het zetsel was weggevallen nadat de vakinspecteur de drukproef had gezien. De inspecteurs kwamen altijd naar de Staatsdrukkerij om de examenopgaven te controleren. Er kon iets uit een zetsel vallen, bij het drukproces kwam dit immers in beweging.

Bezoek aan de Verenigde Staten

In 1967 verbleef Koldijk zes weken in de Verenigde Staten, als gast van de American Association for the Advancement of Science (tripleAS). Hij was er vanaf eind juni. Inspecteur Poppema regelde dat de



mondelinge examens op zijn school dat jaar vroeg waren, zodat hij inderdaad weg kon.

Koldijk: 'Ik maakte altijd de roosters voor de mondelingen. Ik zorgde ervoor dat de eerste kandidaat die moest verschijnen, iemand was die zeker zou slagen. Zo hoopte ik de deskundigen mild te stemmen.' (Opmerking. Bij de gymnasiumexamens traden gecommiteerden op, bij de hbs-examens deskundigen; MCvH.)

De tripleAS nodigde elk jaar een aantal Europeanen uit om spreekbeurten te vervullen voor Amerikaanse aanstaande leraren. Als je naar Amerika geweest was, werd je gevraagd iemand te noemen die ook uitgenodigd kon worden. Koldijk werd waarschijnlijk genoemd door Van Heemert of Verdenius, beiden lector aan de Groningse universiteit, die al naar de tripleAS waren geweest.

Het bezoek aan de tripleAS was niet vrijblijvend.

Koldijk moest een voordracht houden over het Nederlandse onderwijssysteem. Ook werd hem gevraagd een demonstratieles te geven in lineair programmeren – als hij dat kon. 'Nou ja, ik wist niet wat lineair programmeren was, maar ik zei dat ik dat wel kon.'

In zijn reisverslag zit een typische Koldijk-herinnering: 'In het vliegtuig naar Washington zat ik naast Grootendorst, ook een Albert (de latere hoogleraar te Delft, bekend van onder meer de vakantiecursussen; MCvH). We hebben nog steeds contact.'

De demonstratieles vond plaats te Buffalo in de staat New York. Hij moest les geven aan een schoolklas, onder het toezien van een hoogleraar en een gezelschap aanstaande leraren. Die konden aldus zien 'hoe het moest'. Koldijk gaf een socratische les, die hij in Sappemeer geoefend had met zijn 5 α -klas. Hij had gekozen voor een socratische opzet, omdat hij geen informatie had over de voorkennis van de Amerikaanse klas.

De situatie was min of meer vergelijkbaar met die van een groep medische studenten bij een operatie. Er waren speciale 'demonstration classes', die zo nu en dan naar het instituut kwamen om daar een les te krijgen. Na afloop hoorde Koldijk van Amerikaanse collega's dat ze nu pas het lineair programmeren begrepen.

Nascholing

In 1968 werd een nieuw programma ingevoerd, waardoor uitgebreide nascholing nodig was; deze werd opgezet vanuit Utrecht. Leraren gingen een hele week op nascholing. Dat was hard werken, er werden grote hoeveelheden opgaven gemaakt. Onder andere Gerretsen hield zich ermee bezig. Koldijk kende Gerretsen, omdat hij in 1942 aan de Rijks hbs te Groningen Gerretsen had vervangen toen deze door de bezetter was opgepakt. Nu werd Koldijk door Gerretsen gevraagd.

Ook Van Gelder bemoeide zich ermee. Samen met Gerretsen nam hij het initiatief om mulo-leraren na te scholen. Deze groep was eerst buiten beschouwing gebleven, terwijl de mulo-leraren - mavo-leraren vanaf 1968 - toch het nieuwe programma moesten geven.

Zodoende werden in 1965 alle mulo-scholen in het noorden aangeschreven. De belangstelling was overweldigend, 130 leraren gaven zich meteen op. Deze nascholing werd gegeven in Groningen en Leeuwarden. Zo'n cursus was wekelijks, een gehele winter lang, van half vijf tot half negen, met tussentijds broodjes. Koldijk deed dit samen met onder anderen de hbs-leraren Hemminga en Schuil. Later werden de cursussen voor mulo-leraren naar Gronings voorbeeld landelijk gegeven en via dit kanaal kwam Koldijk in het bestuur van het IOWO.

Didactiekdocent

Vanwege de invoering van de Mammoetwet in 1968 (stelsel van vwo, havo, mavo en lbo) werden overal nieuwe eerstegraads lerarenopleidingen opgezet. De Rijks Universiteit Groningen werkte hierbij samen met de Fryske Akademy te Leeuwarden, want de Fryske Akademy verzorgde onder de naam Noordelijke Leergangen de MO-opleidingen te Leeuwarden, Groningen en Zwolle. Er werd een voorbereidingscommissie gevormd met Gerretsen als voorzitter. Gerretsen wilde er ook een 'echte leraar' in, en vroeg Koldijk.

Op een bepaald moment kon Bunt, die in Groningen en Utrecht didactiekdocent was, een aantrekkelijke post in Arizona krijgen. Bunt vertrok spoorlags. Gerretsen zei tegen Koldijk: 'Jij moet de volgende week didactiek geven.' En zo begon Koldijk na meer dan 25 jaar aan een geheel nieuwe baan, zonder speciale voorbereiding, en zonder overlegd te hebben met zijn voorganger. Maar juist zijn ruime ervaring en goede reputatie als leraar, zijn kennis van de nieuwe ontwikkelingen, en zijn deelname aan diverse activiteiten vormden de redenen om hem te benoemen tot didactiekdocent. In Utrecht werd Bunt terzelfder tijd opgevolgd door Van Dormolen.

Koldijk gaf ook hoor- en werkcolleges aan studenten biologie en andere gebruikers van wiskunde.

Didactiek gaf hij in de beginjaren met behulp van Johnson & Rising, *Guidelines for teaching mathematics*, een heel praktisch boek. Koldijk had de auteur Rising tijdens zijn bezoek aan de Verenigde Staten persoonlijk ontmoet. Later kwam het werk van Wansink beschikbaar, de *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren*.

In 1971 kwam de oprichting van de Nieuwe Lerarenopleidingen (Nlo's), waaronder Ubbo Emmius te Groningen. Directeur werd Stellinga, een oud-medebestuurder van de club van leraren die na de oorlog in het noorden bijeenkwam. Koldijk: 'Ik solliciteerde daar niet, het leek me niets.' Maar van de sollicitanten werd niemand goed genoeg bevonden, en Stellinga wendde zich met Verdenius tot Koldijk. Wilde hij niet voor één jaar de sectie wiskunde opbouwen? Hierin stemde Koldijk toe. Hij bleef ook didactiek geven aan de universiteit, maar stopte zijn activiteiten voor wiskundegebruikers af. Na dat eerste jaar bleef Koldijk verbonden aan Ubbo Emmius.

Hij denkt met genoegen aan de Ubbo Emmiustijd terug. 'De omgang met studenten was heel prettig, alleen

waren het er veel te veel.' Selectie aan de poort geschiedde door loting, die Koldijk zelf in het openbaar uitvoerde.

Aan de universiteit kreeg hij gezelschap van Anne van Streun, die ook eerst halftime bij Ubbo Emmius werkte. Tot zijn spijt miste hij diens oratie in december 2001, hij wist er niet van.

In 1982, op 65-jarige leeftijd, ging Koldijk met pensioen.

Slot

Bij een proefwerk liep Koldijk soms even weg. De klas zou dan hebben kunnen spieken. Hij heeft dat nooit kunnen ontdekken. Een oud-leerling vertelde daarover: 'Spieken, nee, dat deden we dan niet. Dat dééd je dan niet.'

Bij Koldijk deed je dat niet.

Over de auteur

Martinus van Hoorn (e-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl) was van 1987 tot 1996 hoofdredacteur van *Euclides*. Hij heeft nog didactiek gevolgd bij Koldijk.

ELKE LEERLING EEN COMPUTER - WAT KUN JE IN DE WISKUNDELES MET EEN LAPTOP?

In onze samenleving wordt het gebruik van computers steeds belangrijker. Om toekomstige werknemers goed voor te bereiden is het van belang dat scholen hierop inspelen. Er is tegenwoordig dan ook bijna geen school meer zonder computerruimte.

[Jos Tolboom en Annelies Wijnbergen]

Inleiding

Het Zernike College in Groningen-Haren vond het integratieproces van computers in het onderwijs te langzaam verlopen. In de les werd te weinig gebruik gemaakt van ICT. De rector van de school, Dirk Dijkstra, zag in Denemarken een laptopklas (klas waarin alle leerlingen hun eigen notebook oftewel laptop hebben) en hij was onder de indruk van het grote gemak waarmee de leerlingen met deze apparaten werkten. Men besloot op het Zernike College een laptopproject te starten in het schooljaar 2000/2001. De aanschaf van de laptops (Toshiba Satellite 1620) werd deels door de school gesubsidieerd en deels door de ouders van de leerlingen zelf betaald. Op school was de laptop een geheel nieuw leermiddel en voor de meeste leerlingen gold dat ook voor thuisgebruik. Zowel thuis als op school werd de machine gebruikt om via internet de digitale leeromgeving (DLO) te bezoeken. Uitgeverij Wolters-Noordhoff stelde een extra set boeken beschikbaar voor gebruik in de klas. Dit betekent dat de leerlingen thuis en op school boeken hebben. Ze moeten dus alleen hun schrift elke dag meenemen. Voor de laptops zijn speciale opberg-ruimtes. In het weekend mogen ze mee naar huis. De doelstelling van het project was in het algemeen een antwoord op de vraag: hoe kun je laptops in het dagelijkse onderwijs zo goed mogelijk inzetten?

Het project

Het Zernike College begon al vroeg met de voorbereidingen. Omdat het maken van aangepast lesmateriaal voor de leraren heel veel extra werk zou betekenen en omdat de school graag wilde weten of

het project een positief effect heeft op het onderwijs, ging men in zee met Anne van Streun, hoogleraar in de didactiek van de Wiskunde en Natuurwetenschappen. Van Streun had twee afstudeerders beschikbaar (Neeltje Doggen en Annelies Wijnbergen) die het werk van wiskundedocent Henri Boer enigszins konden verlichten en die daarnaast konden onderzoeken of het onderwijs gebaat is bij dit intensieve gebruik van computers. Het onderzoek hier beschreven heeft alleen betrekking op het wiskundeonderwijs, aangezien alle betrokkenen aan de wiskundeafdeling van hun organisatie werken of studeren.

Het Zernike College is aan het begin van het schooljaar 2000-2001 lid geworden van 'Anytime Anywhere Learning' (AAL; zie Websites) zodat men informatie kon uitwisselen met andere scholen.

Organisatie

Het Zernike College, voorhoedeschool op ICT-gebied en computerschool van het jaar 1998 en van het jaar 2000, begon het laptopproject in een brugklas van de Montessori-stroom (zie figuur 1). In deze klas maakten 26 leerlingen (10 meisjes en 16 jongens) elke dag gebruik van een laptop. Het advies dat deze leerlingen hadden meegekregen van hun basisscholen liep uiteen van de theoretische leerweg tot het atheneum; 62% van de leerlingen had een advies voor havo of hoger. Ondertussen is het project overigens uitgebreid van één brugklas naar één tweede klas en twee brugklassen in de Montessori-stroom.

De laptopklas had in het cursusjaar 2000-2001 een eigen lokaal. In 2001-2002 waren er drie laptopklassen en maar twee lokalen. Omdat de laptop bij vakken als



FIGUUR 1 De eerste laptopklas van het Zernike college

gym, handvaardigheid, tekenen en drama niet wordt gebruikt, is het mogelijk het rooster zo te maken dat altijd één laptopklas geen laptopklaslokaal nodig heeft. De laptop kan uiteraard ook elders in de school worden gebruikt: zonder stopcontact, en dus op de accu, en zonder netwerk (en dus internet-aansluiting) zijn veel activiteiten overal uit te voeren.

Voor de wiskundelessen wordt gebruik gemaakt van Moderne wiskunde deel 1 mh(v) van Wolters-Noordhoff. Aan het begin van het jaar werd de leerlingen een toets 'computervaardigheden' afgenomen, en hieruit bleek dat sommige leerlingen nog niet veel computervaardigheden bezaten. Door het jaar heen wordt hen vervolgens geleerd met verschillende computerprogramma's te werken: onder meer Word, Excel en Powerpoint uit de MS Office Suite en Doorzien (zie figuur 2), VU-Grafiek, VU-Statistiek en Cabri als specifiek wiskundige software.

Onderzoeksofzet

In het eerste jaar zijn werkbladen, toetsen en een werkstukopdracht ontwikkeld. De werkstukopdracht maakte gebruik van het programma Cabri en moest gebruikt worden naast de theorie in het boek. Dit gaf goed vergelijkingsmateriaal. Verder is de laptopklas het hele jaar geobserveerd en af en toe ook een parallelklas. De verwachtingen die de onderzoekers aan het begin van het jaar hadden van de laptopklas, na het doorlezen van literatuur over dit onderwerp, waren onder andere dat:

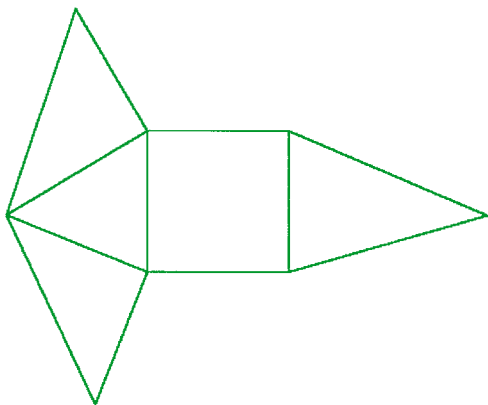
- de laptopleerlingen door de computeropdrachten een beter inzicht in wiskunde zouden krijgen dan 'normale' leerlingen;
- de laptopleerlingen een hoger niveau zouden behalen en de stof beter zouden onthouden;
- het inzetten van software als effect heeft dat leerlingen sommige dingen niet goed meer met de hand kunnen;

- de leerlingen het leuk vinden met de laptop te werken en daardoor een grotere inzet tonen;
- jongens beter met de laptop overweg kunnen dan meisjes, maar desondanks hetzelfde wiskundeniveau zouden behalen.

Uitvoering van het onderzoek

Aan het begin van het schooljaar 2000-2001 zijn de onderzoekers meteen begonnen met het observeren van de laptopklas en van een parallelklas (ook een montessori-brugklas). Verder hebben ze de niveaus van beide klassen aan de hand van de Cito-scores met elkaar vergeleken om te kunnen nagaan of er aan het begin van het project een significant verschil in niveau tussen de klassen bestond. Dit bleek niet het geval te zijn. Henri Boer was de wiskundeleraar van beide klassen, zodat het enige verschil tussen de klassen het laptopgebruik was. De Cito-scores toonden wel een verschil tussen de meisjes en de jongens van de laptopklas: de meisjes hadden een iets hogere score dan de jongens.

Uit de observaties hoopten de onderzoekers informatie te krijgen over het verschil in lesgeven tussen gewone klassen en laptopklassen. Bovendien zijn de leerlingen van de laptopklas geïnterviewd om een beter beeld te krijgen van wat zij nou eigenlijk van het onderwijs in de laptopklas vinden. Verder zijn er gedurende het schooljaar 2000-2001 ook leraren en andere betrokkenen bij de laptopklas geïnterviewd. Tevens is door de onderzoekers en door docent Henri Boer lesmateriaal voor de laptopklas ontwikkeld: werkbladen waarmee de leerlingen zelfstandig op de laptop aan de gang konden. Deze werkbladen maken gebruik van verschillende soorten software en vervangen een paragraaf of een gedeelte van een hoofdstuk (zie figuur 3). Medewerkers van Wolters-Noordhoff hebben bekeken of de werkbladen in te



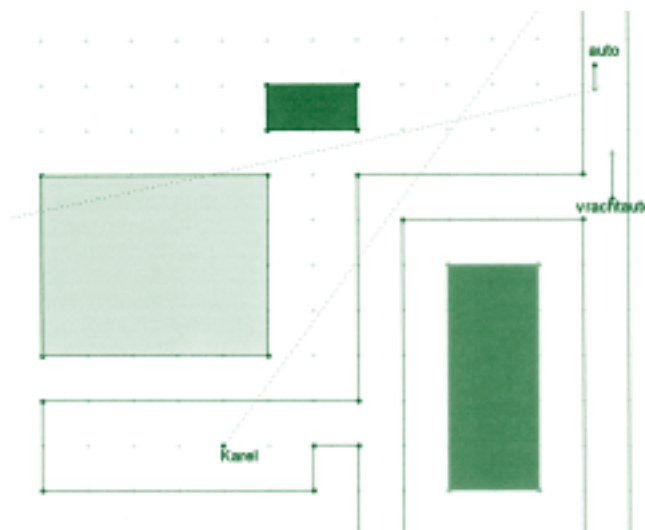
FIGUUR 2 Uit een werkblad gemaakt met Doorzien

zetten zijn in hun nieuwe boeken. Tot slot zijn alle proefwerken van enerzijds de laptopklas en anderzijds de parallelklassen aan het eind van het jaar met elkaar vergeleken.

Analyse van de resultaten

Uit de observaties en de interviews met de leraren blijkt dat de lessen in de laptopklas niet echt anders gegeven werden dan die in de niet-laptopklassen. De gebruikte werkvormen waren min of meer gelijk. Evenmin vinden de leraren, waaronder dus de wiskundeleraar, dat de motivatie van de laptop-leerlingen hoger is dan van leerlingen in andere klassen, hoewel wij dat wel verwacht hadden. Wel is het gedrag van de laptopleerlingen anders. Vooral in het eerste halfjaar waren deze leerlingen minder sociaal. Dit heeft waarschijnlijk te maken met het feit dat in het begin van het jaar elk groepje zichzelf een vaste tafel en plaats toeëigende en er minder interactie was tussen de verschillende tafels onderling dan in de andere klassen. Op deze manier leerden de leerlingen vooral hun tafelgenoten kennen. Als er in groepen gewerkt moest worden mochten de leerlingen in het begin zelf groepen maken, waardoor er ook niet veel uitwisseling plaatsvond. In het tweede halfjaar werden de groepen door de leraar gevormd waardoor het sociale aspect aanzienlijk verbeterde. Verder was de laptopklas iets rommeliger en rumoeriger dan de parallelklassen.

Dat de laptopleerlingen een beter inzicht zouden hebben verkregen is nog niet gebleken, zelfs niet uit de wiskundetoetsen, maar aan de hand van de literatuur wordt verwacht dat dit in de toekomst zeker het geval zal zijn. Invoering van de werkstukopdracht, één opdracht ter vervanging van een heel hoofdstuk, was een goed idee, vooral omdat ook de parallelklassen die gemaakt hebben. Dit gaf goed vergelijkingsmateriaal.



FIGUUR 3 Cabri, uit een werkblad over kijklijnen

De werkstukopdracht is door de leerlingen helaas niet echt goed gemaakt. Het was het eerste werkstuk dat ze moesten maken en we denken dat er voor hen meer begeleiding en duidelijkheid had moeten zijn om het goed te volbrengen.

Op de eindtoets scoort de laptopklas niet beter dan de parallelklassen, op sommige onderwerpen scoren de leerlingen zelfs slechter. De onderzoekers wijten dit aan het feit dat dit project net begonnen is en dat dus nog niet alle kinderziektes eruit zijn; de werkbladen kunnen bijvoorbeeld nog verbeterd worden. Men verwacht dat de resultaten volgend jaar beter zullen zijn. Ook zijn er enkele leerlingen in de laptopklas uitgestroomd naar een lager niveau, wat ook een reden kan zijn dat het gemiddelde van de klas lager uitvalt dan verwacht. Verder is er evenmin een echt verschil tussen de gemiddelden van de proefwerken aan het begin van het jaar en aan het eind van het jaar. Af en toe maken leerlingen uit de laptopklas een proefwerk beter, een andere keer maken ze een werk slechter dan de andere klassen. Er is wel een verschil tussen de leerlingen van de laptopklas onderling. De meisjes scoren op bijna alle proefwerken beter dan de jongens. Dit kan liggen aan het genoemde verschil in Cito-scores.

Uiteraard zijn de computervaardigheden van de klas in de loop van het jaar sterk vooruit gegaan. Dit verschil in vaardigheden was goed merkbaar bij de werkstukopdracht, hoewel het niet meteen een positief verschil opleverde. De parallelklassen wisten minder van de computer en vroegen dus meer, waardoor ze meer tijd nodig hadden, maar daarom ook beter moesten samenwerken.

Naar aanleiding van het eerste jaar

Ondanks het feit dat de laptopklas niet beter scoort op toetsen dan de parallelklassen, is het aan te bevelen dit

Grafieken tekenen bij tabellen kan je met de hand doen, maar je kunt het natuurlijk ook de computer laten doen. Een programma waarmee dit kan is VU-Grafiek. Aan de hand van de volgende opgaven leer je dit programma te gebruiken.

Opgave 1

Van veel baby's wordt de groei op het consultatiebureau regelmatig gecontroleerd. Bij Leonie is dit ook gebeurd. Er is alleen drie keer vergeten haar gewicht te noteren.

- Open VU-Grafiek en kies voor de optie Grafieken tekenen.
- Je ziet bovenaan bij de werkbalk de volgende knop: . Klik hierop.
- We gaan een grafiek maken met op de horizontale as leeftijd in maanden en op de verticale as gewicht in kg.


- Noem de tabel "Gewicht Leonie". Vul onderstaande gegevens in en klik daarna weer op "OK". Bij een paar maanden is het gewicht onbekend, dus bijvoorbeeld maand 5 komt niet in je tabel voor.

Leeftijd in maanden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gewicht in kg	3.9	4.7	5.4	6.1	...	7.2	7.8	...	...	8.8	9.1	9.4

Je ziet nu de grafiek van het gewicht van Leonie.

Opgave 2

- Klik op de volgende knop: 
- Je kunt de assen nu instellen zoals je zelf wilt.
- Laat de leeftijd van 0 tot 50 maanden lopen en klik op "OK".
 - Wat is er met de grafiek gebeurd?
 - Laat de leeftijd van 0 tot 13 maanden lopen en het gewicht van 0 tot 50 kg. Wat is er nu met de grafiek gebeurd?
 - Is het verloop van het gewicht van Leonie nu ook anders geworden?
 - Laat tenslotte het gewicht van 3 tot 10 kg lopen.
 - Sluit de grafiek van Leonie op. Doe dit door op de volgende knop te klikken: 

FIGUUR 4 Werkblad bij grafieken tekenen

project voort te zetten. De leerlingen werken namelijk met veel plezier met hun laptop. Dat wordt gemeld door alle docenten en de grote meerderheid van de leerlingen. Bovendien is dit het eerste jaar dat dit project loopt. Dat betekent dat er nog veel dingen verbeterd kunnen worden en dat geeft hoop op betere resultaten. Het is bijvoorbeeld belangrijk dat er materiaal ontwikkeld wordt dat specifiek gemaakt is op de doelgroep.

Daarnaast is er heel veel belangstelling voor de laptopklas. Er waren bijvoorbeeld zoveel aanmeldingen voor het schooljaar 2001-2002, dat er drie laptop-brugklassen gevormd konden worden. In de praktijk is echter gebleken dat twee brugklassen het maximaal haalbare is. In ieder geval is er vraag vanuit de markt. Verder biedt de computer een aantal voordelen voor het onderwijs. Je kunt zaken snel herhalen, je kunt tijdrovende handelingen als statistische berekeningen en het tekenen van grafieken sneller afhandelen en je kunt bijvoorbeeld meetkundige figuren eenvoudiger tekenen en aanpassen. Daarnaast biedt de computer uitstekende mogelijkheden voor archivering. Bovendien wordt de computer steeds belangrijker in de maatschappij, dus is het heel goed voor leerlingen om hierin handigheid te verwerven.

Een laptop voegt aan die voordelen een vergrote flexibiliteit toe. Ook voor docenten zou een laptopklas heel uitdagend kunnen zijn. Vanwege het 'always-on' karakter van de laptop moeten docenten echt nadenken over de manier waarop zij ICT gaan toepassen in de lessen. Dit houdt ook in dat ze de didactiek moeten overdenken. Een klas die werkt met laptops vergt wel een iets andere aanpak dan een klas die gewoon uit het boek werkt. Dat is dit jaar goed gebeurd, maar invoering van de laptops heeft voor de leraren zoveel vernieuwingen met zich meegebracht dat er ongetwijfeld nog meer didactische verbeteringen

kunnen worden aangebracht. De veranderingen die digitalisering voor de didactiek zal betekenen moeten grondig worden onderzocht.

In het jaar van dit project werden naar de mening van de onderzoekers de mogelijkheden van de laptop door te veel docenten onvoldoende benut. Onbekendheid met de situatie en drukte door reguliere taken waren hiervan de belangrijkste oorzaken. Daarnaast werkt de relatief hoge gemiddelde leeftijd van docenten (12 jaar ten opzichte van gelijk-opgeleiden in het bedrijfsleven) hun gemiddelde affiniteit met ICT niet in de hand. Naar onze mening verdient in het vervolgtraject een aantal zaken aandacht:

- De lange opstartperiode. Het is verstandig om in de beginweek een computercursus te geven. Dit scheelt tijd later in het jaar.

- De minder sociale houding van sommige laptop-leerlingen. Een oplossing hiervoor is wellicht dat de leraren regelmatig gemengde groepjes samenstellen waarin de leerlingen samen een opdracht moeten maken.

- Invoering van een programma als NetOpSchool. Door ervoor te zorgen dat de leraren op het beeldscherm van hun laptop kunnen zien wat de leerlingen doen, krijgen ze meer controle op de leerlingen.

- Bij vakken zoals wiskunde is het belangrijk dat leerlingen ook handmatig bezig blijven, bijvoorbeeld met het tekenen van grafieken. Dit zijn vaardigheden die wel ontwikkeld (aangeleerd) moeten worden.

- Veelvuldig werken met de laptop brengt het risico met zich mee dat leerlingen bijvoorbeeld RSI krijgen. Het is wellicht verstandig op iedere laptop een programma te installeren dat bijhoudt wat de gebruiker doet en hoe lang, en dat pauzes suggereert.

- Bekijk de mogelijkheid, de werkbladen op een andere manier te ontwikkelen. Bijvoorbeeld door een heel hoofdstuk uit het boek te vervangen door werkbladen en zelf de volgorde van de leerstof in te delen.

Laptop versus desktop; een mening

Wij denken dat de resultaten van dit onderzoek er anders hadden uit gezien wanneer er - in plaats van met laptops - gewerkt was met twee desktop computers, één op school en één thuis, en al het materiaal geordend was in een digitale leeromgeving (zoals bijvoorbeeld gerealiseerd kan worden met software van de firma Blackboard; zie Tolboom 2002). Wij zien voordelen in gebruik van de laptop boven de desktop.

Ten eerste: de laptops zijn van de leerlingen zelf, of van hun ouders, in tegenstelling tot de computers die op school staan. Dit stimuleert tot uitproberen, en daarbij zijn de computervaardigheden van de leerlingen gebaat. Het vergroot ook het verantwoordelijkheidsgevoel van de leerling ten opzichte van het materiaal.

Ten tweede heb je alles bij de hand zodra de laptop opgestart is, terwijl je met twee desktop computers (één thuis en één op school) altijd zaken moet over zetten, hetzij naar een digitale leeromgeving via het internet, hetzij via diskettes. Met de laptop kunnen leerlingen desnoods 's avonds in bed nog verder met waar ze mee bezig waren. Een desktop op school zal gedeeld moeten worden met andere leerlingen. Dat betekent o.m. een eigen plek op de netwerkschijf voor opslag van de bestanden en eigen instellingen.

Ten derde kan een laptop veel flexibeler gebruikt worden dan een desktop. Aparte computerruimtes zijn niet nodig. Het is hiermee veel eenvoudiger in een deel van de les de computers te gebruiken.

De voordelen gelden uiteraard niet alleen voor onderwijsinstellingen: dat de markt voor persoonlijke computers over het jaar 2001 ondanks de malaise in de ICT nog enigszins overeind is gebleven, is voornamelijk te danken aan de verkoop van laptops.

Naar onze mening verdienen laptops een echte doorbraak in het voortgezet onderwijs, maar we vrezen dat dit toch nog even op zich zal laten wachten.

Waarschijnlijk is er een kleine revolutie voor nodig.

Veel leraren kunnen nog steeds niet goed de mogelijkheden van de computer inpassen in de lessen en vermoedelijk willen sommigen ook niet graag hun manier van les geven veranderen, waartoe de laptops je wel dwingen. De aanschaf van de laptops is nog steeds een kostbare aangelegenheid. Bovendien zal een school geld moeten steken in het aanpassen van lesmateriaal (tenzij de educatieve uitgevers dat gedeelte voor hun rekening nemen), omscholen van leraren en veranderen van leslokalen. Dit zijn grote investeringen waarvan wij ons afvragen of scholen dat zonder extra overheidssteun kunnen opbrengen. Verder blijft de computer een goed hulpmiddel om de abstracte vakken duidelijker te maken. Je ziet vergelijkingen van lijnen veranderen als je een lijn verplaatst, je ziet wat er gebeurt als je tekens verwisselt of als je de waarde van parameters vergroot of verkleint. Dit is vaak meer verhelderend voor leerlingen dan een wiskundig sluitend bewijs in het boek. Wij verwachten dus een groter begrip van de stof

door de verduidelijking van de computer.

Welke invloed PDA's (personal digital assistants, zeer draagbare computers die ook wel palmtops worden genoemd) in het onderwijs kunnen hebben, is een zeer interessante vraag die nader onderzoek verdient.

Vervolgonderzoek

Op dit moment zijn twee studenten wiskunde van de RuG, David van de Beld en Bart ter Veer, bezig met een vervolgonderzoek. Zij concentreren zich op het ontwikkelen van volledig digitaal materiaal waardoor het boek in principe niet meer nodig is, behalve als naslagwerk. Hun materiaal betreft de onderdelen Stelling van Pythagoras en Statistiek en Kansrekening.

Literatuur

-
- [1] A. van Streun: *De professie bedreigd of verrijkt door ICT en Studiehuis?*, in: *Nieuwe perspectieven voor onderwijs en opleiding onder redactie van Pieter Breuker, John Peters en Anne van Streun*, 2001, pp. 133-158.
 - [2] C.J. Doggen, A.E. Wijnbergen: *De Laptopklas 2000-2001, ICT-gebruik in de klas: een verrijking van het wiskundeonderwijs?* (afstudeerscriptie, te verkrijgen bij prof.dr. A. van Streun, RuG).
 - [3] J. Tolboom (2002): *Een digitale leeromgeving voor het vak wiskunde*, Tinfon, 2002, nummer 1.
 - [4] David van de Beld, Bart ter Veer: *Afstudeerproject (materiaal verkrijgbaar via www.math.rug.nl/didactiek/public/)*.

Materiaal ontwikkeld door studenten en medewerkers van de faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen is te verkrijgen bij Marijke de Wijs (e-mail: m.de.wijs@fwn.rug.nl).

Websites

-
- [1] www.aalnederland.com, informatie over Anytime Anywhere Learning.
 - [2] www.ed.gov/databases/ERIC_Digests/ed440644.html, *Laptop Computers in the K-12 Classroom*, overzicht van conclusies uit evaluatierapporten geschreven door Yvonne Belanger en gepubliceerd in mei 2000.
 - [3] www.beaufort.k12.sc.us/district/ltopeval.html, *Evaluation Report Year 2, Schoolbook Laptop Project Beaufort County School District*; artikel over de evaluaties van twee jaar laptopgebruik in de klas door 9- tot 11-jarigen. Geschreven door K.R. Stevenson in november 1998.

Over de auteurs

Annelies Wijnbergen (e-mailadres: a.e.wijnbergen@freeler.nl) studeerde af bij de vakgroep Wiskunde aan de RuG en volgt nu, na enkele maanden gewerkt te hebben aan een hogeschool in Noorwegen, de universitaire lerarenopleiding wiskunde aan de RuG.

Jos Tolboom (e-mailadres: j.l.j.tolboom@fwn.rug.nl), ICT-redacteur van *Euclides*, is docent en onderzoeker aan de Master of Science in Education and Communication van de Rijksuniversiteit Groningen.

BROUWER TEGEN DE WI(SKU)ND(E)MOLENS

Een boekbespreking van Dirk van Dalens L.E.J. Brouwer 1881-1966.

Een biografie. Het heldere licht van de wiskunde.

Eerste druk 2001 (gebonden; isbn 90 351 2185 6);

tweede druk 2001 (paperback; isbn 90 351 2482 0), prijs €29,95.

Uitgegeven door Bert Bakker, Amsterdam.

[Jan van Maanen]

Inleiding

L.E.J. Brouwer, door Dirk van Dalen in 560 pagina's geportretteerd, was een man van uitersten. De anekdotes moeten hem vooruit gesneld zijn. De zonderlinge wiskundeprofessor in een huisje in Blaricum, die er in Amsterdam een apotheek op na hield. Als je nog geen ruzie met hem had, dan kwam dat snel genoeg ... of je stelde zelf niets voor. De man met de vele vriendinnen, die door dorpsgenoten daarom wel 'de tijger van Het Gooi' genoemd werd. De docent die tijdens college niet geïnterrupteerd werd, ook niet door zijn briljante student Van der Waerden. Geen rook zonder vuur. Brouwer zal zich wel afwijkend gedragen hebben, anders komen zulke verhalen niet in de wereld. Lezing van het boek bevestigt die gedachte. Brouwer week in menig opzicht af. Hij was uiterst begaafd, en hij richtte zijn begaafdheid op terreinen die voor de meeste mensen ver van hun bed lagen. Wat de biografie extra spannend maakt, zijn de (cultuur-)historische achtergronden, zoals de contacten met Frederik van Eeden en de situatie van de Amsterdamse universiteit in de tweede wereldoorlog. Ook op die terreinen levert het boek veel interessants.

Overschie, Medemblik en Haarlem

Bertus (Luitzen Egbertus Jan) Brouwer werd op 27 februari 1881 in Overschie geboren. Zijn ouders stamden beiden uit een Fries onderwijzersgeslacht. Ze kenden het carrièrepatroon van de onderwijzer van huis uit: elke stap op de ladder betekende verhuizen. Voor Bertus' vader, die in Overschie als hoofdonderwijzer begon, was dat niet anders. De volgende stap ging eind 1882 naar Medemblik, waar Bertus' broers Lex (1883) en Aldert (1886) geboren werden. Een van de zaken die Van Dalens boek aantrekkelijk maken, is de hoeveelheid

authentieke bronnen, zoals de autobiografie van de zestienjarige Brouwer. Een citaat:

'Mijn grootste charmes waren onze schilder en tuinman, waar ik, zo vaak ze bij ons waren, met de meeste aandacht de arbeid beschouwde, en dan rustte ik niet voor ik zelf ook eens een smeer verf mocht strijken, of de schoffel eens mocht hanteren, met het gevolg, dat ik eens in een verfpot viel en een andere keer mij met den schoffel in de schenen sneed. Aan dergelijke omstandigheden heb ik mijn hele leven gelaboreerd. (...) Naarmate ik ouder werd, veranderden natuurlijk mijn genoegens ook, en de vroegere maakten plaats voor het bekijken van platen uit, en weldra ook het lezen van sprookjes van Moeder de Gans. Op de lagere school ben ik niet veel geweest. Het meeste heb ik thuis geleerd, en veel herinneringen van de school heb ik niet.'

Naar de middelbare school ging Bertus wel, vanuit zijn woonplaats Medemblik met de trein naar de hbs in Hoorn. Als elfjarige ging hij in september 1892 naar 3-hbs in Haarlem, waar zijn vader hoofd van een mulo was geworden. Net als in Medemblik was Bertus ook in Haarlem de beste van de klas. Bertus startte met een ambitieuze onderneming door naast de hbs het gymnasium te gaan volgen, dat vereist was voor toelating tot de universiteit. In 1894/5 werd hij tot 3-gym toegelaten en slaagde hij voor het staatsexamen hbs. In 1895/6 werd hij voor alfa en bèta tot 6-gym toegelaten en in juli 1897 deed hij met succes in beide richtingen examen. Als zestienjarige kon hij gaan studeren.

Studie in Amsterdam

Het werd wiskunde in Amsterdam. De Universiteit van Amsterdam had met de wiskundige Korteweg



(Brouwers latere promotor) en de fysicus Van der Waals grote kwaliteit in huis. Er was een rijk cultureel leven. Vooral in het literaire dispuut Clio verbreedde Brouwer zijn kennis en tevens zijn kennissenkring. Hij leerde er de medicijnenstudent Carel Adema van Scheltema kennen, die via het studententoneel de overstap maakte naar een niet bijster geslaagde artistieke carrière. Van Dalen gaf eerder de prachtige briefwisseling tussen 'Scheltema' en Brouwer uit (*Droeve snaar, vriend van mij*; 1984). De vriendschap tussen de twee zat vol rituelen en combineerde een vleugje mystiek, een portie depressiviteit en een dosis beginnend socialisme. In de vakanties in de jaren van 1898 tot 1903 vervulde Brouwer stukje bij beetje zijn militaire dienstplicht, hetgeen niet bijdroeg tot zijn welbevinden. Een voettocht naar Italië deed dat wel, en leverde hem een aantal sterke verhalen op. De wiskundestudie vond hij maar vlak:

'En voor zover ik zag, was in het wiskundig bedrijf wel plaats voor talent en toewijding, doch niet voor roeping en inspiratie.'

Het onderwijs was traditioneel, veel klassieke onderwerpen en nauwelijks aandacht voor recente ontwikkelingen (meetkundige transformatiegroepen, differentiaalmeetkunde, topologie en hoger dimensionale meetkunde, verzamelingenleer en invariantentheorie). Ondanks de matige inspiratie, de depressies en slechte gezondheid en vele andere bezigheden deed Brouwer juni 1904 doctoraalexamen. Twee maanden daarna trouwde hij met de ruim tien jaar oudere Lize de Holl. Lize was getrouwd geweest met een arts die geen kinderen wilde, en die haar aborteerde wanneer ze zwanger was. Toen dit weer dreigde, vluchtte ze naar haar moeder, die een apotheek dreef aan de Amsterdamse Overtoom. Daar werd in 1893 haar dochter Louise geboren. Brouwer

werd zo gegrepen door verhalen over Lize, dat hij met haar in contact probeerde te komen, met als afloop dat hij op zijn drieëntwintigste niet alleen doctorandus was, maar ook echtgenoot en stiefvader.

Drie jaar later promoveerde Brouwer bij Korteweg cum laude op een proefschrift *Over de grondslagen der wiskunde*. Het werk, waarover promotor en promovendus stevig overhoop gelegen hadden, was zeer filosofisch van aard. Brouwer behandelde diverse van de *hot topics* van zijn tijd, waarin het formalisme in de logica in opkomst was en waarin men veronderstelde dat de gehele wiskunde te axiomatiseren was. Brouwer distantieerde zich van een aantal gangbare opvattingen, in een gedachtegang die de aanloop was tot zijn latere opbouw van het intuitionisme. *Intuitionisme en Formalisme* was ook het thema van de oratie die hij in 1912 hield bij zijn benoeming in Amsterdam tot buitengewoon hoogleraar.

Naam als wiskundige

In opeenvolgende fasen heeft Brouwer essentiële bijdragen aan de wiskunde geleverd. Het begon in de jaren 1909 tot 1913 met artikelen over Lie-groepen, de dimensie-invariantiestelling, de dekpuntstelling en over topologie in het algemeen. In 1916 volgde het principe van keuzerijen, en het inzicht dat het principe van de uitgesloten derde daarmee vermeden kan worden. Dit vormde voor hem het begin van het opbouwen van de wiskunde op intuïtionistische grondslag. Daarnaast heeft Brouwer school gemaakt door zijn onderwijs. Zijn colleges, waarvan Van Dalen in een voetnoot (pag. 512-514) een overzicht geeft, betreffen de zuivere wiskunde in de volle breedte, inclusief meetkunde, grondslagen en verzamelingenleer. Van promovendi moest hij niets hebben, die kostten hem te veel tijd. Daarentegen investeerde hij juist wel in het commentariëren en corrigeren van werk van collega's.

De vreemde

Brouwer was vaak in de weer met grond en onroerend goed. Het beheer van de apotheek (later apotheken) van Lize bracht dat met zich mee. Onderhandelingen met de gemeente, met bouwers en huurders, en vele processen waren zijn deel. Toen de gemeente de brievenbus die naast de apotheek stond, wilde verplaatsen naar de overkant van het Surinameplein, daagde Brouwer de gemeente met succes voor de rechter: de verplaatsing zou klanten kosten, want de brievenbus bracht mensen langs de apotheek. De hut in Blaricum, die Brouwer in 1904 had laten bouwen, zorgde voor andere problemen. Van Dalen bericht over verwickelingen tussen Brouwer en burens, over stroken grond en erfdienstbaarheden. In een hilarische passage wordt een buurdochter aangehaald, die van het garagedak van haar moeder waarnam hoe Brouwer bij buurman Froger over hek klom, diens tuin doorkruiste naar de straat, en dit in de omgekeerde richting nogmaals deed. Het gebruik van het overpad diende jaarlijks hernieuwd te worden, en omdat er



**Brouwer in 1964 (collectie Viets) ^
Alexandrow, Brouwer en Urysohn in 1924 in
Blaricum**

Cor Jongejan, Lize en Bertus in de Harz

getuigen bij moesten zijn, deed Brouwer dit liefst samen met gasten en als Froger in de tuin zat. Toen Froger rasterwerk aanbracht en op Brouwers route gras liet inzaaien, daagde Brouwer hem voor de rechter. De biografie is informatief over de vrouwen in Brouwers leven. Zo vertelt Van Dalen nauwkeurig over Cor Jongejan, met wie het echtpaar Brouwer een groot deel van hun leven optrok, langere tijd ook als *ménage à trois*. Het contact ontstond toen Louise, Brouwers stiefdochter, naar school ging. Brouwer zocht uit de lijst van Louises medeleerlingen potentiële vriendinnen voor Louise uit. Een van hen, Cor Jongejan, mocht bij Louise thuis komen. Nadat Cor de school had verlaten, trok ze in Blaricum bij Brouwer in, aanvankelijk in de hut en later woonde ze met Louise in een apart huis. Brouwer behartigde de zakelijke belangen van Cor. Niets vreemds aan, denk je, als je dat leest, alleen wat anders ingericht dan bij de meeste andere mensen. Cor was de universele erfgenaam toen Brouwer op 2 december 1966 overleed nadat hij voor zijn huis door een auto gegrepen was. Lize was al eerder overleden.

De tegenstrever

Brouwer was een principiële en precieze man. Half werk was onacceptabel. Deze houding bracht hem regelmatig in aanvaring met collega's. Ook opvattingen over de wiskunde konden leiden tot conflicten. Deze brandjes en branden hebben Brouwers leven er niet vrolijker op gemaakt, hoewel hij zelf toegaf dat ruzie handig kon zijn om van een lastig iemand verlost te worden.

Het centrale conflict is dat met David Hilbert. Toen Brouwer in 1908 op het internationale toneel kwam, was Hilbert (1862-1943) de toonaangevende wiskundige. Hilberts voordracht op het Parijse congres van 1900 was richtinggevend binnen het wiskundige onderzoek, en Brouwer behandelde in zijn proefschrift

verschillende van Hilberts problemen. De verhouding tussen de twee begon zeer vriendschappelijk. Ze ontmoetten elkaar september 1909 in Scheveningen, en Hilbert publiceerde artikelen van Brouwer in het toptijdschrift van dat moment, de *Mathematische Annalen*. Hilbert had weliswaar kritiek op de figuren bij Brouwers eerste artikel over topologie, maar zulke zakelijke verschillen werden snel overbrugd. Het contact ontwikkelde zich zo goed dat Hilbert Brouwer in 1914 uitnodigde als redactielid van de *Mathematische Annalen*, een grote eer en erkenning van Brouwers deskundigheid.

Op het terrein waarop Brouwer met Hilbert in conflict raakte, de grondslagen van de wiskunde, had Hilbert uitgesproken opvattingen, maar hij had er sinds 1905 geen nieuw onderzoek naar gedaan. Wel gaf hij er college over, en in 1920 signaleerde hij daarin dat Brouwer afwijkend dacht over de wet van de uitgesloten derde. Voor Hilbert stond die wet als een huis, terwijl Brouwer doorging met onderzoeken hoe ver je met de wiskunde komt zonder het principe van de uitgesloten derde. Hij droeg zijn ideeën ook in Duitsland uit. Hilbert koos in het openbaar een steeds grimmiger toon. In het conflict speelden ook nog de internationale verhoudingen na de eerste wereldoorlog mee. Rond 1920 was het nog niet vanzelfsprekend dat Duitsers en Fransen tot dezelfde wetenschappelijke media (tijdschriften, congressen) toegelaten werden. Het conflict liep zo hoog op dat Brouwer door Hilbert uit de redactie van de *Mathematische Annalen* werd gezet. Bij deze actie was de hele wiskundige top betrokken, in een ongekennde lobby. Uiteindelijk werd de hele redactie ontslagen, en een kleinere redactie werd herbenoemd. De redactie speelde onder één hoedje, alleen Brouwer werd er buiten gehouden. Voor Brouwer was het een klap in het gezicht, die maakte dat hij zich op zichzelf terug trok.



Zilveren bruiloft, 1929

Vergelijkbaar is de strijd rond de oprichting van het Mathematisch Centrum. Zijn tegenspeler was in dit geval Van der Corput, die in oktober 1945 benoemd werd tot voorzitter van de 'Commissie tot Coördinatie van het Hooger Onderwijs in de Wiskunde', een gezelschap van zware wiskundigen en andere bètawetenschappers waar Brouwer buiten gehouden werd. De Commissie moest in de eerste plaats adviseren bij een aantal hoogleraarsbenoemingen, en een tweede agendapunt was het oprichten van een 'centrum voor wetenschappelijke wiskunde'. Brouwer bleef indirect op de hoogte, en aanvankelijk verzette hij zich niet, want de ontwikkeling liep parallel met zijn eigen wens om van Amsterdam een tweede Göttingen te maken. Van der Corput trok echter zijn eigen koers. Hij werd in Amsterdam tot hoogleraar benoemd en kondigde in zijn oratie (1946) *Het Mathematisch Centrum* aan. Hij had daarvoor de steun van rijc en B&W, terwijl Brouwer nog uitging van een oude toezegging van B&W. Deze hadden steun aan een internationaal centrum beloofd in ruil voor het feit dat Brouwer in Amsterdam bleef toen hij in 1920 hoogleraar in Berlijn kon worden. Van der Corput ('Van der Corrupt' zoals Brouwer hem noemde) won het pleit, en het Mathematisch Centrum, met sterke aandacht voor toegepaste wiskunde, was in 1946 een feit. Een fundamentele discussie kon ook in vriendschap uitmonden, zoals met de Russische topoloog Paul Urysohn. Deze ontdekte in 1923 een fout in een artikel van Brouwer en wilde daarover publiceren. Brouwer vond dat overdreven, vooral omdat Urysohn en hij de zaak intussen al corresponderend hadden uitgezocht. Inderdaad trok Urysohn zijn artikel terug. Samen met Alexandrov werd hij in 1924 vriendschappelijk in Blaricum ontvangen. Aansluitend aan dat bezoek reisden Alexandrov en Urysohn naar Bretagne, waar Urysohn tijdens zwemmen in zee omkwam. Brouwer



Brouwer aan de wiskunde in de tuin

trok er meteen op uit om in Göttingen Alexandrov op te vangen. Van Dalen citeert Brouwers brief aan de vader van Urysohn, een mooie brief die de kern raakt en die zeker tot steun zal zijn geweest.

Het boek

Het pleit voor Van Dalens werk dat - ook al is deze bespreking vrij uitvoerig - nog zoveel onopgemerkt is gebleven. Het Gooise circuit onder aanvoering van Frederik van Eeden zou het perspectief nog aanzienlijk kunnen verbreden. De situatie van de Amsterdamse universiteit in WO-II, met de opstelling tegenover de loyaliteitsverklaring en de oncollegiale behandeling die Freudenthal van de kant van Brouwer en Bruins ondervond, valt hier buiten het bestek, evenals de meer wiskundige aspecten. Bij Van Dalen komt het allemaal, in samenhang, aan bod, zoals er nog veel meer de revue passeert. Details over het dagelijks leven, herinneringen van kennissen, zakelijke verwickelingen, het is een rijkheid aan bronnen en een mate van detail die ongekend is, en die afgezien van enkele doublures toch heel goed leest.

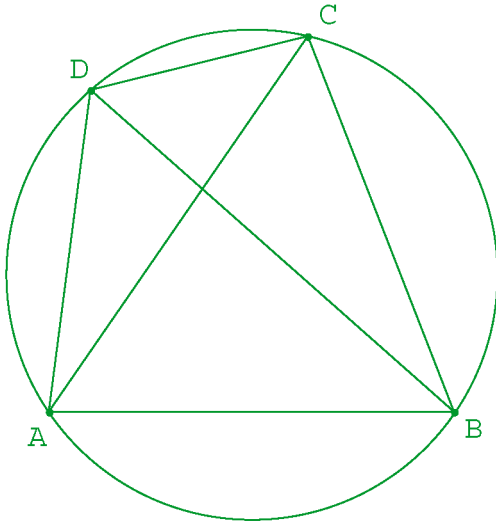
Waar ik benieuwd naar ben geworden, is wat Van Dalen nu van Brouwer vindt. De beschrijvingen zijn feitelijk, en door de kleine stappen kun je veel begrijpen en billijken. Maar sommige dingen gingen toch echt te ver, bijvoorbeeld de manier waarop Brouwer zich gedroeg tegenover Freudenthal en Van der Waerden. Dat lees je tussen de regels, maar Van Dalen zegt het nergens. Als hij het zo bedoeld heeft, dan heeft hij ook tussen de regels door heel precies geformuleerd.

Over de recensent

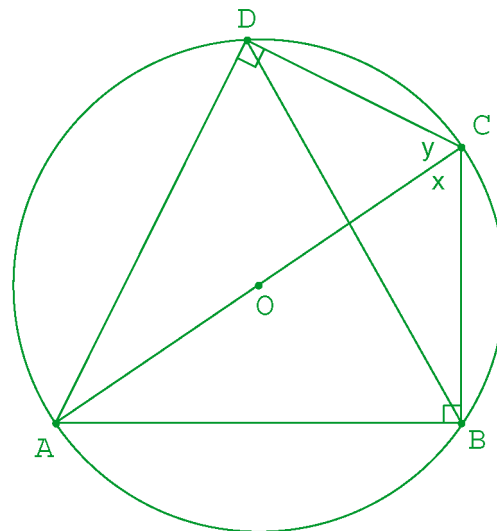
Jan van Maanen (e-mail: maanen@math.rug.nl) is voor onderzoek en onderwijs in de geschiedenis van de wiskunde en de wiskundendidactiek verbonden aan de Rijksuniversiteit Groningen.

SINUS EN COSINUS, ÉÉN FUNCTIONAALVERGELIJKING?

[A.G. van Asch en F. van der Blij]



FIGUUR 1



FIGUUR 2

1. Inleiding

De functie sinus kan op vele manieren worden gedefinieerd. Bijvoorbeeld meetkundig als overstaande rechthoekszijde gedeeld door de hypotenusa in een rechthoekige driehoek. Of via de projectie van een eenparige cirkelbeweging op de y -as. In de analyse is de sinus een functie van (reële) getallen die meestal gedefinieerd wordt door middel van een machtreeks. In jaargang 16 van Euclides gaf J.C.H. Gerretsen een andere analytische definitie van sinus en cosinus (zie [1]). Op de pagina's 92-99 onderzoekt de auteur *twee* functies s en c van een reële variabele die aan drie voorwaarden voldoen:

(i) De functies s en c zijn voor alle reële getallen gedefinieerd.

$$(ii) c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = 1$$

De eisen (i) en (iii) dienen er onder andere voor om vreemde discontinue functies uit te sluiten. De eis (ii) is een functionaalvergelijking met twee onbekende functies, en de vraag is of door deze ene vergelijking beide functies reeds eenduidig zijn vastgelegd. In het geciteerde artikel wordt bewezen dat dit inderdaad het geval is (zie [1], en ook [3]).

Nu lijkt die functionaalvergelijking een beetje uit de lucht te komen vallen. Wanneer we de sinus vanuit de meetkunde introduceren, is er een voor de hand liggende methode om een analoge functionaal-

vergelijking meetkundig toe te lichten.

Een klassieke stelling uit de euclidische meetkunde, genoemd naar Ptolemaios (ca. 85 - 165), leert dat het product van de lengten van de diagonalen van een koordenvierhoek gelijk is aan de som van de producten van de lengten van de paren overstaande zijden van de koordenvierhoek.

In **figuur 1** is dus $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$.

We beschouwen nu het speciale geval dat AC een middellijn van de cirkel is, en gebruiken de sinus om deze lijnstukken in hoeken uit te drukken.

Noemen we $\angle BCA$ nu x en $\angle ACD$ vervolgens y (zie **figuur 2**), dan vinden we de relaties:

$$AB = 2R \sin x$$

$$DA = 2R \sin y$$

$$BC = 2R \sin (\text{complement van } x)$$

$$CD = 2R \sin (\text{complement van } y)$$

$$AC = 2R$$

$$BD = 2R \sin (x + y)$$

Zoals bekend is het gebruikelijk voor $\sin(\text{complement van } x)$ kortweg $\cos x$ te schrijven.

De stelling van Ptolemaios in dit speciale geval leert:

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

We stellen ons nu de vraag of door de algemene functionaalvergelijking

$$s(x + y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$$

met betrekking tot een tweetal functies $s(x)$ en $c(x)$ de bekende functies sinus en cosinus ook eenduidig gedefinieerd zijn.

2. De somformule voor de sinus, het algemene geval

We willen onderzoeken welke functies, als machtreeks gedefinieerd, aan de functionaalvergelijking voldoen. We weten dat in ieder geval de bekende machtreeksen voor sinus en cosinus voldoen. Maar zijn er nog andere oplossingen? We kiezen iets andere voorwaarden dan in het artikel van Gerretsen: de laatste limiet-eis laten we weg, evenals de eerste eis over het bestaan van de functies.

We introduceren getallen a_n en b_n en bekijken de formele machtreeksen

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad \text{en} \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$$

Formeel uitwerken van deze formules in de formule voor $s(x + y)$ voert tot relaties tussen de coëfficiënten a_n en b_n .

We rekenen gewoon zonder ons zorgen te maken of we convergente machtreeksen hebben en of de bewerkingen die we er op uitvoeren geoorloofd zijn in het kader van de analyse. Maar daar het ons alleen om relaties tussen de coëfficiënten zal gaan is dit in het kader van de algebraïsche theorie van formele reeksen geoorloofd. De x en de y zijn nu dus geen reële variabelen maar abstracte dummy's; daarom schrijven we ze nu niet alleen cursief maar ook vet. Als we op

deze manier de coëfficiënten a_n en b_n gevonden hebben, zullen we achteraf onderzoeken of de machtreeksen met deze coëfficiënten convergeren en de daardoor gedefinieerde functies aan de relatie voldoen. We vinden nu door de genoemde substitutie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (x + y)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_n b_m}{n! m!} x^n y^m + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m! n!} x^n y^m$$

Een eenvoudige uitwerking van het binomium geeft

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \sum_{\substack{n,m=0 \\ n+m=k}}^{\infty} \binom{k}{n} x^n y^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{a_n b_m + a_m b_n}{n! m!} x^n y^m$$

Nu staan links en rechts van het gelijkteken reeksen in x en y . We stellen nu de coëfficiënt van $x^n y^m$ links en rechts gelijk en vinden:

$$a_{n+m} = a_n b_m + a_m b_n$$

We gaan nu met deze formule wat manipuleren.

Eerst kiezen we $m = n = 0$ en vinden $a_0 = 2a_0 b_0$; dus $a_0 = 0$ of $b_0 = \frac{1}{2}$.

We onderzoeken eerst het geval $a_0 = 0$, een redelijke veronderstelling als we bedenken dat $\sin 0 = 0$.

Dan geldt $a_n = a_n b_0$.

Als niet alle a_n gelijk aan 0 zijn volgt $b_0 = 1$.

Stel $a_1 = 0$, dan geldt $a_{n+1} = b_1 a_n$ en dus $a_n = 0$ voor alle n . Dit levert een triviale oplossing op.

We veronderstellen verder $a_1 \neq 0$. We proberen nu een relatie voor alleen de getallen a_n te vinden door de getallen b_n te elimineren.

$$a_{n+1} = a_1 b_n + b_1 a_n$$

$$a_{n+2} = a_2 b_n + b_2 a_n$$

$$\text{Dus } a_1 a_{n+2} - a_2 a_{n+1} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_n$$

We merken nog op dat $a_2 = 2a_1 b_1$, en dus

$$a_1 (a_{n+2} - 2b_1 a_{n+1} - (b_2 - 2b_1^2) a_n) = 0.$$

Dit is een lineaire recurrentieformule voor de getallen a_n .

We zien dat $a_n = \lambda^n$ een oplossing is mits λ voldoet aan de vergelijking

$$\lambda^2 - 2b_1 \lambda - (b_2 - 2b_1^2) = 0$$

We bestuderen nu eerst het geval dat deze vierkantsvergelijking twee verschillende wortels λ_1 en λ_2 heeft. Dan is onmiddellijk te controleren dat door de lineaire combinatie $a_n = p\lambda_1^n + q\lambda_2^n$ ook een oplossing gegeven wordt. Een stelling uit de theorie van de differentievergelijkingen leert dat hiermee dan ook alle oplossingen gegeven zijn.

Substitueren we $n = 0$ en $n = 1$ dan vinden we

$$a_n = a_1 \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

en uit $a_1 b_n = a_{n+1} - a_n b_1$ volgt na wat handig manipuleren

$$b_n = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2}$$

We vinden met deze coëfficiënten dus de volgende machtreeksen:

$$s(x) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{x^n}{n!} \quad \text{en} \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2} \frac{x^n}{n!}$$

Deze machtreeksen convergeren voor alle waarden van de variabele en stellen bekende functies voor:

$$s(x) = a_1 \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{en} \quad c(x) = \frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x})$$

De getallen λ_1 en λ_2 hangen van de keuze van b_1 en b_2 af. Kiezen we $b_1 = 0$ en $b_2 = -1$, dan vinden we voor λ_1 en λ_2 de waarden i en $-i$. Substitueren we die in de bovenstaande machtreeksen, dan vinden we, als we ook nog $a_1 = 1$ nemen, dat

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{en} \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

hetgeen de bekende machtreeksen voor sinus en cosinus zijn.

We vragen ons af of de algemene oplossing nog in een meer overzichtelijke vorm gegoten kan worden. We bedenken daarbij dat de getallen λ_1 en λ_2 bij reële keuze van b_1 en b_2 of reële of toegevoegd complexe getallen zijn. Wanneer we de bekende notatie voor complexe getallen gebruiken kunnen we deze getallen schrijven als $r(\cos \phi \pm i \sin \phi)$. Substitueren we deze formules in de machtreeksen dan vinden we een algemene oplossing in de vorm

$$s(x) = \frac{1}{r \sin \phi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\phi}{n!} (rx)^n \quad \text{en} \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n!} (rx)^n$$

Voor $\phi = \frac{1}{2}\pi$ en $r = 1$ vinden we dan als speciaal geval de machtreeksen voor sinus en cosinus terug.

Onze conclusie is dus dat er, in tegenstelling tot hetgeen Gerretsen in het geval van de formule voor $\cos(x-y)$ vond, in het geval van $\sin(x+y)$ een hele familie van oplossingen is, waarvan de sinus en de cosinus een speciaal geval uitmaken. Zelfs een extra eis als

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = 1$$

brenkt hier geen verandering in.

3. De speciale gevallen

In het bovenstaande sloten we enkele gevallen uit; we willen nu kort aangeven tot welke oplossingen deze aanleiding geven.

Allereerst veronderstelden we $a_0 = 0$. Wanneer $a_0 \neq 0$ vinden we

$$b_n = \frac{a_n}{2a_0}, \quad \text{en na wat rekenen volgt} \quad a_{n+1} = \frac{a_1 a_n}{a_0}.$$

Voor de machtreeksen volgt hieruit

$$s(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{a_1 x}{a_0} \right)^n \quad \text{en} \quad c(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{a_1 x}{a_0} \right)^n$$

en dus volgt voor de functies $s(x)$ en $c(x)$:

$$s(x) = a_0 e^{\frac{a_1}{a_0} x} \quad \text{en} \quad c(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{a_1}{a_0} x}$$

Verder veronderstelden we dat de wortels λ_1 en λ_2 van de vierkantsvergelijking verschillend waren. Wanneer we $b_2 = b_1^2$ kiezen zijn de wortels gelijk en vinden we

de oplossingen

$$s(x) = a_1 x e^{b_1 x} \quad \text{en} \quad c(x) = e^{b_1 x}$$

4. Een functionaalvergelijking voor de cosinus

We gaan uit van de functionaalvergelijking

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

en gaan verder op de boven aangegeven weg te werk.

Afgezien van enkele bijzondere oplossingen, exponentiële en triviale, vinden we nu

$$s(x) = a_1 \frac{e^{\mu_1 x} - e^{\mu_2 x}}{\mu_1 - \mu_2} \quad \text{en} \quad c(x) = \frac{1}{2}(e^{\mu_1 x} + e^{\mu_2 x}) + \frac{2a_1 b_1 - a_2}{2a_1^2} s(x)$$

Hierbij zijn μ_1 en μ_2 de wortels van de

$$\text{vierkantsvergelijking} \quad a_1 \mu^2 - a_2 \mu - (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

Ook hier is duidelijk dat door geschikte keuze van a_1 , b_1 en a_2 de klassieke functies sinus en cosinus weer te voorschijn komen.

5. Slotopmerkingen

Er is nog een tweetal analoge functionaal-

vergelijkingen voor de functies sinus en cosinus, nl.

$$s(x-y) = s(x)c(y) - s(y)c(x)$$

en de al in de inleiding genoemde

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$$

Deze kunnen eveneens op de hierboven beschreven

wijze behandeld worden, waarbij opgemerkt kan

worden dat uit $s(y-x) = -s(x-y)$, resp. $c(y-x) =$

$c(x-y)$ onmiddellijk volgt dat $s(x)$ oneven en $c(x)$

even is. Dit geeft al bij voorbaat informatie over de

coëfficiënten a_{2n} resp. b_{2n+1} . We laten dit verder aan de lezer over.

Tot slot nog de opmerking dat dit probleem in [2] op een andere manier wordt behandeld.

Noten

[1] J.C.H. Gerretsen: *De karakterisering van de goniometrische functies door middel van een functionaalvergelijking*; Euclides 16 (1936), p. 92-99

[2] J.G. van der Corput: *Goniometrische functies gekarakteriseerd door een functionaal betrekking*; Euclides 17 (1940), p.55-57

[3] A.G. van Asch, F. van der Blij: *Hoeken en hun maat*; CWI syllabus 29 (1992)

Over de auteurs

A.G. van Asch (e-mailadres: a.g.v.asch@tue.nl) is als universitair docent verbonden aan de Technische Universiteit Eindhoven, alwaar hij zich onder meer met de universitaire lerarenopleiding bezig houdt. Hij is tevens lid van de redactie van Euclides.

F. van der Blij was vanaf 1946 enige jaren leraar wiskunde in het voortgezet onderwijs. Daarna was hij als hoogleraar verbonden aan de Rijksuniversiteit Utrecht in welke functie hij ook betrokken was bij verschillende voorlopers van het huidige Freudenthal Instituut.

Vaas met genummerde balletjes

[Rob Bosch]

We stoppen 5 balletjes met daarop de getallen 0, 0, 1, 1 en 2 in een vaas. Vervolgens trekken we de balletjes een voor een uit de vaas. Een vraag voor de lezer: hoe groot is de kans dat de som van de getallen op de balletjes *tijdens* de trekking steeds kleiner is dan het aantal getrokken balletjes?

We berekenen de gevraagde kans op de volgende manier. Het totaal aantal mogelijke trekkingen uit de vaas is uiteraard gelijk aan $5! = 120$. De volgorden waarbij de som van de getallen steeds kleiner is dan het aantal getrokken balletjes, zijn: 00112, 00121, 00211, 01012, 01021 en 01102. Aangezien we in ieder van deze volgorden de twee balletjes met een 0 en de twee balletjes met een 1 kunnen verwisselen, geeft iedere volgorde $2! \cdot 2! = 4$ toegestane trekkingen. In het totaal dus $6 \cdot 4 = 24$ trekkingen. De gevraagde kans is derhalve $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

De lezer heeft de opgave waarschijnlijk niet al te moeilijk en wellicht ook weinig opwindend gevonden. Wel, het aardige van de opgave ontdekken we als nog zo'n sommetje maken.

We stoppen weer 5 balletjes in de vaas dit maal met de getallen 0, 0, 0, 2 en 2 op de balletjes. De volgorden die nu aan de eis voldoen zijn 00202 en 00022. De balletjes met een 0 en de balletjes met een 2 kunnen in deze volgorden weer verwisseld worden zodat er in dit geval $2 \cdot 2! \cdot 3! = 24$ toegestane trekkingen zijn.

De gevraagde kans is dus weer $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

De lezer kan eenvoudig nagaan dat ook de balletjes (0, 0, 0, 1, 3), (0, 0, 0, 0, 4) en (1, 1, 1, 1, 1) leiden tot een kans van $\frac{1}{5}$. We zien dat, zolang de som van de getallen op de balletjes gelijk is aan 4, de gevraagde kans gelijk is aan $\frac{1}{5}$.

De gevraagde kans is blijkbaar *onafhankelijk* van de verdeling van de getallen op de balletjes. De kans hangt slechts af van het aantal balletjes en de som van de getallen.

Door het aantal balletjes en de getallen op de balletjes te veranderen kan de lezer nagaan dat dit opmerkelijke resultaat algemeen geldt.

Indien een vaas gevuld is met n ballen met daarop de niet-negatieve gehele getallen $b_1, b_2, \dots, b_n$ met som $s \leq n$ dan is de kans dat tijdens een trekking zonder terugleggen de som van de getallen op de getrokken

ballen steeds kleiner is dan het aantal getrokken ballen gelijk aan $1 - \frac{s}{n}$.

We merken op dat als $s = n$ de kans gelijk is aan 0. Immers als we alle balletjes getrokken hebben, is de som van de getallen gelijk aan het aantal balletjes en derhalve voldoet geen enkele trekking. De formule geeft in dit geval inderdaad $1 - \frac{n}{n} = 0$.

De bovenstaande bewering kunnen we met volledige inductie naar het aantal ballen n bewijzen.

De formule is zeker waar als $n = 1$ zoals eenvoudig is na te gaan.

Stel nu dat de formule juist is voor n en voor alle $s \leq n$.

We nemen $n + 1$ ballen met getallen $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ en som $s \leq n + 1$. De formule is zeker juist als $s = n + 1$ zoals hierboven al is opgemerkt. We mogen derhalve aannemen dat $s \leq n$. De kans dat bal b_i als laatste wordt getrokken is gelijk aan $\frac{1}{n+1}$. Daar $s - b_i \leq n$ geldt op grond van de inductieveronderstelling dat de kans dat de volgorde van de eerste n ballen in deze trekking aan de eis voldoet, gelijk is aan $1 - \frac{s - b_i}{n}$. De kans dat een trekking eindigt met bal b_i en tevens aan de eis voldoet, is derhalve

$$\frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{s - b_i}{n} \right)$$

Sommatie over de b_i ($i = 1, \dots, n + 1$) als laatst getrokken bal geeft de gevraagde kans.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{s - b_i}{n} \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \left(1 - \frac{s - b_i}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{s - b_i}{n} = 1 - \frac{s}{n} + \frac{s}{n(n+1)} = 1 - \frac{s}{n+1}$$

Waaruit volgt dat de bewering ook juist is voor $n + 1$ ballen.

Literatuur

W.A. Whitworth: *Choice and Chance*, Cambridge, 1886

W. Feller: *An Introduction to Probability and its Applications*, John Wiley & Sons, 1974

Over de auteur

Rob Bosch (e-mail: r.bosch2@mindef.nl) is 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Zijn belangstelling gaat o.a. uit naar de sociale keuzetheorie op welk gebied hij aan de Katholieke Universiteit Brabant onderzoek verricht.

INTERVIEW MET DANIËLLE PEEREBOOM

Bijna alle leerlingen in het voortgezet onderwijs beschikken thuis over een goede computer. In 2000 was dit al 94% (zie bijvoorbeeld de ICT-onderwijsmonitor van 1999-2000 via www.ict-onderwijsmonitor.nl).

Daniëlle Peereboom, wiskundedocent aan het St. Michaël College te Zaandam, maakte hier gebruik van. Toen er een aantal wiskundelessen uitviel, liet ze leerlingen van 6-vwo thuis met behulp van internet het onderwerp integreren voorbereiden. [Henk Staal]



Wat was precies de huiswerkopdracht voor de leerlingen?

In de studiewijzer stond het volgende:

'7, 8 en 9 november zijn er geen lessen i.v.m. rapport-vergaderingen. Opdracht: Surf naar www.efa.nl/onderwijs/2000/java/integreren/index.html [1].

Hier vind je een website over integreren, waarop door middel van opgaven het begrip wordt uitgelegd. Werk deze opgaven door. Schrijf op wat je ontdekt en maak een samenvatting voor jezelf. Schrijf ook de antwoorden van de opgaven op, zodat later duidelijk is wat je van deze website hebt geleerd. Neem bij (internet)problemen contact op met je docent!

Hoe heb je dat huiswerk besproken?

De opdracht was aan twee 6-vwo klassen gegeven. (Door organisatorische problemen kon dit onderwerp pas nu aan de orde komen.) Voor de nabespreking van de opdracht hebben we de twee klassen in één groot lokaal ondergebracht. Daar had ik een beamer en

laptop klaarstaan. De website had ik op schijf mee. De hele website heb ik in vogelvlucht doorgenomen en problemen en onduidelijkheden besproken. De docent van de andere groep vulde mijn verhaal aan door nog eens op 't bord toelichting te geven.

Kon je nagaan of alle leerlingen de opdracht uitgevoerd hadden?

Binnen drie kwartier de website bespreken en controleren was onmogelijk. In de volgende les ben ik er wel op terug gekomen. De meeste leerlingen hadden de opdracht serieus uitgevoerd en notities gemaakt. Er waren ook leerlingen die de opdrachten gemaakt hadden maar niets hadden genoteerd. Ondanks het feit dat alle(!) leerlingen thuis een internetverbinding hebben, was het bij sommigen niet gelukt.

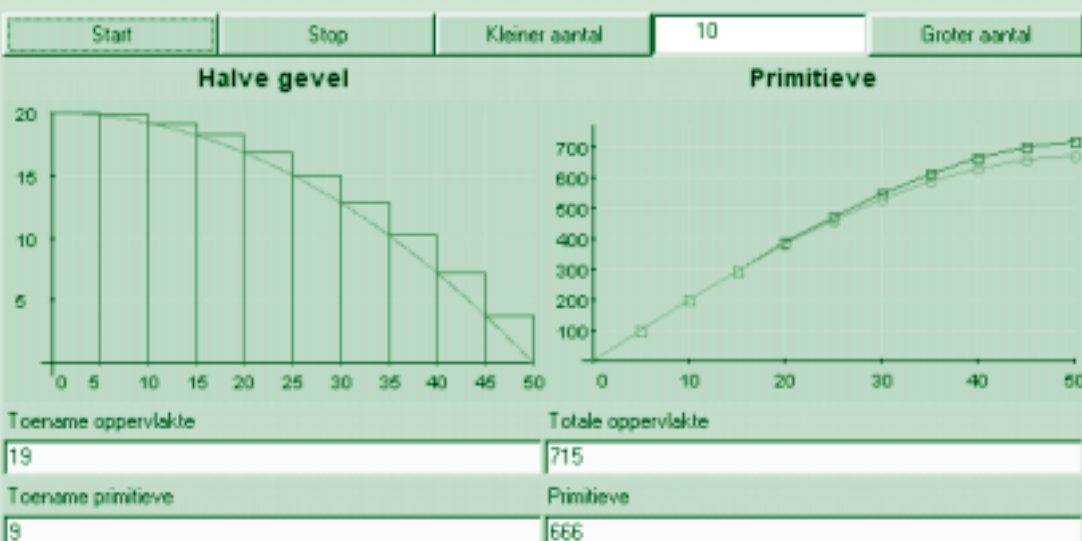
De website is gemaakt met de bedoeling leerlingen een eerste idee te geven van wat integreren is, zonder direct nieuwe technieken en symbolen te gebruiken. Ze zouden daarna meer gemotiveerd met het boek aan de slag kunnen. Is dat gelukt?

De leerlingen vonden het wel leuk om eens op een andere manier met een nieuw onderwerp geconfronteerd te worden. Er waren echter ook een aantal negatieve aspecten.

Het benaderen van de oppervlakte met behulp van rechthoekjes werd in de website erg uitgebreid gedaan. De uitleg waaróm 't werkte was voor veel leerlingen niet duidelijk. Leerlingen weten dat ze op het eind-examen aangewezen zijn op de rekenmachine en op de website wordt niet duidelijk hoe je die kunt gebruiken bij het berekenen van integralen. Met een eenvoudige uitleg van de docent had men sneller *to the point* kunnen komen: 'Integreren, hoe doe je dat?'



We gaan nu de benadering van de oppervlakte (in blauw) vergelijken met de grafiek van $F(x)$ (in rood).



Opgave 5.3

Verklaar waarom in het rechter plaatje in de animatie hierboven het verschil tussen de blauwe en rode grafiek toeneemt als x toeneemt.

Denk je dat je een volgende keer weer op dezelfde manier het onderwerp integreren gaat beginnen?

Nee. Waarschijnlijk zal ik wel delen van de website gebruiken om te laten zien hoe het benaderen van de oppervlakte onder een grafiek met rechthoekjes werkt. Daarnaast zal ik toch mijn eigen verhaal weer vertellen.

Door het overvolle programma moet je zo efficiënt mogelijk met de tijd omgaan. Ik zou het toejuichen als de website zo aangepast zou worden, dat het doorwerken twee à drie lessen tijds winst oplevert. Bijvoorbeeld door allerlei functies te primitiveren en verschillende soorten oppervlakten met behulp van integreren uit te rekenen.

Heb je meer ervaring met het gebruik van de computer bij wiskundelessen?

Ik maak vooral gebruik van de wiskundeprogramma's die bij de boeken geleverd worden. Een positieve uitschieter is Cabri, dat is echt een aanwinst. Ik gebruik Cabri heel vaak bij wiskunde B12. Cabri is zeer effectief bij het onderzoeken van meetkundige eigenschappen. Het leent zich ook uitstekend voor demonstratie en introductie van een nieuw onderwerp. Daarbij maak ik veel gebruik van een beamer. Bij andere programma's liggen de voordelen minder voor het oprapen. VU-Stat en VU-Dif gebruik ik wel eens. Ik sta in principe positief tegenover het gebruik van de computer, maar ik ben heel druk geweest met het opzetten van het vernieuwde programma in de Tweede fase en heb daardoor niet veel tijd gehad om verder te zoeken naar geschikte software.

Is er bij het invoeren van de Tweede fase veel veranderd voor het wiskundeonderwijs in de bovenbouw havo en vwo? Wat vind je van die veranderingen?

Ik heb vooral ervaring met wiskunde B1 en B12 op het vwo. De leerlingen die alleen wiskunde B1 volgen hebben vaak moeite het tempo bij te houden. Uitstel is niet mogelijk omdat de stof anders niet afkomt. Dit levert een enorme werkdruk op, zowel voor de leerlingen als voor de docent.

Het invoeren van de grafische rekenmachine vind ik heel goed en ook heel leuk. Het betekent dat je op sommige onderwerpen dieper in kunt gaan. Je kunt bijvoorbeeld werken met hellinggrafieken op de grafische rekenmachine als leerlingen de afgeleide functie nog niet gehad hebben. Dat is een goede voorbereiding op het onderwerp differentiëren en leidt tot een beter begrip bij leerlingen. Het is vaak wel aftasten wat je nog wel en niet aan moet leren. Het eerste jaar heb ik daarom eigenlijk heel veel dingen dubbel aangeleerd, zowel handmatig als met de grafische rekenmachine.

Het invoeren van de praktische opdrachten en zebra-blokken vind ik een enorme verrijking van ons vak. Leerlingen ontdekken nu veel vaker dat wiskunde veel leuke kanten heeft. Zij kunnen zich door de praktische opdrachten verdiepen in onderwerpen die hen aanspreken. Ze raken vaak heel enthousiast en besteden veel tijd aan de opdracht. Het zebra-blok sluit ik af met

presentaties. Leerlingen vinden dit meestal moeilijk en spannend, maar het blijkt enorm leuk te zijn om aan je klasgenoten te kunnen laten zien wat je geleerd hebt.

Zou je het toestaan van het gebruik van een symbolische rekenmachine bij de wiskundelessen en de eindexamens toejuichen?

Nee. Ik vind dat ze basisvaardigheden moeten beheersen om inzicht te krijgen in moeilijker stof. Nu merk je al dat algebraïsche vaardigheden een stuk verminderd zijn in vergelijking met de 'oude lichting'.

Verwacht je dat computeralgebrapakketten (zoals Maple en Studyworks) een rol gaan spelen bij het wiskundeonderwijs in de bovenbouw van havo en vwo?

Ik denk dat Maple niet gebruiksvriendelijk genoeg is om middelbareschoolleerlingen te stimuleren dit regelmatig te gebruiken. Als afsluiting van het zebra-blok hebben vorig jaar twee leerlingen een workshop Maple voorbereid. Dit was een groot succes, maar daarna werd Maple toch nauwelijks door de leerlingen gebruikt. Ik denk toch dat het vooral voor vervolgoedingen geschikt is. Studyworks ken ik niet.

Alweer enthousiasme over het zebra-blok.

Ja, als leerlingen presentaties voorbereiden en uitvoeren, leer je ze van een andere kant kennen. Ze blijken vaak heel vindingrijk te zijn en doen ontzettend hun best om er iets moois van te maken. Ze slepen met beamers, computers, laptops, overhead-projectoren en, niet te vergeten, krijt, werkbladen en viltstiften. Het materiaal met achtergrondinformatie om aan medeleerlingen uit te delen ziet er vaak prachtig uit.

De presentaties worden gehouden op extra middagen buiten de gewone lessen want die kan ik niet missen. Als het programma niet zo overladen zou zijn, zou het allemaal wat gemakkelijker gaan. Maar het is het allemaal waard: leerlingen iets laten presenteren is ontzettend leuk en leerzaam; ik kan het iedereen aanraden!

Noot

[1] De website 'Integreren' is nog steeds te vinden op: www.efa.nl/onderwijs/2000/java/integreren/index.html (in dit adres uitsluitend kleine letters gebruiken).

De website is gemaakt door Gertjan Laan en Henk Staal en wordt nog verbeterd. Gebruik van de knop 'Vernieuwen' in de browser is bij gebruik af en toe nodig.

In deze website zijn ook links opgenomen naar andere sites over integreren en differentiëren.

Opmerkingen per e-mail zijn welkom: G.J.M.Laan@efa.nl, H.J.P.Staal@efa.nl

Over de auteur

Henk Staal (e-mailadres: H.J.P.Staal@efa.nl) werkt bij het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum en bij de Educatieve Faculteit Amsterdam. Hij is onder andere bezig met het ontwikkelen van digitaal lesmateriaal voor wiskunde.

1329.¹⁾ Van het viervlak ABCD is gegeven: $AB = AC = p$, $AD = BC = p\sqrt{2}$, $\angle DAB = \angle DAC < 90^\circ$; de hoek van AD en het vlak ABC is α ; de projectie van B op AD is E.

- a. Bewijs: $BC \perp AD$. Druk de oppervlakte van de driehoek BCE uit in p en α .
- b. Bereken α , als het viervlak een omgeschreven kegel³⁾ heeft met top D.
- c. Bepaal de verzameling van het zwaartepunt Z van $\triangle BCE$ bij veranderlijke α .

1330.¹⁾ In het viervlak ABCD staat AD loodrecht op het vlak van de gelijkzijdige driehoek ABC; P is het midden van AB, Q dat van AC. De bol door A, P, Q en D snijdt BD in S en CD in R.

- a. Bewijs: $PQ \parallel RS$. Bewijs, dat AD, PS en QR door één punt gaan.
- b. Bewijs: $CS \perp BD$.
- c. Bewijs, dat de cirkels BPS en CQR op één bol liggen. Construeer het middelpunt van die bol.

1331.¹⁾ a. Bereken zonder x te bepalen: $9 \operatorname{tg} x + 16 \operatorname{tg}^{1/2} x$, als $\cos x = 3/5$ is.

- b. Los op: $4 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x = 4 \cos^2 x - 1$.
- c. Los op: $\sqrt{2 \cos x + 1} < \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

1333.¹⁾ F is het brandpunt van de parabool $y^2 = 2px$, P een punt van de richtlijn.

- a. Bewijs, dat de poollijn l van P t.o. van de parabool door F gaat.
- b. Bewijs: $PF \perp l$.
- c. N is het midden van de koorde, waarvan l de drager is. Stel de vergelijking op van de verzameling van N bij veranderlijke P.

1334.¹⁾ a. Bewijs, dat de normalen van de hyperbool $xy = 1$ een positieve richtingscoëfficiënt hebben.

- b. Twee onderling loodrechte lijnen, die elkaar in een punt P van de hyperbool snijden, hebben de van P verschillende punten Q en R met de hyperbool gemeen. Bewijs, dat QR evenwijdig is met de normaal in P.

¹⁾ Afkomstig van het H.B.S.-B-examen 1962

Vraagstukken uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 50 (1962-1963)

Boekbespreking / Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde

Auteurs: Karel Thaelts, Hilde Eggermont, Dirk Janssens

Uitgever: Wolters Plantyn, Deurne (2001) isbn 90 3017 1855 (Cahiers voor Didactiek 12)

Prijs € 16,11 [Hans Sterk]

Omdat het Nederlandse onderwijs zo aan het veranderen is, zou het je gemakkelijk ontgaan dat de rest van de wereld evenmin stil zit. Het boek 'Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde', nummer 12 uit de reeks Cahiers voor Didactiek van de Katholieke Universiteit Leuven, is verschenen naar aanleiding van de (vanaf 1997) in gang gezette implementatie van nieuw ruimtemeetkunde-onderwijs bij onze Vlaamse zuiderburen. Dat maakt nieuwsgierig omdat ze enerzijds dicht bij ons staan, maar anderzijds natuurlijk hun eigen weg gaan.

De kern van de veranderingen betreft een verschuiving van een structuralistische visie (waarbij de nadruk ligt op wiskunde als gestructureerde discipline) naar een meer constructivistische (waarbij leerlingen zelf ontdekken, zelf de wiskunde 'construeren') en realistische leerplanopbouw. Dat is verwant met veranderingen in Nederland en de verbondenheid gaat verder aangezien de auteurs hun beschouwingen ruimschoots voorzien van verwijzingen naar bijvoorbeeld de Van Hiele-theorie en het werk vanuit het Freudenthal Instituut. Ook bij de subparagraaf 'Eindtermen in andere landen' heeft men goed naar Nederland gekeken: 'andere landen' blijkt toch voornamelijk Nederland te zijn. Ter geruststelling, voor de citaten waarmee de twee delen en de appendix (over ruimtefiguren tekenen) in het boek beginnen, heeft men over andere grenzen gekeken. Wat is er nu Vlaams aan? Eerst maar even kijken wat de auteurs in dit cahier aanpakken.

De nieuwe ruimtemeetkunde begint in de basisschool en wordt vervolgd in het secundair onderwijs, tot en met de tweede graad (zeg maar middenbouw) voor alle leerlingen, en tot en met de derde graad (bovenbouw) voor sommige leerlingen. Implementatie is gaande. In de eerste graad (onderbouw) wil men leerlingen een goede oriëntatie in de ruimte laten ontwikkelen, in de tweede graad indringender laten kennismaken met begrippen als kruisende rechten, afstanden en het maken van adequate schetsen om redeneringen te ondersteunen. In de derde graad volgt de stap naar een hoger standpunt om ruimtelijke samenhangen te leren overzien en worden ook analytische middelen in stelling gebracht. Als gezegd verlaat men het klassieke pad van de 'strengte en algemene theorie' en kiest men als vertrekpunt problemen gericht op de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht. De auteurs illustreren deze aanpak aan de hand van vier probleemcontexten:

- schaduw,
- een kubus verzagen,
- kruisende rechten,
- een piramide en een tetraëder.

Die vier contexten beslaan de tweede helft van het boek.

De eerste helft is het deel 'Achtergronden' waarin de auteurs, kort gezegd, beargumenteren dat bij het meetkunde-onderwijs niet zo zeer de wiskundige benaderingswijze van de meetkunde centraal dient te staan, maar eerder 'een rode draad van een cognitieve opbouw', geïnspireerd door de Van Hiele-theorie. De strekking van dit deel is ook pakkend verwoord in het opgenomen citaat van David Tall waarin hij het begrip 'cognitive root' (concept waarbij men een aanpak kiest met concepten die zowel vertrouwd zijn bij leerlingen als een basis vormen voor latere wiskundige ontwikkeling) introduceert en afzet tegen wiskundig fundament.

Nu kijk ik even met mijn Nederlandse bril op, dus misschien door vooroordelen gekleurd. Ik denk bij Vlaams onderwijs al gauw aan traditioneel en degelijk. Sommige opgaven zijn inderdaad best pittig en de contexten liggen dicht tegen het theoretische aan. Je denkt aan regeltjes en voorschriften, en jawel, er zijn duidelijk aanwezige algoritmen voor het tekenen van schaduwpunten en het construeren van snijlijnen bij het verzagen van een kubus; soms lijken de auteurs zich wel erg op het tekenen te concentreren. Het zelf (her)ontdekken speelt geen centrale rol. Ik denk bij Vlaams onderwijs aan hiërarchie, aan de docent die zijn onaantastbaar gelijk verkondigt aan luisterende leerlingen. Maar sommige aanwijzingen doorbreken dit beeld, zoals 'Een leerling mag niet gestraft worden voor het gebruik van een persoonlijke niet-wiskundige taal bij het verwoorden van zijn redenering' en 'Het is interessant om de foute oplossingen van de leerlingen te behandelen door hen te laten zoeken naar de argumentatie waarom de vorm fout is. Immers, ook bij dit argumenteren zal er meetkundig moeten geredeneerd worden'. Mogelijke interactie tussen leerlingen onderling of tussen leerkracht en leerlingen komt slechts summier aan bod.

Voor wie de verschillen eens wil proeven, is het zeker de moeite waard het boek te bekijken. Wel moet ik opmerken dat de status van het boek me niet helemaal duidelijk is: is het bedoeld om (toekomstige) auteurs van onderwijsmateriaal een kader te bieden? Is het bedoeld om de discussie in Vlaanderen te stimuleren? Het boek is dan ook niet geschreven voor buitenstaanders die het Vlaamse onderwijssysteem nauwelijks kennen.

Over de recensent

Hans Sterk (e-mailadres: sterk@win.tue.nl) is docent bij de opleiding Technische Wiskunde en bij de Technische Universitaire Lerarenopleiding van de Technische Universiteit Eindhoven.

Boekbespreking / De interessantste bewijzen voor de stelling van Pythagoras

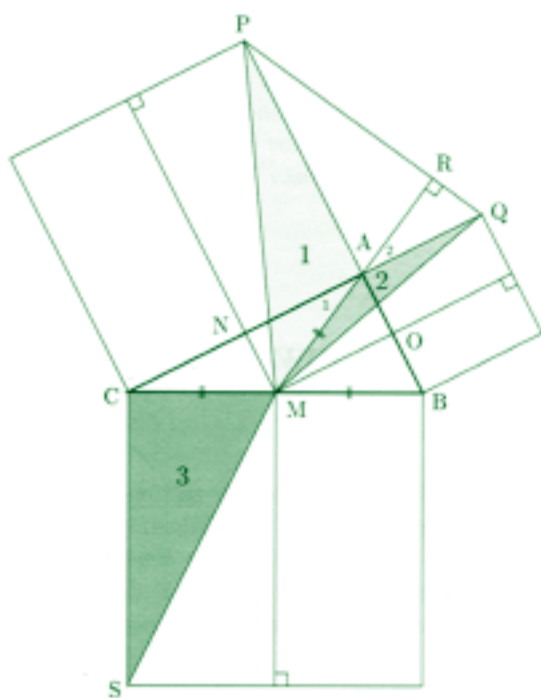
Auteur: Bruno Ernst Uitgever: Epsilon Uitgaven,

Utrecht (deel 53) 96 bladzijden isbn 90 5041 067 7 Prijs € 12,50

[Dick Klingens]



FIGUUR 1



Bruno Ernst, pseudoniem voor J.A.F. de Rijk (1926), een van zijn zes pseudoniemen overigens (zie bijvoorbeeld Euclides 76-0, 2000, pp. 013-017) beschrijft 29 bewijzen voor de stelling van Pythagoras. Het zijn, althans volgens hem, de interessantste. Hij noemt het een persoonlijke keuze uit een aantal bronnen, waarvan de belangrijkste het werk van J. Versluys, *Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras* (1914), en dat van E. Loomis, *The Pythagorean Proposition* (1940), zijn. Bij zijn keuze 'speelde de eenvoud, het onverwachte en zelfs de fraaie figuur een rol.' Je kunt het daarmee eens zijn of niet, maar dat het een goed leesbaar, en ook inhoudelijk eenvoudig te volgen boek is geworden – zeker ook door de prettige verhaaltrant en duidelijke illustraties – is ontegenzeggelijk. Toch kwam bij eerste lezing een aantal keren de gedachte op *alle* bewijzen van Versluys en de door Ernst als *oninteressant* gekwalificeerde in de verzameling van Loomis er naast te leggen. In hoofdstuk 2 staat het eerste bewijs, 'Mijn schoolbewijs', dat gebaseerd is op de drie gelijkvormige driehoeken die ontstaan in een rechthoekige driehoek door de hoogtelijn op de hypotenusa te trekken. Interessant? Het is 'kort en bondig, maar voor een leerling van 12 jaar toch wat raadselachtig', zeker omdat het resultaat echt aan het eind pas te voorschijn komt. Natuurlijk behandelt Ernst (in hoofdstuk 3) ook het bewijs zoals dat staat in Euclides' Elementen (propositie 47) uitvoerig. Interessant hierbij vind ik zelf, dat Ernst het als aanleiding ziet om naar bewijzen te kijken waarmee het met minder (en geraffineerde) hulplijnen kan. Natuurlijk komt ook een aantal legpuzzel-bewijzen (mozaïek-bewijzen) aan de orde, zoals het bewijs van Multatuli en Ernst citeert hem met: 'Ik hoop dat iemand vragen zal, welk nut het heeft te zoeken naar eenvoudiger bewijzen voor 'n bekende waarheid? Dit streven leidt tot helderheid van opvatting, en gewent ons aan duidelijke voorstelling'. Geef dit laatste maar eens als antwoord aan een leerling die vraagt naar het nut van de wiskunde. In het boek komen – het kan haast niet anders – ook bewijzen voor waarover Ernst al elders publiceerde, o.a. in *Pythagoras*, wiskundetijdschrift voor jongeren – recentelijk nog – en in *Arthesis*, het periodiek van de Stichting Ars et Mathesis, waarvan De Rijk bestuurslid is. In dit verband noem ik 'Het eigenwijze bewijs van Ann' (in hoofdstuk 18, en gevonden door Ann Condit – in 1938 was ze 16 jaar); een bewijs dat niet eenvoudig is, maar wel onverwacht (zie figuur 1). Het is gebaseerd op de uit M, het midden van de schuine

zijde, getrokken loodlijnen op de tegenoverliggende zijden van de vierkanten.

In de laatste hoofdstukken (19 t/m 21) wordt de le(e)s-stof wat moeilijker: er staan bewijzen gebaseerd o.a. op de stelling van Pappos en op de machtstelling. Bij die laatste ook een bewijs waarvan Ernst hoopt dat hij de *vinder* is – ‘en het is echt geen desillusie als blijkt, dat het bewijs al lang, zelfs heel lang geleden, gevonden is’ (zie [figuur 2](#)).

Tot slot een drietal opmerkingen.

1. Natuurlijk, het is Ernsts (vijf medeklinkers achter elkaar) keuze. Maar ik had eigenlijk verwacht dat, als het om ‘eenvoudig’ gaat, het ‘kijkbewijs’ van [figuur 3](#) zeker ook in het boek zou zijn vermeld (mijn vindplaats: College Mathematics Journal (1996), vol. 27, no. 5, p. 409).

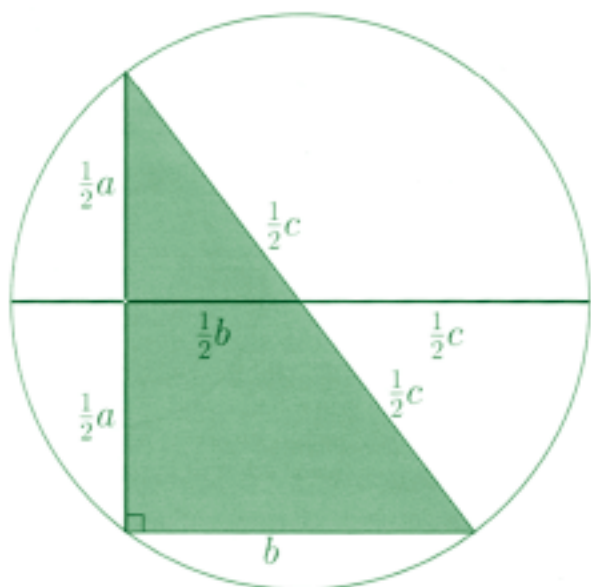
2. Jammer is dat in het boek een naamregister ontbreekt – ik telde al snel een kleine 40 namen. Ook een vermelding van de geraadpleegde literatuur (achter in het boek en niet binnen de tekst) zou voor menig lezer (zie in dit verband punt 3) handig zijn.

3. Hoewel op het internet een macht aan informatie over Pythagoras en ‘zijn’ stelling te vinden is, ben ik zeker van mening dat het boekje op elke school te raadplegen moet zijn (c.q. door leerlingen mee te nemen *en* terug te brengen). Het kan een aanzet zijn voor praktische opdrachten en profielwerkstukken.

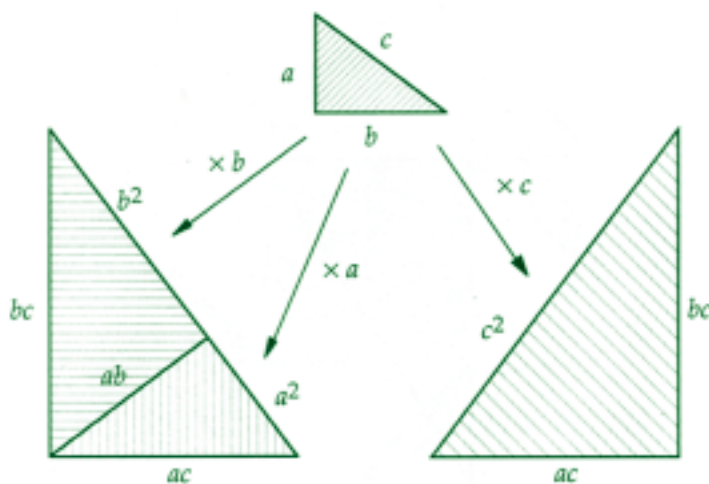
Over de recensent

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) is als leraar wiskunde verbonden aan het Krimpenerwaard College in Krimpen aan den IJssel. Hij is ook eindredacteur van *Euclides*.

FIGUUR 2



FIGUUR 3



Boekbespreking / Over sneeuwkrystallen en zebrastrepen

Auteur: Ian Stewart Uitgevers: Uniepers Abcoude isbn 90 6825 272 0, Davidsfonds Leuven

isbn 90 5826 159 X, Natuur en Techniek 223 bladzijden Prijs: € 29,50

[Chris van der Heijden]



Ian Stewart werd in 1997 uitgenodigd, de BBC Christmas Lectures te geven. Een dergelijke uitnodiging valt alleen die wetenschappers ten deel die naast een hoog wetenschappelijk peil het vermogen bezitten moeilijke onderwerpen eenvoudig voor het voetlicht te brengen, zeg op het niveau van een 12-jarige scholier. Slechts één wiskundige was Ian Stewart in deze serie lectures voorgegaan. Dit tekent de didactische en wetenschappelijke kwaliteiten van Ian Stewart.

In zijn boek 'What Shape is a Snowflake', in het Nederlands vertaald door 'Over sneeuwkrystallen en zebrastrepen', toont de auteur zijn eruditie en didactisch vermogen om op enthousiaste wijze de verborgen wiskundige patronen in de ons omringende natuur te laten zien. Veel takken van wetenschap komen aan de orde: biologie, kosmologie, natuurkunde, kristallografie, meteorologie, muziekleer. Als leidmotief van het boek wordt telkens teruggegrepen op het ontstaan van een sneeuwvlok. In de complexe ontstaanswijze hiervan spelen bifurcatie, symmetrie en symmetriebreking, chaos en fractalvorming, stuk voor stuk wiskundige begrippen, een belangrijke rol. Symmetrie zien we in zeesterren, het bewegingspatroon van een duizendpoot, de voetstappen van een paard, de rangschikking van de atomen in een kristalrooster. De ribbels in een zandwoestijn, de strepen van een zebra en de ogen op een pauwenstaart kunnen verklaard worden door symmetriebreking. Op sommige schelpen zien we duidelijk een Sierpinski-fractal. Kleine oorzaken hebben soms grote gevolgen. Het weer voorspellen blijft moeilijk omdat kleine verschillen in de uitgangssituatie op langere termijn leiden tot gedetermineerde chaos in de berekening. Ook al zijn we niet in staat om de planeetbanen van meer dan twee planeten exact uit te rekenen, toch kunnen we gerust zijn dat ons zonnestelsel de komende jaren min of meer stabiel is. Ian Stewart laat ons zien dat er - voor wie er oog voor heeft - veel patronen in de ons omringende natuur te ontdekken zijn.

Willen we echter meer te weten komen van de wiskundige achtergronden, dan is verdere studie nodig, want de wiskundige details worden slechts oppervlakkig aangestipt, of zoals de schrijver in zijn voorwoord zegt: '... alleen wiskundigen hoeven de bloederige details te weten, dus ik kan ze daar laten.' Voor een meer wiskundig geschoolde lezer valt het boek daarom wat tegen. De paragrafen over tegelpatronen, b.v. de Penrose-betegeling, en over niet-euclidische meetkunde gaan iets dieper. Dit boek lijkt daarom bedoeld om belangstelling voor wiskunde te wekken en vooral om te laten zien dat wiskunde niet saai is maar essentieel voor de wereld waarin wij leven.

Een enkele kritische kanttekening is op zijn plaats. Omdat het boek een populariserend wetenschappelijk karakter heeft, ligt een gedegen literatuurverwijzing niet voor de hand. Enkele titels ter verdere lezing staan achter in het boek. Beweringen kunnen niet direct geverifieerd worden. Wat is daarom het wetenschappelijk gehalte van (blz. 57): 'Recent onderzoek wijst erop dat vrouwen meer en heftigere orgasmen hebben als ze vrijen met mannen waarvan het gelaat vrijwel symmetrisch is'?

Ook op de beschrijving van de stemming van Pythagoras (blz. 120 en 121) valt wel wat af te dingen; de schrijver komt in de knoop met de verhoudingsgetallen die het verband tussen snaarlengte en toonhoogte aangeven en de rechte kwart wordt er tussen gefrommeld.

De vertaling laat hier en daar te wensen over. Selfsimilarity wordt vertaald met zelfgelijkenis. Bij veelvlakken wordt gesproken over toppunten en zijden. De termen zelfgelijkvormigheid, hoekpunten en ribben behoren kennelijk niet tot het wiskundig erfgoed van de vertalers. Een reden te meer om het wiskunde-onderwijs te stimuleren.

Dit boek kan hiertoe een bijdrage leveren en past daarom zeker in de schoolbibliotheek. De verzorging met mooie plaatjes is uitstekend.

Over de recensent

Chris van der Heijden (e-mailadres: chris-van-der-heijden@wxs.nl) begon in 1960 zijn loopbaan als werktuigbouwkundige in het bedrijfsleven. Van 1969 tot 2001 was hij wiskundedocent aan de CSG Blaise Pascal in Spijkenisse. De laatste 27 jaar was hij lid van de schoolleiding. Hij hoopt dat er meer mensen wiskunde gaan studeren. Het blad Euclides kan hieraan indirect misschien ook een bijdrage leveren.

FEITENVEL SOEDAN 1999-2000 WWF-PROJECT IN VOGELVLUCHT

[Hans Wisbrun / WereldwiskundeFonds]

Land	Soedan
Aanvrager	Anke Robertus (wordt hier geciteerd)
Projectjaar	1999-2000
Projectschool	Remedial English and Science Course Centre (RESCC), Khartoem
Sociale situatie	'Op alle fronten is de situatie in Zuid-Soedan al jaren dramatisch. Alles is verwoest door een jarenlange oorlog. Ook op het gebied van onderwijs is de stand van zaken bedroevend. Voor de oorlog, inmiddels 40 jaar geleden, waren er in de meeste dorpen scholen, waar men in de Engelse taal les gaf. Deze scholen functioneren al jaren niet meer, door gebrek aan stabiliteit, leerkrachten, gebouwen, lesmaterialen en alles wat er verder nodig is voor een school. Waar er nu nog wel onderwijs wordt gegeven, moet dat van de regering in het Arabisch gebeuren.'
Soort school	'Het RESCC biedt een aantal vluchtelingen uit Zuid-Soedan een kans om de afgebroken opleiding te voltooien. Het is de enige school in Khartoem voor en door Zuid-Soedanezen. De school is opgericht in 1992 en inmiddels uitgegroeid tot een volwaardige 3-jarige middelbare school opleiding. De school moet zich wel conformeren aan de regelgeving en houden aan het examenprogramma van de regering, maar kan verder het onderwijs naar eigen goeddunken invullen.'
Wiskundeonderwijs	'Wiskunde en andere vakken worden voornamelijk klassikaal in collegevorm gegeven. Er is ook weinig ruimte en apparatuur om het anders te doen. Onderwijs is dus noodgedwongen in het Arabisch, hetgeen grote problemen oplevert voor veel leerlingen. Huiswerk meegeven is vrij lastig, aangezien de meeste leerlingen niet over een eigen boek beschikken. Huiswerk maken is sowieso vrij lastig, omdat er in de kampen geen elektriciteit is, zodat er 's avonds niet gestudeerd kan worden en overdag is er weinig tijd over om aan de studie te besteden.'
Ondersteuning	fl. 8000,- voor boeken (in het Engels), rekenmachines en tekenmateriaal.

بسم الله الرحمن الرحيم
شركة شانكين للتجارة والاستثمار المحدودة
Shankeen Trading & Investment Co. Ltd.
Khartoum Tel. 73776
P. O. Box 33
الخرطوم - فون ٧٣٧٧٦
م.ب ٣٣ - الخرطوم

Nr 00210

التاريخ ٢٠٠٠/٥/٢٢

مدرسة الرشيد الثانوية

رقم	اسم	مادة	نمط	الدرجة
١٠٠٠	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠١	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠٢	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠٣	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠٤	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠٥	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠٦	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠٧	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠٨	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٠٩	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٠	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١١	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٢	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٣	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٤	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٥	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٦	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٧	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٨	الخير	الرياضيات	١	١٠٠
١٠١٩	المختار	الرياضيات	١	١٠٠
١٠٢٠	الخير	الرياضيات	١	١٠٠

المدرسة الرشيد الثانوية
الخرطوم

NYAKHOBI PRI. SCHOOL,
P.O. BOX 2,
FUNYULA.

24th September, 2001

Mrs Cecile Werner,
Waterbieskreek 44,
2353 JH Leidsdorpe,
THE NETHERLANDS.

Dear Madam,

IMPACTS RESULTING FROM THE CECIL'S MATHS PROJECT DONATIONS

Following the donation of the Mathematics project to this school, we have experienced changes such as:-

- Improvement in Maths results. This has been reflected in both the Mid-term and End-term tests for Stds 1 - 7 and the District mock for Std 8 in Term 2.

- There has been ease of teaching the subject as there are now enough copies of the Maths text books per pupil. This makes it easy for the assignments to be done at home or spare time.

- The teaching/learning aids e.g the Geometrical sets have generated interest both in pupils and teachers.

- Teachers are finding the work of teaching Maths enjoyable as application can be applied with easeness.

- Finally, we expect an improvement in Maths performance in the final national examination (K.C.P.E).

Thank you for offering us such opportunity. May the almighty God bless you.

Yours faithfully,

HEADMASTER
NYAKHOBI PRI. SCHOOL

Benard Rachiebo Achoka
HEADTEACHER

FEITENVEL KENIA 2000-2001 WWF-PROJECT IN VOGELVLUCHT

[Ger Limpens / WereldwiskundeFonds]



Land

Kenia, Oost-Afrika

Aanvrager

Cecile Werner (biologiedocent te Rotterdam)

Projectjaar

2000-2001

Projectschool

Nyakhobi Secondary en Primary School (gesitueerd nabij het Victoria Meer)

Soort school en onderwijssysteem

De school is een middelbare school (13/14 jaar tot 18/19 jaar), een plattelandsschool waar dagonderwijs wordt gegeven. Op de school wordt op vier niveaus gewerkt.

In Kenia is het onderwijs als volgt georganiseerd:

8 jaar primary school (basisonderwijs),

4 jaar secondary school (middelbare school),

4 jaar tertiair onderwijs: polytechnische school of universiteit.

Sociale situatie

Afhankelijk van de situatie van de ouders gaan kinderen naar school. Alles is een kwestie van geld: schoolfee en uniform. Soms kan maar één kind uit het (grote) gezin naar school. Het schoolgeld is ongeveer *f*l. 150,- per jaar en als je leraar bent verdien je ongeveer *f*l. 120,- per maand.

Leerlingen wonen gemiddeld op 1 à 1,5 uur loopafstand van de school. De achtergrond is i.h.a. heel eenvoudig; leerlingen helpen thuis ook op het land na de schooldag.

Ondersteuning

€ 3500,- voor boeken en leermiddelen



WISKIDS: VIERKANT WISKUNDECLUBS

De stichting Vierkant voor Wiskunde ontwikkelt materiaal en organiseert activiteiten voor kinderen, zoals zomerkampen en puzzelmarkten, met als doel te laten zien dat wiskunde leuk en uitdagend is. Als onderdeel van het landelijk initiatief WisKids werkte Vierkant aan het project Wiskundecclubs.

[Maurice Alberts en Wim Berkelmans]



Als 4 kippen in 4 dagen 4 eieren leggen, hoeveel eieren leggen dan 10 kippen in 10 dagen?



In de figuur zie je een rechthoekige cake getekend. Er zit ook een rechthoekig stuk slagroom opgespoten. Je moet de cake in twee gelijke stukken verdelen. Kan dit op een manier zodat beide stukken evenveel cake en evenveel slagroom hebben?



Drie kinderen (Arie, Bert en Cedric) krijgen snoepjes. Arie krijgt a snoepjes, Bert krijgt er b en Cedric krijgt er c . Er wordt hun gezegd dat $1/a + 1/b + 1/c = 1$.

Aan Arie worden nu twee vragen gesteld:

- 1) Weet jij hoeveel snoepjes jullie samen gekregen hebben?
- 2) Weet jij hoeveel snoepjes ieder van jullie gekregen heeft?

Arie antwoordt twee keer: 'Nee'.

Bert krijgt dezelfde vragen. Hij antwoordt respectievelijk 'Ja' en 'Nee'.

Cedric krijgt de twee vragen ook. Hij antwoordt twee keer 'Ja'.

Hoeveel snoepjes heeft ieder kind gekregen?



Doelen van WisKids zijn: enthousiasme voor wiskunde bevorderen bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, en belangstelling bevorderen voor de exacte vakken. WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO). Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO. Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door het ministerie van OC&W, de Stichting Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalekto.

Meer informatie: www.fi.uu.nl/wiskids of per e-mail: wiskids@fi.uu.nl

Inleiding

Regelmatig zijn er momenten waarop een wiskundedocent behoefte heeft aan materiaal voor recreatieve wiskundeactiviteiten. Te denken valt aan:

- een uur vervanging van een collega;
 - er is tijd over omdat het boek uit is, maar het jaar nog niet om;
 - een leuke opening van een lesuur;
 - een verrijkingscursus;
 - een lustrum waarbij ook de sectie wiskunde een bijdrage moet leveren;
 - een ladderwedstrijd die de sectie wil organiseren.
- Leerlingen vinden het leuk om met uitdagende puzzels bezig te zijn. Het bedenken van een opzet en het ontwikkelen of verzamelen van materiaal hiervoor kost docenten echter veel tijd. Daarom komt Vierkant met het volgende initiatief: een wiskundeclub via internet.

De wiskundeclub, toen en nu

De eerste generatie Vierkant-wiskundeclubs was actief tussen 1994 en 1998. De clubs bestonden uit leerlingen die na schooltijd, onder leiding van een enthousiaste leraar, wiskundige onderwerpen en puzzels aanpakten. Leerlingen en leraren deden dit met veel plezier en inzet, maar het bleek voor de docenten te tijdrovend om de clubs draaiende te houden. Met name het verzamelen en maken van het materiaal bracht te veel werk met zich mee. Desalniettemin is er nog altijd behoefte aan dit soort activiteiten. Vierkant heeft daarom de mogelijkheden van het internet aangegrepen om een 'wiskundeclub nieuwe stijl' op te zetten. In 2001 is het project 'Wiskundeclubs via internet' van start gegaan. Startkapitaal is de grote hoeveelheid materiaal op het gebied van de recreatieve wiskunde die Vierkant heeft.

Vierkant organiseert al een kleine tien jaar zomerkampen en puzzelmarkten. Voor de zomerkampen wordt jaarlijks een aantal zogenaamde 'onderzoeksprogramma's' geschreven, werkboekjes over uiteenlopende onderwerpen zoals magische vierkanten, veelvlakken, cryptografie en knopen. Op de kampen werken kinderen in groepjes en onder begeleiding aan deze werkboekjes. Een deel van de onderzoeksprogramma's is verder uitgewerkt en is na verloop van tijd als een 'doeboek' verschenen. Daarnaast zijn voor de kampen en puzzelmarkten tal van puzzels verzameld of bedacht. Veel van het materiaal dat is bijeengebracht, stellen we aan docenten beschikbaar via internet. Op de website van Vierkant is de verzameling onderzoeksprogramma's en puzzels eenvoudig te doorzoeken, waardoor het benodigde materiaal snel gevonden kan worden. Na één druk op de knop rolt het uit de printer en kunnen de leerlingen aan de slag.

De website

Op de website zijn naast onderzoeksprogramma's en puzzels ook puzzelgroepen te vinden. Een puzzelgroep is een kant en klare verzameling van puzzels over hetzelfde thema. Al het materiaal is opgeslagen in een database, waardoor het mogelijk is uit het materiaal

datgene wat gewenst is met verschillende criteria te selecteren en groeperen. Op dit moment is er keus uit meer dan 250 puzzels. Om puzzels te vinden kan op thema en/of niveau geselecteerd worden. Bovendien kan voor elke opgave het antwoord opgevraagd worden. Ook bieden we een groeiend aantal onderzoeksprogramma's aan; hiermee kunnen de leerlingen een wiskundig thema onderzoeken. We willen het aanbod uitbreiden met lessen op verschillende niveaus en over zeer diverse onderwerpen. De inbreng van docenten is hierbij zeer welkom. Op onze website geven we ook aan wat de mogelijkheden zijn met ons materiaal. Werken in groepjes (zoals op onze zomerkampen gebeurt) of in wedstrijdvorm zijn twee van de vele mogelijkheden.

Een van de grote krachten van internet is de mogelijkheid tot interactie. In dit geval betekent het dat je ons materiaal niet alleen kunt gebruiken, maar ook uitbreiden. Staat je favoriete puzzel niet in onze database of heb je een leuke les gemaakt, dan kun je die toevoegen. Het doel is een rijk gevulde database die voortdurend wordt uitgebreid met leuke wiskundige puzzels en lessen. Tevens is er een forum, waar je ideeën en nieuwe toepassingen van het materiaal bekend kunt maken.

De eerste ervaringen

In samenwerking met de Stichting Leerplanontwikkeling (SLO) hebben we het afgelopen schooljaar een pilot gedaan op enkele scholen. De reacties waren zonder uitzondering positief. Docenten en leerlingen waren te spreken over het materiaal. De leerlingen vonden het materiaal uitdagend en interessant. Onderzoeksprogramma's werden als leuke, nieuwe wiskunde bestempeld. Enkele leerlingen hebben, omdat het materiaal niet binnen de door de leraar beschikbaar gestelde tijd af was, het programma later zelf afgemaakt. Het sloeg zelfs zo goed aan, dat ze er na het project nog iets mee wilden doen in de vorm van een werkstuk. Bij de puzzels merken de leerlingen dat ze deze op een andere manier moeten oplossen dan de opdrachten die ze voor school maken. Dit prikkelt en enthousiasmeert hen.

Vierkant hoopt dat veel docenten gebruik zullen maken van de nieuwe wiskundeclub. Daarnaast hopen we natuurlijk op goede bijdragen van de docenten, waardoor de website een vitale en levendige club wordt.

Nieuwsgierig geworden?

Neem eens een kijkje op
www.vierkantvoorwiskunde.nl/wiskundeclubs

Over de auteurs

Maurice Alberts (e-mail: maurice@vierkantvoorwiskunde.nl) is wiskundestudent aan de Universiteit van Amsterdam en projectleider van het project Wiskundeclubs.

Wim Berkelmans (e-mail: wim@vierkantvoorwiskunde.nl) is directeur van de stichting Vierkant voor Wiskunde.

Verenigingsnieuws

Notulen van de Algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op

zaterdag 17 november 2001 in de Hogeschool Domstad, Utrecht

[Wim Kuipers]

Opening

De voorzitter Marian Kollenveld heet om tien uur de aanwezigen, waaronder een aantal Duitse gasten, hartelijk welkom.

Voor het eerst hebben we onze jaarvergadering op een andere locatie. De Domstad biedt ons een goede ruimte voor ontvangst, voor de markt en voor de plenaire vergadering. Wellicht zullen we hier de komende jaren onderdak kunnen krijgen voor onze jaarvergadering.

De voorzitter blikt in haar jaarrede terug op ons lustrumjaar en geeft aan dat het feest voorbij is. Het lijkt wel of er nu een nieuwe tijd is aangebroken. De veranderingen en vernieuwingen krijgen in de jaarrede volop aandacht (zie Euclides 77-4, pp. 214-217).

Met dankbaarheid constateert de voorzitter dat ook in het achterliggende jaar weer velen zich hebben ingezet om de kwaliteit van het wiskundeonderwijs te bevorderen.

Verslagen

De notulen van de jaarvergadering 2000 worden onveranderd vastgesteld. Niemand maakt gebruik van de gelegenheid om toelichting te vragen.

Het jaarverslag 1 augustus 2000-31 juli 2001 geeft geen reden voor nadere toelichting.

De penningmeester geeft enige toelichting op de financiële stukken. Hij stelt voor om de contributie voor het komende verenigingsjaar vast te stellen op € 36,50. De kosten zullen in de toekomst toenemen onder invloed van de inflatie en naar de mate van uitbreiding van activiteiten en detachering.

De kascommissie, bestaande uit de heren F.J. Appelman en

W.C. Schaafsma, heeft een positief rapport uitgebracht na controle van de boeken.

De voorzitter vraagt de vergadering om de penningmeester te dechargeeren. Met applaus wordt deze vraag positief beantwoord.

Bestuursverkiezing

De bestuursleden M. Lambriex-van der Heijden en J. Hop worden herbenoemd. Het bestuur kan nog geen voorstel doen ter vervulling van de vacatures. Het komende jaar zal gezocht worden naar geschikte kandidaten om op de volgende jaarvergadering te kunnen worden voorgesteld.

Rondvraag

- Vanuit de vergadering wordt aandacht gevraagd voor de ontwikkeling binnen het mbo. Het bestuur volgt de ontwikkelingen vooral als het gaat om de aansluiting mbo/hbo en vmbo/mbo.

- Er wordt gewezen op enige logistieke problemen met betrekking tot de lunch.

- Tenslotte deelt de voorzitter mee dat het bestuur nadenkt over de mogelijkheid om voor de regionale bijeenkomsten een wat andere vorm te kiezen aangezien het deelnemers aantal terug loopt.

Graag suggesties van de kant van de leden.

Studiedag

Het thema van deze dag is: Buiten je boekje. De workshops van deze dag bedoelen stimulerend te zijn voor het ontwikkelen van eigen activiteit en creativiteit. Er zijn naast de reguliere lesstof veel mogelijkheden om de wiskunde te stofferen op een voor leerlingen inspirerende wijze.

Twee inleiders verzorgen een plenaire lezing. Bert Zwaneveld refereert over 'Graven naar wiskundige kennis met behulp van kennisgraven' en Jan Essers spreekt over een aansluitingsproject VWO-WO.

**Het feest is voorbij.
Een nieuwe tijd is aangebroken**

Sluiting

De voorzitter kan precies op tijd de vergadering sluiten. De dag was weer een goede ontmoeting waarbij ervaringen werden uitgewisseld en materiaal voor de lespraktijk van elke dag werd aangereikt.

Verenigingsnieuws

Verslag van het verenigingsjaar

1 augustus 2001 - 31 juli 2002

[Wim Kuipers]

Bestuur

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld:

mevr. drs. M.P. Kollenveld (voorzitter),
W. Kuipers (secretaris), drs. S. Garst
(penningmeester).

Overige leden:

J. Hop, mevr. drs. M. Kamminga,
mevr. drs. M.A. Lambriex,
S.H. Schaafsma, mevr. drs. H.B. Verhage.

Algemeen

In dit verslagjaar heeft het onderwijs weer te maken gehad met nieuwe ontwikkelingen en reeds gaande ontwikkelingen. Het ministerie heeft opnieuw verlichtingen voor de Tweede fase afgekondigd. De basisvorming moet een eigen invulling krijgen nadat de inspectie en de Onderwijsraad hier het nodige over hebben gezegd. De leerwegen bereiden zich voor om in 2003 de eerste examens af te nemen. Voor de basisberoepsgerichte leerlingen zijn de eerste proefexamens aan de pilot-scholen bekend. Nog steeds is de oplossing voor onze vroegere A- en B-leerlingen niet bevredigend.

De aansluiting tussen mbo en hbo vraagt om meer duidelijkheid; en dit geldt eveneens voor de aansluiting van vmbo naar mbo.

De positie van wiskunde aan het hbo en de universiteiten staat voortdurend onder druk.

Voldoende aandachtsvelden waarin het bestuur heeft geparticipeerd door in diverse discussies zijn stem te laten horen.

Jaarvergadering

De studiedag droeg dit jaar als thema: Wiskunde buiten je boekje. In diverse workshops konden docenten kennismaken met een scala van mogelijkheden om hun lessen op een andere wijze vorm te geven. De opkomst geeft aan dat de studiedag in een behoefte voorziet.

Basisvorming

Zoals bekend is het ministerie van plan een nieuwe impuls te geven aan de basisvorming. Het bestuur heeft de gaande ontwikkelingen op dit punt nauwkeurig gevolgd en het ministerie gediend met een aantal opmerkingen met betrekking tot het advies van de Onderwijsraad op een beleidsreactie van het ministerie. Het bestuur acht een herijking van de doelstellingen van de basisvorming legitiem. De cruciale vraag is of alle leerlingen een gemeenschappelijk programma c.q. dezelfde vakken moeten volgen. De keuze voor een kerncurriculum en een differentieel curriculum zou mogelijk de ruimte voor keuzes voor leerlingen kunnen vergroten.

Het bestuur heeft het ministerie te kennen gegeven graag betrokken te willen worden bij het redigeren van een adequaat curriculum. Onze vertegenwoordiger binnen de Vakinhoudelijke Vereniging Voortgezet Onderwijs neemt deel aan de bezinning met betrekking tot de herformulering van het curriculum.

Het vernieuwen van de didactiek, gericht op het stimuleren van actieve leerprocessen, zal het denken dienen te bevorderen. Het bestuur zoekt in haar bezinning op wat goed wiskundeonderwijs dient te zijn aansluiting bij wat prof.dr. Anne van Streun, in zijn oratie 'Het denken bevorderen', naar voren heeft gebracht.

We zullen nauwkeurig blijven volgen welke wegen het ministerie inslaat als het gaat om de invulling van de eindtermen.

Vmbo

Na alle activiteiten rond de start van het vmbo lijkt de rust op de meeste scholen te zijn weergekeerd. In het jaar 2003 zullen de eerste examens worden afgenomen binnen de nieuwe leerwegen.

Het bestuur heeft in een brief aan het

ministerie zijn verontrusting uitgesproken over de wijze waarop leerwegondersteuning aandacht krijgt. Er is te weinig differentiatie voor de zwakke leerling in het examenprogramma. De vraag klemmt of deze leerlingen wel de wiskunde krijgen die ze echt nodig hebben. De stof is meestal niet betekenisvol voor deze leerlingen en sluit vaak niet aan bij hun beleavingswereld. Het is daarnaast te betreuren dat aan de mogelijkheid van sectorale inkleuring is voorbij gegaan. Met het ministerie zal een gesprek worden aangevraagd over een mogelijke flexibele vorm van examinering.

Het bestuur heeft de Beleidsgroep Kortlopend Onderzoek van de LPC gevraagd om onderzoek te doen naar de bestaande methoden in het vmbo in verband met authentiek leren (in de zin van uitgaan van betekenisvolle leertaken en actieve participatie van leerlingen).

De resultaten zullen na verschijnen van het rapport via Euclides de leden bereiken.

Havo/vwo

De verlichtingsmaatregelen hebben het bestuur zeer verbaasd, inhoudelijk en de wijze waarop dergelijke acties tot stand komen. Een en ander heeft veel onrust veroorzaakt onder docenten.

Het bestuur heeft in een schrijven het ministerie doen weten dat het op deze manier niet kan. Er is in het veld groot ongenoegen over de gang van zaken.

De maatregel is een medicijn voor de verkeerde kwaal en geeft geen oplossing. Docenten worden niet serieus genomen.

Het bestuur heeft het ministerie de onduidelijkheid van de beslissingen voor gehouden. Het valt niet meer uit te leggen. Het is jammer dat het ministerie geen gebruik maakt van de deskundigheid van wiskundedocenten.

ten en bestuursleden om tot verantwoord wiskundeonderwijs te komen. Het bestuur bereidt een reactie voor richting het ministerie met betrekking tot de profielen 2005. Het risico is aanwezig dat er een verdere uitholling van de bèta-vakken zal plaatsvinden.

In onze vraag naar voldoende contacttijd weet het bestuur zich tevens gesteund door wiskundigen in academische kring. Gemeenschappelijk hebben we een brief gestuurd aan het ministerie over deze zaak.

De havo/vwo werkgroep dient het bestuur met de resultaten van bezinning omtrent de meest actuele zaken binnen de Tweede fase. Hierbij gaat de aandacht in het bijzonder uit naar de algebra. De vraag blijft actueel wat een leerling in verband met de doorstroming aan algebra in zijn of haar bagage dient te hebben. Over de te gebruiken formulekaart heeft het bestuur met betrokkenen afspraken gemaakt.

Over de gevolgen van de invoering van de computeralgebra denkt de algebra-werkgroep na. Daarnaast is er een toetsenbank geproduceerd (deze is te vinden via de NVvW-website).

Het bestuur heeft de SLO gevraagd onderzoek te doen inzake de doorstroming havo/vwo naar hbo/universitair onderwijs letten op de wiskunde binnen de vier profielen. Helaas kon de SLO geen plaats vinden voor deze aanvraag binnen haar activiteiten.

Mbo/hbo

Het bestuur volgt met belangstelling de ontwikkeling binnen het vmbo/mbo voor wat betreft de aansluiting. De gedachte bestaat dat, juist als het gaat om vaardigheden, de leerlingen niet in alle opzichten adequaat zijn opgeleid. Het betreft dan zaken als zelfstandig werken en het kunnen problematiseren.

Het project WISNET-HBO, een project van de hogescholen Amsterdam en Leeuwarden samen met het Feendhath Instituut, beoogt integratie van het wiskundeonderwijs in curricula van technische opleidingen. Dit project is een initiatief van de Werkgroep-hbo van de Vereniging.

Het bestuur heeft het ministerie een schrijven doen toekomen waarin ze wijst op de groeiende kritiek op het toelatingsbeleid mbo/hbo, met name in de sector techniek.

Regionale bijeenkomsten

Ook dit jaar heeft het bestuur in drie plaatsen een regionale bijeenkomst willen organiseren. Helaas kon slechts in Leiden de bijeenkomst doorgang vinden. In Zwolle en Eindhoven waren te weinig deelnemers. Reeds in het vorige jaarverslag werd melding gemaakt van het feit dat het aantal deelnemers terug loopt. Regionale bijeenkomsten zijn een vorm van dienstverlening aan de docenten. Het bestuur heeft daarom dit verslagjaar de opzet enigszins gewijzigd door in het programma een moment van gesprek met de leden op te nemen en daarnaast de plenaire inleiding voor vmbo en havo/vwo te scheiden en het aantal werkgroepen te verminderen. Daarnaast is voor het aanmelden gebruik gemaakt van de website. Het een en ander heeft te weinig inspirerend gewerkt. Evaluatie na afloop doet het bestuur vermoeden dat de wijze van aanmelding geen succes is geweest. Daarnaast zijn we ons ervan bewust dat het bijwonen van regionale bijeenkomsten veel vraagt naast alle scholing en bijscholing en de werkdruk op school. Het bestuur zoekt naar een andere, effectievere manier om met de leden in gesprek te komen.

Euclides

Onder leiding van de nieuwe hoofdredacteur Marja Bos heeft ook dit

verslagjaar het vakblad een diversiteit aan artikelen opgeleverd, dit ter ondersteuning van de leden.

Het blijft de wens van het bestuur dat leden hun ervaringen beschikbaar stellen en kenbaar maken via ons vakblad, vanuit vmbo, mbo, havo/vwo en hbo.

Jan de Geus, Wim Knoester-Doeve en Jan Sinnema verlieten de redactie. Het bestuur is hen erkentelijk voor het werk dat ze binnen de redactie hebben verricht. Als nieuwe redactieleden werden welkom geheten: Klaske Blom, Elzeline de Lange en Jos Tolboom.

In een vergadering van een kernredactie en het bestuur is gesproken over o.a. de inhoud en vorm van het blad en de begroting.

Examenbesprekingen

De belangstelling voor deze bijeenkomsten rechtvaardigen een voortzetting in de toekomst.

Tot slot

Als we letten op de ontwikkelingen, blijft de vraag waar we met de wiskunde tenslotte uitkomen? Welke plaats zal het in de toekomst innemen in de diverse vormen van onderwijs? Het bestuur weet zich verantwoordelijk voor de belangen van het vak, voor de docent en de leerling. Het zal zich blijven inspannen om in overleg met leden en andere instanties te werken aan juiste plek voor het eigene van het vak. Het bestuur zal daarbij eveneens in samenspraak met de achterban een visie ontwikkelen die uitvoering in de praktijk van alle dag mogelijk maakt.

INHOUD VAN DE 77E JAARGANG 2001/2002

Bijdragen

Danny Beckers

- Wisconstighe Vermaecklykheden VI, het erfenisvraagstuk, 074
- De tritmetische lijn van P.J. Baudet, 136

Ingrid Berwald

Wiskunde in het vmbo, een werelds vak, 344

Hendrik Blauwendraat

Bijzondere mechanismen en bijna rechte lijnen, 144

F. van der Blij

Alweer sommen van kwadraten, 246

Bert Boon

Zwaartelijnen door één punt, 104

Petra Boon

Eindexamens vbo/mavo-C/D, eerste tijdvak 2001, 004

Petra Boon, Kees Lagerwaard, Ger Limpens,

Gerard Stroomer

Eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 2001, 008

Marja Bos

Ten duidelijkste!, 276

Rob Bosch

- Wiskunde met kleur:

Minstens zeven treffers, 062

Punktleuringen, 080

Ramseygetallen, 234

Decoratieve vazen, 266

Torentjes van damschijven, 310

De kleurenveelterm, 352

- Scholenprijs van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2002, 361

Fred Bosman, Jan van de Craats, Thijs Notenboom

- De Nederlandse Wiskunde Olympiade; achtergrond en organisatie, 320

- De Nederlandse Wiskunde Olympiade; eerste ronde 2002, 358

Jeanne Breeman, Hans van Lint

13 of 31?, 046

Jan van den Brink

Bottema ten tweeden male: Tweede fase op niveau, 204

Leon van den Broek

- Kangoeroe, 054

- Spiralen van driehoeken, 204

Harrie Broekman, m.m.v. Chris van der Heijden

De essentie van het leren van wiskunde... zonder inspirerende docent?, 042

N.G. de Bruijn

Herinneringen aan O. Bottema, 122

Evelien Bus, Claudia Vijftigschild

Wiskundeonderwijs wereldwijd en een gezellige tijd, 362

H.J.A. Duparc

Herinneringen aan Bottema, 120

Thomas van den Elsen

Mbo-wiskundedocenten met rug tegen de muur, 286

Jan de Geus

Verslag examenbesprekingen 2001, 020

Carel van de Giessen

Parameters in beeld, 302

Aad Goddijn

Tien punten op één cirkel, 150

A.W. Grootendorst

Mijn herinneringen aan Oene Bottema, 116

Iris Gulikers

De 17^e eeuwse landmeter in de klas, 338

Mascha Honsbeek

Ratio (WisKids), 244

Kees Hoogland
- Wederom wijzigingen Tweede Fase, 002
- Domeinen en subdomeinen in de
examenprogramma's wiskunde Tweede Fase, 049
- Rectificatie, Opnieuw Domeinen Tweede Fase, 081

M.C. van Hoorn
Bottema en Veldkamp, 128

Maarten Kam, Jan Blankespoor
De onderwijzende student, 282

Ton Kelfkens
In memoriam Dick Leujes, 041

Sieb Kemme
Het traphekje, werken met Cabri in de onderbouw, 156

Martin Kindt
Orthoptica, 172

Hans Klein
De eerste eindexamengroep vwo wiskunde B12, 026

Gert de Kleuver
- Impressies van de studiedag, 252
- Vakantiecursus 2001: experimentele wiskunde, 316
- Uitreiking Wiskunde Scholen Prijs 2002 (WisKids),
332

Dick Klingens
- Sangaku en inversie, 160
- Van achtpunts- via zespunts- naar negenpuntscirkel,
178

Wim Laaper
Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade,
tweede ronde 2001, 322

Floor van Lamoen
Napoleons driehoeken en Kiepers perspectors, 182

Ton Lecluse
Werkblad 'Snijpunt van twee lijnen op de GR', 280

Gerben van Lent
SofMat 99, 324

Peter Mulkerrin / Pauline Vos
Schuifbalken in Excel, 230

Jac Niessen
Wiskunde in Perspectief (WisKids), 290

Peter de Paepe
Duaal studeren bij wiskunde en statistiek, 248

Wim Pijls, Jos van der Slot
Kegelsneden snijden echt, 198

Hessel Pot
Verwarring rond functies en vormen, 050

Wim Schaafsma
Proces, 354

Lodewijk van Schalkwijk
Een raadselachtige rechte, 166

Lambrecht Spijkerboer
Wat is de quality class?, 365

Henk Staal
Perspectieven voor de wiskunde in het hbo, verslag
van de tweede conferentie, 056

Harrie Stal
Herinneringen aan mijn vriend prof.dr. O. Bottema, 126

Anne van Streun
- Twee schoolvoorbeelden van schoolmeetkunde, 194
- Hoe komen we tot inhoudelijke
onderwijsvernieuwing; oratiefragment, 262
- Leren denken als onderwijsdoel; oratiefragment, 312
- 't Denken bevorderen, deel 1: Heit en Kees, 348

Bram Theune
WisBase met toetsen online: een product van deze tijd,
088

A.K. van der Vegt
Sommen van kwadraten, 082

Heleen Verhage, Chris Zaal
WisKids van start, 038

Anders Vink
Sectorwerkstuk in het vmbo: veel te kiezen, veel te
doen!, 100

Frans Vriesendorp
Tekendriehoeken, 060

Peter van Wijk
ICT in het vmbo, 226

Paul Yiu
Over de lijnen van Fermat, 188

Chris Zaal
Pythagoras interactief (WisKids), 372

Bert Zwaneveld
Over de Verscheidenheden van prof.dr. O. Bottema, 112

-
Ook 40 jaar geleden; uit Euclides 37-5 (Wansink):
Bottema erelid van Wimecos, 143

-
Uit: De dienst der wiskunde, inaugurele rede Bottema, 177

Interviews

Hans Daale
Rekenen met een stortvloed aan woorden (Ton Coenen), 328

Victor Schmidt
'Afscheid' van Kees Hoogland, 098

Besprekingen (boeken en software)

Jan van de Craats
Wiskunde in Werking, deel 1 (M. De Gee), 159

Paul Drijvers
Wiskunde voor het hoger onderwijs d.m.v. Derive, deel 1 (Peter van der Velden), 318

Wim Kleijne
History in Mathematics Education, een bespreking (ed. John Fauvel en Jan van Maanen), 268

Harm Jan Smid
- Codes en geheimschriften in de vaderlandse geschiedenis (Karl de Leeuw), 236
- Propaganda voor wiskunde? (Mankiewicz) Het verhaal van de wiskunde), 374

Hans Sterk
Zebra 9, De veelzijdigheid van bollen (Martin Kindt, Peter Boon), 159

Jos Tolboom
- ORSTAT2000-vwo nader bekeken, deel 1, 092
- ORSTAT2000-vwo nader bekeken, deel 2, 366

Verschenen

L.E.J. Brouwer, een biografie (Dirk van Dalen), 159

Recreatie

Dick Klingens 069, 222, 240, 299, 378
Herman Ligtenberg 068, 106, 107, 221, 258, 298, 299, 335
Jan Verbakel 334, 379

40 jaar geleden

Martinus van Hoorn
031, 045, 086, 135, 233, 267, 311, 351

Aankondigingen

Tweede Conferentie 'ICT in het wiskundeonderwijs', 063
Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap, 085
Leerlingen gaan verspreiding euromunten meten, 220
Kangoeroe, 219
Nieuwe producten SLO-project 'ICT en wiskunde', 251
Studiereis 'Innovations in Polish maths education', 251
HKRWO-symposium 2002, 257
Lespakket Populatiodynamica, 309
ThinkQuest, 309
Het verhaal achter 'A beautiful mind', 319

Mededelingen

Korting 'History in Mathematics Education', 330
Vacature Freudenthal Instituut, 330
WisWeb-site vernieuwd!, 235

Van de redactie

Marja Bos
Van de redactietafel, 001, 037, 073, 109, 225, 261, 301, 337

Dick Klingens
Vooraf aan 'Een eeuw Bottema 1901-1992, een eeuw meetkunde!', 110

-
Inhoud van de 76^e jaargang 2000/2001, 070

-
Oproep lezersbijdragen over special
'Onderzoeksvaardigheden', 353

Servicepagina

036, 072, 108, 224, 260, 300, 336, 380

Verenigingsnieuws

Conny Gaykema en Grada Fokkens
Examenbesprekingen 2002, 295

Marian Kollenveld
- Jaarrede 2001, 214
- Van de bestuurstafel, 254, 294

Wim Kuipers
- Notulen van de Algemene vergadering van de NVvW op 18 november 2000, 064
- Verslag van het verenigingsjaar 2000/2001, 065
- Regionale bijeenkomsten, 256
- Enthousiaste bestuursleden gezocht, 296, 331

Marianne Lambriex, e.a.
- Jaarvergadering en studiedag 2001; thema 'Wiskunde buiten je boekje', 032
- Jaarvergadering/studiedag 2002, eerste uitnodiging, 376

Gerben van Lent
Persbericht Wereldwiskunde Fonds, aankondiging
WereldWiskundeWeb, 217

Heleen Verhage
- De Nationale Doorsnee; de resultaten, 217
- De Wiskunde Scholen Prijs 2002, 218

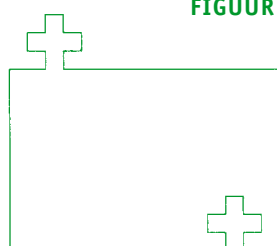
Puzzel 2 - Twee verdeelpuzzels

Er bestaan verschillende puzzels waarbij wordt gevraagd een of andere figuur te verdelen in gelijke of gelijkvormige stukken, eventueel nog met verdere restricties. Je kunt de volgende typen onderscheiden.

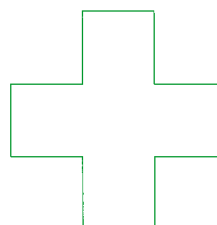
Wat betreft het aantal stukken: dat is meestal voorgeschreven. Je kunt je bij een bepaalde figuur ook afvragen: 'Voor welke waarden van n bestaat er een verdeling (bijvoorbeeld van type 3) in n stukken?' Vaak is voor heel wat waarden van n een verdeling aan te geven. Anderzijds is



FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3

Type 1. De stukken moeten gelijk zijn en bovendien gelijkvormig met de gegeven figuur. In **figuur 1** ziet u een paar klassieke voorbeelden. De opgave is steeds om de figuur in vieren te verdelen. In het Engels noemt men zo'n figuur een *reptile*. Een ander voorbeeld van een reptile is een A4-tje.

Type 2. De stukken moeten gelijkvormig zijn met de gegeven figuur; ze mogen in grootte verschillen. Iedere figuur van type 1 voldoet hier natuurlijk aan, maar er zijn ook andere. Een mooi voorbeeld is een schaakbord waaruit het veld c4 is weggelaten, te verdelen in twee stukken. Ook iedere rechthoekige driehoek is van type 2.

Type 3. De stukken moeten gelijk zijn. Er wordt niet verlangd dat ze gelijkvormig zijn met de gegeven figuur. De puzzels van **figuur 1** worden vaak op deze manier opgegeven. Daar is niets op tegen: als de eis van gelijkvormigheid er meteen bij staat, is het puzzeltje wellicht al te eenvoudig!

Type 4. De stukken moeten onderling gelijkvormig zijn. Wie lid is van de Nederlandse Kubusclub heeft in het laatste nummer van *Cubism For Fun* een artikel van Michael Reid kunnen lezen waarin een dertigtal puzzels van dit type wordt gegeven. Ze zijn vrij pittig!

het in het algemeen moeilijk te bewijzen dat een verdeling voor een bepaalde waarde van n niet mogelijk is. Soms lijkt de 'ondeelbaarheid' vanzelfsprekend, maar als je hebt gezien dat **figuur 2** in twee gelijke stukken kan worden verdeeld, word je wat voorzichtiger.

De twee opgaven voor deze keer zijn van type 3. De tweede is afkomstig van een Duitse collega, wiens naam ik pas bij de oplossing zal prijs geven.

Opgave 1. Verdeel een Grieks kruis (zie **figuur 3**) in 32 gelijke stukken.

Opgave 2. Verdeel een Grieks kruis in 25 stukken van de vorm P5, dat is de tweede vorm in **figuur 1**.

Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. De deadline is 14 november 2002.

Per oplossing worden maximaal 20 punten toegekend, afhankelijk van de volledigheid. Wie aan het eind van het cursusjaar het grootste puntenaantal heeft, ontvangt een boekenbon van € 35,00. Een tweede boekenbon van € 35,00 wordt verloot onder alle inzendingen. Veel succes!

De lezer was gewend – althans in de laatste jaargang van Euclides – op deze pagina de oplossing(en) van de puzzel(s) uit het vorige nummer te vinden.

De puzzelrubriek is echter nieuw leven ingeblazen, waardoor u de oplossing van puzzel 781 eerst in het decembernummer van Euclides (78-3) zult aantreffen.

Daarom laat de redactie u op deze pagina (mogelijk hernieuwd) kennismaken met enkele 'problemen' uit een van de boeken van Roger B. Nelsen, te weten *Proofs Without Words*, *Exercises in Visual Thinking* (MAA, Washington; isbn 0 88385 700 6).

Probleem 1

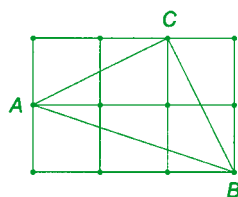
Bereken met behulp van **figuur 4**:

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

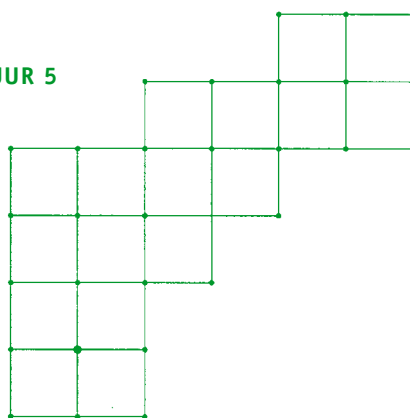
Probleem 2

Gebruik het rooster uit **figuur 5** om aan te tonen dat $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

FIGUUR 4



FIGUUR 5



N.B.

De oplossing van bovenstaande problemen behoeft *niet* te worden ingezonden. Ze behoren namelijk niet bij de 'laddercompetitie' van Frits Göbel.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundecdocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
3	12 december 2002	29 oktober 2002
4	23 januari 2003	3 december 2002
5	27 februari 2003	14 januari 2003
6	17 april 2003	4 maart 2003
7	26 mei 2003	1 april 2003
8	26 juni 2003	13 mei 2003

zaterdag 16 november 2002

Jaarvergadering/Studiedag, Nieuwegein
Organisatie NVvW
Zie p.037 in Euclides 78-1

woensdag 20 november 2002

Studiedag 'Verwondering en verbeelding'
Organisatie APS

donderdag 21 november 2002

Studiedag 'Wiskunde in de BB'
Organisatie APS

vrijdag 22 november 2002

WG Najaarssymposium, Nijmegen
Organisatie Wiskundig Genootschap

zaterdag 23 november 2002

Ars et Mathesis-dag, Baarn
Organisatie Stichting A&M

vrijdag 29 november 2002

Wiskunde A-lympiade, Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

woensdag 4 december 2002

Studiedag 'Applets in de wiskundeles'
Organisatie APS

woensdag 11 december 2002

Studiedag 'Maken van de website van de wiskundesectie'
Organisatie APS

dinsdag 17 december 2002

Lerarendag
Organisatie RuG

donderdag 9 januari 2003

1e Reehorstconferentie wiskunde
Organisatie APS
Zie ook p.041 in Euclides 78-1

zaterdag 11 januari 2003

Wintersymposium, Amersfoort
Organisatie Wiskundig Genootschap

vr. 31 januari en za. 1 februari 2003

Nationale Wiskunde Dagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 21 maart 2003

Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie Katholieke Universiteit Nijmegen

donderdag 24 april 2003

3e Conferentie ICT in de wiskundeles
Organisatie APS
Zie ook p.041 in Euclides 78-1

zaterdag 17 mei 2003

Symposium IX, Utrecht
Organisatie HKRWO

Voor internet-adressen zie de Agenda op de website van de NVvW:
www.nvww.nl/Agenda2.html

Publicaties van de

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* Zebra-boekjes

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen

* Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* Wisforta - wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* Honderd jaar Wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW.

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW
(<http://www.nvww.nl/lustrumboek2.html>).



MEER DAN
SOMMEN MAKEN,
OP WEG NAAR
ZELFSTANDIG LEREN!



PASCAL

WISKUNDE VOOR DE BASISVORMING, LEERWEGEN EN TWEEDE FASE

- ▶ De combinatie van informatieboek en werkschriften geeft zelfstandig leren structuur en houvast
- ▶ Het werkschrift van de leerling is leermiddel en naslagwerk, dus geen apart schrift meer nodig
- ▶ Verschillende routes door de stof mogelijk, u kunt kiezen uit drie typen opdrachten
- ▶ Bij elk informatieboek horen werkschriften op twee niveau's

meer info

www.pascal-online.nl _ pascal@thiememeulenhoff.nl _ (0575) 59 49 94

thiememeulenhoff

Aan de slag met de nieuwe Moderne wiskunde?

Nieuw!
Moderne
wiskunde 8



Bent u op zoek naar:

- uitdagende wiskunde?
- zinvolle ICT bij de lesstof?

vraag dan nu een
beoordelingsexemplaar
aan bij onze voorlichter
Sandra Kooijstra

Telefoon
(050) 522 63 11

Fax
(050) 522 62 55

E-mail
modernewiskunde@
wolters.nl

Internet
[www.modernewiskunde.
wolters.nl](http://www.modernewiskunde.wolters.nl)

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen



Wolters
Noordhoff