EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

december
2001/nr.3
jaargang 77

WISBASE EN ORSTAT

VERMAECK: HET ERFENISVRAAGSTUK

SECTORWERKSTUK VMBO

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

3

december 2001 JAARGANG 77

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per verenigingsjaar: *f* 80,00
Studentleden: *f* 40,00
Leden van de VVWL: *f* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *f* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *f* 85,00 per jaar.
Voor instituten en scholen: *f* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *f* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of F. Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

INHOUD

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Ervaringen met het vmbo

Het eerste 'leerjaar drie' van het vmbo loopt! En let wel, het gaat hierbij om een grotere leerlingpopulatie dan die van het havo of het vwo.
De redactie vindt het van groot belang, ook gezien de grote doelgroep en de specifieke problematiek, dat in Euclides over wiskundeonderwijs in het vmbo en het lwoo gepubliceerd wordt. Inmiddels staat dan ook een aantal 'vmbo-artikelen' voor de lopende jaargang op stapel, maar méér geluiden rechtstreeks uit de scholen zijn uiteraard bijzonder welkom!
Wiskundedocenten in het vmbo hebben tijd geïnvesteerd in het opzetten van programma´s van toetsing en afsluiting, maar ook in het nadenken over geschikte opdrachten: GWA´s, ICT, het sectorwerkstuk, ... Ongetwijfeld is er in dit kader al heel wat aanvullend leerlingmateriaal op de scholen ontwikkeld, en zijn daarmee inmiddels de nodige ervaringen opgedaan. Het is de moeite waard, elkaar daarin te ondersteunen. We hopen daarom dat sommigen van u bereid zijn de eigen ervaringen, ideeën en/of producten 'op papier' te zetten (of op diskette of in een e-mailbijlage).
Mocht u het lastig of te tijdrovend vinden uw ideeën of ervaringen op schrift te stellen, dan zijn er altijd oplossingen te vinden. Uw bijdrage kan bijvoorbeeld vorm krijgen door middel van een interview, een voorlopige concept-tekst kan in goed overleg door de redactie tot een artikel bewerkt worden, etcetera. Maar: laat van u horen! Het e-mailadres is *redactie-euclides@nvvw.nl*, en de papieren post werkt natuurlijk ook nog steeds: zie voor het adres de pagina links.

Uit de inhoud van dit nummer

Ook in dit nummer aandacht voor het vmbo. Anders Vink biedt een aantal praktische handreikingen voor de opzet van het sectorwerkstuk.
Danny Beckers laat ons opnieuw iets proeven van de geschiedenis van de wiskunde. Het zogeheten erfenisvraagstuk kwam in de loop van de historie op verschillende manieren terug: van echt juridisch en daarmee toegepast wiskundig probleem, tot puur recreatief, maar niet erg realistisch rekenvraagstuk.
Problemen uit de toegepaste wiskunde worden tegenwoordig vaak met ondersteuning van de computer opgelost. Jos Tolboom onderzocht de didactische waarde van het softwarepakket ORSTAT2000, een educatief programma dat vooral ingezet kan worden bij optimaliserings- en kansproblemen.
Euclides is niet voor niets 'vakblad voor de wiskundedocent'. In het kader van praktische ondersteuning valt het initiatief van Bram Theune, die een digitale databank van toetsen en dergelijke heeft opgezet: WisBase. Informatie daarover, in de vorm van een heuse lijst met FAQs, vindt u op bladzijde 88.
Verder een interview met voormalig hoofdredacteur Kees Hoogland. Zoals u gemerkt hebt, levert Kees gelukkig nog steeds bijdragen voor Euclides. Dit keer zelfs onbedoeld: de tabel uit het vorige nummer wordt dit keer wél van kopjes voorzien; zie bladzijde 81.

Bottema 100 jaar

Eind van deze maand, op 25 december 2001, is het honderd jaar geleden dat Oene Bottema geboren werd. Prof. dr. O. Bottema, hoogleraar wiskunde en mechanica van internationale naam en faam aan de toenmalige TH Delft, overleden in 1992, heeft veel voor Euclides betekend. Van zijn hand werden in Euclides talloze 'Verscheidenheden' gepubliceerd, korte artikelen met meestal een elementair-meetkundige inhoud. Het volgende nummer van Euclides zal volledig in het teken van 'Bottema 100 jaar' staan: een feestelijke, extra dikke Bottema/meetkunde-special.
Het wordt een nummer om naar uit te kijken!

Illustratie bij het erfenisvraagstuk in een 14de-eeuws Italiaans manuscript

WISCONSTIGHE VERMAECKLYCKHEDEN VI

Recreatieve wiskunde in Nederland door de eeuwen heen: het erfenisvraagstuk

[Danny Beckers]

Een man die weet dat hij stervende is, laat ten behoeve van zijn zwangere vrouw en zijn toekomstige kind een laatste wilsbeschikking opmaken waarin zijn kapitaal als volgt verdeeld wordt: indien zijn vrouw bevalt van een zoon, zal de jongen 2/3, en de vrouw 1/3 van zijn kapitaal ontvangen. Bevalt de vrouw echter van een dochter, dan krijgt de vrouw 2/3 en de dochter 1/3.
De man overlijdt en de vrouw bevalt van een tweeling: een jongen en een meisje. Het probleem dat zich nu voordoet is duidelijk: hoe moet de erfenis worden verdeeld?
Dit vraagstuk is al erg oud. De oudste bekende bron waarin het voorkomt is de *Pandectae*, een gedeelte van de rechtskundige codificatie van keizer Justinianus I (484-565) van het Byzantijnse rijk, dat in de zesde eeuw verscheen. De *Pandectae* bevat excerpten van oude Romeinse juristen; in dit geval beweert de auteur dat het probleem afkomstig is van de Romeinse rechter Juventius Celcius en dateert van rond het jaar 75 van onze jaartelling. Het is duidelijk dat de overledene niet aan het geval van een tweeling heeft gedacht: het vraagstuk is wiskundig niet oplosbaar. Vanwege de getallen die er in voorkomen is het op het eerste gezicht wel aantrekkelijk om een wiskundige oplossing te beproeven, en dat is in de loop der eeuwen dan ook meermalen gebeurd.

Een lastig vraagstuk

De erfeniskwestie laat zich beschrijven in twee verhoudingen. Wanneer we de gedeelten van het kapitaal die aan de drie actoren (de vrouw, de zoon en de dochter) toekomen respectievelijk aanduiden met v, z en d dan resulteert het vraagstuk in:
$v : z = 1 : 2$ (I)
$v : d = 2 : 1$ (II)
Met een beetje goede wil (tenslotte gaat het om twee duidelijk onderscheiden gevallen) kunnen we verder constateren dat het jongetje de man twee keer zoveel waard is als het meisje, en is dus de volgende verhouding uit het vraagstuk af te leiden:
$d : z = 1 : 2$ (III)
De Romeinse rechter besloot tot een verdeling in zevenen: 4 delen voor de zoon, 2/7 voor de moeder, en 1/7 voor de dochter; hij gebruikte dus (I) en (II) [1]. Of hij dat deed omdat (III) niet expliciet in het testament stond, of omdat de verdeling in zeven delen mystiek aantrekkelijk was is niet bekend [2].
Het aardige aan de erfeniskwestie is dat het vraagstuk een eigen leven is gaan leiden. Gedurende de middeleeuwen was het een populaire breinkraker. Men veronderstelde steeds dat het vraagstuk wiskundig oplosbaar was [3]. De oudste aanwijzing dat de erfeniskwestie in Nederland bekend was, dateert van 1545: de Friese geleerde Gemma Frisius (1508-1555), professor aan de universiteit van Leuven, vermeldt het vraagstuk in zijn rekenboek. Daar komt het voor in de serie opgaven over de 'regel van gezelschap': één van de vele toepassingen van de regel van drieën, waarin de opgave was de winst van een transactie over de deelnemers te verdelen naar evenredigheid van inleg [4]. Sindsdien duikt het meermalen in rekenboeken op: meestal onder het kopje 'reghel van erfdeelinghe', een variant op de 'regel van gezelschap' [5] . Steeds werd het vraagstuk behandeld als een mathematische (oplosbare) opgave. In 1658 merkte de Zeeuwse rekenmeester Cornelis Eversdijck (1586-1666) voor het eerst op dat er meerdere oplossingen waren gepresenteerd. De meest voorkomende was de verdeling die in de *Pandectae* werd aangehouden, maar hij had ook een verdeling $z : v : d$ als $2 : 2 : 1$, $3 : 2 : 1$ en zelfs $9 : 6 : 4$ gezien. *'Ons erachtens alle onghefondeert'* schreef hij erover. Zelf beredeneerde hij dat de verdeling $4 : 3 : 2$ moest zijn:

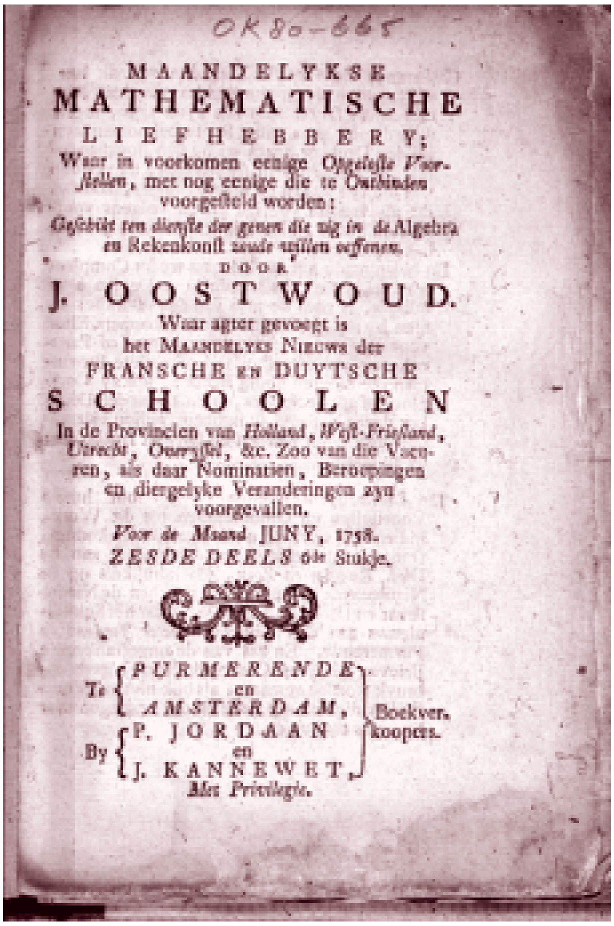
Des Moeders deel sal dan van soodanigher natuere zijn, dat het in twee onghelijcke deelen sal konnen ghedeelt werden; daer van het minste stae teghen de helft [=het deel, DB] des Soons, ghelijck 1 teghen 2; ende het grootste teghen de helft des Dochters, ghelijck 2 teghen 1, even ghelijck bij de Vader was gheordonneert. [6]

Toen rond 1700 in Nederland vergelijkende examens werden gehouden als een gemeente een nieuwe leraar voor de gemeenteschool zocht, werd het raadsel al snel aan docenten voorgelegd. Begin 1754 bijvoorbeeld kreeg C. Mijburg, naast het zingen van een psalm en een paar sommen over de regel van drieën, het vraagstuk voorgelegd tijdens zijn sollicitatie in Zaandijk. Dit maal in een absurde vorm, waarin een drieling werd geboren: naast de jongen en het meisje een hermafrodiet [7]. De regenten die de vergelijkende examens afnamen, hadden meestal rechten gestudeerd en kenden de erfeniskwestie dus waarschijnlijk uit de *Pandectae*.

Een kwinkslag

In 1759 verscheen in Oostwouds *Mathematische Liefhebberijen* [8] het erfenisvraagstuk op rijm:
Terwijl hij op zijn sterfbed lag,
En zijn bevruchte vrouw aanschouwde,
Op hem, op wien z' haar hoop steeds bouwde,
Vast met betraande oogen zag;
Begeert hij, dat van 't tijdelijk goed,
't Geen na zijn dood zou zijn bevonden,
En waardig vijftien duizend ponden,
De deeling dus geschieden moet;
Dat, zoo de vrouw een dochter baart,
Zal zij tweemaal zoveel genieten
Als voor het kind zal overschieten;
Maar zoo voor mannelijken aard
De vrucht mogt zijn; dan zal het deel
Des zoons tweemaal zoveel bedingen
Als 's moeders erf, zijn welbehagen
Zal dan voldaan zijn in 't geheel.

Zoo nu de vrouw ter eener dragt
Twee kinderen ter wereld bragt,
't Zij zoons of dochters, of ook beiden,
Hoe zou men dan de boedel scheiden
Dat niemand werd te kort gedaan,
En 't met 's mans eisch best kan bestaan.



OK 80-665

MAANDELYKSE
MATHEMATISCHE
LIEFHEBBERY;
Waar in voorkomen eenige *Opgeloste Voorstellen*, met nog eenige die te Ontbinden voorgesteld worden:
Geschikt ten dienste der genen die zig in de Algebra en Rekenkonst zoude willen oeffenen.
DOOR
J. OOSTWOUD.
Waar agter gevoegt is het MAANDELYKS NIEUWS der
FRANSCHE EN DUYTSCHE
SCHOOLEN
In de Provincien van *Holland*, *West-Friesland*, *Utrecht*, *Overyssel*, &c. Zoo van die Vacaturen, als daar Nominatien, Beroepingen en diergelyke Veranderingen zyn voorgevallen.
Voor de Maand JUNY, 1758.
ZESDE DEELS 6de Stukje.

Te { *PURMERENDE* en *AMSTERDAM*,
By { P. JORDAAN en J. KANNEWET, } Boekverkoopers.
Met Privilegie.

Van een lastig examenvraagstuk was het een kwinkslag geworden in opgavenseries die leraren en liefhebbers van wiskunde kochten om zichzelf te oefenen of mee te amuseren [9]: recreatieve wiskunde dus. Ondanks de verschillende oplossingen die er circuleerden, ging niemand aan de oplosbaarheid twijfelen: waarschijnlijk was het probleem voor de meeste leraren toch te moeilijk om te doorzien, terwijl de wiskundigen, uit een hogere sociale klasse, het niet interessant genoeg vonden om aandacht aan te besteden. Daarbij moeten we ons realiseren dat de onderwijzers het rekenen meestal in receptenvorm, zonder nadenken, uit de rekenboeken van Bartjens of Van Lintz leerden.
Vanaf de laatste decennia van de achttiende eeuw, met het opkomende ideaal van de Volksverlichting, schreven een aantal wiskundigen leerboeken. Ook in die leerboeken kwam het vraagstuk voor. De wiskundigen begrepen het vraagstuk maar al te goed: zij veranderden de getallen zodanig dat de erfeniskwestie wel oplosbaar werd. In de *Wiskundige Lessen* (1808) van Jacob de Gelder bijvoorbeeld was verhouding (I) omgekeerd, en verhouding (II) gewijzigd in d : v = 1 : 3. Bovendien werd vermeld dat de regels van de man ook op de nieuwe situatie betrekking hadden. Dan valt het vraagstuk inderdaad onder de 'regel van gezelschap' en is het oplosbaar, hetgeen De Gelder in zijn boek dan ook liet zien [10].

Geleerd vermaak

In 1815 werd bij K.B. het wiskunde-onderwijs aan de Latijnse scholen (gymnasia) verplicht. Tevens werden studenten aan alle faculteiten voortaan verplicht om wiskunde-colleges te volgen. Het nieuwe vak genoot een hoge status, met name onder de sociale middenklasse, die ook haar kroost (recreatieve) wiskunde liet beoefenen [11].
Tijdens de eerste decennia van de negentiende eeuw werd er in Nederland hevig gediscussieerd over de vernieuwing van het universitair onderwijs. Met name de beoefening van het Romeinse Recht moest het ontgelden omdat de 'vormende waarde' ervan openlijk in twijfel werd getrokken. Voor- en tegenstanders vlogen elkaar publiekelijk in de haren [12]. In die context verscheen de opgave over de erfenis in een zeer eigentijdse versie op 25 februari 1820 opnieuw, nu in een algemeen letterkundig tijdschrift. Er werd gesuggereerd dat de situatie recentelijk in Engeland was voorgevallen: de rechters werden met naam en toenaam genoemd. De oplossing was volgens het klassieke voorbeeld in de *Pandectae*. De auteur haalde de *Pandectae* ook aan en meende op deze manier te hebben geïllustreerd dat het 'schoone Romeinse recht' onze aandacht meer dan waardig was [13].
Een anonieme briefschrijver, naar alle waarschijnlijkheid de Amsterdamse docent wiskunde van de zeevaartschool O.S. Bangma (1768-1829), schreef een scherpzinnig en humoristisch commentaar

op deze anekdote. Hij begon met zijn verbazing uit te drukken over het feit dat twee rechters over deze zaak hadden moeten beslissen: hij had twee schoolmeesters verwacht, of toch ten minste een rechter en een schoolmeester –de rechter om er voor te zorgen dat 'de fatalia' in acht werden genomen. Dan liet hij een aantal verschillende oplossingen de revue passeren, inclusief de vermelding van de vindplaats. Hij had ook een aantal huisvrouwen om hun mening gevraagd, omdat die tenslotte in de zaak betrokken waren:

Dezelve zijn eenparig van gevoelen, dat de moeder de helft, de zoon een derde en de dochter een zesde van het kapitaal moet hebben; want zeggen zij: daar staat duidelijk in het testament, dat de moeder een deel moet hebben tegen de zoon twee, en dat de moeder twee delen moet hebben tegen de dochter een; dus moet de moeder hebben een plus twee, dat is drie delen, de zoon twee en dochter een: *Quad est demonstrandum* [sic].
Men zou tegen deze stelling kunnen inbrengen, dat de vrouwen altijd gewoon zijn, naar zich toeterekenen; en dat haar advies, als niet onzijdig genoeg beschouwd konde worden, om met de overige in vergelijking te komen. [14]

Niet alleen het Romeinse recht, ook onze wiskundeboeken verdienden onze aandacht, concludeerde de auteur. Ten overvloede zou de Haagse wiskundedocent G. ten Brummeler, die op dezelfde anekdote reageerde, nog nadrukkelijk vermelden dat het vraagstuk in de gestelde vorm niet oplosbaar was: omdat de drie verhoudingen - hij bedoelde hier echt (I), (II) en (III) - elkaar tegenspraken [15]!

Onderwijswetten

In 1826 werden de wetten over het wiskundeonderwijs aangescherpt: er werd preciezer omschreven wat op de Latijnse scholen moest worden onderwezen. Alle studenten moesten bovendien examens afleggen voor wiskunde: heel wat meer dan alleen aanwezigheidsplicht. Dit leidde tot heftige discussie. Velen waren van mening dat de letterkundige en wetenschappelijke studie niet samen konden gaan. Bovendien was voor de universiteit het examen nieuw: het werd gezien als een ongehoorde inperking van de studievrijheid dat studenten aan een aantal vastgestelde eisen moeten voldoen. Velen ageerden, mede ook wegens deze verplichte examens, tegen het vak wiskunde als verplicht vak voor alle studenten [16].
Tegen de achtergrond van deze discussie verscheen het vraagstuk in 1838 opnieuw in een letterkundig tijdschrift. De auteur had geen andere bedoeling dan een vermakelijke anekdote te presenteren. Hij wist niet wat hij ontketende. Zijn oplossing was volgens een verdeling in negenen, waarbij de vrouw drie, de zoon vier en de dochter twee delen kreeg [17]. Een cynische reactie viel hem ten deel. In een volgend nummer schreef een anonieme briefschrijver dat de opgave niet juist was opgelost. Hij beredeneerde dat de oplossing als in de *Pandectae* had moeten zijn. Met zijn cynische slotopmerkingen trok hij het vraagstuk in de discussie over de wiskunde-examens aan de universiteit:

Ik hoop niet dat deze kleine aanmerking zal worden beschouwd als gerigt tegen de zoo hoogst loffelijke gewoonte der heeren studenten, om hunne verpligte wiskundige collegiën zoo min mogelijk te bezoeken, en zo veel mogelijk door eene beminnelijke wanorde te verstoren. Ik weet zeer goed, dat men vonnissen vellen *kan*, wel preken *kan*, zijne zieken wel helpen *kan*, zonder wiskunde te verstaan, en heb dit zelfs geweten voor dat Professor **, bij zekere gelegenheid eene redevoering deed, ten betooge van het nadeel der wiskunde voor de andere studiën. Ik weet dat regterlijke uitspraken boven reden gelden, dat godgeleerde bewijzen hooger waarde hebben dan wiskundige, en dat de verborgene ingeschapene krachten der verschillende zamenstellende deelen des menschelijken ligchaams vrij wat gemakkelijker te begrijpen zijn dan de werktuigkundige wetten. –En dien ten gevolge wil ik mijne geringe aanmerking voor niets anders gehouden hebben dan hetgeen zij werkelijk is: De uitwerking van een vraagstuk, zoo als men die in de eerste leerboeken der algebra aantreft. [18]

Later werd het door een medestander nog eens nadrukkelijk naar voren gehaald: in een reactie op dit stukje zei een briefschrijver dat met name dit vraagstuk toch wel heel pregnant de waarde van de wiskunde voor de rechtskundige deed voelen.
Het is natuurlijk onmogelijk om alle boeken en tijdschriften er op na te zoeken, maar bij mijn weten is het vraagstuk sinds de jaren '40 van de negentiende eeuw hooguit nog bij wijze van amusante anekdote aangehaald. Het verbeterde wiskunde-onderwijs en de acceptatie van de wiskunde als belangrijk vak van onderwijs zijn daar mede debet aan.

Conclusies

Wat ik heb willen laten zien is dat een vraagstuk in de loop van de geschiedenis steeds in een andere rol terug kan keren. Een vraagstuk dat voor ons recreatief, of zelfs niet wiskundig van aard is, kan vroeger heel anders bekeken zijn. Met de erfeniskwestie was dit het geval.
In eerste instantie was de erfeniskwestie een rechtskundig probleem, later werd het een serieus (examen)vraagstuk, om vervolgens een recreatieve rol te gaan spelen. In zijn originele vorm verdween het met het beter worden van het wiskundeonderwijs, om vervolgens in letterkundige tijdschriften terecht te komen: daar werd het door mensen die in vroeger tijden nooit met wiskunde in aanraking waren gekomen (maar er nu oppervlakkig mee hadden kennis gemaakt) als recreatieve wiskunde beschouwd. Het vraagstuk werd zelfs zo sterk met wiskundeonderwijs geassocieerd dat een poging om het in te zetten in de discussies rond het Romeinse Recht onmiddellijk reactie uitlokte uit wiskundige hoek. In die (althans voor de wiskundig onderlegde lezers van die tijd)

recreatieve hoedanigheid zou het vraagstuk nog een bescheiden rol spelen in de discussie over de waarde van wiskunde voor rechtenstudenten. Hopelijk is door deze beschrijving een dimensie aan de erfeniskwestie toegevoegd.

Noten

[1] Pandectae, Liber XXVIII, Titulus II: De Liberis et posthumis, heredibus instituendis vel exheredandis, paragraaf 3, artikel 31
[2] Alfred Crosby, The measure of reality, Cambridge (1997) laat een aantal fraaie staaltjes van antieke getallenmystiek zien.
[3] David E. Smith, History of Mathematics, deel II, Boston etc. (1953), pp. 544-546
[4] Gemma Phrisius, Arithmeticae practicae methodus facilis, Parisiis (1545)
[5] Bijvoorbeeld in: A. van der Gucht, Cyfer-Boeck (1569); Iaques van der Schuere, Arithmetica, Oft Reken-const (1600); A. Smyters, Arithmetica, dat is / De Reken-Konste, deel 2 (1612)
[6] C.F. Eversdijck, Arithmetica, Middelburgh (1658) [herziene versie van rekenboek van J. Coutereels uit 1799]
[7] Gemma Phrisius, Arithmeticae practicae methodus facilis, Parisiis (1545), Maandelijksche mathematische Liefhebberijen met het nieuws der ... scholen I nr. 1 (april 1754), pp. 4-6
[8] J. Oostwoud, Mathematische Liefhebberijen deel V (1759), p. 379. De inleidende strofes over het huwelijksgeluk zijn hier weggelaten.
[9] Zie deel III in deze serie, in: Euclides 75 nr. 6 (maart/april 2000), pp. 183-189
[10] J. de Gelder, Wiskundige lessen dl. I (1808), p. 336, vraagstuk 29
[11] Zie de delen IV en V in deze serie, resp. Euclides 75 nr. 8 (juni 2000), pp. 277-281; Euclides 76 nr. 4 (januari 2001), pp. 146-150
[12] J. Wachelder, Universiteit tussen vorming en opleiding, Hilversum (1992), pp. 160-162
[13] Algemeene Konst en Letterbode, 1820-I, pp. 123-125
[14] B....a, 'Nog iets over de erfstelling', in: Algemeene Konst en Letterbode (1820) - I, p. 213
[15] G. ten Brummeler, `Mijn iets over de erfstelling' in: Algemeene Konst en Letterbode 1820-I, pp. 387-388
[16] H.J. Smid, Een onbekookte nieuwigheid, Delft (1997)
[17] De Recensent, ook der Recensenten, 1838-II, p. 428
[18] De Recensent, ook der Recensenten, 1838-II, p. 476. De vonnissen, preken en zieken staan natuurlijk in verband met de drie faculteiten die naast de wis- en natuurkunde faculteit aan de Nederlandse universiteiten bestonden: de faculteiten der Rechten, der Theologie en der Medicijnen.

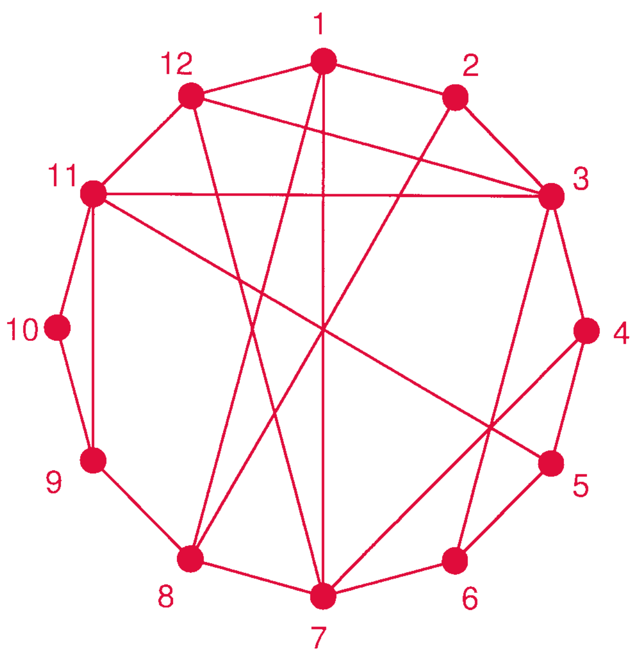
Over de auteur

Danny Beckers (e-mail: dbeckers@sci.kun.nl) is verbonden aan de Katholieke Universiteit Nijmegen.
Van zijn hand verschenen de Wisconstighe Vermaecklyckheden I tot en met V eveneens in Euclides (zie bijvoorbeeld de noten 9 en 11 hierboven).

Puntkleuringen

[Rob Bosch]

De eigenaar van een dierenspeciaalzaak verdeelt een aantal tropische vissen over de aquaria in de winkel. Bij deze verdeling moet hij er rekening mee houden dat sommige soorten vissen niet vreedzaam in één aquarium kunnen samenleven. Welke vissen niet samen in een aquarium kunnen, wordt gegeven door de graaf in **de figuur**. De vissen zijn hierin aangeduid met 1,2,... Een verbindingslijn tussen twee punten in de graaf betekent dat de betreffende vissen niet samen in een aquarium kunnen leven.
De vraag is nu hoeveel aquaria er minimaal nodig zijn om alle vissen onder te brengen.
Het probleem vertalen we in het volgende kleurings-probleem. Kleur de punten van de graaf zo dat buurpunten, dat wil zeggen punten die in de graaf door een lijn verbonden zijn, een verschillende kleur krijgen, en gebruik zo min mogelijk kleuren.



In het algemeen heet het kleinste aantal kleuren waarmee we de punten van een graaf G op zo'n manier kunnen kleuren, het *chromatisch getal* van de graaf, notatie $\chi(G)$. We zoeken dus het chromatisch getal van de graaf uit **de figuur**.

De graad van een punt van een graaf is het aantal lijnen dat in dat punt samenkomt. Met $\Delta(G)$ duiden we de grootste graad aan die in de graaf G voorkomt.
De volgende twee stellingen geven een bovengrens voor het chromatisch getal van en graaf.

Stelling 1: Voor elke graaf G geldt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Bewijs: Stel we hebben $\Delta(G) + 1$ kleuren tot onze beschikking waarmee we de graaf gaan kleuren. Als we tijdens de kleuring van de graaf bij een punt v aankomen dan is het maximaal aantal buren van dit punt v gelijk aan Δ. In het meest ongunstige geval zijn al deze buren al gekleurd met verschillende kleuren. Dat betekent dat we Δ kleuren niet kunnen gebruiken voor punt v maar, omdat we over $\Delta + 1$ kleuren beschikken, blijft er altijd nog een kleur over om het punt v te kleuren. □

Het bovenstaande resultaat is het best mogelijke in de zin dat de gegeven bovengrens voor sommige grafen ook gelijk is aan het chromatisch getal van de graaf. Voor de kleuring van de volledige graaf K_n, dat wil zeggen een graaf met n punten waarbij ieder tweetal punten door een lijn verbonden is, zijn n kleuren nodig. De graad van ieder punt van de graaf is $n - 1$ en dus geldt inderdaad $\chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1$.

De maximale graad in een cykel met een oneven aantal punten is 2. Voor het kleuren van een dergelijke cykel zijn echter 3 kleuren nodig, zoals men gemakkelijk na gaat. Dus ook hier wordt de bovengrens bereikt.
Opmerkelijk is dat we met deze twee gevallen alle samenhangende grafen gehad hebben waarvoor de bovengrens bereikt wordt.
Met andere woorden, voor alle andere samenhangende grafen is het aantal kleuren dat we nodig hebben nooit groter dan de maximale graad van de graaf.

Stelling 2 (Brooks): Als G een samenhangende graaf is, maar geen volledige graaf of oneven cykel, dan is $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Voor de kleuring van de graaf in **de figuur** zijn op grond van deze stelling dus maximaal 5 kleuren nodig. Aangezien de graaf de driehoek met hoekpunten 1, 2, en 7 bevat zijn er minimaal 3 kleuren nodig. Het chromatisch getal van de graaf is dus 3, 4 of 5.
Hoe vinden we nu een optimale kleuring? Dat is, zeker bij grote grafen, niet zo eenvoudig. We kunnen voor een kleuring bijvoorbeeld het volgende *gulzige algoritme* gebruiken. Nummer de punten van de graaf in een willekeurige volgorde en geef de te gebruiken kleuren aan met de getallen k_1, k_2, ... Kleur nu de punten van de graaf in de gegeven volgorde en gebruik steeds de laagste kleur die toegestaan is. Bijvoorbeeld, als een te kleuren punt grenst aan punten waarvan een aantal al gekleurd zijn met de kleuren k_1, k_2 en k_4 dan krijgt dit punt kleur k_3.
Er is altijd een volgorde van de punten te vinden waarbij dit gulzige algoritme het minimaal aantal

kleuren gebruikt (waarom?). Maar omdat we deze volgorde van te voren niet kennen, kan het aantal kleuren dat het algoritme gebruikt, sterk afhankelijk zijn van de nummering van de punten.

Tot slot de opgave voor de lezer: hoeveel aquaria heeft onze winkelier minimaal nodig of wat is het chromatisch getal van de graaf in **de figuur**?

Literatuur

Bela Bollobas, Graph Theory, graduate texts in mathematics 63, Springer Verlag, New York, Berlijn (1979)

Bela Bollobas, Modern Graph Theory, graduate texts in mathematics 184, Springer Verlag, New York, Berlijn (1998), ISBN 0387984887

Over de auteur

Rob Bosch (e-mail: r.bosch2@mindef.nl) is na zijn doctoraal wiskunde 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Zijn belangstelling gaat o.a. uit naar de sociale keuzetheorie op welk gebied hij aan de Katholieke Universiteit Brabant onderzoek verricht.

Rectificatie / Opnieuw Domeinen Tweede Fase

In het vorige nummer van Euclides, aflevering 2, pagina 049, stond in het artikel van de hand van Kees Hoogland een lijst met examenonderdelen waarvan de toetsing afwijkt van die van de reguliere onderdelen.

In de lijst ontbraken de koppen bij enkele kolommen. De redactie biedt daarvoor haar excuses aan. Hieronder staat de lijst nogmaals, maar nu voorzien van de eerder ontbrekende kolomkoppen.

Lijst

Onderstaande lijst bevat onderdelen, die afwijkend zijn van reguliere onderdelen die gewoon op het Centraal Examen getoetst moeten worden. Aan deze opsomming kunnen geen rechten worden ontleend.
Voor de precieze regelingen verwijs ik u naar het Gele Katern bij Uitleg, jaargangen 1997-2001 (zie ook http://www.cfi.nl).

	Onderdeel	**CE**	**SE**	**Geldigheid**
havo A1	Alle domeinen	nee	ja	tot nader order
havo A2	*Subdomein*: De binomiale verdeling	nee	eigen keuze	examens 2002 en 2003
havo B1	*Domein*: Ruimtemeetkunde 1	nee	ja	tot nader order
	Subdomein: Periodieke functies	nee	eigen keuze	examens 2002 en 2003
havo B12	*Domein*: Tellen en kansen	nee	ja	tot nader order
	Subdomein: Periodieke functies	nee	eigen keuze	examens 2002 en 2003
	Subdomein: Periodieke functies 2	nee	eigen keuze	examens 2002 en 2003
vwo A1	Eindtermen 3, 10 (w.b. rekenregels logaritmen), 13, 23 en 24	nee	nee	tot nader order
	Domein: Grafen en matrices	nee	eigen keuze	examens 2002 en 2003
	Subdomein: Het toetsen van hypothesen	nee	eigen keuze	tot nader order
vwo A12	Eindtermen 3, 10 (w.b. rekenregels logaritmen), 13	nee	nee	tot nader order
	Domein: Grafen en matrices	nee	eigen keuze	examens 2002 en 2003
	Subdomein: Ruimtelijke objecten	nee	nee	tot nader order
	Domein: Keuzeonderwerp	nee	ja	tot nader order
vwo B1	*Domein*: Continue Dynamische Modellen	nee	ja	tot nader order
	Domein: Keuzeonderwerp	nee	ja	tot nader order
vwo B12	*Domein*: Continue Dynamische Modellen	nee	ja	tot nader order
	Domein: Keuzeonderwerp	nee	ja	tot nader order
	Eindtermen 140-144, 151-153, 167-175	nee	nee	tot nader order

SOMMEN VAN KWADRATEN

Op hoeveel manieren kan een getal als de som van twee kwadraten geschreven worden?

Soms op één manier: $13 = 2^2 + 3^2$.

Soms op meer manieren, bijvoorbeeld $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$.

[A.K. van der Vegt]

Inleiding

De vraag waar het in dit artikel in eerste instantie om gaat is, hoe getallen geschreven kunnen worden als de som van kwadraten. Het is interessant om na te gaan hoeveel kwadraten je maximaal nodig hebt om een willekeurig getal weer te geven. Vanaf een bepaald getal blijkt het altijd met vier te lukken. Maar in dit kader zullen we ons beperken tot sommen van slechts twee kwadraten, zoals:

$2 = 1^2 + 1^2$,

$5 = 1^2 + 2^2$, enz.,

waarbij we de nul buiten beschouwing laten, zoals in:

$4 = 0^2 + 2^2$

Het blijkt dat er getallen zijn die op één manier geschreven kunnen worden als de som van twee kwadraten, zoals het getal 5; bij andere kan dit op twee manieren, zoals 65 (zie boven), weer bij andere op drie manieren, enzovoorts. Het lijkt een interessante opgave die getallen op te sporen. In het vervolg van dit verhaal zal blijken dat er mooie formules zijn te vinden waarmee die getallen worden gegenereerd. Maar het is aanzienlijk leuker die formules en wetmatigheden op een puur empirische manier op het spoor te komen. Domweg maar proberen, en als je dan ergens een soort systematiek tegenkomt, proberen of je die ook kunt begrijpen. Op die manier is ook dit artikel ontstaan.

Op zoek

Het blijkt in de eerste plaats dat zeer veel getallen als som van twee kwadraten geschreven kunnen worden. Die getallen gaan we eerst opsporen, en ons daarna de vraag stellen of er ook getallen bij zijn waarbij dit op twee manieren lukt. Een beetje proberen leert al gauw dat dit kan; de getallen 50 en 65 zijn de eerste twee waarbij dit mogelijk is:

$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$

$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$

of, korter geschreven:

$50 = (1,7) = (5,5)$

$65 = (1,8) = (4,7)$

Er zijn diverse manieren om achter deze getallen te komen. We zullen ze N_2's noemen, in tegenstelling tot de N_1's, die maar op één manier de som van twee kwadraten zijn, en de N_3's, N_4's enz., die dat op meer dan twee manieren kunnen.

Het eenvoudigste is om een twee-dimensionaal schema te maken waarin je kunt aflezen of er ook kwadraatsommen tweemaal (of meermalen) voorkomen. Hieronder staat het eerste begin van zo'n schema, waarin de doublures onderstreept zijn.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
1	1	2	5	10	17	26	37	$\underline{50}$	$\underline{65}$	82	101	122	$\underline{145}$
2	4		8	13	20	29	40	53	68	$\underline{85}$	104	$\underline{125}$	148
3	9			18	25	34	45	58	73	90	109	$\underline{130}$	153
4	16				32	41	52	$\underline{65}$	80	97	116	137	160
5	25					$\underline{50}$	61	74	89	106	$\underline{125}$	146	169
6	36						72	$\underline{85}$	100	117	136	157	180
7	49							98	113	$\underline{130}$	149	170	193
8	64								128	$\underline{145}$	164	185	208
9	81									162	181	202	225
10	100										200	221	244
11	121											242	265
12	144												288

Uit dit korte schema halen we de N_2-getallen 50, 65, 85, 125, 130 en 145. Maar er zitten er nog meer in, die als gevolg van het afkappen bij 12 niet naar voren komen, zoals $170 = (7,11) = (1,13)$. Het werken met dit schema is aardig voor niet te grote getallen, maar wordt al gauw lastig en tijdrovend.

Een andere voor de hand liggende manier is de relatie $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ te herschrijven als
$a^2 - d^2 = c^2 - b^2$ of
$(a - d)(a + d) = (c - b)(c + b)$

We kunnen nu voor $a - d$ en voor $c - b$ willekeurige kleine getallen kiezen en daarbij waarden voor $a + d$ uitzoeken die leiden tot een geheel getal voor $c + b$ (of omgekeerd). Een paar voorbeelden:
$a - d = 1$; $c - b = 3$; $(a + d) = 3(c + b)$ en dan
$a + d = 15$ $c + b = 5$; $(8,1) = (4,7) = 65$, of
$a + d = 21$ $c + b = 7$; $(11,2) = (5,10) = 125$

Op deze manier komen we op den duur ook alle mogelijkheden tegen, maar ook dit is nogal omslachtig en bewerkelijk.

Met de computer

Veel gemakkelijker gaat alles natuurlijk, als we geavanceerd rekentuig gebruiken. Met een programmeerbare zakrekenmachine kom je al een heel eind, hoewel het wat langzaam gaat. Met een computer is zo'n lijst veel sneller te maken. De snelheid van werken laat het toe om gewoon alle gehele getallen op volgorde te inspecteren of ze op meer dan één manier als de som van twee kwadraten te schrijven zijn. Het begin van zo'n lijst ziet er dan als volgt uit:

50	=	$2\cdot5^2$	=	(1,7)	=	(5,5)		
65	=	$5\cdot13$	=	(1,8)	=	(4,7)		
85	=	$5\cdot17$	=	(2,9)	=	(6,7)		
125	=	5^3	=	(2,11)	=	(5,10)		
130	=	$2\cdot5\cdot13$	=	(3,11)	=	(7,9)		
145	=	$5\cdot29$	=	(1,12)	=	(8,9)		
170	=	$2\cdot5\cdot17$	=	(1,13)	=	(7,11)		
185	=	$5\cdot37$	=	(4,13)	=	(8,11)		
[200	=	$2^3\cdot5^2$	=	(2,14)	=	(10,10)]		
205	=	$5\cdot41$	=	(3,14)	=	(6,13)		
221	=	$13\cdot17$	=	(5,14)	=	(10,11)		
250	=	$2\cdot5^3$	=	(5,15)	=	(9,13)		
[260	=	$2^2\cdot5\cdot13$	=	(2,16)	=	(8,14)]		
265	=	$5\cdot53$	=	(3,16)	=	(11,12)		
290	=	$2\cdot5\cdot29$	=	(1,17)	=	(11,13)		
305	=	$5\cdot61$	=	(4,17)	=	(7,16)		
325	=	$5^2\cdot13$	=	(1,18)	=	(6,17)	=	(10,15)
338	=	$2\cdot13^2$	=	(7,17)	=	(13,13)		
[340	=	$2^2\cdot5\cdot17$	=	(4,18)	=	(12,14)]		
365	=	$5\cdot73$	=	(2,19)	=	(13,14)		
370	=	$2\cdot5\cdot37$	=	(3,19)	=	(9,17)		
377	=	$13\cdot29$	=	(4,19)	=	(11,16)		
410	=	$2\cdot5\cdot41$	=	(7,19)	=	(11,17)		
425	=	$5^2\cdot17$	=	(5,20)	=	(8,19)	=	(13,16)
442	=	$2\cdot13\cdot17$	=	(1,21)	=	(9,19)		

Niet elke combinatie is origineel; vanzelfsprekend zitten er veelvouden in de lijst, aangegeven met [...], zoals 200, 260, 340 (viervouden van resp. 50, 65 en 85). Opvallend in deze lijst is, dat er, voor het eerst bij 325, getallen verschijnen als drie verschillende kwadraatsommen (N_3's). Een apart lijstje van de N_3's ziet er als volgt uit:

325	=	$5^2\cdot13$	=	(1,18)	=	(6,17)	=	(10,15)				
425	=	$5^2\cdot17$	=	(5,20)	=	(8,19)	=	(13,16)				
650	=	$2\cdot5^2\cdot13$	=	(5,25)	=	(11,23)	=	(17,19)				
725	=	$5^2\cdot29$	=	(7,26)	=	(10,25)	=	(14,23)				
845	=	$5\cdot13^2$	=	(2,29)	=	(13,26)	=	(19,22)				
850	=	$2\cdot5^2\cdot17$	=	(3,29)	=	(11,27)	=	(15,25)				
925	=	$5^2\cdot37$	=	(5,30)	=	(14,27)	=	(21,22)				
1025	=	$5^2\cdot41$	=	(1,32)	=	(8,31)	=	(20,25)				
1105	=	$5\cdot13\cdot17$	=	(4,33)	=	(9,32)	=	(12,31)	=	(23,24)		

We hebben nu ook een N_4, namelijk 1105. Het begin van de lijst van N_4's is als volgt:

1105	=	$5\cdot13\cdot17$	=	(4,33)	=	(9,32)	=	(12,31)	=	(23,24)
1625	=	$5^3\cdot13$	=	(5,40)	=	(16,37)	=	(20,35)	=	(28,29)
1885	=	$5\cdot13\cdot29$	=	(6,43)	=	(11,42)	=	(21,38)	=	(27,34)
2125	=	$5^3\cdot17$	=	(3,46)	=	(10,45)	=	(19,42)	=	(30,35)
2210	=	$2\cdot5\cdot13\cdot17$	=	(1,47)	=	(19,43)	=	(23,41)	=	(29,37)
2405	=	$5\cdot13\cdot37$	=	(2,49)	=	(14,47)	=	(17,46)	=	(31,38)
2465	=	$5\cdot17\cdot29$	=	(8,49)	=	(16,47)	=	(23,44)	=	(28,41)

En zo kunnen we doorgaan. De eerste N_5 komt bij 8125:
$8125 = 5^4\cdot13$ = (5,90) = (27,86) = (30,85) = (50,75) = (58,69)

maar de eerste N_6 vinden we al eerder, namelijk 5525:
$5525 = 5^2\cdot13\cdot17$ = (7,74) = (14,73) = (22,71) = (25,70) = (41,62) = (50,55)

Je vraagt je af waarom de N_2's en vooral de N_3's bijna allemaal deelbaar zijn door 5. Meestal zijn de N_3's vijfvouden van N_2's, zoals gemakkelijk is na te gaan. Daarna komt er een die geen vijfvoud is, namelijk:
$2873 = 13^2\cdot17$ = (8,53) = (13,52) = (32,43)

Ook bij de N_4's vinden we voornamelijk vijfvouden; de eerste die dit niet is, is:
$8177 = 13\cdot17\cdot37$ = (16,89) = (44,79) = (49,76) = (56,71)
en dit is, evenals 2873, een 13-voud!

Het verband tussen de N_i's

Zouden dus de getallen die door $5\cdot N_2$ of $13\cdot N_2$ voorgesteld kunnen worden, alle N_3's zijn? Dit blijkt inderdaad het geval. En het is, bij nader inzien, nog vrij gemakkelijk te begrijpen ook. Want zowel 5 als 13 zijn N_1's. We kunnen nu een stap terug gaan, en dan zien we dat de eerste N_2, als som van ongelijke kwadraten, 65 is, d.w.z. $5\cdot13$. De volgende is $85 = 5\cdot17$, alweer een product van twee N_1's.

De volgende relatie, die niet direct gemakkelijk te verzinnen is, geeft de oplossing: het product van twee N_1's kan geschreven worden als:
$(p^2 + q^2)\times(r^2 + s^2) =$
$(pr + qs)^2 + (ps - qr)^2 =$
$(ps + qr)^2 + (pr - qs)^2$
en is dus op twee verschillende manieren uit te drukken als de som van twee kwadraten, tenminste als zowel p en q als r en s verschillend zijn. We herkennen nu direct twee gevallen: $p = 1$, $q = 2$, $r = 2$, $s = 3$ en

$p = 1$, $q = 2$, $r = 1$, $s = 4$, die leiden tot respectievelijk 65 en 85. Ook 50 is terug te vinden met $p = 1$, $q = 2$, $r = 1$, $s = 3$; dan is $(ps + qr) = -(pr - qs)$, zodat het tweede kwadratenpaar gelijk is (beide 50).

Het blijken dus de 5, 13, 17, ... -vouden te zijn die de hoofdrol spelen bij de N_2's. En bij de N_3's en hogere? Wel, daarvoor geldt een soortgelijke relatie, namelijk door het product van drie N_1's te schrijven als de som van twee kwadraten, hoewel het opstellen van deze relatie nogal moeilijk is.

$$(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)(t^2 + u^2) = p^2r^2t^2 + p^2r^2u^2 + q^2r^2t^2 + \dots =$$
$$(prt + psu + qru - qst)^2 + (qsu + qrt + pst - pru)^2 =$$
$$(qrt + qsu + pru - pst)^2 + (psu + prt + qst - qru)^2 =$$
$$(pst + pru + qsu - qrt)^2 + (qru + qst + prt - psu)^2 =$$
$$(pru + pst + qrt - qsu)^2 + (qst + qru + psu - prt)^2$$

Zo'n getal kan dus op vier manieren als de som van twee kwadraten geschreven worden. Zorgvuldige analyse leert dat dit alle manieren zijn.

Een voorbeeld is
$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2)(1^2 + 4^2)$.
Invullen van de waarden 1, 2, 2, 3, 1 en 4 voor resp. p, q, r, s, t en u levert inderdaad de combinaties (4,33), (23,24), (31,12) en (9,32),
die we in een vorige tabel al tegenkwamen voor 1105, de kleinste N_4.

Maar hoe zit het nu met een N_3, zoals 325? Wel, $325 = 5 \cdot 5 \cdot 13$, en is dus het product van drie N_2's, maar omdat er twee van de factoren gelijk zijn vallen er twee van de vier mogelijkheden samen en blijven (1,18), (6,17) en (10,15) over. Hiervan zijn trouwens maar twee combinaties oorspronkelijk; de derde (de samenvallende) is gewoon het vijfvoud van 65. Bij verder vermenigvuldigen met 5 gebeurt steeds hetzelfde: het aantal kwadraatsommen neemt met 1 toe, maar het aantal onafhankelijke paren wordt niet groter dan 2. In onderstaande tabel wordt dit gedemonstreerd.

13 = (2,3)
65 = (1,8) = (4,7)
325 = (1,18) = (6,17) = (10,15)
1625 = (5,40) = (16,37) = (20,35) = (28,29)
8125 = (5,90) = (27,86) = (30,85) = (50,75) = (58,69)
40625 = (25,200) = (32,199) = (47,196) = (80,185) = (100,175) = (140,145)
enzovoort.

Een voorbeeld van een product van vier onafhankelijke N_1's is $5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 = 32045$.
Omdat de N_1's verschillend zijn is dit een N_8, namelijk: (2,179) (19,178) (46,173) (67,166) (74,163) (86,157) (109,142) (122,131).

En zo zijn er talloze uitbreidingen en varianten denkbaar, die hetzij empirisch, hetzij door analyse, bekeken en genoten kunnen worden.

Ongetwijfeld bestaat er ook hier een relatie die de acht manieren aangeeft, maar die wordt wel erg gecompliceerd!

Hogere machten

Laten we nu eens kijken naar getallen die op meer dan één manier te schrijven zijn als som van twee derde, vierde of hogere machten. We beginnen met derde machten. Het klassieke voorbeeld is 1729; dit is het kleinste getal dat op twee manieren als som van twee derde machten te schrijven is:
$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$
We noteren dit als 1729 = (10,9)(12,1)
Een lijst van mogelijkheden volgt hieronder. Daarbij zijn die oplossingen weggelaten die uit een eenvoudige vermenigvuldiging met 2, 3, ... ontstaan, zoals 13832 = (20,18)(24,2).

1729	=	(1,12)(9,10)
4104	=	(2,16)(9,15)
20683	=	(10,27)(19,24)
39312	=	(2,34)(15,33)
40033	=	(9,34)(16,33)
64232	=	(17,39)(26,36)
65728	=	(12,40)(31,33)
134379	=	(12,51)(38,43)
149389	=	(8,53)(29,50)
171288	=	(17,55)(24,54)
195841	=	(9,58)(22,57)
216027	=	(3,60)(22,59)
327763	=	(58,51)(30,67)
402597	=	(61,56)(42,69)
443889	=	(73,38)(17,76)
515375	=	(71,54)(15,80)
558441	=	(72,57)(30,81)
684019	=	(75,64)(51,82)
704977	=	(86,41)(2,89)
...		

En zo kunnen we doorgaan, maar dat laat het bestek van dit artikel niet toe. Hoofdzaak is dat er bij zorgvuldige analyse eindeloos veel plezier te beleven valt aan de sommen van machten!

Over de auteur

A.K. van der Vegt, geboren in 1923, studeerde natuurkunde (met een beetje wiskunde) in Utrecht en in Delft. Na werkzaamheden voor TNO en Shell was hij van 1980 tot 1988 hoogleraar aan de TU Delft (polymeerkunde). Belangrijke hobby: 'eenvoudige wiskunde'. Van der Vegt is auteur van o.a. 'Regelmaat in de Ruimte'. Zijn email-adres is vdv@akvegt.demon.nl

Aankondiging / Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

Al vele jaren organiseert het Wiskundig Genootschap op de eerste zaterdag in het kalenderjaar haar Wintersymposium.
Dit symposium is in eerste instantie bedoeld voor docenten uit het voortgezet onderwijs, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom.

De bedoeling van het Wintersymposium is om het contact tussen leraren enerzijds en wiskundigen uit de academische wereld en het bedrijfsleven anderzijds te onderhouden en te verstevigen.
In een drietal voordrachten belichten ervaren sprekers facetten van een gekozen thema.

Het symposium op **zaterdag 5 januari 2002** zal worden gehouden in het
Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium
Thorbeckeplein 1
Amersfoort
en heeft als thema Winnen met Wiskunde: kan de wiskunde helpen inzicht te krijgen in situaties waar sprake is van verlies danwel winst?

In de eerste voordracht worden grafen gebruikt om interacties tussen entiteiten te representeren: samenwerking tussen bedrijven,links tussen websites, welk van de twee spelers wint in een directe confrontatie in een toernooi.
Ordeningsmethoden op grafen geven antwoord op vragen als:
- met welk bedrijf moet een alliantie worden gesloten, en
- wie is de winnaar van het toernooi?

Er zal een overzicht worden gegeven van een aantal van deze ordeningsmethoden.

Iedere coach zal uit de beschikbare groep kandidaten zijn keus zo willen maken, dat de doelstellingen zo goed mogelijk worden gerealiseerd.
In de tweede lezing wordt een relatie gelegd tussen het probleem een optimaal team samen te stellen en een transportprobleem in een netwerk en wordt er aangetoond dat dit een probleem is waarvoor een efficiënt algoritme bestaat.

In de afsluitende lezing leren we dat de wiskunde kan helpen zaken eerlijk te verdelen, ook als de waarde niet objectief is vast te stellen. Sterker nog: er zijn verdelingsprocedures waarbij iedereen meer krijgt dan waar hij in alle eerlijkheid op had kunnen rekenen.
Twee van dergelijke procedures worden behandeld.

Programma:

09.30 - 10.00	Ontvangst met koffie en thee
10.00 - 11.00	H. Monsuur (KIM): Van sociale naar strategische netwerken
11.00 - 11.15	Pauze
11.15 - 12.15	G. Sierksma (RuG): Teamsamenstelling als logistiek fenomeen
12.15 - 13.30	Pauze, waarin men deel kan nemen aan een gezamenlijke lunch
13.30 - 14.30	R. Bosch (KMA): Win-Win-procedures voor verdelingen

Deelname aan het symposium is gratis.
Aanmelding en verdere informatie op de website van het Wiskundig Genootschap (*http://www.wiskgenoot.nl/wintersymposium*).
Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht voor 25 december 2001 *f*17,50 over te maken op gironummer 3762917 ten name van H. Bakker te Marum. Voor verdere inlichtingen kunt u bellen met (050) 363 39 35 (overdag) of (0594) 64 16 36 ('s avonds) of e-mailen naar *h.bakker@cs.rug.nl*

OVER LOGISCHE EN VERZAMELINGSTHEORETISCHE SYMBOLEN

door

B. L. VAN DER WAERDEN

Zürich

In het Euclides-nummer van 1 mei 1961 (36e jaargang, p. 257) heeft N. H. Kuiper een aantal belangrijke gezichtspunten naar voren gebracht en voorstellen voor modernisering van het wiskundeonderwijs gedaan, waarmee ik het grotendeels eens ben. Maar er is één punt, waar ik heel anders over denk.

Kuiper voorspelt, dat de volgende symbolen in het Middelbaar Onderwijs zullen worden ingevoerd:

$$\epsilon,\ \subset,\ \cap,\ \cup,\ \{x|\ldots\},\ \emptyset.$$

Hij beveelt verder het gebruik van de logische symbolen $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$ aan en hij meent dat $\forall$ en $\exists$ ook nuttig kunnen zijn.

In deel II ,,Praktijk'' stelt Kuiper voor, deze symbolen ook in de meetkunde te gebruiken. In plaats van ,,p en q snijden elkaar in S'' wordt de korte formule $p \cap q = S$ aanbevolen. In plaats van ,,Twee cirkels c_1 en c_2 hebben geen punt gemeen'' wordt voorgesteld $c_1 \cap c_2 = \emptyset$. Voor ,,De meetkundige plaats van de punten, die op afstand r van P liggen'' wordt geschreven

$$\{X|\text{ afst } XP = r\}.$$

Ten slotte wordt voorgesteld, het oude symbool $\therefore$ te vervangen door $\Rightarrow$.

Om met het laatste te beginnen: dit lijkt mij fout. Met $P \Rightarrow Q$ is bedoeld: Als P, dan Q. Met $P \therefore Q$ is bedoeld: P en dus Q. Dit is iets anders. Als men $P \Rightarrow Q$ opschrijft, dan laat men in 't midden of de bewering P juist is of niet. Schrijft men $P \therefore Q$, dan bedoelt men: P is juist en uit P volgt Q, dus geldt Q.

Belangrijker is de algemene vraag: Is de tegenwoordige neiging om aldoor meer logische symbolen in wiskundige uiteenzettingen te gebruiken, goed of niet? Moeten we in het wiskundeonderwijs aan deze neiging toegeven?

Laat ik twee dingen vooropstellen. Ten eerste: in de mathematische logica, waarin de wiskundige bewijsmethoden gecodificeerd en onderzocht worden, is de invoering van logische symbolen geboden.

Ten tweede: Ter afkorting, wanneer de gemakkelijke leesbaarheid van een wiskundig bewijs er niet onder lijdt, kan men gerust eens $a \epsilon B$ schrijven in plaats van ,,a is element van B''. Ik ben zelf een van de eersten geweest, die deze en dergelijke gewoonten in de algebra hebben ingevoerd. Later, toen ik zag, hoeveel misbruik er van logische symbolen werd gemaakt, ben ik er spaarzamer mee geworden.

Vergelijken we de gewone formulering

(1) c_1 en c_2 hebben geen punt gemeen

met de nieuwe

(2) $$c_1 \cap c_2 = \emptyset$$

dan is het duidelijk, dat (2) korter is. Men spaart dus een beetje papier. Aan de andere kant is het tijpen en zetten van (2) veel omslachtiger dan van (1), omdat de nieuwe symbolen niet op de machine staan. Het voordeel van de kortheid wordt daardoor meestal weer opgeheven.

Maar nu het denkwerk, dat van de lezer (of scholier) gevergd wordt. Laten we, om het geval voor de these van Kuiper zo gunstig mogelijk te maken, aannemen dat de lezer volkomen vertrouwd is met de betekenis van de symbolen $\cap$ en $\emptyset$. Hij ontcijfert het telegram (2) dus onmiddellijk als volgt:

,,De doorsnee van c_1 en c_2 is de lege verzameling''.

Nu denkt hij even na en roept dan uit: Aha, de cirkels mogen geen punt gemeen hebben. Nu weet hij wat met de formule (2) bedoeld is en kan doorgaan met het bewijs te lezen, waarin deze formule voorkomt.

Veel omslachtiger is het ontcijferingswerk bij een ander voorbeeld, dat Kuiper geeft:

(3) $$\{X|Xp \cong Xq \text{ èn } X \epsilon \alpha\} = m \cap \alpha.$$

Hier komt eerst de vraag, welk van de tekens $|$, $\cong$, èn, sterker bindt of sterker scheidt. Zet men bv. $(X|Xp)$ of $(Xq \text{ èn } X \epsilon \alpha)$ tussen haakjes, dan komt men er nooit uit. Een intelligente lezer weet, dat hij alles wat na | komt totdat de accolade gesloten wordt tussen haakjes moet zetten. Hij weet verder, dat het teken $\cong$ twee meetkundige figuren met elkaar verbindt, en het teken èn twee beweringen. Omdat Xq geen bewering is, moet het linkerlid van (3) dus zo gelezen worden:

$$\{X|[(Xp \cong Xq) \text{ èn } (X \epsilon \alpha)]\}.$$

Nu kunnen we ontcijferen: De verzameling van alle X (waarschijnlijk zijn punten X bedoeld, want hoofdletters betekenen gewoonlijk punten) waarvoor geldt: 'Xp is congruent met Xq en X is een element van α' is gelijk aan de doorsnede van m en α.

Nu gaat het denkwerk verder: Het produkt Xp heeft geen zin, de verbindingslijn Xp ook niet, want p is geen punt. Dus zal met Xp wel de figuur bedoeld zijn, die uit het punt X en de lijn p bestaat. Als dit waar is, dan betekent $Xp \cong Xq$ eenvoudig, dat X even ver van p als van q ligt. Nu moeten we nog aan de definitie van α denken en zien dan, dat $X \epsilon \alpha$ betekent: X ligt binnen of op de hoek BAC. Zo komen we er langzamerhand achter, wat met formule (3) bedoeld is. Aan het bewijs van (3) kunnen we nu pas beginnen.

Hoeveel gemakkelijker is het niet voor de lezer of leerling, als alles in woorden wordt gezegd. De aanschouwelijke voorstelling van een hoek met bissectrice en het meetkundige denkwerk, waar het op aan komt, blijven precies eender, maar de hele onnodige ontcijfering van formule (3) valt weg.

In een stuk over Cohomologietheorie in Math. Annalen **130**, p. 88 heb ik geschreven: „Spanier verwendet eine komprimierte Begriffsschrift; um seine Beweise zu verstehen, muss man fast jeden Satz mühsam dechiffrieren. Wir wollen dem Leser dieses Dechiffrieren nach Möglichkeit ersparen, brauchen dafür allerdings etwas mehr Druckseiten".

In het algemeen is het voordeel van een algebraïsche formule zoals

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

niet zozeer, dat de formule korter is dan een stelling in woorden; dit is maar bijkomstig. Belangrijker is, dat de formule overzichtelijker is, en nog belangrijker, dat men met de formule kan rekenen zonder aan de betekenis van de daarin voorkomende symbolen te denken. Bij logische formules zoals (2) en (3) vallen deze voordelen weg. Wil iemand met (3) verder werken, dan moet hij de formule eerst in gewone woorden of meetkundige voorstellingen omzetten. Zijn gedachten worden dus van de meetkundige vraag, waar het eigenlijk om gaat, op een onbelangrijk en hinderlijk ontcijferprobleem afgeleid. Pas als hij dit heeft opgelost kan hij het bewijs verder volgen.

In geval (2) was de ontcijfering gemakkelijk, in geval (3) vrij ingewikkeld. Maar in allebei de gevallen is de ontcijfering onnodig: we kunnen net zo goed de bewering in onmiddellijk verstaanbare taal geven.

Ik heb er niets op tegen, tussen twee beweringen, die op het bord staan, het teken $\Rightarrow$ of $\Leftrightarrow$ te zetten. Dit verhoogt de overzichtelijkheid en is dus goed.

Beschouw nu de tekens $\forall$ en $\exists$. Kuiper noemt $\forall$ en $\exists$ symbolen voor „voor alle" en „er bestaat". Maar zo eenvoudig is het niet. Men zegt niet „$\exists$ een punt dat even ver verwijderd is van de hoekpunten van een driehoek" of „$\forall$ rechthoekige driehoeken geldt de Stelling van Pythagoras". Wil men $\exists$ of $\forall$ invoeren, dan moet men elke zin, waarin „er bestaat" of „alle" voorkomt, eerst zo omvormen, dat de uitdrukkingen „er bestaat een x zodanig dat" of „voor alle x geldt" er in voorkomen. Deze uitdrukkingen kan men dan door $(\exists x)$ of $(\forall x)$ vervangen, bv.:

„$(\exists x)$ x is een punt en x is even ver verwijderd van de drie hoekpunten van een driehoek."

In deze krampachtige formulering zie ik voor de school geen enkel voordeel.

Artikel in Euclides 37 (1961-1962)

[Dit artikel werd gepubliceerd meer dan zes jaar voor de invoering van de gewraakte symbolen, in 1968.
B.L. van der Waerden (1903-1996) werd reeds in 1928 hoogleraar te Groningen. In de jaren 1930 en 1931 publiceerde hij de twee delen van zijn beroemde werk Moderne Algebra. Ten tijde van het schrijven van het artikel was hij hoogleraar te Zürich.]

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

WISBASE MET TOETSEN ONLINE: EEN PRODUCT VAN DEZE TIJD

[Bram Theune]

FIGUUR 1 **Het introscherm van WisBase is via *www.wisbase.com* te bereiken. Een wachtwoord is hiervoor niet vereist.**

Wat is WisBase?
WisBase is een platform, een samenwerkingsverband van en voor wiskundedocenten, dat beoogt de werkdruk in het voortgezet onderwijs te verminderen door toetsen online aan te bieden. De term ‘toetsen’ houdt mede in: schoolexamens en eindexamens, inclusief uitwerkingen.

Hoe kun je lid worden van WisBase?
Door drie publiceerbare toetsen in Word- of WP-Corel-formaat in de vorm van een bijlage in een email-bericht op te sturen naar *actheune@wisbase.com* of *info@wisbase.com*

Hoe lang is het lidmaatschap geldig?
Eén jaar. Het lidmaatschap kan verlengd worden door elk jaar weer (minstens) één publiceerbare toets in te sturen.

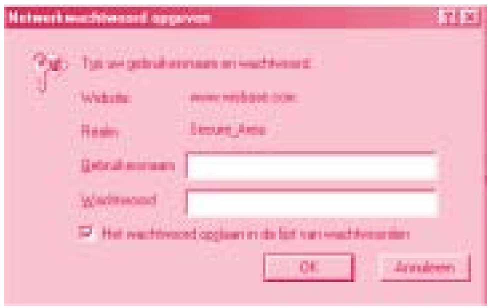
Wat wordt bedoeld met de term ‘publiceerbaar’?
Kortweg: vrij van auteursrechten en passend bij de huidige Nederlandse leerstof (Basisvorming of Tweede fase).

Hoe wordt de kwaliteit van de ingezonden toetsen bewaakt?
De toetsen worden centraal ingezonden en dan globaal doorgenomen. Daarna worden de diverse toetsen naar de betreffende beheerders verstuurd. Dezen vellen een oordeel over de kwaliteit en publiceerbaarheid. Als er iets niet in orde is aan de toetsen, wordt dit vanuit de centrale leiding doorgegeven aan het aspirant-lid met het verzoek één of meer wijzigingen aan te brengen. In vrijwel alle gevallen komt dit goed en wordt de collega alsnog toegelaten als lid. In het algemeen vinden wij de kwaliteit van de toetsen heel hoog.
Bij toelating van een lid staat het de beheerder vrij, de toets al of niet te publiceren op zijn of haar pagina.

Houdt WisBase bij de grens op?
Nee, dit schooljaar is een Vlaamse vorm van WisBase verschenen. En met onze Vlaamse vrienden wordt nauw samengewerkt.

Is WisBase alleen geïnteresseerd in toetsmateriaal?
Integendeel! Ook materiaal – ter grootte van drie toetsen – over de grafische rekenmachine, praktische opdrachten, bestanden behorende bij bepaalde

FIGUUR 2 **Op deze pagina is te zien welke dochterpagina's onder WisBase vallen en welke al beheerd worden.**



FIGUUR 3 **Door invullen van een gebruikersnaam en een wachtwoord kom je bij de complete toetsenbank van WisBase.**

wiskundesoftware, kan ingezonden worden.
Verder kan ook een bepaalde website, waarin wiskundige zaken worden behandeld, ter beoordeling worden aangeboden. WisBase wil juist die broodnodige samenwerking in het voortgezet onderwijs bevorderen.

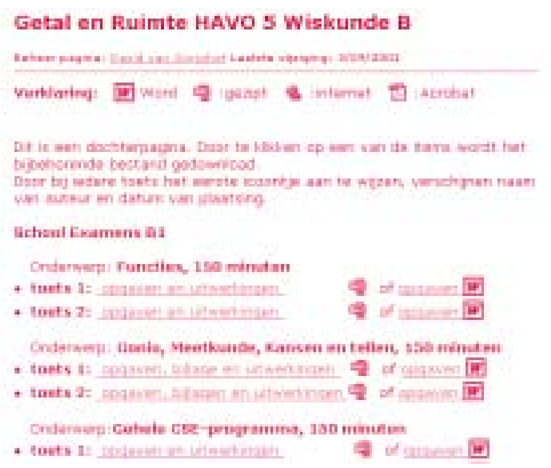
Hoe kan men (nog) meer te weten komen van WisBase?
Op de pagina *http://www.wisbase.com* wordt meer informatie gegeven. Tevens is daar een voorbeeldpagina te bekijken. De toetsen, uitwerkbladen en hulpbladen op die pagina zijn vrij te downloaden.

Welke methodes worden ondersteund en voor welke leerjaren zijn er toetsen beschikbaar?
Alle bekende wiskundemethodes (Pascal, Wageningse Methode, Netwerk, Moderne wiskunde en Getal en Ruimte) worden ondersteund en daar bestaan ook aparte dochterpagina's voor. Voor alle klassen en methodes van brugklas vmbo tot en met 6-vwo met SE's en CSE's zijn toetsen beschikbaar (zie figuur 2).

Als docenten toetsen kunnen downloaden, hoe wordt dan voorkomen dat niet-leden er misbruik van maken?
Behalve op de voorbeeldpagina staan alle toetsen achter een wachtwoord. De loginnaam en het wachtwoord worden regelmatig veranderd (zie figuur 3).

Heeft WisBase wel bestaansrecht? Men kan toch gewoon uit opgavenbundels of uit andere methodes toetsen overnemen?
WisBase heeft meer potentie dan deze bundels of boeken. Naast de vaak meegeleverde uitwerkingen van toetsen zijn er ook handleidingen van software, bestanden behorende bij bepaalde wiskundeprogramma's, tips bij sommige opgaven van methodes, enz. Verder zijn alle toetsen in de praktijk getest door de auteur, hetgeen niet van alle bundels gezegd kan worden.
Het sterkste punt van WisBase vinden we zelf, dat de toetsen online staan en dat daardoor ogenblikkelijk een toets aangepast en verbeterd kan worden, zo dat nodig mocht zijn (zie figuur 4, op p. 90).

Past WisBase goed bij de Tweede fase?
WisBase is in te passen in alle soorten van didactiek. Maar door de vaak meegeleverde antwoorden en uitwerkingen zijn de toetsen uitermate geschikt voor gebruik in het studiehuis.
Door de mogelijkheden van internet te benutten, is



FIGUUR 4 Dit deel van een echte dochterpagina geeft een goed voorbeeld van de lay-out van een 'dochter'.

FIGUUR 5 Ook talloze kant-en-klare Praktische Opdrachten zijn te downloaden en evenals alle toetsen: in de praktijk getest!

WisBase een buitengewoon prachtig product van deze tijd.

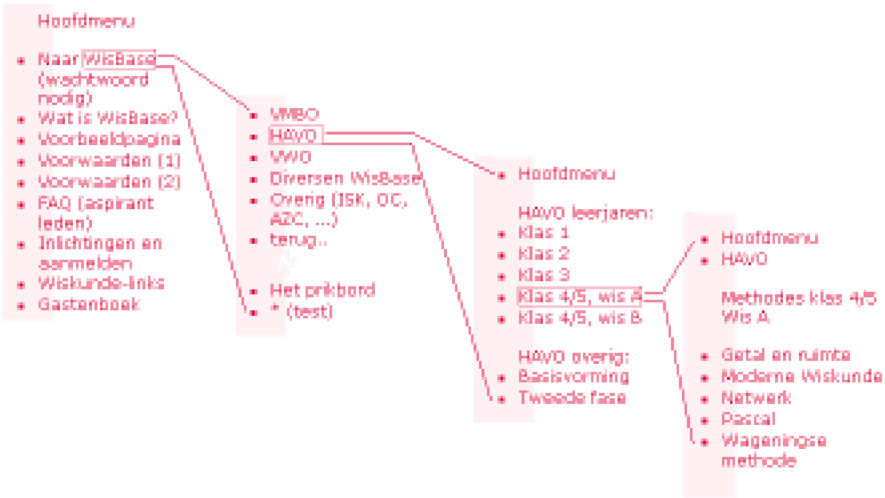
Helpt WisBase ècht de werkdruk van docenten in het v.o. te verminderen?
Absoluut! Iedere wiskundedocent is uiteraard in staat drie originele toetsen te produceren. Dat kan hij of zij doen in een rustiger periode. Maar we kennen allemaal in het onderwijs wel van die hectische dagen, dat er toets na toets en herkansing na herkansing geproduceerd moet worden. Soms juist maar voor één leerling.
Leden van WisBase kunnen dan precies op zulke momenten toetsen en/of schoolexamens downloaden. En met de uitwerkingen erbij is het werk inclusief de correctie zó gepiept. Dat vermindert nu daadwerkelijk stress bij docenten.

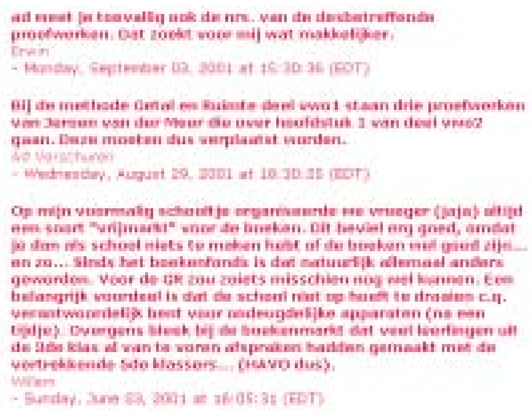
Kan een school ook lid worden van WisBase?
Ja! In overleg met de betreffende school wordt dan het aantal in te zenden toetsen vastgesteld (zie figuur 5).

Is het echt zo, dat men na het inzenden van drie toetsen, toegang krijgt tot de gehele database?
We weten dat het ongelofelijk klinkt, maar inderdaad: bij inzending van drie toetsen krijgt men de beschikking over duizenden opgaven.

Krijgt WisBase ondersteuning van een of andere instelling?
In het beginstadium hebben we actief geprobeerd hier en daar ondersteuning te krijgen. Dat is toen niet gelukt.
Sinds kort hebben we echter een provider die onze domeinnaam sponsort.
We hopen in de toekomst desondanks nog meer sponsors tegen te komen. Daarmee moet het mogelijk zijn de service naar onze leden te vergroten. Dat mag niet ten koste gaan van de vrijheid van handelen. Door onze onafhankelijkheid zijn we geheel vrij in het bepalen van de juiste strategie. WisBase wordt gerund door docenten en wil docenten in hun moeilijke taak bijstaan. Dat moet altijd zo blijven!

Wat voor computersysteem heeft men nodig om te kunnen deelnemen aan WisBase?
Alle systemen waarmee men het internet op kan en kan emailen zijn geschikt.




ad meet je toevallig ook de nrs. van de desbetreffende proefwerken. Dat zoekt voor mij wat makkelijker.
Erwin
- Monday, September 03, 2001 at 15:30:36 (EDT)

Bij de methode Getal en Ruimte deel vwo1 staan drie proefwerken van Jeroen van der Meer die over hoofdstuk 1 van deel vwo2 gaan. Deze moeten dus verplaatst worden.
Ad Verschuren
- Wednesday, August 29, 2001 at 10:30:35 (EDT)

Op mijn voormalig schooltje organiseerde me vroeger (jaja) altijd een soort "vrijmarkt" voor de boeken. Dit beviel erg goed, omdat je dan als school niets te maken hebt of de boeken wel goed zijn... en zo... Sinds het boekenfonds is dat natuurlijk allemaal anders geworden. Voor de GR zou zoiets misschien nog wel kunnen. Een belangrijk voordeel is dat de school niet op hoeft te draaien c.q. verantwoordelijk bent voor ondeugdelijke apparaten (na een tijdje). Overigens bleek bij de boekenmarkt dat veel leerlingen uit de 3de klas al van te voren afspraken hadden gemaakt met de vertrekkende 5de klassers.... (HAVO dus).
Willem
- Sunday, June 03, 2001 at 16:05:31 (EDT)

FIGUUR 6 Hierboven staat hoe er in WisBase genavigeerd kan worden naar de diverse pagina's.

FIGUUR 7 Door middel van een prikbord communiceren de leden van WisBase met elkaar.

Welke vaardigheden heeft een docent nodig om met WisBase te kunnen werken?
Er zijn nauwelijks vaardigheden vereist. Je moet een toets kunnen maken met de tekstverwerker Word of WP. Je moet een email kunnen versturen met een bijlage (attachment). Mocht je dat laatste als lastig beschouwen, dan is er mogelijk wel een bevriende collega die dat voor je kan doen.
Bovendien staan er op de site van WisBase duidelijke handleidingen voor b.v. MathType, WinZip, WsFtp.

Wat kunnen we in de toekomst nog verwachten van WisBase?
We doen alle mogelijke moeite om wat financiële armslag te krijgen. Misschien moeten we in de toekomst scholen gaan vragen een financiële bijdrage te leveren. Hiermee zouden we de service van WisBase voor de leden kunnen verbeteren.
Verder zijn we al redelijk ver met onze pogingen, alle pagina's op één server te krijgen. Hiermee kan de beveiliging rondom alle pagina's verbeterd worden.
Tenslotte willen we de samenwerking vergroten door van leden die dat kenbaar willen maken, hun specialismen te vermelden. Dat zou dan het begin van een forum en/of helpdesk kunnen zijn op het gebied van wiskundige onderwerpen.

Hebben jullie van WisBase nog wensen voor de toekomst?
Naast de al eerder genoemde sponsors en een wat ruimer budget zoeken we nog beheerders voor enkele dochterpagina's. Met name de onderwerpen *Grafische Rekenmachine*, *kennis van bepaalde wiskundesoftware* en *profielwerkstukken* moeten nog beheerd worden. Verder zoeken we nog een beheerder voor Moderne wiskunde havo 4/5A en nog enkele beheerders voor de methodes Pascal en Wageningse Methode. Zo'n aspirant-beheerder kan dan een 'mal' downloaden waarin hij of zij de juiste links aanbrengt. Bij het opbouwen van de pagina wordt de nieuwe beheerder bijgestaan. Het bijhouden van zo'n 'dochter' kost aan tijd hooguit een kwartier per week.

Over de auteur

Bram Theune (e-mail: actheune@zeelandnet.nl) is docent aan de SSG Nehalennia te Middelburg; hij is tevens coördinator van WisBase.

ORSTAT2000-VWO NADER BEKEKEN

Deel 1: wat zijn de mogelijkheden van dit programma voor gebruik in de Tweede fase van havo en vwo?

[Jos Tolboom]

Inleiding

De Vrije Universiteit is actief op het gebied van wiskunde-ondersteunende software. De programma's VU-Grafiek, VU-Stat, VU-Dif en ORStat worden door Wolters-Noordhoff op de markt van het Voortgezet Onderwijs gebracht. Dit zijn alle drie programma's met een duidelijk doel en –inmiddels- een duidelijke interface.

Daarnaast brengt de VU nog een programma uit dat bruikbaar lijkt voor de Tweede Fase van het Voortgezet Onderwijs: ORStat2000-VWO. De vraag die ik in dit artikel zal proberen te beantwoorden luidt: Verdient ORStat2000-VWO een plaats in het wiskundeonderwijs naast de software die hierboven staat genoemd? Of is het zelfs een alternatief?

Verantwoording

In de help-file vindt de gebruiker de volgende verantwoording bij de ontstaansgeschiedenis van dit softwarepakket:

Veel mensen denken ten onrechte dat wiskunde saai en onpraktisch is. Het educatieve Windows softwarepakket ORSTAT2000 helpt dit misverstand hopelijk uit de wereld. Dit softwarepakket is in samenspel tussen docenten en studenten van de studierichting Econometrie en Operationele Research van de Vrije Universiteit (*http://www.econ.vu.nl/ectrie*) ontworpen om te laten zien hoe boeiend en praktisch bruikbaar de wiskunde kan zijn. Kansrekening en optimalisering zijn belangrijke bestanddelen van de toegepaste wiskunde en krijgen dan ook veel aandacht in het softwarepakket. Vooral kansrekening leent zich bij uitstek voor een benadering waarin de computer gebruikt wordt om op experimentele wijze inzicht te geven in kansbegrippen en kanswetten. Computersimulaties van kansmodellen kunnen razendsnel door de computer uitgevoerd worden en in real-time kunnen de resultaten grafisch op het scherm getoond worden. Dit geeft vaak veel meer inzicht dan louter formules. Het softwarepakket is niet alleen geschikt voor gebruik bij wiskundige vakken uit de basisfase van verschillende studierichtingen aan universiteit of hbo, maar is ook geschikt voor ondersteuning van het wiskunde onderwijs in de bovenbouw vwo en voor gebruik in het studiehuis. Vele praktische opdrachten zijn in de helpfiles van het pakket ORSTAT2000 opgenomen.

Bundel

Het pakket ORStat2000-VWO is een bundel van modules. Iedere module is een op zichzelf staand programma, dat in een bepaald deel van de wiskunde gebruikt kan worden. Niet alle modules bestrijken deelgebieden van de wiskunde zoals we die terugvinden in de eindtermen van havo en vwo. Maar de modulen die dat niet doen zijn wel aanleiding tot exploratie van die gebieden binnen een praktische opdracht, een Zebrablok of zelfs een profielwerkstuk. Zoals de naam van het pakket al aangeeft, hebben alle

modules betrekking of op Operations Research ('bedrijfswiskunde') of op Statistiek.
De modules zijn
- Dobbel
- Tabellen en grafieken
- Handelsreizigersprobleem
- Normale Verdeling
- Monte Carlo Simulatie
- Wachtrij-simulatie
- Roulette
- Lineaire Programmering
- Kortste-Pad Probleem

Er is ook nog een versie van ORStat2000 die bedoeld is voor universitair en hoger beroepsonderwijs. Die versie bevat drie extra modules voor Integer Programmering, Markov-ketens en Queue. In dit artikel wordt op deze drie modules niet ingegaan.

Menu Help

Een voor docent en leerling ontzettend belangrijke meerwaarde van het pakket zit op een plek die de meerderheid van de computergebruikers nooit bezoekt: het menu *Help*. De eerste optie daarin is *Help inhoud* (zie figuur 1). Ook die benaming doet nog niet vermoeden dat het hier om een essentiële functionaliteit gaat. Wat vind je in deze op hypertekst gebaseerde browser? Allereerst een meestal behoorlijk duidelijke uitleg van de theorie waarop de module betrekking heeft. Bovendien vindt men er voorbeelden en oplossingen van die voorbeelden die aangeven hoe het programma kan worden gebruikt.
Bij sommige modulen vindt men echter ook nog eens voor het onderwijs zeer waardevolle praktische opdrachten: Monte Carlo (maar liefst 11 stuks), Wachtrijsimulatie (10 stuks), Roulette, en Lineair Programmeren.

De Modulen

Een handigheid van het programma is dat alle uitvoervensters via een knop als plaatje (.bmp bestand) zijn op te slaan. Dat maakt het gebruikers eenvoudig resultaten in een verslag weer te geven.

Dobbel

Een duidelijke module: de twee bekendste stochastische experimenten (die merkwaardigerwijs beide in het kader *Dobbelsteen* worden geplaatst) kunnen hiermee worden gesimuleerd (zie figuur 2, op p. 94). Daarbij kan de kansgrootte als een parameter worden ingesteld. Fraai zichtbaar is de convergentie van simulatieresultaten in de richting van de theoretische verwachting.
Het programma beschermt de gebruiker goed tegen verkeerde invoer; dat doet het overigens in alle modules. Een duidelijke, maar niet erg verrassende module. De mogelijkheden zijn ook in de onderbouw te benutten.

Tabellen en grafieken

In deze module kan de gebruiker spelen met de kansen en grenswaarden die horen bij een aantal bekende kansverdelingen. Van deze verdelingen horen de Standaardnormale, de Binomiale en de Hyper-geometrische verdeling wel tot het curriculum van sommige profielen van havo en/of vwo, de Chi-kwadraat, Student-t, Gamma, Fisher F, en Poisson niet. Vreemd is dat de uitvoer van de op het vwo meest gebruikte verdeling, de standaardnormale, geen grafieken oplevert; een inkleuring van een kans in een kansverdeling (iets dat zelfs de grafische rekenmachine kan) vergroot bij leerlingen vaak het inzicht. In plaats daarvan ziet de uitvoer eruit als in figuur 3, op p. 95.
Bij alle andere verdelingen kunnen wel grafieken gegenereerd worden. Die worden allemaal grafisch vergeleken met een normale verdeling. Ik kon geen algemene uitleg vinden over het –fundamentele-verschil tussen continue en discrete verdelingen. Een docent is ook hier niet volledig misbaar. Maar als er een les wordt gewijd aan achtergronden kunnen leerlingen toch behoorlijk zelfstandig aan de slag, als er tenminste een opdracht is om aan te werken. In deze module zijn de opdrachten niet ingebouwd.

Handelsreiziger

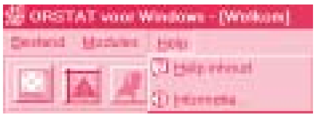
Het beroemde handelsreizigersprobleem wordt in deze module prachtig gesimuleerd. De gebruiker kan zelf het aantal te bezoeken steden kiezen, kan ze eventueel zelf op de kaart van Nederland plaatsen en kan vervolgens een heuristiek (Eigen rondreis, Random rondreis, Dichtste buur benadering of Grootste hoek benadering) kiezen waarmee de route uitgezet en berekend kan worden. In de help-file zit verder geen praktische opdracht, maar een voor de hand liggende opdracht is bijvoorbeeld:

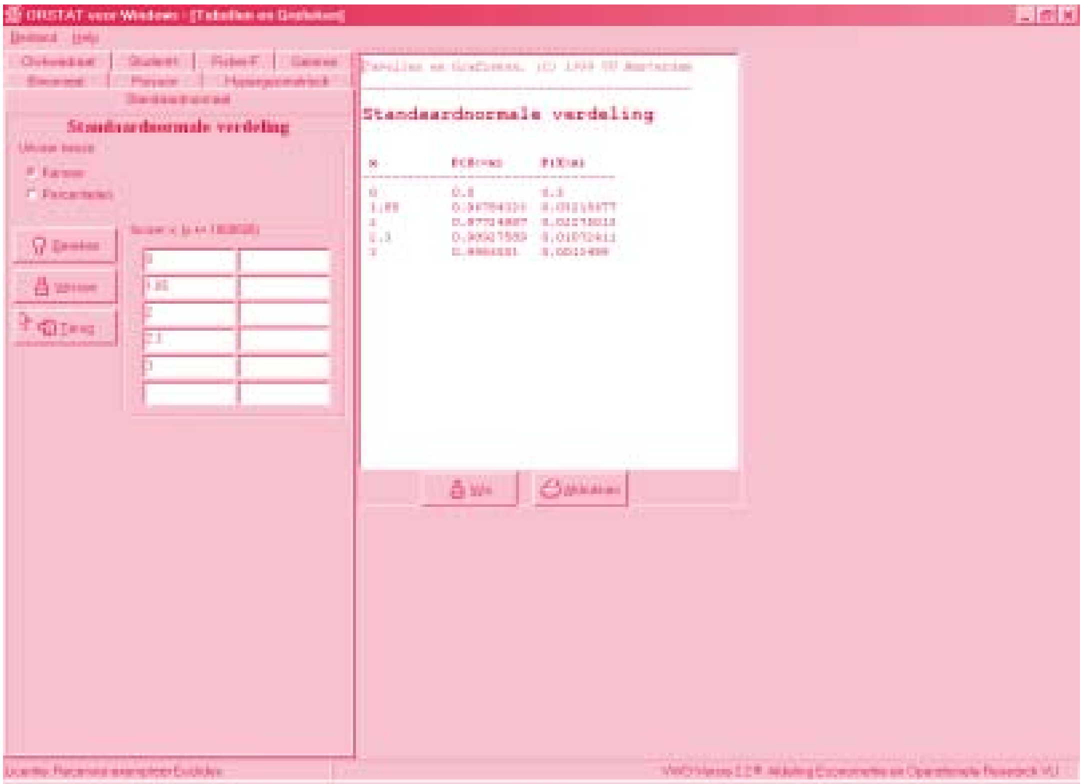
Begin met drie steden in te tekenen. Kun je zelf de kortste rondreis vinden? En bij vier steden? Vijf? Wat is dus het grote probleem voor de handelsreiziger? Probeer experimenteel de verschillen te laten zien tussen de verschillende heuristieken.
Zoek via *http://www.google.com/intl/nl/* op 'handelsreizigersprobleem'. Beschrijf de in jouw ogen meest belangrijke toepassing. Verklaar je keuze.

Zelf zoeken op het WWW levert ook de docent veel ideeën op. Uit de help-file over de 2-opt verwisselheuristiek (na uitleg over hoe deze in zijn werk gaat): 'Niettemin worden met de verbeterings-heuristiek vaak opvallend goede resultaten verkregen, ook al was je uitgangstour slecht.'
Vraag aan de leerling zou kunnen zijn: Kun je dit verklaren? Kun je zelf ook een verbeterheuristiek bedenken?
Kortom: een schitterende module waarmee de experimentele kant van de wiskunde, die in de theoretisch zwaar beladen examenprogramma's maar al te vaak ondersneeuwt, goed kan worden belicht.

Normale verdeling

De in de praktijk belangrijkste kansverdeling wordt geëerd met een eigen module. In die module niet, wat





FIGUUR 1

FIGUUR 2 Uitvoer van tabellen en grafieken

ik verwachtte, de ontbrekende mogelijkheid uit de module Tabellen en Grafieken om kans-plaatjes te maken. De bouwers hebben gekozen voor een in eerste instantie wat ondoorzichtige illustratie van drie van de meest belangrijke contexten van de normale verdeling: Centrale limietstelling, Wortel n-wet en Betrouwbaarheidsintervallen.
Waar de betere modulen wat betreft invoer en uitvoer helemaal voor zichzelf spreken, moest ik hier toch echt de help-file induiken om de uitvoer volledig te begrijpen. Een keuze voor Wortel n-wet, aantal steekproeven: 100, Start, levert als –enige- uitvoer figuur 4 op.
Tegenwoordig kan men stellen dat gebruikers van software impliciet verwachten dat invoer en bediening voor 80% in een oogopslag duidelijk zijn, en dat spelenderwijs daar nog 15% bij komt. Voor de rest duikt men dan de help-functie in. Aan de hand van deze vuistregel zou ik deze module niet geslaagd willen noemen.
Daarnaast is de uitvoer meteen statisch: er valt niet meer te sleutelen aan resultaten. Terwijl software aan die dynamiek nou juist de grote meerwaarde ontleent ten opzichte van boeken. In bijvoorbeeld de module Handelsreiziger wordt de gebruiker die mogelijkheid wel geboden. Bovendien mis ik hier het onderdeel Toetsen van Hypothesen dat, bij voldoend grote steekproef, eveneens een zeer belangrijk toepassingsgebied van de normale verdeling is. Merkwaardig is dat in deze module in de schermuitvoer het knopje *Grafiek opslaan naar bestand* ontbreekt.

Monte Carlo

Zoals in Menu Help al opgemerkt, is dit de module waarbij het meeste lesmateriaal wordt geleverd. Eigenlijk bestaat deze module weer uit 11 submodules. En met iedere submodule is het mogelijk om een (groep) leerling(en) behoorlijk aan het werk te zetten. Bovendien bevat een aantal submodules de programmeercode in Turbo Pascal, zodat leerlingen met programmeer-interesse ook zelf kunnen gaan knutselen met de software.

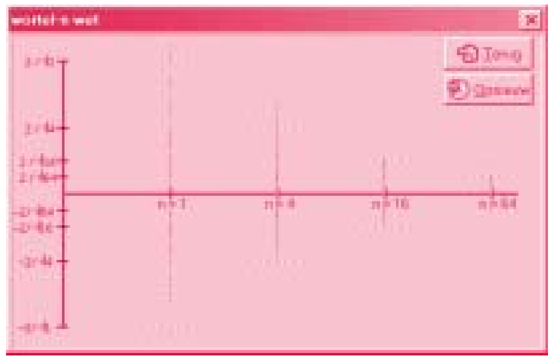
Verjaardagsprobleem

De eerste submodule *Verjaardagsprobleem* is een heel aardige en bekende context: hoe groot is de kans dat in een bepaalde groep twee of meer mensen op dezelfde dag jarig zijn?
Heel mooi kan men hier zien hoe de simulatiekans (tegenwoordig in sommige wiskundemethoden ook wel zweetkans genoemd) op de lange termijn convergeert naar de theoretische kans (ook wel weetkans genoemd). Er is geen praktische opdracht in de help-file beschreven; de theoretische uitleg van het probleem is wel heel duidelijk en goed.

Simulatie van het getal π

De tweede submodule levert bijzonder aardig en inzichtelijk materiaal op. Er zit een aanknopingspunt in naar de module Normale verdeling via de betrouwbaarheidsintervallen die men kan opstellen afhankelijk van het aantal keer dat een random point (kernbegrip in de Monte Carlo simulatie) wordt gekozen. Wanneer een leerling de simulatie een aantal keren uitvoert, zal hij of zij het 95%-betrouwbaarheidsinterval zien verbeteren. Het zou natuurlijk prachtig zijn als dit kon leiden tot een zelf-herontdekken van de wortel-n-wet. Maar gelukkig is er ook in de digitale les nog altijd de docent.

FIGUUR 3 Instellen van parameters in Dobbel



FIGUUR 4 Uitvoer van de Normale verdeling

In de *Simulatie van pi* kan men ervoor kiezen, de optie *Snelle simulatie* uit te zetten. Dit verdient bijna altijd aanbeveling: het zien aangroeien van het beeld, in dit geval de verdeling van de random points in de figuur met cirkel en omgeschreven vierkant (zie figuur 5, op p. 96), draagt bij aan het begrip van de simulatie.

Sint Petersburg-paradox

Een van de meest intrigerende problemen uit de kansrekening is de Sint Petersburg-paradox: hoe kan het dat weinigen bereid zijn dit spel te spelen tegen een inleg van zeg *f* 100,- terwijl de verwachtingswaarde van de uitkering van dit spel oneindig groot is? Deze ogenschijnlijke tegenstrijdigheid heeft in de historie tot hevige discussies geleid. Sommigen meenden zelfs te mogen concluderen dat de wiskunde dus niet klopte.
Wederom biedt de help-file een uitstekende uitleg. Soms is de uitleg zelfs te goed, dat wil zeggen: te volledig. Dat gebeurt in andere modulen ook nog wel eens. In de tekst van de help-file zit een aantal plaatsen waar een didactisch sluwe vraag geformuleerd had kunnen worden, maar waar nu een conclusie wordt getrokken.
Af en toe staat er wiskundig iets merkwaardigs in dit bestand:

> Je zult in de simulatie zien dat incidenteel zeer grote 'klappers' in de uitbetaling worden gemaakt die wezenlijk bijdragen aan de gesimuleerde ontwikkeling van de gemiddelde uitbetaling.

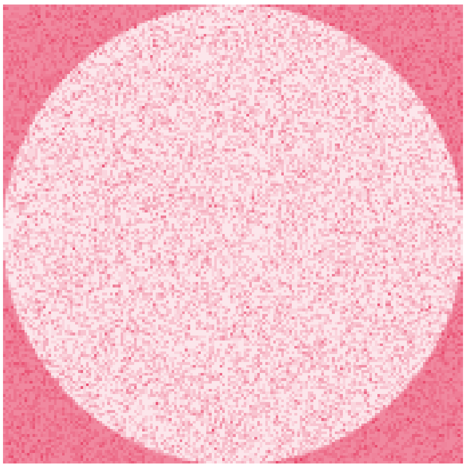
Dit is niet altijd even eenvoudig omdat de uitvoer het gemiddelde van de runs weergeeft. Zo sneeuwt de invloed van een individuele uitslag vaak onder, zeker als hij later in de reeks plaatsvindt.
Toch bewijst ook deze module dat een simulatie kan bijdragen aan het gevoel van de leerling voor het probleem, als tenminste conceptueel duidelijk gemaakt is wat en hoe er gesimuleerd wordt.
Jammer is misschien dat de help-file niet verwijst naar de prachtige oplossingen die er in de loop der eeuwen zijn aangedragen voor de paradox, bijvoorbeeld de ln-transformatie van Daniël Bernoulli. Maar men kan niet alles hebben.
Na het instellen van de parameters en het runnen van de simulatie is het interactieve gedeelte afgesloten. Wel kan het iteratieve spelen met de parameters en het runnen van de simulatie voor extra inzicht zorgen.

Krasloterij

In de help-file wordt de onderzoeksvraag zeer eenvoudig geformuleerd:

> Neem de krasloterij. Of deze nu 100 loten of 100 miljoen loten per week uitgeeft, de kans dat niemand wint in een gegeven week is in beide gevallen even groot, namelijk 36,8%.

Vervolgens wordt de kansverdeling gegeven in geval van minimaal 10 verkochte loten en gesteld wordt dat die verdeling onafhankelijk is. Het bewijs hiervoor wordt niet gegeven, maar is in geval van een concreet aantal loten wel te geven door leerlingen.



FIGUUR 5 **Monte Carlo simulatie ter bepaling van π**

De simulatie kan natuurlijk goed aantonen dat de kansverdeling inderdaad onafhankelijk is van het aantal verkochte loten. Ook hier beperkt het interactieve gedeelte zich tot het instellen van de parameters en het runnen van de simulatie.

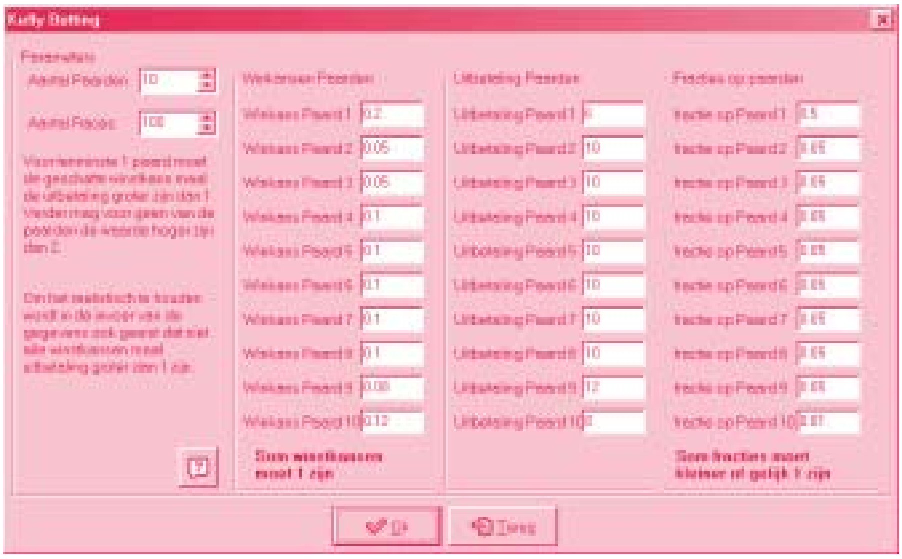
Kelly Betting

In deze module bindt een leerling in een gokspel de strijd aan met een optimale strategie voor dat gokspel, bedacht door de Amerikaanse wiskundige J.L. Kelly. Als voorbeeld neemt de module het inzetten van fracties van je kapitaal op bepaalde paarden in de paardenrace, waarvan je de uitbetalingen van de bookmakers kent. De winstkansen van de paarden moet je op je eigen gevoel bepalen, precies zoals het in de werkelijkheid ook is (**zie figuur 6**).

Duidelijk is dat een ongeduldige leerling nog een hele kluif heeft aan het invullen van deze velden. De parameter linksboven, 'Aantal paarden', bepaalt bovendien hoeveel rijen de driekoloms-matrix heeft. Misschien is het raadzaam, die parameter eerst maar eens wat kleiner aan te bevelen (bijvoorbeeld 3) en het dan met de klas gezamenlijk in te vullen. Vervolgens kunnen leerlingen zelf verder experimenteren met grote waarden.
Het is de vraag of iedere leerling geïnteresseerd is in de theoretische achtergrond van Kelly's strategie. Voor uitleg daarover wordt verwezen naar H.C. Tijms, Spelen met Kansen, Uitgeverij Epsilon, 1999. Maar zeker is dat iedere leerling gevoelig is voor een wedstrijd: probeer met deze module en een gegeven uitgangsmatrix (bijvoorbeeld die van **figuur 6**, zonder de kolom fracties ingevuld) een verdeling te vinden die beter is (aardig discusie in de klas: hoe bepaal je in dit geval wat 'beter' is?) dan die van Kelly. Beste strategie verdient de prijs.
Heel interessant is ook de mogelijkheid om gevoeligheidsanalyse (wat zijn de veranderingen in de output wanneer de input een klein beetje gewijzigd wordt? Zijn er parameters aan te wijzen die een aanmerkelijk grotere invloed hebben dan andere?) uit te leggen aan de hand van de waarden van de coëfficiënten.
Deze module biedt daarvoor uitstekend gereedschap.
De theoretisch geïnteresseerde leerling kan met behulp van de literatuurverwijzing een (uitgebreide) praktische opdracht van deze module maken.

Lotto

Dit is de tweede submodule die betrekking heeft op een populair kansspel. Er wordt een link gelegd naar de module Dobbel. Uiteraard vraagt de lottotrekking erom gesimuleerd te worden. Die simulatie is eenvoudig: er hoeven maar enkele parameters te worden ingesteld (**zie figuur 7**).
De uitkomsten van de simulatie worden grafisch netjes weergegeven.
Maar de kracht van deze submodule zit hem weer in de *Help-inhoud* file. De problematiek die bij dit soort kansrekening opduikt wordt duidelijk uitgelegd. En bovendien zit er een vrij kleine (ca. 3 slu) maar goede praktische opdracht in, waarin de vraagstelling opbouwt van gesloten naar meer open.
In de uitleg staan aardige beweringen waarvan de aannemelijkheid te onderzoeken is met de simulatie.



FIGUUR 6 Invoer van parameters in de module Kelly Betting

FIGUUR 7 Instellingen van de parameters in Lotto

Bijvoorbeeld:
Zou je in de Nederlandse lotto 6/45 (trekking van 6 balletjes uit 45) elke week trouw twaalf rijtjes invullen, dan zou je meer dan 9000 jaar van leven moeten hebben om met een kans van tenminste 50% ooit in je leven de jackpot te winnen! Deze laatste conclusie betreft de oude situatie dat je alleen zes getallen moest aankruisen. Nu je voor het winnen van de jackpot ook één van de zes kleuren moet aankruisen, heb je in plaats van ruim 9000 jaar meer dan 54000 jaar nodig!!
Al met al is deze submodule ook weer geslaagd te noemen.

Voorlopige conclusie en vervolg

Hoewel ik pas de helft van de modules heb besproken, is nu al wel duidelijk dat het programma ORStat2000-VWO niet alle andere wiskundesoftware die er op de markt is pretendeert te kunnen vervangen. Zelfs op het specifieke terrein van Operations Research en met name kansrekening en statistiek maakt het bijvoorbeeld het programma VU-Stat niet overbodig.
Op dit moment is eveneens duidelijk dat het pakket, met name door de ingebouwde uitleg en opdrachten, goed ingezet kan worden in een studiehuisvorm van leren. Sommige modulen kunnen ook in contactlessen hun meerwaarde bewijzen.
Het pakket is zeer zeker niet duur in aanschaf: de software wordt aan scholen verkocht in een 'site-license-versie' voor de all-in prijs van *f* 375,-
Deze site-license versie geeft recht tot gebruik van de software op het netwerk van de school voor een onbeperkt aantal PC's voor een onbeperkte tijd en het recht een kopie van de software aan de leerling van de school te verstrekken voor thuisgebruik.

In een volgende aflevering van Euclides het tweede en laatste deel van de bespreking van dit pakket. De resterende modulen komen daarin aan de orde.
Bovendien worden aan de hand van deze software algemene criteria geformuleerd waaraan wiskundig-didactische software moet voldoen om succesvol te zijn.

Op dit moment kunnen we al kort antwoord gegeven op de vraag uit de inleiding:
Verdient ORStat2000-VWO een plaats in het wiskundeonderwijs naast de bekende Wolters-Noordhoff software? Of zou het de al bestaande software zelfs overbodig maken?
Antwoord: Ja. Nee.

Software

ORSTAT2000-VWO voor Windows; Vrije Universiteit afd. Econometrie; door Lucien Klaassen, Erwin Kalvelagen, Peter Schram en Henk Tijms.
Te bestellen via http://www.econ.vu.nl/ectrie (klik op VWO-scholen) of telefonisch: 020-4446010.

Over de auteur

Jos Tolboom was tien jaar lang docent wiskunde en informatica in het voortgezet onderwijs. Hij heeft meegewerkt aan het ontwikkelen van educatieve software bij Wolters-Noordhoff.
Sinds vier jaar is hij verbonden aan de Rijksuniversiteit Groningen, eerst bij het Universitair Centrum Lerarenopleiding (UCLO), nu bij de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen. Daar is hij projectleider Bètasteunpunt (http://www.betasteunpunt.rug.nl) en docent en onderzoeker. Zijn huidige onderzoek heeft als werktitel Ontwerp en implementatie van digitale leeromgevingen.

‘AFSCHEID’ VAN KEES HOOGLAND

Een herfstige avond in september. In een restaurant in Zwolle heb ik een ontmoeting met Kees Hoogland (40), hoofdredacteur van Euclides van augustus 1996 tot augustus 2001. Gedurende het grootste deel van die periode heb ik met Kees mogen samenwerken. Onder het genot van een goede maaltijd halen we samen herinneringen op.

[Victor Schmidt]

Waarom heb je de functie van hoofdredacteur neergelegd?
Ik vond de verantwoordelijkheid die een hoofdredacteur nu eenmaal draagt voor de inhoud van het blad, na vijf jaar een zware last worden. Je bent eigenlijk nooit klaar. Elke keer dat er een nummer klaar is, gaan je gedachten al weer naar de volgende nummers. Dat veroorzaakte een werkdruk die moeilijk te combineren was met mijn andere werkzaamheden.

Over welke werkzaamheden heb je het dan nog meer?
Ik ben projectleider wiskunde, natuurwetenschappen en techniek op het APS in Utrecht. Naast het interne werk dat daarmee gemoeid is, werk ik veel met vaksecties op scholen. Het gaat dan om de begeleiding van secties bij de invoering van de Tweede fase, maar bijvoorbeeld ook om de ondersteuning van secties bij het uitzetten van een koers voor de toekomst.
Verder ben ik al sinds 1986 één van de auteurs en eindredacteuren van Moderne Wiskunde.

En voor Euclides rest dan geen tijd meer...
Nee, te meer omdat ik nieuwe terreinen wil verkennen.

Zoals?
Digitale leeromgevingen wiskunde, digitale werkplaatsen en ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs over de landsgrenzen.

Wat houdt de functie van hoofdredacteur zoal in?
Je bent verantwoordelijk voor de inhoud van Euclides. Je gaat achter kopij aan, beoordeelt artikelen, correspondeert met auteurs, vraagt mederedacteuren en redactiemedewerkers om commentaar op artikelen, enzovoorts. Verder heb je nog een aantal vertegenwoordigende taken, zoals het onderhouden van contacten met het Bestuur en de redactie van de website.

Komt die kopij niet vanzelf binnen?
Tot op zekere hoogte. De hoofdredacteur ontvangt soms spontaan artikelen van auteurs. Dat kunnen wiskundige artikelen zijn van auteurs die naarstig op zoek zijn naar een publicatiemedium. Soms veel te lang, soms wiskundig onjuist. Ooit heb ik wel eens een artikel onder ogen gehad waarin een auteur bewezen meende te hebben dat alle wiskunde wereldwijd niet juist kon zijn. Het heeft mij en andere redacteuren nogal wat energie gekost om de auteur van zijn ongelijk te overtuigen.

Leg je zulke artikelen niet gewoon terzijde?
Nee, mijn stelregel was dat alle auteurs een antwoord krijgen. De lengte van een antwoord was vaak wel recht evenredig met de kwaliteit van de inzending.

Worden er dan veel slechte artikelen ingezonden?
Dat vind ik niet. Het merendeel van de inzendingen is goed van kwaliteit en getuigt van bevlogenheid. Vaak moet er op details een en ander bijgesteld worden. Met de meeste auteurs valt daar goed over te praten. Een enkeling schiet in de verdediging; dat is heel menselijk, maar soms wel lastig te hanteren.

Kun je Euclides geheel vullen met spontaan ingezonden kopij?
Nee, want je krijgt niet altijd artikelen binnen waar je als redactie behoefte aan hebt. Zo wilden we graag verhalen over hoe het in de klas toegaat, maar weinig docenten schrijven daarover.

Zouden docenten het misschien niet aandurven om een artikel in te zenden?
Ik heb altijd geprobeerd weinig drempels op te werpen voor potentiële auteurs. Maar je wilt natuurlijk geen onzin, heel slecht geschreven artikelen of scheldpartijen plaatsen. Ook moet je oppassen voor artikelen die maar voor een beperkte groep lezers interessant zijn.
Ik denk dat docenten het te druk hebben om artikelen te schrijven. In vroeger tijd werd een docent in de gelegenheid gesteld een deel van zijn tijd aan vakontwikkeling en -studie te besteden, maar dat is verleden tijd. Je kunt het goed zien na afloop van de zomervakantie. De kopijstroom zwelt dan aan, omdat auteurs de tijd hebben gehad om iets op papier te zetten. Daarna wordt het weer minder. Blijkbaar is er wel behoefte aan een podium waar men zijn ideeën, ervaringen en meningen met andere wiskundedocenten kan delen.

Op welke wijze heb je een stempel gedrukt op de inhoud van Euclides in de afgelopen vijf jaar?
Als je het vergelijkt met de jaren daarvoor is Euclides meer informatief geworden. Ik heb geprobeerd docenten op de hoogte te houden van ontwikkelingen en ministeriële regelingen. Dat dat op zich niet altijd meevalt, is te zien in de eerste twee nummers van deze jaargang. De kalender is ook een voorbeeld van het meer informatieve karakter van het blad. Je ziet dat de Vereniging ook veel werk verzet op dit terrein. Kijk maar eens op de prachtige website van de NVvW.

Ik heb nog eens wat zitten bladeren in oude jaargangen van Euclides en kan het voorgaande beamen.
Ja, voor mijn tijd was Euclides wat kritischer, met puntige 'Korrels' en af een toe een polemiek tussen twee auteurs. Dat kritische en polemische karakter is minder geworden.

Had je dat graag in stand gehouden?
Niet echt, die polemieken waren voor de reguliere docent niet altijd te volgen. Het ging er mij toch om een blad voor de wiskundedocent te maken met concrete informatie, verenigingsnieuws, een kalender en verhalen uit de klaspraktijk.

Ik zag in het eerste nummer van jouw hand het redactioneel weer terug.
Dat klopt. Ik heb het in ere hersteld. Je kunt daarin makkelijk de laatste hoofdzaken over het wiskundeonderwijs weergeven. Alhoewel het wel een klus was om daar veertig nummers lang elke zes weken iets over te schrijven.

Tijdens jouw zittingsperiode is de vormgeving veranderd. Is dat ook een onderdeel van het stempel van Kees Hoogland?
Het is niet ongebruikelijk dat de vormgeving ongeveer elke vijf jaar gewijzigd wordt. Zoiets gebeurt gewoon. Ik zie het niet als iets waar mijn naam aan verbonden zal zijn. Over een paar jaar zal er wel weer een nieuwe vormgeving komen.

Hoe zie je de toekomst van Euclides?
In ruim een jaar tijd is een aantal sleutelfuncties in de redactie overgegaan op nieuwe mensen. Er is een nieuwe redactievoorzitter, een nieuwe eindredacteur en nu ook een nieuwe hoofdredacteur. Ik vind het zeer positief dat de nieuwe mensen docenten zijn die in de volle lespraktijk staan.

En de toekomst van het wiskundeonderwijs in Nederland?
Je ziet nu een tendens naar minder regelgeving en minder gedetailleerde programma's. Docenten krijgen meer vrijheid om zelf keuzen te maken in hun onderwijs. Docenten tonen zich daarover soms huiverig vanwege bijvoorbeeld onvergelijkbaarheid van examens. Ook zijn sommige docenten bang dat schoolleidingen hen onder druk zetten zich te beperken tot de minimumvereisten in het examenprogramma. Het is dus een kwestie van vertrouwen. Als het ministerie geen vertrouwen heeft in schoolleidingen en vaksecties, neigt ze tot gedetailleerde regelgeving. Ook docenten die geen vertrouwen hebben in schoolleiding en ministerie dringen vaak aan op gedetailleerde regels. Mijn mening is dat ministerie en schoolleidingen vertrouwen moeten hebben in de expertise van de docent en hen vrijheid moeten gunnen. Dan kan de regelgeving verminderen en zal het wiskundeonderwijs weer mede bepaald worden op het niveau waar het thuis hoort: dat van de docent. Docenten zullen die vrijheid dan wel moeten (durven) nemen. Verder vind ik dat een volledige docentfunctie uit maximaal 22 lesuren per week moet bestaan. Dan is er ruimte voor het ontwerpen van lessen en bijbehorend materiaal. Docenten leunen nu sterk op hun lesboek, omdat ze te weinig tijd hebben om zelf materiaal te ontwikkelen en voor reflectie op het programma.

Ik neem op het station afscheid van Kees. We zullen nog wel van hem horen of lezen.

Noot

Voor meer informatie over het APS zie http://www.aps.nl/wiskunde

SECTORWERKSTUK IN HET VMBO: VEEL TE KIEZEN, VEEL TE DOEN!

Voor leerlingen van de gemengde en de theoretische leerweg staat in leerjaar 4 het sectorwerkstuk op het programma. Voor veel docenten is dat iets waarvan klok en klepel nog nader tot elkaar moeten worden gebracht. In dit artikel doen we een poging daartoe.

[Anders Vink]

Inleiding

Na alle activiteiten rond de start van het vmbo (methodekeuze, het Programma van Toetsing en Afsluiting) lijkt op veel scholen de rust wat weergekeerd. In de wiskundeles gaan we aan het werk met nieuwe boeken, we bezinnen ons op praktische opdrachten en GWA en op het PTA voor leerjaar 4.
Hoewel de wet- en regelgeving toestaat dat het sectorwerkstuk in jaar 3 wordt gedaan, lijken de meeste scholen te hebben gekozen voor het vierde leerjaar. En op veel scholen wordt nu alvast nagedacht over hoe het sectorwerkstuk georganiseerd kan worden.
In 'sleutelnetwerken' van het Cito is door een aantal scholen geëxperimenteerd met het sectorwerkstuk. Een aantal bevindingen uit die sleutelnetwerken treft u hieronder aan.
Eerst iets over wat moet en wat mag.
Leerlingen van de theoretische en de gemengde leerweg maken in het schoolexamen een sectorwerkstuk. Op sommige scholen wordt dat beschouwd als de 'meesterproef' van de vmbo-opleiding; op andere scholen is het sectorwerkstuk niet meer dan een vakoverstijgende opdracht.
Er is enige regelgeving voor het sectorwerkstuk, maar scholen hebben toch veel te kiezen en te beslissen als het gaat om opzet en uitvoering. De regelgeving betreft onderwerp, studielast en beoordeling.

'Thema binnen de sector'

Over het onderwerp van het sectorwerkstuk bestaan hier en daar enige misverstanden. Zo hoor je soms dat er (minstens) twee vakken betrokken moeten zijn bij het sectorwerkstuk. Dat is niet zo: het sectorwerkstuk gaat over een thema dat past binnen de sector die een leerling gekozen heeft.
Een paar voorbeelden uit de sleutelnetwerken:
'De gevolgen van nieuwe milieuwetgeving voor het autosloopbedrijf' is een onderwerp dat prima past in de sector techniek. 'Het verschil tussen bevallingen thuis en in het ziekenhuis' komt uit de sector zorg en welzijn; 'Welke mobiele telefoon is de beste koop gelet op prijs/kwaliteit/bruikbaarheid?' uit de sector economie.
Bij deze onderwerpen is het met enige moeite mogelijk schoolvakken aan te wijzen die met het onderwerp te maken hebben. Maar dat is helemaal niet interessant en ook niet nodig: de genoemde onderwerpen passen prima binnen de genoemde sectoren!

Studielast

Er staat twintig uur aan studielast voor het sectorwerkstuk. Dat is dus tijd dat er op school, thuis of elders aan wordt gewerkt. Een goede tip: op een aantal scholen uit het Cito-netwerk heeft men dagdelen uitgeroosterd, waarop leerlingen op school onder begeleiding aan het sectorwerkstuk kunnen werken. Over die aanpak is men zeer te spreken: de begeleidende docenten hebben dan alle gelegenheid om het 'proces' te volgen en tijdig bij te sturen. Het is dan uiteraard ook mogelijk, op school faciliteiten als mediatheek en computers (al dan niet met internet) beschikbaar te stellen.
In het algemeen kost het geen moeite om leerlingen twintig uur te laten besteden aan het sectorwerkstuk; het is eerder de kunst om de hoeveelheid bestede tijd een beetje in te perken.

'Product en proces' moeten beoordeeld worden

Alle scholen uit het sleutelnetwerk hebben voor hun leerlingen een *'handleiding sectorwerkstuk'* gemaakt, Stap 4: Het plan van aanpak

Als je de onderzoeksvraag hebt geformuleerd, moet je een **plan** gaan bedenken om die vraag te gaan beantwoorden. In zo'n plan moet bijvoorbeeld iets staan over:

- het **verzamelen** van informatie over je onderwerp;
- het **ordenen** van gegevens die je nodig hebt;
- het **voorbereiden** van de presentatie, het maken van het verslag o.i.d.;
- het **maken** van het sectoronderzoek.

Je kunt deze activiteiten onder elkaar zetten en gaan **plannen** hoeveel tijd je nodig denkt te hebben voor elk onderdeel van het plan en **wanneer** je denkt aan dat onderdeel te gaan werken. Schrijf de **ingeroosterde data** op.
Let er op dat je bij een opdracht die je wilt uitvoeren in je plan van aanpak de **taken** goed **verdeelt**.
Het sectoronderzoek dient in **week 49** (begin december) **klaar** te zijn. Houd daar in het **plan van aanpak** rekening mee.
Het plan van aanpak moet voor het eerste studiemoment klaar zijn. Je mentor tekent dit af ...

Vul nu samen stap 4 in van het bijgevoegde logboek sectoronderzoek

Beoordelingscriteria:
- goede volgorde van werkzaamheden;
- Is het plan uitvoerbaar?
- Is er een evenwichtige verdeling van de taken?
- Is de tijdsindeling haalbaar?

FIGUUR 1 Uit de 'handleiding sectoropdracht' van het Pieter Zandt, Kampen, stap vier (van de zeven).

waarin de spelregels en beoordelingscriteria vermeld staan. Sommige scholen uit het sleutelnetwerk wilden van leerlingen letterlijk een werkstuk ontvangen. Maar er zijn ook andere producten denkbaar: posters, mondelinge presentaties, Powerpoint-presentaties, diaseries, video, en zelfs websites zijn door leerlingen geproduceerd. Het staat de school vrij om hier al of niet iets voor te schrijven. Eén van de scholen uit het netwerk spreekt van een sector*opdracht*, en niet over een werkstuk. Op een andere school heeft men de leerlingen vrije keus gelaten in alle mogelijke presentatievormen; alleen het traditionele werkstuk mocht juist niet!
Proces beoordelen: dat kost meer moeite.
Bijna alle scholen uit het netwerk hebben geëxperimenteerd met logboeken. Maar wellicht veel beter werkt een regelmatig tussentijds gesprekje tussen begeleider en leerling(en). Er zijn dan ook goede ervaringen met stappenplannen met tussentijdse beoordeling. Door tussentijds een aantal stappen te beoordelen komt het proces in beeld.
Nog een voordeel van tussentijdse beoordeling: een leerling die bijvoorbeeld de eerste twee stappen voldoende heeft afgerond en met stap drie bezig is, kan nooit meer worden terugverwezen naar stap twee. Dit voorkomt dat een leerling aan het einde van de rit alles over moet doen.

Beoordeling door twee docenten

Dit is een formele eis waar een school soepel mee om kan gaan. In de praktijk van de netwerkscholen is vaak per leerling, per tweetal, of per groepje van leerlingen dat samenwerkt, één begeleider aangesteld, die ook beoordeelt. In geval van twijfel wordt een tweede beoordelaar er bij gehaald. Volgens de regelgeving moeten er twee parafen onder het werkstuk komen om aan de wettelijke eis van twee beoordelaars te voldoen.

Beoordelingscriteria

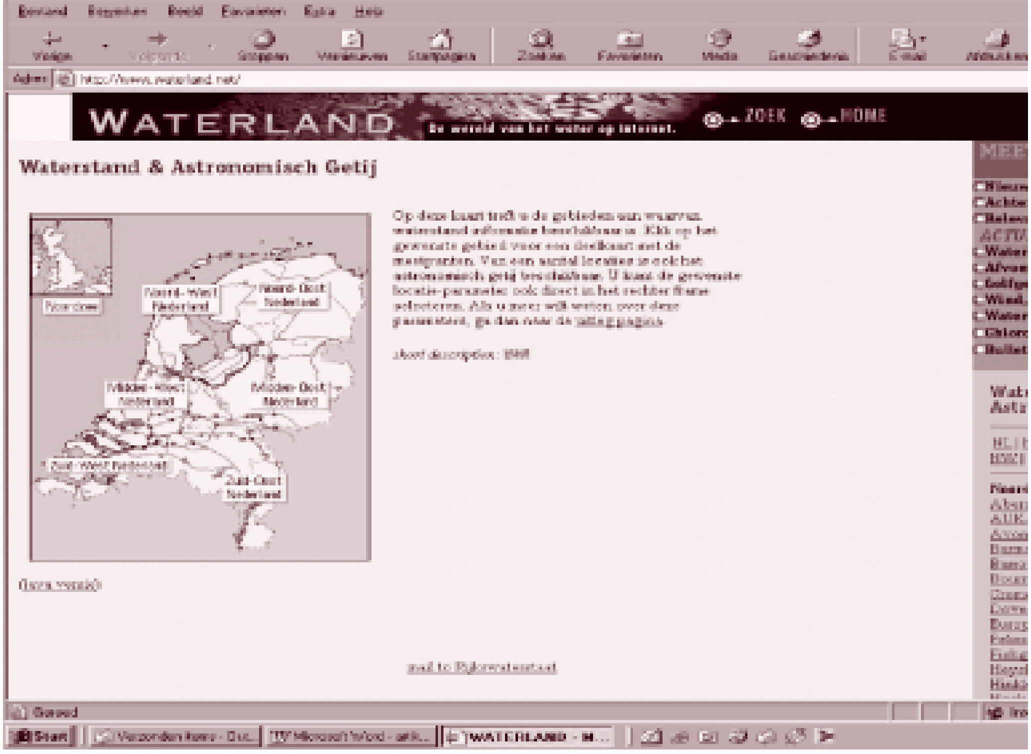
Hier kan men heel verschillend mee om gaan: een rijtje criteria noemen zonder weging waaraan een leerling uiteindelijk moet voldoen, is iets heel anders dan per presentatievorm een uitgebreide lijst van beoordelingspunten noemen. De verwachting is overigens dat er steeds meer voorbeelden van beoordelingen beschikbaar komen. Uiteraard moet een leerling van tevoren weten waar hij of zij op beoordeeld wordt.
De uiteindelijke beoordeling is voldoende of goed. En die beoordeling komt op de cijferlijst of het diploma van de leerling terecht.

Schrijfopdracht Nederlands

De documentatie die gebruikt wordt voor het sectorwerkstuk wordt tijdens het centraal examen Nederlands gebruikt bij de schrijfopdracht. Leerlingen krijgen dan een opdracht als: 'schrijf een artikel voor de schoolkrant waarin je vertelt hoe je het sectorwerkstuk hebt aangepakt.' Er is wel enige discussie of dit de docenten Nederlands niet heel veel werk oplevert: moeten zij, om zo'n opdracht te kunnen beoordelen, niet alle sectorwerkstukken doornemen?

Er valt veel te kiezen!

Uit het bovenstaande blijkt dat de school veel te kiezen heeft. Hoe de scholen uit het sleutelnetwerk hebben gekozen is te zien op de Cito-SLO-website te vinden op *http://www.examengids.nl* [1]. Alle te maken keuzes zijn op een rijtje gezet in het zogenaamde 'Beslisdocument vmbo' [2], dat door de Landelijke Pedagogische Centra is uitgebracht. In dit



FIGUUR 2

beslisdocument (waarin ook algemene zaken rond het examendossier aan de orde komen, en praktische opdrachten en het handelingsdeel) wordt de lezer langs verschillende keuzes geleid.

Een enkel voorbeeld:
1. Kiezen van het onderwerp
- de docent wijst elke leerling een onderwerp toe;
- de leerlingen krijgen een aantal onderwerpen aangeboden waaruit ze kunnen kiezen;
- de leerling draagt het onderwerp aan;
- de leerling draagt het onderwerp aan, dat vervolgens goedgekeurd moet worden door de begeleidende docent;
- anders, nl. ...

2. Planning
- De leerling is daar vrij in;
- de school stelt een deadline wanneer het sectorwerkstuk moet zijn afgerond;
- de docent/de sectie/het sectorteam stelt een deadline wanneer het sectorwerkstuk moet zijn afgerond;
- de school geeft aan wanneer aan het sectorwerkstuk kan worden begonnen, stelt deadlines voor de verschillende tussenstappen en een deadline voor afronding. Daarnaast treft de school organisatorische voorzieningen (bijvoorbeeld in het rooster) waardoor de leerlingen op school aan het sectorwerkstuk kunnen werken;
- anders, nl. ...

Dit rijtje van keuzepunten kan nog naar hartelust worden uitgebreid. Mogen of moeten leerlingen in groepen werken? Welke docenten begeleiden? Waar liggen accenten bij beoordeling? Organiseert de school faciliteiten voor de leerlingen?
In het bovenstaande zijn al allerlei keuzes van de scholen uit het sleutelnetwerk toegelicht.
Maar het is duidelijk dat iedere school die opzet moet kiezen die het meest past bij wat er in de school gangbaar en haalbaar is. De handleidingen van de netwerkscholen kunnen een inspirerende bron zijn voor iedere school. Voor voorbeelden hiervan (zie figuur 1, op p. 101) kan men weer op de site van de examengids terecht.

En wiskunde dan?

Tot nu toe hebben we nog met geen woord over de rol van het vak wiskunde of over wiskundedocenten gerept. Hebben die eigenlijk wel iets van doen met het sectorwerkstuk? Moeten zij zich wel verdiepen in het sectorwerkstuk? Het antwoord is ja! En daarvoor zijn verschillende redenen.
- Op nogal wat scholen kiest men ervoor de begeleiding (en soms ook de organisatie) van het sectorwerkstuk in handen te geven van de 'sectorvakken'. Dat betekent dat in de sectoren techniek en economie wiskundedocenten aan bod kunnen komen.
- Bij het maken van een sectorwerkstuk doen leerlingen een beroep op allerlei vaardigheden. Ook op vaardigheden die bij wiskunde van belang zijn.
Denk aan het gebruik van statistische gegevens, aan het gebruik van grafieken en tabellen, aan het gebruiken van een min of meer logische verhaallijn, aan het trekken van conclusies.
- Er is een heel scala aan min of meer wiskundige onderwerpen die als onderwerp van een sectorwerkstuk niet zouden misstaan. Hierboven werd als mogelijk onderwerp al genoemd: 'Welke mobiele telefoon is de

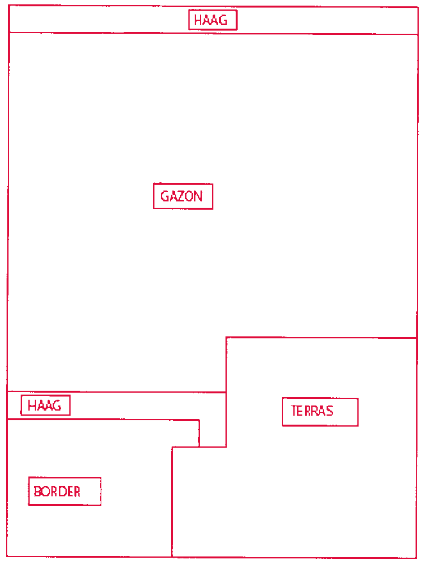
Je gaat het tuinontwerp van de familie Hovenier uitvoeren. Je maakt een planning, kiest de materialen, berekent de kosten en je voert een deel van de aanleg zelf uit.

□ Bestudeer de tekening van de tuin (bijlage 1) .
□ Lees het eisenpakket van de familie Hovenier aandachtig door.

Pakket van eisen van familie Hovenier
- Een terras met een kantopsluiting van klinkers.
- De kantopsluiting is een koprollaag vlakke maat.
- De haag die de tuin begrenst, moet bladverliezend zijn.
- In de tuin bij de border moet een wintergroene, strak geschoren haag, die tenminste 2 meter hoog kan worden, komen.
- De border moet alleen witte en blauwe bloemen bevatten.
- In de border moeten één boom, enkele heesters en vaste planten worden verwerkt.
- De beplanting moet vanaf het terras in hoogte naar achteren oplopen.
- In de verharding moet een eenvoudig legverband met verschillende verhardingsmaterialen aangebracht worden, in een cunet van 20 cm.
- Het gazon wordt gezaaid of gelegd.
- De aanleg van de tuin mag aan materialen en planten niet meer kosten dan fl. 1500 ,-

Bron: *http://www.examengids.nl* - dit is een deel van de zogenaamde 'centrale integratieve eindopdracht'

Bijlage 1: tuinontwerp op hoofdlijnen



Schaal 1: 50

FIGUUR 3

beste koop gelet op prijs/kwaliteit/bruikbaarheid?' Dit onderwerp is niet onbekend als onderwerp voor een praktische opdracht bij wiskunde. 'Eb en vloed' wordt genoemd in het boekje 'Wiskunde en Internet' [3], en is ook een goed onderwerp voor de sector techniek. De site *http://www.waterland.net* is daarvoor een prima inspiratiebron (zie figuur 2).
- In de sector landbouw zijn allerlei onderwerpen te bedenken die met het ontwerpen van een tuin te maken hebben. Ook daar speelt wiskunde een rol. Zie als voorbeeld figuur 3, een deel van een opdracht die hier als sectorwerkstuk kan gelden. En het is duidelijk dat hier veel wiskundige activiteiten in zitten! Hoewel het sectorwerkstuk niet van vakken uitgaat, zal het duidelijk zijn dat in veel onderwerpen wiskundige vaardigheden een belangrijke rol spelen.

Tenslotte

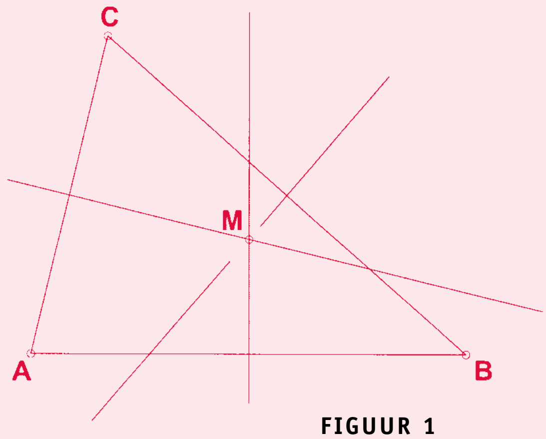
Een rondgang langs de scholen leert, dat docenten laveren tussen een houding van: 'het moet, dus vooruit' en 'dit is een mooie manier om de vaardighedenlijn af te sluiten'. Een voorbeeld van hoe dit laatste is te realiseren was te zien op één van de netwerkscholen, waar men een afsluitende avond voor ouders en collega's organiseerde. Leerlingen mogen op die avond hun onderzoekje presenteren. Het gaat hier om dezelfde school waar leerlingen allerlei presentatievormen mogen kiezen, behalve een 'gewoon' werkstuk. In de ene hoek staat een dia-apparaat te zoemen, in de andere hoek is een permanente Powerpoint-presentatie. Er is een hoekje met video, en zo af en toe geeft een leerling bibberend een mondelinge presentatie voor de hele zaal.
Leerlingen en docenten zijn buitengewoon enthousiast over het verloop van deze avond. De toekomst moet leren of veel scholen voor iets dergelijks te porren zijn. Maar de ervaring op de netwerkscholen leert dat dit soort activiteiten op het lijf van veel vmbo-leerlingen geschreven is!

Noten

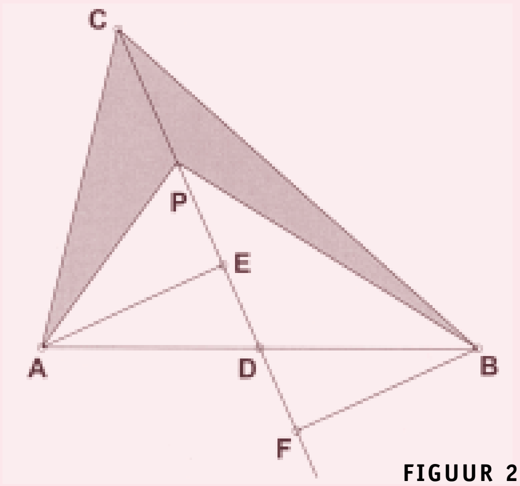
[1] http://www.examengids.nl : Doorklikken naar 'Toetsing en Examinering', 'algemeen', 'sectorwerkstuk'. Hier zijn ook enkele handleidingen van sectorwerkstukken te vinden, mogelijke onderwerpen, beoordelingen, werkstukken van leerlingen (inclusief te downloaden Powerpoint-presentaties).
[2] http://www.vmbo-loket.nl : zoeken naar 'beslisdocument'. Het document is ook te bestellen bij het APS, afdeling VODA, postbus 85475, 3508 AL Utrecht, bestelnummer 400.074. Behalve over het sectorwerkstuk zijn in dit document ook allerlei beslispunten opgenomen die over het schoolexamen in het algemeen gaan.
[3]'Wiskunde en Internet' van Jos Geerlings, Willem Hoekstra, Martin van Reeuwijk en Peter van Wijk. Te bestellen bij het APS: afdeling VODA, postbus 85475, 3508 AL Utrecht, bestelnummer 124.001. In dit boekje staan (o.a.) allerlei aanzetten tot praktische opdrachten, en zoals hierboven geschreven, wellicht ook tot een sectorwerkstuk.

Over de auteur

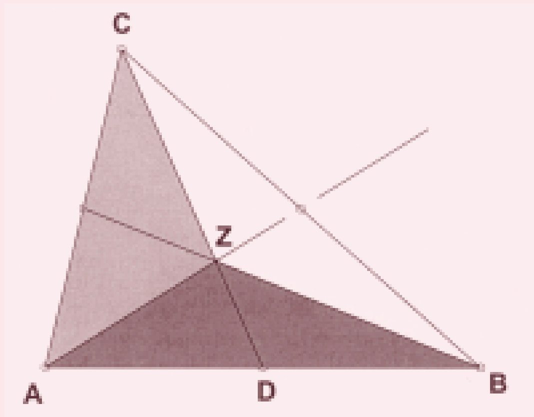
Anders Vink (e-mail: a.vink@aps.nl) werkt bij het APS en is betrokken geweest bij de sleutelnetwerken 'Sectorwerkstuk' van de Cito-groep.



FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3

ZWAARTELIJNEN DOOR ÉÉN PUNT

Om te bewijzen dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan, wordt vaak een geheel andere aanpak gehanteerd dan voor de vergelijkbare gevallen van de middelloodlijnen en de bissectrices van een driehoek. In dit artikel wordt een bewijs beschreven dat er mooier mee in de pas loopt.

[Bert Boon]

Verschil in bewijsmethode

Na lange tijd is het onderwerp ‘Meetkundige plaatsen’ weer terug in het wiskundeonderwijs (vwo wiskunde B12). Traditioneel verschijnen de middelloodlijn en de bissectrice als meetkundige plaatsen van punten die gelijke afstanden hebben tot respectievelijk twee punten en twee snijdende lijnen. Met behulp van meetkundige plaatsen bewijst men dan dat de drie middelloodlijnen c.q. de drie bissectrices van een driehoek door één punt gaan.

Voor de middelloodlijnen (zie figuur 1) verloopt dat bewijs als volgt:

- De middelloodlijnen van de lijnstukken AB en AC snijden elkaar in M.
- M ligt even ver van A en B, maar ook even ver van A en C.
- Dus M ligt even ver van B en C en ligt daarmee op de middelloodlijn van zijde BC.

Om te bewijzen dat de drie *zwaartelijnen* van een driehoek door één punt gaan tapt men meestal uit een ander vaatje. Via gelijkvormigheid wordt bewezen dat twee zwaartelijnen elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als 2 : 1. De derde zwaartelijn moet dan wel door het snijpunt van de eerste twee gaan. Met dat bewijs loopt het bewijs voor de zwaartelijnen uit de pas met de andere twee bewijzen.

De zwaartelijn als meetkundige plaats

Hieronder formuleer ik een bewijs dat er wèl mee in de pas loopt en uitgaat van een fundamentele eigenschap van de zwaartelijn, namelijk dat deze de driehoek verdeelt in twee driehoeken die ‘even zwaar’ zijn.

Te bewijzen is dus eerst: In $\triangle ABC$ is de zwaartelijn uit C de *meetkundige plaats* van de punten P waarvoor geldt dat de oppervlakte van $\triangle ACP$ gelijk is aan de oppervlakte van $\triangle BCP$ (zie hiervoor ook figuur 2). Het tweedelige bewijs maakt hoofdzakelijk gebruik van het feit dat twee driehoeken met gelijke bases en hoogten gelijke oppervlakten hebben.

(1) Als P op de zwaartelijn vanuit C ligt, dan geldt $\text{Opp}(\triangle ACP) = \text{Opp}(\triangle BCP)$.

Bewijs:

- De oppervlakten van $\triangle ADC$ en $\triangle BDC$ zijn gelijk, want $AD = BD$ en de driehoeken hebben gelijke hoogten.
- Nemen we voor beide driehoeken basis CD, dan zien we dat $AE = BF$.
- Voor elk punt P op de lijn CD geldt dus: $\text{Opp}(\triangle ACP) = \text{Opp}(\triangle BCP)$.

(2) Als $\text{Opp}(\triangle ACP) = \text{Opp}(\triangle BCP)$, dan ligt P op de zwaartelijn vanuit C.

Bewijs:

- Vanwege de gelijke oppervlakten hebben A en B (aan verschillende kanten van de lijn CP) gelijke afstanden tot de lijn CP, dus $AE = BF$.
- Snijdt lijn CP lijnstuk AB in D, dan is $\triangle ADE \cong \triangle BDF$ (ZHH), dus $AD = BD$.
- Hieruit volgt dat P op de zwaartelijn vanuit C ligt.

Hiermee is de zwaartelijn als de beschreven meetkundige plaats bewezen.

Zwaartelijnen door één punt

Met deze invalshoek is het bewijs dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan nu snel te geven (zie figuur 3).

Snijden twee zwaartelijnen (we kiezen hier de zwaartelijnen uit B en C) elkaar in Z, dan verdelen zij de driehoek in drie driehoeken met gelijke oppervlakte, immers:

- Z ligt op de zwaartelijn uit C, dus $\text{Opp}(\triangle ACZ) = \text{Opp}(\triangle BCZ)$ en
- Z ligt ook op de zwaartelijn uit B, dus $\text{Opp}(\triangle ABZ) = \text{Opp}(\triangle BCZ)$.

Omdat $\text{Opp}(\triangle ABZ) = \text{Opp}(\triangle ACZ)$, ligt Z op de zwaartelijn uit A.

Als extraatje krijgen we de verhouding 2 : 1 bijna cadeau. Immers, $\text{Opp}(\triangle ADZ) = \frac{1}{2} \cdot \text{Opp}(\triangle ABZ)$, want $AB = 2 \cdot AD$ (gelijke hoogten).

Dus $2 \cdot \text{Opp}(\triangle ADZ) = \text{Opp}(\triangle ACZ)$.

$\triangle ADZ$ en $\triangle ACZ$ hebben gelijke hoogte (hoogtelijn uit A), dus moet $CZ = 2 \cdot DZ$.

Naschrift

In een gesprek met Martin Kindt naar aanleiding van dit artikel maakte hij mij attent op zijn artikel in de Nieuwe Wiskrant 18/2. Ook daar wordt bij het bewijzen van de zwaartelijnstelling gebruik gemaakt van oppervlakten.

Over de auteur

Bert Boon (e-mail: aw.boon@hccnet.nl) is sinds 1970 verbonden als leraar wiskunde aan het Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag.

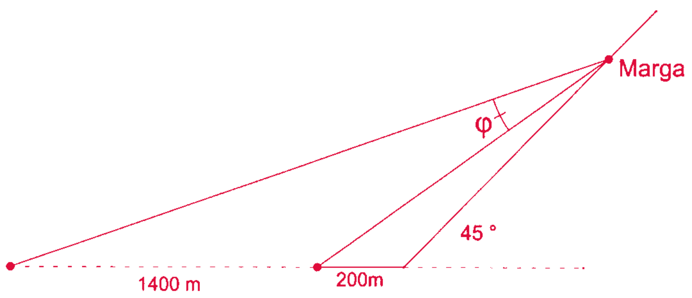
Puzzel 003 Recreatie

Vooraf

Helaas blijft ook in dit nummer de ladder nog in het berghok. Als vervanging plaatsen we ook nu weer een puzzel, nummer 7, van Herman Ligtenberg. Puzzel 8 is eerder gepubliceerd in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 13 (1925-1926).

Puzzel 7

Marga beklimt een heuvel met een helling van 45 graden. Terwijl ze omhoog gaat, merkt ze dat ze uitzicht heeft over een meer dat 1400 m breed is en dat op 200 m afstand ligt van de voet van de heuvel.



Ze vraagt zich af op welke hoogte ze het meer onder de *grootste* hoek kan zien. Dit wil zeggen, dat dan de hoek φ maximaal is.
Kunt u die vraag voor haar beantwoorden?

Puzzel 8

Voor de liefhebbers!

```
x / . . . . . . . . . \ y
    . . . . .
    ______
         . . . .
         . . . .
         _____
         . . . . .
         . . . . .
         ______
               0
```

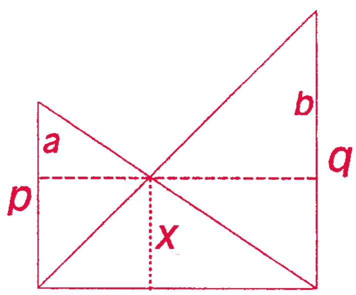
In bovenstaande figuur stellen de punten de cijfers voor van een opgaande deling, waarvan gegeven is dat de deler x een priemgetal is, terwijl van het deeltal het cijfer der honderdtallen een 4 is en de som van de cijfers van het quotiënt y 26 bedraagt.
Bepaal x en y en het deeltal.
Wat komt er uit, als in plaats van het cijfer der honderdtallen dat der tientallen een 4 is?

Puzzel 5

Zuiver algebraïsch is de vraag als volgt op te lossen.
Stel dat Steven voor de taak p minuten nodig heeft en Thomas q minuten.
Als ze *samen* werken, hebben ze nodig:

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{-1}=\frac{pq}{p+q}$$

minuten. Deze tijd noemen we x.
Dus: $pq - px - qx = 0$, waaruit volgt $(p - q)(q - x) = x^2$.
De factoren tussen haakjes geven de tijdwinst aan voor Steven respectievelijk Thomas. De conclusie is dat $x^2 = 20 \times 45 = 900$, dus $x = 30$.
Steven heeft dus, alleen werkend, 50 minuten nodig, Thomas 75 minuten.



De oplossing is ook meetkundig te benaderen. De waarden p, q en x corresponderen elk met een lijnstuk in bovenstaande figuur.

Dit is gemakkelijk te bewijzen met gelijkvormigheid. Vervolgens is na te gaan, dat $a : x = x : b$, of $ab = x^2$.

Puzzel 6

Stel het geboortejaar van de man wordt geschreven als 19AB en dat van zijn buurman als 19CD.
Dan geldt $10A + B + 4(10 + A + B) = 10C + D + 4(10 + C + D)$.
Daaruit volgt dan $14(C - A) = 5(B - D)$, en dat geeft geen bruikbare oplossing. Kennelijk is de man in de 19e eeuw geboren.
Schrijf zijn geboortejaar dan als $18AB$.

Nu geldt $10A + B + 4(9 + A + B) = 100 + 10C + D + 4(10 + C + D)$.
Daaruit volgt $14(A - C) + 5(B - D) = 104$.
De oplossing is $A - C = 6$ en $B - D = 4$.
Het verschil in leeftijd is dan $100 - 10(A - C) - (B - D) = 100 - 60 - 4 = 36$ jaar.
Een mogelijkheid: de man is geboren in 1886. In het jaar 1978 werd hij 92. Zijn buurman is geboren in 1922 en in 1978 werd hij 56.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofd-redacteur. Hieronder treft u de voorlopige verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijnings-data is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
4	18 januari 2002	27 november 2001
5	28 februari 2002	15 januari 2002
6	11 april 2002	26 februari 2002
7	23 mei 2002	08 april 2002
8	24 juni 2002	10 mei 2002

dinsdag 18 december 2001
Studiedag 'De computer in dienst van de wiskunde'
Organisatie RU Groningen

zaterdag 5 januari 2002
Wintersymposium Wiskundig Genootschap, Amersfoort
Zie pagina 85 in dit nummer

vrijdag 18 januari 2002
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

zaterdag 19 (of 26) januari 2002
Mathematische Modelleercompetitie, Maastricht
Organisatie Universiteit Maastricht

dinsdag 22 januari 2002
Studiedag WisWeb applets in de wiskundeles
Organisatie FI en APS

vrijdag 1 en zaterdag 2 februari 2002
Nationale Wiskunde Dagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 22 maart en zaterdag 23 maart 2002
Finale Wiskunde A-lympiade, Garderen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 22 maart 2002
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie KUN, zie Euclides 77-2, p. 54

donderdag 4 en vrijdag 5 april 2002
38e Nederlands Mathematisch Congres, Eindhoven
Organisatie Wiskundig Genootschap

donderdag 25 april 2002
Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs, Utrecht
Organisatie APS en Freudenthal Instituut, zie pagina Euclides 77-2, p. 63

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *http://www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor *ƒ* 400,-
Individueel abonnement voor leden: *ƒ* 75,-
Losse boekjes voor leden: *ƒ* 16,50
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10).
Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten *ƒ* 12,50; in de betere boekhandel *ƒ* 17,75.

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 90 01 65956 X; prijs *ƒ* 15,00; te bestellen in de boekhandel.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).
Leden: *ƒ* 50,-; niet-leden: *ƒ* 62,50 (incl. verzendkosten).
Zie eventueel ook de advertentie in Euclides 76-7 (na p. 288).

Nieuw

Examenbundels wiskunde A en B voor havo

De opgavenbundels wiskunde voor havo zijn herzien! Onder redactie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zijn de bundels afgestemd op de vernieuwde examenprogramma's in de Tweede Fase van het voortgezet onderwijs. Nieuw is de nadrukkelijke aanwezigheid van de grafische rekenmachine in de analyse.

In de A-bundel is volop aandacht voor differentiëren en economische contexten. In het domein Binomiale verdeling ligt de nadruk op de eindtermen die in het Centraal Schriftelijk Examen worden getoetst.

In de B-bundel is ruimtemeetkunde ingeperkt en zijn opgaven over kansrekening en statistiek ingevoerd.

Beide bundels zijn zeer geschikt om zelfstandig mee te werken!

Kortom:

- **Aangepast aan vernieuwde examenprogramma's**
- **Volledige integratie van de grafische rekenmachine**
- **Opgaven per domein gerangschikt**
- **Volledige uitwerkingen**
- **Uitleg van termen die op het examen gebruikt kunnen worden**
- **Recente examens**

De bundels zijn alleen voor rekening leverbaar (bundel A vanaf januari 2002, bundel B vanaf december 2001). Stuur de bon in een gefrankeerde envelop naar Wolters-Noordhoff, tav. Afd. voorlichting Exact, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Bestelcoupon

Ja, ik bestel

___ ex. Oefenopgaven voor examens wiskunde havo A1 en A1,2
à € 12,50 per deel 90 01 65959 4

___ ex. Oefenopgaven voor examens wiskunde havo B1 en B1,2
à € 12,50 per deel 90 01 65957 8

Naam school ____________________

Ter attentie van ____________________

Adres ____________________

Postcode/Plaats ____________________

420/1178

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff

420/1178