EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

mei
2002/nr.7
jaargang 77

PARAMETERS

REKENEN MET EEN STORTVLOED AAN WOORDEN

WISKUNDEPRIJZEN

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

7

mei 2002 JAARGANG 77

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per verenigingsjaar: € 36,50
Studentleden: € 18,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: € 38,50 per jaar.
Voor instituten en scholen: € 110,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 13,50. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

INHOUD

Aan dit nummer heeft Klaas-Jan Wieringa zijn medewerking verleend. In het vorige nummer had Martha Witterholt vermeld moeten worden als één van de medewerkenden; hierbij is die omissie hersteld.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Examen

Franke in vwo-6 doet volgende week examen wiskunde A1.
Van al mijn leerlingen heeft zij dit jaar het hardst gewerkt. Ze vindt wiskunde nog steeds een moeilijk vak, maar ze is een doorzetter. En daardoor gaat ze het redden. Hoop ik.
Ik kreeg Franke voor het eerst in m'n lessen toen ze voor de tweede keer aan vwo-4 begon. Ze deed verschrikkelijk negatief. 'Wiskunde kan ik niet. Nee hoor, doet u maar geen moeite. Rotvak. En wat hèb je d'r nou an!' Ze bevroor bij voorbaat als ik haar een vraag stelde: 'Weet ik toch niet!'
Maar geleidelijk aan veranderde er iets. Frankes tegenzin ebde weg, haar zelfvertrouwen begon te groeien, en ze begon te knokken. En nu, aan het eind van vwo-6, verwacht ik eigenlijk dat ze met een aardig wiskunde-cijfer zal slagen.
Belangrijker dan dat cijfer als zodanig vind ik het feit dat Franke haar wiskunde-angst grotendeels kwijt lijkt te zijn, dat ze het naar eigen zeggen 'best wel leuk vindt om wiskundesommetjes te maken', en dat ze daadwerkelijk ervaren heeft dat je voor een deel zèlf invloed kunt uitoefenen op de-dingen-die-gebeuren.

Doelen bereikt?

Met examens meten we in hoeverre allerlei leerdoelen behaald zijn. Behaald door onze leerlingen of studenten, en stiekem ook een klein beetje behaald door onszelf?
Kennis en vaardigheden, zeg maar. Meestal op micro-niveau: begripje zus, techniekje zo, eindterm 1 tot en met 175.
De examenperiode kan ook aanleiding zijn tot een terugblik, tot bezinning op de vraag of ook andere doelen behaald zijn.
Ik beperk me nu maar even tot wiskundeonderwijs. Hebben m'n leerlingen een beetje plezier gekregen (of gehouden) in m'n vak? Zijn ze enigszins 'gecijferd' geraakt en daarmee beter toegerust op het dagelijks leven in onze maatschappij? Hoe staat het met hun doorzettingsvermogen; is dat door m'n lessen misschien gegroeid? (Of is het juist verdwenen?!) Schrikken m'n leerlingen niet meer terug van een formule? Durven ze te prutsen-en-proberen? Hebben ze een vorm van wiskundig denken ontwikkeld? Weten ze het belang van een scherpe formulering op waarde te schatten? Hoe staat het met hun nieuwsgierigheid, hun onderzoekende houding? Zijn ze een beetje kritisch geworden, of slikken ze alles voor zoete koek?
Waarschijnlijk heeft ieder van u een dergelijk 'eigen' stapeltje leerdoelen die niet echt met een examen gemeten worden, zeker niet met een centraal schriftelijk examen. Als een aantal van dit soort doelen door veel van uw leerlingen behaald zijn, wordt die 5,9 op het CE dan eigenlijk niet een beetje bijzaak?

Special volgend jaar

De redactie heeft het plan opgevat, volgend jaar een special uit te brengen over de rol van onderzoeksvaardigheden in het wiskundeonderwijs. Dit soort 'algemene vaardigheden' speelt een steeds sterkere rol over de volle breedte van ons onderwijs, van vmbo tot en met wetenschappelijk onderwijs. Denk maar aan praktische opdrachten, het sectorwerkstuk, het profielwerkstuk, geïntegreerde wiskundige activiteiten, probleemgestuurd onderwijs, enzovoorts. Het biedt het schoolvak wiskunde mooie kansen, maar het kan ook knelpunten opleveren.
Wij zijn voor dat themanummer nog op zoek naar een aantal korte bijdragen van lezers (maximaal 500 woorden). Concept-bijdragen kunnen tot 1 september a.s. ingediend worden: redactie-euclides@nvvw.nl, ook voor nadere informatie.

PARAMETERS IN BEELD

Leerlingen in het voortgezet onderwijs vinden het begrip parameter lastig, vooral in het begin. Een introductie met families, vrij gebruikelijk in schoolboeken, vereist niet alleen begrip van het parameterconcept maar ook van de structuur van een bundel grafieken. Een nogal complexe introductie, zeker vanuit didactisch oogpunt. In dit artikel wordt ingegaan op de parameter in een dynamische rol bij het onderzoeken van de grafieken van functies. Een interactieve rol waarmee niet alleen een verantwoorde maar ook aantrekkelijke introductie mogelijk is.

[Carel van de Giessen]

De betekenis van een letter

De betekenis van een letter in een wiskundige uitdrukking hangt in het algemeen af van het soort wiskundige uitdrukking zoals een vergelijking, een formule of een functie. Een letter kan verschillende rollen spelen: het kan een onbekende, een willekeurig getal, een variabele of een parameter zijn. Veel leerlingen hebben dan ook moeite om het verschil in rol te onderscheiden. Een paar voorbeelden om dit toe te lichten:

- in de formule $y = 3x^2 + 7x$ is de letter x de onafhankelijke variabele en de letter y de afhankelijke variabele, zo is de conventie nu eenmaal;
- in de vergelijking $8 = 3x^2 + 7x$ is de letter x veranderd in de onbekende die moet worden opgelost;
- in de uitwerking $3(x - 1) = 3x - 3$ is de letter x een willekeurig getal;
- in de formule $y = ax^2 + 7x$ verschijnt een derde letter. Deze letter a wordt in het algemeen als parameter aangeduid, hoewel dit afhangt van de structuur van de formule en van de context waaraan de formule refereert. Strikt genomen kan de formule van de eerste dan wel van de tweede graad zijn. In het ene geval is x de parameter, in het andere geval is a dat.

En wat te denken van een formule als
$y = kx^2 + k(k - 1)x + k$
Deze is in ieder geval van graad twee.

Bij het oplossen van een wiskundig probleem komt daar nog de moeilijkheid bij dat één en dezelfde letter van rol kan wisselen. Neem bijvoorbeeld de functie $f(x) = 3x^2 + 7x$. Om de nulpunten te vinden moet een vergelijking worden opgelost waardoor de rol van de letter x van variabele die alles kan zijn, verandert in de rol van onbekende met zeer beperkte mogelijkheden.
Een ander voorbeeld van rolwisseling treedt op bij de opdracht de vergelijking te vinden van een lijn $y = ax$ die door een gegeven punt gaat. Tijdens de oplossing verschuift de rol van a van die van parameter naar die van onbekende.
Voor leerlingen is vooral het verschuiven van de ene naar de andere rol van een letter lastig.
Een geschikt didactisch middel is het gebruik van woorden in plaats van letters. Dat geldt zowel voor variabelen als parameters. Bij woordvariabelen worden formules tot woordformules, waarin de relatie tussen afhankelijke en onafhankelijke variabele door leerlingen beter begrepen wordt dan in abstracte formules. In een realistische context is de formule $afstand = 3 \times tijd^2 + 7 \times tijd$ minder abstract dan $y = 3x^2 + 7x$. Bij een rolwisseling geeft een woord meer steun dan een letter om het doel, het oplossen van een probleem, te bereiken.

De introductie van het begrip parameter

Een handige definitie van parameter voor initieel gebruik is niet zo eenvoudig. Bij een eerste inleiding

zullen de leerlingen 'een constante die kan veranderen' wel accepteren, al is de uitdrukking op zichzelf een contradictio in terminis.
Bij het gebruik van abstracte formules rijst bij leerlingen ook vaak de volgende vraag: welke letter stelt een variabele voor, welke een parameter? Alleen maar x en y voor variabelen en a, b, c,... voor parameters gebruiken is niet voldoende en ook niet verstandig.
Om met parameters te kunnen werken moet de leerling de structuur van een formule (door)zien, dus bijvoorbeeld zien dat $y = 2x + 10$ en $y = 8 - 3x$ tot hetzelfde type formule of functie behoren. De rol van een derde letter als parameter kan pas duidelijk zijn, als de structuur van de formule is herkend. Begripsmatig heeft het concept 'parameter' dus een hoger niveau dan het concept 'variabele'. Een leerling kan pas zicht op parameters krijgen als hij/zij zich het concept van variabele eigen gemaakt heeft.
Bij het herkennen van de structuur van een formule en de rol van een parameter daarin kunnen woordformules en woordparameters van nut zijn.
Een formule als $p = \textit{tarief} \times t + \textit{basisbedrag}$ of $y = \textit{hellinggetal} \times x + \textit{begingetal}$ maakt onderscheid tussen de verschillende rollen van variabele en parameter.

Voorbeeld van een introductie van het begrip parameter.
Stel dat de prijs van een taxirit wordt bepaald door de formule $\textit{prijs} = 2 \times \textit{tijd} + 10$, waarin de prijs in euro en de tijd in minuten wordt gerekend. Het getal 2 in de formule geeft het tarief in euro per minuut en het getal 10 is de basisprijs van een rit. In taxi's zitten taximeters (formule), in alle eenzelfde type, ook al zijn de tarieven per plaats verschillend.
De parameterformule is daarom:
$\textit{prijs} = \textit{tarief} \times \textit{tijd} + \textit{basisprijs}$

De rollen van de parameter

In de literatuur zijn door Drijvers verschillende rollen beschreven die parameters kunnen spelen, onder andere die van plaatshouder, veranderende waarde en generalisator.
Deze drie rollen worden hierna kort besproken, steeds gekoppeld aan de grafische representatie.

1. Plaatshouder

In de rol van plaatshouder krijgt de parameter per geval een waarde. Bij elke waarde hoort een grafiek, dus één grafiek tegelijk.
In de formule $y = 2x + b$ bijvoorbeeld, moet op de plaats van b nog iets worden ingevuld; er had ook kunnen staan $y = 2x + ...$ Na invullen van een getal als 3 staat er concreet iets, namelijk de formule $y = 2x + 3$; de grafiek daarvan kan geplot of getekend worden.
Vervolgens kan dit proces dan herhaald worden.
Het karakter van de parameter in deze rol is statisch,

FIGUUR 1 Schuifbalk

de verandering van de waarden gaat sprongsgewijs en tamelijk willekeurig.
De statische rol komt tot zijn recht in algemene formules zoals $y = ax^2 + bx + c$ of $y = b \cdot g^t$.

2. Generalisator, de familieparameter

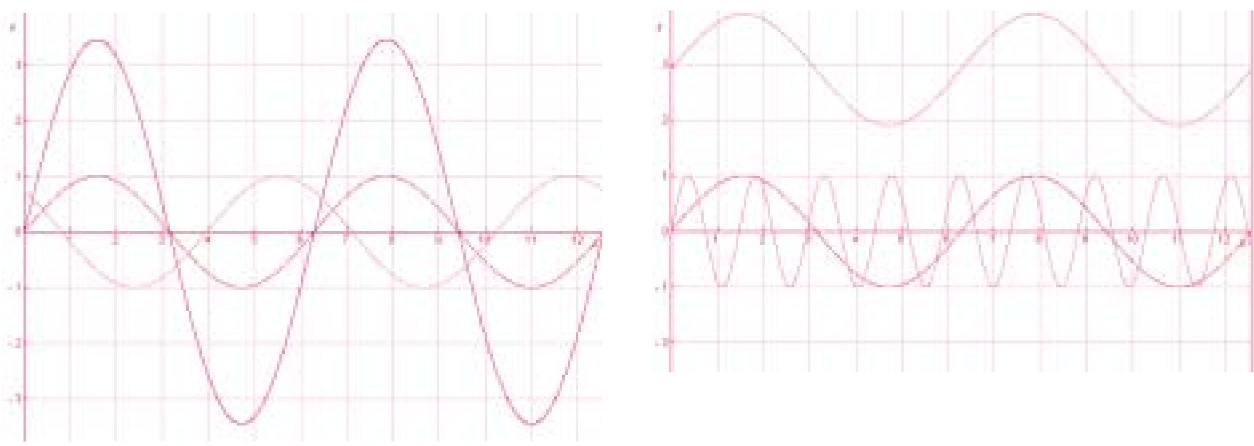
In de rol van generalisator wordt aan de parameter een verzameling waarden toegekend.
Bij deze waarden hoort een verzameling formules of functies, meestal een familie genoemd. De parameter in deze rol heet daarom ook wel familieparameter.
Bij de plaatshouder wordt elke keer één grafiek gemaakt, bij de generalisator daarentegen worden meerdere grafieken tegelijk in één figuur gebundeld.
Bij de formule $y = 2x + b$, met voor b de waarden 0, 1, 2, 3, 4, 5 bijvoorbeeld, hoort een bundel grafieken bestaande uit zes evenwijdige lijnen.
Bundels zijn het grafische resultaat van een verzameling formules, tot stand gekomen door een verzameling waarden van de (familie)parameter. De parameter is het vertrekpunt, ‘bundel’ ligt daarom op een hoger begripsniveau. Het parameterconcept in de rol van familieparameter leent zich goed voor bundels, maar omgekeerd zijn bundels minder geschikt om het parameterconcept te ontdekken. Bovendien kleven enkele didactische gevaren aan het gebruik van de familieparameter om vertrouwd te raken met het parameterbegrip:

- De leerling ziet de parameter als een bundel grafieken; er is een zeker risico dat het concept van parameter en dat van bundel gelijk gesteld worden.
- De leerling kan makkelijk het volgnummer van een bepaalde grafiek uit de bundel verwarren met de parameterwaarde.
- De leerling kan zich afvragen: waarom deze verzameling waarden voor de parameter; waarom gehele getallen zoals vaak gebeurt; waarom deze volgorde, zit daar een wiskundige gedachte achter?
- Bij het oplossen van problemen met behulp van bundels kan het onduidelijk zijn dat het om een bepaalde waarde gaat en niet om de bundel.

3. Veranderende waarde, de schuifparameter

In de rol van veranderende waarde loopt de parameter dynamisch door een interval. Bij elke waarde op het interval hoort één grafiek. Als je de parameter geleidelijk verandert zie je de grafiek geleidelijk mee veranderen - althans als het om brave functies gaat, want er kunnen ook verrassende dingen gebeuren als de parameter geleidelijk verandert.
Voor de parameter in deze rol is de term ‘schuif-parameter’ bedacht.
Op papier of op het bord kun je het dynamisch effect van de schuifparameter niet laten zien, op een moderne computer daarentegen is dat geen enkel probleem. Op het scherm kan de waarde van de

FIGUUR 2 Transformaties van een sinusoïde



parameter met de hand of automatisch worden veranderd, de grafiek volgt deze verandering en je ziet wat er gebeurt. Voor leerlingen is dit een zeer aantrekkelijke, dynamische en interactieve manier om met grafieken om te gaan.

In het onderwijs werd aan plaatshouder en generalisator veel meer aandacht besteed dan aan de veranderende waarde. Dat ligt voor de hand; deze rollen waren makkelijk te visualiseren, in tegenstelling tot de veranderende waarde. De schuifparameter heeft moderne software nodig om tot recht te komen.

Parameter en software

Als in schoolboeken woordvariabelen en woordparameters voorkomen, ligt het voor de hand een grafiekenprogramma te gebruiken dat daar ook mee om kan gaan.
In het educatieve programma VU-Grafiek voor Windows is dat mogelijk en zijn alle drie genoemde rollen van parameter toe te passen, dus ook de familieparameter en de schuifparameter. In versie 2.0 is bij invoer van een formule een optie 'parameter' beschikbaar. Bij het aanvinken van deze optie verschijnt een venster waarin de soort parameter (familie- dan wel schuifparameter) gekozen kan worden. In versie 1.0 kan de parameteroptie via het menu worden geselecteerd.
Bij de familieparameter moeten een beginwaarde, een stapgrootte en het aantal grafieken worden opgegeven. Daarna kan de bundel getekend worden.
Bij de schuifparameter is een domein voor de waarden van de parameter nodig; de defaultwaarden voldoen over het algemeen. Op het grafiekscherm verschijnt onder in het scherm een balk waarin de parameter(s) met de hand dan wel automatisch (versie 2.0) gewijzigd kunnen worden; de grafiek beweegt mee.

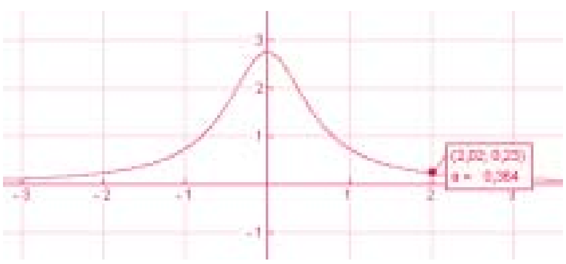
Voorbeelden van de schuifparameter in VU-Grafiek

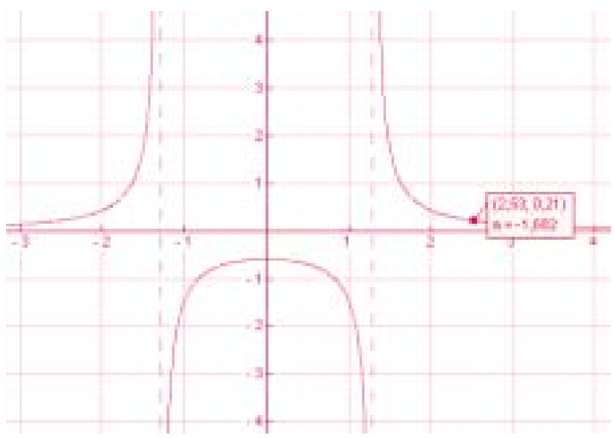
Uit ervaringen op het Almende College (locatie Isala) in de klassen 4 en 5 havo/vwo blijkt de schuifparameter een optie die tot spelen uitnodigt. Met de schuifparameter (zie figuur 1) worden bijzonderheden van een grafiek ontdekt en komt de vraag naar boven waarom je ziet wat je ziet. Omdat de leerlingen zelf bijzondere dingen op het scherm maken is er aandacht en belangstelling. Zien, vragen, begrijpen. De schuifparameter blijkt een krachtig en wiskundig stuk gereedschap. Hierna volgen enkele voorbeelden van het gebruik van de schuifparameter in de klas om de uitspraken hierboven te illustreren.

Onderzoeken van transformaties

Uitgaande van de standaardfuncties $f(x) = x^2$, $f(x) = 2^x$, $f(x) = \sin(x)$ enzovoort, onderzochten de leerlingen het

FIGUUR 3 Grafieken van $y = 1/(x^2 + a)$





gedrag van de grafiek van $y = f(x) + a$, $y = a \cdot f(x)$, $y = f(x + a)$ en $y = f(a \cdot x)$
Met behulp van de schuifparameter gingen ze na wat er met de grafiek gebeurde en vonden zo de verticale en horizontale translaties en deformaties (zie figuur 2). In sommige gevallen is het lastig het verschil te zien tussen horizontale en verticale deformatie. Met een reflectie op de formule kon dan naar een verklaring worden gezocht.
Later bleken de leerlingen geen problemen te hebben met het verklaren van de differentieerregels
$y = f(x) + a \rightarrow dy/dx = f'(x)$ en
$y = a \cdot f(x) \rightarrow dy/dx = a \cdot f'(x)$
Ze wezen op de transformaties die eerder met de schuifparameter waren onderzocht.

Onderzoek van een reciproke functie

De verticale verschuiving van de parabool $y = x^2 + a$ als gevolg van het veranderen van parameter a is voor geen enkele leerling een verrassing. Maar bij de grafiek van de reciproke $y = \dfrac{1}{x^2 + a}$ bleek vreemd gedrag voor te komen (zie figuur 3). De opdracht voor de leerlingen was, te beredeneren waar en waarom de dingen plaatsvonden zoals ze dat zagen gebeuren.

Onderzoek van wortelfuncties

Gegeven waren twee functies, $f(x) = \sqrt{(a + x^2)}$ en $g(x) = \sqrt{(a - x^2)}$
Door met de schuifparameter te spelen bleek dat de ene grafiek altijd te zien was, terwijl de andere soms verdween (zie figuur 4). De opdracht was: waarom en wanneer gebeurt dit? Dit bleek een behoorlijke lastige vraag omdat de leerling goed door moet hebben wat het verschil is tussen een variabele en een parameter.

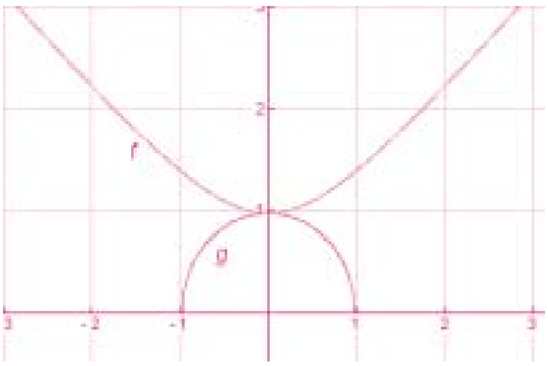
Bijzonderheden zoeken, vinden en verklaren

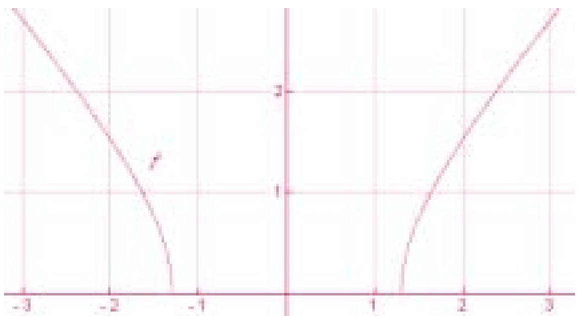
Met de schuifparameter laten de leerlingen grafieken van $f(x) = (ax - 2)^3$ over het scherm bewegen. De opdracht is, opvallende eigenschappen op te schrijven en die vervolgens aan de hand van het functievoorschrift te verklaren.
Er blijken heel wat eigenschappen te zijn, van makkelijk tot moeilijk te verklaren. Enkele daarvan: vast punt op de y-as, of stijgend of dalend, geen toppen, buigpunt beweegt over de x-as, voor a in de buurt van 0 beweegt de grafiek sneller dan voor grote waarden van a.

Problemen oplossen met de schuifparameter

Dit voorbeeld is gebruikt bij een demonstratie van de schuifparameter in een klassegesprek.
Een cheeta begint wat hongerig te worden als er een zebra langs komt. Lukt het de cheeta de zebra te pakken? Eerst moet de cheeta op gang komen en dan een flinke sprint trekken.

FIGUUR 4 Grafieken van wortelfuncties





De topsnelheid is hoog maar kan niet zo lang volgehouden worden.
De tijd-afstand-grafiek bestaat uit drie stukken: start; topsnelheid; vermoeid.
De zebra holt met constante snelheid.
De formules zijn gebaseerd op realistische data en staan in de afbeelding (zie figuur 5). Het hangt af van de beginafstand of de zebra een prooi wordt of niet. Een veilige beginafstand is cruciaal; om die te vinden komt de schuifparameter te hulp.

Curve fitting

Enkele leerlingen kwamen zelf met dit voorbeeld. Ingevoerde meetgegevens vormden een polygoon (zie figuur 6). De leerlingen wilden weten welke formule goed bij deze polygoon aansloot, de soort formule was bekend. Met hun kennis van standaardfuncties en transformaties maakten ze een parameterformule. Door manipulatie met de schuifparameter konden de waarden van de parameters worden geschat.

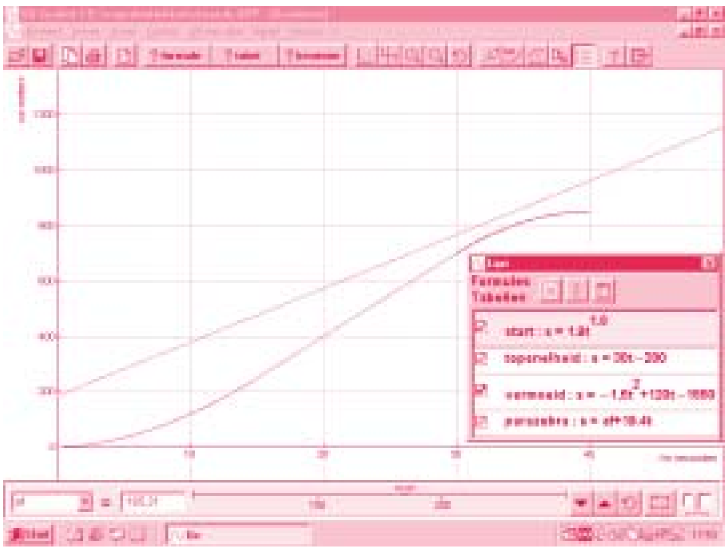
Zelfgemaakte raaklijnen

In elk punt van een grafiek is de vergelijking van de raaklijn op te stellen. Als je een parameter gebruikt, heb je in één keer alle raaklijnen. Als voorbeeld gold de parabool $y = x^2$. In het punt (3, 9) bleek de helling 6 te zijn en de raaklijnvergelijking $y = 6x - 9$. Daarop werd het punt (3, 9) 'geparametriseerd' tot het punt (p, p^2) en vervolgens kwam de raaklijnvergelijking in parametervorm tot stand: $y = 2px - p^2$.
Met de schuifparameter is het resultaat een raaklijn die langs de parabool glijdt (zie figuur 7). Met de familieparameter is het resultaat een verzameling raaklijnen die de parabool omhullen – een aardige demonstratie van het onderscheid tussen schuif- en familieparameter.

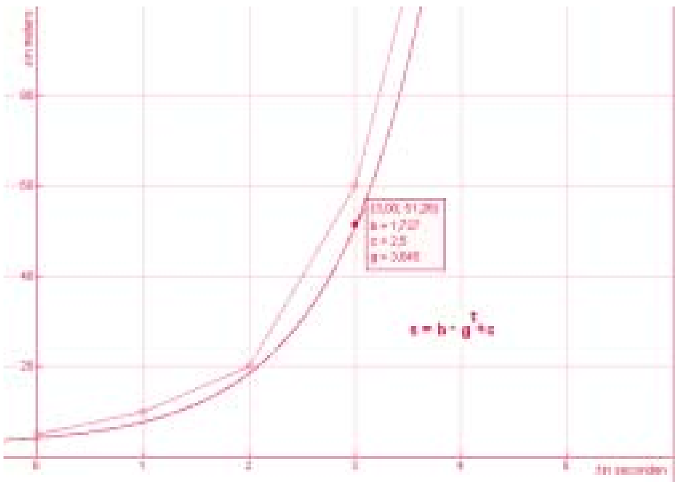
Conclusie

Het is voor leerlingen niet zo eenvoudig te begrijpen wat een parameter is. Zo is het verschil tussen variabele, onbekende en parameter vooral in het begin lastig. Woordparameters in formules kunnen hierbij helpen. Een andere reden is het wiskundig niveau dat nodig is om grip op het begrip parameter te krijgen. De familieparameter is als introductiemedium minder geschikt, omdat het begrip bundel en het begrip parameter elkaar in de weg (kunnen) zitten.
De schuifparameter (veranderende waarden) is een dynamische, interactieve en daardoor voor leerlingen aantrekkelijke optie. De schuifparameter heeft niet alleen voordelen bij de introductie van de parameter. De schuifparameter is vooral krachtig wiskundig gereedschap bij het onderzoeken van parameterfuncties.

FIGUUR 5 Jagende cheeta



FIGUUR 6 Curve fitting



Over deze bijdrage

Het artikel ‘Parameters in beeld’ is de Nederlandse bewerking van de voordracht ‘The concept of parameter’ die de auteur hield op het ICTMT Congres (een congres over ICT en wiskundeonderwijs) te Klagenfurt, zomer 2001.

Bronnen

[1] P. van Blokland, C. van de Giessen: VU-Grafiek voor Windows, VU-Dif; Wolters-Noordhoff (Groningen, 2000). Zie www.wolters.nl voor een demoversie.

[2] P. van Blokland, C. van de Giessen, D. Tall: PlotFormula, Graphic Calculus; VUSoft (Amsterdam, 2001). Zie www.vusoft.nl.

[3] L. Bills: Shifts in the meanings of literal symbols. Accepted for publication in: Proceedings of the 25th Conference on the Psychology of Mathematics Education (2001).

[4] P. Drijvers: The concept of parameter in a computer algebra environment. Accepted for publication in: Proceedings of the 25th Conference on the Psychology of Mathematics Education (2001).

[5] P. Drijvers: Students encountering obstacles using a CAS, International Journal of Computers for Mathematical Learning 5 (2000), pp. 189-209

[6] P. Drijvers: Algebra leren in een computeralgebra omgeving, Freudenthal Instituut, Utrecht (2000)

[7] Z. Usiskin: Conceptions of school algebra and uses of variables, in A.F. Coxford (ed.): The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the NCTM), Reston (VA), pp. 8-19

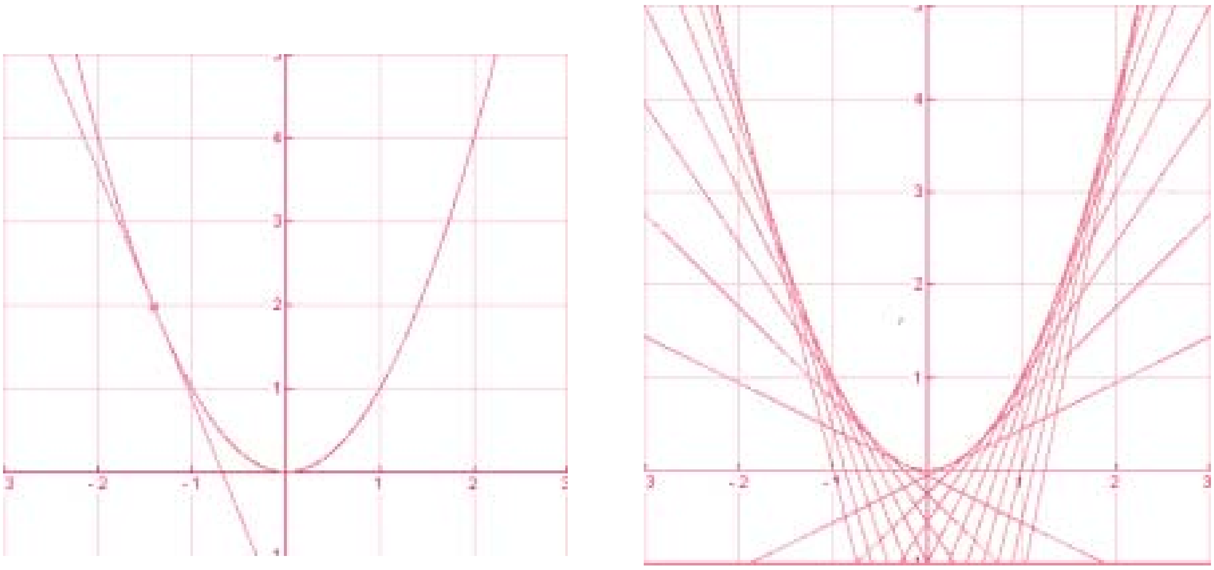
[8] D. Tall, M. Thomas: Encouraging versatile thinking in algebra using the computer, Educational Studies in Mathematics (1991)

[9] F. Furinghetti, D. Paola: Parameters, unknowns and variables; a little difference? Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (University of Lisbon, 1994)

Over de auteur

Carel van de Giessen is docent wiskunde aan het Almende College te Silvolde (locatie Isala) en auteur van de methode Moderne wiskunde (Wolters-Noordhoff). Samen met Piet van Blokland ontwikkelt hij educatieve software voor het wiskundeonderwijs. De auteur vindt dat de grafische rekenmachine ondoordacht is ingevoerd, zoals wel meer in het onderwijs, en is bang dat met computeralgebra hetzelfde te gebeuren staat.

FIGUUR 7 Raaklijnen aan een parabool



Aankondiging / ThinkQuest

ThinkQuest is een wedstrijdconcept waarbij leerlingen, docenten en studenten worden uitgedaagd om educatieve Internet-toepassingen te ontwikkelen. Hiermee wil ThinkQuest leerlingen en docenten stimuleren om nieuwe leersituaties te creëren door websites te bouwen over onderwerpen die hen interesseren.
Samenwerken, communiceren en informatie verzamelen en aanbieden via het Internet staan hierbij centraal.

Voor onderstaande webstrijden kan nog ingeschreven worden tot en met 30 juni 2002. Deze teams hebben tot 2 september de tijd om hun site te bouwen. Jurering en finale zullen plaatsvinden in het najaar van 2002.

- ThinkQuest voor Leerlingen, voor alle middelbare scholieren incl. BVE
- ThinkQuest voor de Klas, voor docenten en studenten

Meer informatie is te vinden op *www.thinkquest.nl*

Aankondiging / Lespakket Populatiedynamica

[Pleuni Pennings / 'De Praktijk']

Exponentiële en logistische groei staan zowel in het biologie- als in het wiskundecurriculum voor de Tweede fase. 'De Praktijk' heeft in samenwerking met de afdeling biologie van de UvA een lespakket ontwikkeld over deze onderwerpen.
Met dit pakket krijgen leerlingen meer inzicht in de populatiebiologie en de wiskundige formules die in de biologie belangrijk zijn. Het wordt daardoor voor de leerlingen duidelijk dat deze twee vakken veel met elkaar te maken hebben.

Lespakket

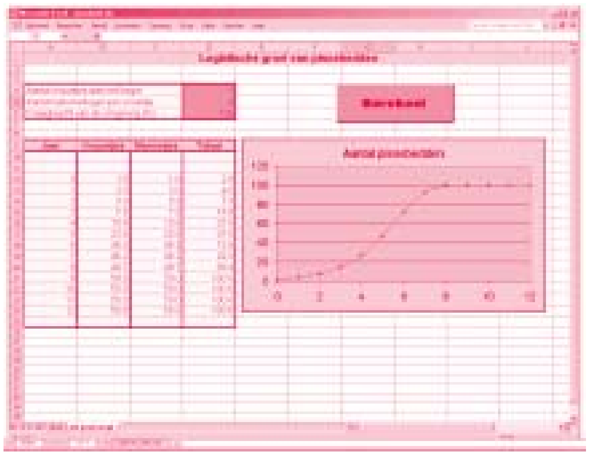
Het pakket bestaat uit een lesbrief, een korte docentenhandleiding en een cd-rom met daarop een Excel-document. Met de lesbrief kunnen de leerlingen zelfstandig achter de computer werken. Het grote voordeel van het gebruik van MS Excel is dat het op bijna iedere computer aanwezig is. Dit betekent dat u geen nieuwe programma's hoeft te installeren. Bovendien is het programma erg gebruiksvriendelijk. Het document bij de lesbrief is op zo'n manier in elkaar gezet, dat de leerlingen ook zonder kennis van MS Excel het practicum kunnen uitvoeren. Het document is beveiligd, zodat alleen de velden die de leerlingen moeten veranderen, ingevuld kunnen worden.
Een leerling is één lesuur met de lesbrief bezig. De lesbrief is klaar voor gebruik, u hoeft hem alleen maar te kopiëren.
Een korte docentenhandleiding geeft de antwoorden bij de vragen in de lesbrief. De lesbrief kan gebruikt worden bij zowel wiskunde als biologie.

Kosten en informatie

De lesbrief kost € 25,= (inclusief BTW en verzendkosten).

U kunt de lesbrief bestellen bij 'De Praktijk', praktisch onderwijs in de natuurwetenschappen, per telefoon (020-5257688) of per e-mail (*praktijk@kobasoft.nl*). Voor meer informatie kunt u kijken op onze website (*www.praktijk.kobasoft.nl*).

De lesbrief is ontwikkeld in samenwerking met professor André de Roos, vakgroep theoretische biologie, Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de Universiteit van Amsterdam.



Over de auteur

Pleuni Pennings (e-mailadres: praktijk@kobasoft.nl) werkt voor 'De Praktijk', een jonge vennootschap van Amsterdamse biologen die zich bezighoudt met het contact tussen wetenschappelijk onderzoek en voortgezet onderwijs. 'De Praktijk' ontwikkelt vanuit een wetenschappelijke achtergrond kant-en-klaar actueel lesmateriaal voor middelbare scholen en werkt aan projecten rond de aansluiting tussen voortgezet en hoger onderwijs.

Torentjes van damschijven

[Rob Bosch]

Een torentje van twee witte of twee zwarte damschijven heet in het damspel een dam. In dit stukje gaan we torentjes bouwen van meer dan twee damschijven. Bij het stapelen van de schijven leggen we ons één beperking op: we stapelen nooit meer dan twee witte of twee zwarte schijven op elkaar.
Hoeveel verschillende torens kunnen we dan bouwen van een bepaalde hoogte, bijvoorbeeld van 30 schijven hoog?

In de onderstaande tabel hebben we voor kleine n het aantal torentjes $t(n)$ aangegeven dat we met n schijven kunnen bouwen. De lezer kan deze aantallen zelf controleren.

n	1	2	3	4	5	6
$t(n)$	2	4	6	10	16	26

Om het aantal torentjes van 7 schijven te bepalen gaan we als volgt te werk.
Er zijn twee soorten torentjes: torentjes waarvan de onderste twee schijven een *verschillende* kleur hebben, en torentjes waarvan de onderste twee schijven *dezelfde* kleur hebben.
De torentjes van de *eerste soort* kunnen we eenvoudig bouwen door te beginnen met een witte of een zwarte schijf en er dan een torentje van zes schijven op te zetten waarvan de onderste schijf respectievelijk zwart of wit is (zie figuur 1). We zien dat er evenveel torentjes van de eerste soort zijn als torentjes van zes schijven.

FIGUUR 1

Voor de torentjes van de *tweede soort* doen we het net zo. We plaatsen eerst de twee witte schijven en zetten er dan een torentje bovenop van vijf schijven dat met een zwarte schijf begint. Op twee zwarte schijven plaatsen we een torentje van vijf schijven waarvan de onderste schijf wit is (zie figuur 2).
Zo zien we dat het aantal torentjes van de tweede soort gelijk is aan het aantal torentjes van vijf schijven.

FIGUUR 2

Het aantal torentjes van 7 schijven, $t(7)$, is dus gelijk aan $t(6)+t(5)=42$, een patroontje dat de lezer wellicht in de tabel al ontdekt had.
Dezelfde redenering als hierboven kunnen we gebruiken om de tabel verder voort te zetten.
In het algemeen geldt voor $n \geq 3$:
$t(n)=t(n-1)+t(n-2)$
Blijkbaar geldt voor onze torentjes de bekende Fibonacci-relatie.
Met behulp van een pakket als Maple of Derive vinden we voor het aantal van dergelijke torentjes van 30 schijven: $t(30)=2692538$.

Welk patroon ontstaat er als we hoogstens drie schijven van dezelfde kleur op elkaar mogen plaatsen? En hoe zit dat bij vier, en wat zijn de mogelijkheden met schijven van drie verschillende kleuren?
Het antwoord op deze vragen laat ik graag aan de lezer over.

Literatuur

S. Elaydi: An Introduction to Difference Equations (Springer, 1996)

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is na zijn doctoraal wiskunde 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Zijn belangstelling gaat o.a. uit naar de sociale keuzetheorie op welk gebied hij aan de Katholieke Universiteit Brabant onderzoek verricht.

Urenverdeling

Nu is het steeds onze overtuiging geweest dat de urenverdeling op de h.b.s. dient te geschieden op grond van de doelstelling van dit schooltype zelf. Indien zoals in ons geval een zeker aantal uren voor de h.b.s. wenselijk en mogelijk blijkt, is het niet toelaatbaar dit aantal uren te reduceren op grond van de overweging dat er een ander schooltype met name het gymnasium is, waar hetzelfde aantal uren niet beschikbaar blijkt.

Onze vrees is gelukkig ongegrond gebleken en het zal duidelijk zijn dat we met voldoening kennis hebben genomen van de circulaire van de Staatssecretaris van 7 juni 1961, waaruit bleek dat met ingang van 1 september 1961 het aantal uren voor de wiskunde in de vierde klasse met ingang van 1 september 1961 met 1 zou worden verhoogd en dat voor natuurkunde in de vierde en vijfde klasse opvolgend in 1961 en in 1962 met 1 en met 2, totaal met 3. Voorts werd er bepaald dat er in 1962 voor het laatst in de mechanica als zelfstandig vak examen zou worden afgenomen.

Het stemt tot voldoening, dat de garanties voor een verantwoorde integratie van de mechanica in de natuurkunde, waarop van de zijde van Wimecos steeds werd aangedrongen inderdaad tot stand zijn gekomen, terwijl de urenverdeling, hoewel van fysisch standpunt niet ideaal, toch de goede zijde heeft dat er voor de exacte vorming geen uren verloren zijn gegaan.

Voorts stemt het tot voldoening dat de belangrijke wijzigingen die in het simpele wetje van 2 maart 1961 hun beslag kregen tot stand konden komen zonder dat de goede verstandhouding tussen de zusterverenigingen Velines en Wimecos daardoor werd bedorven.

De leden van Velines en Wimecos hebben gestaan, staan en zullen staan, naar mijn vaste vertrouwen, niet als rivalen maar als pleitbezorgers voor een goede behartiging van de belangen van het onderwijs in het geheel der exacte vakken in ons v.h.m.o.

Gedeelte van de openingstoespraak van de voorzitter van Wimecos, dr. Joh.H. Wansink, tot de algemene vergadering, gepubliceerd in Euclides 37, 1961-1962.

[Wimecos was de voorganger van de huidige Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Wimecos was echter alleen bestemd voor leraren wiskunde, mechanica en cosmografie aan het schooltype HBS. Zie hiervoor het hoofdstuk De vereniging en het tijdschrift, geschreven door Jan Maassen, in het boek Honderd jaar wiskundeonderwijs (2000).]

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

DENKEN BEVORDEREND ONDERWIJS

Streven naar de verwerving van de volgende vier typen kennis

- Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren
- Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden
- Weten waarom: principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht
- Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak

Leeromgeving	Stimuleren van vertrouwen en reflectie, intensieve interactie met docenten en medeleerlingen.
Opbouw cognitief schema	Contexten in wisselwerking met abstracties. Probleemaanpak en denkmethoden ingebed in de vakinhoudelijke schema's.
Feedback	Frequente terugkoppeling op alle vier typen kennis om het denken van de leerlingen zichtbaar te maken.
Werkvorm	Interactie in grote en kleine groepen, individueel werk.
Functie docent	Ontwerpen van opdrachten en feedback, interactieve instructie en explicitering van alle vier typen kennis.
Beoordeling	Toetsing van alle vier typen kennis met de daarbij passende toetsmethoden en opdrachten.

HET DENKEN BEVORDEREN
DEEL 2:
LEREN DENKEN ALS ONDERWIJSDOEL

Opnieuw een gedeelte uit de oratie van Anne van Streun, gehouden op 18 december 2001, ter gelegenheid van zijn benoeming tot hoogleraar.
In het vorige nummer van Euclides [1] werd een ander fragment uit deze oratie geplaatst. Het thema daarvan was inhoudelijke onderwijsvernieuwing. In het volgende nummer start Anne een rubriek 't Denken bevorderen, met voorbeelden uit de praktijk.

[Anne van Streun]

Hoofddoel van het onderwijs

Onderwijskundig onderzoek overal in de wereld signaleert (...) angst voor het vak wiskunde. Wiskundeonderwijs leidt wereldwijd bij veel leerlingen tot een *gebrek* aan zelfvertrouwen, tot een houding van *niet-denken*, er niet aan willen of durven beginnen. Het is geen wonder dat in veel landen de inhoud van het wiskundeonderwijs *voor iedereen* drastisch aan het veranderen is - zoals dat in Nederland bij de basisvorming is gebeurd.
We zijn een *hoofddoel* van het onderwijs op het spoor. Het gaat kennelijk om het leren durven vertrouwen op je eigen denken, om het stimuleren van het denken en leren, om het denken zelf. Mijn hooggeachte promotor en vriend Adriaan de Groot (1980) formuleerde het eens zo:

'Een school waarin leerlingen niet ervaren dat leren leuk en bevredigend kan zijn,
een school waarin de leraren er niet in slagen déze lering aan hun leerlingen over te dragen,
zo'n school deugt niet...
Een belangrijker onderwijsdoelstelling dan "leren leuk gaan vinden" zou ik niet weten. Lukt dat niet dan is eigenlijk alles verloren.'

Hoe zit het met ons hoofddoel? Het krijgen en houden van plezier in het leren? In een project van het CBS waar meer dan 50.000 leerlingen uit de leerjaren 1 en 2 aan meededen, waardeerden zij als favoriete vakken: Lichamelijke opvoeding (nummer 1) en Techniek (nummer 2 bij de jongens) of Muziek (nummer 2 bij de meisjes). Wiskunde is het meest favoriete theorievak. Natuur- en scheikunde stond bij de jongens in de middenmoot en bij de meisjes bijna helemaal onderaan.

De inspectie heeft helaas bij de evaluatie van de basisvorming in haar duizenden lesbezoeken het *plezier in het leren* niet expliciet meegenomen. Helaas, want het is wel te zien of leerlingen met plezier aan hun taken en opdrachten werken! Mondeling heb ik van verschillende inspecteurs gehoord dat bijna alle lessen zo verschrikkelijk saai waren. Dat is niet direct een klimaat waarin plezier in het leren tot bloei kan komen...

Activerende werkvormen

In de evaluatie van de basisvorming geeft de inspectie de scholen en leraren een *onvoldoende* voor het bevorderen van *actieve leerprocessen* door middel van:
- het stimuleren van initiatieven van leerlingen;
- het bieden van ruimte voor zelfstandig werken;
- het bewust organiseren van op het werk gerichte wisselwerking met en tussen leerlingen;
- het doen verrichten van eenvoudig onderzoek;
- het samenwerken;
- het verwoorden van standpunten;
- het laten reflecteren van leerlingen op hun handelen en gedrag.

Schoolleidingen worden opgeroepen het *onderwijsleerproces* centraal te stellen en de overheid wordt gevraagd te investeren in didactische vernieuwing en scholing van leraren. Zij zijn de spil van alle nieuwe ontwikkelingen. Zij geven het onderwijs handen en voeten; hun optreden in de klas is bepalend voor de uiteindelijke kwaliteit. Aldus de inspectie.
De vraag rijst nu waar dat *activerend leren* goed voor is. Moeten we niet terug naar de basis aan kennis, 'Back to Basics'? Geen rekenmachine, weg met de

contexten, niets zelfstandig of onderzoekend leren, gewoon voordoen, nadoen, oefenen. De echo van dit geluid (o.a. uit Californië) is ook in Nederland te horen, vooral onder bezorgde wetenschappers uit de exacte vakken. En ook leraren denken soms nog dat veel oefenen op analoge opgaven tot een optimaal resultaat leidt. Welke denkfout maken zij?

Het leren denken als onderwijsdoel

De opvatting dat het onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen een belangrijke bijdrage moet leveren aan het leren denken is niet nieuw. In 1947 verscheen deel 1 van de serie Werkboek der Meetkunde (auteurs het echtpaar Van Hiele) met op het kaft de aankondiging dat dit leerboeken waren voor scholen waar *zelfstandig werken en denken hoofddoel* is. Internationaal is de vernieuwing van het onderwijs in de natuurwetenschappen sterk gericht op het doen ontwikkelen van *natuurwetenschappelijke onderzoeksvaardigheden*. Daarin gaat het om het onderkennen van een natuurwetenschappelijk probleem, het formuleren van een hypothese, het ontwerpen van een experiment, het verzamelen, analyseren en interpreteren van data, het toepassen van resultaten, het doen van voorspellingen, het plannen en monitoren van het eigen onderzoek. De wiskundige Polya stelde dat het *oplossen van problemen* centraal moet staan in het wiskunde-onderwijs op elk niveau. Hij beargumenteerde dat wiskunde sterkt lijkt op de natuurwetenschappen in het proces van vermoeden, begrijpen en ontdekken. Bekend is ook de opvatting van Hans Freudenthal dat wiskunde als een *menselijke activiteit* moet worden onderwezen; de nadruk moet liggen op het zelf inductief ontdekken, exploreren, redeneren, modelleren, abstraheren en deduceren.

Bij het onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen gaat het kennelijk niet voornamelijk om *Weten dat*, maar veel meer om *Weten hoe, Weten waarom en Weten over weten*.

Zo kom ik terug op de denkfout die leidt tot de oproep 'Back to Basics' en de eis om terug te gaan naar eenvoudige onderwijsvormen, gericht op overdracht en oefenen, op voordoen, nadoen en memoriseren. De denkfout is dat onderwijs volgens het bedoelde model, het *overdragen van kennis*, denk aan het vullen van holle vaten, aan leerresultaten precies datgene oplevert wat je er in stopt. Het resultaat is fragmentarische kennis in kleine brokjes opgeslagen in het geheugen, zonder enige onderlinge samenhang, met moeite op de eerste toets oproepbaar maar niet bruikbaar voor toepassingen, niet leidend tot transfer, om van creativiteit en het vermogen tot zelfstandig denken en toepassen maar te zwijgen. Dat type onderwijs leidt bovendien tot aversie tegen leren ('Waar is dit goed voor?') in plaats van tot levenslang plezier in leren.

Wat we weten over leren en onderwijzen

Zoals al eerder is opgemerkt lijkt de wetenschappelijke kennis over leren en onderwijzen te convergeren naar een aantal concepten en principes die een goed uitgangspunt opleveren voor inhoudelijke onderwijs-vernieuwing. Kort samengevat gaat het om de koppeling van wat we weten over *typen kennis*, over *feedback en toetsing* en over *onderwijzen*. Op elk vakgebied kun je de typen kennis in leerdoelen formuleren en operationaliseren. Daar moet je dan de bijpassende diagnostische feedback en beoordelende toetsing voor ontwikkelen. De aard van de toetsing hangt sterk af van het type kennis dat je wilt toetsen:

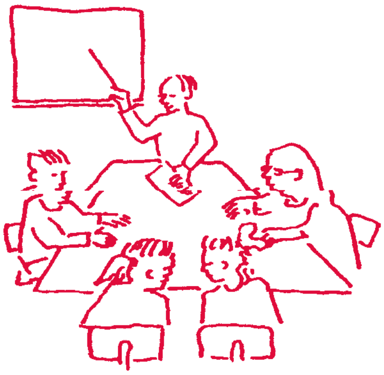
Weten dat is goed te toetsen met traditionele pen-en-papier-toetsen (zoals in onze centrale examens gebeurt).

Weten hoe wordt zichtbaar door de aanpak van problemen, open vraagstellingen en zelfstandig onderzoek.

Weten waarom vereist vragen naar samenhangen, bijvoorbeeld met behulp van 'concept maps' en kennisgrafen.

Weten over weten vraagt om rapportage door de leerlingen zelf over hun werkwijze en zelfkennis (learner reports) en om observatie door docenten en medeleerlingen.

Tijdens het leerproces is een goede *feedback* door de docent essentieel, door interactie of bijvoorbeeld door diagnostische toetsing. Dat begint al met de start van het onderwijs in een nieuw onderwerp, want niets is belangrijker voor het goed plannen van onderwijs dan het aansluiten bij de voorkennis. In het vervolg bij de opbouw van begrippen en methoden is een directe terugkoppeling naar de leerlingen noodzakelijk. Die feedback moet betrekking hebben op alle genoemde typen kennis om het denken van de leerlingen zichtbaar te maken voor henzelf en voor docenten en begeleiders. Integratie van metacognitieve instructie en vakinhoudelijke kennis en feedback op de metacognitie van leerlingen kan hun kennis op een hoger niveau brengen en zelfstandig leren leren stimuleren.
Naast die feedback en diagnostische toetsing zal de docent *werkvormen* moeten organiseren die passen bij het type leerdoelen, het type kennis, dat door de leerlingen moet worden verworven. Soms poneert de docent een probleem en moedigt leerlingen aan om na te denken over een oplossing. Of hij vraagt de leerlingen om uit te leggen wat zij hebben gedaan, of hij gaat samen met hen een overzicht van begrippen en methoden samenstellen. Op een ander moment werken leerlingen in tweetallen achter de computer aan een probleem of werken zij in viertallen aan een open opdracht. Soms zijn de leerlingen individueel en zelfstandig aan het werk om hun beheersing van de basiskennis te vergroten, dan weer maken ze in hun digitale werkruimte een diagnostische toets en krijgen automatisch de feedback retour die de docent voor hen heeft ontworpen.



ILLUSTRATIE **Edzard Krol**

Beoordelen

Aansluitend op die intensieve feedback en een breed palet van passende werkvormen is de manier van *beoordelen* beslissend voor de aandacht die leerlingen en docenten aan de verschillende leerdoelen besteden. Worden leerlingen en docenten door middel van de standaard pen-en-papier-toetsen alleen afgerekend op het verwerven van kennis van het eerste type, dan zal een inhoudelijke niveauverhoging weinig kans maken. De dominantie van centrale schriftelijke of elektronische toetsing leidt automatisch tot een concentratie op beperkte leerdoelen en tot een training op typen opgaven die op de centrale toets verwacht worden. De keuze voor kennisdoelen van het tweede, derde en vierde type impliceert tegelijk een decentrale toetsing volgens de geschetste toetsmethoden. (...)

Het centraal schriftelijk examen toetst uitsluitend *Weten dat* en domineert zodanig dat het werken aan andere vormen van kennis daardoor wordt weggedrukt. Een splitsing van de beoordeling van het centraal examen en het schoolexamen, zoals eerder voorgesteld door de Stuurgroep Tweede Fase, is een belangrijke voorwaarde voor het kunnen realiseren van inhoudelijke onderwijsvernieuwing. Een forse verlichting van de omvang van het centraal examen is nodig om ruimte te krijgen voor een zwaarder accent op de geïntegreerde toetsing van de kennis van het tweede tot en met vierde type, bijvoorbeeld door praktische opdrachten, zelfstandig onderzoek en profielwerkstuk.

Noot

[1] Anne van Streun, Het denken bevorderen, deel 1, Euclides 77 (6), 2002, pp. 262-265

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@math.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundedidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.

VAKANTIECURSUS 2001: EXPERIMENTELE WISKUNDE

Ieder jaar in de maand mei denk ik aan de inschrijving voor de vakantiecursus van het CWI. Dit jaar dus ook. Maar ik kijk gelijk even terug naar vorig jaar.

[Gert de Kleuver]

Inleiding

De inschrijving voor de vakantiecursus – dat hoort er in mei voor mijn gevoel zo bij, naast de drukke werkzaamheden op school: correctiewerk van examens, urenverdeling, planningen voor de volgende cursus – en dan 'als ontspanning' op internet even zoeken naar het thema en programma van nieuwe cursus [1].
Sinds 1946 wordt door het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), op initiatief van de NVvW, deze cursus in Eindhoven (TU) en Amsterdam (CWI) georganiseerd voor docenten in de exacte vakken in vwo, havo en hbo.
Afgelopen jaar ben ik samen met een collega op vrijdagmiddag naar Amsterdam gereisd. Onderweg zagen we Martin Kindt en Aad Goddijn sjouwen met allerlei zware tassen. Het was ondenkbaar dit illustere duo geen lift aan te bieden (was daar door de heren die op de Kruislaan liepen, al op gerekend?). De stemming zat er nu al direct goed in, want een belangrijke element van de cursus is toch vaak het ontmoeten van collegae en het uitwisselen van allerlei ervaringen. Dit gebeurt tussen de lezingen door maar ook tijdens de maaltijden.

Programma

Dit jaar was het thema Experimentele wiskunde. Wat moet je als wiskundige daar nu bij denken? Wiskunde is toch exact en niet experimenteel. Het bewijs telt en natuurlijk gaat voor velen het denkwerk boven alles. Hoewel?
Prof.dr. J. van de Craats noemde in zijn inleiding dat het zojuist geschetste beeld sterk veranderd is. Het gaat natuurlijk in de wiskunde nog steeds om denkwerk en nog steeds vormen bewijzen de kern van de zaak, maar ook de wiskundige gaat experimenten niet meer uit de weg. Zo valt er bijvoorbeeld in de getaltheorie tegenwoordig heel wat te experimenteren, met name met behulp van de computer. Experimenten helpen wiskundigen structuren te ontdekken, te verkennen en in beeld te brengen.
Het programma van de cursus sloot goed aan bij deze opmerkingen van Van de Craats. Ik noem voor de volledigheid de rij sprekers en de thema's van de lezingen. Een tweetal lezingen zal ik verder uitwerken.

F. Beukers, Experimentele getaltheorie
A. Doelman, Het begrip dimensie
J.A. van Maanen, Uitputting en evenwicht
H.A. van der Vorst, Snel oplossen is een experiment waard
A.J. Goddijn, Experimenten met Cabri
H.C. Tijms, De wondere wereld van de Poisson-kansverdeling
R.D. van der Mei, Netwerkplanning

Het is goed te weten dat het CWI ieder jaar een syllabus van de cursus uitbrengt met daarin een samenvatting van de verschillende lezingen. Deelnemers krijgen deze syllabus aan het begin van de twee dagen uitgereikt [2].

Wiskunde experimenteel?

De twee lezingen die ik verder wil uitwerken, laten goed zien hoe op één dag personen op verschillende manieren met experimentele wiskunde bezig zijn. Zo mocht, aansluitend op de inleider, prof.dr. F. Beukers het spits afbijten. Beukers had in zijn inleiding over experimentele getaltheorie duidelijk een lijn te pakken die mij erg aansprak: vroeger leek alles vast te liggen, maar tegenwoordig gaat dat niet meer op. Denk aan

een natuurkundige die zeker weet dat het model dat nu bedacht is, maar enkele jaren meegaat; daarna is het achterhaald. Een bekend voorbeeld is de atoomtheorie van Niels Bohr. Men heeft het over wetmatigheden die tijdelijk zijn.
In de wiskunde is dat anders, denk aan de stelling van Pythagoras. Zoveel eeuwen kennen wij deze regel en nog steeds hoeven we geen aanpassing te verwachten. Dat is één kant van de medaille bij wiskunde.
Bij getaltheorie wordt men juist uitgenodigd om met getallen te spelen. Vervolgens heeft men de nodige vermoedens en zo probeert men een stelling te formuleren. Het bewijs van die bewuste stelling is vaak heel lastig en uitvoerig.

Experimentele getaltheorie

Beukers begon met twee rijen getallen op een bord te schrijven: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 en 1, 8, 27, 64, 125. Als je nu het cijfer 1 en alle zesvouden uit beide rijtjes weglaat, dan zou je kunnen kijken naar $y^2 = x^3 + k$ met $k \neq 0$ (k mag dus zowel positief als negatief zijn). Zijn er nu gehele getallen x en y te vinden zó dat bovenstaande diophantische vergelijking oplossingen heeft?
Neem nu $k = 17$ dan zie je snel uit de gegeven rijtjes, dat $(x, y) = (2, 5)$ een oplossing is.
Bovenstaande vergelijking staat bekend als de vergelijking van Mordell, naar de eerste wiskundige die aantoonde dat voor gegeven k er hooguit eindig veel oplossingen kunnen zijn. Nu je weet dat het er eindig veel zijn, is het vaak wel lastig om deze ook te vinden. Voor de liefhebbers wordt aan het eind van dit artikel naar het boek van London en Finkelstein [3] verwezen waarin oplossingen voor verschillende waarden van k met $|k| \leq 100$ te vinden zijn. In een artikel uit 1998 van Gebel, Pethö en Zimmer [4] staan oplossingen voor $|k| \leq 100000$ en op de internetsite van Wildanger [5] is te vinden hoe je de lijst verder af kunt maken.
Beukers nam ons vervolgens mee naar de volgende probleemstelling ten aanzien van de Mordell-vergelijking. Het zou bijvoorbeeld handig zijn de Mordell-vergelijking op te lossen en dan precies te weten hoe klein het verschil tussen een kwadraat en een derde macht is. Dit wordt verwoord in het vermoeden van Hall dat in 1969 door Marshall Hall tijdens een symposium naar voren werd gebracht. Beukers heeft dit vermoeden van Hall in zijn lezing op duidelijke wijze verder uitgewerkt. Het plezierige van deze voordracht was dat je makkelijk de denkstappen kon meemaken. Ik heb nu maar een kleine aanzet weergegeven en het vervolg is te vinden in de syllabus [2].

Oppervlakte en inhoud

Na een gezellige en bovendien goed verzorgde maaltijd gaf dr. J.A. van Maanen een lezing over Uitputting en Evenwicht. Gelukkig stond er als subkop bij dat het zou gaan over oppervlakte en inhoud. Van Maanen verscheen op het podium met in een theedoek gewikkeld pakketje. Hierin zaten een mok en rijst in een borrelglaasje. Wordt de rijst op de juiste wijze in de mok gedaan, dan kan er een kegel ontstaan. Vervolgens twee delen water erop en je zult zien – als het helemaal volgens de regels verloopt – dat de top van de kegel precies tot de waterspiegel komt. Ach, dit is een manier om te laten zien dat de inhoud van een kegel $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ is. Vervolgens werd aangegeven dat Archimedes de inhoud van een kegel vergeleek met een even hoge cilinder op een zelfde grondcirkel; anders gezegd: Archimedes vergeleek de inhoud van een kegel met een standaardlichaam.
Na deze leuke manier van presenteren ging Van Maanen over tot een officiële aanpak van oppervlakteproblemen met behulp van de eerste stelling uit de cirkelmeting van Archimedes.
Deze luidt: Een willekeurige cirkel is even groot als een rechthoekige driehoek waarvan één rechthoekszijde gelijk is aan de straal van de cirkel en de andere rechthoekszijde gelijk is aan de omtrek van de cirkel. Deze stelling verplaatst het probleem van de kwadratuur van de cirkel naar de 'rechttrekking' van de cirkel. Zo vond Archimedes de volgende benadering van pi:

$3\frac{10}{71} < \frac{\text{omtrek}}{\text{middellijn}} < 3\frac{10}{70}$. Natuurlijk werd pas in 1882 door

Lindemann bewezen dat de exacte kwadratuur van de cirkel met passer en liniaal onmogelijk is. Van Maanen nam het publiek aan de hand mee om het bewijs van Archimedes te volgen (en zie verder weer [2]).

Met plezier denk ik terug aan de leuke en inhoudelijk goede lezingen van dit jaar. Hopelijk komen ook in 2002 veel geïnteresseerden naar de vakantiecursus (onderwerp: Wiskunde en Gezondheid; 23 en 24 augustus in Eindhoven, 30 en 31 augustus in Amsterdam)!

Noten

[1] Website CWI, http://www.cwi.nl/conferences/VC2002/
[2] M. Bakker (ed.): Vakantiecursus 2001, Experimentele wiskunde, CWI, Amsterdam (2001)
[3] H. London, R. Finkelstein: On Mordell's equation, Bowling Green State University Press (1973)
[4] J. Gebel, A. Pethö, H.G. Zimmer: On Mordell's equation, Compositio Math. 110 (1998), pp. 335-367
[5] K. Wildanger: Website, http://emmy.math.uni-sb.de/simath/Mordell/

Over de auteur

Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@freeler.nl) is docent aan het Ichthus-College te Veenendaal.

Boekbespreking / Wiskunde voor het hoger onderwijs door middel van DERIVE, deel 1

Auteurs: Peter van der Velden, e.a.

Uitgever: Academic Service, Schoonhoven, 588 blz. (2e druk), prijs €39,50, isbn 90395 1516 6

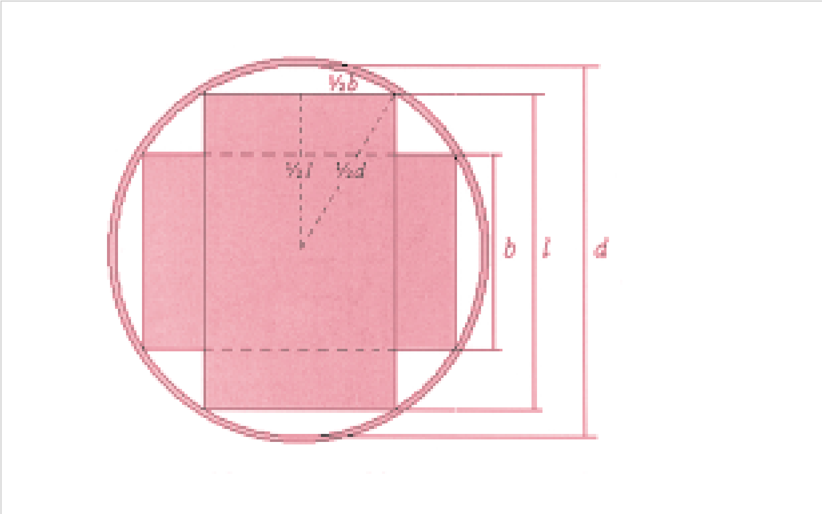
[Paul Drijvers]

In het hoger onderwijs wordt bij wiskunde in toenemende mate gebruik gemaakt van computeralgebra. Verschillende wiskundeboeken voor met name het hoger technisch onderwijs integreren pakketten zoals Maple en Derive in hun methode. ‘Wiskunde voor het hoger onderwijs door middel van Derive’ is hiervan een voorbeeld. De auteur, actief lid van de HBO-werkgroep van de NVvW, heeft indertijd een bekende Engelstalige methode van Berry e.a. bewerkt voor de Nederlandse markt. De nu verschenen tweede druk is aangepast aan de Windows versie van Derive; daarnaast hebben ook ingrijpende verbeteringen plaatsgevonden.

De keuze voor Derive is in mijn ogen goed te verdedigen. Het pakket is voor de doelgroep krachtig genoeg, en is toegankelijk en laagdrempelig. Minpunt van Derive vormen de beperkte mogelijkheden voor tekstverwerking, zodat het aanbieden van lesmateriaal of het maken van werkstukken in Derive niet goed mogelijk is; daarvoor moet naast Derive een tekstverwerker worden gebruikt.

Zoals gezegd omvat de revisie voor de tweede druk meer dan de overgang op de Windows versie van Derive. De auteur heeft zich grondig verdiept in de vernieuwingen in de Tweede fase van havo en vwo en in het mto. Zo geeft de inhoudsopgave de aansluiting met de verschillende profielen weer en wordt de grafische rekenmachine niet vergeten. De opgenomen onderzoeksactiviteiten sluiten aan bij de praktische opdrachten in het VO en de stijl waarin de wiskunde aan de orde komt doet soms denken aan het TWIN-materiaal voor het mto, bijvoorbeeld waar de afgeleide als lineaire voortzetting wordt voorgesteld.

Ook de didactiek van de integratie van computeralgebra heeft zich ontwikkeld. Computeralgebra wordt gebruikt voor exploratieve activiteiten, voor controle van werk met de hand, en als gereedschap bij het werken aan toepassingen die met de hand te bewerkelijk zouden zijn. Toch blijft het boek een tweesporenbeleid volgen: behalve opgaven waarbij Derive gebruikt wordt, bevat het ook een aantal oefeningen (gemarkeerd met icoontjes) die met de hand moeten worden gedaan. Wel is mijn indruk dat op het ‘handwerk’ wat is bezuinigd en dat lijkt me een goede zaak, want weinig HTO-ers zullen in hun beroepspraktijk nog veel met de hand uitrekenen.
Een sterk punt van het boek is de uitgebreide aandacht voor toepassingen uit de praktijk van de techniek. De afbeelding illustreert bijvoorbeeld het probleem van de optimale stapeling van weekijzeren plaatjes in de kern van een transformator. Dergelijke problemen lijken mij motiverend voor studenten, en computeralgebra kan bij zulke opgaven goed van pas komen.



Mijn voornaamste reserve ten aanzien van dit boek betreft de omvang van bijna 600 pagina’s. Die wordt enerzijds veroorzaakt door de verschillende invalshoeken die het kent (handwerk, computeralgebra, toepassingen, onderzoeksactiviteiten), maar vooral door de veelheid van onderwerpen die aan bod komen; die bestrijken het hele scala van rationale functies via differentiëren en integreren tot differentiaal-vergelijkingen en numerieke integratie met een uitstapje naar matrices en vectoren. Deze reserve heeft overigens eerder betrekking op het curriculum van de propedeuse HTO dan op het boek zelf. Ongehinderd door enige ervaring in het HTO kan ik me nauwelijks voorstellen dat zulk onderwijs succesvol is: als het nodig is om in het begin van het eerste jaar uitgebreid stil te staan bij het optellen van breuken (pagina 79 en verder), kan diezelfde student dan aan het einde van het jaar de geschetste veelheid van onderwerpen bevatten? Zou het, mede onder invloed van de beschikbaarheid van computeralgebra, niet mogelijk zijn om in het HTO-programma meer te kiezen voor inzicht en beheersing op een beperkt aantal onder-werpen dan voor de oppervlakkigheid van de breedte?

Los van deze kanttekening kan ik dit mooi uitgevoerde boek in ieders aandacht aanbevelen.

Aankondiging / Het verhaal achter ‘A Beautiful Mind’

Naar aanleiding van het boek ‘A Beautiful Mind’ van Sylvia Nasar en de gelijknamige film organiseert de vakgroep Wiskunde van de Katholieke Universiteit Nijmegen op donderdag 30 mei 2002 een drietal lezingen, alle toegankelijk voor een algemeen, niet noodzakelijk wiskundig, publiek.
Hoofdspreker is **Sylvia Nasar**, de schrijfster van het boek.

Het boek en de film gaan over het leven van de aan schizofrenie lijdende wiskundige John Nash, die in 1994 de Nobelprijs voor economie ontving. Hij kreeg deze prijs voor zijn wiskundig werk uit 1949 waarin hij het zogenaamde Nash-evenwicht voor niet-coöperatieve spelen introduceerde. Dit begrip is in de hedendaagse economie niet meer weg te denken.

Programma

(titels van de lezingen zijn nog niet bekend)
12.30 - 13.15 prof. Stef Tijs
13.30 - 14.15 prof. Sylvia Nasar
14.30 - 15.15 prof. Henk van Tilborg
15.30 - 16.00 Boeksignering door Sylvia Nasar
16.00 - 17.00 Receptie: gelegenheid om de sprekers te ontmoeten

Tijd en plaats

donderdag 30 mei, 12.30 - 17.00u
Collegezaal CC1 (collegezalencomplex), KUN, Nijmegen

Over de lezingen

Speltheorie is die tak van de wiskunde, waarin John Nash zijn fundamentele bijdrage heeft geleverd. Stef Tijs, een wereldberoemd expert op het gebied van de speltheorie, zal over dit onderwerp een voor iedereen begrijpelijke lezing geven.
De tweede lezing, gegeven door Sylvia Nasar, zal gaan over het ontstaan van haar boek en de film. Hierbij zal zij verschillende anekdotes over John Nash vertellen. Nasar is *James Knight Professor of business journalism* aan de Columbia Universiteit te New York. Verder is zij werkzaam als verslaggever economie voor The New York Times. Voor het boek ontving zij in 1998 de National Book Critic’s Award.
In de laatste lezing zal Henk van Tilborg een elementaire uiteenzetting over cryptografie houden. Hij is hoogleraar aan de TUE en is een autoriteit op het gebied van de cryptografie.

Meer informatie via *www.kun.nl/beautifulmind*
Het boek wordt in Nederlandse vertaling (van Henk Moerdijk) uitgegeven door De Bezige Bij, Amsterdam, onder de titel ‘Een schitterend brein’ (isbn 90 234 39066).

DE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE: ACHTERGROND EN ORGANISATIE

Dit artikel beschrijft achtergrond, geschiedenis en organisatie van de Wiskunde Olympiade. In het volgende nummer van Euclides wordt de Eerste Ronde van dit jaar besproken.

[Fred Bosman, Jan van de Craats, Thijs Notenboom]

Inleiding

Op vrijdag 18 januari 2002 heeft op de Nederlandse havo- en vwo-scholen weer de Eerste Ronde plaatsgevonden van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, een wedstrijd voor scholieren met belangstelling voor wiskunde. Toptalent is voor deelname niet nodig: plezier beleven aan wiskunde is de hoofdzaak. Maar natuurlijk is de Olympiade ook bedoeld om getalenteerden op te sporen en te stimuleren. Voor de besten is er daarom later een Tweede Ronde, en daarna, wie weet, misschien wel een plaats in het Nederlandse team bij de Internationale Wiskunde Olympiade die in 2003 in Japan zal plaatsvinden.

Achtergrond en geschiedenis

De eerste Nederlandse Wiskunde Olympiade werd gehouden in 1962. De olympiade van 2002 was dus de eenenveertigste. Daarmee is de Wiskunde Olympiade veruit de oudste Nederlandse olympiade voor scholieren, wat niet wil zeggen dat er in het buitenland al niet eerder olympiades en soortgelijke wiskunde-wedstrijden werden gehouden. Met name in Oost-Europa kennen zulke competities een lange traditie. In Hongaarse, Russische en Roemeense wiskunde-competities hebben al heel wat latere topwiskundigen hun eerste successen behaald. In 1959 organiseerde Roemenië de eerste Internationale Wiskunde Olympiade, die toen nog uitsluitend een oostblok-aangelegenheid was. In 1967 deden er voor het eerst landen uit het westen mee: Groot-Brittannië, Frankrijk en Italië, en sinds 1969 hoort ook Nederland tot de deelnemende landen.

De eerste Nederlandse olympiade in 1962 was overigens al direct een doorslaand succes: er deden 3346 scholieren op 284 scholen aan mee. Het jaar daarna was het aantal iets kleiner: 3198 leerlingen op 268 scholen, maar vermeldenswaard is wel de winnaar van de tweede prijs van dat jaar: de toen 17-jarige latere Nobelprijswinnaar Gerard 't Hooft! Die grote deelnemersaantallen zijn daarna nog maar zelden geëvenaard: de laatste jaren schommelen ze rond de 1800. De organisatoren van de olympiade zien het als hun taak door gerichte acties de belangstelling voor de olympiade in de toekomst weer een flinke duw in de goede richting te geven.

De Eerste Ronde

Vanaf het begin telde de Nederlandse Wiskunde Olympiade twee ronden: een Eerste Ronde op de scholen en een moeilijkere, centraal georganiseerde Tweede Ronde. Voor de Tweede Ronde kan men zich kwalificeren door in de Eerste Ronde genoeg punten te scoren. In de loop der jaren is de opzet van de olympiade enige malen aangepast, maar het hoofddoel is altijd gebleven het enthousiasmeren van de jeugd voor uitdagende, creatieve wiskunde en het opsporen en stimuleren van wiskundig talent. De Eerste Ronde kent daartoe naast leuke, puzzelachtige vragen die niet al te moeilijk zijn, ook enkele pittige opgaven. Er wordt altijd naar korte antwoorden gevraagd die gemakkelijk door de leraar op school kunnen worden nagekeken aan de hand van een correctiemodel. De scores worden vervolgens centraal verzameld, en de cesuur voor de Tweede Ronde wordt zo vastgesteld dat daaraan ruim honderd scholieren kunnen meedoen. Om geen talent verloren te laten gaan ontvangen sinds enige jaren ook de besten van de Kangoeroe-wedstrijd en de Pythagoras Olympiade een uitnodiging, voor zover ze zich al niet via de Eerste Ronde hebben geplaatst.

Scholenprijs en Tweede Ronde

Sinds 1979 worden in de Eerste Ronde de scores van de beste vijf deelnemers per school bij elkaar opgeteld; de school met de hoogste totaalscore wint de door Shell ingestelde *scholenprijs*, een fraaie

wisselsculptuur waarop de namen van alle scholen vermeld staan die de prijs ooit gewonnen hebben. Daarnaast zijn er natuurlijk ook individuele bekers voor de vijf prijswinnaars en een permanente herinneringsbeker voor de school. De uitreiking van de scholenprijs is een feestelijke gebeurtenis die traditioneel op de prijswinnende school plaatsvindt. In 2001 was de Scholengemeenschap Pantarijn in Wageningen de trotse winnaar, in 2002 het Stedelijk Gymnasium Breda.
De Tweede Ronde is moeilijker dan de Eerste Ronde. Nu gaat het niet om korte antwoorden, maar om volledige uitwerkingen van lastige opgaven, die door een deskundige jury worden beoordeeld. De beste tien worden als prijswinnaars tijdens een feestelijke bijeenkomst op de TU Eindhoven in het zonnetje gezet in aanwezigheid van ouders, leraren, universitair wiskundigen, sponsors en hoogwaardigheidsbekleders. Zie pagina 322 in dit nummer voor een verslag van die prijsuitreiking in 2001.

Training voor de Internationale

Aansluitend op de prijsuitreiking van de Tweede Ronde vindt het eerste trainingsweekend voor de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. Alle prijswinnaars, alsmede een aantal veelbelovende sub-toppers die nog niet in hun examenjaar zitten, worden daarvoor uitgenodigd.
De training wordt geleid door drs. J.G.M. Donkers van de TU Eindhoven, samen met enkele studenten die ooit zelf aan een Internationale Olympiade hebben meegedaan. Op dat eerste weekend in november leren zo'n vijftien leerlingen elkaar kennen, waarbij ze ontdekken dat er ook nog andere leeftijdgenoten zijn die het leuk vinden een deel van hun vrije tijd te besteden aan wiskunde. Verder leren ze tijdens dit weekend de beginselen kennen van de euclidische meetkunde, de getaltheorie en het principe van volledige inductie. Samen werken ze aan allerlei opgaven, van eenvoudige puzzels tot zeer lastige vraagstukken. Een tweede trainingskamp is er in juni, en tussendoor zijn er ook nog enige trainingsdagen waarop de deelnemers bij elkaar komen. De laatste dag van het trainingskamp in juni krijgen de deelnemers een toets. Mede op basis van de resultaten daarvan wordt het zeskoppige team samengesteld dat een maand later Nederland gaat vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade (dit jaar in Glasgow).

Doe mee!

Doen op uw school nog geen leerlingen mee aan de Olympiade? Daag ze dan de volgende keer uit met wiskundevraagstukken die niet direct tot de standaardstof behoren. Opgaven van de Eerste Ronde van afgelopen januari staan op de olympiade-website en komen, zoals hierboven reeds geschreven, ook in het volgende nummer van Euclides.
Het organiseren van de Eerste Ronde op school hoeft maar weinig tijd te kosten. In het kort gaat het om het volgende:
De wedstrijd vindt plaats op een vrijdag in januari.
De wedstrijd duurt twee klokuren.
De school kopieert de opgaven.
De wedstrijdleider (u) corrigeert het werk aan de hand van een antwoordmodel. Bij elke vraag wordt alleen een kort antwoord gevraagd; de correctie is dus snel klaar.
U vult de scores van uw leerlingen in op een antwoordformulier dat u vervolgens naar de centrale organisatie stuurt.
Standaardoplossingen van de vragen worden met de opgaven meegestuurd. Die kunt u kopiëren en na afloop aan de leerlingen uitdelen.

Contactpersoon op school

Voor ons is het plezierig, per organiserende school nu al een contactpersoon te hebben. We krijgen nog wel eens een telefoontje van een leraar die zegt dat zijn school niets ontvangen heeft. Geef u dus nu al op als contactpersoon voor de Wiskunde Olympiade als uw school nog geen contactpersoon heeft!
Om leerlingen te stimuleren mee te doen kunt u natuurlijk méér doen dan we van u vragen:
Er zijn scholen die voor de eigen leerlingen een prijzenpotje hebben.
Er zijn scholen die de resultaten van leerlingen als ze goed scoren als proefwerk mee laten tellen.
Er zijn scholen die een wiskundeclub hebben waar leerlingen oefenopgaven maken en op andere manieren met leuke wiskunde bezig zijn.

Olympiadeboek

Binnen het kader van het Wiskids project wordt er gewerkt aan een boek met onder andere een selectie van Eerste Ronde-opgaven van de afgelopen veertig jaar, geordend naar onderwerp. Oud-Olympiade-winnaars hebben die selectie samengesteld, dus de keuze zal zeker aantrekkelijk zijn. Het boek zal na verschijnen naar alle scholen worden gezonden ter attentie van de contactpersoon voor de Wiskunde Olympiade. U hoort er meer van!

Nadere informatie

Opgaven en oplossingen van de laatste tien jaar zijn te vinden op
http://olympiads.win.tue.nl/nwo/
U kunt zich opgeven als contactpersoon voor de Nederlandse Wiskunde Olympiade bij Fred Bosman, secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Over de auteurs

De schrijvers maken deel uit van het bestuur van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.
Jan van de Craats (e-mailadres: jcr@euronet.nl)
Thijs Notenboom (e-mailadres: j.notenboom@feo.hvu.nl)
Fred Bosman (e-mailadres: fred.bosman@citogroep.nl)
Vragen en/of opmerkingen naar aanleiding van dit artikel zullen zij graag beantwoorden.

PRIJSUITREIKING NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE, TWEEDE RONDE 2001

De jaarlijkse prijsuitreiking van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade zet jongens en meisjes met wiskundig talent in de schijnwerper. Op vrijdag 2 november jl. was het weer zover. De prijzen werden uitgereikt aan de Technische Universiteit Eindhoven.

[Wim Laaper]

Jan Donkers, enthousiast medewerker, organisator en begeleider van de olympiade, haalt de prijswinnaars van de tweede ronde 2001 naar voren: ‘Stijn, Birgit, kom je vooraan zitten?’
Fred Bosman, secretaris van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, heeft geen microfoon nodig om het kleine, selecte gezelschap toe te spreken.
De Nederlandse Wiskunde Olympiade is inmiddels aan zijn 41e jaargang begonnen. In 1962 heeft Gerard ‘t Hooft, inmiddels Nobelprijswinnaar voor natuurkunde, de olympiade gewonnen. Er is dus hoop voor de winnaars anno 2001. In 40 jaar hebben 80.000 leerlingen aan de wedstrijd meegedaan – mede dankzij de docenten die die leerlingen hebben gestimuleerd. Zo iemand is Jan Maassen, die vanmiddag ook welkom geheten wordt. Hij heeft 39 jaar Wiskunde Olympiade in een of andere vorm meegemaakt.
Henk van Tilborg van de TU Eindhoven (wiskunde en informatica) meldt in zijn welkomstwoord, dat veel wetenschappelijke onderzoekers zichzelf beschouwen als hobbyisten die het leuk vinden ook bij anderen, zoals de olympiadewinnaars, het heilig onderzoeksvuur te zien oplaaien. Van Tilborg vindt het wiskundepakket in het vwo tegenwoordig meer algemeen vormend en minder voorbereidend op de universiteit. Er ontbreekt voldoende uitdaging voor goede leerlingen. Daarom is hij erg blij met activiteiten van bijvoorbeeld de Stichting Vierkant en de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.
Prof. Dirk Siersma reikt de prijzen uit.
Onder de tien prijswinnaars (zie foto hierboven) bevinden zich twee meisjes en wel met een tweede en een derde prijs.

De top-drie:
1. Erik van Ommeren uit Nieuwegein (6 vwo)
2. Birgit van Dalen uit Maassluis (6 vwo)
3. Iris Smit uit Amsterdam (4 vwo; zie foto links).

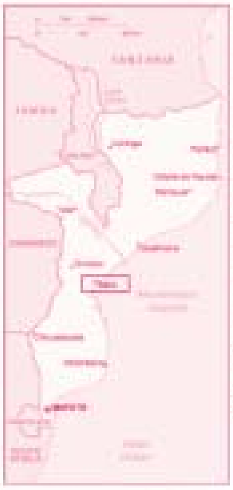
De meeste leerlingen uit de groep prijswinnaars gaan exacte vakken studeren: wiskunde, natuurkunde, sterrenkunde. ‘Voorwaar mooie vakken’, aldus prof. Siersma.
Na de prijsuitreiking gaan de prijswinnaars in een jeugdherberg in Valkenswaard het weekend in trainingskamp ter voorbereiding van de Internationale Wiskunde Olympiade die in 2002 in Glasgow plaatsvindt. Zij worden daar begeleid door Jan Donkers. Tijdens de training en ook daarna in Glasgow is de sfeer in de ploeg erg belangrijk om goede individuele prestaties te kunnen leveren. Door te trainen kun je je vasthoudendheid om een probleem op te lossen en je creativiteit verbeteren. Uiteindelijk wordt in juni 2002 het team voor Glasgow uit de trainingsgroep gekozen.

Meer informatie over de Nederlandse Wiskunde Olympiade vindt u op de pagina’s 320-321 in dit nummer van Euclides.

Over de auteur

Wim Laaper (e-mailadres: wlaaper@iaehv.nl) is lid van de redactie van Euclides. Hij is docent wiskunde aan het Koning Willem II College in Tilburg.

FACT SHEET[1]



Oppervlakte	799.380 km2 (22 x Nederland)
Hoofdstad	Maputo
Inwonertal	17,2 miljoen (schatting EIU)
Bevolkingsdichtheid	21 inwoners per km2
Talen	Portugees (officieel), diverse inheemse talen
Natuurlijke bevolkingsgroei	2,3 % (1975-1999)
Geboorten (per 1000 inwoners)	38 (2000)
Overlijdens (per 1000 inwoners)	23,3 (2000)
Levensverwachting	40,8 (v) – 38,8 (m)
Alfabetisering	27,9% (v) – 59,3 (m) (1999)
% mensen met toegang tot veilig drinkwater	60% (1999)
% mensen met toegang tot essentiële medicijnen	50% (1999)
% kinderen tot 5 jaar met ondergewicht	26% (1999)
Sero-positieven HIV/AIDS	15-49 jaar: 13,2%, 0-14 jaar: 52.000 (1999)

Onderwijssysteem:
Onderbouw primair onderwijs: 5 jaar
Bovenbouw primair onderwijs: 2 jaar
Onderbouw middelbaar onderwijs: 3 jaar
Bovenbouw middelbaar onderwijs: 2 jaar
Na de lagere school is het ook mogelijk naar een vakschool of technische school te gaan. Na de onderbouw van het middelbaar onderwijs kan een leerling naar de lerarenopleiding voor primair onderwijs. Alle vervolgopleidingen hebben hun eigen toelatingsexamens.
De huidige situatie in het onderwijs is zorgelijk, met een toegankelijkheid voor 50% van de bevolking, laag opgeleide leraren en een algemeen gebrek aan infrastructuur en materiaal. De Mozambikaanse overheid ziet deze sector echter als een kernsector voor de verdere ontwikkeling van het land. De belangrijkste prioriteiten waaraan gewerkt wordt zijn de uitbreiding van de toegang tot het onderwijs, de verbetering van de kwaliteit en de capaciteitsopbouw binnen het onderwijssysteem.

[1] Bron: Ministerie van Buitenlandse Zaken, WWF aanvraag Arie Rijkeboer

SOFMAT 99

Wereldwiskundefonds ondersteunt vervolgconferentie van wiskundeleraren in de provincie Sofala, Mozambique

[Gerben van Lent]

Voorgeschiedenis

In 1998 kreeg het WereldwiskundeFonds (WwF) een verzoek van Arie Rijkeboer uit Mozambique. Arie Rijkeboer is voor lange tijd verbonden geweest aan de universiteit van Beira. Zijn aanvraag voor het WwF betrof een verzoek om ondersteuning voor het organiseren van een nascholing/bijscholings-conferentie voor wiskundeleraren uit Beira en (wijde) omgeving. Deze conferentie werd georganiseerd door de wiskundeafdeling van de pedagogische universiteit in Beira in samenwerking met wiskundeleraren uit de provincie Sofala. Het doel van de conferentie was bijscholing en uitwisseling van informatie over het wiskundeonderwijs.
Hoewel het WwF nog niet eerder een conferentie had gesponsord, besloten we dit verzoek te honoreren. Een uitgebreid verslag van deze conferentie is te vinden in [1].
Eén van de aandachtspunten bij het kiezen van een project is de vraag of meerjarige ondersteuning wellicht mogelijk is. Tijdens een bezoek van Arie Rijkeboer aan Nederland had ik een ontmoeting met hem. Ik heb toen namens het Fonds aangegeven dat we bij een vervolgconferentie genegen zouden zijn nog eenmaal de faculteit financieel te ondersteunen. Korte tijd later kwam er een verzoek uit Mozambique en stelde het fonds opnieuw geld ter beschikking. Najaar 1999 vond deze conferentie plaats. Het heeft de nodige tijd geduurd voordat we alle informatie bij elkaar hadden om verslag van dit project te kunnen doen, maar we willen het de donateurs en andere lezers niet onthouden.

Mozambique

In de 'fact sheet' (zie linker pagina) vindt u wat gegevens omtrent Mozambique.
Velen zullen zich de beelden nog wel herinneren van de grote overstromingen waarbij voor honderden miljoenen schade is aangericht. Ook daarvóór al zou zonder moeite het bekende beeld geschilderd kunnen worden van grote klassen, slecht onderhouden of geen gebouwen, geen lesmateriaal, nauwelijks opgeleide leraren, ondervoede leerlingen en ga zo maar door. In dit artikel echter willen we de aandacht richten op het door het WwF ondersteunde initiatief van de universiteit van Beira om leraren te ondersteunen bij het zo professioneel mogelijk uitvoeren van hun taak.

Inhoud conferentie

Net als bij SOFMAT 98 ging uitgebreid veldwerk aan de conferentie vooraf. Vier teams trokken het land in om in de verschillende districten van de leraren zelf te horen waar ze het op de conferentie over wilden hebben. Reistijden van twee dagen of meer waren daarbij niet ongebruikelijk. Kleine studies werden opgezet, waarover op de conferentie kon worden gerapporteerd. Dit leidde tot onderwerpen als:
- Hoe moet je het meetkundeonderwerp *translaties* behandelen?
- Wat zijn de problemen van leerlingen met het onderwerp *machten met negatieve exponenten*?
- De didactiek voor het optellen van breuken.
- Het oplossen van woordproblemen met en zonder algebra in klas 8 (15-jarigen).
- Het uitleggen van de formule voor de inhoud van een bol door een kokosnoot te vullen met zand.
- De didactiek voor de introductie van negatieve getallen.
- Verhoudingen, procenten en evenredigheden: is de oude didactiek van 20 jaar geleden ('Regel van Drieën') niet beter dan de 'nieuwlichterij' van 10 jaar geleden (lossere aanpak met meer ruimte voor oriëntatie)?
- Ruimtemeetkunde gebaseerd op axioma's.

Beeldverslag SOFMAT 99

De foto's bij dit artikel vormen een beeldverslag van twee van de meer dan 15 conferentiethema's, en geven daarmee een korte impressie van SOFMAT 99.
Het conferentieverslag vermeldt dat in de inleidingen vaak twee typen onderwijs werden onderscheiden.
Het gangbare type wiskundeonderwijs in Mozambique is gebaseerd op uit het hoofd leren. Men was het er over eens dat dit op de langere termijn improductief is, dat het weinig nut heeft en er maar weinig begrips-vorming plaatsvindt.
Het alternatieve type zou meer gericht moeten zijn op begrip; het zou betekenisvol moeten zijn voor de lerende. De leerling zou moeten zien en ontdekken waarom dingen gelden, kennis zou 'doorvoeld' moeten worden en niet klakkeloos aangenomen.
In het verslag staat: *Hoe* en *waarom* zijn de essentiële vragen voor de mens; dat geldt ook voor de wiskunde.

Uitleg formule bol-inhoud door kokosnoot te vullen met zand

'Wat een arme Meetkunde' die slechts bestaat uit formules zonder fundament. De regels worden door elkaar gehaald en ze worden snel weer vergeten.
De leraren waren het er over eens dat het goed zou zijn als ze de formule van een bol zouden kunnen uitleggen en niet slechts als gegeven zouden presenteren. Het leerboek hielp niet echt. Dat vermeldde slechts: 'Met de wiskunde uit hogere klassen is het mogelijk de formule van de inhoud van een bol te vinden.'
De wiskundesectie uit het district Mafambisse heeft, gesteund door de docenten van de Pedagogische Universiteit, een idee uitgewerkt om de formule aanschouwelijk te maken (zie de foto's 1 t/m 4)

Een kleine toelichting bij het beeldverhaal: Ga uit van een bol met straal r die precies in een cilinder past. De cilinder heeft dan hoogte $2r$.
Het volume van de cilinder uitgedrukt in de straal van de bol is dan: $V_c = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$ (I)
Neem nu een bolvormige vrucht (kokosnoot of massala, een Mozambikaanse vrucht) en vul deze met zand. Giet de inhoud in cilinders van papier of cilindervormige blikjes (waar de kokosnoot precies in past). Doe dit drie keer en wat blijkt, twee cilinders zijn gevuld met zand, met andere woorden:
$3V_e = 2V_c \rightarrow V_e = \frac{2}{3}V_c$; hierbij staat e voor *esfera* (bol).

Door in dit resultaat (I) in te vullen krijgen we
$V_e = \frac{2}{3} V_c = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$
Het is natuurlijk ook mogelijk eerst de twee formules te geven, vervolgens de relatie $3V_e = 2V_c$ algebraïsch af te leiden en deze te verifiëren met behulp van het experiment.

Ruimtemeetkunde gebaseerd op axioma's

Elke Nederlandse wiskundeleraar zal in de foto's 5, 6 en 7 vrij snel probleem en oplossingsstrategie herkennen. Talloze bouwkits, computerprogramma's, etc., staan de Nederlandse leraar ter beschikking om zijn/haar onderwijs visueel aanschouwelijk te maken. Voor een Mozambikaanse leraar, gewend aan een formeel onderwijssysteem waarbij uit het hoofd leren nog steeds een grote rol speelt, zijn dit soort praktische hulpmiddelen zeer verrassend - niet alleen voor wat betreft de didactische kracht, maar ook vanwege het feit dat een en ander met eenvoudige middelen te bereiken is.

Evaluatie en enige overpeinzingen van deelnemers

Ongeveer 2400 euro is gebruikt als bijdrage om de conferentie te organiseren. Hierin waren onder meer opgenomen de reiskosten voor deelnemers uit afgelegen gebieden, huur van apparatuur en de slotmaaltijd voor de 125 deelnemers. Ook konden we op de keurig verzorgde financiële verantwoording zien, dat voor ruim 3 euro van onze bijdrage de wijziging van het welkomstspandoek voor de conferentie van SOFMAT 98 naar SOFMAT 99 is bekostigd en dat 25 van onze euro's er voor zorgden dat de conferentie vier keer aangekondigd kon worden op Radio Mozambique.
Nog eens 1000 euro is gestoken in de conferentiebundel. De 60 bladzijden tellende bundel staat vol met voorbeelden en aanwijzingen bij de onderwerpen van de conferentie. Het is een mooi naslagwerk voor de deelnemers.
Veel deelnemers aan de conferentie waren positief over opzet en organisatie van de conferentie. Men vond het verloop van de conferentie positief door het type discussies over de diverse thema's, door de inzet van de deelnemers en door de inspanning die deelnemers zich getroostten om het gebodene te begrijpen.
De bijeenkomst liet zien dat leraren begaan zijn met de verbetering van het onderwijs, speciaal van het wiskundeonderwijs!

De heer Luis Tembo van de onderwijzersopleiding in Lamego, Nhamatanda voegde daar nog aan toe:
'Ik kreeg de indruk dat wij allen geloven dat wanneer wij er niet in slagen de oorsprong van regels aan te wijzen, leerlingen deze regels niet onthouden noch de inhoud van deze regels begrijpen. Ik kreeg ook het idee dat wij leraren niet accepteren dat onze invloed op klassenresultaten negatief kan zijn. Door onjuiste vragen kunnen leerlingen gemakkelijk op het verkeerde spoor worden gezet. Ik geloof dat wij ons sterk verzetten tegen het ter discussie stellen van het

FOTO 1
Presentatoren leiden in

FOTO 2
Vrijwilliger uit publiek helpt met vullen

FOTO 3
Het zand wordt geleegd in cilinders van papier

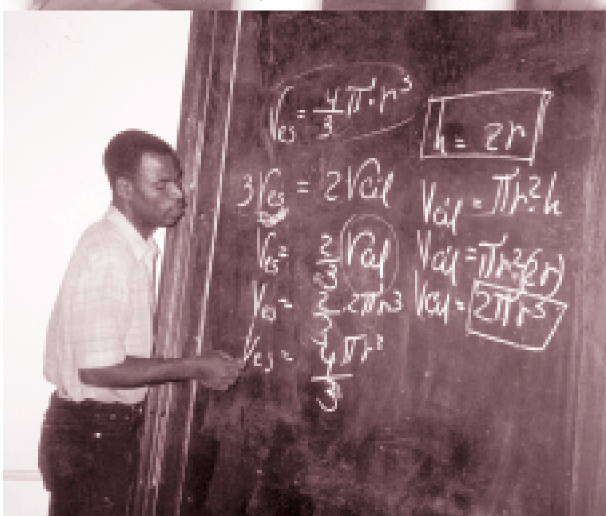


FOTO 4
De algebraïsche verantwoording

FOTO 5
De axioma's

FOTO 6
Het opbouwen van de opstelling [2]

FOTO 7
De oplossing

FOTO 8
Een conferentiedeelnemer geeft uitleg

gebruik van de 45 minuten. Die 45 minuten, zijn die van de leraar of van de leerling? Misschien kunnen we hier inzien dat wij een deel van de schuld dragen dat onderwerpen door een deel van de leerlingen niet begrepen worden. Sommige leraren merkten op dat de debatten geen eenduidige conclusie hebben en zij wisten nu niet wat ze moesten doen. Tot slot wil ik zeggen dat men veel kon leren en dat het een uitdaging voor eenieder is deze “leringen” te gebruiken om zijn lespraktijk te verbeteren....’

Tot slot

Het WwF gaat onverdroten voort. We worden gesterkt door de reacties van de ontvangers van het gedoneerde geld en de bijdragen van de leden. Elk jaar proberen we u gemiddeld twee keer via Euclides te informeren over de activiteiten van het WwF. U kunt in de nabije toekomst nog informatie verwachten over onze 2000 en 2001 projecten: een project op een vluchtelingen-school in Soedan en drie boekenprojecten in Kenia, Zambia en Tanzania.

Noten

[1] Gerben van Lent: SofMat 98, in Euclides, jg. 75 (3, november 1999)
[2] Uit Space Geometry Lessons van Martin Kindt

Over de auteur

Gerben van Lent (e-mailadres: jonglent@worldonline.nl)
is al meer dan 5 jaar secretaris van het Wereldwiskundefonds. Hij is werkzaam als Program Director bij ETS Europe in Utrecht, een onderdeel van Educational Testing Service. ETS, gevestigd in Princeton in de VS, is de grootste private instelling op het gebied van toetsing en assessment ter wereld.
Daarvoor was hij onder andere werkzaam bij de CITOgroep en als wiskundelerarenopleider en wiskundeleraar in Nederland en Zimbabwe.

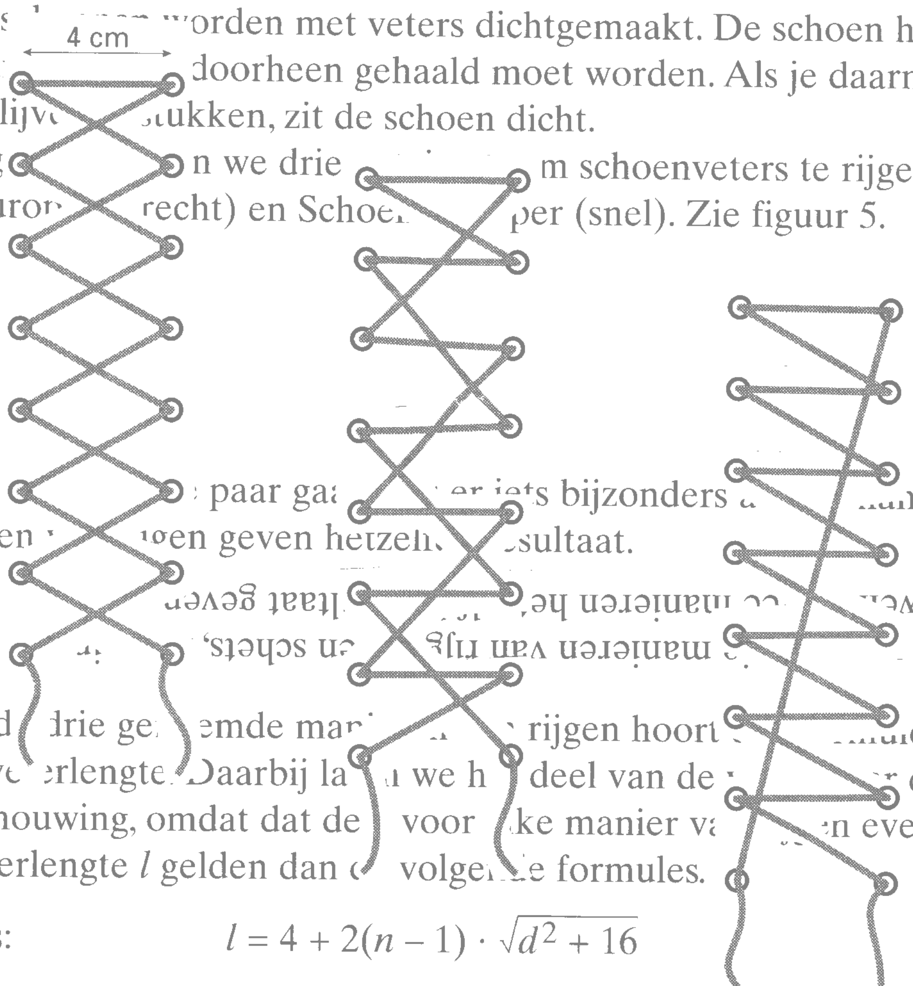
REKENEN MET EEN STORTVLOED AAN WOORDEN

Wiskunde op school is veel taliger geworden. Dat kan problemen opleveren, bijvoorbeeld in het geval van dyslectische leerlingen. Wiskundedocent Ton Coenen kan er over mee praten (in een interview).

[Hans Daale]

Opgave 4 Schoenveters

De meeste s... worden met veters dichtgemaakt. De schoen heeft dan twee rijen gaatjes waa... doorheen gehaald moet worden. Als je daarna een knoop legt in de overblijv... stukken, zit de schoen dicht.
In deze opg... n we drie ... m schoenveters te rijgen: Amerikaans (zigzag), Europ... recht) en Schoen... per (snel). Zie figuur 5.



Voor schoe... paar ga... er iets bijzonders a... nd: twee van de drie manieren ... gen geven hetzelf... esultaat.

Maak voor elk ... manieren van rijgen een schets, ... ur 5, en laat ... llaat geven ... manieren he... daarmee zien we...

Bij elk van d... drie ge... emde man... rijgen hoort ... e voor de benodigde ve... erlengte. Daarbij la... we h... deel van de ... de knoop in komt buiten beschouwing, omdat dat de ... voor ... ke manier va... n even lang is.
Voor de veterlengte l gelden dan d... volgende formules.

Amerikaans: $l = 4 + 2(n-1) \cdot \sqrt{d^2 + 16}$

Europees: $l = 4(n-1) + 2\sqrt{d^2 + 16} + (n-2) \cdot \sqrt{4d^2 + 16}$

Schoenverkoper: $l = 4(n-1) + (n-1) \cdot \sqrt{d^2 + 16} + \sqrt{(n-1)^2 \cdot d^2 + 16}$

Het probleem

‘Wie dit leest, is gek’: een gevleugeld grapje van vroeger. Sommige leerlingen gebruikten het als iemand wilde afkijken en na lang aandringen een briefje kreeg toegestoken. Leuk, maar nu eens wat anders: ‘Wie dit allemaal moet lezen, wordt er toch wel een beetje gek van’. In de wiskunde die vandaag de dag in het voortgezet onderwijs aan de leerlingen wordt voorgeschoteld, zitten steeds meer grote lappen tekst, die veel van de lezer vragen. Als je dan dyslectisch bent, heb je mogelijk een probleem. Ton Coenen, docent wiskunde in het voortgezet onderwijs en ook opgezadeld met die leeshandicap, vraagt zich af of de taal als context voor wiskundeopdrachten niet te overheersend wordt.

Talige wiskunde

In het afgelopen decennium is in hoog tempo getracht het vak wiskunde op het havo en vwo te ontdoen van haar saaie imago. Dat heeft vooral in de A-getinte vakken geleid tot het gebruik van een soort redactiesommen, waarbij de wiskunde in combinatie met levensechte voorbeelden uit andere vakken of de praktijk wordt gepresenteerd. Op zichzelf een prima gedachte omdat de wiskundige technieken ook in het dagelijkse leven niet op zichzelf staan. ‘Maar’, zo vraagt Ton Coenen zich af, ‘wat toets je nu eigenlijk als je een leerling zo’n stortvloed aan woorden voorschotelt en daaruit de noodzakelijke gegevens moet peuren alvorens de aangeleerde wiskundemethode erop los te laten?’ Deze vraag krijgt een extra lading als je je vervolgens verplaatst in een leerling die te maken heeft met een vorm van dyslexie. ‘Hoe moet die zich wel niet voelen als er op het proefwerk, tentamen of examen een hele pagina met tekst opdoemt, met hier en daar wat wiskundige symbolen?’

Dyslectisch

Ton is ‘al heel lang’ wiskundedocent op een middelbare school in Emmeloord en kan zich uitstekend verplaatsen in dergelijke leerlingen. Hij maakt zelf deel uit van een groep in ons land, die toch veel groter is dan veel mensen denken, en die elke schooldag wordt geconfronteerd met taalkundige puzzels. ‘Ik vraag me af of mijn collega’s, niet alleen bij wiskunde maar ook bij de andere vakken en vooral Nederlands, weten hoeveel van hun leerlingen op een of andere wijze dyslectisch zijn. In elke klas zitten er gemiddeld wel zo’n drie. Kunnen ze het probleem herkennen en, nog belangrijker, als zodanig erkennen? Daarmee bedoel ik dat je als docent in zo’n situatie in staat moet zijn om iemands prestatie te beoordelen, los van de fouten die hij of zij maakt vanwege z’n dyslexie.’
Natuurlijk steekt dan direct de discussie over de relevantie van het vak de kop op en wordt al gauw gesteld dat iemand met een havo- of vwo-diploma later ook in z’n werkomgeving gewoon moet kunnen functioneren. Anders gezegd, men leert er maar mee leven. Ton is het daar wel in principe mee eens, maar: ‘... als ikzelf vroeger niet in staat was geweest om tijdens mijn schooltijd al snel de meer taalrijke vakken te laten vallen en te kiezen voor de “zuivere” wiskunde, dan was ik mogelijk geen docent geworden. Ik ben nu toch aardig in staat voor de klas met wiskunde bezig te zijn.’

Functionele teksten

De situatie van nu is dus niet meer vergelijkbaar met vroeger, zeker met de invoering van de profielen. Iedereen zit vast aan een bepaalde vorm van wiskunde, maar krijgt ook veel meer vreemde talen. Over de hele linie wordt dus een dyslectische leerling meer dan toen geconfronteerd met teksten in allerlei soorten en maten. Maar bij die talen zijn ze functioneel en dat is bij de wiskundesommen niet altijd het geval. ‘Kijk maar eens goed naar het examen voor wiskunde-A12 van 2001. Zo’n som over een Casino is aardig en je kunt je er als leerling iets bij voorstellen, waardoor het lezen een stuk gemakkelijker wordt. Maar in die som over *Schoenveters* (zie illustratie) raak je sneller verstrikt, want het gaat eigenlijk alleen maar om het substitueren.’ De context moet dus in taalkundig opzicht een logische aanvulling op de wiskunde zijn, is zijn boodschap aan de opstellers van het landelijk examen. ‘Screen ook de tekst op zinvolheid. Een dyslectische leerling heeft niets aan nutteloze lappen tekst en wordt dan onnodig snel in verwarring gebracht.’
Een andere groep leerlingen die ook wel eens veel last zou kunnen hebben van het feit dat de CEVO voor zo’n wiskunde-examen met vijf opgaven maar liefst 11 pagina’s nodig heeft, is de allochtone leerling. Is dat zo? ‘Ik kan het me voorstellen,’ geeft Ton aan, ‘maar ik kan er vanuit mijn ervaring niet zoveel over zeggen.

Wellicht dat er eens onderzoek moet worden gedaan naar het verband tussen de prestaties voor de talen en de scores voor wiskunde, zeker nu alle leerlingen toch met wiskunde worden geconfronteerd. Toen het vak statistiek werd ingevoerd op het vwo, lang geleden dus, is in een wetenschappelijk onderzoek van de Universiteit van Amsterdam een duidelijke correlatie tussen het cijfer voor Nederlands en de score voor de statistiek-opgave aangetoond. Waarom zou dat nu anders zijn? ‘Wat ik trouwens wel zie, voor zover ik er zicht op heb, is dat goede vwo’ers met een duidelijke dyslexie op een gegeven moment toch maar voor het havo kiezen en hun surplus aan intelligentie gebruiken om op die manier een diploma te behalen.’ Ze kiezen dan natuurlijk zoveel mogelijk voor de echte wiskundevakken, dus B, waarin de taal toch duidelijk veel meer ondergeschikt is. ‘En als je vervolgens naar het hbo door kunt gaan en desnoods naar de universiteit, dan is er niet veel verloren, maar het is en blijft toch zonde.’

Oplossingen?

De vraag is natuurlijk hoe nu aan de leerlingen met dyslexie en andere taalproblemen tegemoet kan worden gekomen. Terug naar de rechttoe-rechtaan opgaven? ‘Nee, dat moet zeker niet’, reageert Ton

Coenen. ‘Maar het lijkt me geen slechte zaak als examens van tevoren worden voorgelegd aan een docent die in staat is te beoordelen of een opgave niet onnodig lastig wordt voor zo’n leerling. Een ontwerper van opgaven kan zich wel eens verliezen in een frivole context en een leuke taalkundige verpakking, maar het gaat nog steeds om de wiskunde.’
Maar je zou toch leerlingen kunnen trainen op het maken van dit soort opgaven. Baart oefening niet veel kunst? ‘Dat wel, maar dan moet je dyslexie binnen de school niet alleen als een aandachtspunt bij wiskunde zien. Bij Nederlands zou op een aantal zaken kunnen worden getraind, om bepaalde teksten goed te leren begrijpen. Daar zijn best methodes voor, bijvoorbeeld door te kijken naar belangrijke kernwoorden in een tekst en van daaruit verder gaan.’ Maar Ton relativeert dan meteen die aanpak: ‘Ik weet ook dat men het bij Nederlands erg druk heeft en dat er al weinig tijd is voor de reguliere onderwerpen. Alhoewel ik wel vind dat steeds meer de spelling wordt verwaarloosd en dat zoiets toch maar wordt toegestaan. Leerlingen worden dan sowieso slordiger.’ Je komt dan al gauw op extra begeleiding terecht, als de school daartoe bereid is en een budget ter beschikking heeft. ‘Het management speelt dus een belangrijke rol!’

Inzicht in effecten

Een voorzichtige conclusie mag toch zijn dat er niet genoeg aandacht bestaat voor de positie van de dyslectische leerling in het voortgezet onderwijs. En geldt dat wellicht ook voor de leerling met dyscalculie? Ton Coenen zou graag zien dat we inzicht krijgen in de effecten van de huidige opzet bij wiskunde op het studie- en keuzegedrag van leerlingen. ‘Het gaat me dus om de onnodige verzwaring van een opleiding, absoluut vervelend als iemand daardoor z’n doel niet kan bereiken. Een omweg is niet altijd een bezwaar, als dat echt nodig blijkt te zijn.’ Het kan best zijn dat bij andere scholen al een zeker beleid is ontwikkeld of dat bij de overheid het onderwerp ‘taal en wiskunde’ al op de agenda staat. ‘Maar dan wil ik dat graag weten. Wellicht kunnen we de handen ineenslaan en met ideeën komen, gevraagd of ongevraagd.’
Derhalve hierbij een oproep aan lezers om te reageren. Dat kan via e-mail, zie onderaan dit artikel. Ton Coenen wil graag een en ander mede coördineren, mocht het tot een werkgroep komen: ‘Ik denk dat die grote groep leerlingen onze speciale aandacht zonder meer verdient.’ Dat is in ieder geval duidelijke taal.

Reacties op de oproep in dit artikel kunnen naar:
Hans Daale: daale-zwol@planet.nl

Mededeling / Vacature Freudenthal Instituut

Het Freudenthal Instituut te Utrecht heeft een vacature Senior Onderwijsontwikkelaar Wiskunde; 1,0 fte, UHD-niveau.
Aandachtsgebied is het wiskundeonderwijs aan 15-jarigen en ouder (tweede fase havo-vwo en mbo), tevens in relatie tot de aansluiting met het ho.
De volledige advertentietekst is te vinden op *www.fi.uu.nl* en in de Volkskrant en NRC van 11 mei 2002.

Mededeling / Korting ‘History in Mathematics Education’

In Euclides 77-6, pp. 268-274, werd door Wim Kleijne het boek ‘History in Mathematics Education, The ICMI Study’ besproken (ed. John Fauvel & Jan van Maanen, Kluwer Academic Publicers; prijs € 159,-).

Wie het boek voor eigen gebruik koopt, kan 60% korting krijgen door bij de bestelling te vermelden: ‘Bestelling met 60% korting via ICMI’.

Besteladres:
Kluwer Klantenservice, Postbus 989, 3300 AZ Dordrecht, of
e-mail: *services@wkap.nl*

UITREIKING WISKUNDE SCHOLEN PRIJS 2002

[Gert de Kleuver]

Prof. Van der Blij en de Barlaeus-winnaars

De “hoogvliegers” van het Stedelijk College Eindhoven

Stimulans

Tijdens het Nederlands Mathematisch Congres in Eindhoven vond op 5 april jl. de uitreiking plaats van de Wiskunde Scholen Prijs 2002. Deze prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden. Hopelijk verbetert zo het imago van wiskunde en krijgen jongeren meer belangstelling voor exacte vakken.
Naast de scholenprijs van € 2000 waren er per categorie ook prijzen van elk € 1000 te winnen. Daarbij ging het om de drie categorieën bavo (klas 1 en 2), vmbo (klas 3 en 4) en klas 3 t/m 6 van havo en vwo. Jammer genoeg had geen van de deelnemende scholen ingeschreven voor alle categorieën, zodat de jury dit eerste jaar de scholenprijs nog niet kon toekennen. Gelukkig was het aanbod bij de categorie bavo zo goed, dat de jury besloot in die categorie een extra prijs toe te kennen van € 750.

Winnaars

Al met al werden dit jaar prijzen toegekend aan vier inzendingen.

Bavo-prijzen:
1. Raadselachtige wiskunde - Barlaeus Gymnasium te Amsterdam
2. Wiskundespeurtocht en IJssellympics - IJsselcollege te Capelle aan den IJssel

Vmbo-prijs:
Vliegers - Stedelijk College te Eindhoven

Havo/vwo-prijs:
Projecties - Meridiaan College, locatie 't Hooge Landt te Amersfoort

In een volgend nummer van Euclides wordt nader ingegaan op de inhoud van deze winnende inzendingen.

Uitreiking en presentaties

De feitelijke prijsuitreiking werd door prof. Van der Blij verricht zoals ik dat van hem verwachtte. Hij had zich goed voorbereid door de werkstukken van de winnaars te bestuderen. Humoristisch en spitsvondig werd bij iedere prijswinnaar iets verteld over het werkstuk.
De deelnemers van het congres konden daarna genieten van de verschillende presentaties van de prijswinnaars. Zo vond ik het fantastisch om mee te maken hoe twee Amsterdamse leerlingen uit de eerste klas heel overtuigd èn overtuigend een presentatie hielden over een bewijs voor een overbekend rekengrapje.

- Schrijf een willekeurig getal op dat uit drie cijfers bestaat (bv. 782).
- Noteer de cijfers nu in omgekeerde volgorde (287).
- Trek het kleinste van het grootste getal af (782 – 287 = 495).
- Noteer van dit verschil de cijfers in omgekeerde volgorde (594).
- Tel dit nieuwe getal op bij het eerder gevonden verschil (495 + 594 = 1089).
- De uitkomst is 'altijd' 1089.

Al met al was de uitreiking van deze eerste Wiskunde Scholen Prijs een vrolijk en feestelijk evenement.
Uw school doet volgend jaar toch ook mee?!

Foto's

Jos Jansen, TU Eindhoven

Over de auteur

Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@freeler.nl) is wiskundedocent aan het Ichthus College te Veenendaal en redactievoorzitter van Euclides.

De Wiskunde Scholen Prijs 2002 werd georganiseerd door WisKids waarin participeren Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut.
Het prijzengeld van de Wiskunde Scholen Prijs wordt mede gesponsord door NOCW en door de NVvW.
Voor meer informatie: *www.fi.uu.nl/wiskids* of per email: *wiskids@fi.uu.nl*

Recreatie

[Jan Verbakel, Herman Ligtenberg]

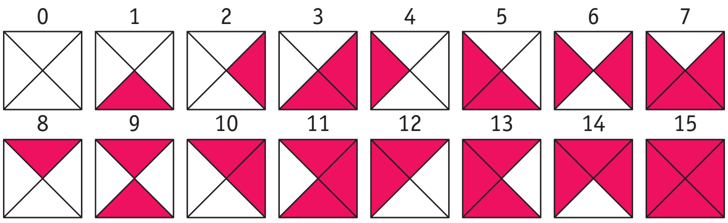
Puzzel 16 – Digitale tegels

Stel je een vierkante tegel voor die verdeeld is in vier congruente gelijkbenige rechthoekige driehoeken. Elk van de hypotenusa's van de driehoeken is een zijde van het vierkant. De rechte hoeken van de driehoeken komen bijeen in het midden van het vierkant. Alle driehoeken zijn rood of wit. We geven iedere driehoek een waarde die afhankelijk is van de plaats in het vierkant. De onderste heeft waarde 1, de rechter waarde 2, de linker waarde 4 en de bovenste waarde 8. Deze waarde wordt alleen toegekend als de driehoek rood is gekleurd, de andere mogelijke kleur is wit. Zoals eenieder inmiddels begrijpt is iedere driehoek eigenlijk een bit. Het vierkant heeft de som van de waarden van de driehoeken, en kan dus een waarde hebben van 0 tot en met 15. In figuur 1 zien we alle 16 mogelijke tegels, oplopend van 0 tot 15.

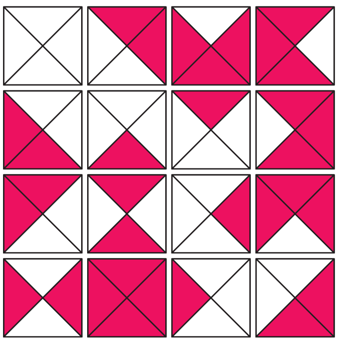
We moeten er wel voor zorgen dat we de tegels keurig netjes rechtop houden, anders zien we straks het verschil niet meer tussen tegel 6 en tegel 9.

Nu willen we graag deze 16 tegels in een vierkant van 4 bij 4 leggen met de voorwaarde dat rood aan rood grenst en wit aan wit. Daarbij moet de laatste tegel van elke rij weer aansluiten op de eerste van diezelfde rij. In het voorbeeld (zie de figuren 2 en 3) zien we dat in de eerste rij de rechterkant van 13 weer aansluit op de linkerkant van 0. Verticaal dezelfde eis; in de derde kolom zien we dat de onderkant van 4 weer aansluit op de bovenkant van 7.

Tenslotte hebben we nog een eis die de getalwaarden betreft. Het 4 bij 4 vierkant moet een magisch vierkant zijn: alle sommen van de rijen, kolommen en hoofddiagonalen (dus tien sommen in totaal) moeten gelijk zijn. Er is precies één oplossing.
Graag de oplossing (ook) in de getallennotatie opsturen, dus een 4 bij 4 tabel zoals figuur 3.
Uiteraard gaat de voorkeur uit naar een (zo ver mogelijke) analytische oplossing.
Veel plezier!



FIGUUR 1



FIGUUR 2

0	10	7	13
5	1	8	11
12	9	2	14
6	15	4	3

FIGUUR 3

Over de ontwerper van deze puzzel

Jan Verbakel (e-mailadres: *rina_sonja@wxs.nl*) is een TUE-wiskundige die vele jaren op het Natuurkundig Laboratorium heeft gewerkt. Hij heeft aldaar kennisgemaakt met puzzels ('ieder researchvraagstuk is een puzzel') en met puzzelaars, zoals zijn grote voorbeeld Chris Bouwkamp. Jans grootste interesse, naast het bedenken en oplossen van puzzels, is wiskundige kunst. Hij schrijft gedichtjes met wiskundige of logische achtergrond. Een van zijn voorbeelden daarbij is Drs. P.

Puzzel 15 – Magneten

Het probleem was een aantal staafmagneten in vakjes te leggen. Naast en onder de figuur was aangegeven hoeveel N- en Z-polen zich in de betreffende rij en kolom bevinden.
Een mogelijk uitgangspunt voor de oplossing is de achtste rij. Hierin overtreft het aantal N-polen het aantal Z-polen met 2. De ligging van twee magneten is dan al direct te vinden.

											N	Z
	N			N	Z				Z	N	3	2
	Z			Z	N		N	Z		Z	2	4
		N	Z	N	Z	N	Z	N		N	5	3
		Z				Z	N	Z	N	Z	2	4
	Z	N		N	Z			N		N	4	2
	N	Z	N	Z	N	Z		Z			3	4
	Z	N	Z	N							2	2
			N			N	Z	N	Z	N	4	2
	Z		Z			Z		Z	N		1	4
	N		N	Z							2	1
N	3	3	3	4	2	2	2	3	2	4		
Z	4	2	3	3	3	3	2	4	2	2		

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de voorlopige verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
8	24 juni 2002	10 mei 2002

donderdag 23 mei, aanvang 13:30u
Examen havo-A12 en examen havo-A (os)

vrijdag 24 mei, aanvang 13:30u
Examen mavo/vbo-C/D
Examen vwo-B1/B12 en examen vwo-B (os)

zaterdag 25 mei
Symposium HKRWO: De roerige jaren 60
Zie p. 257 in Euclides 77-5

maandag 27 mei, aanvang 13:30u
Examen havo-B1/B12 en examen havo-B (os)

dinsdag 28 mei, aanvang 13:30u
Examen vwo-A1/A12 en examen vwo-A (os)

maandag 27 mei t/m donderdag 30 mei
Regionale examenbesprekingen
Zie p. 295 in Euclides 77-6

donderdag 30 mei, 's middags, Nijmegen
The story behind 'A beautiful mind'
Drie lezingen georganiseerd door KUN

woensdag 19 juni, aanvang 13:30u
Herkansingen wiskunde A en wiskunde B (ns)

vrijdag 21 juni
Herkansing wiskunde B (os)

vrijdag 23 en zaterdag 24 augustus
Vakantiecursus 2002 te Eindhoven
Organisatie CWI

vrijdag 30 en zaterdag 31 augustus
Vakantiecursus 2002 te Amsterdam
Organisatie CWI

maandag 23 september t/m zondag 29 september
Wiskundeseminar in Poznań (Polen)
Organisatie Euroschool (*www.euroschool.nl*)
Zie p. 251 in Euclides 77-5

zaterdag 16 november
Jaarvergadering/studiedag
Organisatie NVvW

zaterdag 23 november (was 9 november)
Ars et Mathesisdag, Baarn
Organisatie Stichting A&M

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *http://www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor € 185,00
Individueel abonnement voor leden: € 34,00
Losse boekjes voor leden: € 8,00
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10).
Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten € 6,00; in de betere boekhandel € 8,00.

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 90 01 65956 X; prijs € 8,00; te bestellen in de boekhandel.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).
Leden: € 22,00; niet-leden: € 28,00 (incl. verzendkosten).
Zie eventueel ook de advertentie in Euclides 76-7 (na p. 288).

Zojuist verschenen …

[Hans Melissen, Rob van Oord]

Zebra 11

Schuiven met auto's, munten en bollen

Hoe groot moet een dienblad zijn waar precies tien colablikjes op passen? Hoe krijg je zoveel mogelijk sinaasappelen in een kistje? Wat is het beste ontwerp voor een parkeerterrein? Over deze vragen gaat het in dit boekje. Iets wiskundiger gezegd is het onderwerp het optimaal rangschikken van meetkundige objecten. Soms kun je door berekening bepalen wat de beste oplossing is en zelfs bewijzen dat het niet beter kan. Vaak lukt dat niet, en dan moet je, bijvoorbeeld door experimenteren, op zoek naar goede benaderingen.
Deze zebra bevat optimale wiskunde, die je al te lijf kan gaan als je gewapend bent met de stelling van Pythagoras, een paar munten en een dosis goed verstand.

ISBN 90 50541 073 1

[Ruud Jeurissen, Leon van den Broek]

Zebra 12

Spelen met gehelen

Wat hebben rollende ballen, draaiende tandwielen en springende kikkers met elkaar te maken? Meer dan je op het eerste gezicht zou denken. Ze komen allemaal voor in deze zebra, waar alles draait om de begrippen Grootste Gemene Deler (GGD) en Kleinste Gemene Veelvoud (KGV). Niet alleen krijg je door dit boekje meer inzicht in de GGD en KGV, en hun rol in allerlei toepassingen, maar leer je ook wiskunde te ontdekken en je ontdekkingen te bewijzen.

ISBN 90 5041 072 3

Prijs voor leden van de NVvW: € 8,00 (incl. verzendkosten); bestellingen via girorekening 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven, Utrecht.
Prijs voor leden van de NVvW op bijeenkomsten: € 6,00.
Prijs voor niet-leden: € 8,00 (in de betere boekhandel).
Voor abonnementen zie de Servicepagina in dit nummer van Euclides.

Epsilon Uitgaven
in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren