EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

juni
2002/nr.8
jaargang 77

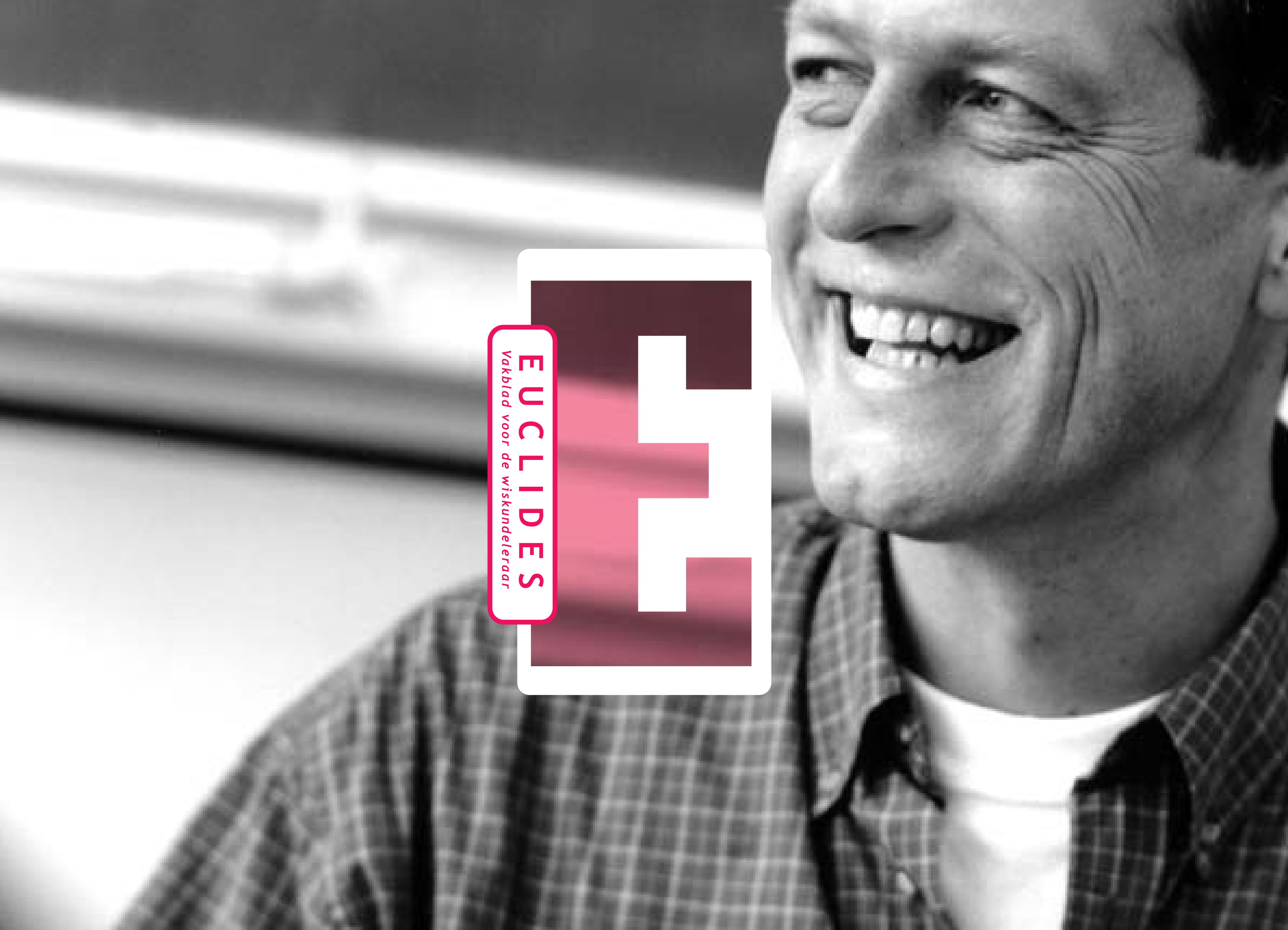
17E-EEUWSE LANDMETER IN DE KLAS

WISKUNDE IN HET VMBO

'T DENKEN BEVORDEREN

JAARVERGADERING

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per verenigingsjaar: € 36,50
Studentleden: € 18,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: € 38,50 per jaar.
Voor instituten en scholen: € 110,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 13,50. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

8

juni 2002 JAARGANG 77

INHOUD

Aan dit nummer werkten verder mee:
Peter Boonstra, Chris van der Heijden, Albert Ringeling en Jan Smit.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Vakantienummer

Bijna vakantie! Redt u het nog? Zoals bekend zijn al die vakanties in het onderwijs véél te lang (dat vindt uw buurman toch ook?). Dat betekent dus ongetwijfeld dat u niet wéét waar u met uw tijd heen moet. Gelukkig komt de redactie van Euclides aan dit probleem welwillend en invoelend tegemoet: hierbij presenteren we met veel plezier een extra dik ... vakantienummer! Een nummer om de verveling tijdens die lange saaie zomerweken tegen te gaan.

Veel ontspannende lectuur, met puzzeltjes en probleempjes:
- het nieuwe veelkleurige probleem van Rob Bosch,
- het intrigerende probleem van Heit en Kees in de nieuwe rubriek 't Denken bevorderen van Anne van Streun,
- in de rubriek 40 jaar geleden van Martinus van Hoorn enkele vraagstukken uit de Nederlandse Wiskunde Olympiade van 1962,
- maar ook een bespreking van de Eerste Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade van 2002,
- en tot slot twee historische puzzels uit de jaargang 1967/1968.

Méér leesvoer mee naar de camping? Lees eerst eens of het door Harm Jan Smid besproken boek misschien wat voor u is.

Mocht het onverhoopt regenen, kom dan in een zonnige stemming met de internationale ervaringen in zomers Italië van Evelien Bus en Claudia Vijftigschild.
Wilt u eerst afkicken van 'school', lees dan de persoonlijke impressies van Wim Schaafsma over de Grote Praktische Opdrachten in vmbo-3.

Hebt u zin en tijd, lees dan de oproep op pagina [...], duik met uw laptop de tuin in, onder de pruimenboom, en schrijf die bijdrage uit de grond van uw hart!
Of doe een leuk klusje voor het tijdschrift Pythagoras en help mee aan een online index; zie de bijdrage van Chris Zaal.
Of bereid u vast voor op het volgend cursusjaar:
- Denk mee met Ingrid Berwald over de manier waarop zij haar zwakke lwoo-leerlingen stimuleert.
- Verdiep u in het interessante lesmateriaal dat Iris Gulikers ontwierp om de geschiedenis van de wiskunde ook in uw lessen in te kunnen zetten.
- Lees de degelijke vervolgbespreking van het softwarepakket ORSTAT2000 door Jos Tolboom.
- Schrijf u vast in voor de jaarlijkse studiedag van de NVvW, zie pagina 376.
- En had u alle artikelen in het Bottema-nummer al gelezen? Nee? Neem dan ook nummer 4 van deze Euclides-jaargang mee!

Wees eerlijk: kunt u zich iets voorstellen dat méér ontspant dan een makkelijk stoeltje op die Franse camping, flesje wijn erbij, en Euclides op schoot? Nee toch zeker?

Ik wens u een fantastische zomer!

DE 17E-EEUWSE LANDMETER IN DE KLAS

Waarom zou je geschiedenis van de wiskunde in de klas gebruiken? Maar vooral: Hoe kun je geschiedenis van de wiskunde in de klas gebruiken? Deze laatste vraag staat hier centraal en wordt beantwoord aan de hand van een gedeelte van gebruikt lesmateriaal en ervaringen met een project dat onder andere is uitgevoerd in drie tweede klassen havo/vwo bij docent Wim Kuipers op het Greijdanus College in Zwolle.

[Iris Gulikers]

Waarom geschiedenis van de wiskunde in de klas?

De laatste decennia is er een groeiende interesse in de geschiedenis van de wiskunde te zien onder leraren [1]. In tijdschriften wordt veel over dit onderwerp geschreven. Diverse auteurs brengen een grote variëteit aan argumenten naar voren waarom geschiedenis van de wiskunde een plaats moet hebben in het wiskundeonderwijs. Ik heb een systematisch literatuuronderzoek gedaan naar literatuur hierover [2]. In dit onderzoek worden de argumenten beschreven binnen een theoretisch raamwerk. Niet alle argumenten die binnen dat raamwerk worden genoemd zijn van toepassing op dit lesmateriaal. De argumenten die dat wel zijn bespreek ik hieronder in het kort.

Een belangrijk argument is de motiverende werking van geschiedenis van de wiskunde. Lesmateriaal verrijkt met onderwerpen uit de geschiedenis doorbreekt de soms eentonige aard van de wiskundeles. Het vergroot de interesse van leerlingen in wiskunde door verrassende elementen die aan de orde komen. Leerlingen zien dat de ontwikkeling van de wiskunde een menselijke bezigheid is die nog steeds doorgaat, en historische toepassingen kunnen de rol die wiskunde in de maatschappij speelt verklaren. Deze extra motivatie kan vervolgens gebruikt worden om het leerproces te verbeteren. Leerlingen zullen de wiskunde beter begrijpen, doordat de geschiedenis meer inzicht biedt in de stof en de stof meer concreet maakt.

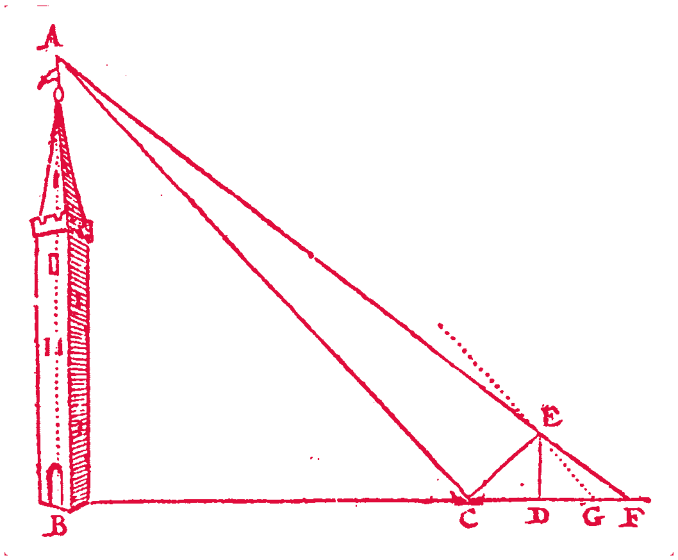
Wim Kuipers: ‘Vaak komen leerlingen met de opmerking dat ze niet begrijpen waar wiskunde voor zou kunnen dienen. Wat is er nu leuk aan en waarvoor kun je het gebruiken. Als docent heb je dan uiteraard voorbeelden voorhanden om hier het een en ander over te zeggen. In het boek zijn er contexten die je helpen. Maar toch, hoe maak je zichtbaar dat wiskunde ergens mee te maken heeft.’

Daarnaast biedt geschiedenis van de wiskunde mogelijkheden voor vakoverstijgende projecten, bijvoorbeeld met Nederlands of geschiedenis. Het leren lezen van oud-Nederlandse teksten en het combineren van wiskundig lesmateriaal met algemene geschiedenis van die tijd behoren tot de mogelijkheden.

Het lesmateriaal

Het wiskundig onderwerp van het in het project gebruikte lesmateriaal is gelijkvormigheid. Het vervangt het hoofdstuk over gelijkvormigheid uit *Moderne wiskunde* (2a havo/vwo, hoofdstuk 1) en *Getal en Ruimte* (3H1 en 3V1, hoofdstuk 2). Na een inleiding op het rekenen met gelijkvormigheid volgen de historisch getinte opdrachten. Daarin wordt gelijkvormigheid toegepast in de 17e-eeuwse landmeetkunde bij het berekenen van de hoogte van gebouwen en de breedte van rivieren. De leerlingen worden een aantal eeuwen mee terug genomen en verplaatsen zich in het leven en het werk van de landmeter. Aan de hand van oude wiskundige teksten en stukjes historische achtergrondinformatie oefenen de leerlingen het rekenen met gelijkvormigheid.

Wim Kuipers: ‘Het goede van het project moet je zoeken in de integratie van je boek en een stukje geschiedenis van de wiskunde. Het hoofdstuk over gelijkvormigheid direct gebruiken als inleiding op de praktische toepassing. Dat is grote winst. Je verliest niet aan tijd, terwijl je aan betekenis wint.’



Indien 't gheſicht gaet van't begin des rechtſtandighen dwarſ-ſtocx ; ghelijck dan het deel des dwarſtocx is tot het deel des Wyſers, zoo ſal zijn de ghegeven lengte tot de hoochte.

FIGUUR 1 Toren van Cardinael

FIGUUR 2 Regel Jacobsstaf

Hoogtemeting met een spiegel

De Amsterdamse rekenmeester Sybrandt Hansz. van Harlinghen, beter bekend als Cardinael, beschreef hoe je de hoogte van een toren met behulp van een spiegel kunt bepalen. Hij beschreef dat in zijn rond 1610 verschenen boekje *Hondert geometrische questien en hare solutien* [3]. Hij gebruikte daarbij figuur 1, waarbij in punt C de spiegel ligt. Dit probleem heeft geresulteerd in de volgende opgave voor leerlingen.

a Neem de tekening over in je werkschrift.
Het probleem is gemakkelijk als volgt op te lossen. Ga daar staan waar je de top van de toren in de spiegel ziet, in D dus. Meet je ooghoogte (DE) en de afstand van de spiegel tot jou (CD) en van de spiegel tot de toren (BC).
b Welke hoeken zijn aan elkaar gelijk?
c Welke driehoeken zijn gelijkvormig?
Stel $DE = 6$, $CD = 8$ en $BC = 136$, waarbij de afstand is gegeven in voeten.
d Bereken de hoogte van de toren.

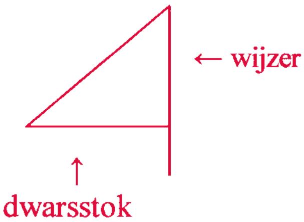
Extra
Je ziet in de tekening van Cardinael nog meer punten en lijnen getekend. Het probleem was namelijk dat de afstand BC door de landmeter niet opgemeten kon worden, bijvoorbeeld doordat er water of struiken tussen zaten. Toch is ook nu het probleem op te lossen met behulp van de spiegel.
De oplossing wordt dan een stuk lastiger en wij gaan daar in dit lesmateriaal niet verder op in. Als je je nog wel in dit probleem wilt verdiepen, kun je je docent om extra informatie vragen. Je kunt dan het probleem in oud-Nederlands bekijken en proberen te begrijpen. Daarna kun je nog aanwijzingen krijgen om te proberen het probleem op te lossen.

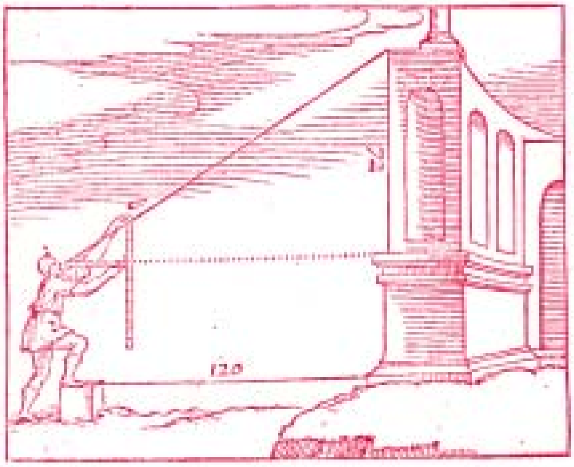
De leerlingen hebben actief aan deze en ook aan de andere opgaven gewerkt. Ze werkten meestal in groepjes van twee, waarbij veel overleg plaatsvond en af en toe vragen aan de docent werden gesteld. Deze opgave is door de leerlingen goed gemaakt. Ze vonden het in het begin alleen lastig dat de afstand is gegeven in voeten. Ze kenden deze maat niet en vroegen zich af hoe lang deze maat precies is, want iedereen heeft toch een andere voet? Dit was een mooie gelegenheid voor een klassengesprek, waarbij ook de introductie van de meter als maat aan de orde kwam.

Hoogtemeting met de Jacobsstaf

Een andere manier om de hoogte van een gebouw te bepalen was met behulp van de Jacobsstaf [4]. Pierre de la Ramée, een Franse wiskundige uit de 16e eeuw en in Nederland beter bekend als Petrus Ramus, gaf een uitgebreide beschrijving van de Jacobsstaf. In 1622 is zijn meetkundeboek in het Nederlands vertaald [5]. Een probleem uit dat boek heb ik verwerkt tot de volgende opgave voor leerlingen.

Natuurlijk moet je eerst begrijpen hoe de Jacobsstaf werkt, voordat je het instrument kunt toepassen op de aangeboden praktische problemen. Het betreffende hoofdstuk uit het boek begint daarom ook met de uitleg van de Jacobsstaf. Ramus geeft bij de problemen eerst de algemene regel en daarna een toelichting met bewijs. De algemene regel voor het rekenen met de Jacobsstaf staat in figuur 2.
In figuur 3 staat de Jacobsstaf. De dwarsstok is hierbij het horizontale been. De wijzer is het verticale been. In figuur 4 staat de toelichting van Ramus. We lezen:
Laet nu het deel des Dwarsstocx zijn van 60 deelen /




Laet nu het deel des Dwaersstocx zijn van 60 deelen / het deel van de Wyser van 36 deelen / de lengte van 120 voeten / zoo zou de hooghte door dē Gulden Regel zijn van 72 voeten. De figuer is alsoo / en wordt bewesen door het 9. beg. des 7e boecx als vooren; maer de hoochte vā de Meter moet daer toeghedaen werdē / welcke zoose zy van 4 voetē / zoo sal de heele hoochte zijn van 76 voeten.

FIGUUR 3 Jacobsstaf

FIGUUR 4 Ramus' toelichting

het deel van de Wyser van 36 deelen / de lengte van 120 voeten / zoo zou de hooghte door den Gulden Regel zijn van 72 voeten. De figuer is alsoo / ende wordt bewesen door het 9e beg. des 7e boecx als vooren: maer de hoochte van de Meter moet daer toeghedaen werden / welcke zoose zy van 4 voeten / zoo sal de heele hoochte zijn van 76 voeten.

a Maak een tekening waarin je alle gemeten maten duidelijk aangeeft.
b Laat met behulp van een berekening op de gebruikelijke manier zien, dat de te berekenen hoogte inderdaad 72 voeten moet zijn.
c Wat is de hoogte van het hele gebouw?
Ramus doet een verwijzing naar het 9e beginsel van het 7e boek om te laten zien dat zijn antwoord gerechtvaardigd is.
d Wat denk je zou er in dit beginsel hebben gestaan?

Deze opgave werd door leerlingen moeilijk gevonden. Sommigen begrepen na het lezen van de opgave de werking van de Jacobsstaf niet. Een in elkaar gezette bouwplaat van de Jacobsstaf gaf hier verheldering. Leerlingen vonden het daarnaast moeilijk in te zien, hoe je de 'deelen' van de Jacobsstaf kunt vergelijken met afstanden in voeten.

Bepalen van de breedte van een rivier

Naast het bepalen van de hoogte van torens was het bepalen van de breedte van rivieren een taak van landmeters. Johannes Morgenster beschreef dit in zijn boek *Werkdadige Meetkonst* dat speciaal voor het onderwijzen van ingenieurs en landmeters was geschreven [6]. Hij maakte hierbij gebruik van figuur 5.

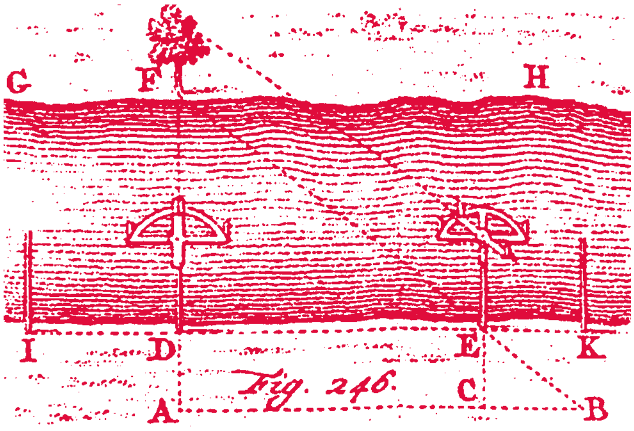
De opdracht voor de leerlingen luidt als volgt:

a Neem de figuur over in je werkschrift. Zet de gegevens erbij.
b Beschrijf welk veldwerk de landmeter heeft moeten doen om de figuur te krijgen.
De landmeter meet vervolgens de volgende maten in voeten op: $DE = 20$, $BC = 5$ en $CE = 8$.
Om de breedte van de rivier te berekenen maakt de landmeter verder gebruik van het feit dat driehoek CBE gelijkvormig is met driehoek DEF.
e Bereken de breedte van de rivier met behulp van een tabel en de bijbehorende factor.

Bij deze opgave was het berekenen van de breedte van de rivier geen probleem. Het overnemen van de tekening bleek voor sommige leerlingen wel lastig. Volgens hen klopte de tekening namelijk niet, omdat CE in de tekening korter is dan BC. Ze vonden het moeilijk in te zien dat het alleen om een schets gaat. Maar weinig leerlingen gaven bij vraag b een uitgebreide beschrijving van het veldwerk. Omdat dit belangrijk is voor het zelf uitvoeren van deze opdracht in de praktijk, was dit een mooi moment om deze beschrijving in een klassengesprek aan de orde te stellen.

Praktische opdracht

Het tweede gedeelte van het lesmateriaal bestaat uit een praktische opdracht. Daarin verrichten de leerlingen in groepjes van twee zelf meetwerk om vervolgens met behulp van gelijkvormigheid de hoogte van een gebouw of de breedte van een sloot uit te



FIGUUR 5 Rivier in het boek van Morgenster

FIGUUR 6 Opmeten van de lantaarnpaalhoogte

rekenen. Leerlingen kunnen kiezen uit de verschillende methoden die ze in het lesmateriaal hebben gezien. Voor het berekenen van de hoogte van gebouwen komen in het lesmateriaal naast bovenbeschreven methoden ook het bepalen van de hoogte met behulp van een stok of met behulp van de zon aan de orde. De verschillende stappen die moeten worden uitgevoerd, vanaf een plan van aanpak maken voor het meetwerk tot een beschrijving van hoe het geheel verwerkt moet worden tot een poster, staan beschreven in het lesmateriaal. De verkregen resultaten kunnen worden vergeleken met de schattingen die de leerlingen vooraf hebben gedaan. Het zou natuurlijk mooi zijn als leerlingen de werkelijke hoogte van het gebouw kunnen achterhalen om het te vergelijken met de berekende hoogte.

Hoogte van een lantaarnpaal met behulp van een spiegel

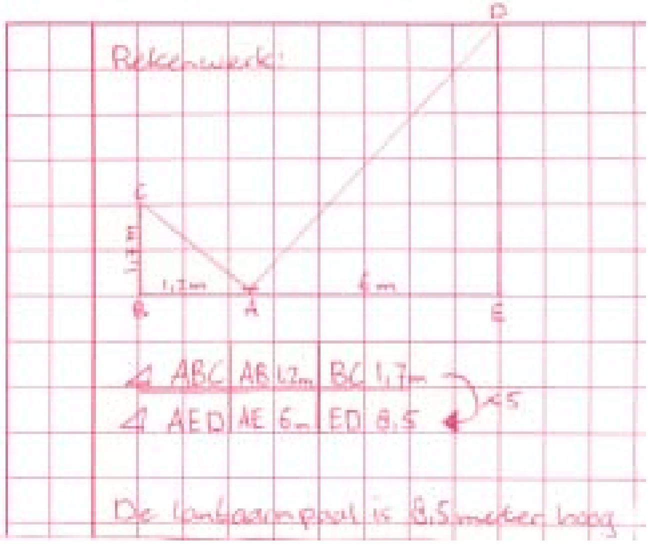
Jesse en Eelke uit klas 2B hebben gekozen om de hoogte van een lantaarnpaal voor de school te bepalen met behulp van de methode van Cardinael. In de foto van figuur 6 zie je ze aan het werk.
Eelke stond zo dat hij de top van de lantaarnpaal in de spiegel kon zien. Jesse mat de benodigde afstanden in voeten. De afstand van Eelke tot de spiegel en van de spiegel tot de lantaarnpaal leverden geen probleem op. Maar hoe kon Jesse nou de ooghoogte van Eelke in voeten bepalen? Eelke kon toch niet buiten op de grond gaan liggen zodat Jesse de lengte met zijn voeten op kon meten. Ze wisten gelukkig wel de ooghoogte van Eelke in centimeters. Zo kwamen ze op het idee om de lengtes die ze in voeten hadden opgemeten om te rekenen in centimeters, want ze wisten dat Jesses voet 30 centimeter lang was. Het resulteerde in een tekening met het bijbehorende rekenwerk om de hoogte van de lantaarnpaal te bepalen (zie figuur 7).
De aanpak en uitvoering van Eelke en Jesse leverden resultaat op. Het had nog iets eenvoudiger gekund als ze zich gerealiseerd hadden dat het niet uitmaakte dat de afstand van Eelke tot de spiegel en van de spiegel tot de lantaarnpaal in voeten was bepaald. Het gaat bij het rekenen met gelijkvormigheid tenslotte om de vergrotingsfactor en die hadden ze zonder de omrekening naar centimeters kunnen bepalen.

Breedte van een sloot

Willem en Wouter uit klas 2A hebben de breedte van een sloot in de buurt van de school bepaald. Ze voerden eerst het veldwerk uit (zie figuur 8).
Zij kwamen daarna tot de tekening en berekening van figuur 9 en 10.
De methode van Willem en Wouter wijkt wel iets af van de methode van Morgenster, doordat in dit geval de overkant van de sloot wél bereikbaar was. Daardoor hoefden ze geen lijn evenwijdig aan de oever te gebruiken om twee gelijkvormige driehoeken te verkrijgen. Wouter liep namelijk naar de overkant van de sloot en richtte zijn ogen op de boom B en Willem kon vervolgens het snijpunt C van de gezichtsstraal en de oever van de sloot bepalen. Samen met een punt A vanuit B loodrecht op de oever van de sloot worden zo twee gelijkvormige driehoeken verkregen, waarbij de rechte hoek een benadering is. Willem en Wouter konden hun antwoord controleren door via de stuw de breedte van de sloot op te meten.

Ervaringen vanuit de klassen

Uit een enquête die ik heb afgenomen na afloop van de lessenserie blijkt dat ongeveer tweederde deel van de



FIGUUR 7 Berekening lantaarnpaalhoogte

FIGUUR 8 Opmeten slootbreedte

leerlingen vindt dat geschiedenis een positieve toevoeging geeft aan de wiskundelessen. De argumenten van de leerlingen komen veelal overeen met de argumenten die aan het begin van het artikel genoemd zijn.
Leerlingen vinden dat geschiedenis een interessante draai aan wiskunde geeft. Bovendien vinden ze dat geschiedenis afwisseling biedt. Ze zien nu een voorbeeld van hoe wiskunde vroeger gebruikt werd en ze vonden het leuk dat ze het nu zelf 'in het echt' mochten toepassen en konden kijken of ze het geleerde gesnapt hadden.

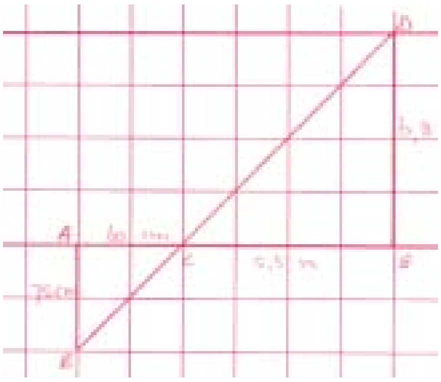
Wim Kuipers: 'Vooral de praktische opdracht bleek uitdagend te zijn. Het lokaal verlaten en dan in de omgeving van de school een object zoeken waar je aan moet meten. Zelf een keuze te maken uit de behandelde methoden. Je merkt dan ook de grote verschillen tussen leerlingen in het zoeken naar een oplossing. Een uitstekende gelegenheid om vaardigheden zichtbaar te maken. Het meelopen met enkele groepjes geeft je de mogelijkheid om te observeren hoe het proces van denken verloopt.'

Dit had een positieve invloed op het leerproces van de leerlingen. Ze vonden dat ze van zelf doen veel leerden en het geleerde bleef door het voorstellingsvermogen ook beter bij dan als ze de theorie alleen uit een boek leerden. Ze vonden ook dat ze zo meer inzicht kregen in de stof en dat geschiedenis wiskunde minder abstract maakt.
Leerlingen die de geschiedenis van de wiskunde geïntegreerd in het lesmateriaal niet leuk vonden, hadden meestal als argument dat het lesmateriaal te moeilijk was. Vooral de oud-Nederlandse teksten gaven problemen. Bij een nieuwe versie van het lesmateriaal probeer ik het oud-Nederlands begrijpelijker te maken door samen te werken met de sectie Nederlands.

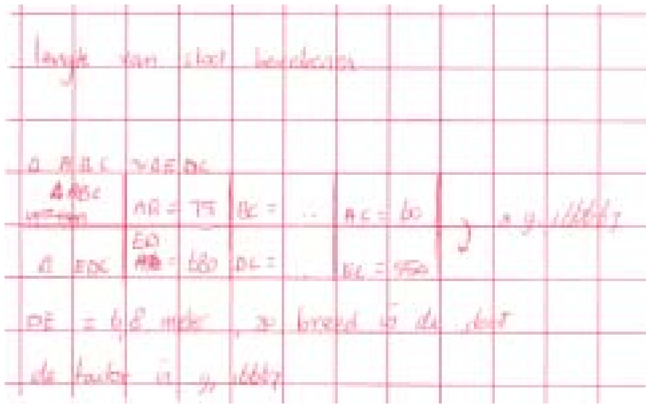
Wim Kuipers: 'Leerlingen moeten wennen aan de oude taal. Maar met wat helpen komen ze een eind. Het geeft je de gelegenheid tot een goed gesprek over wiskundige zaken. Het is in elk geval voor een deel van de leerlingen een uitdaging. Leerlingen helpen elkaar en zoeken samen naar een vertaling van de tekst. Het is goed om ze bezig te zien als ze zoeken naar de oplossing van een probleem. Vooral het samen zoeken onder leiding van de docent geeft meer dimensie aan het werk. Lezen, nog eens lezen, een schets maken, de ontbrekende gegevens erbij zetten en ordenen.'

Geïnteresseerd?

Ik hoop dat ik in dit artikel een beeld heb kunnen schetsen waarom en vooral hoe je geschiedenis van de wiskunde in de klas kunt en misschien wel moet gebruiken. Wie overweegt dit lesmateriaal in de les te gebruiken, kan contact met mij opnemen. Naast het volledige lesmateriaal ontvangt u dan een uitgebreide docentenhandleiding, met onder andere historische achtergrondinformatie en enkele aanbevelingen voor de opzet van de lessen.
Naast dit lesmateriaal voor de onderbouw bestaat er lesmateriaal voor de bovenbouw over deze 17^{e} eeuwse landmeetkundige problemen. In *Moderne wiskunde* vwo B2, deel 1, staat een onderzoek 'Geometrische questien', met onder andere de in dit lesmateriaal gebruikte problemen van Cardinael en Ramus. Het probleem van Cardinael, inclusief de tekst in oud-Nederlands, is ook tot praktische opdracht uitgewerkt door het Bètasteunpunt (*www.betasteunpunt.rug.nl*).



FIGUUR 9 Plaatje bij berekening sloot



FIGUUR 10 Berekening slootbreedte

Het door mij ontwikkelde lesmateriaal is onderdeel van een groter onderzoeksproject. De centrale vraag van het onderzoek is (in) hoe(verre) de geschiedenis van de meetkunde gebruikt kan worden, door leerling en leraar, bij het ‘opnieuw ontdekken’ van meetkundige kennis. Volgend schooljaar ga ik een vernieuwde versie van dit lesmateriaal uittesten op verschillende scholen. Daarnaast ben ik bezig met het ontwikkelen van historisch getint lesmateriaal over niet-Euclidische meetkunde. Dit krijgt de vorm van een boekje voor een keuzeonderwerp voor vwo-leerlingen met wiskunde B12 in hun pakket. Ook van dit lesmateriaal ga ik na welke invloed de geschiedenis heeft. Daarom wil ik graag in contact komen met scholen die dit lesmateriaal willen uittesten.

Noten

[1] Dit heeft onder andere geresulteerd in een boek over de betekenis van de geschiedenis van de wiskunde voor het wiskundeonderwijs van J. Fauvel en J. van Maanen: History in Mathematics Education, the ICMI study, Dordrecht(2000). Een uitgebreide boekbespreking van dit boek door Wim Kleijne is te lezen in Euclides 77-6 (2002).

[2] I. Gulikers, K. Blom: A Historical Angle, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education, in Educational Studies of Mathematics 47(2) (2001), pp. 223-258

[3] Cardinael (S. Hansz. van Harlinghen): Hondert geometrische questien en hare solutien, Amsterdam (rond 1610)

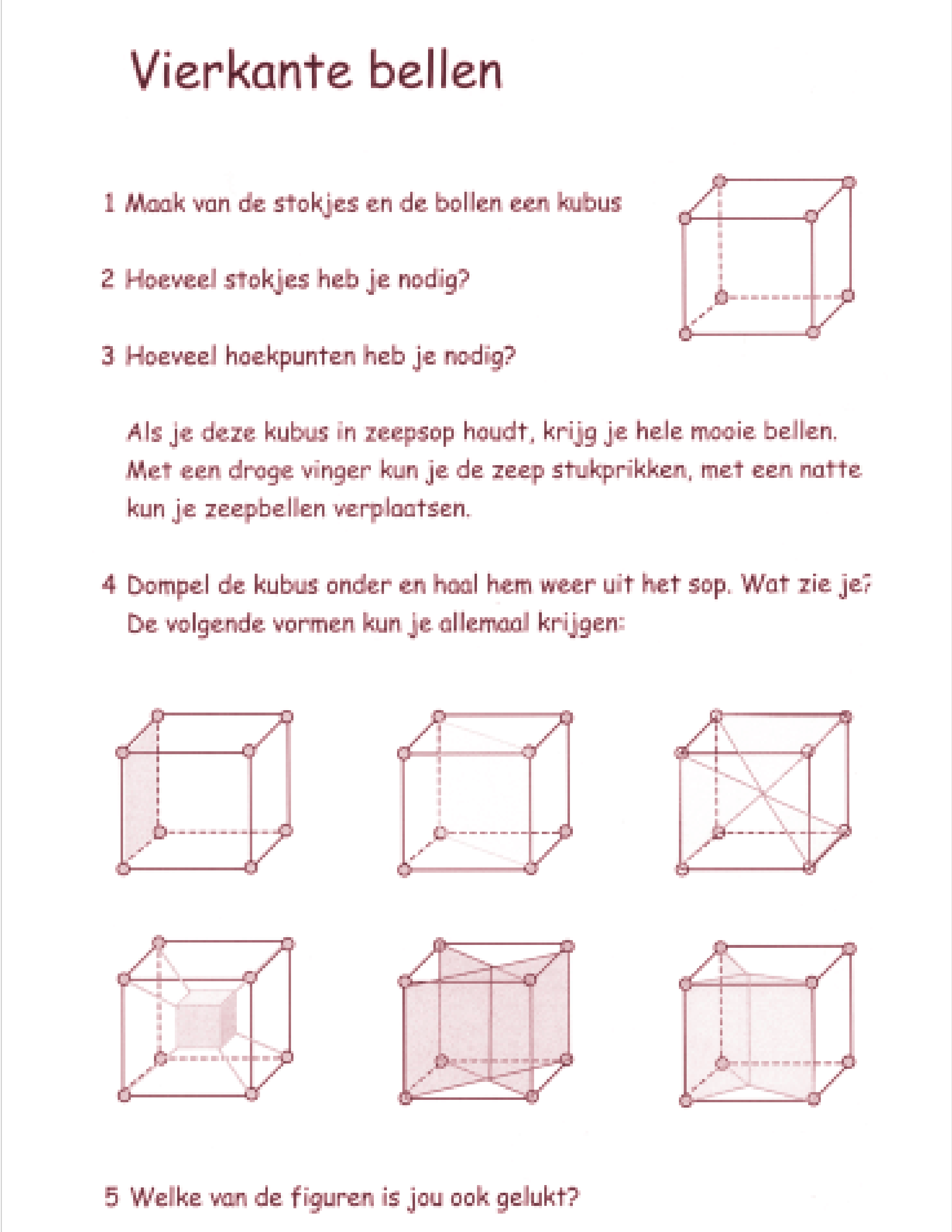
[4] Over de geschiedenis en verschillende toepassingen van de Jacobsstaf is meer te lezen in ‘Lichaamsmaten en navigatie-intrumenten’ van P. Ransom in Nieuwe Wiskrant 20(2) (2000), pp. 9-12

[5] P. Ramus: Meetkonst in XXVII boeken vervat, Amsterdam (1622)

[6] J. Morgenster: Werkdadige Meetkonst, 2e druk, Leeuwarden (1744)

Over de auteur

Iris Gulikers (e-mailadres: gulikgulikers@home.nl) is als AIO werkzaam aan de Rijksuniversiteit van Groningen, onder begeleiding van Henk Broer, Jan van Maanen en Anne van Streun. Daarnaast is zij wiskundedocente op de Van der Capellen Scholengemeenschap in Zwolle. Ook op haar website (http://members.home.nl/gulikgulikers/WiskundePagina.htm) is informatie met betrekking tot bovenstaand onderwerp te vinden.


Vierkante bellen

1 Maak van de stokjes en de bollen een kubus

2 Hoeveel stokjes heb je nodig?

3 Hoeveel hoekpunten heb je nodig?

Als je deze kubus in zeepsop houdt, krijg je hele mooie bellen. Met een droge vinger kun je de zeep stukprikken, met een natte kun je zeepbellen verplaatsen.

4 Dompel de kubus onder en haal hem weer uit het sop. Wat zie je? De volgende vormen kun je allemaal krijgen:

5 Welke van de figuren is jou ook gelukt?

WISKUNDE IN HET VMBO, EEN WERELDS VAK

Persoonlijk vind ik wiskunde een werelds vak om te geven. Vooral aan de zwakkere leerlingen, met wie je nog tijd hebt om wat langer stil te staan bij een bepaald onderwerp.

[Ingrid Berwald]

Inleiding

Ik geef les aan lwoo-leerlingen: leerlingen uit het leerwegondersteunend onderwijs. In dit type onderwijs wordt gewerkt in kleine groepen, omdat de leerlingen vaak veel problemen hebben. Het grote voordeel van het kleine aantal leerlingen per groep is, dat je ze lekker persoonlijk uit kunt dagen.
Mijn stokpaardje is 'zelfverantwoordelijk leren'[1]. Collega's zijn soms verbaasd dat mijn leerlingen dat kunnen. Maar ook deze leerlingen blijken dat te kunnen leren, mits je ze voldoende stimuleert: dat kan individueel, met behulp van geschikte materialen, en ook door middel van klassenpractica.

Individueel stimuleren

De leerlingen met wie ik werk, zijn in hoge mate verantwoordelijk voor onder meer het tempo waarin ze leren. Ik laat ze, in overleg met mij, zelf hun huiswerk bepalen. Hierdoor krijgen mijn leerlingen de kans het aan te geven als ze door omstandigheden een keer niet in de gelegenheid zijn thuis iets te doen. De afspraak is dat ze opgeven wat ze (denken te) kunnen maken. Ik bekijk of het wel reëel is wat ze zeggen en leg de afspraak vast. Doordat de leerlingen inspraak hebben in de hoeveelheid huiswerk, verwacht ik van ze, dat het inderdaad af is. Zo niet, dan volgt er een gesprek over het maken en nakomen van afspraken. Op deze manier wordt ook de datum van de toets individueel afgesproken. Een toets maken terwijl je hem niet geleerd hebt wordt zo wel gek, want waarom heb je die afspraak dan gemaakt?
Mijn leerlingen wennen erg snel aan deze manier van werken en zien al snel de voordelen. Mijn taak in deze is ervoor te zorgen dat leerlingen niet te weinig doen, of juist niet te veel: sommige leerlingen gaan het tempo zo leuk vinden dat ze de stof niet meer begrijpen; die moet je even terug fluiten. Leerlingen geven zichzelf trouwens vaak meer huiswerk op dan ik zelf zou opgeven.
Mijn leerlingen vinden deze manier van werken ook prettig. Vorig jaar zei een leerling uit de vierde klas tegen mij: 'Juf, je mag hier ook van alles!' 'O ja?', zei ik, 'Kijk dan eens om je heen.' Iedereen was aan het werk. 'Maar het voelt of je hier *mag* leren in plaats van *moet*', was zijn reactie. En daarmee zei hij precies wat ik probeerde te bereiken.
Deze manier van werken vraagt wel om een leerling-volgsysteem. Zelf noteer ik op een A4-tje per leerling precies waar de leerling is en wat het huiswerk is. Bovendien noteer ik het cijfer per domein. Zo kun je zien of een leerling uitval vertoont in een bepaald onderdeel van de wiskunde. Ik gebruik die gegevens om aan te geven of er een moeilijk of makkelijk hoofdstuk aankomt (dat is per leerling verschillend) en ik pas dan ook het tempo aan. Als ik al aangeef dat een hoofdstuk moeilijk is, dan is het voor de leerling ook niet zo erg als hij even iets niet snapt.

Stimuleren met materiaal

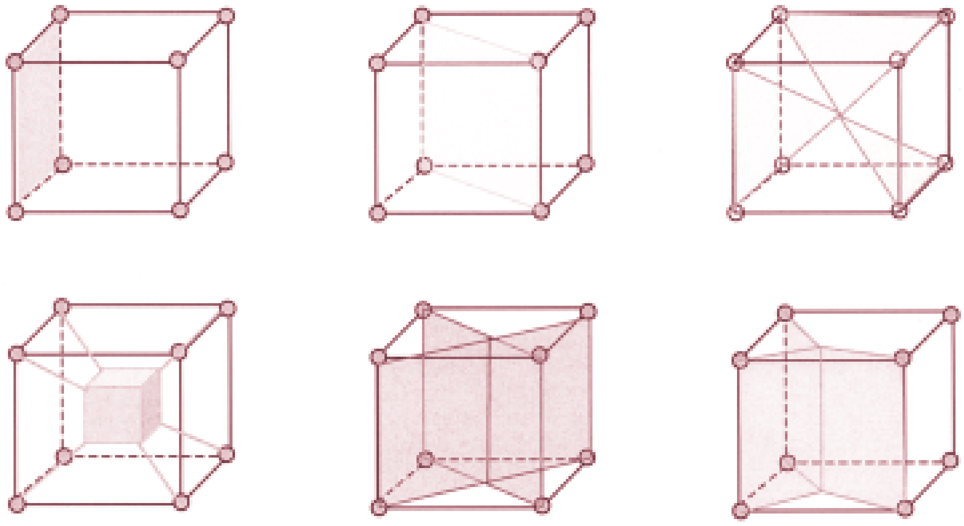
Daarnaast krijgt het zelfverantwoordelijk leren vorm door het gebruik van concreet materiaal in de lessen. Er zijn materiaalopdrachten die ik met elke leerling doe, maar ik heb ook materiaal dat maar door enkele leerlingen gebruikt wordt. Dit materiaal dient dan ter extra ondersteuning van hetgeen ze geleerd hebben of het helpt de heel zwakke leerling. Verder speelt tastbaar materiaal natuurlijk ook een rol bij het plezier beleven aan de wiskunde. Het is weer eens wat anders en leerlingen gaan op deze manier heel anders tegen wiskunde aankijken.
Omdat ik in mijn lessen veel differentieer, heb ik niet zoveel materiaal tegelijkertijd nodig. Bij het hoofdstuk over ruimtefiguren heb ik bijvoorbeeld al genoeg aan 12 plaatjes 'polydron', zodat twee leerlingen (of twee groepjes) uitslagen kunnen maken en ontdekken dat er elf verschillende uitslagen van een kubus zijn.

Stimuleren met klassenpractica

Naast het gebruik van concreet materiaal als extra ondersteuning voor de heel zwakke leerling, doe ik ook eens in de drie à vier weken een klassenpracticum. Iedereen in de klas doet dan mee, zowel de leerlingen die al klaar zijn met het hoofdstuk, als de leerlingen die nog met het hoofdstuk moeten beginnen. Dit doe ik omdat de leerlingen dan weer eens even allemaal met hetzelfde onderwerp bezig zijn en er in een andere groepssamenstelling gewerkt kan worden. Vooral het samenwerken met een ander klasgenootje dan gebruikelijk vind ik belangrijk. Leuke lessen maken dat wat gemakkelijker.
Voor elk practicum heb ik vier opdrachten met materiaal bedacht. Het is de bedoeling dat de leerlingen dan in groepjes van drie of vier personen per les twee van deze opdrachten doen en dan in de volgende les de overige twee opdrachten. Alle leerlingen doen uiteindelijk alle opdrachten, maar niet per se tegelijkertijd: er wordt in carrouselvorm gewerkt.

Aardappel

Een voorbeeld van zo'n klassenpracticum is het practicum over de kubus en zijn doorsneden. Eén van de daarbij behorende opdrachten is 'Snij een zo groot mogelijke kubus uit een aardappel'. Sommige leerlingen schillen de aardappel voor ze de opdracht doen. Anderen blijven er stukken van af snijden, zodat er op het laatst bijna niets meer van over is. De opdracht lijkt gemakkelijk, maar blijkt toch elk jaar weer tegen te vallen. Vervolgens moet de kubus langs het diagonaalvlak doorgesneden worden en met verf worden ingesmeerd. Tenslotte worden er stempels mee gemaakt. De meeste leerlingen geloven niet wat ze zien: ze verwachten vierkante stempels, en ik krijg dan ook vaak opmerkingen als: 'Juf, mijn vierkant wordt rechthoekig!' Anderen zie ik er stiekem een stukje afsnijden.
Een andere opdracht is die waarbij leerlingen met behulp van een speciaal soort materiaal ('Zometool') en een emmer sop, rechthoekige en vierkante bellen, en zelfs kubusvormige, bellen maken (zie figuur 1). De leerlingen vinden deze opdracht geweldig! Dat is toch de droom van elke wiskundeleraar?



FIGUUR 1

Het enige nadeel van zo'n klassenpracticum is dat de leerlingen er geen genoeg van krijgen en dat ze niet meer naar de volgende les willen...

Computergebruik

Naast concrete materialen gebruik ik ook vaak de computer. Vooral als je leerlingen met een hoofdstuk over grafieken bezig zijn, is de computer een uitkomst. Alsmaar weer een assenstelsel tekenen in je schrift gaat immers zelfs de meest gemotiveerde leerling tegenstaan. Op de computer gaat dat een stuk makkelijker.
Ook voor de computerlessen geldt dat je ervoor kunt kiezen om met de *hele* klas achter de computer te gaan zitten, of dat je juist liever een *enkele* leerling tijdens je les ermee aan het werk zet.
Een mooi voorbeeld is de les beeldgrafieken in klas 2. De leerlingen in de tweede klas zijn bezig met het kiezen van een richting voor klas 3. Een mooie aanleiding voor een stukje wiskunde! Ik laat ze altijd een beeldgrafiek tekenen van de urentabel van de richting die ze (denken te gaan) kiezen. Bij elk vak moeten ze een plaatje bedenken waaraan je kunt zien wat je in dat vak gaat leren. Een geodriehoek bij wiskunde is dus goed, maar een liniaal bij het vak 'meten' in de richting electrotechniek niet. Deze opdracht kan op papier, maar is ook leuk op de computer. De leerlingen kunnen dan via 'clips on line' de plaatjes zoeken. De opdracht duurt in dat geval twee lessen in plaats van één, maar het resultaat is wel mooier. Ik trek voor het nabespreken van de resultaten ook nog een les uit. Dan merken de leerlingen vaak op dat er heel veel vakken hetzelfde zijn, welke richting je ook kiest. Ook zien ze dat niet elke richting evenveel uren in de lessentabel heeft staan.

Knelpunten en tips

Veel docenten worden enthousiast als ze horen hoe het er bij mij in de klas aan toe gaat. Ze willen eigenlijk het liefst diezelfde dag nog aan de slag. Jammer genoeg stuiten ze vaak op een hoop praktische problemen waardoor ze de moed opgeven en weer les geven zoals ze al die jaren al gedaan hebben. Ontzettend jammer, want het werken met concreet materiaal vergroot niet alleen de lol voor de *leerlingen*, het maakt de wiskundeles ook tot een feest voor de *docent*!
De knelpunten moeten dus uit de weg worden geruimd.

De problemen die collega's het meest noemen, zijn:
- Mijn leerlingen kunnen niet zelfstandig werken.
- Werken met materiaal wordt één grote bende.
- Werken met materiaal is zo'n gedoe.
- Ik heb geen eigen lokaal.
- Ik heb geen geschikt materiaal.
- Hoe kom ik aan geschikte werkbladen?
- Er zijn geen of te weinig computers in het lokaal.
- Er is maar één computerlokaal, en dat is vaak bezet.
- Ik werk op meerdere locaties.

Deze problemen zijn niet allemaal even makkelijk op te lossen – sommige, het niet hebben van een eigen lokaal bijvoorbeeld, zelfs helemaal niet. Toch zijn er wel wat tips te geven.

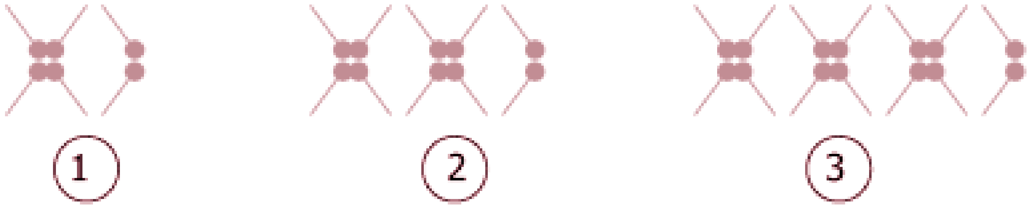
Materiaaltip

Een *materialenbox* helpt je al het benodigde materiaal te bewaren en bij de hand te houden. Of je nu wel of niet een eigen lokaal hebt, die box kun je altijd meenemen. Zelf heb ik bij de afdeling metaaltechniek een karretje laten maken, zodat ik mijn spullen overal mee naar toe kan nemen.
Voor de *inhoud* van de box valt te denken aan blokken, klikplaatjes om kubusuitslagen mee te oefenen, rietjes, een meetlat, touw, enz.

Organisatietip

Zorg er bij de inzet van werkbladen vooral voor, dat je het bijbehorende materiaal zo kunt pakken.
Voor diegenen die werken met materiaal een heel

Van lucifers wordt de volgende reeks figuren gelegd:



FIGUUR 2 Teken de vierde figuur

gedoe vinden, maar er toch wel iets in zien: je hoeft niet de hele klas tegelijk aan een opdracht te laten werken. Begin eens met een *groepje*. Kies een werkvorm die bij je past.

Computertip

Computergebruik in de les levert weer heel andere problemen op. Per school is de situatie verschillend. Kijk eerst eens wat de mogelijkheden op school zijn. Heb je twee computers in je lokaal staan, dan kun je steeds twee leerlingen met de computer aan het werk zetten. Je moet dan wel zorgen voor duidelijke werkbladen, anders krijg je problemen met de rest van de les.
Heb je de beschikking over een computerlokaal, dan is het een kwestie van inschrijven en gewoon een keer doen. De eerste keer kun je misschien met een collega afspreken om het samen te doen.
Behalve werkbladen moet er natuurlijk ook *software* zijn. Sommige methoden leveren al software mee. Op de site van het Freudenthal Instituut (www.fi.uu.nl), zijn allerlei kleine programma's (applets) gratis te downloaden. Ze zijn ook te vinden via WisWeb (www.wisweb.nl).

Werkbladentip

Werkbladen moet je vaak zelf maken, of zien te krijgen van collega's. Het vinden ervan is moeilijk; daar moet in geïnvesteerd worden. Ruilen op gebruikersbijeenkomsten van de methodes is soms een optie.
Heb je geen werkbladen, dan kan concreet materiaal bij een opgave uit het boek ook helpen. Zo is er bij het onderwerp 'verbanden' bijna altijd een vraagstuk in het boek over figuren die gelegd worden met lucifers (zie figuur 2).
Je kunt de figuren ook gewoon laten naleggen met lucifers. Het maakt de opdracht tastbaar. Zelf geef ik overigens de lucifers in een zakje, dan kunnen ze niet afgestreken worden.

Werkbladen downloaden

Zelf heb ik natuurlijk ook gemerkt, dat er aan werkbladen erg moeilijk te komen is. Daarom heb ik er een aantal bij elkaar gezocht; ze zijn te vinden op de Euclides-pagina van de NVvW-website (www.nvvw.nl/Euclides2.html). Het gaat om de volgende werkbladen:
- M&M's (statistiek)
- Lucifers (verbanden)
- Spaghettimeter (meetkunde)
- Naamkaartje (kennismaking met Excel)
- 80-gramspapier (meetkunde).

Noot

[1] In de Nieuwe Wiskrant van september 2000 verscheen het artikel 'De zelfstandige i-leerling' (auteurs Pieter van der Zwaart en Ingrid Berwald), waarin mijn opvattingen en werkwijze beschreven worden ten aanzien van zelfverantwoordelijk leren.

Over de auteur

Ingrid Berwald is als lerares werkzaam op het IJsselcollege te Capelle aan den IJssel. Zij geeft hier voornamelijk les aan de lwoo-groepen; haar voorkeur gaat uit naar de onderbouw. Naast wiskunde geeft ze ook natuurkunde en natuuroriëntatie, zodat ze de klassen veel uren lesgeeft. Naast deze lesgevende taak werkt ze sinds kort ook voor het APS. Ook hier maakt ze zich sterk voor de zwakke leerlingen. Momenteel werkt ze aan de ontwikkeling van een cursus speciaal voor lwoo- en vmbo-docenten waarin het werken met werkbladen (voor de computer en met materialen) aan de orde komt.

‘T DENKEN BEVORDEREN [Anne van Streun]

Onder de titel **‘t Denken bevorderen** verzorgt Anne van Streun in Euclides een nieuwe didactische rubriek. In dit nummer de eerste aflevering, een probleem dat Anne als voorbeeld gebruikte in zijn oratie van 18 december jl. [1]

HEIT EN KEES

Inleiding

Het voorbeeld van Heit en Kees heeft tot doel u te laten meedenken over leerdoelen die de reproductie van basiskennis overstijgen. Ik neem u mee naar het Friese platteland tijdens de Tweede Wereldoorlog. De hoofdpersonen in dit authentieke verhaal zijn Heit (mijn Friese schoonvader) en Kees (zijn oudste zoon, mijn zwager). Niet lang nadat Heit op heel hoge leeftijd was overleden, legde Kees mij het volgende probleem voor.

De context

Heit woonde tijdens de Tweede Wereldoorlog met zijn vrouw en vijf kinderen in Leeuwarden. Vóór de oorlog vertegenwoordigde hij in Friesland de firma Insulinde, die koffie, thee en cacao produceerde en direct leverde aan wederverkopers. In de oorlog handelde hij in van alles en nog wat en kon zo regelmatig op het platteland wat extra levensmiddelen voor zijn gezin aankopen. De zakken aardappelen waren het lastigst om langs de Duitse controles te smokkelen, dus dat ging ’s nachts in het pikkedonker. Samen op de ene fiets die het gezin nog had, trokken Heit en Kees er dan op uit, soms tientallen kilometers ver, om de aangekochte zak aardappelen Leeuwarden binnen te smokkelen. Nu komt het probleem.

Heit en Kees kunnen op de terugweg niet samen met de zak aardappelen op één fiets. Heit beslist daarom als volgt over de logistiek op de terugweg. Eerst fietst Heit een aantal kilometers met de zak aardappelen, terwijl Kees loopt. Dan zet Heit de fiets met de zak aardappelen langs de weg tegen een boom of hek en loopt zelf door. Kees ziet vervolgens de fiets staan en fietst met de zak aardappelen door totdat hij Heit heeft ingehaald. Dan neemt Heit de fiets over en fietst weer verder, enzovoort.

De onopgeloste vraag waar Kees na vijftig jaar nog steeds mee zat was de volgende:
‘Maakt het wat uit hoe lang die perioden van fietsen en wandelen zijn?’
Maakt het sowieso wat uit dat er stukje bij beetje gefietst en gelopen werd? Had het beter gekund?
U begrijpt dat in die tijd de gezagsverhoudingen zo waren, dat Kees zijn twijfel over de gekozen strategie niet als een open vraagstelling aan de groep kon voorleggen...

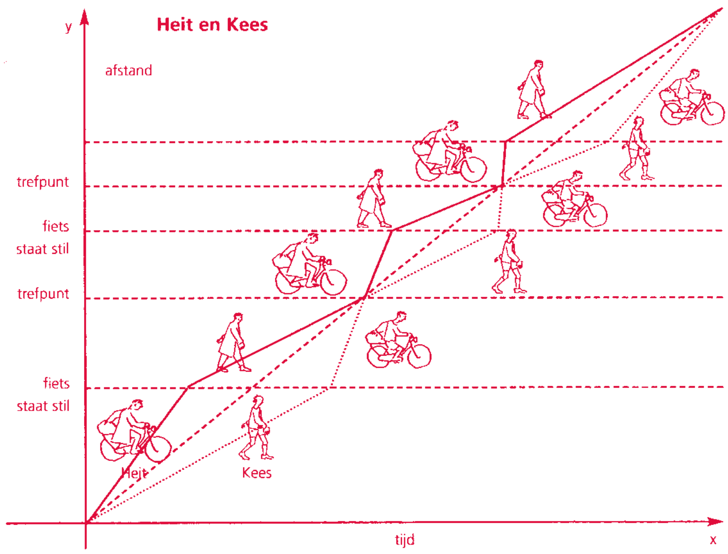
Een slecht gedefinieerd probleem

In nascholing over de basisvorming heb ik deze vraag in deze context regelmatig voorgelegd aan groepen leraren wiskunde en natuurwetenschappen. De eerste reactie was meestal dat het een slecht gedefinieerd of een slecht gestructureerd probleem was. Je weet geen fiets- of loopsnelheden en geen afstanden, zoiets kun je toch niet aan leerlingen voorleggen? De tweede reactie was dat je zonder nadenken zó kon zien wat het goede antwoord was. Die ‘goede’ antwoorden varieerden van: ‘Ze kunnen beter gaan lopen’ tot: ‘Je kunt het niet weten’ en ‘Het maakt niets uit’.
Leerlingen die getraind zijn op het maken van enkelvoudige routineopgaven komen niet verder. In het hoger onderwijs vormen slecht gedefinieerde problemen het startpunt van projecten rondom modelleren, want daar heb je met het toepassen van wiskundige of natuurwetenschappelijke kennis mee te maken.

Een systematische probleemaanpak

Aan de hand van dit voorbeeld wil ik een aantal aspecten van het oplossen van problemen bespreken. In navolging van Duncker en De Groot spreek ik van de ontwikkeling van de mentale voorstelling van een probleem of context, het probleem zoals de oplosser het 'ziet' [2, 3]. Dat is het geheel aan ideeën dat de oplosser op een bepaald moment over de context of probleemsituatie heeft. Wat is uw mentale voorstelling van dit probleem? Begrijpt u de context? Ziet u in gedachten Heit en Kees in het donker worstelen met die zak aardappelen? Ziet u de fiets met de zak aardappelen staan terwijl Kees er naar toe en Heit er van weg loopt? In de buurt van Leeuwarden, met de patrouilles van de Landwacht op pad, is het allicht zaak om op een bepaald moment te stoppen met het wisselen van de fiets en samen de stad in te sluipen.
Hoe krijgen we nu greep op het onderliggende wiskundige probleem? Hoe kunnen we onze mentale voorstelling van die probleemsituatie verder ontwikkelen?
Als u de kerndoelen van de basisvorming voor wiskunde of natuurkunde enigszins beheerst, ontbreekt het u niet aan de nodige vakkennis. Maar dat is geen garantie voor het kunnen toepassen van die kennis in een context. Het is geen garantie voor transfer, zoals dat in de psychologie wordt genoemd. Laat ik een aantal aspecten van een mogelijk oplossingsproces, opvoeren.

ILLUSTRATIE Edzard Krol



Een heuristische probleemverkenning

We beginnen met een heuristische probleemverkenning. Direct lettervariabelen invoeren voor alle onbekenden? De snelheden per fiets en lopend van Heit en Kees (dat zijn al vier variabelen), de fietsafstanden per keer of de tijd per periode. En dan kijken of de totale tijd afhankelijk is van de lengte van die periode. Het kan, maar ik heb het niet veel leraren in een half uur zien doen. Door al dat rekenen ontwikkelt onze mentale voorstelling van het probleem zich nauwelijks.
We proberen een andere heuristiek, het doorrekenen van eenvoudige gevallen.
Neem aan dat Heit en Kees beiden fietsen met een snelheid van 12 km/u en beiden lopen met een snelheid van 4 km/u. Neem aan dat ze een afstand van een kilometer aan één stuk fietsen. Even hoofdrekenen. Rekent u mee? Na 5 minuten zet Heit de fiets neer en 10 minuten later neemt Kees de fiets over. Na nog eens 5 minuten heeft Kees zijn kilometer op de fiets afgelegd en Heit heeft ondertussen een kwartier gelopen en zijn tweede kilometer afgelegd.

Monitoren, even uittreden en kijken naar je eigen aanpak

Bent u er nog? Want nu komen onze metacognitieve vaardigheden van pas. Even uittreden en naar je eigen aanpak kijken. Monitoren heet dat. Goede probleem-oplossers doen dat, leerlingen en studenten moeten dat leren.
- Interne dialoog. Waar ging ons probleem ook al weer over?
Oh ja, maakt het wat uit? In dit eenvoudige voorbeeld hebben ze een afstand van 2 kilometer in 20 minuten afgelegd. Met het aangenomen looptempo van 4 km/u had dat een half uur gekost. En als we de periode bijvoorbeeld 4 km hadden gemaakt dan doen Heit en Kees dat gewoon in 40 minuten. De lengte van de periode doet er dus in dit voorbeeld niet toe. En afwisselend lopen en fietsen gaat echt vlugger.
- Interne dialoog. Kunnen we al een algemene conclusie trekken?
Onze mentale voorstelling van de probleemsituatie is intussen flink ontwikkeld en we hebben het gevoel dat we op grond van dit ene voorbeeld al 'zien' hoe alles in elkaar zit. Hopelijk bent u ook al zover.
- Interne dialoog. Hoe nu verder? Een plan maken.
U kunt er voor kiezen om nog meer voorbeelden door te rekenen om op die manier meer zekerheid te krijgen over uw oplossing. Of u bedenkt dat wellicht een grafische voorstelling nu meer inzicht geeft dan meer van hetzelfde.
- Interne dialoog. Terugblik of reflectie achteraf.
Als u over uw oplossing tevreden bent, dan is het zaak om nog even om te kijken. Hoe verliep het? Waar liep ik eerst op vast? Dat heet het ontwikkelen van je eigen metacognitieve kennis: 'Dit kan ik goed, maar daar moet ik om denken.'

Denken

Aan de hand van dit voorbeeld zijn een aantal aspecten duidelijk te maken van het denken zoals die op dit moment worden begrepen.

Typen kennis
- Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren
- Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden
- Weten waarom: principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht
- Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak

Weten dat

Het is duidelijk dat dit voorbeeld alleen kan worden aangepakt als de oplosser een zekere vakinhoudelijke basis heeft betreffende rekenen, snelheden, grafieken of tabellen of formules. Met dat type kennis werd veel geoefend en getoetst.

Weten hoe

Hierbij gaat het om de analyse van het probleem, het toepassen van heuristische methoden, een systematische probleemaanpak, het controleren, het ontwikkelen van een onderzoeksopzet, het stellen van een probleem, het formuleren van een onderzoeksvraag e.d. In het voorbeeld van Heit en Kees is het kiezen van een aanpak, zoals het doorrekenen van eenvoudige gevallen, een voorbeeld van 'weten hoe'. Zonder dit type kennis is de toepassing van feiten en begrippen in nieuwe situaties, waarbij geen sprake is van louter reproductie, niet mogelijk.

Weten waarom

Experts verschillen van leerlingen of studenten door hun inzicht in fundamentele principes en abstracties en vooral in de samenhang van begrippen, methoden en abstracties. De kennis van leerlingen of studenten blijkt vaak fragmentarisch te zijn opgeslagen, zonder onderlinge verbanden, waardoor die kennis ook slecht toegankelijk is voor gebruik bij het oplossen van problemen. In dit voorbeeld is de selectie van de toe te passen methode van belang. Dat kan snel leiden tot de keuze voor een grafische voorstelling, omdat die het meeste inzicht geeft in de situatie.

Weten over weten

Dit type kennis wordt metacognitie genoemd, de bekwaamheid om je eigen inzicht en denken te beoordelen, bijvoorbeeld tijdens het oplossen van een probleem. Vaak neemt dat de vorm aan van een interne dialoog, praten met jezelf over je vorderingen, over de vraag waar je ook al weer mee bezig bent, het controleren en reflecteren, het zoeken van een probleemaanpak enzovoort. In dit verband wordt de term 'monitoren' gebruikt, even uit je eigen oplossingspoging stappen en daar van buitenaf naar kijken voordat je verder gaat. Reflecteren op de toegepaste aanpak en de methoden, afwegen wanneer welke probleemaanpak veelbelovend is, het eigen repertoire aan methoden uitbreiden. Hoe heeft onze voorstelling van het probleem zich ontwikkeld? Zijn er nog interessante variaties over het hoofd gezien? Maakt het bijvoorbeeld nog uit als de fietser, nadat hij de zak aardappelen heeft neergezet, weer terug fietst om de loper op te halen? Enzovoort. Goede denkers, probleemoplossers en experts onderscheiden zich daarin van zwakke oplossers van problemen. Zelfstandig werkende leerlingen plegen bij een verkregen oplossing onmiddellijk door te stomen naar de volgende opgave zonder even terug te blikken. En zonder er iets van te leren.

Literatuur en noten

[1] Anne van Streun: Het denken bevorderen, Rijksuniversiteit Groningen (2001)
[2] A. van Streun: Heuristisch Wiskundeonderwijs, Verslag van een onderwijsexperiment, dissertatie Rijksuniversiteit Groningen (1989)
[3] A. van Streun: Hoe onderwijs je Probleem Oplossen?. In: Tijdschrift voor didactiek der β-wetenschappen 12 (1994), pp. 210-255

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@math.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundedidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.

6. Van de vergelijking in x

$$x^{\log x^2} - 4x^{\log x} + p = 0,$$

waarin logaritmen beschouwd worden met 2 als grondtal, is N het aantal verschillende wortels.
Welke waarden kan N aannemen?
Geef van elk dezer waarden aan, bij welke waarde(n) van p zij behoort.

(15 punten)

7. *a.* Teken in één figuur de grafieken van de functies:
$f(x) = |x - 1| + x + 1$ en $g(x) = x - 1 + |x + 1|$.
b. Onder de afstand van een punt tot een grafiek zullen we verstaan de afstand van dat punt tot het dichtstbij gelegen punt van de grafiek.
Geef in de figuur de punten aan, waarvoor de afstand tot de ene grafiek gelijk is aan de afstand tot de andere.

(15 punten)

8. Van de getallenrij

$a_1, a_2, a_3, \ldots, \ldots, \ldots$

wordt gegeven:

$a_1 = 1,$

$a_2 = 2,$

$a_n = a_{n-1} . a_{n-2}$ voor $n = 3, 4, 5, \ldots$

Bereken de rest van a_{366} bij deling door 7.

(20 punten)

9. Men vormt met het gewone alfabet

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j\ k\ l\ m\ n\ o\ p\ q\ r\ s\ t\ u\ v\ w\ x\ y\ z$$

alle mogelijke ,,woorden'' van negen letters. Een ,,woord'' is een rij van letters, geheel ongeacht de uitspreekbaarheid.
De woorden worden in een lijst alfabetisch gerangschikt.
Het aantal woorden dat in deze lijst voorkomt tussen

$$j\,w\,b\,s\,c\,t\,y\,w\,i \quad \text{en} \quad s\,d\,t\,f\,a\,a\,a\,x\,p$$

stellen we voor door N.
Welk is het N-de woord van de lijst?

(20 punten)

Vraagstukken uit de Nederlandse Wiskunde Olympiade van 2 mei 1962, gepubliceerd in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 49 (1961-1962)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

De kleurenveel-term [Rob Bosch]

We beginnen met een puzzeltje.
Op hoeveel manieren kunnen we de punten van de graaf uit figuur 1 kleuren als we vijf kleuren tot onze beschikking hebben en buurpunten een verschillende kleur moeten krijgen?

Voor deze graaf is het even puzzelen om het gevraagde aantal te vinden. Er zijn echter twee soorten grafen waarvoor het aantal kleuringen direct te bepalen is.
- Ten eerste de graaf die slechts uit geïsoleerde punten bestaat.
Omdat we in dit geval ieder punt een willekeurige kleur kunnen geven is het aantal kleuringen van deze graaf gelijk aan x^n als n het aantal punten van de graaf is en x het aantal beschikbare kleuren.
- Ten tweede de volledige graaf.
Het aantal kleuringen deze graaf is gelijk aan
$x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$
Immers, voor het eerste te kleuren punt hebben we x kleuren, voor een volgend punt blijven er dan nog $x-1$ kleuren over, voor het derde punt resteren $x-2$ kleuren, enzovoorts.

We bepalen nu het aantal kleuringen van de graaf uit figuur 1 door deze graaf in twee nieuwe grafen te splitsen. We kiezen in de graaf twee punten die geen buren zijn, zeg punt u en punt v. Kleuren we de punten u en v *verschillend*, dan levert dit een toegestane kleuring op van de graaf $G + uv$, dat is de graaf G waaraan we de lijn uv hebben toegevoegd. Omgekeerd levert iedere kleuring van de graaf $G + uv$ een kleuring van G op waarbij u en v verschillende kleur hebben. Kortom, het aantal kleuringen van de graaf G waarbij u en v een verschillende kleur krijgen, is gelijk aan het aantal kleuringen van de graaf $G + uv$.
Kleuren we de punten u en v met *dezelfde* kleur, dan kunnen we deze punten laten samenvallen waarbij het nieuwe punt verbonden wordt met alle buren van zowel u als v. De graaf die zo ontstaat is de *contractiegraaf* $G \cdot uv$. Iedere kleuring van deze graaf levert ook weer een kleuring op van onze graaf G met dezelfde kleur voor u en v door de contractie ongedaan te maken. Het aantal kleuringen van de graaf G met dezelfde kleur voor u en v is dus gelijk aan het aantal kleuringen van de contractiegraaf $G \cdot uv$. Figuur 2 laat de splitsing van G in de grafen $G + uv$ en $G \cdot uv$ zien.

Aangezien beide grafen nog steeds punten bevatten die geen buren zijn, kunnen we de hierboven beschreven procedure voor beide grafen nogmaals toepassen. We kiezen hiervoor de punten w en z. Figuur 3 geeft de situatie zoals die ontstaat na de tweede splitsing.
Van de vier grafen in figuur 3 bevat alleen de eerste nog punten die geen buren zijn. We passen nu op de eerste graaf nogmaals de procedure toe, hetgeen tot de situatie in figuur 4 leidt.
Van de vijf volledige grafen (een K_5, drie K_4's en een K_3) kunnen we, zoals eerder opgemerkt, eenvoudig het aantal kleuringen bepalen.
Het aantal kleuringen van de graaf G is nu de som van het aantal kleuringen van de vijf volledige grafen. Als we over x kleuren beschikken, vinden we hiervoor:
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 3x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)$
Uitwerking van deze uitdrukking geeft
$x(x-1)(x-2)^3$
Met vijf kleuren kunnen we de graaf dus op $5 \cdot 4 \cdot 3^3 = 540$ verschillende manieren kleuren.
De uitdrukking leert ons dat we de graaf uit figuur 1 niet met één of twee kleuren kunnen kleuren, hetgeen overigens ook direct is in te zien. Uit de uitdrukking is af te leiden, dat het kleinste aantal kleuren voor graaf G gelijk is aan 3.

De beschreven procedure kan op iedere graaf worden toegepast. Als we uitgaan van x kleuren krijgen we voor het aantal kleuringen van een samenhangende graaf een veelterm in x van de vorm

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x^j$$

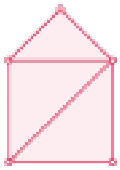
waarin n het aantal punten van de graaf is. Tevens geldt dat $a_n = 1$ en $a_{n-1} = -m$ waarbij m het aantal lijnen in de graaf is.
Het bovenstaande polynoom heet het *chromatisch polynoom* van de graaf.
Het chromatisch polynoom van een niet-samenhangende graaf kunnen we vinden door de chromatische polynomen van de componenten te vermenigvuldigen.

Literatuur

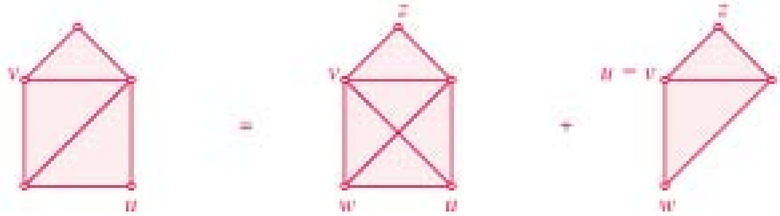
W.D. Wallis: A Beginners Guide to Graph Theory, Birkhauser (2000)

Over de auteur

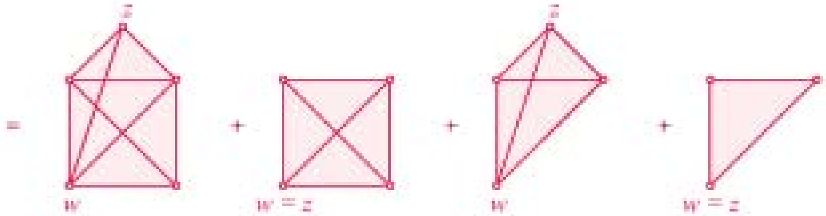
Rob Bosch (e-mail: r.bosch2@mindef.nl) is na zijn doctoraal wiskunde 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Zijn belangstelling gaat o.a. uit naar de sociale keuzetheorie op welk gebied hij aan de Katholieke Universiteit Brabant onderzoek verricht.



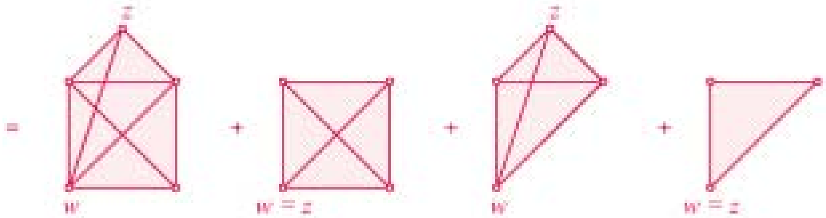
FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3



FIGUUR 4

Oproep / Onderzoeksvaardigheden

Het januarinummer van de lopende jaargang van Euclides was de special ‘Een eeuw Bottema, een eeuw meetkunde’.
Voor volgend cursusjaar is - naast het gebruikelijke examennummer - opnieuw een themanummer in voorbereiding:

een special over ‘geïntegreerd wiskundeonderwijs’ en de rol van algemene vaardigheden (in het bijzonder onderzoeksvaardigheden) in het wiskundeonderwijs, van lwoo tot en met hbo en wo.

Te denken valt aan functie en doel van praktische opdrachten, het sectorwerkstuk, het profielwerkstuk, geïntegreerde wiskundige activiteiten, probleem-gestuurd onderwijs, enzovoorts. Welke kansen liggen er, welke valkuilen?

De redactie is voor deze special nog op zoek naar een aantal korte bijdragen van lezers (maximaal 500 woorden).
Concept-bijdragen kunnen tot 1 september a.s. ingediend worden bij de hoofdredacteur.

PROCES

Ons land kent veelal twee-ogigen. En de koning dan? En de vlieg?

[Wim Schaafsma]

Met een slordig gebaar gooit Ludmilla het dure Escher-platenboek op de tafel. ‘Zo,’ zegt ze, ‘nu gaan we toch een potje zelfstandig werken…’

’t Is een leuk feest. Gezellige mensen, leuke muziek. Ik raak aan de praat met een onderwijsdeskundige. Een geitenwollensok met een nep-Armanipak. Het gaat over de rotzooi op school. Over ‘hoe leerlingen omgaan met materialen’. De expert praat over het gebrek aan eigenheid in de maatschappij. Niets meer kent zijn eigen geur, zijn eigen ‘thuiszijn’. Maak alles persoonlijker, geef alles een herkenbaar gezicht. Praat niet over: de school, nee, spreek over ‘onze school’.

‘Nou, nou,’ zeg ik tegen Ludmilla, ‘kan je niet wat voorzichtiger zijn met dat boek? Da’s best kostbaar hoor…’ Ludmilla kijkt me met verbaasde ogen aan. Maar met harde ogen zegt ze tegen mij: ‘Ik ga toch aan ’t werk?’
‘Ludmilla,’ lieg ik, ‘dat boek is wel van mijn vrouw.’

Op het podium van een gebruikersbijeenkomst zit de spreker achter een tafeltje, naast hem staat een beamer uit het hippie-tijdperk: de overheadprojector. Hij heeft de innemendheid en het uiterlijk van Geert Mak. Ik ken ‘m een beetje. Ik weet bijvoorbaat wat hij gaat zeggen in zijn verstrengelde ontwikkelaars-uitgevers-persoonlijkheid, en ik ben ’t met ‘m eens.
‘Ach,’ zegt hij, ‘ik weet wel dat ze belangrijk zijn. Ja zelfs noodzakelijk, denk ik, maar… we moeten ons maar niet zo druk maken over cijfers, het gaat in het onderwijs om meer. Waarom het dan gaat, daar kunnen we nog weleens in een ander verband over hebben, maar onderwijs is meer dan cijfers alleen. Het gaat om…’

‘D’n printer duttut niet, ie wolt niet schraiven.’ Een grote vent met een blozend, blij gezicht staat voor me als ik computerlokaal A117 binnenstap. Hij heeft me herkend als parttime-ICT’er. Overal lopen kleine, maar vooral veel grote kerels met brood en drinken in het computerlokaal. Ik herken ze als de metaal- of bouwleerlingen. Ik zie geen leraar. Ik verhef mijn stem en zeg: ‘Iedereen met eten of drinken gaat nu het lokaal uit.’ Tot mijn stomme verbazing doen de aangesprokenen dat ook. Ik doe de printer uit en daarna weer aan. Ik doe een stapel papier in de lade. Uit de printer komt veelvuldig een document over formule-1 wagens. Ik doe de printer weer uit. Snel log ik op de lerarencomputer in als ICT’er en verwijder alle 93 printopdrachten.

’t Is begin februari, het is de eerste dag van twee volle dagen Grote Praktische Opdrachten in vmbo-3. Het is een spektakel van de eerste orde. Alle sectoren doen mee: de bouw, metaal, elektro, verkoop, verzorging, kantoor en de TL-3. Elke leerling moet twee dagen met een vak aan de gang, met leerstof die ‘niet tot de normale leerstof behoort’.
De wiskundeleraren hebben de werkzaamheden verdeeld:
- De bouw, metaal en elektro gaan naar aanleiding van een advertentie van een buffetkastje aan het werk. Een bouwtekening maken, benodigdheden berekenen, en een goede prijsstelling maken. Gelukkig is er clustering van bouwmarkten in de buurt. Na bezoeken aan deze bouwmarkten kunnen ze verschillende prijsstellingen bepalen.
- Verkoop en kantoor kunnen aan de gang met de auto’s en verzekeringen. In vaste situaties de beste en goedkoopste pakketten samenstellen.
- Verzorging zal grote en kleine gezelschappen met receptenboeken van een vijfgangenmenu voorzien. Ook hier prijsvergelijkingen in verschillende supermarkten.
- De TL-3 gaat aan de computer. Escher en de interactieve CD, animatiefilmpjes en internet, veel internet.

In één van de wiskundelokalen zit een jonge collega achter een bureau. Hij heeft ook wat tafeltjes geannexeerd, en overal liggen papieren. In het leerlingengedeelte van het lokaal hebben een tiental meiden de meeste tafels aan elkaar geschoven. Zó hebben ze één grote tafel gemaakt. Ook deze grote tafel is bezaaid met boeken en papieren. Op een tafeltje in de hoek van het lokaal staat een soundblaster. Naar mijn idee komt er een vreselijk kabaal uit. De meiden hebben mijn binnenkomst niet opgemerkt, dat kan ook niet met dat lawaai. Ik zie dat ze met elkaar overleggen. Soms deunt er eentje halfhard wat mee met de muziek, niemand trekt zich daar wat van aan. Het overleg gaat door, het schrijven gaat door, het werken gaat door. Soms bladert er een leerling in een kookboek, wijst wat aan, neuriet wat, een andere leerling knikt en begint te schrijven.

Een vijftal jaar geleden kreeg ik, onder zware druk, een aantal vbo-3 en vbo-4 klassen toegewezen. Het is mijn slechtste jaar in het onderwijs geweest. Ik bakte er niks van, ze braken de tent af. Geen enkele les ging volgens de planning. Nooit heb ik ’t idee gehad: dat heb ik ze toch maar geleerd. Wat ik ook de avond tevoren aan mooie sommetjes bedacht: nooit klikte het.

Op de C-vleugel komt een kluit jonge kerels aangestoeid. Halverwege ontwaar ik een wiskunde-collega, ook geen kleintje. Hij geeft een por hier, krijgt een duw daar. Redelijk ontspannen rolt deze kluwen lokaal C103 in. Als ik even later door een raam naar binnen kijk, zitten de ‘bouwboeren’ achter grote vellen papier te werken. Bij het bureau van de leraar staat een leerling met een groot vel. Er wordt wat overlegd, een vinger gaat cirkelend over een deel van het papier. De leerling gaat zitten, en een andere leerling staat op en gaat naar het bureau. Nooit staat er meer dan één leerling bij het bureau.

Begin december herinnerde ons sectiehoofd de wiskundeleraren aan deze dagen. Hij overviel ons er een beetje mee. Zoals je in het vmbo steeds een beetje wordt overvallen: het is rennen van PTA naar leerwijzer, van decanendag naar sectororiëntatie, van

studiedag naar een persoonlijk ontwikkelingsplan, van periode naar periode, van Roos van Leary naar sectorwerkstuk [1].

Gelukkig heeft de afdeling vmbo deze dagen vier computerlokalen tot zijn beschikking, en de bibliotheek. Staande de sectievergadering besluit ik Escher als onderwerp te nemen. Maar wel Escher voor TL3-leerlingen. Géén vlakvullingen, geen moeilijke projecties. Gewoon veel kijken naar tekeningen, geen berekeningen, en veel computervaardigheden. De verwondering en aansluiten op hun vaardigheden is het thema.
Ik heb veel werk gemaakt van deze Grote Praktische Opdracht. Websites bezocht, email-contacten gehad met Escherfanaten, gebladerd in Escherboeken, geknipt en geplakt. Het uiteindelijk resultaat mag er zijn: ik ben er best een beetje trots op. Ik heb zo'n 'modern' wiskundeboekje gemaakt: ze kunnen helemaal zelfstandig aan de gang, alleen of in groepswerk. Er hoeft geen leraar meer aan te pas te komen. En met veel illustraties.

Op de een of andere manier heeft de GPO-coördinator [2] bedacht dat het wiskunde-onderwerp voor de verkoop wel hetzelfde zou zijn als voor de TL-3. Dit is niet meer te corrigeren in de lessen. Ik baal. Toch heeft een achttal leerlingen van de TL-3 voor wiskunde gekozen. Dit moeten wel sterk gemotiveerde leerlingen zijn... Ze moeten eerst wat bladeren in de boeken in de bibliotheek. Al gauw komt er eentje achter dat ze dezelfde informatie ook op de computer kunnen vinden. Ik wil ze volledige vrijheid geven. Ik wil ze zo nu en dan gadeslaan, en indien nodig helpen.

Ik heb het programma Escher Interactive maar op een paar computers geïnstalleerd. Sommigen zitten achter de verkeerde computers... Ze hebben het voorwoord in het boekje (natuurlijk) niet gelezen. Ze zijn direct naar de opdrachten gedenderd. Ik zie alleen maar ruggen. Ook als later in dit lokaal de hectiek van de andere vakken met eindverslagen losbarst, zie ik nauwelijks leven. Ze gaan maar door. Eén keer zie ik bij het binnenlopen een leerling een racespelletje doen. Zodra hij bemerkt dat ik kijk, stopt hij ermee. Ik was niet van plan er iets van te zeggen. Aan het eind van de dag levert elk groepje keurig zijn verslag in. Er is niets op aan te merken. De volgende dag hetzelfde beeld: ruggen, ruggen, ruggen. Ze moeten een 'Escher.startpagina.nl' maken. Vijftig verwijzingen zoeken, en deze onderverdelen in tien rubrieken.
'Vind je 't een beetje leuk?' Lege blikken kijken je aan. 'Ja, hoor...' En weer gaat de aandacht naar het scherm. Er worden nauwelijks websites uitgewisseld, soms wordt een ander aangestoten bij de animaties. Er wordt serieus geknipt en geplakt bij de Ring van Möbius. Ik heb de elite van de TL-3.

Het printgedrag van de leerlingen is een groot probleem. Er wordt teveel geprint. Soms door ondeskundigheid (druk nog maar eens op de print-knop), soms uit baldadigheid. Meestal uit nonchalance. De ICT-afdeling wil een betaald-print systeem invoeren, maar dat valt nog niet mee met 2500 leerlingen. Tijdens BZ-uren [3] of projectdagen gaan er pakken papier onnodig in de prullenbak.

In computerlokaal A117 heeft een natuurkundeleraar het heft in handen genomen. Het is rustig in het

lokaal. Er zijn geen loslopende leerlingen meer met hompen brood en literflessen cola. Hij heeft letterlijk en figuurlijk naast de printer postgevat. Niemand mag meer printen zonder zijn uitdrukkelijke toestemming. ’t Is een ontzettend vriendelijke man, maar nu zou een bordje ‘PAS OP, hier waak ik’ niet misstaan. En het werkt! Geen gezeur over privacy, geen geneuzel over het zelfsturend vermogen van de leerling. Tenslotte is het niet: *het* papier, maar *ons* papier. Niet *de* toner, maar *onze* toner. Niet *het* milieu, maar *ons* milieu.

Eén van de collega’s bedenkt het plan om naderhand in een café nog wat na te praten. Hij is zeer actief en vasthoudend in het ronselen voor deze informele evaluatie. Uiteindelijk krijgt hij slechts een tiental naar het café op deze doordeweekse dag. Er wordt zeer enthousiast gesproken. Iedereen is laaiend over het ’andere’ contact met de leerlingen. Er is gelachen in supermarkten, bouwmarkten. Bij opnames van een journaal in het Engels, bij powerpointpresentaties, bij eindpresentaties, bij...

En Ludmilla ? Ludmilla schreef bij haar eindverslag: ‘Sorry van dat boek van uw vrouw. Maar ik had het toch niet nodig. Is ’t nou weer goed?’
Ik heb nog een lange weg te gaan om de moderne, zelfstandig werkende leerling te begrijpen.

Noten

[1] De Roos van Leary is een schematisch kader waarin je leiderschapsstijl gevat kan worden. De leerlingen hebben van alle docenten een korte enquête moeten invullen over hun manier van lesgeven. Deze gegevens worden dan in een kader verwerkt, ‘want het is altijd goed, eventjes stil te staan bij je huidige functioneren’.
[2] Een GPO-coördinator is een ASDO (assistent sector directeur onderwijszaken) die de organisatie rond de Grote Praktische Opdrachten coördineert.
[3] Een BZ-uur is een ‘begeleid zelfstandig studeren’-uur. Soms wordt dat serieus ingevuld door leerlingen: ze gaan bijvoorbeeld naar het wiskundelokaal om met of zonder de docent wiskunde te bedrijven. Maar vaak ook niet: de computerlokalen zitten bomvol. Voor de klas zit een docent (als het goed is); deze zit meestal na te kijken, te mailen of handelingsdelen af te vinken. De leerlingen zitten doorgaans te chatten.

Over de auteur

Wim Schaafsma (e-mail: W.C.Schaafsma@greijdanus.nl) is werkzaam aan het Greijdanus College te Zwolle: ‘s morgens als docent TL3/4 wiskunde, ‘s middags ten behoeve van onderwijsapplicatie/image-beheer ICT.

DE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE, EERSTE RONDE 2002

In het vorige nummer van Euclides (77-7, pp. 320-321) werden achtergrond, geschiedenis en organisatie van de Wiskunde Olympiade beschreven. Nu volgt een bespreking van de Eerste Ronde van dit jaar.

[Fred Bosman, Jan van de Craats, Thijs Notenboom]

Inleiding

Op vrijdag 18 januari 2002 vond op de Nederlandse havo- en vwo-scholen weer de Eerste Ronde plaats van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, een wedstrijd voor scholieren met belangstelling voor wiskunde.
Toptalent is voor deelname niet nodig: plezier beleven aan wiskunde is de hoofdzaak. Maar natuurlijk is de Olympiade ook bedoeld om getalenteerden op te sporen en te stimuleren. Voor de besten is er daarom in september een Tweede Ronde, en daarna, wie weet, misschien wel een plaats in het Nederlandse team bij de Internationale Wiskunde Olympiade die in 2003 in Japan zal plaatsvinden.

Enkele opgaven uit de eerste ronde 2002

Bij het maken van de opgaven is alleen het gebruik van pen, papier en tekendriehoek of liniaal toegestaan. Alleen het eindantwoord wordt gevraagd, maar dan wel in exacte vorm. De opgaven bestaan uit twee categorieën, vijf vragen uit categorie A en vier vragen uit categorie B. De opgaven uit categorie A worden gewaardeerd met twee punten, die uit B met drie punten per opgave.
Uit elke categorie bespreken we hier enkele voorbeelden.
In de tabellen staat per vraag het percentage leerlingen vermeld dat de vraag goed heeft beantwoord. Onder het kopje ‘gemiddelde score’ is dat berekend voor de hele populatie. In de vijf kolommen daarnaast is dat per klas weergegeven. De juiste antwoorden staan aan het eind van het artikel.

Opgave A1

In een zak zitten 26 euromunten. Als ik 20 munten uit de zak pak, dan zit er minstens één munt van 1 eurocent bij. Ook zitten er minstens twee munten van 2 eurocent bij en minstens vijf munten van 5 eurocent. Hoeveel zijn de 26 munten in de zak bij elkaar waard?

opgave	gemiddelde score	1, 2 of 3	4h	5h	4v	5v
A1	51	47	30	28	50	59

Commentaar - Het lijkt kansrekening, maar het is een ‘begrijpend lezen’ probleem. Verschil tussen 1, 2 of 3 en havo vinden wij opvallend.

Opgave A2

Je hebt een verzameling van gelijkzijdige driehoeken in drie kleuren: rood, geel en blauw. Je legt met vier van deze driehoeken een grote gelijkzijdige driehoek. Hoeveel verschillende grote driehoeken kun je zo krijgen?

Twee grote driehoeken zijn verschillend als ze niet door een draaiing om het middelpunt in elkaar over zijn te voeren (zie figuur 1, op pagina 360).

opgave	gemiddelde score	1, 2 of 3	4h	5h	4v	5v
A2	11	8	3	4	9	14

Commentaar - Combinatoriek is en blijft lastig. Hebben in deze meetkundige context leerlingen begrepen dat alle driehoeken ook dezelfde kleur mogen hebben? Werkt het plaatje in dat opzicht misschien contra-productief? Het plaatje en de laatste opmerking hebben met elkaar te maken, maar dat blijkt niet één, twee, drie.

Opgave A5

Volgens een vast voorschrift maken we van een drietal getallen (a, b, c) een nieuw drietal als volgt: van (a, b, c) maken we (ab, bc, ca). Dus van $(2, 3, 4)$ maken we $(2 \times 4, 4 \times 3, 3 \times 2) = (8, 12, 6)$.
We beginnen met een drietal verschillende positieve getallen (a, b, c) en gaan dit proces herhalen, dus $(a, b, c) \rightarrow (ab, bc, ca) \rightarrow (ab^2c, bc^2a, ca^2b) \rightarrow \ldots$
Na een aantal stappen krijgen we een drietal (pa, pb, pc), waarbij de drie getallen zich dus weer verhouden als de begingetallen, namelijk als $a : b : c$.
Druk p uit in a, b en c.
Let op! Bij een drietal is de volgorde van de getallen van belang, dus $(2, 3, 4)$ is niet hetzelfde als $(2, 4, 3)$.

opgave	gemiddelde score	1, 2 of 3	4h	5h	4v	5v
A5	17	7	8	6	12	28

Commentaar - Openbaart zich met dit soort vraagstukken (waar het gaat om ‘volhouden’ en op het juiste ogenblik het slimmigheidje van ‘buiten haakjes halen’ zien) het verschil tussen havo- en vwo-leerlingen? Wat zou trouwens het grootste probleem zijn geweest, het even doorzetten of het herkennen van de factor abc?

Opgave B2

Het punt S ligt op de koorde AB van een cirkel zo, dat $SA = 3$ en $SB = 5$.
De straal van de cirkel vanuit het middelpunt M door S snijdt de cirkel in C. Gegeven is $CS = 1$
(zie figuur 2, pagina 360).
Bereken de lengte van de straal van de cirkel.

opgave	gemiddelde score	1, 2 of 3	4h	5h	4v	5v
B2	10	6	5	10	10	13

Commentaar - De onderlinge verschillen in de scores zijn hier veel kleiner. Weer Pythagoras (net als in de hier niet afgedrukte opgave A4), maar wel moet eerst die hulplijn gevonden worden.

Opgave B4

In een kubus met ribbe 6 is een bol met diameter 6 geplaatst. De bol raakt dus inwendig aan de zes zijvlakken van de kubus. We denken de kubus opgedeeld in 216 eenheidskubusjes van $1 \times 1 \times 1$. Hoeveel kubusjes liggen er geheel binnen de bol? Een kubusje met een hoekpunt op het boloppervlak en verder binnen de bol tellen we mee als geheel binnen de bol liggend.

opgave	gemiddelde score	1, 2 of 3	4h	5h	4v	5v
B4	4	1	2	2	4	5

Commentaar - Meetkunde en dan ook nog stereometrisch, dat is kennelijk veel te veel gevraagd. Als de vraag op een cirkel in een vierkant zou zijn gebaseerd, hoe zou de score dan zijn geweest?

Samenvattend

De meetkunde levert de laagste scores op. Bijna de helft (ruim de helft als je A2 ook bij de meetkunde rekent) bestaat uit meetkunde-opgaven. Wiskundigen vinden meetkunde leuk, maar aankomend wiskundigen kennelijk minder. In welk stadium van wiskundige ontwikkeling zou daarin het omslagpunt optreden?

Uitslag eerste ronde 2002

Het aantal deelnemende scholen bedroeg dit jaar 171. Dat is ten opzichte van de 166 scholen die vorig jaar meededen gelukkig weer een stijging, al is die dan ook klein. Het totaal aantal deelnemers was 1834. Ook dat blijkt een stijging, vorig jaar deden er 1798 leerlingen mee.
De opgaven van dit jaar zijn veel moeilijker overgekomen dan de afgelopen jaren. De gemiddelde score bedraagt dit jaar 4,50 van de maximaal te behalen 22 punten. Dat is net iets meer dan 20%. De afgelopen twee jaren waren deze percentages 28 in 2001, resp. 26 in 2000.
De verdeling van de deelnemers over klassen en schooltype blijkt uit de volgende tabel. Ter vergelijking zijn de getallen voor 2000 en 2001 ook opgenomen.

jaar	2e of 3e klas	4h	5h	4v	5v
2000	266	92	72	732	1188
2001	224	85	82	609	798
2002	242	108	127	593	764

De vermindering in het aantal deelnemers treedt voornamelijk op in vwo-4 en –5. Veel docenten zullen menen dat hier de tweede fase en het studiehuis de oorzaak kunnen zijn.

De scholenprijs is dit jaar gewonnen door het Stedelijk Gymnasium in Breda met 80 punten (zie voor een verslag van de prijsuitreiking pagina 361 in dit nummer). De scholenprijs gaat naar de school met de hoogste somscore van de beste vijf leerlingen. Ter informatie: het maximaal aantal te behalen punten is 110. Hieronder volgt de top-tien uit dit 'beste-vijf'-klassement van scholen. Achtereenvolgens genoemd zijn de school met tussen haakjes de docent/wedstrijd-leider, het aantal deelnemers, en de somscore van de beste vijf leerlingen.

Sted. Gymnasium, Breda (W. Cleven) 27 - 80

Piter Jelles Gymnasium, Leeuwarden (E.C. Scholl) 15 - 70

Gymn. Camphusianum, Gorinchem (H.M. Hakkers) 18 - 65

Sted. Daltoncollege, Zutphen (H.M. Odijk) 27 - 65

Stedelijk Gymnasium, Nijmegen (W. van Donk) 9 - 64

SG Augustinianum, Eindhoven (H. de Leeuw) 11 - 62

Elzendaalcollege, Boxmeer (H. Alink) 56 - 61

Dominicus College, Nijmegen (L. Kersten) 12 - 60

Groene Hart Lyceum, Alphen a/d Rijn (P. Roos) 70 - 56

Gymnasium Bernrode, Heeswijk (T. Vermeer) 9 - 56

In de tabel hieronder nog wat aanvullende informatie. De maximale score van 22 punten werd dit jaar door niemand bereikt.

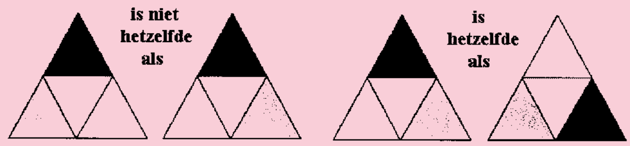
score	aantal deelnemers	score	aantal deelnemers
0	204	12	27
1	4	13	12
2	507	14	24
3	31	15	10
4	453	16	7
5	70	17	9
6	165	18	1
7	99	19	5
8	42	20	4
9	97	21	-
10	26	22	-
11	37		

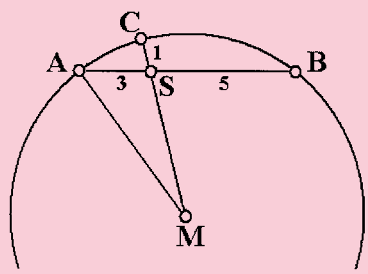
De 99 leerlingen die een score hebben behaald van 12 punten of meer zullen worden uitgenodigd voor de tweede ronde die in september in Eindhoven zal worden gehouden.

Nadere informatie

Opgaven en oplossingen van de laatste tien jaar zijn te vinden op: *http://olympiads.win.tue.nl/nwo/*
U kunt zich opgeven als contactpersoon voor de Nederlandse Wiskunde Olympiade bij Fred Bosman, secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.

FIGUUR 1





FIGUUR 2

Over de auteurs

De schrijvers maken deel uit van het bestuur van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.
Jan van de Craats (e-mailadres: jcr@euronet.nl)
Thijs Notenboom (e-mailadres: j.notenboom@feo.hvu.nl)
Fred Bosman (e-mailadres: fred.bosman@citogroep.nl)
Vragen en/of opmerkingen naar aanleiding van dit artikel zullen zij graag beantwoorden.

Antwoorden

A1: 78 eurocent
A2: 33 oplossingen
A5: $p = (abc)^{21}$
B2: de straal van de cirkel is 8
B4: 56

SCHOLENPRIJS VAN DE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 2002

[Rob Bosch]

Wiskunde is leuker dan je denkt
Wiskunde is leuker als je denkt

FOTO 1
Winnaars 2002

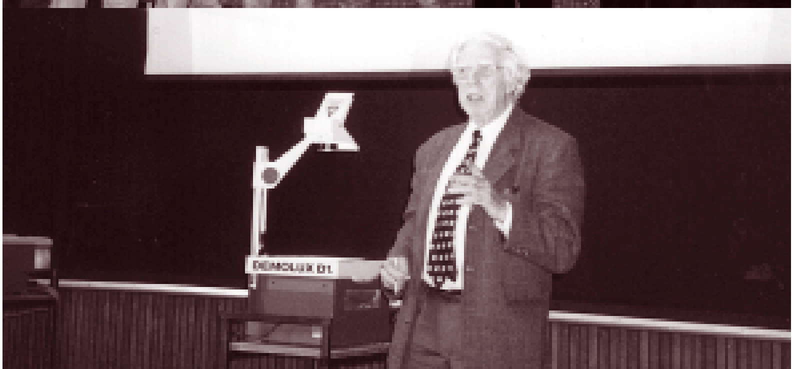


FOTO 2
Van der Blij tijdens zijn gastcollege

Op maandag 18 maart jl. werd in Breda de in 1980 door Shell ingestelde scholenprijs van de Nederlandse Wiskunde Olympiade uitgereikt aan het team van het Stedelijk Gymnasium Breda. De scholenprijs is gekoppeld aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De prijs wordt toegekend aan de school met de hoogste totaalscore van de vijf beste leerlingen. Het Stedelijk Gymnasium behaalde de prijs met een totaalscore van 80 van de maximaal 110 te behalen punten. Daarmee bleef de school het Piter Jelles Gymnasium uit Leeuwarden 10 punten voor (zie pagina 360 voor een overzicht van de eerste tien scholen).

De feestelijke prijsuitreiking werd geopend met een welkomstwoord door de rector van de winnende school, de heer Oosterdag, en een inleiding door de secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, Fred Bosman.
Hierna gaf prof.dr. Van der Blij speciaal voor deze gelegenheid een gastcollege. Van der Blij was overigens niet op vreemd terrein, aangezien hij van 1949 tot 1952 als wiskundedocent aan de winnende school verbonden was.
In zijn college daagde hij in de traditie van de Olympiade de leerlingen uit met een aantal problemen over priemgetallen. In het vraagstuk over welke getallen geschreven kunnen worden als de som van twee kwadraten en het aantal manieren waarop dat dan kan, toonde Van der Blij een mooi verband tussen getaltheorie en meetkunde. Op zijn college waren de beide door hem in zijn inleiding genoemde uitdrukkingen van toepassing: wiskunde is leuker *dan* je denkt en wiskunde is leuker *als* je denkt.
Na het gastcollege vond de uitreiking van de scholenprijs plaats door de voorzitter van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, prof.dr. J. van de Craats. Deze liet in zijn inleiding de bepaald rooskleurige situatie zien voor afgestudeerde wiskundigen, zowel wat betreft werk als het daaraan verbonden salaris.
De vijf leerlingen Matthijs Melissen, Frank Tieskens, Willem Cleven, Joost Bekken en Johan Kouter kregen behalve enkele cadeautjes een oorkonde uitgereikt. De aan de scholenprijs verbonden wisselbeker werd daarna door de vertegenwoordiger van SG Pantarijn uit Wageningen, de winnaar van vorig jaar, aan de begeleider van het winnende team, de heer W. Cleven, overhandigd. Hierna bedankte de rector de leerlingen die voor een fraaie muzikale omlijsting van het evenement hadden gezorgd. Een genoeglijk hapje en drankje sloten een buiten regenachtige en binnen feestelijke middag af.

Scores van het winnende team

Matthijs Melissen (Breda)	18 punten
Frank Tieskens (Breda)	17 punten
Willem Cleven (Chaam)	17 punten
Joost Bekken (Breda)	15 punten
Johan Kouter (Zevenbergen)	13 punten

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is redacteur van Euclides, waarin hij ook de rubriek 'Wiskunde met kleur' schrijft.

WISKUNDEONDERWIJS WERELDWIJD EN EEN GEZELLIGE TIJD

Studenten van lerarenopleidingen uit verschillende landen wisselen ervaringen en inzichten uit in de quality class. Vervolgens bezoeken ze een internationale conferentie.

[Evelien Bus, Claudia Vijftigschild]

Inleiding

Eind juli 2001, Verbania, Italië. Rappe motorbootjes en logge veerboten doorsnijden het Lago Maggiore, de zon staat hoog en op de kant ziet het bruin van de mensen. In het dorpje daarachter vind je aan weerszijden van de smalle straatjes hoge, aardekleurige huizen en etalages gevuld met modieuze kleding, brood, pasta en pesto.
Wij, studenten aan de lerarenopleiding van de Hogeschool van Utrecht, waren tien dagen op deze paradijselijke plaats. Met onze 'collega's' uit Canada, Tsjechië en Polen namen we deel aan de *quality class*. We hadden het erg gezellig en praatten veel met elkaar over het studenten- en docentenleven in Montréal, Praag, Kraków en Utrecht.
Aan het eind van ons artikel beschrijft onze docent, Lambrecht Spijkerboer, wat de quality class inhoudt.

Onze bijdrage

Tijdens de eerste drie dagen van de quality class gaven de deelnemende studenten workshops aan elkaar. Er was ook een middag ingeruimd voor een bijdrage van ons. Voorafgaand aan de quality class maakten we een opzet hiervoor, in een Italiaanse ijssalon in Utrecht - om alvast de sfeer te proeven. We wilden een goed beeld geven van wat kenmerkend is voor de Nederlandse wiskundedidactiek. In het Nederlandse wiskundeonderwijs neemt het constructivisme een vrij grote plaats in. Dit houdt in dat de leerlingen de wiskundige regels als het ware zelf ontdekken. Hierbij wordt de realiteit vaak gebruikt als bron voor wiskundig handelen. Zo kwamen we bij het onderwerp 'realistisch wiskundeonderwijs'.
We kozen voor twee voorbeelden, één uit de onder- en één uit de bovenbouw, om het misverstand te voorkomen dat realistische wiskunde alleen geschikt is voor het niveau van de onderbouw.
Als voorbeeld uit de onderbouw namen we de heks met de ketel met warme en koude blokjes (uit Moderne wiskunde, deel 1a) om leerlingen te leren rekenen met negatieve getallen.

 Dit is een typisch voorbeeld van constructivistisch onderwijs, omdat de leerlingen de rekenregels zelf ontdekken. Toch is het geen mooi voorbeeld van 'realistisch wiskundeonderwijs', omdat de context niet zo realistisch is. De context is echter wel voorstelbaar.
Als voorbeeld uit de bovenbouw kozen we voor een voorbeeld van een exponentieel groeiende plant in een vijver (ook uit Moderne wiskunde). Via dit voorbeeld leren leerlingen breuken in exponenten te interpreteren.
In de workshop wilden we gebruik maken van een constructivistische vorm van werken. Dat houdt in dat de deelnemers eerst een les realistische wiskunde moeten ondergaan, voor we vertellen wat de principes zijn achter deze didactiek. We wilden de workshop afsluiten met een discussie over realistisch wiskundeonderwijs.

Reacties van de anderen op onze workshop

Onze docent had ons voorbereid op enige kritiek op de context van de heks, onder andere omdat deze context alleen voor optellen, aftrekken en vermenigvuldigen bruikbaar is en niet voor delen. Maar de andere studenten waren juist positief. Ze wilden graag elementjes uit onze workshop toepassen in hun eigen

lespraktijk. Wel kwam er een inhoudelijke kanttekening. De Tsjechen vonden dat één context niet voldoende is om een nieuw wiskundig begrip aan te leren. Als leerlingen het optellen en aftrekken van negatieve getallen alleen maar associëren met het verhaaltje van de heks, hebben ze wederom een trucje geleerd. Daarom is het nodig dat de leerlingen het begrip ook in andere contexten tegenkomen om in te zien dat het algemener toepasbaar is. Er is duidelijk een grens aan de bruikbaarheid van dit didactische model, maar dat zegt weinig over de strategie van wiskundeonderwijs middels realistische contexten. Ook werden veel praktische bezwaren aangevoerd. Hoe konden zij ooit aan realistisch wiskundeonderwijs doen, als het curriculum overvol is en/of de heersende opvattingen hiermee strijdig zijn?

De andere workshops

Wij vonden de workshop van de Poolse studenten het meest opvallend. Zij hadden het onderwerp ‘wiskundedidactiek’ anders geïnterpreteerd dan wij. Niks knutselen of reflecteren, maar pagina’s vol abstracte wiskundeproblemen om op te zweten; bijvoorbeeld:

Excercise 18

Solve inequality $\dfrac{2+m^{2x}}{1-m^{x}} > -6$

At foundation, that parameter $m \in (0;\ 1)$.

Ze zetten hierbij het competitie-element in om ons aan het werk te krijgen. Alle deelnemers waren na afloop onder de indruk van hun niveau van formele wiskunde op de middelbare school.

Ook de Tsjechen verbaasden ons, maar dan precies in tegenovergestelde zin. Zij gaven een gevarieerde workshop met verschillende werkvormen, waarin ze gebruik maakten van meer open wiskundige problemen en het concept ‘leren door doen’. Ze lieten ons bijvoorbeeld knutselen met lege pakken sinaasappelsap en stokjes. Met behulp van de stokjes, die we in de pakken prikten, konden we de verschillende vlakken van de balk markeren en konden we onderzoeken of de lijnen elkaar snijden of kruisen.
Wij hadden verwacht dat de workshops van de Polen en de Tsjechen grote overeenkomsten zouden vertonen, maar zowel inhoudelijk als op het gebied van de presentatie was dit dus niet zo.

De Canadezen vertelden dat hun hele schoolsysteem op dit moment wordt getransformeerd naar een meer leerling- en procesgericht systeem. Er wordt volop geëxperimenteerd met nieuwe didactische methoden. Wij zagen hun experimenteerzin in de workshop terug. Ook zij maakten gebruik van verschillende werkvormen en lieten ons zien dat wiskunde op een speelse manier kan worden geleerd.
Ze demonstreerden bijvoorbeeld een leuke manier om waarschijnlijkheid en kans te introduceren. Ze gooiden 200 dobbelstenen door de ruimte en deelden ons in groepen in die dobbelstenen met een bepaald nummer moesten oprapen en tellen. Vervolgens maakten ze op het bord een frequentiegrafiek. Vanuit hier bouwden ze het begrip kans op.

Wij hebben erg genoten van deze workshops. Iedereen uit de groep was gemotiveerd en deed actief mee. We hielpen elkaar door kritische vragen te stellen. Er was een prettige sfeer, van respect en waardering. Het Engels bleek uiteindelijk geen struikelblok te zijn voor een goede inhoudelijke discussie.

De conferentie

De conferentie werd georganiseerd door CIEAEM (Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques - internationale commissie voor studie en verbetering van wiskundeonderwijs). Het onderwerp van de conferentie was wiskundige geletterdheid in het digitale tijdperk (mathematical literacy in a digital era). Centraal stond hoe het wiskundeonderwijs kan worden ingericht opdat het zinvol is voor àlle leerlingen.
Vol verwachting gingen we deze conferentie tegemoet. We hoopten dat het net zo inspirerend zou zijn als de voorgaande dagen. Maar voor ons studenten bleek het helemaal niet zo gemakkelijk inhoudelijk van de conferentie te profiteren. Ten eerste was ons niet altijd duidelijk waar een spreker het in essentie over had, of welke boodschap hij over wilde brengen. Ook hadden we graag meer willen vragen en bediscussiëren. Hoewel een 'working group' en een 'workshop' suggereren dat er ruimte is voor vragen en discussie, bleek dit door tijdnood bij de sprekers nauwelijks het geval te zijn. Daarnaast ervoeren een paar van de studenten, dat vragen en opmerkingen van studenten vaak als weinig interessant worden afgedaan door onderzoekers. Bovendien kwamen we weinig ècht nieuwe invalshoeken tegen. Dit gaf ons het idee dat het Nederlandse wiskundeonderwijs behoorlijk progressief is.
Toch was er elke dag wel een interessant stukje. Een voorbeeld hiervan was de bijdrage van Alan Bishop. Hij gaf een workshop speciaal voor de deelnemers van de quality class. Hij vertelde over verschillende telsystemen in New Guinea, over de zes basale wiskundige activiteiten die in alle culturen voorkomen (tellen, plaatsen, meten, ontwerpen, spelen, uitleggen), hij liet ons een paar wiskundige spelletjes zien en liet ons reflecteren op het docentschap. Wij genoten ervan, omdat we actief bezig waren en omdat hij met ons in discussie ging.

Werken in de zon

De quality class heeft ons inhoudelijk wel wat opgeleverd. We hebben bijvoorbeeld nog eens goed nagedacht over realistisch wiskundeonderwijs. We waren het eens met de kritiek van onze workshop-deelnemers dat één context niet altijd genoeg is om een wiskundige vaardigheid aan te leren. Verder merkten we dat de door ons gekozen voorbeelden helemaal niet zo realistisch zijn. Vervolgens realiseerden we ons dat het niet makkelijk is een overtuigende realistische context te vinden. Toch is een breed arsenaal van dergelijke contexten noodzakelijk.
Daarnaast genoten we ervan dat de andere studenten zo onder de indruk raakten van de Nederlandse wiskundedidactiek en er veel over wilden weten. Het was leuk om onze kennis over te dragen.
Tenslotte hebben we een beeld gekregen van het wiskundeonderwijs in een aantal andere landen.
Daarnaast hebben we genoten van Verbania. Het was eerlijk gezegd af en toe wel eens moeilijk om niet op het strandje te gaan liggen, wanneer we op de conferentie verwacht werden. Bovenal vonden we het een erg gezellige tijd met onze groep, vooral in de avonduren, op de Italiaanse terrasjes.

Over de auteurs

Evelien Bus studeerde wiskunde aan de Universiteit Utrecht en de lerarenopleiding van de Hogeschool van Utrecht. Zij werkte als docente wiskunde op het Niftarlake College in Maarssen.
Claudia Vijftigschild volgt dezelfde lerarenopleiding. Zij werkte als docente wiskunde op het Minkema College in Woerden.
Reacties op dit artikel zijn welkom bij evelienbus@hotmail.com en c.vijftigschild@student.feo.hvu.nl

WAT IS DE QUALITY CLASS?

[Lambrecht Spijkerboer]

Uitwisselingsproject

De quality class is een uitwisselingsproject voor studenten wiskunde. Lerarenopleidingen uit verschillende landen worden uitgenodigd studenten af te vaardigen. De afgelopen jaren participeerden reeds studenten uit Portugal, Engeland, Zweden, Italië, Zwitserland, Polen, Canada, Tsjechië en natuurlijk Nederland.
De deelnemende instituten formeren een groep van twee tot vier studenten. De studenten bereiden onder begeleiding van hun docent in eigen land een workshop voor van ongeveer drie uur. Gedurende tien dagen komen de studenten samen in een stad waar een internationale conferentie over het wiskundeonderwijs wordt georganiseerd. Zo mogelijk valt daarbij de keus op de CIEAEM-conferentie, soms een Himed-conferentie. Drie dagen voorafgaande aan de conferentie wordt gestart. Elke studentengroep uit een land presenteert zijn workshop in een morgen- of middagbijeenkomst. De onderwerpen voor zo'n workshop zijn vrij en dus is de variëteit meestal groot. In ieder geval is een vast onderdeel de presentatie van het nationale schoolsysteem.
De werkvormen zijn zeer verschillend. Er wordt vooral een beroep gedaan op actieve deelname. 's Avonds gaat de discussie gewoon door, er is dan meestal geen georganiseerd programma. Soms wordt er een kleine excursie georganiseerd.
Na de eerste drie dagen gaat de internationale conferentie van start. De studenten hebben elkaar al beter leren kennen en voelen zich dan ook niet zo snel verloren in een grote groep van mensen met veel ervaring in het wiskundeonderwijs en -onderzoek. Gedurende de conferentie wordt altijd één van de conferentiegangers uitgenodigd speciaal voor de quality class een extra presentatie te houden. De groep komt tijdens de conferentie ook nog eens bij elkaar voor een evaluatiebijeenkomst, waarbij naast het uitwisselen van ervaringen wordt gereflecteerd op de opbrengsten van verschillende onderdelen van het programma.

Wat levert het op?

Het begeleiden van zo'n groep studenten is enorm inspirerend. De meeste studenten nuanceren hun blik op het wiskundeonderwijs in eigen land. Zij leren de voor- en nadelen van hun schoolsysteem te onderkennen, door het te kunnen vergelijken met andere schoolsystemen. Wat voor de één vanzelfsprekend leek, blijkt voor de ander niet zo logisch. De belangstelling voor realistisch wiskundeonderwijs groeit en in verschillende landen voltrekken zich gelijksoortige curriculumvernieuwingen. Soms ontdekken studenten dat ze eigenlijk al veel weten, als een onderzoeker tijdens zijn presentatie gedachtengoed aanhaalt waarvoor in de opleiding ook aandacht is geweest. Door de discussies met buitenlandse studenten wordt het belangrijk je eigen opvattingen over wat in jouw ogen goed wiskundeonderwijs is nog eens aan een kritische blik te onderwerpen.
Gaandeweg de periode van de quality class zie je studenten die aanvankelijk wat terughoudend waren, zich meer en meer mengen in de discussies. Natuurlijk speelt de beheersing van de Engelse taal daarbij een rol, want de communicatie gaat meestal in het Engels, soms in het Frans. Niet alleen tussen de studenten van de quality class, maar ook met andere conferentiedeelnemers wordt de discussie en uitwisseling van ideeën gemakkelijker. Dit is een van de belangrijkste doelen van dit project: ervaren wat de waarde is van internationale uitwisseling en laten zien dat het mogelijk is van zo'n uitwisseling en conferentie iets te leren wat inspirerend is voor je eigen werk.
Natuurlijk zijn de studenten die zich voor zo'n quality class opgeven niet de eerste de beste. Zij hebben belangstelling voor didactiek, houden van discussies daarover en zijn gretig om van nieuwe ideeën en inzichten kennis te nemen. Dat maakt zo'n groep tot een buitengewoon enthousiast en inspirerend gezelschap.

Over de auteur

Lambrecht Spijkerboer was tot voor kort als lerarenopleider wiskunde verbonden aan de Hogeschool van Utrecht, van waaruit dit project is gestart. Sinds 1996 is hij behalve begeleider van de Nederlandse studenten ook telkens als organisator opgetreden bij de quality class. Vanaf 1993 is hij werkzaam bij APS-wiskunde.
Meer informatie over de quality class via e-mail:
l.spijkerboer@aps.nl

ORSTAT2000-VWO NADER BEKEKEN, DEEL 2

Het eerste deel van de bespreking van dit software-pakket verscheen in Euclides nr. 3 (december 2001). In dit tweede deel aandacht voor de overige modules en een eindoordeel.

[Jos Tolboom]

Inleiding

De Vrije Universiteit is actief op het gebied van wiskunde-ondersteunende software. De programma's VU-Grafiek, VU-Stat, VU-Dif en ORStat worden door Wolters-Noordhoff op de markt van het Voortgezet Onderwijs gebracht.
De vraag die ik in dit artikel zal proberen te beantwoorden luidt: Verdient ORStat2000-VWO van de Vrije Universiteit een plaats in het wiskundeonderwijs naast de WN-software die hierboven staat genoemd? Of is het een zelfs een alternatief?

Samenvatting deel 1

In Euclides nr. 3 heb ik de volgende modulen besproken:
- Dobbel
- Tabellen en grafieken
- Handelsreiziger
- Normale verdeling
- Zes submodulen van de Monte Carlo Simulatie.

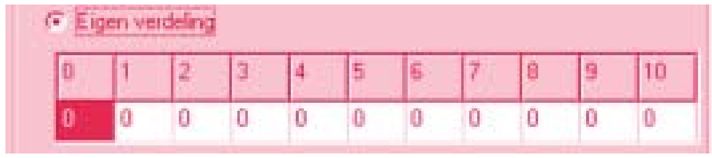
Aan het einde van deel 1 concludeerde ik dat het pakket in ieder geval niet de bestaande software overbodig maakt, maar dat het mede door de in de *Help inhoud* file geleverde theorie, uitleg en opdrachten een aanwinst kan zijn voor een studiehuisachtige opzet van leren.
In dit tweede deel behandel ik de overige modules en probeer ik tot een eindoordeel over het pakket te komen.

Verdere Monte Carlo Simulatie submodulen

Roulette

Natuurlijk mag één van de grote klassiekers onder de kansspelen niet ontbreken in een simulatieprogramma. In de module Roulette worden de effecten van drie verschillende strategieën gesimuleerd: de Big-Martingale, D'Alembert en de vlakke strategie. In de *Help-file* kun je lezen over de achtergronden van roulette als kansspel en worden de twee opties beschreven die de module biedt.
De eerste optie draait om de situatie waarin je met een gegeven aantal fiches van dezelfde geldwaarde begint en doorspeelt totdat je al je fiches verspeeld hebt.
In de tweede optie wordt met computersimulatie de kansverdeling bepaald van je eindkapitaal als je met F fiches begint en doorspeelt totdat je R keer hebt ingezet of totdat je eerder gedwongen bent te stoppen omdat je geen fiches over hebt.
Hoewel er alleen iets aan de beginparameters valt in te stellen, zijn de simulaties toch heel fraai. En ze doen wat simulaties moeten doen: het initiëren van gedachten en formules.
Gevoegd bij de goede uitleg en het aansprekende onderwerp ook weer een succesvolle module. Wel is het jammer dat niet verwezen wordt naar de zelfstandige module Roulette achter de knop op het startscherm (zie figuur 1, links).

FIGUUR 1 Knop voor de modules Roulette en LP



FIGUUR 2 Invoeren van een eigen discrete verdeling

Wet van Benford

Deze relatief onbekende wet uit de waarschijnlijkheidsleer (in mei 2002 geeft Google 17 relevante hits op Nederlandse webpagina's) luidt:
De kans dat het eerste niet-nul cijfer van een willekeurig getal uit een zogenaamde 'natuurlijke' getallenverzameling gelijk is aan het cijfer d wordt bij goede benadering gegeven door $\log(1+\frac{1}{d})$ *voor* $d = 1, 2, \ldots, 9$.
Dat betekent dat niet alle cijfers in getallen die voortkomen uit berekeningen met 'natuurlijke verschijnselen' even vaak voorkomen.
Alweer uitstekende uitleg met een hele mooie historische introductie en een duidelijke praktische opdracht. De interface bij de bediening van de simulatie laat (voor het eerst) enigszins te wensen over; het invullen van de intervallen is tamelijk onduidelijk. Weer is het simulatieprincipe fraai te zien: in het begin van een lange simulatie zie je de resultaten nog veranderen, maar die beweging dempt uit.
Je kunt alleen de waarden van de parameters instellen; de mate van interactie is dus beperkt.

Buffon

De grondlegger van de geometrische kansrekening staat in deze module centraal met zijn bekende empirische methode ter bepaling van de grootte van pi.
Uit de *Help inhoud* file: Stel dat op een vlak met evenwijdig lopende lijnen die een afstand 1 van elkaar hebben random een naald van lengte 1 wordt geworpen. Wat is de kans dat de naald één van de lijnen snijdt?
Buffon toonde aan dat P (naald snijdt één van de lijnen) $= \frac{2}{\pi}$
Alweer duidelijke uitleg en een goede en goed geformuleerde praktische opdracht tot besluit. De simulatie zelf is eenvoudig maar doeltreffend en heeft de didactisch prettige optie om te kiezen voor een al dan niet snelle simulatie: men kiest snel om resultaten te verzamelen, men kiest langzaam om te kunnen zien wat er gebeurt.
Van de uitvoer, waarin gekozen is om de geworpen naalden van de kleuren rood en blauw te voorzien, gaat een bijna hypnotiserende werking uit en van de schermopbouw tijdens een langzame simulatie helemaal.
Ook wordt duidelijk dat het algoritme om de waarde van pi te bepalen niet erg efficiënt is: een run van 10000 worpen levert bijvoorbeeld een 95%-betrouwbaarheidsinterval van [3,1389 ; 3,2351] op, dat wil zeggen een marge tussen onder- en bovengrens van bijna 0,1. Dit kan een start zijn voor een onderzoekende leerling om algoritmen eens met elkaar te vergelijken en te proberen verschillen te verklaren.

Newsboy

Een klassiek probleem dat betrekking heeft op voorraadbeheer bij onzekere vraag, en dat in de praktijk in veel situaties opduikt.
Uit de *Help inhoud* file: 'Een krantenverkoper heeft voor de ingang van het Centraal Station zijn of haar business. De vraag naar kranten varieert van dag tot dag. Stel dat door de week de gemiddelde vraag naar kranten per dag gelijk is aan 200. De krantenverkoper slaat 's ochtends vroeg bij het krantenconcern een aantal exemplaren van een bepaalde krant in tegen een inkoopprijs van € 1,00 per krant. De krant wordt verkocht voor € 1,50 per stuk. Voor elk exemplaar dat op het eind van de dag over is krijgt de krantenverkoper € 0,50 terug van het krantenconcern. Tevens nemen we aan dat de krantenverkoper "boetekosten" van € 0,10 maakt voor elk exemplaar van de krant dat nog gevraagd wordt nadat de krantenverkoper door zijn voorraad heen is (denk in dat de krantenverkoper tegen een bedrag van € 1,60 per krant extra exemplaren koopt bij de kiosk wanneer de vraag groter is dan de ingeslagen voorraad). Wat is de gemiddelde netto winst per dag als de krantenverkoper aan het begin van elke ochtend 200 exemplaren van de krant inslaat?'
Aan het einde van de *Help-file* staat een vijftal situaties als die van de krantenverkoper model voor een praktische opdracht rondom dit type probleem.

FIGUUR 3 In te stellen parameters bij de module Risk

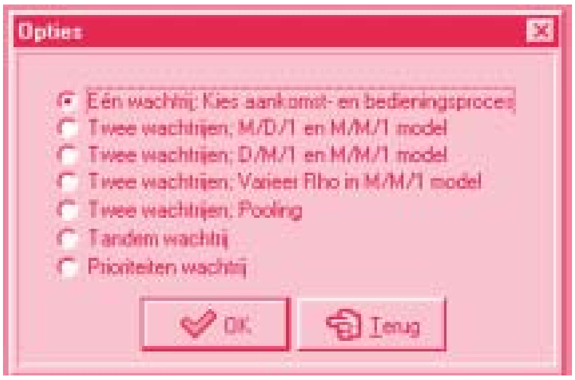
Het simulatieprogramma is mooi. Heel fraai is de keuze uit een drietal kansverdelingen volgens welke de vraag naar kranten zou kunnen verlopen:
1. De bekende uniforme verdeling op het interval [a, b] waarin a en b in te voeren zijn door de gebruiker.
2. De discrete driehoeksverdeling is een discretisatie van de driehoekskansdichtheid.
3. Een zelf op te geven discrete kansverdeling (zie figuur 2).
Het is jammer dat de uitvoer onder de knop Data wel de verwachte opbrengt per simulatie vermeldt en een 95%-betrouwbaarheidsinterval, maar dat die gegevens niet snel af te lezen zijn uit de grafische uitvoer.

Legio Risk

En uiteraard mag in een simulatieprogramma over kansrekening een module over beleggingsfondsen niet ontbreken. De theoretische achtergrond die in de *Help-file* wordt beschreven is tamelijk abstract geformuleerd. De vwo-leerling die zijn tanden daar in zet, moet van goeden huize komen om het zonder hulp van de docent allemaal te snappen. De kern van het verhaal is: Simulatie is dé methode om te laten zien dat het nemen van gemiddelden als inputwaarden tot een totaal verkeerd beeld kan leiden in situaties van onzekerheid.
De kernvraag is: iemand zet in een beleggingsfonds een bepaald kapitaal in voor een bepaalde periode. Aan het einde van ieder jaar gedurende die periode wil hij een bepaald bedrag van het kapitaal opnemen om in het komende jaar iets leuks te doen. Hoe groot mag dat jaarlijkse bedrag zijn opdat hij aan het einde van de periode niets over houdt?
In figuur 3 is te zien welke parameters de gebruiker allemaal kan instellen. Tevens is er een merk-waardigheid te zien: wat betekent de informatie 'min 1; max 10' die te zien is wanneer men de cursor over de invoervelden *Kans op een gelijkblijvend rendement* (die denkelijk tussen 0 en 1 moet liggen) en *Opnamebedrag* beweegt?
De opzet van de simulatie wordt wel bereikt: met name de parameter *Kans op een gelijkblijvend rendement* (ofwel: de onzekerheid van de situatie) heeft een grote invloed. Overigens wordt wel steeds uitgegaan van symmetrie: de kans dat het rendement x stijgt is even groot als de kans dat het rendement x daalt.
In de uitvoer is aanvankelijk niet duidelijk wat de verticale as precies voorstelt. Wel goed is dat in het uitvoervenster nog even de waarden van de parameters staan vermeld waarmee gedurende de simulatie is gerekend.
De *Help-file* biedt helaas geen voorbeeld voor een praktische opdracht met deze module. De creativiteit van de docent zelf zal hier uitkomst moeten bieden.

Wachtrijsimulatie

'Maakt het verschil of er bij een wachtrijsituatie (bijvoorbeeld in de supermarkt of het postkantoor) door drie bedienden achter drie loketten of kassa's gewerkt wordt met één wachtrij per loket of kassa, of met een gezamenlijke rij?' Die vraag heeft iedereen zich wel eens gesteld. De module Wachtrijsimulatie gaat in op dit probleem. De module gaat vergezeld van een zeer uitgebreide *Help-file* waarin de theorie achter wachtrij-analyses heel duidelijk wordt uitgelegd en van achtergronden wordt voorzien. Zo is er zelfs een paragraaf *De psychologie van het wachten*. De meerderheid van de mensen heeft het gevoel altijd de verkeerde rij te kiezen in wachtrijsituaties. Wiskundig gezien is dat niet mogelijk.
Daarnaast telt de module maar liefst tien voorbeelden van praktische opdrachten. Ze variëren van vrij eenvoudig uitvoerbaar door eenvoudigweg de aanwijzingen in te voeren in het programma, tot behoorlijk ingewikkelde opgaven waarin de situatie moet worden vertaald naar een wachtrijprobleem. Maar het programma moet wel worden beheerst om die opdrachten te kunnen maken.
Erg goed is de knop *Data* op het uitvoervenster waarmee de grillige grafische uitvoer nog eens cijfermatig wordt samengevat.
Het programma heeft mogelijkheden voor zeven verschillende simulaties van wachtrijen in verschillende situaties (zie figuur 4). Al deze opties



FIGUUR 4 Alle mogelijkheden van de module Wachtrij

worden goed uitgelegd in de *Help inhoud* file. Maar ook hier is het zo dat een vwo-scholier er een grote kluif aan heeft om dit alles zonder hulp van de docent te kunnen begrijpen. De belangrijkste vraag: welk model moet men gebruiken in welke situatie, is voor veel scholieren erg lastig te beantwoorden.
Al met al is ook dit weer een prachtige module die zeer veel mogelijkheden biedt voor vraagstellingen die regelrecht uit het dagelijks leven komen.
Natuurlijk mankeert er altijd wat: persoonlijk vind ik het jammer dat in het internettijdperk geen aandacht is besteed aan de relatie tussen wachttijdproblematiek, de routes die IP-datapakketjes over het internet zoeken en het handelsreizigersprobleem. Maar iedereen zal iets missen dat direct bij zijn of haar belevingswereld aansluit; zo breed is dit aandachtsgebied.

Roulette

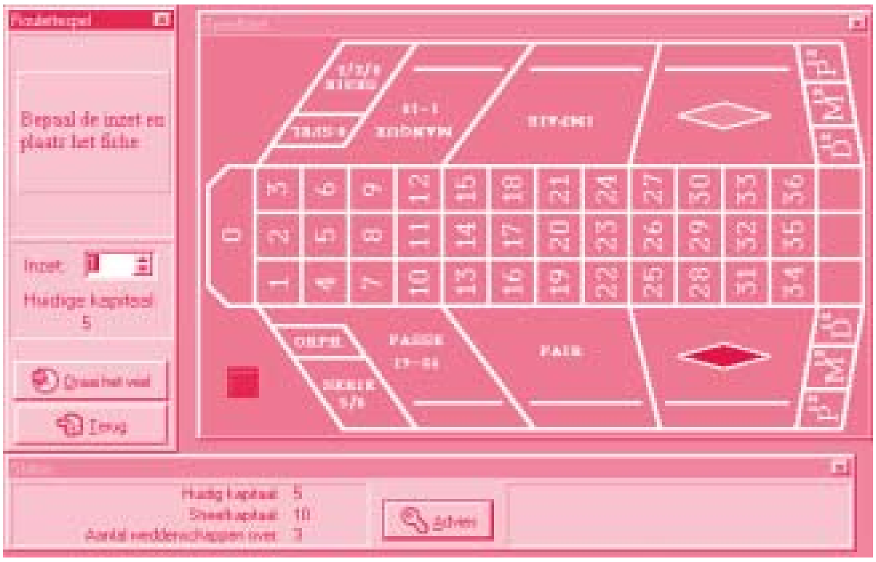
In een softwarepakket over simulaties en kansrekening mag een module over roulette uiteraard niet ontbreken. In de module Monte Carlo werden verschillende strategieën gesimuleerd. Hier kan de leerling zelf fiches inzetten en de draaitafel een zwiep geven. ORStat2000 pakt behoorlijk uit: de leerling kan kiezen uit vele zaken. Allereerst tussen zelf spelen en optimale strategieën bekijken. De module leent zich dus uitermate goed voor een zelfstandige verkenning van het probleemgebied. In de theoretische achtergrond voorziet de *Help inhoud* file. De interface van het spel is mooi: een fraaie groene speeltafel en een fiche (waarvan de waarde is in te stellen) dat met slepen naar een plek op de tafel kan worden gebracht.
Vervolgens kan met de knop *Draai wiel* de roulette in werking worden gesteld en de leerling ziet de roulettetafel draaien. Gegeven het actuele kapitaal en het streefkapitaal biedt het programma een speeladvies onder de knop *Advies* (zie figuur 5).
De andere optie na starten van de module is *Wiskundig optimale strategieën*. Hiervoor is een gedegen kennis nodig van het type spelen dat Roulette allemaal kent. Gelukkig biedt de onvolprezen *Help inhoud* hier weer soelaas: alles wordt uitgelegd. Bovendien ziet men daar de combinatoriek en kansrekening uitgelegd die achter dit spel zit. Onder deze optie kan een leerling het verschil in winkansen zien tussen de door de computer berekende optimale strategie en een zelf gekozen strategie. Ook voor deze module geldt dat het mogelijk is de intuïtie te versterken door wiskundige theorie van een experimenteeromgeving te voorzien. Bijzonder geschikt dus voor het wiskundeonderwijs.
Overigens is het gezien de aanwezigheid van deze module naast de Monte Carlo simulatie van Roulette interessant om met de klas na te denken over de vraag: wat is eigenlijk een simulatie?

Lineair programmeren (LP)

Deze module stelt me teleur. De invoer en de uitvoer zijn volledig karaktergeoriënteerd. Dat wil zeggen dat men alleen via het toetsenbord gegevens kan invoeren en dat de uitvoer alleen tekstueel is. Terwijl een van de belangrijkste doelstellingen van het gebruik van computerprogramma's inzichtbevordering is. De randenwandelmethode is grafisch uitstekend weer te geven en zal op die manier een didactische bijdrage kunnen leveren. Het icoontje waarmee de module kan worden geactiveerd (zie figuur 1, rechts) suggereert bovendien een grafische oplossing.
Op de manier waarop deze module is opgezet, is hij eigenlijk alleen goed in het onderwijs te gebruiken als controlemiddel achteraf: klopt de oplossing die ik zelf heb gevonden met de oplossing die door de computer is uitgerekend? Dat is zeker nuttig, maar de gebrekkige uitvoer blijft een gemiste kans.
De *Help inhoud* is wel weer van goede kwaliteit. Er wordt duidelijk uitgelegd wat LP is en wat de simplexmethode doet. Bovendien wordt een viertal opdrachten met contexten gegeven die de module aanmerkelijk verlevendigen en voldoende duidelijk maken waarom lineair programmeren zo'n belangrijke techniek in de praktijk is.

Kortste pad

In deze module wordt duidelijk gemaakt dat in netwerken (schematisch als een orthogonaal assen-



FIGUUR 5 De interface van de module Roulette

stelsel weergegeven) van enigszins realistische grootte het zelfs voor de snelste computers onmogelijk is de lengte van alle routes in het netwerk te berekenen en zo het kortste pad te vinden. Helaas ontbreken praktische opdrachten die de gepresenteerde theorie en methodiek in een voor een leerling aansprekende context plaatsen. Een voor de hand liggende opdracht zou kunnen zijn: wat zegt de wiskundige theorie over de verschillen tussen de Bijziende Heuristiek en de Bijna Bijziende Heuristiek? Zou je een snelheidswinst in procenten verwachten op grond van deze theorie? Strookt deze winst met een ‘long run’ simulatie? Dat laatste zou je om redenen van arbeidsintensiteit tot groepsopdracht kunnen maken.
Voor de docent is hier nog een taak weggelegd om leerlingen verschillen tussen algoritmen en heuristieken duidelijk te maken. Bovendien valt via de module en de gepresenteerde recursie aan te haken bij de vwo-stof over discrete modellen.
In de module is een zeer fraaie optie opgenomen om de leerling zelf het kortste pad via de knoppen ‘omhoog’ en ‘rechtsaf’ te laten intekenen en dit pad te laten vergelijken met het optimale pad. Je zou, ter oriëntering op de probleemstelling, twee leerlingen naast elkaar ook wedstrijdjes kunnen laten doen wie het kortste pad vindt. Dit wordt in de klas altijd gewaardeerd.
Het goede van de module zit in de eenvoud en consistentie; hij doet precies wat je zou willen dat hij doet:

1. Bepalen van de grootte van het netwerk.
2. Keuze tussen random-afstanden tussen de knopen of zelf in te stellen -vaste- afstand. Die laatste optie bevat voor mij overigens een onduidelijkheid: bij een vierkant netwerk is de optie overbodig want dan zijn alle routes even lang. Maar bij een niet vierkant netwerk ($n \times m$, met $n \neq m$) verschijnt toch opeens een gedeelte in de graaf met random-lengtes.
3. Zelf een route bepalen of de computer dat laten doen via een geselecteerde heuristiek.
4. Vergelijken van de verschillende uitkomsten.

Het is wel jammer dat in de module niet wordt teruggekoppeld naar de module Handelsreiziger.
Al met al een mooie module waarmee leerlingen, indien van een goede opdracht voorzien, met veel plezier zullen werken.

Interface en algemene indruk

In het programma wordt de gebruiker tot een vrij strikte navigatie gedwongen: eerst window sluiten, dan nieuwe keuze maken. Bij het verlaten van een module moet dat zelfs expliciet bevestigd worden (zie figuur 6).
Het geheel maakt een duidelijke, maar ook enigszins verouderde indruk, als een programma dat voor MS DOS is geschreven en waaraan later Windows mogelijkheden zijn toegevoegd. Zo wordt bijvoorbeeld nergens gebruik gemaakt van de mogelijkheden van de rechter muisknop.
Soms was het goed geweest als er nog een professionele tekstschrijver naar de *Help-file* had gekeken. Hoewel de insteek duidelijk goed is, sluipt er bij de wetenschappers af en toe toch nog wat jargonnistisch taalgebruik in. De alinea-indeling laat soms te wensen over, zodat de tekst bij tijd en wijle wel heel erg als een massief blok op de lezer dreigt te storten (hoe jonger de mensen, des te gevoeliger ze hiervoor zijn). Soms zijn de zinnen wat krom en soms staan er zelfs wat tekstverwerkerachtige fouten in. Of wordt er binnen een vraag verwezen naar onderdelen b) en c) terwijl de vragen met gehele getallen 2 en 3 genummerd zijn. Op zich allemaal niet dodelijk, maar het was eenvoudig te verhelpen geweest. Af en toe zorgt de wat slordige lay-out wel voor onduidelijkheid. Het is jammer dat zoiets relatief simpels de goede mogelijkheden van de programmatuur te kort doet.
De software heeft een goede bescherming tegen foute invoer: ik heb allerlei vreemde waarden ingevoerd en telkens gaf het keurig aan dat de gebruiker de fout inging. De al eerder vermelde scheiding tussen de modules heeft ook een voordeel: het maakt interferentie tussen code heel lastig en daarmee het

FIGUUR 6 Bevestiging van een Terug-keuze

programma zeer robuust: in de testperiode is het niet één keer gecrasht.
De komma wordt ingevoerd met de punt, zoals op de meeste (grafische) rekenmachines.
Het op zichzelf staan is extreem doorgevoerd: schakelen tussen de modulen is niet mogelijk. Wie een module wil starten, moet eerst de actieve module afsluiten met een *Terug* knop (zie bijvoorbeeld figuur 2, 4, 6, 7) en dat ook nog eens een keer bevestigen. Bovendien wordt inhoudelijk nooit verwezen naar andere modulen, terwijl er toch duidelijke verbanden bestaan tussen de wiskunde achter de verschillende modulen. Een wiskundige en een eindredacteur hadden dit gezamenlijk in de *Help inhoud* eenvoudig kunnen realiseren.
De standaard-instellingen voor de exponenten leveren op het TFT-scherm van mijn notebook soms onleesbare tekens op. Dat was te voorkomen geweest door in de instellingen een iets groter corps te kiezen.
Al met al zijn dit absoluut geen fouten die het pakket ongeschikt maken. Leerlingen van tegenwoordig zijn gewend aan het WWW en daarop staan vele en ergerlijker imperfecties dan hier vermeld. Zij zijn pragmatisch genoeg om daar niet over te vallen wanneer het hun wel iets oplevert. En bijna alle modulen van ORStat2000 zijn zo gebouwd en gedocumenteerd dat dat wel het geval is.
Het startscherm van het programma is een beetje amateuristisch en doet zeker geen recht aan de uitstekend geprogrammeerde en zeer uitgebreide mogelijkheden van het programma.

Conclusie

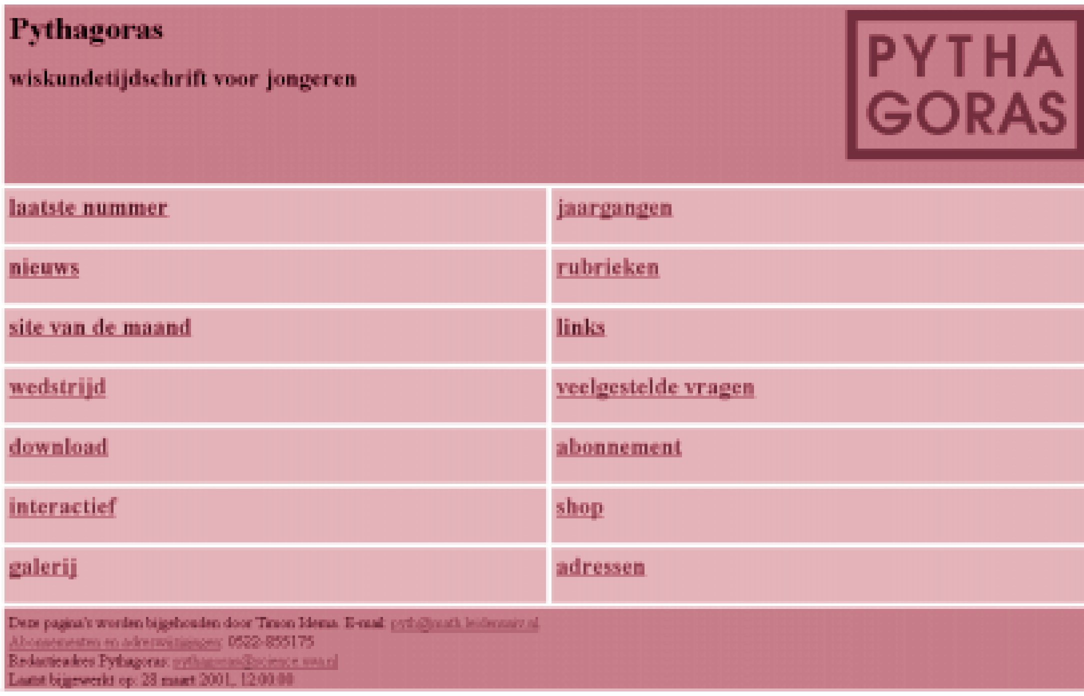
Het pakket heeft grote mogelijkheden ter ondersteuning van wiskundelessen. De didactische mogelijkheden van het ingebouwde lesmateriaal, hoewel niet uniform over de modulen verdeeld, zijn zeer aantrekkelijk. Men kan er een groot aantal praktische opdrachten zo uit halen en met een beetje goede wil is een Zebra-blok aan de hand van dit programma ook zo opgezet.
Eigenlijk zijn alle opmerkingen die ik heb gevonden tijdens mijn test te scharen onder de noemer ‘schoonheidsfoutjes’.
Het pakket is zeer zeker niet duur in aanschaf: de software wordt aan scholen verkocht in een ‘site-license-versie’ voor de all-in prijs van € 170. Deze site-license-versie geeft recht op gebruik van de software op het netwerk van de school voor een onbeperkt aantal pc’s voor een onbeperkte tijd en het recht een kopie van de software aan de leerling van de school te verstrekken voor thuisgebruik.
Zeker onder deze gunstige voorwaarden mag het pakket eigenlijk op geen enkele school voor havo/vwo ontbreken. Het maakt andere programmatuur niet overbodig, maar is een zeer welkome aanvulling daarop.
Ik beloofde in deel 1 van deze recensie ‘algemene criteria waaraan wiskundig-didactische software moet voldoen om succesvol te zijn’. Gezien de lengte van dit artikel, veroorzaakt door de grote mogelijkheden van dit pakket, is het verstandiger deze criteria in een volgend artikel te formuleren.

Software

Lucien Klaassen, Erwin Kalvelagen, Peter Schram, Henk Tijms: ORStat2000-VWO voor Windows, Vrije Universiteit afd. Econometrie, Amsterdam.
Te bestellen via http://www.econ.vu.nl/ectrie (klik op VWO-scholen) of telefonisch: 020-4446010.

Over de auteur

Jos Tolboom (e-mailadres: j.l.j.tolboom@fwn.rug.nl) is redacteur van Euclides en is verbonden aan de Rijksuniversiteit Groningen als coördinator van de digitale leeromgeving. Daarnaast is hij docent en onderzoeker. Eerder werkte hij mee aan het ontwikkelen van educatieve software bij Wolters-Noordhoff.



WISKIDS EN PYTHAGORAS: PYTHAGORAS INTERACTIEF

[Chris Zaal]

Doelen van WisKids zijn: enthousiasme voor wiskunde bevorderen bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, en belangstelling bevorderen voor de exacte vakken. WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO). Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO. Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door het ministerie van OC&W, de Stichting Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro.
Meer informatie: *www.fi.uu.nl/wiskids* of per e-mail: *wiskids@fi.uu.nl*

PYTHAGORAS

Online index

Het wiskundetijdschrift Pythagoras kreeg de afgelopen twee jaar via e-mail veel vragen van leerlingen die een praktische opdracht of een profielwerkstuk aan het maken waren. Vragen in de trant van: heeft er in Pythagoras ooit iets gestaan over tovervierkanten, bevriende getallen, het getal pi, over de driehoek van Pascal, en ga zo maar door.
Deze vragen kon de redactie maar slecht beantwoorden, omdat men zelf geen kennis had van de ongeveer 2000 artikelen die in de loop van 40 jaar Pythagoras verschenen zijn. Om aan dit vacuüm een eind te maken, zijn we bezig voor onze lezers een online index te maken op *alle* in Pythagoras verschenen artikelen. Dit werk wordt uitgevoerd in het kader van het WisKids-project.

Hulp gevraagd

De bedoeling is dat deze index tot stand komt met hulp van een brede kring van medewerkers en belangstellenden. Er is een interface gebouwd waarin medewerkers via internet met een password kunnen inloggen op de Pythagoras-site. Online kunnen dan artikelbeschrijvingen toegevoegd worden aan de index. Niet de artikelen zelf worden ingevoerd, maar auteur, titel, trefwoorden en een korte samenvatting.
Vanaf de homepage wordt de index doorzoekbaar voor iedereen. Het is niet de bedoeling alle artikelen daadwerkelijk beschikbaar te maken. Wel zullen we proberen veelgevraagde artikelen stap voor stap toe te voegen aan de homepage.
Op de site van Pythagoras zijn de tussenresultaten al te zien. De index is evenwel nog niet af. Daartoe zoeken we nog medewerkers. Dus: heeft u oude jaargangen van Pythagoras in de kast staan, en zou u mee willen werken door een jaargang voor Pythagoras te helpen indexeren, meldt u zich dan aan door een e-mail te sturen naar onze webmaster Timon Idema (*pyth@math.leidenuniv.nl*).

Historie

Het tijdschrift Pythagoras bestaat inmiddels al zo'n 40 jaar. Het is in 1960 opgericht door Bruno Ernst. Twee jaar later richtte hij het zusterblad Archimedes op, een natuurkundetijdschrift voor jongeren. De jaren zeventig waren de vette jaren. Beide bladen hadden toen samen zo'n 70.000 abonnees. Tegenwoordig heeft Pythagoras ongeveer 3000 betalende abonnees, Archimedes 1500. Oorspronkelijk werden Pythagoras en Archimedes uitgegeven door Wolters-Noordhoff. In 1984 werden beide bladen afgestoten wegens dalende abonneeaantallen. Via IVIO, Memo en NIAM kwam Pythagoras terecht bij het Wiskundig Genootschap. Archimedes wordt tegenwoordig uitgegeven door de NVON, de vereniging van natuurkundedocenten. Beide bladen zijn nog steeds gelieerd via de mogelijkheid een combinatieabonnement te nemen.

Vernieuwing

Na de magere jaren tachtig en negentig is Pythagoras bezig een nieuwe toekomst op te bouwen. Pythagoras werd traditioneel gedragen door enthousiaste individuen, die in hun eentje 'de kar trokken'. Sinds deze jaargang is daar verandering in gekomen. De organisatie heeft meer structuur gekregen in de vorm van een aparte hoofd- en eindredactie. Het vernieuwde redactieteam heeft zich enthousiast gestort op de toekomst. Alleen: de redactie van Pythagoras is nog steeds een mannenbolwerk, en daar willen we van af. Redactrices zijn daarom van harte welkom!

Homepage

Pythagoras heeft al een homepage sinds de opkomst van internet in 1996: *http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/*. In het begin was dat een lineaire pagina. In de loop van de tijd is die ene pagina uitgegroeid tot een flinke homepage. Deze fungeert als aanvulling op de papieren inhoud, als uithangbord, maar ook als communicatiemedium. We willen meer en meer met leerlingen communiceren via de homepage. Echter, de homepage is, als elektronische aanvulling op de papieren uitgave, altijd een beetje een ondergeschoven kindje geweest. Daarom is Pythagoras op zoek naar een webredacteur, i.e. iemand die binnen de redactie verantwoordelijk is voor de inhoud van de homepage (zie de advertentie elders in Euclides).

Toekomstplannen

De Pythagoras-index is een van de onderdelen van het Pythagoras-project binnen Wiskids. Andere onderdelen zijn: interviews met wiskundigen (in samenwerking met 'Wiskunde in Perspectief'; zie Euclides 77 (6), pp.290-292) en een verdere vernieuwing van de homepage, onder andere via een discussieforum over de inhoud van de artikelen en via het aanbieden van werkbladen, die vanaf de homepage gedownload kunnen worden.

Over de auteur

Chris Zaal (e-mailadres: zaal@math.leidenuniv.nl) is onderzoeker aan en studievoorlichter van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden. Hij is uitgever van Pythagoras en projectleider van het Wiskids-deelproject Pythagoras. Hij is tevens voorzitter van het WisKids-projectteam. Verder is hij uitgever/hoofdredacteur van het Nieuw Archief voor Wiskunde.

PROPAGANDA VOOR WISKUNDE?

Een boekbespreking van Richard Mankiewicz' *Het Verhaal van de Wiskunde*

[Harm Jan Smid]

Negatief imago

Vorig jaar verscheen bij uitgeverij Uniepers de Nederlandse versie van *The Story of Mathematics*, een rijk geïllustreerd en fraai uitgegeven boek van de hand van Richard Mankiewicz [1]. Er is nogal wat reclame gemaakt voor dit boek. Het past in een trend waarin geprobeerd wordt wiskunde te bevrijden van een verondersteld negatief imago van een abstracte, koude en onbegrijpelijke wetenschap, beoefend door wereldvreemde *nerds*. Nieuw is dat imago niet. Al zo'n kleine 200 jaar geleden werd in ons land beweerd dat de studie van wiskunde leerlingen 'koud en gevoelloos' maakte. Toen waren dat defensieve geluiden, geuit in verzet tegen de opmars van wiskunde binnen het onderwijs. Nu, anno 2002, heeft wiskunde allang een dominante positie binnen het voortgezet onderwijs, maar lijkt het vak niettemin zelf in het defensief geraakt.

Propaganda-offensief

De achtergrond voor het publiciteitsgolfje rond wiskunde wordt dan ook gevormd door de zorg omtrent het – althans in de westerse wereld – teruglopende aantal studenten, docenten en beoefenaren van wiskunde en andere harde bèta-vakken. Richard Mankiewicz is in Groot-Brittannië actief in dat propaganda-offensief voor wiskunde. Voor wie de term 'propaganda' wat onprettig in de oren klinkt: Mankiewicz gebruikt dat woord zelf. *Propaganda Mathematica* is de titel van een voordracht die hij in 1998 hield op een seminar dat handelde over het thema *The Production of a Public Understanding of Mathematics*. De publicatie van het boek *De Wereld van de Wiskunde* moet ongetwijfeld als een onderdeel van dat 'productieproces' opgevat worden. We moeten het boek dus niet beoordelen als een wetenschappelijke studie, waarin nieuwe inzichten en feiten gepresenteerd worden, want die pretentie heeft het niet. Het boek wil een bijdrage leveren aan een beter begrip en een meer positieve attitude voor wiskunde. Of zo'n beter begrip bij het brede publiek op zijn beurt dan werkelijk bijdraagt aan een grotere keuze voor wiskundige studies en makkelijker *fund raising* (ook een expliciet door Mankiewicz genoemd doel) voor wiskundig onderzoek, laat ik nu maar buiten beschouwing.

Pretenties

Al heeft het boek dan geen wetenschappelijke pretenties, aan andere pretenties ontbreekt het niet. Het wil laten zien 'hoe de wetenschap van de wiskunde nauw verbonden is met de belangen en de ambities van de beschavingen waarin ze bloeide', zo zegt Mankiewicz in zijn inleiding. Zo'n boek bestond volgens Mankiewicz nog niet, en hij heeft het nu geschreven.

Het zou mooi zijn als dat waar was. Maar het is natuurlijk niet waar, alleen al omdat die verbanden

helemaal niet zo simpel aanwijsbaar zijn - als ze er al zijn. Want wat zijn eigenlijk de ‘belangen en ambities’ van al die beschavingen? Waarom zou het wonderbaarlijke ontstaan van de axiomatische meetkunde in de Griekse Oudheid verbonden zijn met de ‘belangen’ van de handelsstad Athene, of de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde door Lobachevsky en Bolyai met de belangen of ambities van tsaristisch Rusland en de Oostenrijks-Hongaarse dubbelmonarchie? Natuurlijk zijn er wel wat geijkte voorbeelden op dit gebied, zoals de bevordering van de invoering van de Arabische getallen door de behoeften vanuit de koophandel, en de opkomst van de astronomie en cartografie in de 16e en 17e eeuw door de toenemende scheepvaart. Maar veel verder komt ook Mankiewicz niet, en dat is geen wonder.
Die hele pretentie wordt door Ian Stewart in zijn voorwoord al om zeep geholpen door zijn uitspraak ‘Wiskunde is de gezamenlijke inspanning van een relatief klein aantal ongewoon getalenteerde individuen dat de grenzen van ruimte en tijd heeft doorsneden alsof ze niet bestonden.’ Dat daarmee Mankiewicz’ hele programma onmogelijk wordt verklaard, is kennelijk beide heren niet opgevallen. Laten we dit soort pretenties dus maar echt rangschikken onder de categorie ‘propaganda’, en laten we hopen dat de argeloze lezer daardoor niet al te zeer teleurgesteld wordt.

De koning verdeelde bovendien (zo wordt gezegd) het land over alle Egyptenaren door ze ieder een vierkant stuk land te geven en maakte hier zijn inkomstenbron van door er een jaarlijkse belasting op te heffen. Iedereen die door de rivier van een deel van zijn land werd beroofd, ging naar Sesostris [farao Ramses II, ca. 1300 v.C.] en verklaarde wat hem was overkomen; de koning stuurde dan zijn mensen om het in ogenschouw te nemen en het verloren gegane stuk land op te meten, zodat het bedrag van de belasting evenredig kon worden verminderd. Hiervan leerden naar mijn mening de Grieken de kunst van de meetkunde; de zonneklok en de zonnewijzer en de verdeling van de dag in twaalven kwamen niet uit Egypte naar Hellas, maar uit Babylonië.

Fraaie uitvoering, maar...

Wat krijgt die lezer dan wel? In ieder geval een fraai uitgevoerd boek, op mooi papier (al glanst het wel wat hinderlijk onder het lamplicht) en met prachtige illustraties. De schrijver heeft getracht zijn boek te verlevendigen met een fors aantal vertaalde fragmenten uit originele werken en citaten van bekende wiskundigen. Jammer genoeg zijn die in een slecht leesbaar quasi-antiek lettertype afgedrukt, maar het idee is aardig (zie illustratie).
De eerste helft van het boek, zo’n 12 van de 24 hoofdstukken, zal voor de geïnteresseerde leek – en daarvoor zal het boek toch bedoeld zijn – ook wel te volgen zijn, al moet zij of hij nog wel wat, door de voorwoordschrijver flink beschimpte, schoolwiskunde paraat hebben. Maar zoals in alle boeken die proberen een overzicht van de geschiedenis van de wiskunde voor niet-wiskundigen te bieden, beginnen daarna de problemen. Of we het nu leuk vinden of niet, zo vanaf de zeventiende eeuw moet je echt al heel wat meer van wiskunde afweten om te begrijpen waarover het gaat. Het helpt niet om te beweren dat ‘wiskunde niet over ontoegankelijke symbolen, maar over ideeën gaat’, zoals Mankiewicz in zijn inleiding zegt. De ideeën zijn terug te vinden in theorieën, opgebouwd uit begrippen, beweringen en redeneringen die nu eenmaal niet zo simpel zijn en een geduchte training en technisch vermogen vragen om ze te kunnen volgen.

Voorbeeld: Galois

Zo valt er over Galois’ leven een mooi verhaal te vertellen en dat doet Mankiewicz dan ook. Maar zinnetjes als ‘Door evenwel het abstractieniveau van de algebraïsche oplossingen van vergelijkingen op te voeren naar het abstractieniveau van de algebraïsche structuur van hun bijbehorende groep kon Galois aan de hand van de eigenschappen van zo’n groep voorspellen in hoeverre zo’n vergelijking was op te lossen’ zullen iemand die niets van groepentheorie weet, laat staan van Galoistheorie, ook maar iets zeggen. En de tragische levensgeschiedenis van Galois hangt in zekere zin misschien wel samen met de politieke omstandigheden van de restauratie in het Frankrijk van 1830, zoals Mankiewicz ook suggereert, maar met de wiskundige ideeën van Galois is zo’n verband natuurlijk in het geheel niet te leggen.

Conclusie

Wat overblijft is een mooi uitgevoerd boek, met een aardig eerste deel en een bijna onvermijdelijk veel minder geslaagd tweede deel. De opgewonden propagandateksten rond het boek moeten we maar niet al te serieus nemen; die horen kennelijk bij het wereldje rond marketing, reclame en propaganda waarvan ik het in ieder geval niet betreur dat wiskundigen daar nog niet zo goed in thuis zijn. Ik denk dat de doelgroep, de niet-wiskundigen, er een eindje in zullen lezen, de illustraties nog eens zullen doorbladeren en het boek dan zullen wegzetten met het gevoel dat ze van die rare wiskunde toch eigenlijk nog steeds niet zo veel begrijpen. De vraag is dan ook of het boek ook naar de eigen maatstaven wel een geslaagd product genoemd mag worden. Ik heb mijn twijfels.

Literatuur

[1] Richard Mankiewicz: Het Verhaal van de Wiskunde
191 p., prijs € 27,18
Uitgave Uniepers, Abcoude, in samenwerking met Natuur & Techniek, Amsterdam
isbn 90 6825 259 3

Over de auteur van deze bespreking

Harm Jan Smid (e-mailadres: h.j.smid@its.tudelft.nl) is werkzaam aan de Faculteit ITS, afdeling toegepaste wiskundige analyse, van de TU Delft.

Jaarvergadering/ Studiedag 2002: eerste uitnodiging

[Marianne Lambriex, Jan van Maanen, Gerrit Roorda, Martha Witterholt]

Hieronder staat de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2002 van de NVvW op

zaterdag 16 november 2002

Dit jaar wordt de studiedag georganiseerd in samenwerking met basiseenheid IODID (Initieel onderwijs en Bètadidactiek) van de Rijksuniversiteit Groningen.

Aanvang - 10:00 uur
Sluiting - 16:00 uur

Creatieve oplossingen bij weinig tijd

Als we vanuit het bestuur leden vragen om een activiteit te verrichten voor de vereniging, dan krijgen we uiteindelijk meestal een nee op onze vraag. Niet omdat men het niet wil doen of het niet leuk vindt om te doen, maar de tijd om het te kunnen doen ontbreekt vaak.
Niet alleen binnen de vereniging, maar op vele andere plekken is de klacht dat de wiskundeleraar het te druk heeft om nog andere taken er bij te doen, duidelijk te horen.
Tijdens de opening van de Nationale Wiskunde Dagen 2002 schetste Rob Birkhof zijn werkzaamheden van de laatste jaren. Een citaat uit zijn openingsrede spreekt voor zich:

Je doet eens een projectje: PIT-project, PRINT-project, PRENT-project, PROFI-project en toen de P uitgeput was, het bèta-netwerk en nog meer waarvan ik de naam vergeten ben...
Je bestudeert wat vakliteratuur: Euclides (soms een extra dikke), Nieuwe Wiskrant, Pythagoras en die serie Zebraboekjes en vijf methodes ter bestudering. De mijne telt 20 tekstboeken, evenveel antwoordenboeken, uitwerkingenboeken, handleidingen en proefwerkbundels en nog een paar practicumboekjes en werkschriften; in totaal 111 delen. Op twee complete planken op mijn boekenkast past het al niet meer.
O ja, en ook nog die 56 delen van de Epsilonserie!
En dan ook nog de WiskundEbrief.
Praktische opdrachten: 60%, 40%, 20% toch weer 40% of kies maar, en alles steeds met terugwerkende kracht tot 1 augustus 1998.
Stukken: PTA, Vakleerplan, nieuw PTA, handleiding profielwerkstuk, nieuw PTA, invoeringsplan tweede fase, nieuw PTA.
Je maakt eens een studiereisje, je doet eens mee aan een wedstrijd: Wiskunde Olympiade, A-lympiade, B-lympiade, Kangoeroewedstrijd.
Rekenmachines: GR83, GR83+, GR89, GR92...

En dan sprak hij nog niet eens over het geven van zijn lessen met het bijbehorende voor- en nawerk. En of je nu werkzaam bent in de tweede fase of in het VMBO, veel verschil maakt het bovenstaande citaat daarbij dan niet.
En wat te denken als je in beide werkzaam bent... Tja.
Wordt wiskundedocent..., elke dag anders.

Verenigingsnieuws

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- Opening door de voorzitter Marian Kollenveld
- Jaarrede
- Notulen van de jaarvergadering 2001
- Jaarverslagen (zie hiervoor een volgend nummer van Euclides)
- Decharge van de penningmeester
- Vaststelling van de contributie 2002-2003
- Benoeming van een nieuwe kascommissie
- Bestuursverkiezing en -overdracht

Studiedag met als thema

Creatieve oplossingen bij weinig tijd

Vervolg huishoudelijk gedeelte

Rondvraag

Sluiting

Vandaar dat gekozen is voor genoemd thema van de studiedag, in de hoop dat we iets kunnen bieden dat u tijd kan besparen. We denken daarbij aan subthema's als:

- Leerstof-vervangende PO's en werkstukken
- Inzet van ICT
- Winst door samenwerking van docenten in netwerken
- Ideeën voor de opbouw van een les of een serie lessen
- Actualiteit.

U ziet er is voor een ieder wel iets interessants te vinden. Hoe het een en ander vorm gegeven wordt, laten we u in een volgende Euclides weten.
Dus reserveer in uw agenda:
zaterdag 16 november - NVvWdag

Oproep 1

Omdat er onder onze leden al veel samenwerkingsverbanden bestaan, willen we deze in kaart proberen te brengen, zodat andere belangstellenden zich erbij aan zouden kunnen sluiten. Maakt u deel uit van zo'n veband en wilt u daarover in de openbaarheid treden, neemt u dan contact met ons op.

Oproep 2

Het is vaak bijzonder inspirerend om kennis te maken met praktijk-voorbeelden van collega's. Vandaar de oproep om, als u een werkgroep zou willen leiden die past bij dit thema, contact op te nemen met Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).

In een volgend volgende nummer van Euclides kunt u gedetailleerd lezen wat u kunt verwachten op 16 november a.s.

Puzzel 008

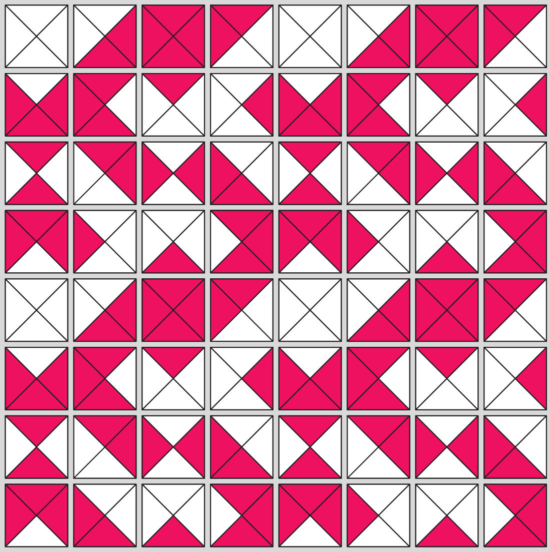
Een vaste redacteur van de puzzelrubriek is helaas nog niet gevonden. Om de lezer ook in de komende vakantie niet puzzelloos te laten volgt hieronder een tweetal problemen dat eerder in Euclides gepubliceerd is, namelijk in de rubriek Recreatie in jaargang 43 (1967-1968) verzorgd door Dr. P.G.J. Vredenduin.

Puzzel 17 – Over convexe vierhoeken

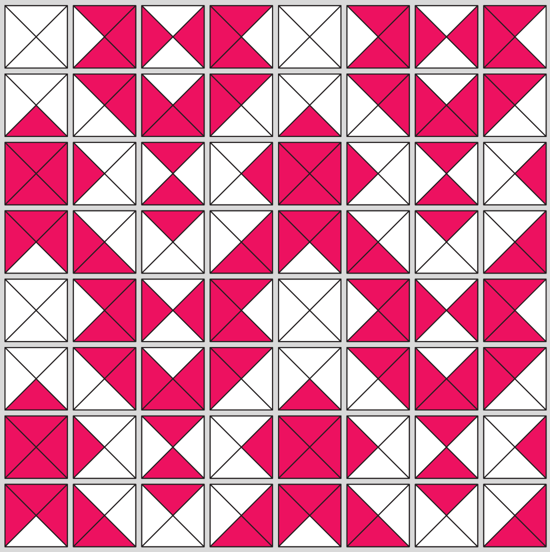
Welke convexe vierhoeken *ABCD* bevatten in hun binnengebied een punt *P* met de eigenschap dat de driehoeken *PAB*, *PBC*, *PCD*, *PDA* gelijke oppervlakte hebben?
(A. van Tooren in Euclides 43, p. 61)

Puzzel 18 – De bal verwachten ...

Enige kinderen spelen een balspel. Elk kind heeft één bal. Op een sein van de spelleider staan allen stil. We nemen aan, dat al hun onderlinge afstanden dan verschillend zijn. Elk kind gooit nu zijn bal naar het dichtstbij staande kind. Daarna laat ieder kind het aantal ballen zien dat hij gekregen heeft. Sommigen hebben één bal, anderen twee, weer anderen drie. Eén kind had zelfs vier ballen, terwijl een ander triomfantelijk zes ballen toonde. Eén ventje was ontroostbaar, want hij had geen enkele bal gekregen.
Is er reden aan te nemen, dat de opdracht niet op de juiste wijze uitgevoerd is?
(Euclides 43, p. 239)



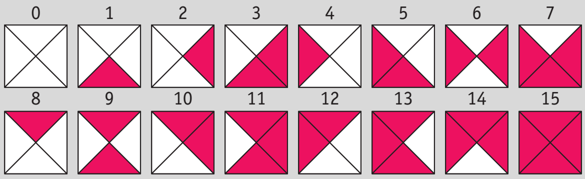
FIGUUR 3



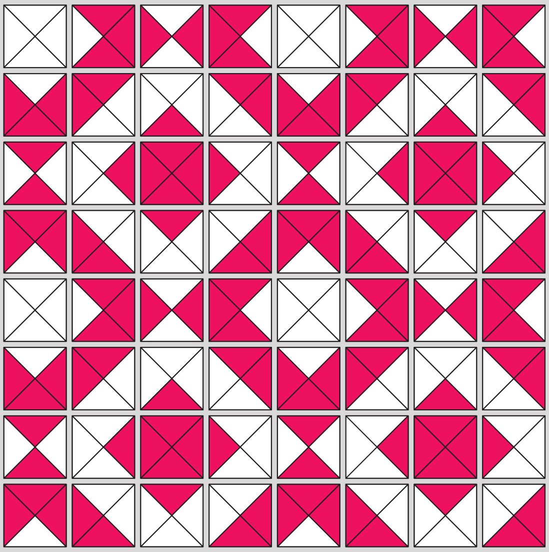
FIGUUR 4

0	11	6	13
7	12	1	10
9	2	15	4
14	5	8	3

FIGUUR 5



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Puzzel 16 - Digitale tegels (Jan Verbakel)
Zoals we in de opgave stelden, zijn er 16 mogelijke tegels, oplopend van 0 tot 15 (zie figuur 1).

We gaan in eerste instantie uit van een 4×4 vierkant waarin alleen de rij- en kolomsommen gelijk zijn, dus 30. Het geval waarbij de hoofddiagonalen ook som 30 hebben, komt later aan de orde.
Bij het bouwen van het 4×4 vierkant vragen we ons eerst af waar de 0-tegel terecht kan komen.
Allereerst stellen we dat we iedere oplossing zó kunnen vervormen dat de 0-tegel links boven ligt. Als we namelijk de bovenste rij onderaan neerleggen, blijven alle rij- en kolomsommen gelijk en wordt ook nog steeds voldaan aan de aansluit-eisen van de kleuren. Dit kunnen we herhalen tot de 0 in de bovenste rij ligt. De kolommen werken analoog: de linkerkolom kan rechts neergezet worden, ook weer net zo lang tot de 0 in de meest linker kolom ligt.

De kandidaten voor de eerste rij beginnen we te bouwen met als begintegel de 0. (Een andere methode is kolomsgewijs werken. Dit geeft een iets ander verloop, maar uiteraard met hetzelfde resultaat.)
Bij het opstellen van deze kandidaatrijen moeten we rekening houden met het feit dat het 2-bit van een tegel hetzelfde moet zijn als het 4-bit van zijn rechterbuurman.
Gegeven de som van 30 krijgen we een relatief klein aantal (11) kandidaten voor de eerste rij. Dit is vrij simpel af te leiden door de som 30 te schrijven als een som van de waarden 8, 4, 2 en 1, waarbij maximaal drie maal de waarde 8 en driemaal de waarde 1 mogen voorkomen, en zelfs maximaal twee maal de waarde 2 en tweemaal de waarde 4. Bovendien geldt de aansluitingseis: 4 rechts naast 2.

Kijken we nu naar de tweede rij, dan vinden we veel meer kandidaatrijen.
Om de kleuren te laten aansluiten bij de eerste rij, moet de bitrij van de waarden 8 in de tweede rij exact hetzelfde zijn als de bitrij van de waarden 1 in de eerste rij. Het aantal mogelijke tweede rijen is bij ieder van de eerste rijen nog vrij klein.

Op dit moment in het oplossingsproces overweegt de puzzelaar doorgaans een programmaatje te schrijven dat de kandidaten genereert. Maar je kunt ook kiezen voor het schuiven met uitgeknipte tegels, met de kleuren erin en de getalwaarden erop, zodat alle eisen snel gecheckt kunnen worden en bovendien duidelijk is welke tegels al gebruikt zijn. En dat leidt toch vrij snel tot de oplossing.
Na de tweede rij kunnen we sneller voortgang boeken door de kolommen van links naar rechts in te vullen.

Menig puzzelaar heeft inmiddels al lang een programma geschreven om de gehele opgave op te lossen. Daar is uiteraard niets op tegen. Maar de lol van de analyse en het handmatig legpuzzelen mis je dan natuurlijk!

Er zijn drie oplossingen van het gereduceerde probleem.
De oplossingen worden gegeven in figuur 2, 3 en 4, waarin het 4×4 vierkant telkens zowel horizontaal als verticaal wordt herhaald.
Alleen de oplossing van figuur 2 geeft een magisch vierkant, inclusief de hoofddiagonalen. Het is zelfs zo dat alle subdiagonalen ook de som 30 opleveren!
Figuur 5 geeft de getallenrepresentatie van de oplossing uit figuur 2.

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de voorlopige verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
1	19 september 2002	6 augustus 2002
2	24 oktober 2002	10 september 2002
3	12 december 2002	29 oktober 2002
4	23 januari 2003	3 december 2002
5	27 februari 2003	14 januari 2003
6	17 april 2003	4 maart 2003
7	26 mei 2003	1 april 2003
8	26 juni 2003	13 mei 2003

dinsdag 20 augustus t/m donderdag 22 augustus
T³ Zomer Symposium te Oostende (België)
Organisatie T³ Vlaanderen en T³ Nederland

vrijdag 23 en zaterdag 24 augustus
Vakantiecursus 2002 te Eindhoven
Organisatie CWI

vrijdag 30 en zaterdag 31 augustus
Vakantiecursus 2002 te Amsterdam
Organisatie CWI

vrijdag 13 september
2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

zaterdag 16 november
Jaarvergadering/studiedag
Organisatie NVvW

zaterdag 23 november (was 9 november)
Ars et Mathesis-dag, Baarn
Organisatie Stichting A&M

vrijdag 29 november
Wiskunde A-lympiade, Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW:
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor € 185,00
Individueel abonnement voor leden: € 34,00
Losse boekjes voor leden: € 8,00
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10).
Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten € 6,00; in de betere boekhandel € 8,00.

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 90 01 65956 X; prijs € 8,00; te bestellen in de boekhandel.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).
Leden: € 22,00; niet-leden: € 28,00 (incl. verzendkosten).
Zie eventueel ook de advertentie in Euclides 76-7 (na p. 288).

WEBredacteur

PYTHAGORAS

Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren, zoekt ter versterking van haar redactieteam een webredacteur (m/v)

De webredacteur wordt verantwoordelijk voor de webpagina's van de homepage van Pythagoras (*www.science.uva.nl/misc/pythagoras*).
Binnen de redactie zorgt hij/zij voor de afstemming van de inhoud van tijdschrift en homepage.

TAKEN

- actief deelnemen aan het redactieteam, waaronder deelname aan de redactievergaderingen (6 x per jaar in Amsterdam)
- verantwoordelijkheid voor de inhoud van de homepage
- verantwoordelijkheid voor een frisse uitstraling
- initiëren van verbeteringen en vernieuwingen
- aansturen van de webmaster

VEREIST

- toegang tot internet
- basale kennis van internettechnologie
- een open oog en oor voor nieuwtjes op wiskundegebied
- een brede wiskundige interesse
- goede communicatieve vaardigheden

GEBODEN

- ondersteuning door een webmaster (in Leiden), die de dagelijkse wijzigingen op de website doorvoert
- technische ondersteuning vanuit de uitgever (content management systeem, e.d.)
- een onkostenvergoeding behoort tot de mogelijkheden

Reacties naar:

- Marco Swaen (hoofdredacteur), *m.swaen@chello.nl*
- Chris Zaal (uitgever), *zaal@math.leidenuniv.nl*

WEBredacteur

Zin in wiskunde?

Nieuw!
***Moderne wiskunde* 8**

Wilt u ook kennismaken met de nieuwe editie? Neem dan contact op met onze voorlichter Sandra Kooijstra.

Telefoon
(050) 522 63 11

Fax
(050) 522 62 55

E-mail
modernewiskunde@wolters.nl

Internet
www.modernewiskunde.wolters.nl

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
T (050) 522 63 31

Wolters Noordhoff